"DISEÑO E IMPLEMENTACION DE UN FILTRO DIGITAL EN UN COMPUTADOR DIGITAL"

Tesis previa a la obtención del Título de
Ingeniero en la especialización de Electrónica y Telecomunicaciones
de la Escuela Politécnica Nacional

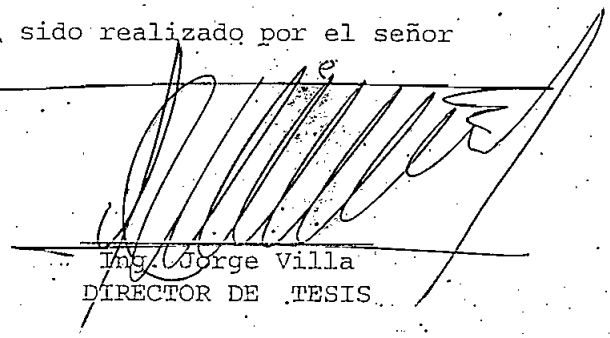
WILSON ANDRADE APUNTE

Quito, Marzo 1983

FACULTAD D.002230 E.P.N.

CERTIFICACION

Certifico que el presente trabajo ha sido realizado por el señor Wilson Andrade, bajo mi dirección.



Ing. Jorge Villa
DIRECTOR DE TESIS

DEDICATORIA

A mis hijos:

DIEGO ESTEBAN, MARIA BELEN

I N D I C E

		Pág.
INTRODUCCION		I
CAPITULO 1.-	INTRODUCCION AL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES	1
1.1	Introducción	1
1.2	Secuencias de Señales Discretas	2
	1.2.1 Secuencia Periódica	5
	1.2.2 Suma y Producto de Secuencias	5
	1.2.3 Multiplicación	6
	1.2.4 Secuencia Retardada	6
1.3	Sistemas lineales de Desplazamiento Invariante	7
	1.3.1 Convolución Suma	8
	1.3.2 Estabilidad	8
	1.3.3 Causalidad	9
	1.3.4 Ecuación Diferencia Lineal de Coeficientes Constantes	9
	1.3.5 Sistemas de Respuesta Finita (FIR)	10
	1.3.6 Sistemas de Respuesta Infinita (IIR)	11
1.4	Representación de Señales Discretas en el dominio de Frecuencia	11
	1.4.1 Par de Transformadas de Fourier	12
	1.4.2 Propiedades Simétricas de la Transformada de Fourier	13
1.5	Muestreo de Señales Continuas en el tiempo	15
	Tabla 1.a	18-1
CAPITULO 2.-	TRANSFORMADA Z	19
2.1	Transformada Z Directa e Inversa	19
2.2	Propiedades	25
	Tabla 2.a	29-1

		Pág.
CAPITULO 3.-	REPRESENTACION MATRICIAL DE FILTROS DIGITALES	30
3.1	Representación de Redes Digitales utilizando grafos de flujo de la señal	30
3.2	Representación Matricial de Redes Digitales	34
3.3	Redes Básicas para Sistemas IIR,FIR	41
	3.3.1 Sistemas IIR	41
	3.3.2 Sistemas FIR	45
CAPITULO 4.-	DISEÑO DE FILTROS DIGITALES	54
4.1	Diseño de Filtros Digitales IIR y FIR	54
	4.1.1 Diseño de Filtros Digitales IIR	56
	4.1.2 Diseño de Filtros Digitales FIR	71
4.2.	Algoritmos para el diseño de Filtros Digitales	79
4.3	Comparación de Filtros Digitales IIR,FIR	85
4.4	Efectos de la longitud finita de los registros en el procesamiento digital de señales	86
CAPITULO 5.-	IMPLEMENTACION DE UN PROGRAMA PARA EL DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL	102
5.1	Descripción de los programas desarrollados	103
5.2	Aplicación de los programas y modo de empleo	117
	5.2.1 Aplicación de los programas	117
	5.2.2 Modo de Empleo	118
CAPITULO 6.-	CONCLUSIONES	122
BIBLIOGRAFIA		
ANEXO 1.-	Listado de los programas	
ANEXO 2.-	Ejemplos de Aplicación	
ANEXO 3.-	Manual de Utilización del Programa	

INTRODUCCION

El procesamiento de señales digitales está relacionado con señales y sistemas discretos en el tiempo, que deben ser procesados para extraer la información que portan, las técnicas de procesamiento generalmente consisten en transformar una señal en otra que en algún sentido es más fácil de manejar que la original.

Siendo el filtro un procesador de señales, que modifica la señal de entrada y obtiene a la salida una señal que reune ciertas características deseadas, es evidente su importancia en el procesamiento de la señal.

Dependiendo de la señal se puede utilizar un filtro analógico o un filtro digital; el filtro digital procesa señales digitales, realiza la misma función que el filtro analógico con señales analógicas, pero con la ventaja de permitir la solución de las dificultades que presenta en muchos casos la implementación de un filtro analógico, mediante el uso de algoritmos a ser procesados en un computador digital.

Al diseñar un filtro digital, el objetivo es el de determinar su función de transferencia, la cual es una función racional en Z^{-1} en el caso de filtros recursivos (IIR) o es un polinomio en Z^{-1} en el caso de filtros no recursivos (FIR).

En el diseño de un filtro se presentan dificultades al tratar de obtener las características de diseño deseadas por lo que frecuentemente

se debe recurrir a algoritmos de diseño que permitan la obtención de dichas características. El presente trabajo tiene por objeto brindar facilidades para el diseño de un filtro digital no recursivo (FIR).

En el Capítulo Primero se presenta un conjunto de conceptos sobre señales discretas que conducirán a la definición de un sistema lineal de desplazamiento invariante, que es la base para la definición de los sistemas FIR, como también lo es para la representación de las señales en el dominio de la frecuencia que posibilitan la definición de la Transformada de Fourier.

La transformada Z ha sido tratada exhaustivamente en otras Tesis, en el Capítulo Segundo se realiza un breve estudio de los conceptos y propiedades de la Transformada Z en cuanto están relacionadas con el procesamiento de las señales digitales.

En el Capítulo Tercero se trata sobre la representación de las señales digitales utilizando grafos de flujo que originan ecuaciones lineales que facilitan la representación matricial de las señales digitales. También se presentan las principales redes básicas tanto para los sistemas digitales cuya respuesta a una función impulso unitaria es infinita (IIR) como para los sistema digitales cuya respuesta a una función impulso unitaria es finita (FIR); redes básicas que permiten obtener elementos de juicio para el escogitamiento de una de las dos clases de sistemas digitales.

En el Capítulo Cuarto se presenta el diseño de filtros digitales IIR

haciendo uso de los diferentes procedimientos de transformación que existen para obtener el filtro digital a partir de un filtro analógico.

Se presentan también los métodos más comunes de diseño para los filtros digitales FIR, en especial el método de la mejor aproximación que sirve como base para el desarrollo del programa a implementarse.

Se hace mención a ciertos algoritmos que se pueden emplear tanto para el diseño de filtros digitales IIR, como para el diseño de filtros digitales FIR.

Se realiza una comparación entre los filtros digitales IIR y FIR, al igual que se presentan los efectos que causan en el procesamiento digital de señales la longitud finita de los registros, como son los errores de cuantización.

En el Capítulo Quinto se presenta una descripción del programa que se basa en el método de la mejor aproximación presentado en el Capítulo Cuarto, el cual ha sido desarrollado en lenguaje FORTRAN IV y catalogado en el sistema IBM 370/125 de la Escuela Politécnica Nacional.

El programa ha sido elaborado para permitir el diseño de un filtro digital (FIR) selectivo de frecuencia con fase lineal , que contenga 10 bandas de frecuencia, una longitud de filtro igual a 128; permite obtener la respuesta a la función impulso unitaria, obtener la respuesta de frecuencia del filtro y su grafización.

En base a un ejemplo de aplicación se hicieron variaciones en los parámetros de entrada y los resultados obtenidos permitieron demostrar la facilidad y flexibilidad que tiene el programa para variar los parámetros de entrada lo que permite contar con más elementos de juicio para obtener un mejor diseño.

Finalmente deseo expresar mi agradecimiento por la exelente labor realizada como Director de Tesis al señor Ing. Jorge Villa, quien no solamente atendió mis inquietudes, colaboró y me orientó en el desarrollo de la Tesis, sino que supo brindarme su sincera amistad por lo que compromete mi gratitud y reconocimiento.

Deseo también dejar constancia de mi agradecimiento a la Escuela Politécnica Nacional, a todo su personal de Profesores quienes me brindaron sus enseñanzas.

CAPITULO PRIMERO

1. INTRODUCCION AL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

1.1. INTRODUCCION

Una señal puede definirse como una función que lleva información acerca del estado o comportamiento de un sistema físico. Dichas señales son representadas matemáticamente como funciones de una o más variables independientes, estas variables pueden ser contínuas o discretas.

Las señales discretas se definen en tiempos discretos o sea que la variable independiente puede tomar únicamente valores discretos, su representación está dada como una secuencia de números. Señales digitales son aquellas en que tanto el tiempo como la amplitud son discretos.

Estas señales digitales deben ser procesadas para extraer la información que portan, por lo que el desarrollo de las técnicas de procesamiento de la señal y de los sistemas son de gran importancia. Las técnicas de procesamiento generalmente consisten en transformar una señal en otra que en algún sentido es más fácil de manejar que la original. Los sistemas de procesamiento de la señal se refieren a sistemas discretos en el tiempo, en los cuales la entrada y la salida son señales discretas en el tiempo. Y sistemas digitales son aquellos en los cuales la entrada y la salida son señales digitales.

Estos sistemas facilitan el desarrollo de programas (SOFTWARE) que pueden ser implementados con gran flexibilidad en un computador digital, o con elementos discretos o integrados (HARDWARE) y con ellos se pueden simular sistemas analógicos o realizar la transformación de una señal cuya realización con elementos analógicos o discretos sea muy difícil o imposible.

Las señales discretas pueden obtenerse por muestreo de una señal contínua, o generarse directamente por algún proceso discreto.

Cabe señalar que no todas las señales discretas se obtienen del muestreo de señales contínuas en el tiempo y que tampoco son simples aproximaciones de los sistemas analógicos, por lo que se han desarrollado principios fundamentales de las señales discretas y de sus sistemas de procesamiento, en el presente trabajo se hará referencia a señales unidimensionales y a sistemas lineales discretos en el tiempo de desplazamiento invariante.

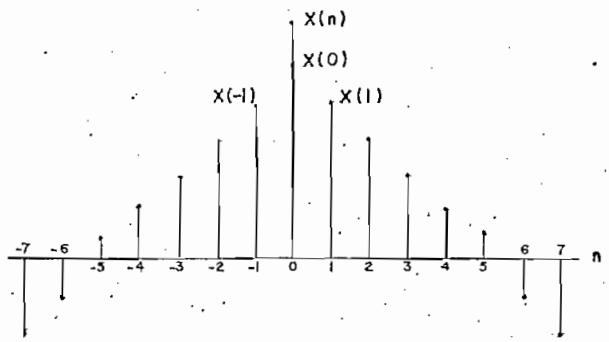
1.2. SECUENCIAS DE SEÑALES DISCRETAS

La teoría de sistemas discretos en el tiempo se realiza con el procesamiento de señales que son representadas por secuencias. Una secuencia de números "x", en la cual el enésimo elemento es x(n) se representa por:

$$x = \{x(n)\}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.2.1}$$

Esta secuencia se representa en la figura 1.1, es importante anotar

que x(n) se define solamente para valores enteros de "n" y que para un valor no entero de "n" la secuencia x(n) no es igual a cero.



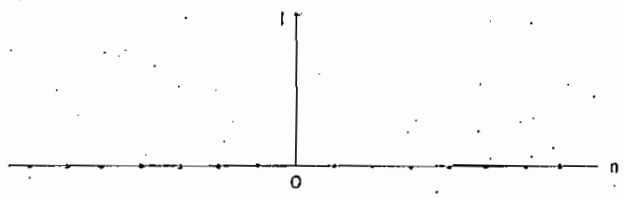
(Fig. 1.1)

Entre los tipos de secuencia más importante se pueden señalar los siguientes:

a.- Secuencia Impulso $\delta(n)$, o secuencia impulso unitaria se define como:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases} \qquad (1.2.2)$$

Siendo su representación gráfica la siguiente:



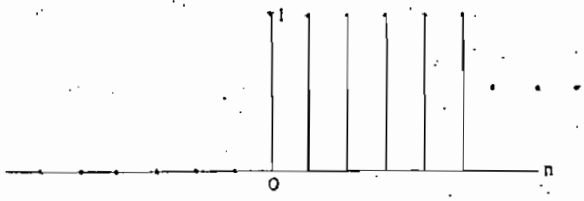
(Fig. 1.2)

b.- Secuencia Paso u(n)

se define por:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

Y su representación es:



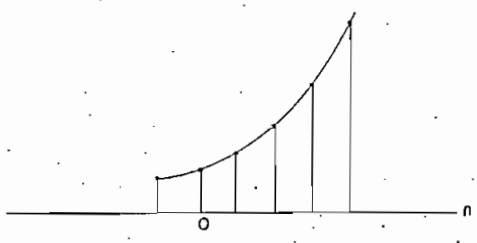
(Fig. 1.3)

c.- Secuencia Exponencial Real

Sus valores son de la forma:

$$x(n) = a^n, \text{ donde "a" es un número real} \qquad (1.2.4)$$

Gráficamente se representa por:



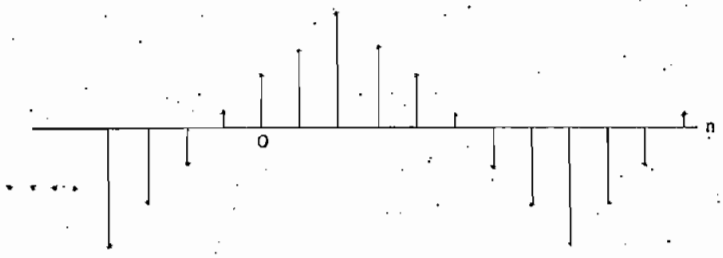
(Fig. 1.4)

d.- Secuencia Sinusoidal

Sus valores son de la forma:

$$x(n) = A \cos (w_o n + \phi) \qquad (1.2.5)$$

Su representación es:



(Fig. 1.5)

En relación a las secuencias es importante anotar los siguientes conceptos;

1.2.1 Secuencia Periódica. $x(n)$ es periódica si para todos los valores de "n" se cumple que:

$$x(n) = x(n + N) \quad \text{donde N es el período}$$

1.2.2 Suma y Producto de Secuencias. El producto o la suma de secuencias "x" y "y" se definen como el producto o la suma muestra a muestra respectivamente:

$$x.y = x(n) \cdot y(n)$$

$$x + y = x(n) + y(n)$$

1.2.3 Multiplicación. La multiplicación de una secuencia por un número "α" se define como:

$$\alpha \cdot x = x(n)$$

1.2.4 Secuencia Retardada. Una secuencia "y" es retardada o desplazada de una secuencia "x" si sus elementos toman los valores de:

$$y(n) = x(n-n_0) \qquad \text{donde } n_0 \text{ es un entero}$$

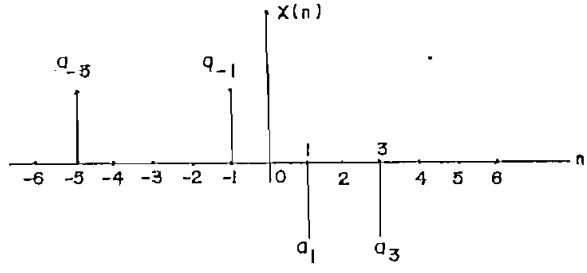
Una secuencia arbitraria puede ser expresada como la suma de muestras unidad escaladas y retardadas, cuya expresión en forma general es:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k) \qquad (1.2.6)$$

Ejemplo:

$$x(n) = a_{-5}\delta(n+5) + a_{-1}\delta(n+1) + a_{+1}\delta(n-1) + a_{+3}\delta(n-3)$$

y su gráfico es:



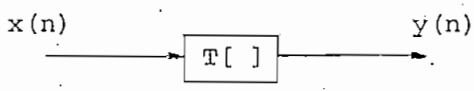
(Fig. 1.6)

1.3. SISTEMAS LINEALES DE DESPLAZAMIENTO INVARIANTE

Un sistema se define matemáticamente como la transformación única que relaciona a la secuencia de entrada con la salida. Se expresa como:

$$y(n) = T[x(n)] \tag{1.3.1}$$

Gráficamente se representa por:



(Fig. 1.7)

Entre las clases de sistemas discretos se tienen los sistemas lineales de desplazamiento invariante. Un sistema lineal está definido por el principio de superposición, el cual expresa que:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \tag{1.3.2}$$

donde: $x_1(n)$, $x_2(n)$ entradas a un sistema.

$y_1(n)$, $y_2(n)$ respuestas del sistema si a la entrada se aplica x_1 y x_2, respectivamente.

a , b constantes arbitrarias.

De la ecuación (1.2.6) se desprende que un sistema lineal puede estar definido por su respuesta a una secuencia impulso unitaria; si se define $h_k(n)$ como la respuesta del sistema a una secuencia $\delta(n - k)$ para $n = k$,

de las ecuaciones (1.2.6) y (1.3.1) se obtiene lo siguiente:

$$y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \qquad (1.3.3)$$

1.3.1 Convolución Suma. Un sistema de desplazamiento invariante se caracteriza por la propiedad de que si "y(n)" es la respuesta a "x(n)", entonces "y(n - k)" es la respuesta a "x(n - k)" siendo k un entero positivo o negativo, en consecuencia si "h(n)" es la respuesta a "δ(n - k)" es "h(n - k)" por lo que la ecuación (1.3.3) se transforma en:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \qquad (1.3.4)$$

Esta ecuación se la conoce como "CONVOLUCION SUMA".

Una clase más restringida de sistemas lineales de desplazamiento invariante se tiene con las definiciones de estabilidad y causalidad.

1.3.2 Estabilidad. Un sistema es estable si es que cualquier entrada finita origina una salida finita.

Los sistemas lineales de desplazamiento invariante son estables si se cumple que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \qquad (1.3.5)$$

1.3.3 Causalidad. Un sistema es causal si es que la salida para $n = n_0$ depende solamente de los valores aplicados a la entrada en $n \leqq n_0$.

Los sistemas de desplazamiento invariante son causales si es que la respuesta a una excitación impulso unitaria es igual a cero para valores de $n < o$.

$$h(n) = 0, \quad \text{para cualquier } n < 0.$$

1.3.4 Ecuación Diferencia Lineal de Coeficientes Constantes. Existe una subclase de sistemas lineales de desplazamiento invariante, que se define por la ecuación diferencia lineal de coeficientes constantes de enésimo orden de la siguiente forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad (1.3.7)$$

Un sistema que satisfaga esta ecuación es un sistema lineal de desplazamiento invariante siempre que se defina la componente que cumple la condición de una ecuación diferencia homo

génea, o sea que el lado derecho de la ecuación diferencia es igual a cero.

Por ejemplo, si el sistema es causal se deben especificar las condiciones iniciales de tal manera que si $x(n) = 0$, para $n < n_0$, se tiene que $y(n) = 0$ para $n < n_0$.

Si se asume que el sistema es causal, la ecuación (1.3.7) proporciona una relación explícita entre la entrada y la salida, la misma que es:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r) \qquad (1.3.8)$$

Esta ecuación indica que el enésimo elemento de la señal de salida puede ser calculado en función del enésimo elemento de la señal de entrada, de los N elementos anteriores a n de la salida y de los M valores anteriores a n de la entrada.

Si a un sistema lineal de desplazamiento invariante se le excita con una secuencia impulso unitaria se puede tener una respuesta de duración finita (FIR) o de duración infinita (IIR).

1.3.5 Sistemas de Respuesta Finita (FIR). Estos sistemas están definidos por la ecuación:

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \right] \qquad (1.3.9)$$

Si en la ecuación (1.3.8) se considera la condición de que N = 0 se obtiene una ecuación similar a la (1.3.9) y al mismo tiempo se observa que el cálculo de y(n) no necesita de algunos valores-muestras de la salida previamente calculados, por lo que a los sistemas FIR se los conoce también como sistemas NO RECURSIVOS.

1.3.6 Sistemas de Respuesta Infinita. Los sistemas IIR están definidos por la ecuación (1.3.8) en la que se observa que para el cálculo de "y(n)" se requiere de algunos valores-muestras de la salida previamente calculados, por lo que a los sistemas IIR se los conoce como sistemas RECURSIVOS.

1.4. REPRESENTACION DE SEÑALES DISCRETAS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA

Una propiedad fundamental de los sistemas lineales de desplazamiento invariante es que la respuesta, en estado estacionario, a una entrada sinusoidal es sinusoidal con la misma frecuencia pero con amplitud y fase determinadas por el sistema.

Esta propiedad permite que la representación de las señales sea en términos de funciones sinusoidales o de exponenciales complejas. Si es que la secuencia aplicada a la entrada de un sistema lineal de desplazamiento invariante es $x(n) = e^{jwn}$, $-\infty < n < \infty$, utilizando la ecuación (1.3.4) se obtiene:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{jw(n-k)} \qquad (1.4.1)$$

donde se define la "respuesta de frecuencia del sistema" como:

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-jwk} \qquad (1.4.2)$$

Esta es la respuesta de frecuencia del sistema cuya respuesta a una excitación impulso es "h(k)", adicionalmente es una función contínua y periódica en "w" con período 2π.

1.4.1 Par de Transformadas de Fourier. Como $H(e^{jw})$ es una función periódica, puede ser representada por una serie de Fourier, donde los coeficientes de Fourier corresponden a "h(k)":

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{jw})\, e^{jwk} dw \qquad (1.4.3)$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-jwk} \qquad (1.4.4)$$

Siendo (1.4.4) la transformada directa de la secuencia "h(k)" y (1.4.3) la transformada inversa.

La condición para que exista esta representación es la de que la serie expresada en (1.4.4) converja.

El hecho de que una secuencia pueda ser representada como la

superposición de exponenciales complejas es de gran importancia en el análisis de sistemas lineales de desplazamiento invariante, esto se debe al principio de superposición y a que la respuesta del sistema a cada exponencial compleja está determinada por (1.4.4).

Cabe anotar que la respuesta del sistema a una secuencia (1.4.4) no está limitada a la secuencia excitación impulso unidad, sino que puede aplicarse a cualquier secuencia que cumpla la condición de convergencia.

Por lo que una secuencia "x(n)" tiene el siguiente par de transformadas de Fourier:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn} \qquad (1.4.5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{jw})\, e^{jwn} dw \qquad (1.4.6)$$

1.4.2 Propiedades Simétricas de la Transformada de Fourier. Una secuencia x(n) puede ser expresada como la suma de una secuencia conjugada simétrica y de una secuencia conjugada antisimétrica, cuya ecuación es:

$$x(n) = x_e(n) + x_0(n) \qquad (1.4.7)$$

donde:

$$x_e(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \qquad (1.4.8)$$

$$x_0(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \qquad (1.4.9)$$

Es importante anotar que una secuencia conjugada simétrica cumple la siguiente condición:

$$x_e(n) = x_e^*(-n)$$

y que una secuencia conjugada antisimétrica satisface la condición:

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

Igualmente una transformada de Fourier $X(e^{jw})$ puede ser descompuesta en la suma de una función conjugada simétrica y una función conjugada antisimétrica, siendo su ecuación:

$$X(e^{jw}) = X_e(e^{jw}) + X_0(e^{jw}) \qquad (1.4.10)$$

donde:

$$X_e(e^{jw}) = \tfrac{1}{2}[X(e^{jw}) + X^*(e^{-jw})] \qquad (1.4.11)$$

$$X_0(e^{jw}) = \tfrac{1}{2}[X(e^{jw}) - X^*(e^{-jw})] \qquad (1.4.12)$$

Anotando que la función conjugada simétrica cumple la siguiente condición:

$$X_e(e^{jw}) = X_e^*(e^{-jw})$$

y la función conjugada antisimétrica satisface la condición:

$$X_0(e^{jw}) = -X_0^*(e^{-jw})$$

Lo anterior sirve de punto de partida para el desarrollo de las propiedades simétricas de la transformada de Fourier, propiedades que son presentadas en la Tabla 1.a.

1.5. MUESTREO DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO

A menudo las señales discretas en el tiempo se obtienen de las señales contínuas por medio de muestreos periódicos, por lo que es importante analizar de qué manera la secuencia así derivada está relacionada con la señal original.

Se considera la señal analógica "$x_a(t)$" la misma que tiene la siguiente representación Fourier:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega)\ e^{j\Omega t}d\Omega \qquad (1.5.1)$$

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\ e^{-j\Omega t}dt \qquad (1.5.2)$$

Si se realiza el muestreo periódico, con período T, a la señal $x_a(t)$, se obtiene la secuencia $x(n)$, igual a:

$$x(n) = x_a(nT)$$

De (1.5.1) se tiene:

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega)\ e^{j\Omega nT} d\Omega \qquad (1:5.3)$$

De la transformada de Fourier para una secuencia discreta en el tiempo "x(n)" se obtiene:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\ e^{jwn} dw \qquad (1.5.4)$$

Para relacionar (1.5.3) con (1.5.4) es conveniente expresar la ecuación (1.5.3) como:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\pi/T}^{(2r+1)\pi/T} X_a(j\Omega)\ e^{j\Omega nT} d\Omega$$

Por un cambio de variables se obtiene:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\pi/T}^{\pi/T} X_a(j\Omega + j\frac{2\pi r}{T})\ e^{j\Omega nT}\ e^{j2\pi rn} d\Omega$$

Intercambiando el orden del sumatorio y de la integración se obtiene:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} [\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j\frac{2\pi r}{T})] e^{j\Omega nT} d\Omega$$

Si $\Omega = w/T$ se obtiene:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\frac{jw}{T} + j\frac{2\pi r}{T})]\ e^{jwn} dw$$

Al relacionar con la ecuación (1.5.4) se concluye:

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{w}{T} + j\frac{2\pi r}{T}) \qquad (1.5.5)$$

La ecuación (1.5.5) expresa la relación entre la transformada de Fourier de la señal analógica y la transformada de Fourier de la secuencia derivada por muestreo.

Es razonable esperar que la secuencia analógica "$x_a(t)$" pueda ser recuperada de las muestras "$x_a(nT)$", por medio de una fórmula de interpolación, para lo cual:

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \qquad -\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T \tag{1.5.6}$$

Combinando (1.5.6) con (1.5.1) se obtiene:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} TX(e^{j\Omega T}) \; e^{j\Omega t} d\Omega$$

Puesto que:

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \; e^{-j\Omega Tk}$$

sigue que:

$$x_a(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \; e^{-j\Omega Tk} \right] e^{j\Omega t} d\Omega$$

Intercambiando el orden del sumatorio y de la integral, y evaluando esta última se concluye que:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \; \frac{\text{sen } [(\pi/T)\ (t-kT)]}{(\pi/T)\ (t-kT)} \tag{1.5.7}$$

Con la ecuación (1.5.7) se puede realizar la interpolación para recuperar la señal continua "$x_a(t)$" de sus muestras.

TABLA 1.a

SECUENCIA	TRANSFORMADA DE FOURIER
$x(n)$	$X(e^{jw})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-jw})$
$x^*(-n)$	$X^*(e^{jw})$
$Re\ [x(n)]$	$Xe(e^{jw})$ [conjugada simétrica de $X(e^{jw})$]
$jIm\ [x(n)]$	$X_0\ (e^{jw})$ [conjugada antisimétrica de $X(e^{jw})$]
$x_e(n)$ [conjugada simétrica de $x(n)$]	$Re\ [X(e^{jw})]$
$x_0(n)$ [conjugada antisimétrica de $x(n)$]	$jIm\ [X(e^{jw})]$
Si $x(n)$ es real .	$X(e^{jw}) = X^*(e^{-jw})$ [conjugada simétrica]
	$Re[X(e^{jw})] = Re[X(e^{-jw})]$ [parte real es par]
	$Im[X(e^{jw})] = -Im[X(e^{-jw})]$ [parte imaginaria es impar]
	$\lvert X(e^{jw})\rvert = \lvert X(e^{-jw})\rvert$ [magnitud es par]
	$arg[X(e^{jw})] = -arg[X(e^{-jw})]$ [fase es impar]
$x_e(n)$ [parte par de $x(n)$]	$Re\ [X(e^{jw})]$
$x_0(n)$ [parte impar de $x(n)$]	$jIm\ [X(e^{jw})]$

CAPITULO SEGUNDO

TRANSFORMADA Z

Por ser un tema ampliamente tratado en otras tesis, se hará referencia de lo necesario en el presente trabajo.

2.1. TRANSFORMADA Z DIRECTA E INVERSA

La generalización de la transformada de Fourier para señales y sistemas discretos en el tiempo se conoce como la transformada Z, la cual es muy importante para el análisis y para la representación de sistemas lineales de desplazamiento invariante discretos en el tiempo.

La transformada Z de una secuencia x(n) se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (2.1.1)$$

donde Z es una variable compleja.

Si en la ecuación (2.1.1) se expresa la variable compleja Z en forma polar, se obtiene la siguiente ecuación:

$$X(re^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-jwn} \qquad (2.1.2)$$

Esta ecuación puede ser interpretada como la transformada de Fourier de x(n) multiplicada por una secuencia exponencial.

Las series de potencia que representan la transformada de Fourier no convergen para todas las secuencias, similarmente la transformada Z no converge para todas las secuencias o para todos los valores de Z.

El conjunto de valores de Z para los cuales la transformada Z de una secuencia converge, se conoce como la región de convergencia.

La transformada de Fourier converge cuando la secuencia es absolutamente sumable, si este principio se aplica en la ecuación (2.1.2), se obtiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n)\ r^{-n} \right| < \infty \qquad (2.1.3)$$

La ecuación (2.1.3) permite observar la posibilidad de que la transformada Z de una secuencia converja aún cuando no converja su transformada de Fourier.

En general las series de potencia que representan la transformada Z convergen en una región anular en el plano Z. Esta región se define por:

$$R_{x-} < |Z| < R_{x+} \qquad (2.1.4)$$

En la cual R_{x-} puede ser un valor tan pequeño como cero y R_{x+} puede ser un valor tan grande como infinito. En esta región la transformada Z es una función contínua.

Cuando la transformada Z es una función racional, se tiene una relación de polinomios en Z. Las raíces del polinomio-numerador son valores de Z para los cuales la transformada Z es igual a cero y se los conoce como los "CEROS" de la transformada Z; las raíces del polinomio-denominador son aquellos valores de Z para los que la transformada Z es igual a infinito, se los conoce como los "POLOS" de la transformada Z.

Por definición la transformada Z no converge en un polo, en consecuencia no existen polos en el interior de la región de convergencia. Las propiedades de la secuencia x(n) determinan la región de convergencia de X(z), al respecto se consideran los siguientes casos:

a.- Secuencias de Longitud Finita

La secuencia x(n) está definida por valores enteros finitos tales como n_1 y n_2:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)\ z^{-1} \qquad (2.1.5)$$

Su región de convergencia es: $0 < |z| < \infty$

b.- Secuencia de Lado Derecho

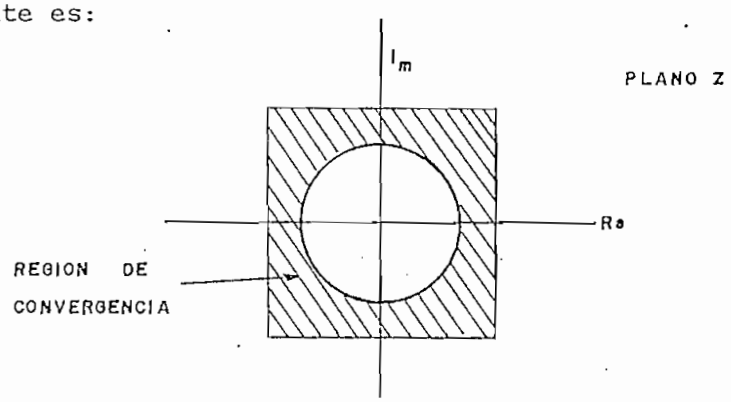
Si la secuencia x(n) cumple que: $x(n) = 0$ para $n < n_1$, se tendrá:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)\ z^{-n} \qquad (2.1.6)$$

Su región de convergencia es el exterior de un círculo, definido por:

$$R_{x-} < |z|$$

Gráficamente es:



(Fig. 2.1)

c.- Secuencia de Lado Izquierdo

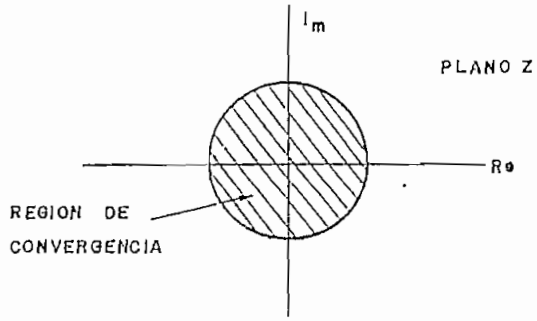
Si la secuencia x(n) cumple que: $x(n) = 0$ para $n > n_2$, entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)\, z^{-n} \qquad (2.1.7)$$

Su región de convergencia es el interior de un círculo, definido por:

$$|z| < R_{x+}$$

Gráficamente es:



(Fig. 2.2)

d.- Secuencia de dos Lados

Si la secuencia x(n) se extiende desde: n = $-\infty$ a n = ∞, se tiene que:

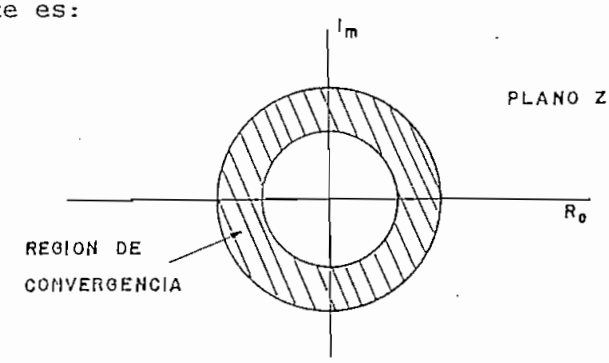
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\ z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\ z^{-n} \qquad (2.1.8)$$

Su región de convergencia es común si es que $R_{x-} < R_{x+}$, definida por

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

Gráficamente es:



(Fig. 2.3)

Se puede obtener la secuencia discreta x(n) a partir de su transformada Z, este proceso es el que se conoce como la Transformada Z Inversa.

Transformada Z Inversa

La transformada inversa puede obtenerse de la siguiente ecuación:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(z)\ z^{n-1} dz \qquad (2.1.9)$$

donde c es un contorno cerrado en sentido contrario a las manecillas del reloj en la región de convergencia de $X(z)$.

La integral del contorno es calculada usando el teorema del residuo, el mismo que da la siguiente relación:

$$x(n) = \Sigma \text{ [residuos de } X(z)\ Z^{n-1} \text{ en cada uno de los polos en el interior del contorno c]}$$

En general $X(z)\ Z^{n-1}$ es una función racional de Z, por lo que puede ser expresada como:

$$X(z)\ Z^{n-1} = \frac{x(z)}{(z-z_0)^s} \qquad (2.1.10)$$

Para un polo de primer orden se tendría:

$$\underset{z=z_0}{\text{Residuo}} \left[X(z)\ Z^{n-1}\right] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{(z-z_0)\ x(z)}{(z-z_0)}\right] = x(z_0) \qquad (2.1.11)$$

Para polos de orden s:

$$\underset{z=z_0}{\text{Residuo}} \left[X(z)\ Z^{n-1}\right] = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \left[\frac{(z-z_0)\ x(z)}{(z-z_0)^s}\right] \qquad (2.1.12)$$

Si la transformada Z se expresa en series de potencia, el valor de la secuencia $x(n)$ es igual al coeficiente del término z^{-n}. Así, la expansión en series de potencia de la transformada Z, expresada como una función racional, se logra por la división entre el numerador y el denominador.

Se presenta el siguiente ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \quad |z| > a$$

Su división da como resultado:

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots\ldots a^nz^{-n}$$

Siendo su transformada inversa:

$$x(n) = a^n u(n)$$

Otra técnica utilizada para calcular la transformada Z inversa es la expansión en fracciones parciales de la transformada Z y se identifica la transformada inversa de Z de los términos más simples. Por ejemplo si X(z) es una función racional, con el numerador de menor grado que el denominador, se puede expresar en fracciones parciales de la siguiente manera:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z-z_k}$$

donde los valores z_k son los polos de X(z) y los valores A_k son los residuos de los polos.

002230

2.2. PROPIEDADES

Se anotó que en la región de convergencia no existen polos ya que la transformada Z no converge en un polo, a lo que se añade que la región de convergencia está limitada por polos, por el valor cero o por el valor in

finito en el plano Z.

Las principales propiedades de la transformada Z son:

a.- Linealidad

Si se consideran dos secuencias x(n) y y(n), con transformadas Z iguales a X(z) y Y(z) respectivamente, se tiene:

$$z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + by(z), \quad R_- < |z| < R_+ \qquad (2.2.1)$$

b.- Desplazamiento de una secuencia

Si se tiene una secuencia x(n), con su transformada Z igual a X(z), para una secuencia $x(n + n_o)$ se tiene:

$$z[x(n + n_0)] = z^{n_o} X(z), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \qquad (2.2.2)$$

c.- Multiplicación por una secuencia exponencial

Si la secuencia x(n) se multiplica por una secuencia exponencial a^n, donde "a" puede ser compleja, se tiene:

$$z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z), \quad |a| R_{x-} < |z| < |a| R_{x+} \qquad (2.2.3)$$

d.- Diferenciación de la Transformada Z

Se tiene:

$$z[nx(n)] = -z \frac{d\, x(z)}{dz} \qquad (2.2.4)$$

e.- Conjugada de una Secuencia Compleja

De la definición de la transformada Z se tiene:

$$z[x^*(n)] = X^*(z^*), \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \tag{2.2.5}$$

f.- Teorema del Valor Inicial

Si $x(n)$ es cero para $n < 0$, se tiene:

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) \tag{2.2.6}$$

g.- Convolución de Secuencias

Si $w(n)$ es la convolución de dos secuencias $x(n)$ y $y(n)$, la transformada Z de $w(n)$ es igual al producto de las transformadas de $x(n)$ y $y(n)$.

Si $$w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ y\ (n - k)$$

se tiene:

$$W(z) = X(z)\ Y(z); \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}, \ R_{x-} < |z| < R_{x+} \tag{2.2.7}$$

h.- Convolución Compleja

La transformada Z del producto de dos secuencias puede ser formada usando la convolución compleja.

Si $$w(n) = x(n)\ y(n)$$

se tiene:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c_2} X(v)\ y(\frac{z}{v})\ v^{-1} dv \tag{2.2.8}$$

donde c_2 es un contorno cerrado en la región común de convergencia de

$X(v)$ y $Y(z/v)$.

Para que (2.2.8) sea similar en forma a la convolución se realizan las siguientes sustituciones:

$$v = \rho e^{j\theta}, \quad z = re^{j\phi}$$

en consecuencia:

$$W(re^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y[\frac{r}{\rho} e^{j(\phi-\theta)}] \; X(\rho e^{j\theta}) d\theta \qquad (2.2.9)$$

La principal dificultad al usar este teorema es el de determinar cuales polos están en el interior del contorno de integración.

Es importante anotar que el sistema lineal de desplazamiento invariante puede ser definido por la transformada Z de la respuesta del sistema a una excitación impulso unitaria, conocida como "FUNCION DEL SISTEMA" $H(z)$, en consecuencia la relación entrada - salida del sistema es:

$$Y(z) = X(z) \quad H(z) \qquad (2.2.10)$$

La función del sistema evaluada sobre un círculo cuyo radio sea la unidad, esto es: $|z| = 1$, es la respuesta de frecuencia del sistema.

El sistema es estable y causal siempre que la región de convergencia incluya al círculo unidad.

En el caso de sistemas definidos por una ecuación de diferencias lineal de coeficientes constantes, se tiene que la función del sistema es

una relación de polinomios y viene dada por:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad (2.2.11)$$

La región de convergencia de la función del sistema está relacionada con regiones anulares limitadas por polos pero no conteniéndolos.

En la Tabla 2.a se presentan algunas de las propiedades de la transformada Z, acompañadas de su región de convergencia.

TABLA 2.a

SECUENCIA	TRANSFORMADA Z	REGION DE CONVERGENCIA
$x(n)$	$X(z)$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$y(n)$	$Y(z)$	$R_{y-} < \|z\| < R_{y+}$
$ax(n) + by(n)$	$aX(z) + bY(z)$	$\max [R_{x-}, R_{y-}] < \|z\| < \min [R_{x+}, R_{y+}]$
$x(n + n_0)$	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1} z)$	$\|a\| R_{x-} < \|z\| < \|a\| R_{x+}$
$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$x(-n)$	$X(1/z)$	$1/R_{x+} < \|z\| < 1/R_{x-}$
$\mathrm{Re}\,[x(n)]$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$\mathrm{Im}\,[x(n)]$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	$R_{x-} < \|z\| < R_{x+}$
$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	$\max [R_{x-}, R_{y-}] < \|z\| < \min [R_{x+}, R_{y+}]$
$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y(\frac{z}{v}) v^{-1} dv$	$R_{x-} R_{y-} < \|z\| < R_{x+} R_{y+}$

CAPITULO TERCERO

REPRESENTACION MATRICIAL DE FILTROS DIGITALES

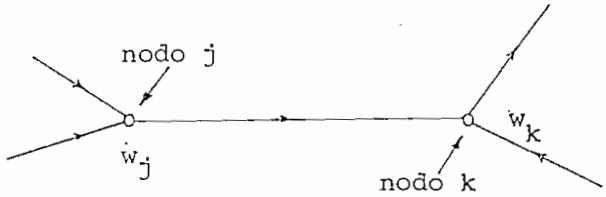
3.1. REPRESENTACION DE REDES DIGITALES UTILIZANDO GRAFOS DE FLUJO DE LA SEÑAL

En el diseño de un filtro digital, la relación entrada-salida debe ser convertida a un algoritmo, el mismo que es definido por operaciones básicas tales como: adición, retardo, y multiplicación por una constante.

La descripción de los filtros se puede hacer por diagramas de bloque, grafos de flujo o por notación matricial.

Un grafo de flujo está conformado por ramas direccionadas que conectan a los nodos.

Si se observa la figura 3.1 se tiene que la rama (jk) empieza en el nodo j y termina en el nodo k, por lo que cada rama tiene una señal de entrada y una señal de salida.



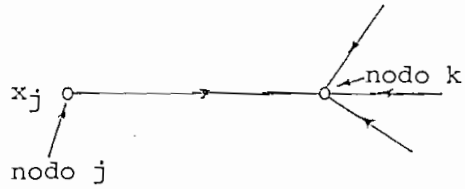
(Fig. 3.1)

El valor del nodo k es w_k, la señal de salida desde la rama jk al nodo k es v_{jk} y la relación entre la rama de salida y la rama de entrada es:

$$v_{jk} = f_{jk}\,[w_j] \qquad (3.1.1)$$

f_{jk} establece la transformación de una rama de entrada en una rama de salida.

Adicionalmente se tiene que los nodos fuente son entradas externas que no tienen ramas de entrada, esta definición se puede observar en la figura 3.2, en la que se tiene que el nodo fuente asociado con el nodo j se define como x_j y que la salida desde el nodo fuente j al nodo k se define como s_{jk}.



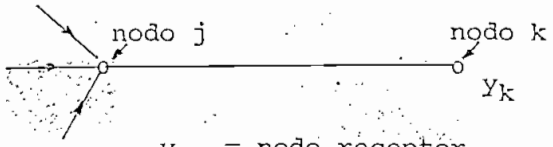
x_j = nodo fuente

s_{jk} = salida de j-k

(Fig. 3.2)

Así como las entradas a un grafo de flujo se pueden obtener desde un nodo fuente, las salidas desde el grafo de flujo se pueden extraer desde los nodos receptores, los cuales sólo tienen ramas de entrada.

En el gráfico 3.3 se puede observar que el nodo de salida asociado con el nodo k se define como y_k, y la salida desde el nodo j al nodo k se define por r_{jk}.



y_n = nodo receptor

r_{jk} = salida de j-k

(Fig. 3.3)

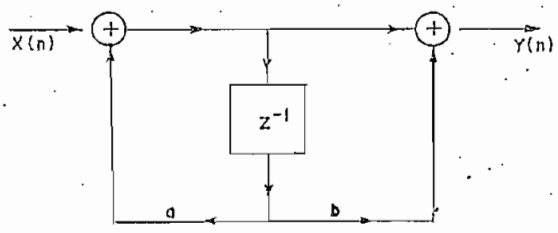
Por definición, el valor en cada nodo está dado por la suma de las salidas de todas las ramas que ingresan al nodo.

Si se asume un grafo de flujo de N nodos (1,2, ... N), de los cuales M nodos son fuente (1,2,3, ... M) y P nodos son receptores (1,2,3, ... P), se tiene que su relación está dada por las siguientes ecuaciones:

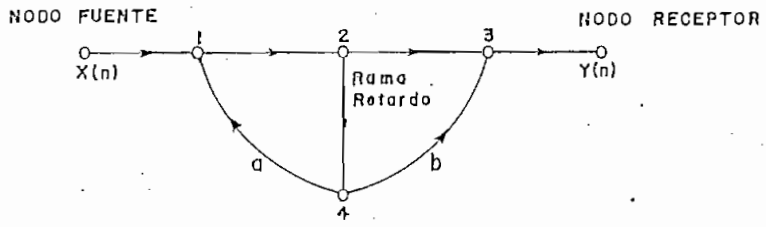
$$w_k = \sum_{j=1}^{N} v_{jk} + \sum_{j=1}^{M} s_{jk} \qquad k = 1,2, \ldots N \qquad (3.1.2)$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{P} r_{jk} \qquad K = 1,2, \ldots P \qquad (3.1.3)$$

Como aplicación de estas ecuaciones se considera el diagrama de bloque de un filtro digital de primer orden representado en la figura 3.4 y su correspondiente grafo de flujo en la figura 3.5.



(Fig. 3.4)



(Fig. 3.5)

Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$w_1(n) = s_{11}(n) + v_{41}(n)$$

$$w_2(n) = v_{12}(n)$$

$$w_3(n) = v_{23}(n) + v_{43}(n)$$

$$w_4(n) = v_{24}(n)$$

$$y(n) = w_3(n)$$

Y las ramas de salida están dadas por:

$$s_{11}(n) = x(n)$$

$$v_{12}(n) = f_{12}(w_1) = w_1(n)$$

$$v_{23}(n) = f_{23}(w_2) = w_2(n)$$

$$v_{43}(n) = f_{43}(w_4) = b\ w_4(n)$$

$$v_{41}(n) = f_{41}(w_4) = a\ w_4(n)$$

$$v_{24}(n) = f_{24}(w_2) = w_2(n-1) \longrightarrow \text{retardo}$$

$$y(n) = w_3(n)$$

Estas ecuaciones pueden ser resueltas para y(n) y se obtiene la siguiente ecuación diferencia de primer orden:

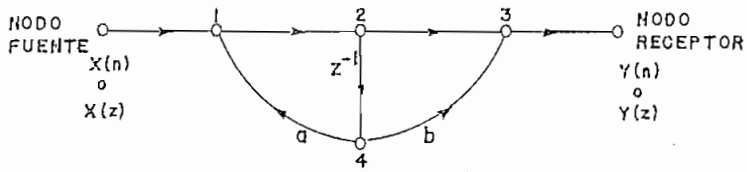
$$y(n) = a\ y(n-1) + x(n) + b\ x(n-1)$$

Las ecuaciones de las ramas de salida son el resultado de multiplicar la señal de entrada por una constante, conocido como "transmitancia", a excepción de la rama (2,4), la cual está representada por el operador de retardo z^{-1}, e implica un retardo unidad de la secuencia de entrada.

En el caso de sistemas lineales discretos de desplazamiento invariante definidos por ecuaciones diferencias (1.3.4), el grafo de flujo puede representarse con las transformadas z, en cuyo caso cada rama se define por su función de transferencia, siendo su ecuación:

$$V_{jk}(z) = F_{jk}(z)\ W_j(z) \qquad (3.1.4)$$

El grafo de flujo es:



(Fig. 3.6)

Los grafos de flujo no solamente tienen el propósito de representar gráficamente un sistema discreto en el tiempo sino también que posibilitan el análisis del mismo al manipular su representación gráfica.

3.2. REPRESENTACION MATRICIAL DE REDES DIGITALES

Cuando todas las ramas de un grafo de flujo pueden se representadas por transmitancias, las ecuaciones que se obtienen del grafo de flujo son

lineales y la manipulación del grafo es equivalente a manipular estas ecuaciones.

Las ecuaciones (3.1.2) y (3.1.3) expresadas en términos de la transformada z, son:

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^{N} V_{jk}(z) + \sum_{j=1}^{M} S_{jk}(z) \quad , \quad k = 1,2, \ldots N \qquad (3.2.1)$$

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^{N} R_{jk}(z) \quad , \quad k = 1,2, \ldots P \qquad (3.2.2)$$

Es conveniente asumir que las ramas desde los nodos fuente a los nodos del circuito, y desde éstos a los nodos receptores tienen una transmitancia que es constante, independiente de z, entonces las ramas se expresan como:

$$V_{jk}(z) = F_{jk}(z)\ W_j(z) \qquad (3.2.3)$$

$$S_{jk}(z) = b_{jk}\ X_j(z) \qquad (3.2.4)$$

$$R_{jk}(z) = c_{jk}\ W_j(z) \qquad (3.2.5)$$

Substituyendo en las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.2) se tiene:

$$W_k(z) = \sum_{j=1}^{N} F_{jk}(z)\ W_j(z) + \sum_{j=1}^{M} b_{jk}\ X_j(z) \qquad (3.2.6)$$

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^{N} c_{jk}\ W_j(z) \qquad (3.2.7)$$

Y en forma matricial:

$$W(z) = F^T(z)\ W(z) + B^T\ X(z) \tag{3.2.8}$$

$$Y(z) = C^T\ W(z) \tag{3.2.9}$$

W(z) puede ser resuelta por el método de la matriz inversa, partiendo de la ecuación (3.2.8) se obtiene:

$$W(z)\ [1 - F^T(z)] = B^T\ X(z)$$

1 puede ser reemplazado por la matriz unitaria "I", entonces:

$$W(z)\ [I - F^T(z)] = B^T\ X(z)$$

$$W(z) = \frac{B^T\ X(z)}{(I - F^T(z)]}$$

$$W(z) = [I - F^T(z)]^{-1}\ B^T\ X(z) \tag{3.2.10}$$

Si $$T^T(z) = [I - F^T(z)]^{-1}\ B^T \tag{3.2.11}$$

se tendría: $$W(z) = T^T(z)\ X(z) \tag{3.2.12}$$

donde $T^T(z)$ es conocida como la "matriz función de transferencia del sistema".

Es conveniente separar los elementos de la matriz F^T en aquellos que no tienen retardo (F_c^T) y en los que lo tienen (F_d^T), en consecuencia:

$$F^T(z) = F_c^T + z^{-1}\ F_d^T \tag{3.2.13}$$

si se aplica a la ecuación (3.2.8) se tiene:

$$W(z) = F_c^T W(z) + z^{-1} F_d^T W(z) + B^T X(z) \qquad (3.2.14)$$

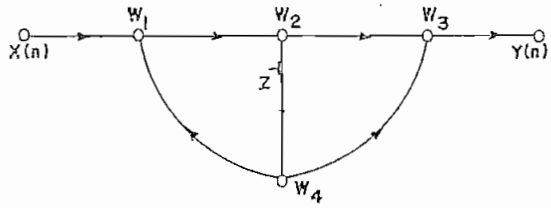
$$Y(z) = C^T W(z) \qquad (3.2.15)$$

La transformada inversa será:

$$W(n) = F_c^T W(n) + F_d^T W(n-1) + B^T X(n) \qquad (3.2.16)$$

$$Y(n) = C^T W(n) \qquad (3.2.17)$$

En el siguiente grafo de flujo se observa cómo estas ecuaciones dependen del orden en el cual están numerados los nodos.



(Fig. 3.7)

Las ecuaciones en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} W_1(n) \\ W_2(n) \\ W_3(n) \\ W_4(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1(n) \\ W_2(n) \\ W_3(n) \\ W_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1(n-1) \\ W_2(n-1) \\ W_3(n-1) \\ W_4(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [X(n)]$$

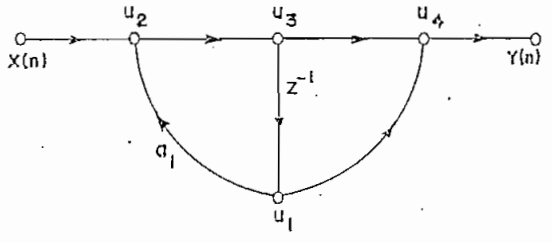
$$Y(n) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} W_1(n) \\ W_2(n) \\ W_3(n) \\ W_4(n) \end{bmatrix}$$

donde:

$$F_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \qquad F_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se cambia el orden de numeración de los nodos del grafo de flujo 3.7 se tiene:



(Fig. 3.8)

Las ecuaciones en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \\ u_3(n-1) \\ u_4(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [x(n)]$$

$$y(n) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \\ u_4(n) \end{bmatrix}$$

En las ecuaciones del grafo de flujo de la figura 3.7 las variables de los nodos no pueden ser generadas en secuencia, pero si puede ser modificado el grafo de flujo para que los nodos puedan ser calculados en secuencia, en este caso el grafo de flujo modificado se presenta en la figura 3.8.

En muchos casos no es posible ordenar el grafo de flujo para que las variables de los nodos sean calculadas en secuencia, por lo que se denomina al grafo de flujo como "NO COMPUTABLE", esto no significa que no pueda ser resuelto directamente, ni sucesivamente para cada variable de los nodos.

Condición necesaria y suficiente para que un grafo de flujo sea "COMPUTABLE", es que los nodos puedan ser numerados de tal manera que la ma-

triz F_c^T tenga solamente elementos cero tanto sobre la diagonal principal como en la diagonal principal, tal es el caso del grafo de flujo 3.8.

Las ecuaciones del grafo de flujo de la figura 3.8 se las obtienen cambiando de posición los nodos del grafo de flujo de la figura 3.7, en forma matricial se logra por una transformación lineal del vector w(n), en el vector u(n), en consecuencia:

$$u(n) = P\ w(n) \tag{3.2.18}$$

donde P es una matriz no singular y en el ejemplo es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en forma más general:

$$w(n) = P^{-1}\ u(n) \tag{3.2.19}$$

y al reemplazar en las ecuaciones (3.2.16) y (3.2.17) se tiene:

$$u(n) = P\ F_c^T\ P^{-1}\ u(n) + P\ F_d^T\ P^{-1}\ u(n-1) + P\ B^T\ x(n) \tag{3.2.20}$$

$$y(n) = C^T\ P^{-1}\ u(n) \tag{3.2.21}$$

las cuales corresponden a un grafo de flujo diferente pero tienen la misma relación salida-entrada.

3.3. REDES BASICAS PARA SISTEMAS IIR, FIR

Para el escogitamiento de una red básica se tiene en cuenta la complejidad en la computación. La operación multiplicación consume tiempo y cada elemento de retardo corresponde al uso de un registro de memoria, es deseable una reducción en el número de multiplicaciones con lo que se incrementaría en velocidad, y una reducción en el número de retardos reduciría los requerimientos de memoria.

El efecto de los registros de longitud finita se debe considerar para la realización en hardware de filtros digitales, a veces es deseable usar una red que no tenga el número mínimo de multiplicaciones y retardos pero que sea menos sensible a los efectos de los registros de longitud finita.

3.3.1 Sistemas IIR. Para los sistemas IIR tenemos las siguientes redes o estructuras básicas.

a.- Forma Directa.

Cuando la ecuación diferencia puede ser escrita directamente por inspección de la función de transferencia del sistema, el circuito corresponde a la realización de la FORMA DIRECTA I.

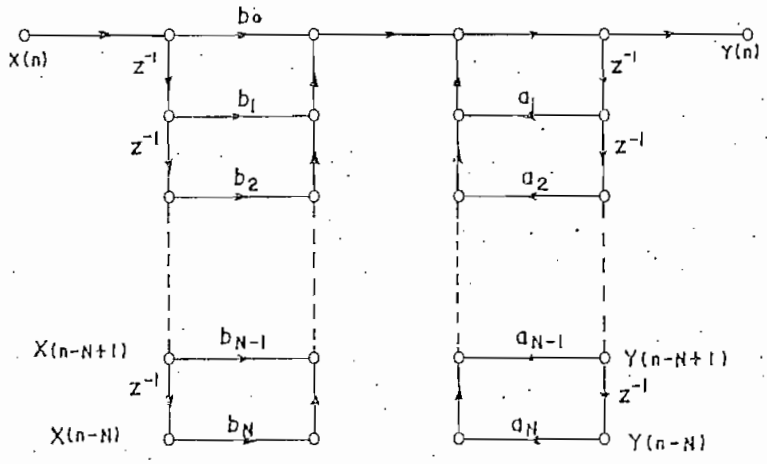
En la siguiente función del sistema:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad (3.3.1)$$

que corresponde a la siguiente ecuación diferencia:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) \qquad (3.3.2)$$

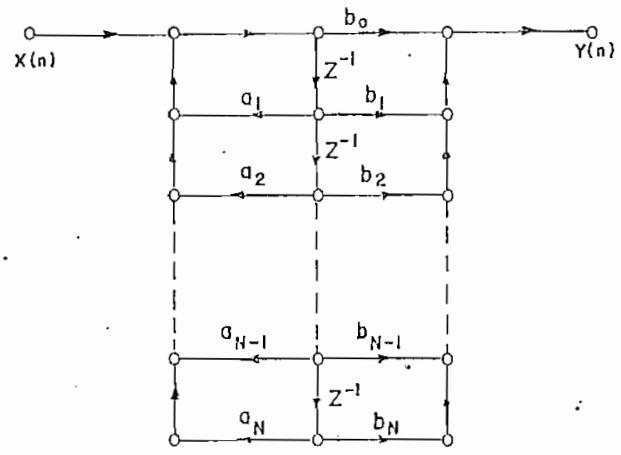
gráficamente será:



(Fig. 3.9)

El circuito de la figura 3.9 se puede considerar como dos circuitos en cascada, en la que el primero realiza los ceros y el segundo los polos de la función del sistema.

En el caso de sistemas lineales de desplazamiento invariante, el orden en la cual estén los subsistemas en la cascada es independiente de la relación entrada - salida. Esta propiedad nos lleva a la FORMA DIRECTA II que gráficamente es:



(Fig. 3.10)

b.- Cascada

Si en la función del sistema H(z) (ecuación 3.3.1) se factora tanto el polinomio del numerador como el del denominador, se tendrá:

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - g_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - h_k z^{-1})(1 - h_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \qquad (3.3.3)$$

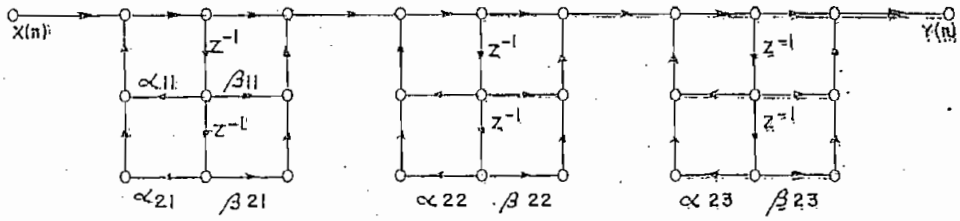
donde $M = M_1 + 2M_2$ y $N = N_1 + 2N_2$

Esta ecuación nos sugiere un conjunto de estructuras de subsistemas de primero y segundo orden en cascada. En la práctica, es importante implementar esta estructura usando el mínimo de almacenamiento en memoria, por lo que se implementan secciones de segundo orden, en consecuencia tendremos:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{[(N+1)/2]} \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-1}} \qquad (3.3.4)$$

En esta forma los polos y ceros están combinados en pares, por lo que se puede usar la forma directa II en cada subsistema de segundo orden.

Al tener un sistema de sexto orden se tiene gráficamente lo siguiente:



(Fig. 3.11)

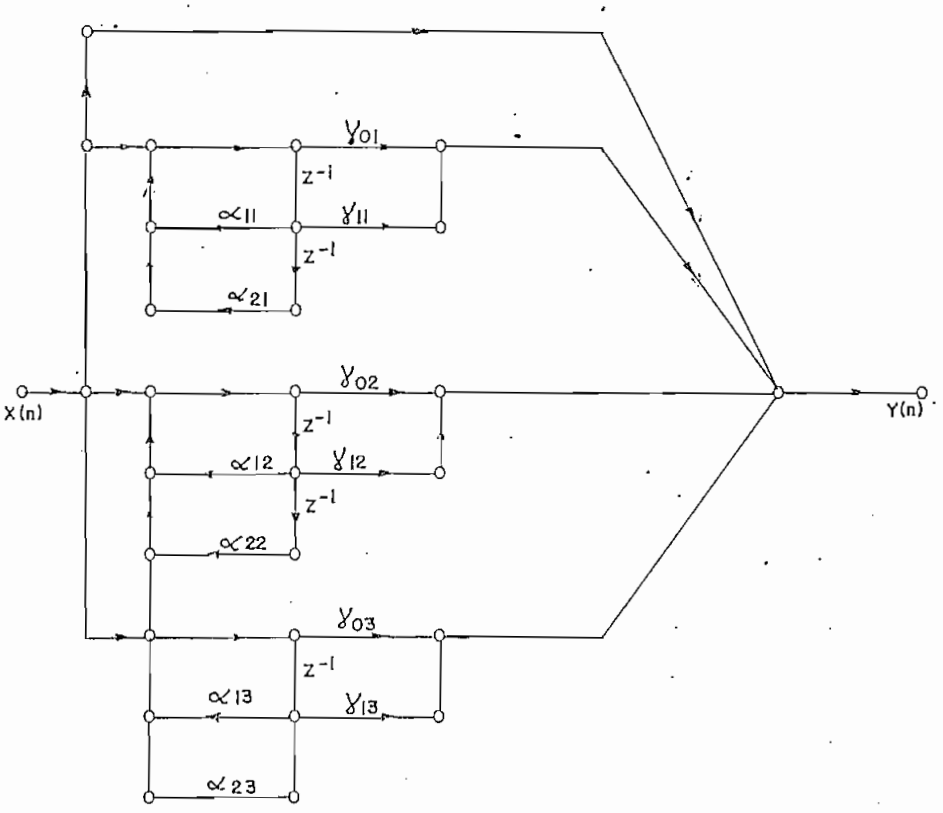
Aunque el ordenamiento y la formación de pares es equivalente para aritmética de precisión infinita, pueden diferir en la práctica debido a los efectos de registros de longitud finita.

c.- Paralela

Si la función del sistema se factora en fracciones parciales, se tiene esta forma de realización:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{[(N+1)/2]} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} \qquad (3.3.5)$$

Como se puede apreciar, existe una combinación paralela de sistemas de primero y segundo orden que gráficamente se presenta a continuación:



(Fig. 3.12)

Las estructuras anotadas son las más comunes para los sistemas IIR.

3.3.2 Sistemas FIR. Los sistemas FIR presentan una función de la siguiente forma:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \qquad (3.3.6)$$

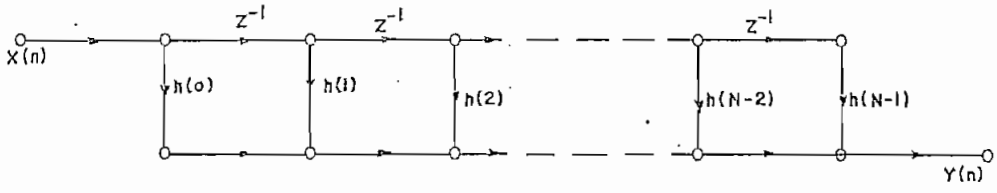
Entre las estructuras más comunes se tiene:

a.- Forma Directa

Es una realización directa de la convolución suma, cuya representación es:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, x(n-k) \qquad (3.3.7)$$

gráficamente es:



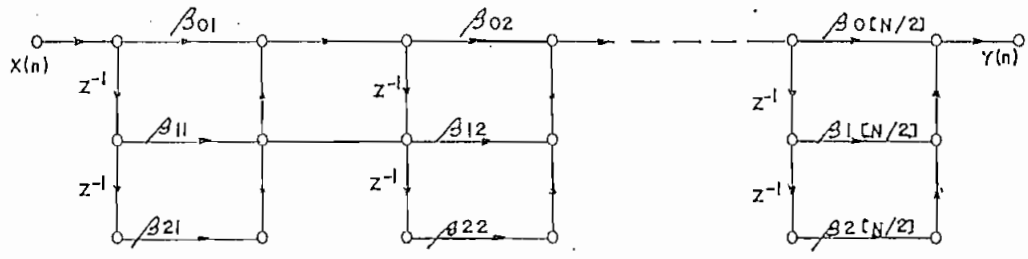
(Fig. 3.13)

b.- Cascada

La función del sistema se presenta como un producto de factores de segundo orden, de la siguiente forma:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{[N/2]} (\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}) \qquad (3.3.8)$$

Cada uno de los factores se realiza en la forma directa, gráficamente se presenta en la figura 3.14.



(Fig. 3.14)

c.- Fase Lineal

La respuesta del sistema a una excitación impulso unitaria tiene la siguiente propiedad:

$$h(n) = h(N - 1 - n) \tag{3.3.9}$$

lo que implica fase - lineal, esto se observa en las siguientes ecuaciones:

Si N es par

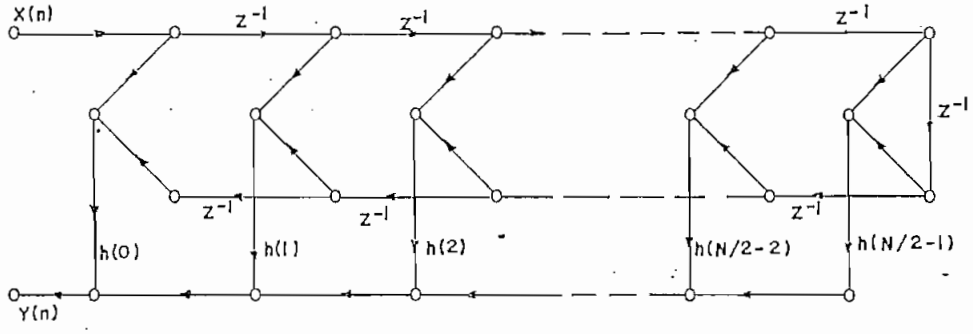
$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h(n)\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right] \tag{3.3.10}$$

Si N es impar

$$H(z) = \sum_{n=0}^{[(N-1)/2]-1} h(n)\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-[(N-1)/2]} \tag{3.3.11}$$

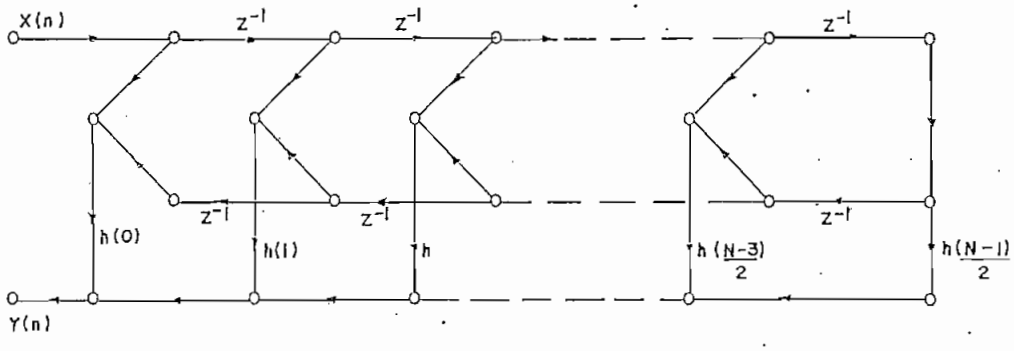
Estas ecuaciones sugieren su implementación en estructuras de Forma Directa, lo cual se presenta en las figuras 3.15 y 3.16, respectivamente.

Para N par:



(Fig. 3.15)

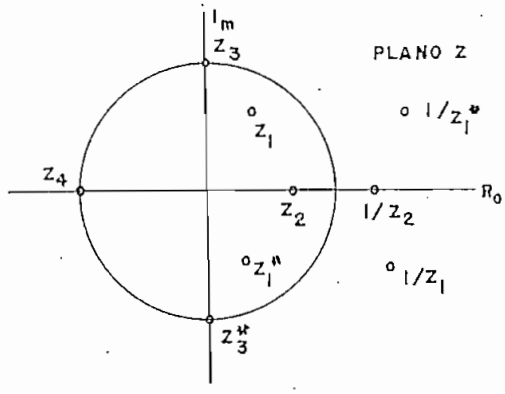
Para N impar:



(Fig. 3.16)

Si se impone la condición de simetría de la ecuación 3.3.9 en los coeficientes del polinomio H(z), se obtiene que los ceros de H(z) ocurren en pares - imagen. Si se observa la figura 3.17 se tiene que los ceros z_1, z_1^*, $1/z_1$ y $1/z_1^*$ se consideran como un grupo de cuatro. Los ceros z_2 y $1/z_2$ son considerados como un grupo de dos. El cero z_4 es considerado como un cero simple.

Correspondiendo a estos grupos de ceros H(z) puede expresarse como un producto de factores de cuarto, segundo y primer orden.



(Fig. 3.17)

d.- Muestreo de Frecuencia

La transformada Z de una secuencia de duración finita N puede ser representada en términos de N muestras igualmente espaciadas sobre el círculo unidad, lo cual implica que la función del sistema se expresa como:

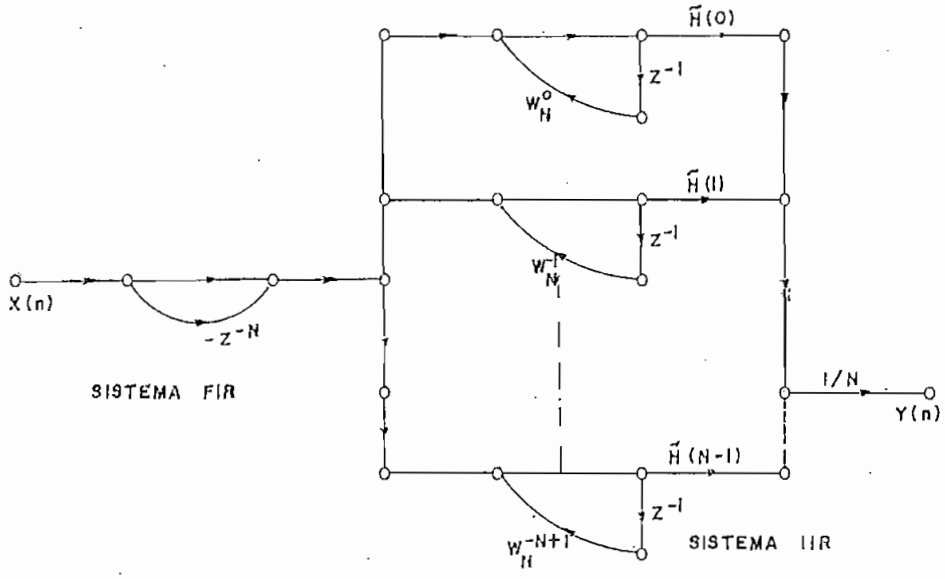
$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \qquad (3.3.12)$$

donde: $W_N = e^{2j\pi/N}$

$$\tilde{H}(k) = H(W_N^{-k}) = |\tilde{H}(k)| e^{j\theta(k)} \qquad (3.3.13)$$

La ecuación 3.3.12 indica que el sistema se puede reali-

zar como cascada de un sistema FIR y de un sistema IIR, como el de la figura 3.18.



(Fig. 3.18)

La función del sistema FIR es $1 - z^{-N}$, los ceros de este sistema son: $z_k = \exp [j(2\pi/N)k]$.

El sistema IIR consiste de una combinación paralela de N sistemas de primer orden, los polos de este sistema son: $z_k = \exp [j(2\pi/N)k]$.

Los polos de los sistemas IIR de primer orden están sobre el círculo unidad, su propósito es cancelar exactamente uno de los ceros del sistema FIR.

En la práctica las dificultades de estabilidad de los po-

los sobre el círculo unidad se evita por el muestreo de la función del sistema sobre un círculo de radio r, donde r es ligeramente menor a la unidad, por lo que H(z) queda como:

$$H(z) = (1 - r^{N} z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}(k)}{1 - rW_N^{-k} z^{-1}} \qquad (3.3.14)$$

en este caso:

$$\tilde{H}(k) = H(rW_N^{-k}) \qquad (3.3.15)$$

Si las muestras de la respuesta a una secuencia impulso son reales, entonces las muestras de frecuencia expresadas en forma polar satisfacen las condiciones de simetría, las cuales son:

$$|\tilde{H}(k)| = |\tilde{H}(N - k)|$$

$$\theta(k) = -\theta(N - k), \quad K = 0, 1, \ldots, N - 1 \qquad (3.3.16)$$

tomando en cuenta que:

$$(W_N^{-k})^* = W_N^{-(N - k)} \qquad (3.3.17)$$

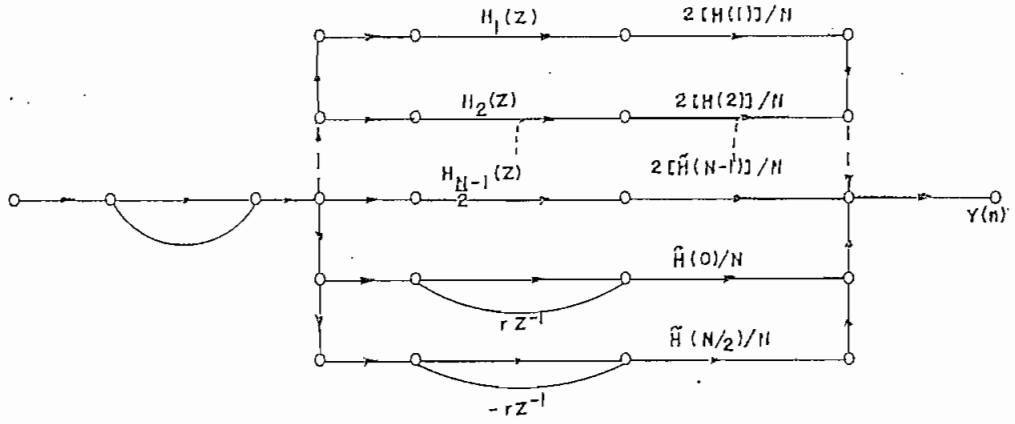
por tanto los circuitos de primer orden ocurren en pares conjugados complejos por lo que se implementan circuitos de segundo orden con coeficientes reales, entonces H(z) es:

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \left[\sum_{k=1}^{(N/2)-1} \frac{2|\tilde{H}(k)|}{N} H_k(z) + \frac{\tilde{H}(0)/N}{1 - rz^{-1}} + \frac{\tilde{H}(N/2)/N}{1 + rz^{-1}} \right] \tag{3.3.18}$$

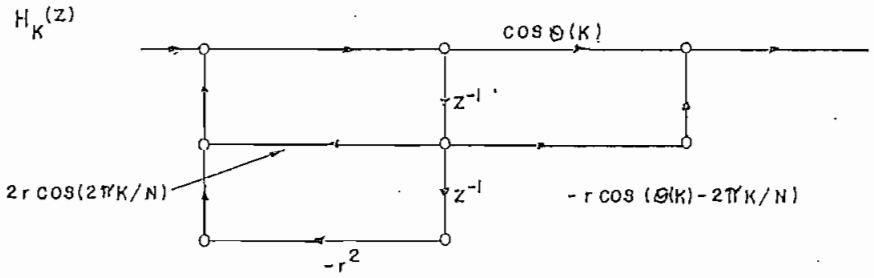
donde:

$$H_k(z) = \frac{\cos(\theta(k)) - rz^{-1}\cos[\theta(k) - 2\pi k/N]}{1 - 2rz^{-1}\cos(2\pi k/N) + r^2 z^{-2}} \tag{3.3.19}$$

y su representación gráfica es:



(Fig. 3.19)



(Fig. 3.20)

Esta estructura requiere más multiplicaciones y retardos que las estructuras directa y cascada, su utilidad está en posibles ventajas a la sensitividad a los efectos de cuantización.

Los efectos de cuantización de los parámetros se manifiestan en desviaciones de las características del filtro, de la respuesta de frecuencia o equivalentemente en el movimiento de los polos y ceros lejos de sus localidades deseadas, en el caso de los sistemas FIR se circunscribe a la localización de los ceros.

En base a los conceptos de las estructuras muestreo de frecuencia y fase lineal para sistemas FIR, se presenta en el capítulo 5 un programa desarrolado para el diseño de filtros digitales FIR con fase lineal, tales como: filtros pasabajos, pasaaltos, pasabanda.

La respuesta de frecuencia de un filtro FIR con fase lineal que sirve de base para el programa se expresa como:

$$H(e^{j2\pi f}) = G(f)\, e^{j(L\pi/2 - ((N-1)/2)2\pi f)} \qquad (3.3.20)$$

Donde G(f) es función real que depende de la longitud de la respuesta del filtro a una excitación impulso unitaria, pudiendo la longitud ser par o impar.

El valor de L depende de la simetría de la respuesta del filtro a una excitación impulso unitaria, pudiendo la simetría ser positiva o negativa.

La función G(f) será usada para aproximar la magnitud de la respuesta deseada, puesto que el téminó de la fase lineal en la ecuación 3.3.20 no tiene efecto sobre la magnitud de la respuesta del filtro.

CAPITULO CUARTO

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

4.1. DISEÑO DE FILTROS DIGITALES IIR Y FIR

Un filtro digital es un sistema lineal discreto de desplazamiento invariante, realizado con aritmética de precisión finita. Su diseño involucra tres pasos básicos que son:

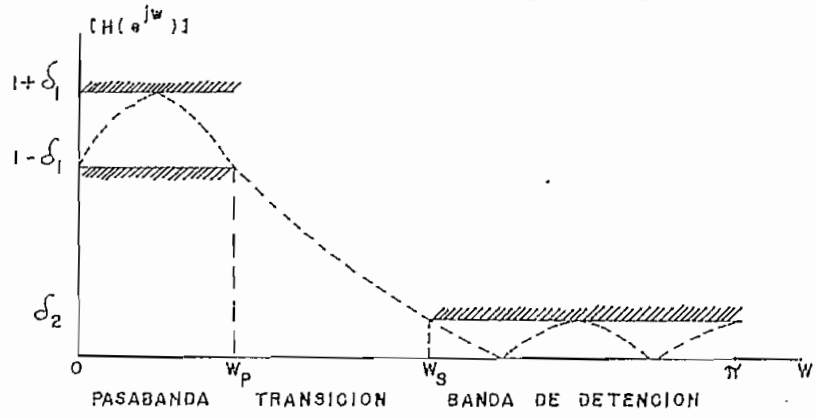
a.- Especificación

b.- Aproximación

c.- Realización

a.- Especificación

La especificación del filtro digital deseado se presenta como un esquema de tolerancia, así para un filtro pasa-bajos se tiene:



(Fig. 4.1)

En este caso, existe una región pasa-banda cuya magnitud debe ser aproximadamente igual a 1, con un error de $\pm \delta_1$ o sea que:

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{jw})| \leq 1 + \delta_1; \qquad |w| \leq w_p$$

y en la región de la banda de detención su magnitud debe ser aproximadamente igual a cero con un error menor a δ_2, o lo que es lo mismo:

$$|H(e^{jw})| \leq \delta_2; \qquad w_s \leq |w| \leq \pi$$

La fase de la señal de salida cumple con los requerimientos impuestos por la estabilidad y causalidad, esto es, los polos de la función del sistema deben estar dentro del círculo unidad.

El siguiente paso consiste en determinar un sistema lineal discreto en el tiempo, cuya respuesta de frecuencia esté contenida dentro de las tolerancias prescritas, por lo que el problema de diseño se convierte en un problema de aproximación.

b.- Aproximación

En el caso de sistemas IIR, la respuesta de frecuencia deseada se aproxima a una función racional, para lo cual se consideran las fórmulas de diseño para filtros analógicos, tales como filtros Butterworth, Chebyshev y Elípticos.

Para el caso de sistemas FIR la respuesta de frecuencia deseada se aproxima a un polinomio.

Luego de la aproximación de la respuesta de frecuencia deseada se presenta el tercer paso que es el de realización del sistema.

c.- Realización

Este paso tiene que ver con el proceso de convertir la función respuesta de frecuencia del filtro deseado en un circuito, el cual permite obtener las características deseadas del filtro.

4.1.1 Diseño de Filtros Digitales IIR. El método tradicional del diseño de filtros digitales se reduce a la transformación de un filtro analógico en un filtro digital.

La función racional de un sistema IIR es:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{y(z)}{x(z)} \qquad (4.1.1)$$

La entrada y salida del sistema están relacionadas por la convolución suma:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \qquad (4.1.2)$$

o por la ecuación diferencia:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (4.1.3)$$

Al realizar la transformación de un sistema analógico a un sistema digital, se requiere que las propiedades de la respuesta de frecuencia de la señal analógica se conserven en la respuesta de frecuencia del filtro digital resultante.

Esto implica, que el eje imaginario del plano S se transforme en el círculo unidad en el plano z y que, si el sistema analógico es estable el filtro digital también lo sea, esto es que si el sistema analógico tiene polos solamente en la mitad izquierda del plano S, entonces el filtro digital tenga los polos en el interior del círculo unidad.

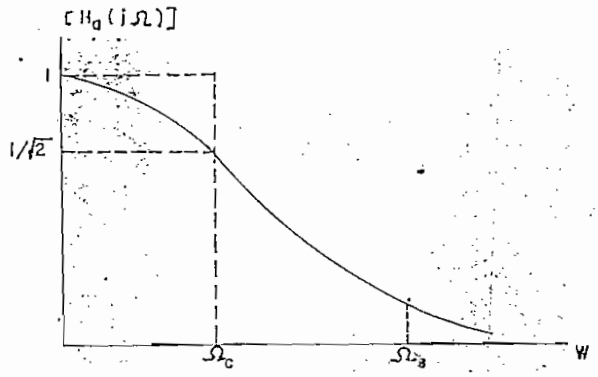
Los filtros Butterworth, Chebyshev y Elípticos son los filtros analógicos selectivos de frecuencia más comunes, a continuación se presentan ciertas características de estos filtros. Es importante anotar la siguiente definición: Una cantidad que no incrementa o decrece como función de alguna otra cantidad se conoce como "monotónica".

Los filtros Butterworth se caracterizan por tener muy plana la amplitud de la respuesta en la región pasa banda. La aproximación es "monotónica" en la región pasa banda y en la región de la banda de detención. Sus polos están simétricamente localizados en un círculo de radio Ω_c en el plano S.

La magnitud al cuadrado de la función de transferencia del filtro es:

$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}} \qquad (4.1.4)$$

gráficamente se presenta como:

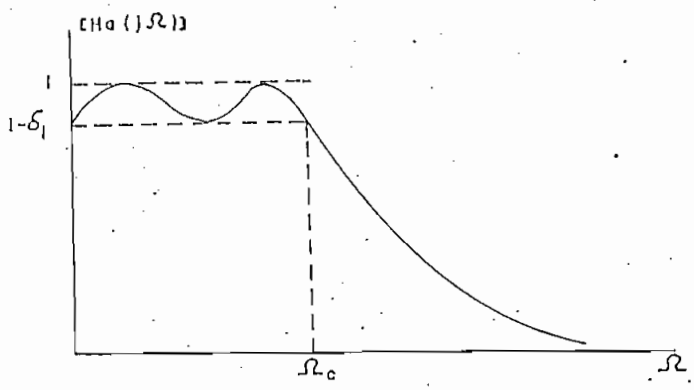


(Fig. 4.2)

Los filtros Chebyshev distribuyen uniformemente la aproximación sobre la región pasa banda o sobre la región de la banda de detención, esto se logra escogiendo una aproximación que presente un rizado uniforme antes que un comportamiento monotónico. Estos filtros tienen la propiedad de que su respuesta tiene el rizado uniforme de la región pasa banda y es monotónica en la región de la banda de detención, o tiene el rizado uniforme en la región de la banda de detención y la región pasa banda es monotónica. Sus polos están localizados sobre una elipse en el plano S. La magnitud al cuadrado de la función de transferencia del filtro está dada por la ecuación 4.1.5.

$$|Ha(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \, v_N^2(\Omega/\Omega_c)} \qquad (4.1.5)$$

Su representación gráfica es:



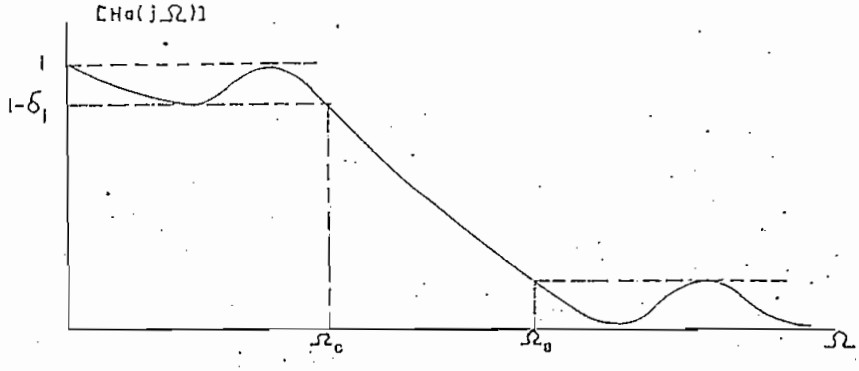
(Fig. 4.3)

Una característica del filtro elíptico es la de que la amplitud de la respuesta tiene el rizado uniforme, tanto en la región pasa banda como en la región de la banda de detención.

El cuadrado de la magnitud de la función de transferencia es:

$$\left|Ha(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2\ U_N^2(\Omega)} \qquad (4.1.6)$$

y su representación gráfica:



(Fig. 4.4)

Después de obtener las características del filtro analógico, se procede al diseño del filtro digital, aplicando para el efecto uno de los métodos de transformación.

Entre los procedimientos de transformación, se tiene:

a.- Impulso invariante

b.- Solución numérica de la ecuación de diferencias

c.- Transformación bilineal.

a.- Impulso Invariante

Este procedimiento considera la respuesta del filtro digital a una excitación impulso unitaria como muestras, igualmente espaciadas, de la respuesta del filtro analógico a una excitación impulso.

Esto significa que:

$$h(n) = ha(nT) \qquad (4.1.7)$$

donde:

$h(n)$ = respuesta del filtro digital a una excitación impulso unitaria.

$ha(nT)$ = respuesta del filtro analógico a una excitación impulso.

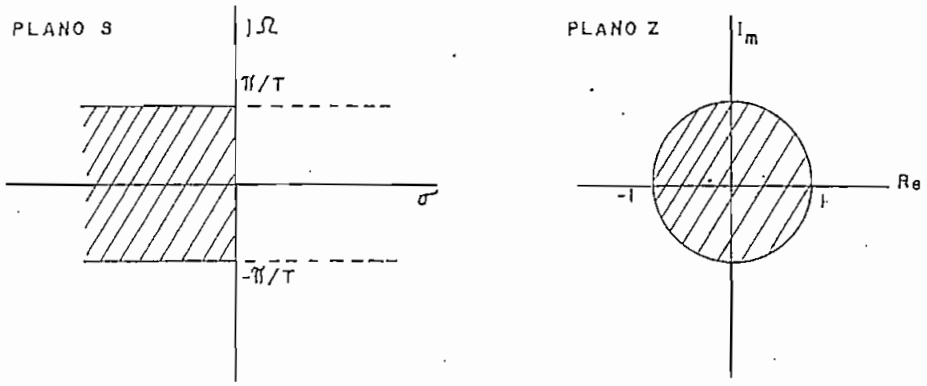
T = período de muestreo.

Como generalización de la ecuación 1.5.5, puede demostrar

se que la relación entre la transformada z de h(n) y la transformada de Laplace de ha(t) está dada por la siguiente ecuación:

$$H(z)\Big|_{z=e^{ST}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Ha\left(S + j\,\frac{2\pi}{T}\,K\right) \qquad (4.1.8)$$

De la relación $z = e^{ST}$ se tiene que una franja de ancho $2\pi/T$ en el plano S se transforma en un círculo en el plano z, como se observa en la figura 4.5.



(Fig. 4.5)

La relación entre el plano S y el plano z se determina al expresar la función del filtro analógico como una expansión en fracciones parciales, o sea:

$$Ha(S) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\bar{A}_k}{S - S_k} \qquad (4.1.9)$$

La respuesta del filtro analógico a una excitación impul

so es:

$$ha(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{S_k t} u(t) \qquad (4.1.10)$$

De la ecuación 4.1.7 se tiene que:

$$h(n) = ha(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{S_k nT} u(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k (e^{S_k T})^n u(n) \qquad (4.1.11)$$

que constituye la respuesta del filtro digital a una excitación impulso unitaria, de donde la función del filtro digital está dada por:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-e^{S_k T} z^{-1}} \qquad (4.1.12)$$

Al comparar las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.12 se observa que un polo $S = S_k$ en el plano S se transforma en un polo $e^{S_k T}$ en el plano z y los coeficientes en la expansión de fracciones parciales de Ha(S) y H(z) son iguales. Si el filtro analógico es estable, esto es la parte real de S_k es menor que cero (o lo que es equivalente los polos están al lado izquierdo del plano S), entonces la magnitud de $e^{S_k T}$ será menor que la unidad por lo que el polo correspondiente en el filtro digital es

tá en el interior del círculo unidad, consecuentemente el filtro digital es estable.

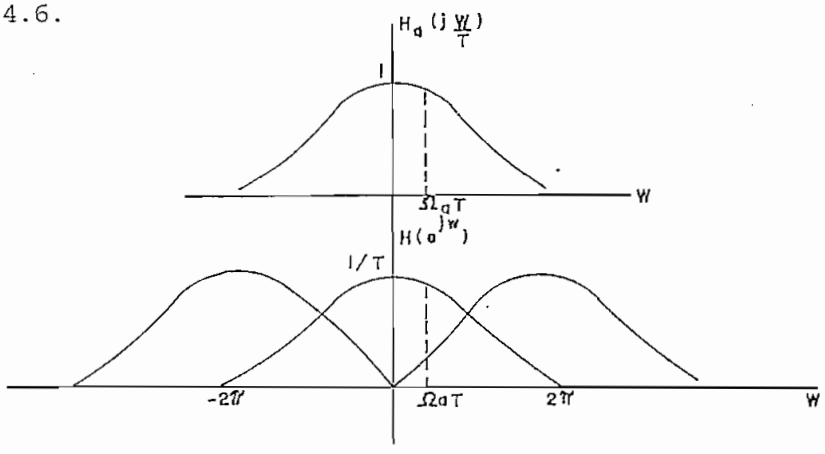
La respuesta de frecuencia del filtro digital está relacionada con la respuesta de frecuencia del filtro analógico por la siguiente ecuación:

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Ha(j\frac{w}{T} + j\frac{2\pi}{T} k) \qquad (4.1.13)$$

Si el filtro analógico es limitado en banda, se produce un filtro digital cuya respuesta de frecuencia es:

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{T} Ha(j\frac{w}{T}), \qquad |w| \leq \pi$$

En la práctica, el filtro analógico no es limitado en banda, por lo que existe interferencia entre los términos sucesivos de la ecuación 4.1.13, esto se debe al fenómeno conocido como "aliasing", el mismo que puede observarse en la figura 4.6.



(Fig. 4.6)

Debido a este fenómeno que se presenta en el proceso de muestreo de la señal analógica, la respuesta de frecuencia del filtro digital difiere de la deseada, a pesar de esto, la relación entre la frecuencia analógica y la frecuencia digital es lineal.

Este método de diseño es apropiado para filtros limitados en banda.

b.- Solución Numérica de la Ecuación de Diferencias

La función del sistema analógico se presenta como:

$$\sum_{k=0}^{N} C_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \qquad (4.1.14)$$

El procedimiento consiste en aproximar las derivadas de la ecuación 4.1.14 por diferencias finitas. De acuerdo con las técnicas de análisis numérico la derivada de una función analógica puede ser aproximada en base a la diferencia entre muestras consecutivas de la función.

Si para la aproximación de la primera derivada se consideran el primer término anterior a $y(n)$,$(y(n-1))$ y el término $y(n)$, se tendrá:

$$\frac{dy_a(t)}{dt}\Big|_{t = nT} \nabla^{(1)}[y(n)] = \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \qquad (4.1.15)$$

donde: $y(n) = y_a(nT)$

La aproximación a derivadas de mayor orden se obtiene por la aplicación repetida de 4.1.15, en este caso se tiene:

$$\left.\frac{d^k y_a(t)}{dt^k}\right|_{t = nT} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{k-1} y_a(t)}{dt^{k-1}}\right)\right|_{t = nT}$$

$$\nabla^{(k)}[y(n)] = \nabla^{(1)}[\nabla^{(k-1)}(y(n)] \qquad (4.1.16)$$

Si se aplican las ecuaciones 4.1.15 y 4.1.16 en la ecuación 4.1.14 se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} C_k \nabla^{(k)}[y(n)] = \sum_{k=0}^{M} d_k \nabla^{(k)}[x(n)] \qquad (4.1.17)$$

donde:

$y(n) = y_a(nT)$; $x(n) = x_a(nT)$

$\nabla^{(1)}[\ ]$ es un operador lineal de desplazamiento invariante, y

$\nabla^{(k)}[\ ]$ puede ser considerado como una cascada de (k) operadores $\nabla^{(1)}[\ ]$.

Al aplicar la transformada z al operador $\nabla^{(1)}[\ ]$, se tendrá:

$$z[\nabla^{(1)}[x(n)]] = [\frac{1 - z^{-1}}{T}]\ x(z)$$

consecuentemente:

$$z[\nabla^{(k)}[x(n)]] = [\frac{1 - z^{-1}}{T}]\ x(z)$$

entonces, al obtener la transformada z de cada lado de la ecuación 4.1.17, se tiene:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} d_k \left[\frac{1 - z^{-1}}{T}\right]^k}{\sum_{k=0}^{N} c_k \left[\frac{1 - z^{-1}}{T}\right]^k} \qquad (4.1.18)$$

Si la función analógica del sistema se representa por:

$$H_a(S) = \frac{\sum_{k=0}^{M} d_k S^k}{\sum_{k=0}^{N} c_k S^k} \qquad (4.1.19)$$

Al comparar 4.1.18 y 4.1.19 se deduce que:

$$S = \frac{1 - z^{-1}}{T} \qquad (4.1.20)$$

La ecuación 4.1.20 corresponde a una transformación del plano S al plano Z.

De 4.1.20 se deduce:

$$Z = \frac{1}{1 - ST} \qquad (4.1.21)$$

Si $S = j\Omega$

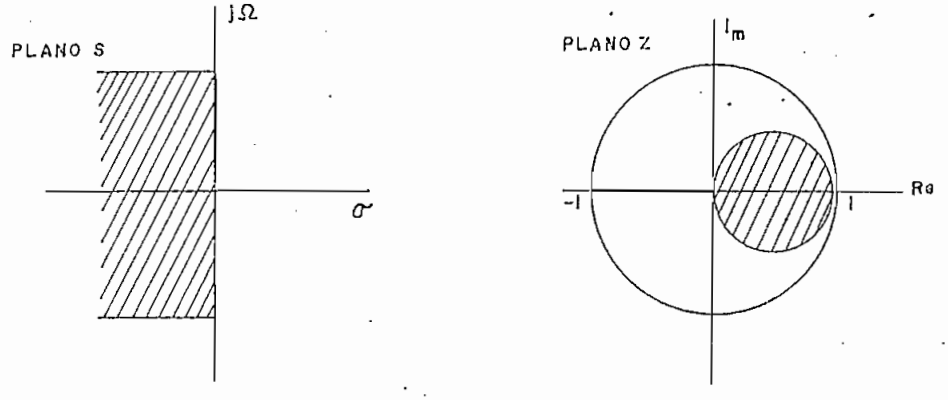
$$Z = \frac{1}{1 - j\Omega T} \qquad (4.1.22)$$

La ecuación 4.1.22 indica que el eje jΩ del plano S no se transforma sobre el círculo unidad en el plano Z, ya que $|z| \neq 1$ para todo valor de jΩ.

De 4.1.22 se deduce:

$$Z = \frac{1}{2}[1 + e^{j2 \text{ arctg}(\Omega T)}] \qquad (4.1.23)$$

La ecuación 4.1.23 corresponde a una circunferencia de centro y radio iguales a $\frac{1}{2}$. Gráficamente la transformación del plano S al plano Z se presenta en la figura 4.7.



(Fig. 4.7)

La condición de estabilidad es satisfecha, ya que los polos que se encuentran al lado izquierdo del plano S se transforman al interior del círculo más pequeño, el cual se encuentra en el interior del círculo unidad.

Al decrecer el período de muestreo, teóricamente produce un mejor filtro, ya que la respuesta del filtro y el espectro

de la señal tienden a concentrarse en una pequeña región del círculo unidad, por lo que se puede esperar que el filtro digital se aproxime al filtro analógico.

c.- Transformación Bilineal

Este procedimiento se reduce a la integración de la ecuación diferencial, utilizando una técnica de análisis numérico para la determinación de la integral.

Si se tiene la siguiente ecuación de primer orden:

$$C_1 y_a'(t) + C_0 y_a(t) = d_0 x(t) \qquad (4.1.24)$$

La correspondiente función analógica del sistema es:

$$H_a(s) = \frac{d_o}{C_1 S + C_o} \qquad (4.1.25)$$

$y_a(t)$ en función de $y_a'(t)$ se expresa como:

$$y_a(t) = \int_{t_o}^{t} y_a'(t)dt + y_a(t_o) \qquad (4.1.26)$$

Si $t = nT$ y $t_o = (n - 1)T$

$$y_a(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} y_a'(\tau)\, d\tau + y_a((n-1)T) \qquad (4.1.27)$$

De 4.1.24 se obtiene:

$$y'_a(nT) = -\frac{C_0}{C_1} y_a(nT) + \frac{d_0}{C_1} x_a(nT) \qquad (4.1.28)$$

Si la determinación de la integral de la ecuación 4.1.27 se aproxima con el método del trapecio se tendrá:

$$y_a(nT) = \frac{T}{2} [y'_a(nT) + y'_a((n-1)T)] + y_a(n-1)T \qquad (4.1.29)$$

Al sustituir 4.1.28 en la ecuación 4.1.29 y aplicando luego la transformada z se obtiene:

$$H(z) = \frac{d_o}{C_1 \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + C_0} \qquad (4.1.30)$$

Al comparar 4.1.30 con 4.1.25 se tiene que:

$$S = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \qquad (4.1.31)$$

De donde:

$$z = \frac{1 + (T/2)S}{1 - (T/2)S} \qquad (4.1.32)$$

La ecuación 4.1.32 es una transformación bilineal.

Para la demostración de la transformación del eje imaginario del plano S en el círculo unidad del plano z, se considera la siguiente relación:

$$z = e^{jw}$$

Si se reemplaza en la ecuación 4.1.31 se obtiene:

$$S = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-jw}}{1 + e^{-jw}}$$

$$S = \frac{2}{T} j \frac{\text{sen}(w/2)}{\cos(w/2)}$$

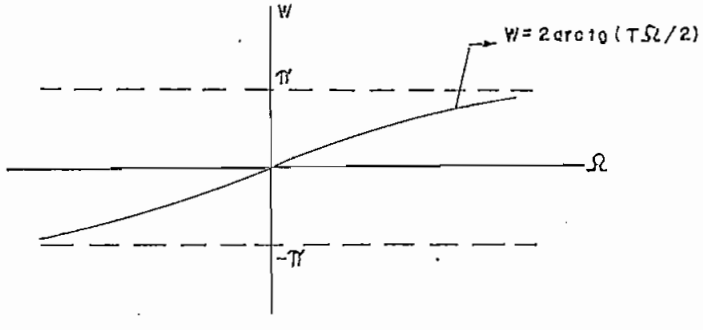
$$S = \frac{2}{T} j \, \text{tg}(w/2)$$

Si: $S = \sigma + j\Omega$

y considerando que $\sigma = 0$, para z sobre el círculo unidad, la relación entre Ω y w está dada por la siguiente ecuación:

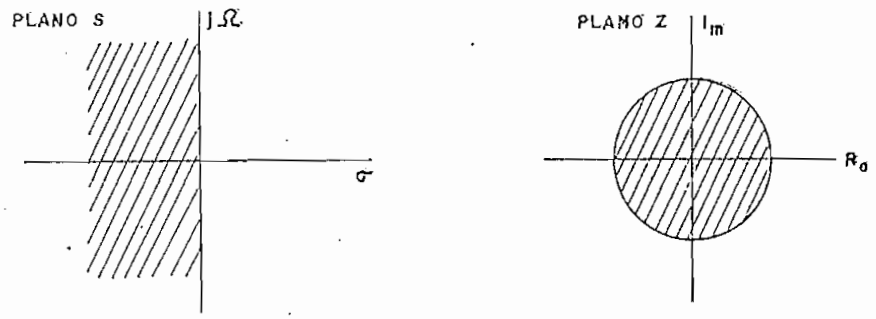
$$\frac{T\Omega}{2} = \text{tg}(w/2) \qquad (4.1.33)$$

gráficamente se presenta en la figura 4.8.



(Fig. 4.8)

La correspondencia entre los planos s y z se indica en la siguiente figura:



(Fig. 4.9)

Este método permite obtener filtros digitales estables a partir de filtros analógicos estables. Si se analiza la ecuación 4.1.32, se observa que la parte real para un valor de s negativo origina que la magnitud del valor z sea menor que la unidad, lo que corresponde a la parte interior del círculo unidad. Adicionalmente elimina el problema "aliasing" encontrado en el método del impulso invariante, ya que la transformación del eje imaginario del plano s se realiza dentro del círculo unidad en el plano z.

Sinembargo, este método introduce una distorsión en el eje de frecuencias, por lo que este método se aplica en filtros en los cuales esta distorsión puede ser tolerada o compensada.

4.1.2 Diseño de Filtros Digitales FIR. Un sistema FIR tiene la siguiente función característica:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\, z^{-n} \qquad (4.1.34)$$

Esto es un polinomio en z^{-1} de grado N-1, los ceros pueden estar en cualquier lugar del plano z y los polos se localizan en $z = 0$.

La respuesta de frecuencia se representa por:

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jwn} \qquad (4.1.35)$$

El diseño de este tipo de filtros puede hacerse ya sea encontrando los coeficientes de la respuesta a la excitación impulso unitaria o determinando las N muestras de su respuesta de frecuencia.

Este tipo de filtros pueden tener "fase lineal", si cumplen con la condición de la ecuación 3.3.9. Esta propiedad es frecuentemente utilizada, al considerarla se tiene la ventaja de que se simplifica el procedimiento de diseño.

Uno de los procedimientos para diseñar un filtro FIR es el siguiente:

Diseño usando "Ventanas"

El método más simple para diseñar un filtro FIR consiste en obtener la respuesta de longitud finita al truncar la respuesta de longitud infinita, procedimiento que se describe a continuación.

Si se supone que la respuesta de frecuencia deseada es $H_d(e^{jw})$, se tiene:

$$H_d(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)\ e^{-jwn} \qquad (4.1.36)$$

donde $h_d(n)$ es:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw})\ e^{jwn} dw \qquad (4.1.37)$$

Estas dos ecuaciones pueden considerarse como la representación en series de Fourier de la respuesta de frecuencia $H_d(e^{jw})$, la misma que es periódica, siendo la secuencia $h_d(n)$ los coeficientes de Fourier; entonces, la aproximación por truncamiento de la especificación de un filtro ideal es idéntica al estudio de la convergencia de series de Fourier.

Si la secuencia $H_d(n)$ tiene duración infinita, para obtener la respuesta de duración finita y que además sea causal, se puede truncar $h_d(n)$, lo cual se define como:

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otros valores} \end{cases} \qquad (4.1.38)$$

En general, $h(n)$ se puede representar como el producto de la respuesta deseada y una función "Ventana" $w(n)$ de duración finita, esto es:

$$h(n) = h_d(n)\ w(n) \tag{4.1.39}$$

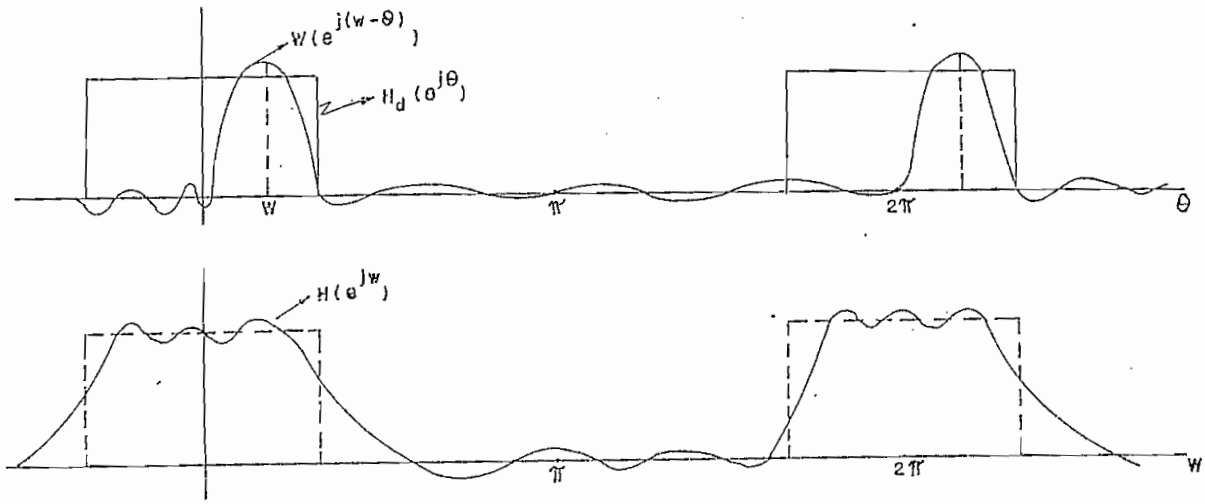
de la ecuación 4.1.38 se tiene:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otros valores} \end{cases} \tag{4.1.40}$$

Si se aplica el teorema de convolución compleja, expresado en la ecuación 2.2.9, se obtiene:

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})\ W(e^{j(w-\theta)})\, d\theta \tag{4.1.41}$$

La ecuación 4.1.41 muestra que $H(e^{jw})$ es la convolución de la respuesta de frecuencia deseada con la transformada de Fourier de la ventana, que es una señal contínua y periódica. Esto se observa en el siguiente gráfico:



(Fig. 4.10)

De la figura 4.10 se concluye, que si $W(e^{jw})$ tiene un menor ancho de banda que $H_d(e^{jw})$, se obtendrá una función $H(e^{jw})$ que será similar a la función $H_d(e^{jw})$. Por lo que al escoger una de las funciones "ventana", se trata de tener W(n) de duración tan corta como sea posible con el afán de minimizar los problemas de computación en la implementación del filtro. Mientras menor ancho de banda tenga la función $W(e^{jw})$, se reproducirá más fielmente la respuesta de frecuencia deseada.

A continuación se presentan las principales funciones "ventana":

a.- Rectangular

$$w(n) = 1 \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

b.- Bartlett

$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \dfrac{N-1}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1} & \dfrac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

c.- Hanning

$$w(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right] \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

d.- Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

e.- Blackman

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Diseño utilizando el método de intercambio Remez

La función G(f) en la ecuación 3.3.20 depende de cual de los cuatro casos es utilizado, ya que depende de la longitud y de la simetría de la respuesta del filtro a una excitación impulso unitaria.

Usando las relaciones de simetría la función G(f) puede ser expresada como sigue:

Caso 1: Simetría Positiva, Longitud Impar:

$$G(f) = \sum_{k=0}^{n} a(k) \cos(2\pi k f)$$

donde: $n = (N-1)/2$

$a(0) = h(n)$

$a(k) = 2h(n-k)$ para $k = 1,2,\ldots. n$

Caso 2: Simetría Positiva, Longitud Par:

$$G(f) = \sum_{k=1}^{n} b(k) \cos\left[2\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)f\right]$$

donde: $n = N/2$

$b(k) = 2h(n-k)$ para $k = 1,2,\ldots. n$

Caso 3: Simetría Negativa, Longitud Impar:

$$G(f) = \sum_{k=1}^{N} C(k) \operatorname{sen}(2\pi k f)$$

donde: $n = (N-1)/2$

$C(k) = 2h(n-k)$ para $k = 1,2,\ldots. n$

$h(n) = 0$

Caso 4: Simetría Negativa, Longitud Par:

$$G(f) = \sum_{k=1}^{n} d(k) \operatorname{sen}[2\pi(k-\tfrac{1}{2})f]$$

donde: $n = N/2$

$d(k) = 2h(n-k)$ para $k = 1,\ldots. n$

G(f) puede expresarse como: G(f) = Q(f) P(f) donde P(f) es una combinación lineal de funciones coseno, por lo que los cuatro casos pueden ser escritos en una forma común en términos coseno. El programa utiliza una rutina central, que calcula la mejor aproximación de la respuesta del filtro deseado.

La mejor aproximación se logra modificando la función magnitud y la función ponderación, para formular un nuevo problema equivalente de aproximación.

El problema original de aproximación se plantea en función de la minimización del máximo error absoluto de ponderación, so-

bre los coeficientes de G(f), definido por:

$$||E(f)|| = \max_{f\epsilon F} W(f)|D(f) - G(f)| \qquad (4.1.42)$$

donde:

W(f) = función de ponderación

D(f) = respuesta de magnitud deseada

G(f) = cualquiera de los cuatro casos de filtros FIR con fase lineal

W(f) y D(f) son funciones continuas en un subconjunto compacto (0, 1/2).

La función de error E(f) puede ser escrita como:

$$E(f) = W(f)[D(f) - G(f)] = W(f)\ Q(f)[\frac{D(f)}{Q(f)} - P(f)]$$

Si:

$$\hat{D}(f) = D(f)/Q(f)$$

$$\hat{W}(f) = W(f)\ Q(f)$$

el problema de aproximación equivalente, minimiza el error por escogitamiento de los coeficientes de P(f). El conjunto F es reemplazado por el conjunto F', donde: F' = F - {puntos donde Q(f) = 0}

$$||E(f)|| = \max_{f\epsilon F'} \hat{W}(f)|\hat{D}(f) - P(f)| \qquad (4.1.43)$$

Las condiciones necesarias y suficientes para poder obtener la

mejor aproximación, están dadas por el teorema de alternación que se enuncia a continuación:

Teorema de Alternación

Si P(f) es una combinación lineal de r funciones coseno, como se presenta a continuación:

$$P(f) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha(k) \cos 2\pi kf$$

entonces una condición necesaria y suficiente para que P(f) sea la única y mejor aproximación de la función $\hat{D}(f)$ sobre F', es que la función de error de ponderación $E(f)=\hat{W}(f)[\hat{D}(F)-P(f)]$ presente por lo menos r + 1 frecuencias extremas en F'

Estas frecuencias extremas son un conjunto de puntos $\{F_i\}$, $i=1,2,\ldots,r+1$, de tal manera que $F_1 < F_2 < \ldots F_r < F_{r+1}$, con $E(F_i) = -E(F_{i+1})$, $i=1,2,\ldots,r$, y $|E(F_i)| = \max_{f\in F'} E(f)$.

El algoritmo utiliza el método de intercambio Remez para determinar la mejor aproximación de la función de la respuesta deseada, se presenta en el capítulo quinto.

4.2. ALGORITMOS PARA EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES

Se trata la formulación de las ecuaciones de diseño sin llegar a un detalle pormenorizado de los algoritmos, por cuanto al tener las ecuaciones básicas, estas pueden ser tratadas por diversos métodos.

FILTROS IIR

Los filtros digitales pueden ser diseñados mediante la transformación del filtro analógico correspondiente. Este método es razonable cuando se parte de los diseños de los filtros analógicos que están expresados en fórmulas o en tablas de diseño, como son los filtros Butterworth, Chebyshev y Elípticos.

En los casos más generales, los procedimientos de diseño se han desarrollado por medio de algoritmos que pueden ser automatizados.

Minimización del Error Cuadrático Medio

El diseño del filtro digital IIR se basa en la minimización del error cuadrático medio en el dominio de la frecuencia, para lo cual se requiere que la respuesta de frecuencia $H_d(e^{jw})$ sea definida como un conjunto de frecuencias discretas w_i. El error cuadrático medio de estas frecuencias se define por:

$$E = \sum_{i=1}^{n} [|H(e^{jw_i})| - |H_d(e^{jw_i})|]^2 \qquad (4.2.1)$$

Se asume que la función de transferencia del filtro es la siguiente:

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{k} \frac{1+a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1+c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} = AG(z) \qquad (4.2.2)$$

que corresponde a la forma de cascada. Se ha escogido esta representación

debido a que presenta facilidades en la computación de las derivadas que se requieren para la optimización del diseño.

Para minimizar el error cuadrático medio, se toman las derivadas parciales de E con respecto a cada uno de los parámetros de H(z), al igualar a cero cada una de las derivadas, se obtienen 4k + 1 ecuaciones, las cuales al ser resueltas dan como resultado el valor de cada uno de los parámetros que minimizan el error cuadrático medio.

La derivada parcial del error cuadrático medio con respecto a la constante A es:

$$\frac{\delta E}{\delta |A|} = \sum_{i=1}^{n} \{2[|A|.|G(e^{jw_i})| - |H_d(e^{jw_i})|]|G(e^{jw_i})|\} = 0$$

$$|A| = \frac{\sum_{i=1}^{n} |G(e^{jw_i})|.|H_d(e^{jw_i})|}{\sum_{i=1}^{n} |G(e^{jw_i})|^2} \qquad (4.2.3)$$

Con respecto a los 4k parámetros desconocidos dados por el vector $\theta[a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots. d]$, origina 4k ecuaciones no lineales, provenientes de:

$$\frac{\delta E(\theta, A)}{\delta \theta_n} = 0 \qquad n = 1,2,3, \ldots.,k$$

θ_n = n componentes de θ

Estas ecuaciones se resuelven algorítmicamente usando el método de

Fletcher - Powell que trata solamente con la magnitud de la función, este es un método iterativo de optimización, cuyo resultado es una función de transferencia racional, cercana a las especificaciones del diseño, aunque presenta algunos polos y ceros que se encuentran fuera del círculo unidad.

Este problema fue solucionado por Steiglitz, quien reemplazó por su valor recíproco a los polos y ceros, sin variar la función de transferencia ya que la misma es multiplicada por una constante.

Existen otros métodos, entre los principales se tiene la minimización del error "p" que en vez de minimizar el error cuadrático medio, se minimiza el error promedio elevado a una potencia "p".

Otro de los métodos es utilizando la aproximación inversa de los mínimos cuadrados de la respuesta del filtro deseado, esto lleva a un conjunto de ecuaciones lineales.

FILTROS FIR

El diseño de este tipo de filtros utilizando "ventanas" es a menudo conveniente, pero se desea diseñar un filtro que sea el mejor para un valor dado de N, por lo que es necesario introducir un criterio de aproximación, esto conduce a la aproximación del rizado uniforme en los filtros FIR.

Aproximación "Rizado Uniforme" para Filtros FIR

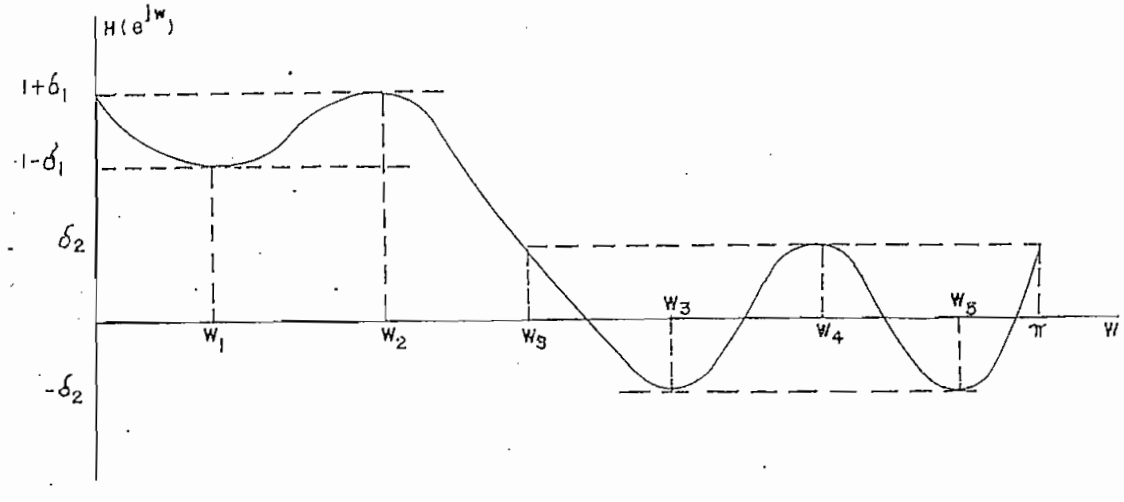
Se relaciona con filtros de fase cero y respuesta de frecuencia de la forma:

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-M}^{M} h(n)\ e^{-jwn}, \qquad N = 2M + 1 \qquad (4.2.4)$$

para que la fase sea igual a cero se requiere: $h(n) = h(-n)$, lo que origina:

$$H(e^{jw}) = h(0) + \sum_{n=1}^{M} 2h(n)\ \cos(wn) \qquad (4.2.5)$$

La ecuación 4.2.5 es puramente real, si se requiere una aproximación rizado uniforme para un filtro selectivo, de frecuencia pasabajo por ejemplo, se presenta la necesidad de especificar el número de máximos y mínimos en el rango de frecuencia de: $0 \leq w \leq \Pi$. La aproximación rizado uniforme del filtro pasabajo se presenta en el gráfico 4.11.



(Fig. 4.11)

La especificación de máximos y mínimos conduce a un juego de ecuaciones no lineales que se resuelven iterativamente, lo cual en si constituye una dificultad, a más de que se presentan limitaciones en escoger los valores de w_p y w_s a pesar de que M, δ_1 y δ_2 son fijos por lo que, en vez de escribir un juego de ecuaciones no lineales se usan técnicas iterativas para producir un polinomio trigonométrico que tiene los valores deseados.

El proceso consiste en escoger los extremos tanto en la región pasabanda como en la región de la banda de detención y estimar las frecuencias a las cuales ocurren. Los métodos de interpolación de Lagrange se utilizan para calcular un polinomio que tiene los valores extremos prescritos; este polinomio determina máximos y mínimos sobre un conjunto de frecuencias discretas, si estos son iguales a los prescritos el proceso se termina, caso contrario se forma otro polinomio con menos extremos, se consideran los del último polinomio calculado, y se repite el proceso hasta obtener los máximos y mínimos deseados. En este proceso se presenta un problema, por cuanto no existe un control preciso sobre los márgenes de las regiones pasabanda y de la banda de detención.

Con M, w_p y w_s fijos, el diseño del filtro selectivo de frecuencia llega a ser un problema de aproximación de Chebyshev, problema que es de considerable importancia en la teoría de aproximaciones, para el cual se han desarrollado una variedad de procedimientos.

Uno de los procedimientos ha sido demostrado por James McClellan, el programa desarrollado en el capítulo 5 utiliza ese procedimiento para la

obtención de filtros selectivos de frecuencia con fase lineal.

Este procedimiento optimiza la aproximación de Chebyshev en intervalos que corresponden a las regiones pasabanda y a las regiones de las bandas de detención, permite también la especificación exacta de los márgenes de frecuencia de las bandas.

Otro método es el del diseño del muestreo de frecuencia que se basa en que un filtro FIR tiene una representación en términos de muestras de frecuencia.

4.3 COMPARACION DE FILTROS DIGITALES IIR, FIR

El escogitamiento entre un filtro IIR y un filtro FIR depende del análisis de las ventajas y desventajas de cada uno de los tipos de filtros.

Los filtros IIR tienen la ventaja de que una variedad de filtros selectivos de frecuencia pueden ser diseñados usando fórmulas de diseño de forma cerrada.

Una vez que el problema ha sido especificado en términos de un determinado tipo de filtro (Butterworth, Chebyshev o Elípticos), los coeficientes (polos o ceros) del filtro digital deseado se obtienen por substitución de las características en el conjunto de las ecuaciones de diseño.

Esta clase de simplicidad en el procedimiento de diseño, es atractivo si las facilidades computacionales disponibles son limitadas.

Una de las desventajas es la de que está limitado a filtros pasabanda pasabajos y pasaaltos.

Pese a que se pueden obtener filtros con excelentes características en cuanto a amplitud, en cambio su respuesta de fase no es lineal.

En el caso de filtros FIR se obtienen respuestas de fase lineales, si se aplica el método de las "ventanas", pudiendo lograr las características del filtro deseado, para lo cual puede necesitarse alguna iteración. Debido a estas posibles iteraciones se necesita de buenas facilidades de computación para su implementación.

Para el diseño de cada uno de los tipos de filtro, existen consideraciones que deben ser tomadas en cuenta: por ejemplo los métodos de implementación y las facilidades computacionales, si se prefiere una mejor respuesta en amplitud antes que una mejor respuesta en fase. A esto se suman consideraciones de tipo económico relacionadas con la complejidad en el hardware o velocidad en el software.

4.4 EFECTOS DE LA LONGITUD FINITA DE LOS REGISTROS EN EL PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Para la implementación de filtros digitales se utilizan registros de almacenamiento de longitud finita, consecuentemente los valores de los coeficientes y los valores de la señal deben ser cuantizados por redondeo o truncación antes de ser almacenados.

La cuantización puede originar tres tipos de errores:

a.- Errores de cuantización de los coeficientes

b.- Errores de cuantización de los productos

c.- Errores de cuantización de las entradas

Los coeficientes de la función de transferencia son calculados con bastante exactitud, al cuantizarse los coeficientes, la respuesta de frecuencia del filtro digital resultante puede diferir de la respuesta deseada, ya que se introducen perturbaciones tanto en los polos como en los ceros de la función de transferencia.

Los errores por cuantización de los productos se presentan a la salida de los multiplicadores. Cada vez que una señal representada por "a" dígitos es multiplicada por un coeficiente representado por "a_1" dígitos, el producto obtenido origina como máximo "$a + a_1$" dígitos. Puesto que se utilizan registros de almacenamiento de longitud finita, cada salida de los multiplicadores debe ser redondeada o truncada antes de continuar el proceso. Este tipo de error se puede considerar como fuente de ruido, lo que determina cierto ruido en la salida.

Los errores de la entrada se presentan en aplicaciones donde los filtros digitales son usados para procesar señales continuas en el tiempo, estos errores son inherentes a la conversión analógica-digital.

El efecto de la cuantización, en la realización de un filtro digital, es el de introducir elementos no lineales en ciertas ramas de la estructu

ra del filtro, efectos que son complejos de analizar, por lo que es preferible considerar el caso en el cual la entrada es cero o es igual a una constante, esto origina que a la salida la no linealidad produzca un error periódico, debido a un comportamiento oscilatorio de la señal de salida. Si la entrada no es constante se usa un modelo estadístico que convierte el sistema no lineal en un sistema lineal con la adición de fuentes de ruido.

Realización de Filtros Digitales IIR en Punto Fijo con Entrada Igual Cero

Si un filtro digital estable, con una excitación que tiene el valor de cero para un valor de n mayor a n_0 es implementado con aritmética de precisión infinita, se obtiene una salida que caerá asintóticamente hacia cero para un valor de $n > n_0$.

El mismo filtro implementado con registros de longitud finita, origina una salida que puede caer en un rango de amplitud diferente de cero y después tener un comportamiento oscilatorio.

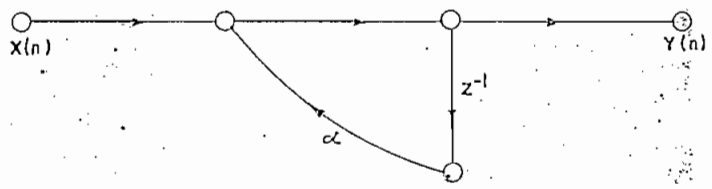
Este efecto se conoce como: ciclo límite con entrada igual a cero, es una consecuencia de los cuantizadores no lineales en el lazo de realimentación del filtro.

El efecto ciclo límite de un filtro digital es complejo y difícil de analizar, se toma como ejemplo un filtro de primer orden para su explicación:

La ecuación diferencia que caracteriza al filtro de primer orden es:

$$y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n) \qquad (4.4.1)$$

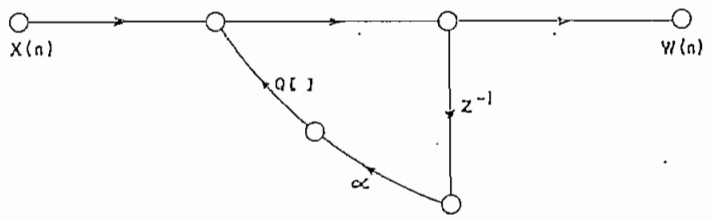
cuyo gráfico de flujo es:



(Fig. 4.12)

se asume que $\alpha = \frac{1}{2}$ y que la longitud del registro de almacenamiento para el coeficiente α, para la entrada x(n) y para el nodo variable y(n-1) es de cuatro bits.

El gráfico de flujo que representa el redondeo del producto y la nueva salida w(n) se presenta a continuación:



(Fig. 4.13)

donde Q[ ] respresenta la operación de redondeo.

w(n) satisface la siguiente ecuación diferencia no lineal:

$$w(n) = Q[\alpha w(n-1)] + x(n) \qquad (4.4.2)$$

Si $\alpha = \frac{1}{2} = 0_{\Delta}100$; $x(0) = \frac{7}{8} = 0_{\Delta}111$ se presentan los siguientes valo-

res para el redondeo de cuatro bits:

$w(0) = 0_{\Delta}111$

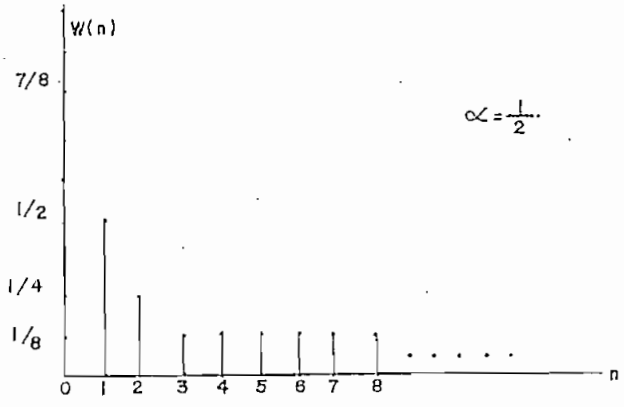
$w(1) = Q[\alpha w(0)] = 0_{\Delta}011100 = \frac{7}{16} \rightarrow$ redondeo $\rightarrow w(1) = 0_{\Delta}100; \quad x(1) = 0$

$w(2) = Q[\alpha w(1)] = 0_{\Delta}010; \quad x(2) = 0$

$w(3) = Q[\alpha w(2)] = 0_{\Delta}001; \quad x(3) = 0$

$w(4) = Q[\alpha w(3)] = 0_{\Delta}000100 \rightarrow$ redondeo $\rightarrow w(4) = 0_{\Delta}001; \quad x(4) = 0$

Para valores de $n \geq 3$ el valor de $0_{\Delta}001$ se mantiene, por lo que gráficamente se presenta como:



(Fig. 4.14)

Si $\alpha = -\frac{1}{2}$ se tiene que:

$w(0) = 0_{\Delta}111$

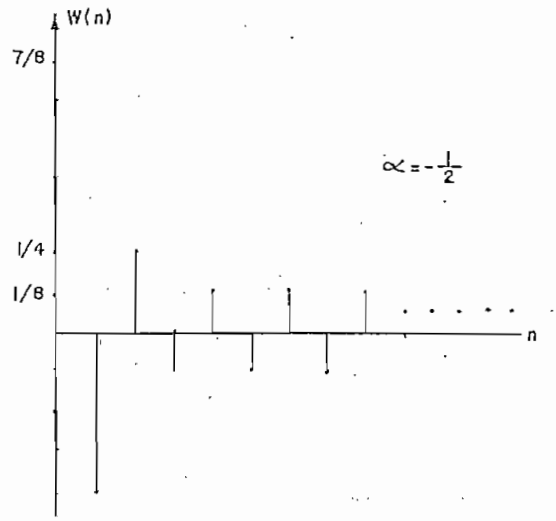
$w(1) = Q[\alpha w(o)] = 1_{\Delta}011100 \rightarrow$ redondeo $\rightarrow w(1) = 1_{\Delta}100; \quad x(1) = 0$

$w(2) = Q[\alpha w(1)] = 0_{\Delta}010; \quad x(2) = 0$

$w(3) = Q[\alpha w(2)] = 1_{\Delta}001; \quad x(3) = 0$

$w(4) = Q[\alpha w(3)] = 0_{\Delta}001; \quad x(4) = 0$

Existe una oscilación entre $\frac{1}{8}$ y $-\frac{1}{8}$, gráficamente se presenta como:



(Fig. 4.15)

A las oscilaciones periódicas que se presentan en las figuras 4.14 y 4.15 se conoce como "ciclos límites", los cuales están limitados por "bandas muertas" en la amplitud.

De la definición de redondeo se obtiene:

$$\left|Q[\alpha w(n-1)] - \alpha w(n-1)\right| \leq \frac{1}{2}\, 2^{-b} \qquad (4.4.3)$$

Además para los valores de n en el ciclo límite se cumple:

$$\left|Q[\alpha w(n-1)]\right| = \left|w(n-1)\right| \qquad (4.4.4)$$

De 4.4.3 y 4.4.4 se concluye:

$$\left|w(n-1)\right| \leq \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{-b}}{1 - |\alpha|} \qquad (4.4.5)$$

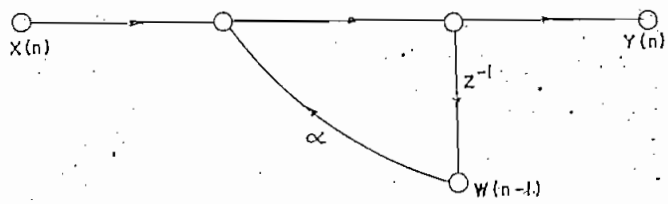
Esta ecuación define la banda muerta para un filtro de primer orden.

Para sistemas de mayor orden el análisis por ciclo límite es más complejo, por lo que se prefiere el modelo estadístico.

Análisis Estadístico de la Cuantización en Punto Flotante para Filtros IIR

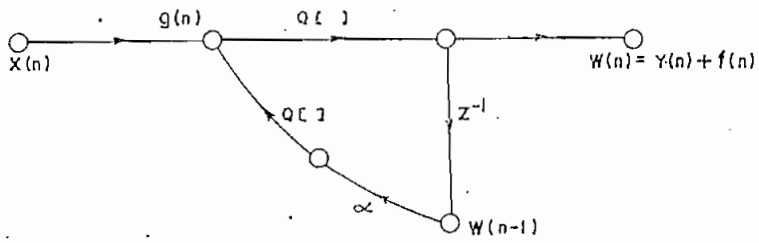
En este caso las fuentes de ruido se introducen debido a las adiciones y multiplicaciones.

Si se presenta nuevamente el filtro de primer orden con aritmética de precisión infinita en la siguiente figura:



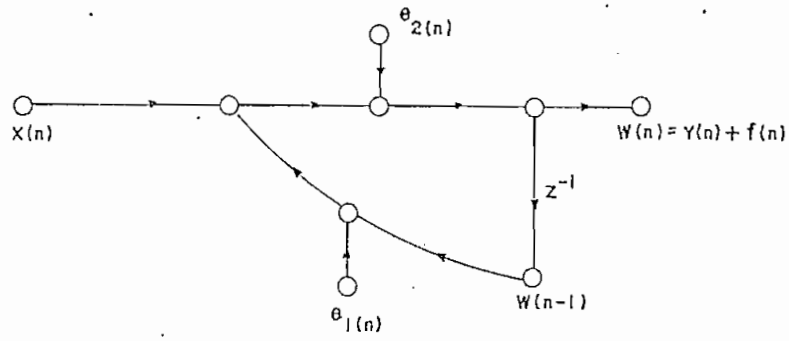
(Fig. 4.16)

Si se aplican cuantizadores para el redondeo de la mantisa se obtiene el siguiente gráfico:



(Fig. 4.17)

Si se reemplazan los cuantizadores por las fuentes ruido se obtiene la siguiente figura:



(Fig. 4.18)

Si x(n) tiene un valor medio igual a cero y las fuentes de error se definen por:

$$e_1(n) = \varepsilon_1(n)\ \alpha w(n-1)$$
$$e_2(n) = \varepsilon_2(n)\ g(n)$$

y sin la cuantización se tiene:

$$w(n-1) = y(n-1)$$
$$g(n) = y(n)$$

por lo que si los errores son pequeños, se tiene que:

$$e_1(n) \approx \alpha\varepsilon_1(n)\ y(n-1) \qquad (4.4.6)$$
$$e_2(n) \approx \varepsilon_2(n)\ y(n) \qquad (4.4.7)$$

Adicionalmente a estas aproximaciones, se asume que los errores relativos $\varepsilon_1(n)$ y $\varepsilon_2(n)$ tienen las siguientes características:

a.- Son secuencias de ruido blanco.

b.- Están distribuidos uniformemente en amplitud en el rango -2^{-b} a 2^{-b}.

c.- No están correlacionados con la entrada o con cualquier variable nodal.

d.- No están correlacionados entre si.

Puesto que $\varepsilon_1(n)$ es una secuencia ruido blanco y no es correlacionado con $y(n-1)$ por lo que $e_1(n)$ tiene una varianza igual a:

$$\sigma^2_{e_1} = \alpha^2 \sigma^2_{\varepsilon_1} E[y^2(n-1)] \tag{4.4.8}$$

$$\sigma^2_{e_1} = \alpha^2 \sigma^2_{\varepsilon_1} \sigma^2_y \tag{4.4.9}$$

para $e_2(n)$ se tiene:

$$\sigma^2_{e_2} = \sigma^2_{\varepsilon_2} \sigma^2_y \tag{4.4.10}$$

el error a la salida debido a $e_1(n)$ y $e_2(n)$ es:

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \tag{4.4.11}$$

debido a que no existe correlación entre los errores relativos, la varianza a la salida es:

$$\sigma^2_f = \sigma^2_{f_1} + \sigma^2_{f_2} \tag{4.4.12}$$

donde:

$$\sigma^2_{f_1} = \sigma^2_{e_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1^2(n) \tag{4.4.13}$$

$$\sigma_{f_2}^2 = \sigma_{e_2}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2^2(n) \qquad (4.4.14)$$

además se tiene que:

$$h_1(n) = h_2(n) = \alpha^n u(n) \qquad (4.4.15)$$

de lo que se concluye que:

$$\sigma_f^2 = \sigma_y^2 \frac{1}{1 - \alpha^2} (\alpha^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2) \qquad (4.4.16)$$

debido a la distribución uniforme en el rango de -2^{-b} a 2^{-b} de $\varepsilon_1(n)$ y $\varepsilon_2(n)$ se tiene que:

$$\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 = \frac{1}{3} 2^{-2b}$$

por lo que:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{3} 2^{-2b} \sigma_y^2 \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \qquad (4.4.17)$$

$$\frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = \frac{1}{3} 2^{-2b} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \qquad (4.4.18)$$

La ecuación 4.4.18 expresa la relación de la señal de ruido a la señal de salida sin considerar propiedades particulares de la señal de entrada.

Para filtros más generales esta relación dependerá de la forma de la

señal de entrada.

Cuando la ganancia es alta se puede aproximar la relación de la señal ruido a la señal de salida haciendo que:

$$\alpha = 1 - \delta; \quad |\delta| << 1$$

por lo que la ecuación 4.4.18 queda de la siguiente manera:

$$\frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} = \frac{1}{3} 2^{-2b} \frac{1}{\delta} \tag{4.4.19}$$

Igualmente el análisis para sistemas de mayor orden es más complicado, la cuantización del ruido depende de los parámetros del sistema y de la estructura usada para implementar el sistema.

Efecto en Filtros FIR

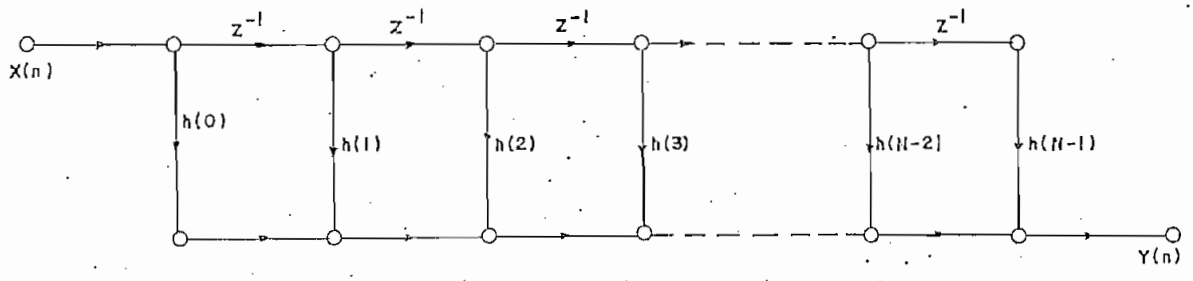
Para este tipo de filtros no existen los ciclos límite para las formas de estructura directa o en cascada ya que no tienen realimentación.

Análisis Estadístico de la Cuantización en Punto Fijo para Filtros FIR

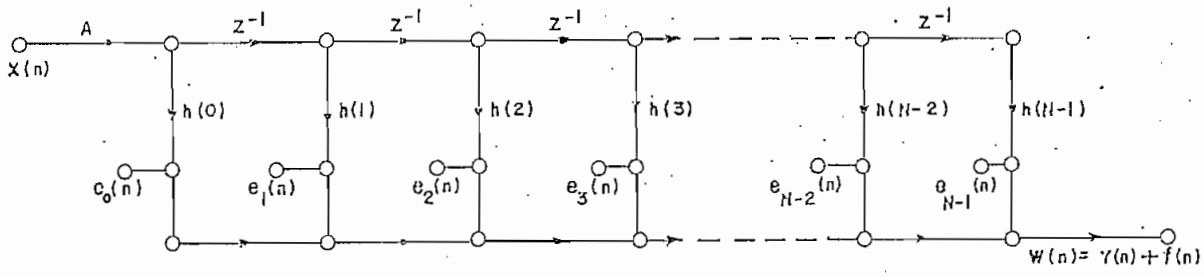
La realización en forma directa de un sistema lineal de desplazamiento invariante con una respuesta h(n) a la excitación muestreo unidad está dada por la ecuación:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, x(n-k) \tag{4.4.20}$$

El gráfico de flujo para el sistema lineal ideal y para el modelo estadístico se presenta a continuación:



(Fig. 4.19)



(Fig. 4.20)

A es una constante de ganancia, que se aplica a la entrada con la finalidad de prevenir el overflow, adicionalmente se asume lo siguiente:

a.- Las fuentes $e_k(n)$ son fuentes de ruido blanco.

b.- Los errores están uniformemente distribuidos en el intervalo de cuantización.

c.- Las fuentes de error no son correlacionadas entre sí, ni tampoco con la entrada.

El ruido a la salida es:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e_k(n) \qquad (4.4.21)$$

$$\sigma_f^2 = N \frac{2^{-2b}}{12} \qquad (4.4.22)$$

De la ecuación 4.4.22 se observa que el ruido es proporcional a N, longitud de la respuesta a la excitación impulso unitaria, y es independiente de los parámetros del filtro.

La aritmética de punto fijo tiene la limitación del rango dinámico, por lo que es necesario realizar un escalamiento de la entrada para evitar el overflow, lo que se logra si es que:

$$|y(n)| \leq x_{máx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \qquad (4.4.23)$$

$$|y(n)| < 1 \text{ para todo valor de } n$$

por lo que se tiene que:

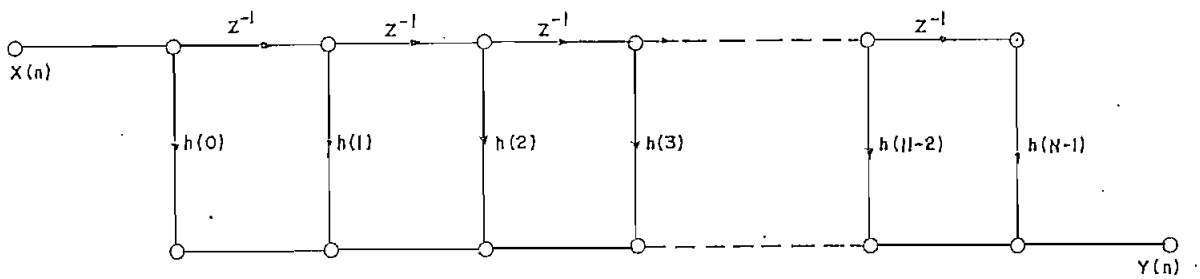
$$A < \frac{1}{x_{máx} \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|} \qquad (4.4.24)$$

El escalamiento de la ecuación 4.4.24 será apropiado para señales de banda ancha como lo son las señales de ruido blanco.

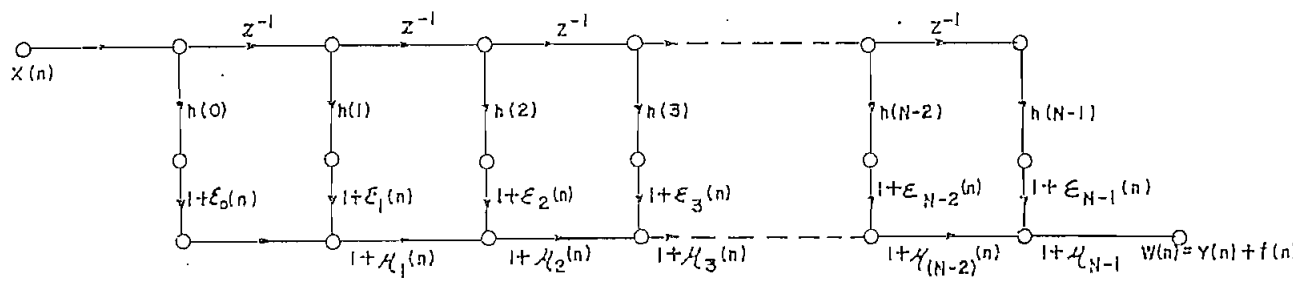
Análisis Estadístico de la Cuantización en Punto Flotante para Filtros FIR

La aritmética de punto flotante elimina el rango dinámico, pero presenta como en el caso de filtros IIR fuentes de error debidas al redondeo de los productos y sumas.

El diagrama de flujo del sistema lineal ideal y del modelo estadístico se presenta a continuación:



(Fig. 4.21)



(Fig. 4.22)

Como en el caso anterior se asumen las mismas condiciones para las fuentes de error.

La salida w(n) se expresa como:

$$w(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A(n,k)\ h(k)\ x(n-k) \qquad (4.4.25)$$

donde:

$$A(n,0) = (1+\varepsilon_0(n)) \prod_{r=1}^{N-1} (1+\mu_r(n))$$

$$A(n,k) = (1+\varepsilon_k(n)) \prod_{r=k}^{N-1} (1+\mu_r(n))$$

y:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [A(n,k)-1]\ h(k)\ x(n-k) \qquad (4.4.26)$$

Si la señal de entrada es aleatoria, con una varianza σ_x^2, la varianza de la señal de salida será:

$$\sigma_f^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{N-1} h^2(k)\{E[A^2(n,k)] - 1\} \qquad (4.4.27)$$

donde:

$$E[A^2(n,0)] = (1 + \frac{2^{-2b}}{3})^N \qquad (4.4.28)$$

$$E[A^2(n,k)] = (1 + \frac{2^{-2b}}{3})^{N+1-k} \qquad (4.4.29)$$

$$E[A^2(n,k)] = 1+(N+1-k)\frac{2^{-2b}}{3} = \text{aproximación binomial}$$

En consecuencia:

$$\sigma_f^2 = (N+1)\frac{2^{-2b}}{3}\sigma_x^2 \sum_{k=0}^{N-1} h^2(k)\left(1-\frac{k}{N+1}\right) \qquad (4.4.30)$$

$$\sigma_x^2 \sum_{k=0}^{N-1} h^2(k)\left(1-\frac{k}{N+1}\right) < \sigma_y^2$$

$$\frac{\sigma_f^2}{\sigma_y^2} \leq (N+1)\frac{2^{-2b}}{3} \qquad (4.4.31)$$

La ecuación 4.4.31 nos da la relación de la señal de ruido a la señal de salida.

Si los productos y sumas parciales son acumulados en orden del incremento de la magnitud de la respuesta a la excitación impulso unitaria se espera un error promedio pequeño en la realización de punto flotante.

CAPITULO QUINTO

IMPLEMENTACION DE UN PROGRAMA PARA EL DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL

El programa desarrollado permite realizar el diseño de filtros digitales FIR con fase lineal, entre estos se pueden mencionar los filtros pasa bajos, pasa-altos, pasabanda, filtros con múltiples secciones pasabanda y múltiples secciones con banda de detención.

El algoritmo original fue desarrollado por J. McClellan y permite obtener la respuesta de frecuencia del filtro a una excitación impulso unitaria, para el efecto utiliza los coeficientes de la mejor aproximación obtenida mediante la subrutina Remez.

El programa ha sido desarrollado en FORTRAN IV para el diseño de filtros digitales con múltiples secciones pasabanda y múltiples secciones con banda de detención, el mismo se ha catalogado en el computador de la Escuela Politécnica Nacional (IBM 370/125).

En este capítulo se presenta una descripción del programa desarrollado, así como también resultados obtenidos de varios ejemplos de aplicación.

5.1 DESCRIPCION DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS

El conjunto implementado consta de un programa principal y varias funciones y subrutinas.

El programa principal utiliza como parámetros de entrada la longitud del filtro, el número de bandas de frecuencia, la atenuación deseada en cada banda de frecuencia, factor de ponderación en cada banda de frecuencia, la longitud de la densidad de la grilla. Realiza la grafización de la respuesta de frecuencia.

Subrutinas y Funciones utilizadas

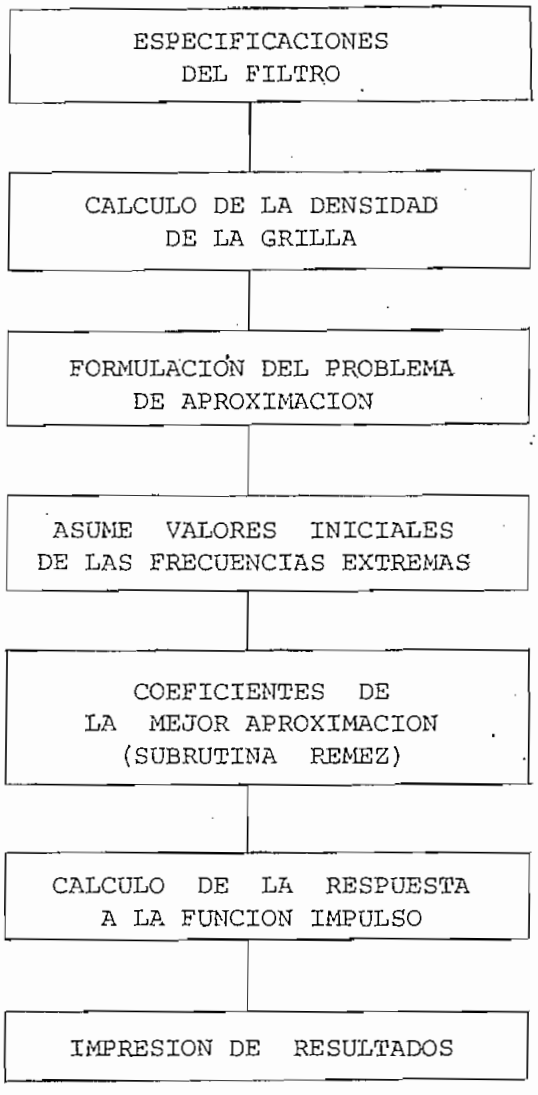
Subrutina Remez determina en base al cálculo de la mejor aproximación de Chebyshev los coeficientes de la función de transferencia del filtro. Trabaja con las siguientes funciones:

Función D calcula los coeficientes de la interpolación de Lagrange que se necesitan en la Función G.

Función G evalúa la respuesta de frecuencia del filtro usando la fórmula de interpolación de Lagrange en la forma baricéntrica.

Subrutina Falla entrega mensajes relativos a fallas en la convergencia que se pueden presentar durante el cálculo de la mejor aproximación, es activada por la subrutina Remez.

El diagrama de flujo general del algoritmo se presenta a continuación.



(Fig. 5.1)

A continuación se describe el trabajo realizado por el programa principal y las subrutinas más importantes.

PROGRAMA PRINCIPAL

Especificaciones del Filtro

Se describen las características del filtro desde la instrucción . 13

hasta la instrucción 23 del programa principal, dichas especificaciones son:

a.- Longitud del filtro, identifica el número de elementos de la secuencia respuesta de frecuencia del filtro. Su valor debe ser mayor o igual a 3; si se omite o se asigna un valor menor, el programa asume el valor igual a 3.

b.- Número de bandas de frecuencia, se refiere al total de secciones pasabanda o de bandas de detención, su máximo valor es igual a 10, su valor se almacena en la variable NBANDS.

c.- Límites superior o inferior de cada una de las bandas de frecuencia, se almacena en el arreglo EDGE.

d.- Magnitud de la respuesta de frecuencia deseada en cada banda, se carga en el arreglo FX.

e.- La magnitud de la ponderación correspondiente a cada banda de frecuencia, se almacena en el arreglo WTX.

f.- Longitud de la densidad de la grilla, su valor debe ser mayor a 16, si se omite, el programa asume un valor igual a 16.

Este parámetro sirve para formar un conjunto de valores tanto de frecuencia como de ponderación entre los límites superior e inferior de cada banda de frecuencia; esto está comprendido desde la instrucción 36 hasta la instrucción 52 del programa principal.

Cálculo de la densidad de la Grilla

La determinación de los puntos de la grilla para cada conjunto de bandas de frecuencia es directa, el espacio entre los puntos de la grilla viene dado por: 0.5/(LGRID*NFCNS), donde NFCNS es el número de funciones de aproximación, el programa considera esta construcción desde la instrucción 29 hasta la instrucción 33.

Problema de Aproximación

Se establece con la respuesta de magnitud deseada D(f), la función de ponderación W(f), ambas funciones son contínuas en un subconjunto F limitado por los valores 0 y 0.5, y con uno de los cuatro casos de filtros con fase lineal expresados en G(f), de acuerdo con lo desarrollado en el capítulo cuarto, pág. 76.

Se debe minimizar el máximo error absoluto, expresado en la ecuación 4.1.42. Tanto D(f) como W(f) son evaluados sobre los diferentes puntos de la grilla y son almacenados en los arreglos DES y WT, respectivamente.

La formulación del problema de aproximación equivalente consiste en formar $\hat{D}(f)$ y $\hat{W}(f)$ tales que satisfagan la ecuación 4.1.43. Esto se realiza desde la instrucción 57 hasta la instrucción 60 en el programa principal.

Asunción inicial de Frecuencias Extremas

Se asumen tantos valores de frecuencias extremas igualmente es-

paciadas sobre la grilla como funciones de aproximación (NFCNS) se tengan, y es realizada desde la instrucción 61 hasta la instrucción 64 del programa principal.

Cálculo de la respuesta Impulso e Impresión

Luego de determinar la mejor aproximación, los coeficientes de ésta se utilizan para calcular la respuesta de frecuencia, esto se realiza desde la instrucción 68 hasta la instrucción 76.

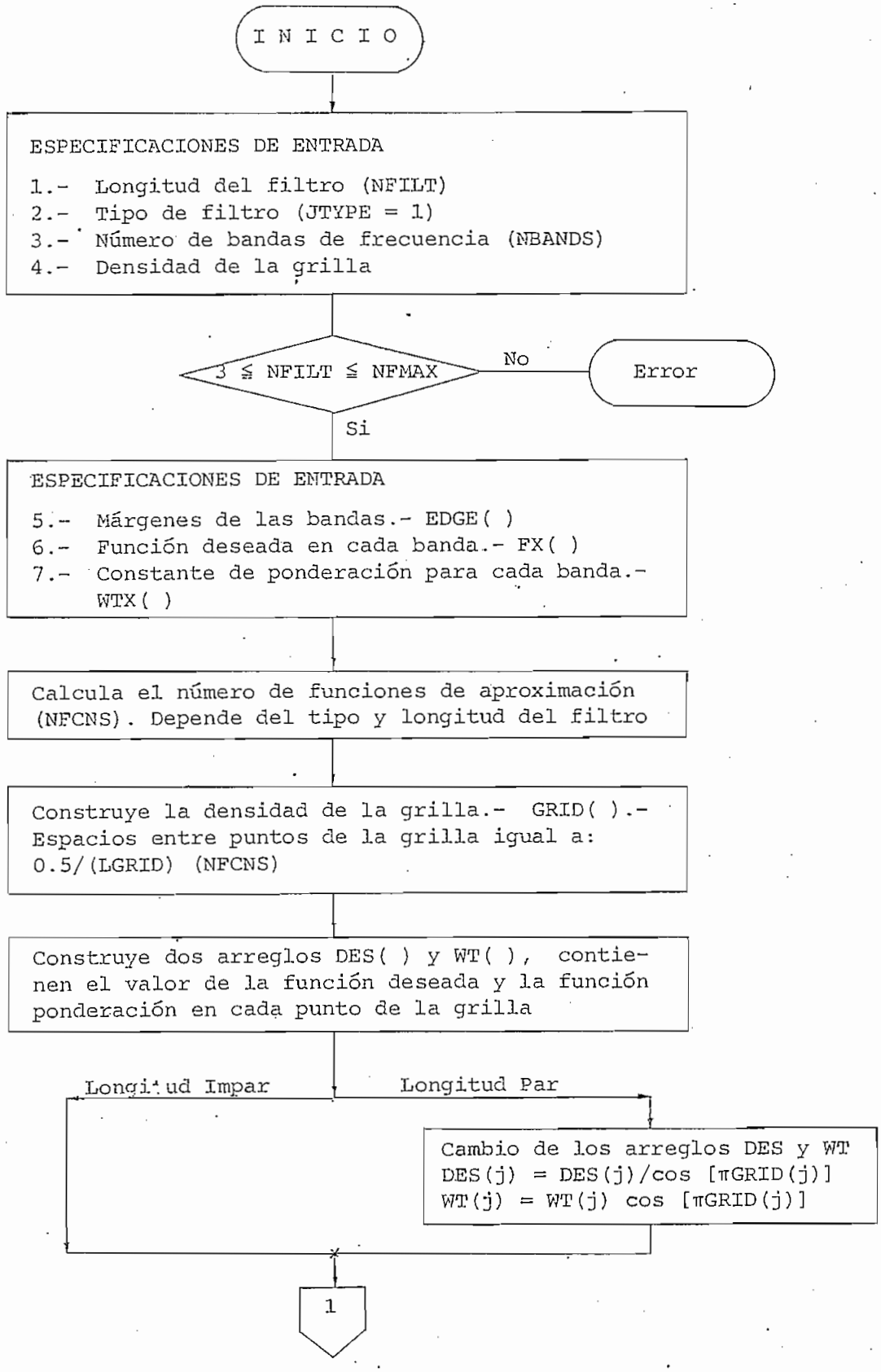
La impresión de resultados se realiza a partir de la instrucción 77 hasta la 147; la salida comprende los valores de la respuesta de frecuencia, los valores de las frecuencias extremas, los datos de entrada y la grafización de la respuesta de frecuencia.

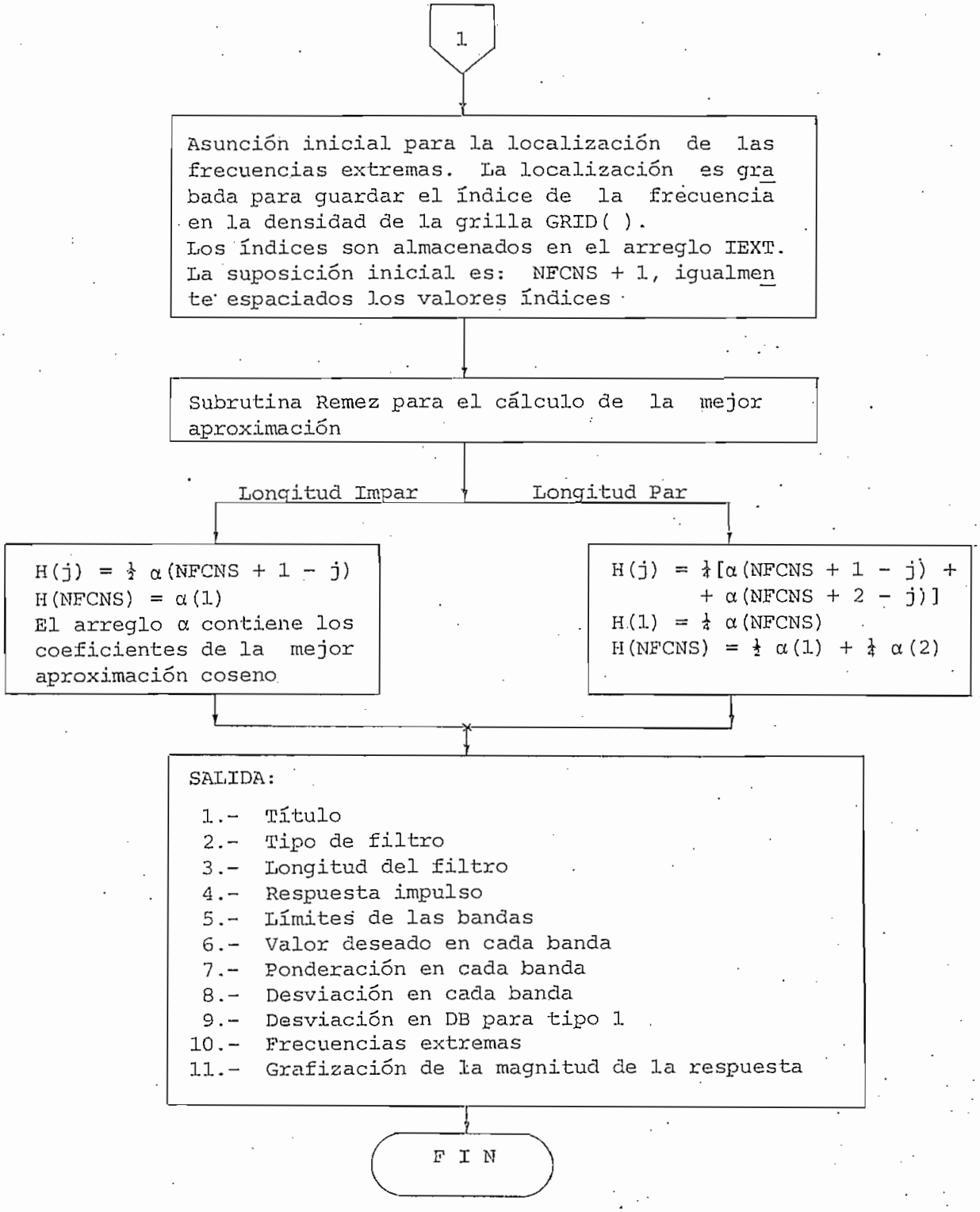
SUBRUTINA REMEZ

Coeficientes de la mejor Aproximación

Permite resolver el problema de aproximación calculando la aproximación ponderada de Chebyshev de una función contínua con una suma de cosenos. En la instrucción 67 del programa principal se llama a ejecución a la subrutina Remez.

En base a los conceptos anteriores, se presenta un diagrama de flujo más detallado para el algoritmo del diseño del filtro.


I N I C I O
ESPECIFICACIONES DE ENTRADA
1.- Longitud del filtro (NFILT)
2.- Tipo de filtro (JTYPE = 1)
3.- Número de bandas de frecuencia (NBANDS)
4.- Densidad de la grilla
3 ≦ NFILT ≦ NFMAX
No
Error
Si
ESPECIFICACIONES DE ENTRADA
5.- Márgenes de las bandas.- EDGE( )
6.- Función deseada en cada banda.- FX( )
7.- Constante de ponderación para cada banda.- WTX( )
Calcula el número de funciones de aproximación (NFCNS). Depende del tipo y longitud del filtro
Construye la densidad de la grilla.- GRID( ).- Espacios entre puntos de la grilla igual a: 0.5/(LGRID) (NFCNS)
Construye dos arreglos DES( ) y WT( ), contienen el valor de la función deseada y la función ponderación en cada punto de la grilla
Longitud Impar
Longitud Par
Cambio de los arreglos DES y WT
DES(j) = DES(j)/cos [πGRID(j)]
WT(j) = WT(j) cos [πGRID(j)]
1


1
Asunción inicial para la localización de las frecuencias extremas. La localización es grabada para guardar el índice de la frecuencia en la densidad de la grilla GRID( ).
Los índices son almacenados en el arreglo IEXT.
La suposición inicial es: NFCNS + 1, igualmente espaciados los valores índices
Subrutina Remez para el cálculo de la mejor aproximación
Longitud Impar
Longitud Par
H(j) = ½ α(NFCNS + 1 - j)
H(NFCNS) = α(1)
El arreglo α contiene los coeficientes de la mejor aproximación coseno
H(j) = ¼[α(NFCNS + 1 - j) + α(NFCNS + 2 - j)]
H(1) = ½ α(NFCNS)
H(NFCNS) = ½ α(1) + ¼ α(2)
SALIDA:
1.- Título
2.- Tipo de filtro
3.- Longitud del filtro
4.- Respuesta impulso
5.- Límites de las bandas
6.- Valor deseado en cada banda
7.- Ponderación en cada banda
8.- Desviación en cada banda
9.- Desviación en DB para tipo 1
10.- Frecuencias extremas
11.- Grafización de la magnitud de la respuesta
F I N

(Fig. 5.2)

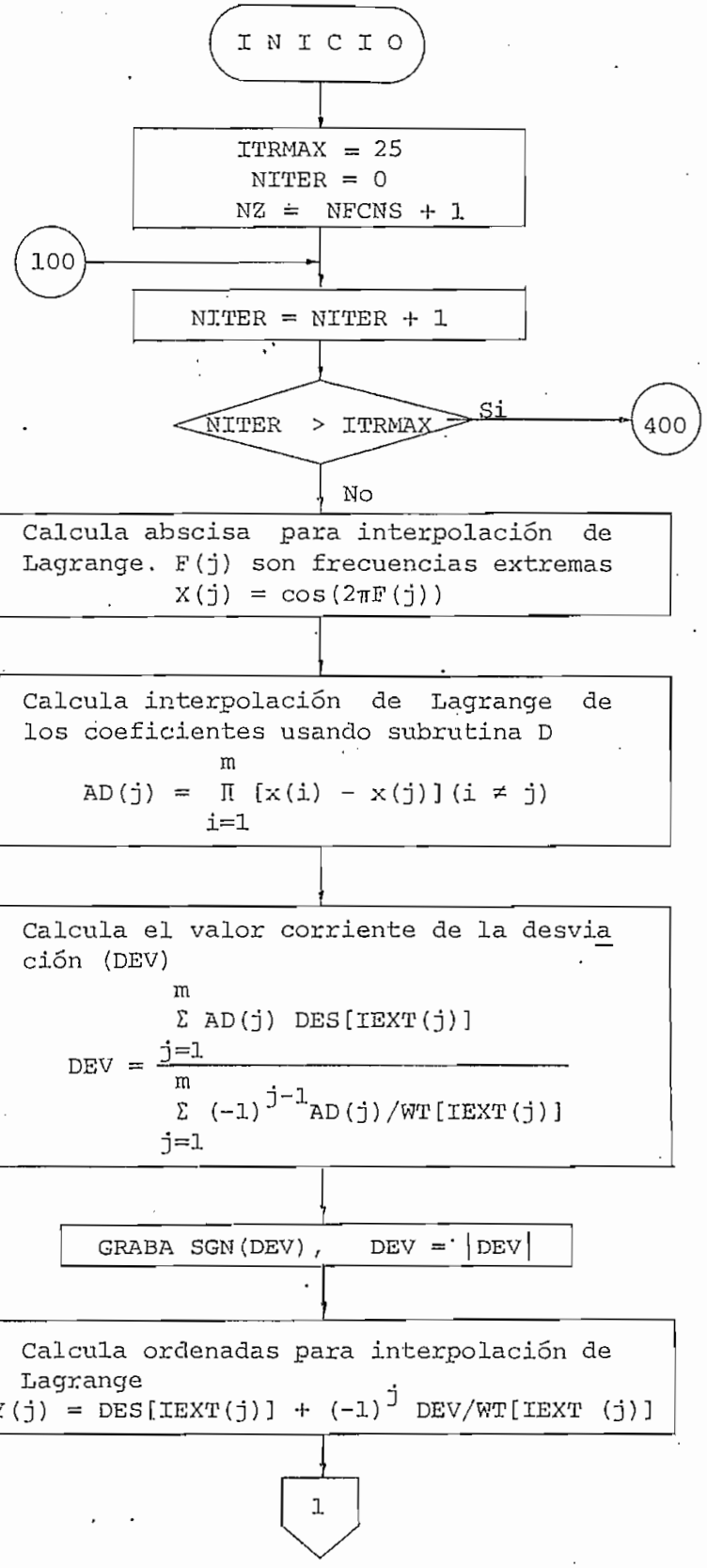
Las entradas a la subrutina son: densidad de grilla, función deseada sobre esta grilla, función ponderada sobre la grilla, frecuencias extremas inicialmente asumidas y el número de funciones de aproximación.

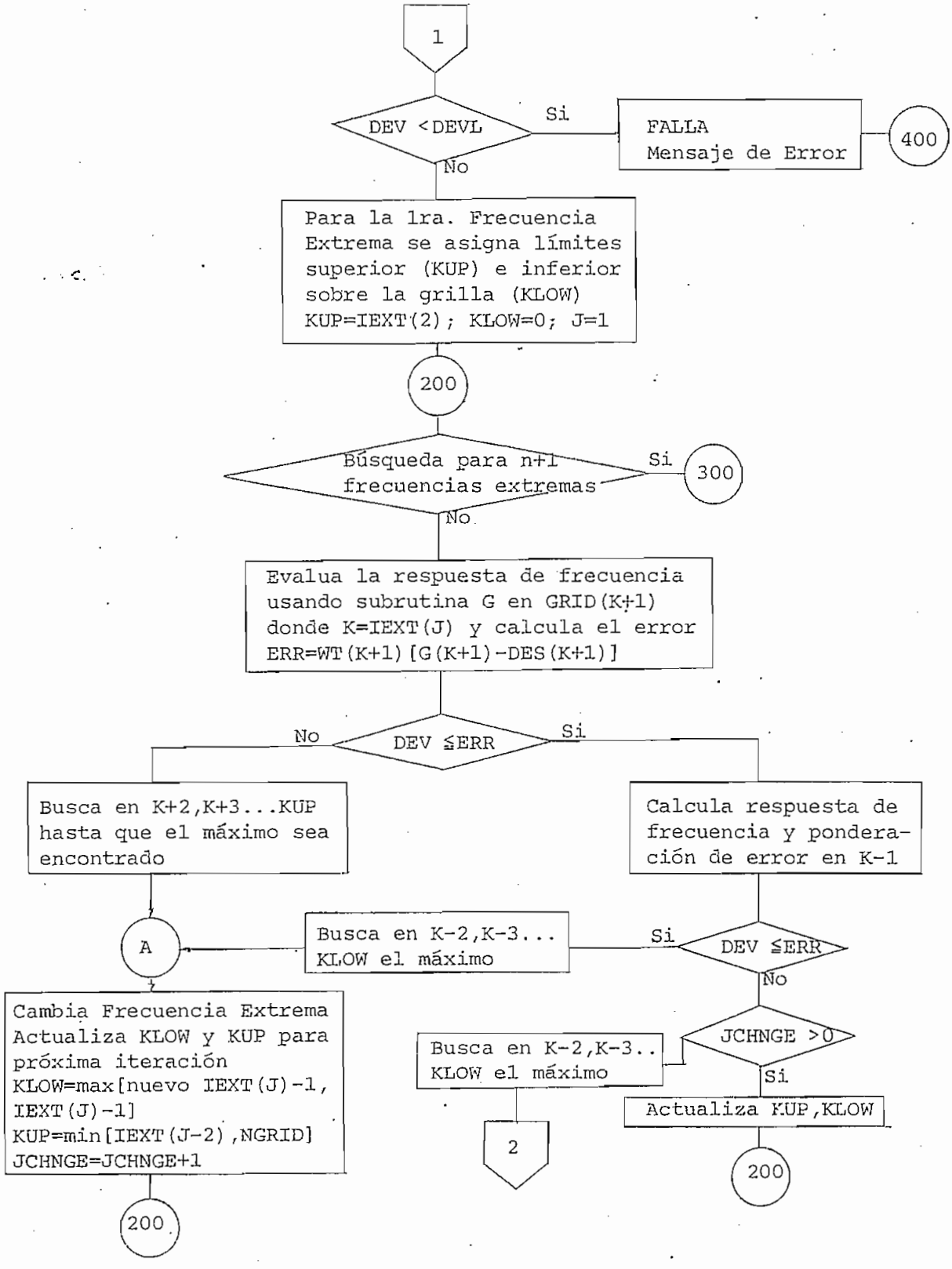
Dentro de la implementación del filtro digital desempeña un papel importante la subrutina Remez, la misma que calcula la aproximación ponderada de Chebyshev de una función contínua con una suma de cosenos.

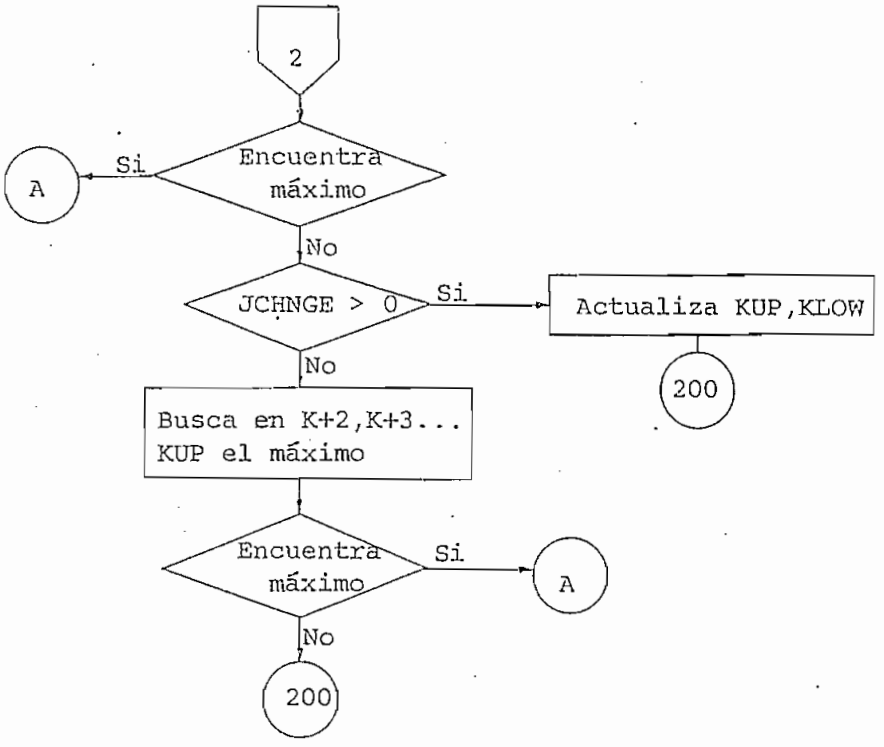
La teoría de la aproximación de Chebyshev sobre un conjunto compacto F, establece que el problema expresado en la ecuación 4.1.42 tiene una solución única, y más importante es el hecho de que la condición necesaria y suficiente que caracteriza la mejor aproximación está dada por el teorema de alternación (capítulo cuarto, pág. 79).

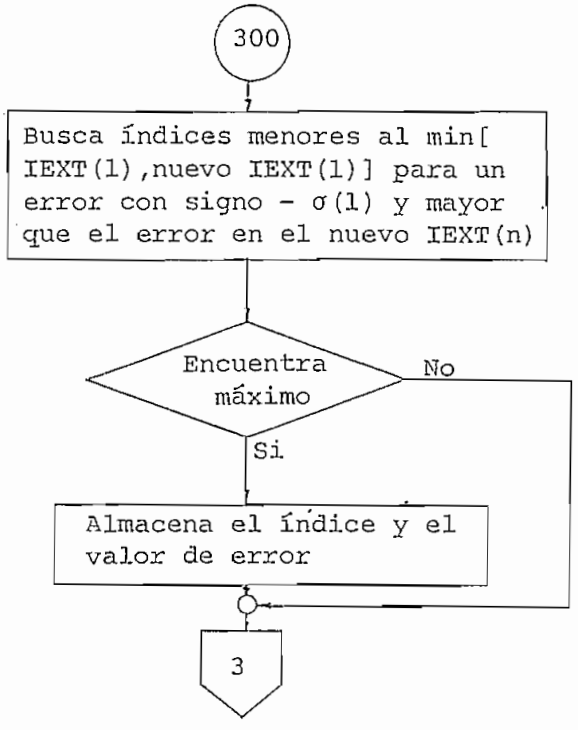
La subrutina minimiza el error de Chebyshev determinando la mejor localización de las frecuencias extremas y en base a estas frecuencias calcula sus coeficientes.

El diagrama de flujo de la subrutina Remez se presenta a continuación:


I N I C I O
ITRMAX = 25
NITER = 0
NZ = NFCNS + 1
100
NITER = NITER + 1
NITER > ITRMAX
Si
400
No
Calcula abscisa para interpolación de Lagrange. F(j) son frecuencias extremas
X(j) = cos(2πF(j))
Calcula interpolación de Lagrange de los coeficientes usando subrutina D
AD(j) = Π [x(i) - x(j)] (i ≠ j)
Calcula el valor corriente de la desviación (DEV)
DEV = Σ AD(j) DES[IEXT(j)] / Σ (-1)^(j-1) AD(j)/WT[IEXT(j)]
GRABA SGN(DEV), DEV = |DEV|
Calcula ordenadas para interpolación de Lagrange
Y(j) = DES[IEXT(j)] + (-1)^j DEV/WT[IEXT (j)]
1


1
DEV <DEVL
Si
FALLA
Mensaje de Error
400
No
Para la 1ra. Frecuencia Extrema se asigna límites superior (KUP) e inferior sobre la grilla (KLOW)
KUP=IEXT(2); KLOW=0; J=1
200
Búsqueda para n+1 frecuencias extremas
Si
300
No
Evalua la respuesta de frecuencia usando subrutina G en GRID(K+1) donde K=IEXT(J) y calcula el error ERR=WT(K+1)[G(K+1)-DES(K+1)]
No
DEV ≤ERR
Si
Busca en K+2,K+3...KUP hasta que el máximo sea encontrado
Calcula respuesta de frecuencia y ponderación de error en K-1
A
Busca en K-2,K-3... KLOW el máximo
Si
DEV ≤ERR
No
Cambia Frecuencia Extrema Actualiza KLOW y KUP para próxima iteración
KLOW=max[nuevo IEXT(J)-1, IEXT(J)-1]
KUP=min[IEXT(J-2),NGRID]
JCHNGE=JCHNGE+1
JCHNGE >0
Busca en K-2,K-3.. KLOW el máximo
Si
Actualiza KUP,KLOW
2
200
200


2
Encuentra máximo
Si
A
No
JCHNGE > 0
Si
Actualiza KUP,KLOW
200
No
Busca en K+2,K+3... KUP el máximo
Encuentra máximo
Si
A
No
200


300
Busca índices menores al min[IEXT(1),nuevo IEXT(1)] para un error con signo - σ(1) y mayor que el error en el nuevo IEXT(n)
Encuentra máximo
No
Si
Almacena el índice y el valor de error
3

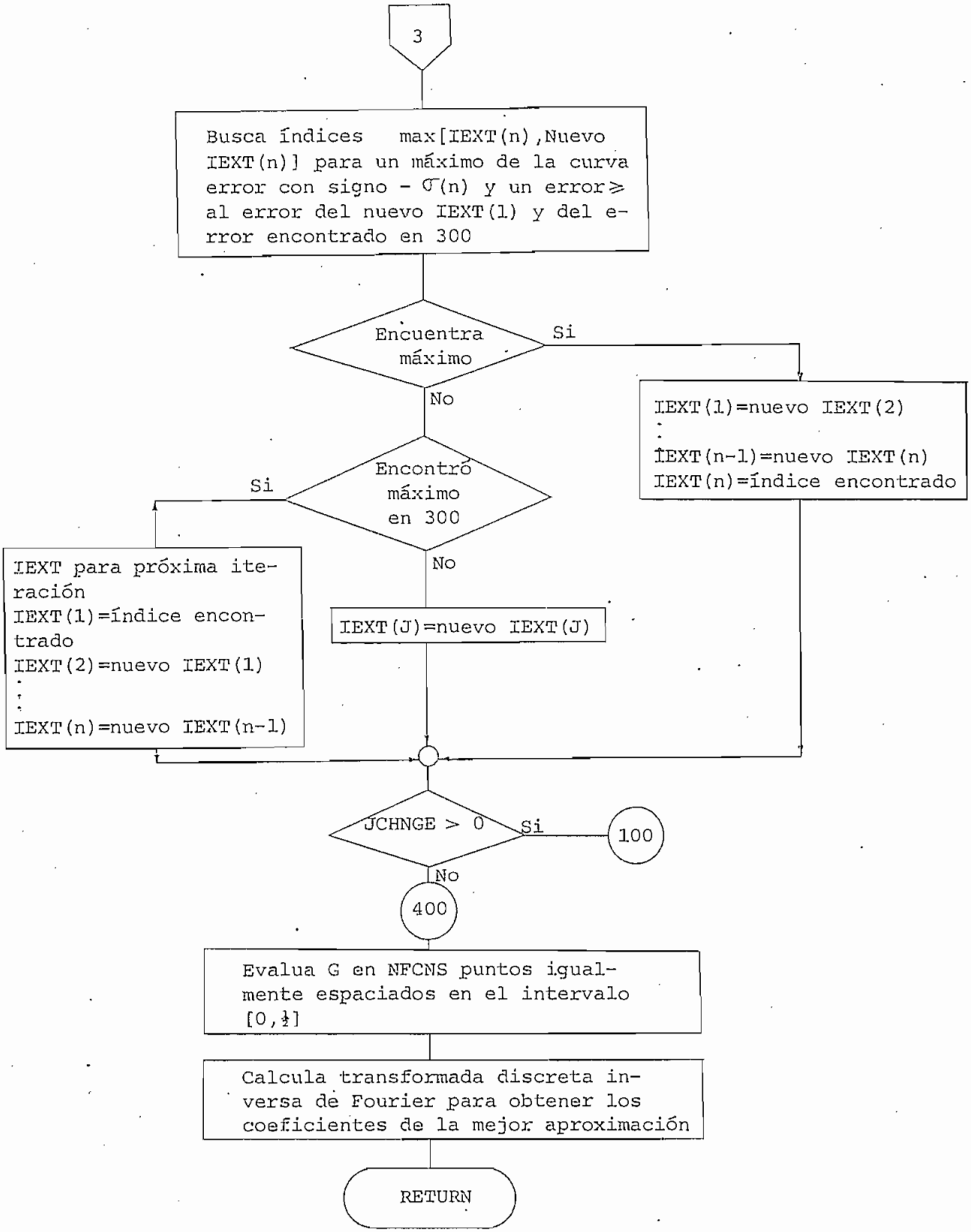

3
Busca índices max[IEXT(n),Nuevo IEXT(n)] para un máximo de la curva error con signo - σ(n) y un error ≥ al error del nuevo IEXT(1) y del error encontrado en 300
Encuentra máximo
Si
No
IEXT(1)=nuevo IEXT(2)
IEXT(n-1)=nuevo IEXT(n)
IEXT(n)=índice encontrado
Encontró máximo en 300
Si
No
IEXT para próxima iteración
IEXT(1)=índice encontrado
IEXT(2)=nuevo IEXT(1)
IEXT(n)=nuevo IEXT(n-1)
IEXT(J)=nuevo IEXT(J)
JCHNGE > 0
Si
100
No
400
Evalua G en NFCNS puntos igualmente espaciados en el intervalo [0,½]
Calcula transformada discreta inversa de Fourier para obtener los coeficientes de la mejor aproximación
RETURN

FIG. 5.3

La subrutina Remez realiza como máximo 25 iteraciones, en caso de que el número de iteraciones sea mayor a 25 (instrucción 169) se bifurca a 400 (instrucción 317), donde se realiza el cálculo de los coeficientes de la mejor aproximación usando la transformada discreta inversa de Fourier.

En base a las frecuencias extremas inicialmente asumidas en el programa principal, se realiza desde la instrucción 170 hasta la instrucción 173 el cálculo de las abscisas de las frecuencias extremas para la interpolación de Lagrange.

La interpolación de Lagrange de los coeficientes, usando la función D, se realiza desde la instrucción 174 hasta la instrucción 176.

El cálculo de la desviación (DEV) de las frecuencias extremas se realiza desde la instrucción 177 hasta la instrucción 187.

Se obtiene el módulo de la desviación $|(DEV)|$ desde la instrucción 188 hasta la instrucción 190.

En base a las frecuencias extremas se calculan las ordenadas para la interpolación de Lagrange desde la instrucción 191 hasta la instrucción 196.

En la instrucción 197 se compara el valor de la desviación (DEV) con la desviación anteriormente calculada (DEVL), si es menor imprime un mensaje por medio de la subrutina FALLA por posible error en la convergencia de la desviación y va a la instrucción 400 desde la cual se realiza el cálculo de los coeficientes de la mejor aproximación, si es mayor asigna para

la primera frecuencia extrema límites superior e inferior e inicia la búsqueda de la mejor aproximación para cada frecuencia extrema, para lo cual evalúa la respuesta de frecuencia usando la función G y calcula la función de error (4.1.42) desde la instrucción 200 hasta la instrucción 316.

Desde la instrucción 317 hasta la instrucción 398 se calculan los coeficientes de la mejor aproximación que servirán para el cálculo de la respuesta de frecuencia del filtro.

Función D.- Llamada a ejecución por la subrutina Remez realiza el cálculo de la interpolación de Lagrange de los coeficientes, los diferentes pasos de esta función se presentan desde la instrucción 399 hasta la instrucción 416.

Función G.- Llamada a ejecución por la subrutina Remez para evaluar la respuesta de frecuencia usando la fórmula de interpolación de Lagrange en la forma baricéntrica, la misma se presenta desde la instrucción 417 hasta la 435.

SUBRUTINA FALLA

Constituye una salida a impresora, con un conjunto de mensajes sobre posibles fallas en la convergencia, estos son:

- Probable causa está en un error de redondeo de la máquina
- La respuesta impulso puede ser correcta
- Chequee con la respuesta de frecuencia.

Se presenta desde la instrucción 436 hasta la 440 y es llamada a eje

cución por la subrutina Remez.

El listado del programa desarrollado de acuerdo con los diagramas de flujo de las figuras 5,1, 5.2 y 5,3 se presenta en el ANEXO 1.

5.2 APLICACION DE LOS PROGRAMAS Y MODO DE EMPLEO DE LOS MISMOS

5.2.1 Aplicación de los Programas

La aplicación básica del programa aquí implementado es la obtención de la respuesta de frecuencia a una excitación impulso unitaria de un filtro digital, para lo cual se realiza una serie de aproximaciones hasta conseguir minimizar la función de error expresada en la ecuación 4.1.42 tal que ERR ≦ DEV, todo esto lo realiza la subrutina Remez.

Previamente se calcula el número de funciones de aproximación, se construye una grilla, sobre la cual se calcula la magnitud de la respuesta deseada y la función de ponderación.

Realiza una suposición inicial para la localización sobre la grilla de las frecuencias extremas, que servirán como punto de partida para resolver el problema de aproximación; la mejor aproximación se determina de acuerdo con el teorema de alternación.

Luego se realiza el cálculo de los coeficientes de la mejor

aproximación usando la transformada discreta inversa de Fourier.

A continuación se realiza el cálculo de la respuesta impulso unitaria, luego se imprime la información de los parámetros de entrada, de la respuesta impulso unitaria, y la grafización de la respuesta de frecuencia que permite visualizar su magnitud.

5.2.2 Modo de empleo

Para el diseño del filtro es necesario suministrar al computador la información que permita obtener el filtro digital deseado, se deben proporcionar los siguientes datos:

Tarjeta # 1.- Longitud del filtro, número de bandas de frecuencia, longitud de la densidad de la grilla.

Tarjeta # 2.- Los límites superior e inferior en cada una de las bandas de frecuencia.

Tarjeta # 3.- La atenuación deseada en cada una de las bandas de frecuencia.

Tarjeta # 4.- El valor de la ponderación para cada una de las bandas de frecuencia.

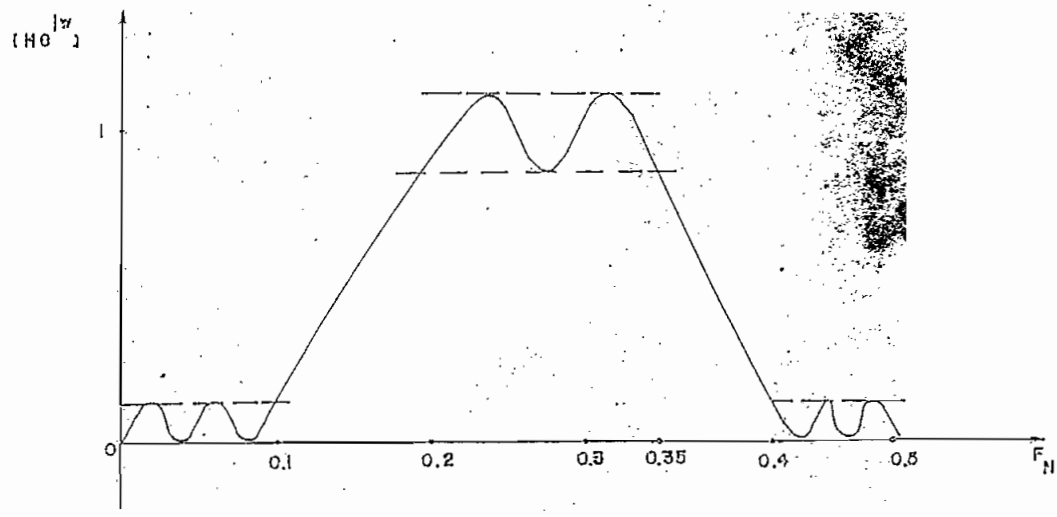
Se debe proceder a perforar las tarjetas de datos de acuerdo con lo señalado en la Tabla A2-1 del ANEXO 2, igualmente se

presenta el código de las tarjetas de control que permiten que se ejecute el programa.

En caso de que se presente algún error en las tarjetas de datos, imprime un mensaje de error y se cancela el trabajo; esto sucede especialmente si la longitud del filtro está fuera de los límites.

EJEMPLO DE APLICACION

Se considera el siguiente diseño



(Fig. 5.4)

Las características deseadas presentadas en la figura 5.4 son :

N° Banda	1	2	3
Límite inferior	0.0	0.2	0.425
Límite Superior	0.1	0.35	0.5
Atenuación deseada	0	1	0
Valor de ponderación	10	1	10

Como parámetros adicionales se dan:

Longitud del Filtro	32
Longitud de la Grilla	32

Se desea deerminar:

1.- La respuesta a una excitación impulso unitaria

2.- El gráfico de la respuesta de frecuencia

SOLUCION

Como se puede observar en el resultado presentado en la Tabla A2-2 (Anexo 2), las características del filtro obtenido difieren de las características deseadas, así en las zonas de las bandas de detención se desea que la magnitud de la respuesta sea cercana al valor cero o sea que la atenuación en los puntos de la zona eliminabanda sea más negativa (en DB).

Con el objeto de obtener una mejor respuesta, se realizaron variaciones en ciertos parámetros como son: el valor de la ponderación, la longitud de la densidad de la grilla y la longitud del filtro.

Los resultados obtenidos al realizar dichas variaciones son también presentados en la Tabla A2-2 (Anexo 2). Así al variar la ponderación en las zonas eliminabanda se observa que si este valor aumenta la atenuación aumenta, mientras que la atenuación disminuye en las zonas pasabanda, esto se debe a que el error en que se incurre es menor. En otras palabras, a mayor valor de ponderación en las zonas de las bandas de detención la respuesta de frecuencia obtenida se acercará más a la respuesta de frecuencia deseada.

En forma similar se hizo variar la longitud de la densidad de la grilla y se mantuvieron constantes los parámetros restantes, el resultado indica que cuando se tiene un menor número de puntos en la grilla el error máximo evaluado en esos puntos es menor que en el caso en que se tenga una grilla con mayor cantidad de puntos, esto se debe a que al tener mayor cantidad de puntos la interpolación es susceptible de un mayor error. Se debe considerar que para obtener un resultado aceptable la longitud de la grilla debe tener un valor mínimo, en el presente trabajo se ha asumido igual a 16.

Al variar la longitud del filtro y mantener el resto de parámetros constantes se observó que al aumentar la longitud del filtro la atenuación en las zonas de bandas de detención disminuye, igual comportamiento se presenta en las zonas pasabanda.

CAPITULO SEXTO

CONCLUSIONES

El presente trabajo trata de dar una herramienta que sirva de ayuda para la obtención de las características deseadas en el diseño de un filtro digital (FIR) con fase lineal, lo que se logra con el método de intercambio Remez que es utilizado en el programa, el cual a su vez brinda la facilidad para la variación de ciertos parámetros de entrada como son: la longitud de la densidad de la grilla, longitud del filtro y variación del valor de la ponderación en cada banda de frecuencia, lo que permite obtener resultados que sirven para un mejor análisis; lo cual quedó demostrado en el ejemplo de aplicación, de que se obtendrá una mejor respuesta de frecuencia si es que se aumenta el valor de la longitud del filtro.

Indudablemente que el algoritmo tiene sus limitaciones que pueden ser solucionadas, así se tiene que el programa permite el diseño solamente de un tipo de filtro como son los filtros selectivos de frecuencia, pudiendo ser implementado el diseño de otros tipos de filtros. Otra limitación es el valor máximo que puede tener la longitud del filtro, dicho valor es igual a 128 y podría ser modificado, para lo cual se debe tener la precaución de que no se sobrepase el área común en memoria ya que paralelamente se debería modificar el dimensionamiento de ciertos arreglos.

Otra limitación se tiene en la grafización de la respuesta de frecuen-

cia ya que no se puede obtener un gráfico que permita observar de una manera más exacta los efectos de la atenuación, por cuanto no se dispone de un grafizador.

El diseño de un filtro digital (FIR) constituye una parte dentro del procesamiento digital de señales, por lo que el presente trabajo puede ser mejorado, superando las limitaciones anteriormente señaladas. Puede servir como referencia para el diseño de un filtro digital (IIR). La respuesta de frecuencia obtenida sirve para que se realice el proceso de convolución con señales de entrada y así obtener señales filtradas.

B I B L I O G R A F I A

1. OPPENHEIM, A.V., Digital Signal Processing, Prentice Hall.Inc., N.J. 1975

2. LIU, A., Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, 1976

3. ANTONIOU, A., Digital Filters: Analysis and Design, McGraw-Hill, 1979

4. LIU, C.L., Linear Systems Analysis, McGraw-Hill, 1975

5. GELB, A., Applied Optimal Estimation, Gelb Editor, 1974

6. OPPENHEIM, A.V., Applications of Digital Signal Processing, Prentice Hall, Inc., N.J. 1978

7. McCLELLAN,J.; PARKS,T.; RABINER,L., A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters, IEEE. Transactions On Audio and Electroacoustics, Vol.AU-21,pp.506-525, December 1973

8. McCLELLAN,J,: PARKS,T., Chebyshev aproximation for nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, IEEE, Transactions on Circuit Theory, Vol.CT-19, pp.189-194, March 1972.

9. RABINER, L., Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters, IEEE, Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-20, pp.280-288, October 1972.

A N E X O 1

LISTADO DE LOS PROGRAMAS

```
$JOB                P=20
C$OPTIONS T=2000,PAGE=50
C*************************************************************************
C**PROGRAMA PARA EL DISENO DE UN FILTRO DIGITAL DE RESPUESTA FINITA A UN
C**A FUNCION IMPULSO (FIR),EL FILTRO TIENE FASE LINEAL
C**
C**PROGRAMA QUE FORMA PARTE DE LA TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO
C**PREVIO A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO EN ELECTRONICA Y
C**TELECOMUNICACIONES,OTORGADO POR LA ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
C**
C**
C**TRABAJO REALIZADO POR: WILSON ANDRADE APUNTE
C**DIRECTOR DE TESIS: ING. JORGE VILLA
C*************************************************************************
      COMMON DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID,PI2,AD,DEV,X,Y,GRID
      DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66),H(66)
      DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
      DIMENSION EDGE(20),FX(10),WTX(10),DEVIAT(10)
      DIMENSION OMEGA(50),RESPA(50)
      CHARACTER*1 VLIN(100)/100*' '/,AST/'*'/,LIN/'-'/,BLAN/' '/
      DOUBLE PRECISION OMEGA,SUMAR,SUMAC,RESPA,ATTN,RIPPLE,SVRIP,DELTAF
      DOUBLE PRECISION PI2,PI
      DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
      PI2=6.283185307179586
      PI=3.141592653589979
C****  LONGITUD MAXIMA DEL FILTRO
      NFMAX=128
  100 CONTINUE
C**** LEE LONGITUD DEL FILTRO,# DE BANDAS,LONGITUD DE LA DENSIDAD DE LA
C**** GRILLA
      JTYPE=1
      READ(1,101,END=900)NFILT,NBANDS,LGRID
  101 FORMAT(I3,2I2)
      IF (NFILT.GT.NFMAX.OR.NFILT.EQ.3) CALL ERROR
      IF (NBANDS.LE.0) NBANDS=1
C****  LONGITUD DE LA GRILLA SE ASUME 16 SI NO SE ESPECIFICA
      IF (LGRID.LE.0) LGRID=16
C****  MARGENES SUPERIOR E INFERIOR DE LAS BANDAS.- EDGE(.)
      JB=2*NBANDS
      READ(1,*) (EDGE(J),J=1,JB)
C****  FUNCION DESEADA EN CADA BANDA.- FX(.)
      READ(1,*) (FX(J),J=1,NBANDS)
C****  FUNCION DE PONDERACION PARA CADA BANDA.- WTX(.)
      READ(1,*) (WTX(J),J=1,NBANDS)
C**** CALCULO DEL NUMERO DE FUNCIONES DE APROXIMACION
C****  NFCNS SIEMPRE SE BUSCA QUE SEA PAR
      NEG=0
      NODD=NFILT/2
      NODD=NFILT-2*NODD
      NFCNS=NFILT/2
      IF(NODD.EQ.1) NFCNS=NFCNS+1
C**** CONSTRUCCION DE LOS PUNTOS DE DENSIDAD DE LA GRILLA
C**** EL NUMERO DE PUNTOS EN LA GRILLA ES : (NFILT+1)*LGRID/2
C****  EL ESPACIO ENTRE LOS PUNTOS DE LA GRILLA ES:
C****  DELF=0.5/(LGRID*NFCNS)
      GRID(1)=EDGE(1)
      DELF=LGRID*NFCNS
      DELF=0.5/DELF
  135 CONTINUE
      LBAND=1
      J=1
      L=1
  140 FUP=EDGE(L+1)
  145 TEMP=GRID(J)
C****  CALCULO DE LA MAGNITUD DE LA RESPUESTA DESEADA (DES(J))
```

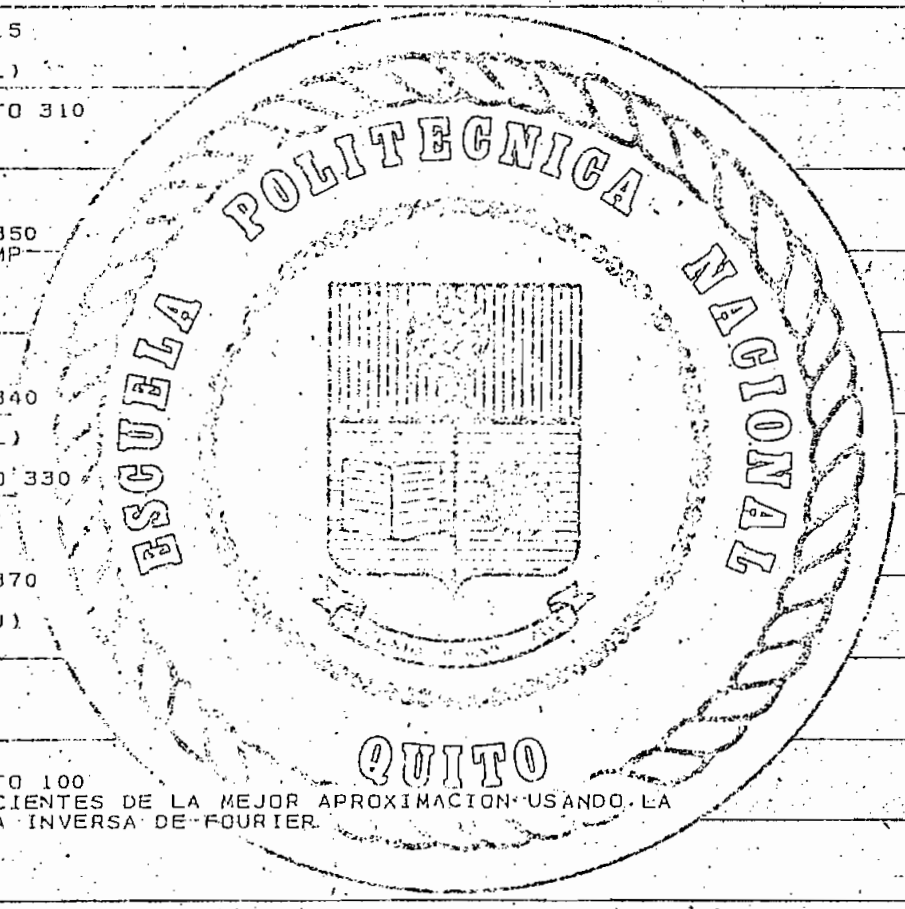
```
C****  Y DE LA FUNCION DE PONDERACION (WT(J)) SOBRE CADA PUNTO DE LA GRILLA
      DES(J)=FX(LBAND)
      WT(J)=WTX(LBAND)
      J=J+1
      GRID(J)=TEMP+DELF
C****  COMPARA SI EL VALOR DEL PUNTO DE LA GRILLA (GRID(J)) ES MAYOR
C****  AL LIMITE SUPERIOR DE LA BANDA EDGE( )
      IF (GRID(J).GT.FUP) GO TO 150
      GO TO 145
  150 GRID(J-1)=FUP
      DES(J-1)=FX(LBAND)
      WT(J-1)=WTX(LBAND)
      LBAND=LBAND+1
      L=L+2
      IF(LBAND.GT.NBANDS) GO TO 160
      GRID(J)=EDGE(L)
      GO TO 140
  160 NGRID=J-1
      IF(NEG.NE.NODD) GO TO 165
      IF(GRID(NGRID).GT.(0.5-DELF)) NGRID=NGRID-1
  165 CONTINUE
C****  CONSTRUCCION DE UN NUEVO PROBLEMA DE APROXIMACION EL CUAL ES
C****  EQUIVALENTE AL PROBLEMA ORIGINAL
C****  COMPARA SI LA LONGITUD DEL FILTRO ES PAR. SI ES PAR
C****  REALIZA UN CAMBIO TANTO EN LA FUNCION DESEADA COMO
C****  EN LA FUNCION DE PONDERACION SOBRE CADA PUNTO DE LA GRILLA
      IF (NODD.EQ.1) GO TO 200
      DO 175 J=1,NGRID
      CHANGE=DCOS(PI*GRID(J))
      DES(J)=DES(J)/CHANGE
  175 WT(J)=WT(J)*CHANGE
C****  SUPOSICION INICIAL PARA LA LOCALIZACION DE LAS FRECUENCIAS EXTREMAS
C****  IGUALMENTE ESPACIADAS A LO LARGO DE LA GRILLA
C****  # FRECUENCIAS EXTREMAS ES IGUAL AL # DE FUNCIONES DE APROXIMACION
  200 TEMP=FLOAT(NGRID-1)/FLOAT(NFCNS)
      DO 210 J=1,NFCNS
  210 IEXT(J)=(J-1)*TEMP+1
      IEXT(NFCNS+1)=NGRID
      NM1=NFCNS-1
      NZ=NFCNS+1
C****  LLAMA AL ALGORITMO REMEZ PARA REALIZAR EL PROBLEMA DE APROXIMACION
      CALL REMEZ(EDGE,NBANDS)
C****  CALCULA LA RESPUESTA IMPULSO
      IF(NODD.EQ.0)GO TO 310
      DO 305 J=1,NM1
  305 H(J)=0.5*ALPHA(NZ-J)
      H(NFCNS)=ALPHA(1)
      GO TO 350
  310 H(1)=0.25*ALPHA(NFCNS)
      DO 315 J=2,NM1
  315 H(J)=0.25*(ALPHA(NZ-J)+ALPHA(NFCNS+2-J))
      H(NFCNS)=0.5*ALPHA(1)+0.25*ALPHA(2)
C****  SALIDA
  350 PRINT 360
  360 FORMAT(1H1,70(1H*)//25X,'RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)'/25X,
     1'DISENO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL'/25X,'ALGORITMO DE IN
     2TERCAMBIO REMEZ'/25X,'FILTRO PASABANDA'/)
      PRINT 378,NFILT,LGRID
  378 FORMAT(15X,'LONGITUD DEL FILTRO = ',I3,5X,'DENSIDAD DE LA GRILLA =
     * ',I3,//)
      PRINT 380
  380 FORMAT(20X,'***** RESPUESTA IMPULSO *****',/)
      DO 381 J=1,NFCNS
      K=NFILT+1-J
      PRINT 382,J,H(J),K
  381 CONTINUE
  382 FORMAT(20X,'H(',I3,') = ',E15.8,' = H(',I4,')')
      DO 450 K=1,NBANDS,4
      KUP=K+3
      IF (KUP.GT.NBANDS) KUP=NBANDS
      PRINT 385,(J,J=K,KUP)
  385 FORMAT(/24X,4('BANDA',I3,8X)/)
      PRINT 390,(EDGE(2*J-1),J=K,KUP)
  390 FORMAT(2X,'BANDA INFERIOR ',5F15.9)
      PRINT 395,(EDGE(2*J),J=K,KUP)
  395 FORMAT(2X,'BANDA SUPERIOR ',5F15.9)
      PRINT 400,(FX(J),J=K,KUP)
  400 FORMAT(2X,'VALOR DESEADO',2X,5F15.9)
      PRINT 410,(WTX(J),J=K,KUP)
  410 FORMAT(2X,'PONDERACION',4X,5F15.9)
      DO 420 J=K,KUP
  420 DEVIAT(J)=DEV/WTX(J)
      PRINT 425,(DEVIAT(J),J=K,KUP)
  425 FORMAT(2X,'DESVIACION',5X,5F15.9)
      DO 430 J=K,KUP
  430 DEVIAT(J)=20.0*ALOG10(DEVIAT(J))
      PRINT 435,(DEVIAT(J),J=K,KUP)
  435 FORMAT(2X,'DESVIACION DB  ',5F15.9)
```

```
      450 CONTINUE
          PRINT 455,(GRID(IEXT(J)),J=1,NZ)
      455 FORMAT(/2X,'FRECUENCIAS EXTREMAS'/(2X,5F12.7))
          PRINT 460
      460 FORMAT(/1X,70(1H*)/1H1)
     C****  CALCULO DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA
          PRINT 710
      710 FORMAT(1H1,5X,'***********  RESPUESTA  DE  FRECUENCIA  ***********
     *',//,4X,'FN',8X,'DB')
          DO 610 IKA=1,50
          OMEGA(IKA)=0.010000000*(IKA-1)



          SUMAR =0.0
          SUMAC =0.0
          DO 620 NIK=1,NFCNS
          SUMAR=SUMAR+H(NIK)*(DCOS(PI2*OMEGA(IKA)*(NIK-1))+
         1DCOS(PI2*OMEGA(IKA)*(NFILT-NIK)))
          SUMAC=SUMAC+H(NIK)*(DSIN(PI2*OMEGA(IKA)*(NIK-1))+
         1DSIN(PI2*OMEGA(IKA)*(NFILT-NIK)))
      620 CONTINUE
          IF (NODD.EQ.1) SUMAR=SUMAR-H(NFCNS)*DCOS(PI2*OMEGA(IKA)*(NFCNS-1))
          IF (NODD.EQ.1) SUMAC=SUMAC-H(NFCNS)*DSIN(PI2*OMEGA(IKA)*(NFCNS-1))
          RESPA(IKA)=DSQRT(SUMAR**2 + SUMAC**2)
          RESPA(IKA)=20.0*DLOG10(RESPA(IKA))
          V9=RESPA(IKA)*(-1)
          J9=V9+.5
          IF(J9.GT.99)J9=99
          IF(J9.LT.0)J9=0
          JA=J9+1
          JA=JA*(-1)+101
          VLIN(JA)=AST
          JB=JA-1
          IF(JB.LE.0.) JB=1
          DO 612 J9=1,JB
          VLIN(J9)=LIN
      612 CONTINUE
      640 PRINT 630,OMEGA(IKA),RESPA(IKA),VLIN
      630 FORMAT(3X,F5.3,3X,F9.3,4X,100A1)
          DO 613 J9=1,JA
          VLIN(J9)=BLAN
      613 CONTINUE
      610 CONTINUE
          IF (NFILT.NE.0) GO TO 100
  900     RETURN
          END

          SUBROUTINE ERROR
          PRINT 1
        1 FORMAT(' ************ERROR EN DATOS DE ENTRADA ************')
          STOP
          END

          SUBROUTINE REMEZ(EDGE,NBANDS)
     C**** ESTA SUBRUTINA IMPLEMENTA EL ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ PARA
     C**** LA APROXIMACION PONDERADA DE CHEBYCHEV DE UNA FUNCION CONTINUA CON
     C**** UNA SUMA DE COSENOS.
     C**** LAS ENTRADAS A LA SUBRUTINA SON UNA DENSIDAD DE GRILLA LA CUAL
     C**** SUBSTITUYE AL EJE DE FRECUENCIAS,LA FUNCION DESEADA SOBRE ESTA
     C**** GRILLA,LA FUNCION PONDERADA SOBRE LA GRILLA,EL NUMERO DE COSENOS
     C**** Y UNA SUPOSICION INICIAL DE LAS FRECUENCIAS EXTREMAS.
     C**** EL PROGRAMA MINIMIZA EL ERROR DE CHEBYCHEV DETERMINANDO LA MEJOR
     C**** LOCALIZACION DE LAS FRECUENCIAS EXTREMAS (PUNTOS DE MAXIMO ERROR)
     C**** Y CALCULA LOS COEFICIENTES DE LA MEJOR APROXIMACION.
          COMMON DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID,PI2,AD,DEV,X,Y,GRID
          DIMENSION EDGE(20)
          DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
          DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
          DIMENSION A(66),P(65),Q(65)
          DOUBLE PRECISION PI2,ONUM,DDEN,DTEMP,A,P,Q
          DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y,ERR,D,G
     C****  NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES ES DE 25
          ITRMAX=25
          DEVL=-1.0
          NZ=NFCNS+1
          NZZ=NFCNS+2
          NITER=0
      100 CONTINUE
          IEXT(NZZ)=NGRID+1
          NITER=NITER+1
          IF (NITER.GT.ITRMAX) GO TO 400
     C****  CALCULA LAS ABCISAS PARA LA INTERPOLACION DE LAGRANGE
          DO 110 J=1,NZ
          DTEMP=GRID(IEXT(J))
          DTEMP=DCOS(DTEMP*PI2)
      110 X(J)=DTEMP
          JET=(NFCNS-1)/15+1
```

```
C****  CALCULA LA INTERPOLACION DE LAGRANGE DE LOS COEFICIENTES
      DO 120 J=1,NZ
  120 AD(J)=D(J,NZ,JET)
C****  CALCULO DEL VALOR CORRIENTE DE LA DESVIACION DEV
      DNUM=0.0
      DDEN=0.0
      K=1
      DO 130 J=1,NZ
      L=IEXT(J)
      DTEMP=AD(J)*DES(L)
      DNUM=DNUM+DTEMP
      DTEMP=K*AD(J)/WT(L)
      DDEN=DDEN+DTEMP
  130 K=-K
      DEV=DNUM/DDEN
C****  CALCULO DE LAS ORDENADAS PARA LA INTERPOLACION DE LAGRANGE
      NU=1
      IF(DEV.GT.0.0) NU=-1
      DEV=-NU*DEV
      K=NU
      DO 140 J=1,NZ
      L=IEXT(J)
      DTEMP=K*DEV/WT(L)
      Y(J)=DES(L)+DTEMP
  140 K=-K
C****  SI DEV.DEVL VA AL CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA MEJOR APROXIMACION
      IF(DEV.GE.DEVL) GO TO 150
      CALL FALLA
      GO TO 400
  150 DEVL=DEV
      JCHNGE=0
      K1=IEXT(1)
      KNZ=IEXT(NZ)
      KLOW=0
      NUT=-NU
      J=1
C****  BUSCA PARA LAS FRECUENCIAS EXTREMAS LA MEJOR APROXIMACION
  200 IF(J.EQ.NZZ) YNZ=COMP
      IF(J.GE.NZZ) GO TO 300
      KUP=IEXT(J+1)
      L=IEXT(J)+1
      NUT=-NUT
      IF (J.EQ.2) Y1=COMP
      COMP=DEV
      IF(L.GE.KUP) GO TO 220
      ERR=G(L,NZ)
      ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
      DTEMP=NUT*ERR-COMP
      IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 220
      COMP=NUT*ERR
  210 L=L+1
      IF (L.GE.KUP) GO TO 215
      ERR=G(L,NZ)
      ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
      DTEMP=NUT*ERR-COMP
      IF (DTEMP.LE.0.0) GO TO 215
      COMP=NUT*ERR
      GO TO 210
  215 IEXT(J)=L-1
      J=J+1
      KLOW=L-1
      JCHNGE=JCHNGE+1
      GO TO 200
  220 L=L-1
  225 L=L-1
      IF(L.LE.KLOW) GO TO 250
      ERR=G(L,NZ)
      ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
      DTEMP=NUT*ERR-COMP
      IF(DTEMP.GT.0.0) GO TO 230
      IF(JCHNGE.LE.0) GO TO 225
      GO TO 260
  230 COMP=NUT*ERR
  235 L=L-1
      IF(L.LE.KLOW) GO TO 240
      ERR=G(L,NZ)
      ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
      DTEMP=NUT*ERR-COMP
      IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 240
      COMP=NUT*ERR
      GO TO 235
  240 KLOW=IEXT(J)
      IEXT(J)=L+1
      J=J+1
      JCHNGE=JCHNGE+1
      GO TO 200
```

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL QUITO

```
      250 L=IEXT(J)+1
          IF(JCHNGE.GT.0) GO TO 215
      255 L=L+1
          IF(L.GE.KUP)GO TO 260
          ERR=G(L,NZ)
          ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
          DTEMP=NUT*ERR-COMP
          IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 255
          COMP=NUT*ERR
          GO TO 210
      260 KLOW=IEXT(J)
          J=J+1
          GO TO 200
      300 IF(J.GT.NZZ) GO TO 320
          IF(K1.GT.IEXT(1)) K1=IEXT(1)
          IF(KNZ.LT.IEXT(NZ)) KNZ=IEXT(NZ)
          NUT1=NUT
          NUT=-NU
          L=0
          KUP=K1
          COMP=YNZ*(1.00001)
          LUCK=1
      310 L=L+1
          IF(L.GE.KUP) GO TO 315
          ERR=G(L,NZ)
          ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
          DTEMP=NUT*ERR-COMP
          IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 310
          COMP=NUT*ERR
          J=NZZ
          GO TO 210
      315 LUCK=6
          GO TO 325
      320 IF(LUCK.GT.9) GO TO 350
          IF(COMP.GT.Y1) Y1=COMP
          K1=IEXT(NZZ)
      325 L=NGRID+1
          KLOW=KNZ
          NUT=-NUT1
          COMP=Y1*(1.00001)
      330 L=L-1
          IF(L.LE.KLOW) GO TO 340
          ERR=G(L,NZ)
          ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
          DTEMP=NUT*ERR-COMP
          IF(DTEMP.LE.0.0)GO TO 330
          J=NZZ
          COMP=NUT*ERR
          LUCK=LUCK+10
          GO TO 235
      340 IF(LUCK.EQ.6) GO TO 370
          DO 345 J=1,NFCNS
      345 IEXT(NZZ-J)=IEXT(NZ-J)
          IEXT(1)=K1
          GO TO 100
      350 KN=IEXT(NZZ)
          DO 360 J=1,NFCNS
      360 IEXT(J)=IEXT(J+1)
          IEXT(NZ)=KN
          GO TO 100
      370 IF (JCHNGE.GT.0) GO TO 100
     C**** CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA MEJOR APROXIMACION USANDO LA
     C**** TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER
      400 CONTINUE
          NM1=NFCNS-1
          FSH=1.0E-06
          GTEMP=GRID(1)
          X(NZZ)=-2.0
          CN=2*NFCNS-1
          DELF=1.0/CN
          L=1
          KKK=0
          IF(EDGE(1).EQ.0.0.AND.EDGE(2*NBANDS).EQ.0.5) KKK=1
          IF(NFCNS.LE.3) KKK=1
          IF(KKK.EQ.1) GO TO 405
          DTEMP=DCOS(PI2*GRID(1))
          DNUM=DCOS(PI2*GRID(NGRID))
          AA=2.0/(DTEMP-DNUM)
          BB=-(DTEMP+DNUM)/(DTEMP-DNUM)
      405 CONTINUE
          DO 430 J=1,NFCNS
          FT=(J-1)*DELF
          XT=DCOS(PI2*FT)
          IF(KKK.EQ.1) GO TO 410
          XT=(XT-BB)/AA
          FT=ARCOS(XT)/PI2
```



```
      410 XE=X(L)
          IF(XT.GT.XE) GO TO 420
          IF((XE-XT).LT.FSH) GO TO 415
          L=L+1
          GO TO 410
      415 A(J)=Y(L)
          GO TO 425
      420 IF((XT-XE).LT.FSH) GO TO 415
          GRID(1)=FT
          A(J)=G(1,NZ)
      425 CONTINUE
          IF(L.GT.1) L=L-1
      430 CONTINUE
          GRID(1)=GTEMP
          DDEN=PI2/CN
          DO 510 J=1,NFCNS
          DTEMP=0.0
          DNUM=(J-1)*DDEN
          IF(NM1.LT.1) GO TO 505
          DO 500 K=1,NM1
      500 DTEMP=DTEMP+A(K+1)*DCOS(DNUM*K)
      505 DTEMP=2.0*DTEMP+A(1)
      510 ALPHA(J)=DTEMP
          DO 550 J=2,NFCNS
      550 ALPHA(J)=2*ALPHA(J)/CN
          ALPHA(1)=ALPHA(1)/CN
          IF (KKK.EQ.1) GO TO 545
          P(1)=2.0*ALPHA(NFCNS)*BB+ALPHA(NM1)
          P(2)=2.0*AA*ALPHA(NFCNS)
          Q(1)=ALPHA(NFCNS-2)-ALPHA(NFCNS)
          DO 540 J=2,NM1
          IF (J.LT.NM1) GO TO 515
          AA=0.5*AA
          BB=0.5*BB
      515 CONTINUE
          P(J+1)=0.0
          DO 520 K=1,J
          A(K)=P(K)
      520 P(K)=2.0*BB*A(K)
          P(2)=P(2)+A(1)*2.0*AA
          JM1=J-1
          DO 525 K=1,JM1
      525 P(K)=P(K)+Q(K)+AA*A(K+1)
          JP1=J+1
          DO 530 K=3,JP1
      530 P(K)=P(K)+AA*A(K-1)
          IF (J.EQ.NM1) GO TO 540
          DO 535 K=1,J
      535 Q(K)=-A(K)
          Q(1)=Q(1)+ALPHA(NFCNS-1-J)
      540 CONTINUE
          DO 543 J=1,NFCNS
      543 ALPHA(J)=P(J)
      545 CONTINUE
          IF (NFCNS.GT.3) RETURN
          ALPHA(NFCNS+1)=0.0
          ALPHA(NFCNS+2)=0.0
          RETURN
          END

          DOUBLE PRECISION FUNCTION D(K,N,M)
     C**** FUNCION PARA CALCULAR LA INTERPOLACION DE LAGRANGE DE LOS
     C**** COEFICIENTES PARA USO EN LA FUNCION G
          COMMON DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID,PI2,AD,DEV,X,Y,GRID
          DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
          DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
          DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
          DOUBLE PRECISION Q
          DOUBLE PRECISION PI2
          D=1.0
          Q=X(K)
          DO 3 L=1,M
          DO 2 J=L,N,M
          IF (J-K) 1,2,1
        1 D=2.0*D*(Q-X(J))
        2 CONTINUE
        3 CONTINUE
          D=1.0/D
          RETURN
          END

          DOUBLE PRECISION FUNCTION G(K,N)
```

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL QUITO

```
C**** FUNCION PARA EVALUAR LA RESPUESTA DE FRECUENCIA USANDO LA FORMU
C**** DE INTERPOLACION DE LAGRANGE EN LA FORMA BARYCENTRIC
      COMMON DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID,PI2,AD,DEV,X,Y,GRID
      DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
      DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
      DOUBLE PRECISION P,C,D,XF
      DOUBLE PRECISION PI2
      DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
      P=0.0D0
      XF=GRID(K)
      XF=DCOS(PI2*XF)
      D=0.0D0
      DO 1 J=1,N
      C=XF-X(J)
      C=AD(J)/C
      D=D+C
    1 P=P+C*Y(J)
      G=P/D
      RETURN
      END

      SUBROUTINE FALLA
      PRINT 1
    1 FORMAT('********** FALLAS EN LA CONVERGENCIA **********'/
     1'PROBABLE CAUSA ESTA EN UN ERROR DE REDONDEO DE LA MAQUINA'/
     2'LA RESPUESTA IMPULSO PUEDE SER CORRECTA'/
     3'CHEQUEE CON UNA RESPUESTA DE FRECUENCIA')
      RETURN
      END

      $ENTRY
```

POLITECNICA

A N E X O 2

EJEMPLOS DE APLICACION

TABLA A2-1 (CONTINUACION)

El formato variable almacena en precisión simple; los datos de entrada deben ir separados por una coma y se debe perforar el punto decimal. Los datos pueden ocupar una o más tarjetas, en cuyo caso la tercera tarjeta se convertiría en cuarta y así sucesivamente.

NOTAS: Formato I (enteros) perforar el valor justificado a la derecha

TARJETAS DE CONTROL

Se deben perforar desde la columna 1:

```
// JOB  Nombre. N° Cuenta
// EXEC WATFIV
$JOB
$ENTRY
Tarjetas de datos
/*
/&
* $$ EOJ
```

Columna 1

TABLA A2-1

PERFORACION DE LAS TARJETAS DE DATOS

TARJETAS DE DATOS	COLUMNAS	FORMATO	NOMBRE DE VARIABLE	CONTENIDO Y OBSERVACIONES
Primera	1 a 3	I3	NFILT	Longitud del filtro
	4 a 5	I2	NBANDS	Número de bandas de frecuencia
	6 a 7	I2	LGRID	Longitud de la densidad de la grilla, si se perfora un cero o si se omite, el programa asume un valor igual a 16
Segunda		Variable	EDGE( )	Arreglo de 20 elementos. Determina los márgenes superior e inferior en cada una de las bandas.
Tercera		Variable	FX( )	Arreglo de 10 elementos. Determina la atenuación deseada en cada una de las bandas.
Cuarta		Variable	WTX( )	Arreglo de 10 elementos. Determina la ponderación deseada en cada una de las bandas para una mejor visualización en la grafización.

RESPUESTA-IMPULSO FINITA-(FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 32 DENSIDAD DE LA GRILLA = 32

**** RESPUESTA IMPULSO *****

H(1) = -0.57447180E-02 = H(32)
H(2) = 0.13074010E-02 = H(31)
H(3) = 0.78460560E-02 = H(30)
H(4) = -0.35533510E-02 = H(29)
H(5) = 0.13960530E-01 = H(28)
H(6) = 0.23156400E-02 = H(27)
H(7) = -0.19921210E-01 = H(26)
H(8) = 0.71668100E-02 = H(25)
H(9) = -0.39710140E-01 = H(24)
H(10) = 0.11193210E-01 = H(23)
H(11) = -0.66155610E-01 = H(22)
H(12) = -0.10461090E-01 = H(21)
H(13) = 0.85256390E-01 = H(20)
H(14) = -0.12018570E 00 = H(19)
H(15) = -0.29677980E-00 = H(18)
H(16) = 0.30399590E 00 = H(17)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA	BANDA
ANDA INFERIOR	-0.000000000	0.199999900	0.425000000	
ANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000	
ALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000	
ONDERACION	10.000000000	1.000000000	10.000000000	
ESVIACION	-0.001517167	-0.015171660	0.001517167	
ESVIACION DB	-56.379310000	-36.379310000	-56.379310000	

RECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0253672	0.0517578	0.0751953	0.0927734
0.1000000	0.2000000	0.2195312	0.2517578	0.2839844
0.3142578	0.3386719	0.3500000	0.4250000	0.4318359
0.4503906	0.4795875			

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
.000	-56.380
.010	-64.687
.020	-59.372
.030	-57.123
.040	-82.489
.050	-56.714
.060	-61.745
.070	-59.349
.080	-58.752
.090	-58.436
.100	-56.378
.110	-31.809
.120	-20.956
.130	-13.892
.140	-9.011
.150	-5.639
.160	-3.377
.170	-1.927
.180	-1.031
.190	-0.480
.200	-0.133
.210	0.069
.220	0.131
.230	-0.068
.240	-0.053
.250	-0.130
.260	-0.095
.270	-0.023
.280	0.121
.290	0.107
.300	-0.010
.310	-0.121
.320	-0.103
.330	0.042
.340	0.129
.350	-0.133
.360	-1.034
.370	-2.827
.380	-5.750
.390	-10.086
.400	-16.287
.410	-25.286
.420	-40.166
.430	-57.546
.440	-87.738
.450	-56.411
.460	-64.518
.470	-60.249
.480	-56.393
.490	-60.175

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL QUITO

NOMBRE DEL PROGRAMA: ELECFDAR

TARJETAS DE DATOS VARIANDO LA PONDERACION

Se deben perforar desde la columna 1:

```
 32 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
5,1,5


 32 332
0,0.1,0.2,0.35,0,425,0.5
0,1,0
20,1,20
```

DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 32 DENSIDAD DE LA GRILLA = 32

***** RESPUESTA IMPULSO *****

H(1) = -0.72034180E-02 = H(32)
H(2) = -0.22143750E-02 = H(31)
H(3) = 0.11015810E-01 = H(30)
H(4) = -0.11102380E-03 = H(29)
H(5) = -0.15186450E-01 = H(28)
H(6) = -0.11730640E-02 = H(27)
H(7) = -0.30801510E-01 = H(26)
H(8) = 0.20314250E-02 = H(25)
H(9) = -0.32149150E-01 = H(24)
H(10) = 0.22143330E-01 = H(23)
H(11) = 0.77352400E-01 = H(22)
H(12) = -0.15668230E-01 = H(21)
H(13) = 0.67709560E-01 = H(20)
H(14) = -0.13059490E 00 = H(19)
H(15) = -0.29765580E 00 = H(18)
H(16) = 0.32104530E 00 = H(17)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3	BANDA
BANDA INFERIOR	0.000000000	0.199999900	0.425000000	
BANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000	
VALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000	
PONDERACION	5.000000000	1.000000000	5.000000000	
DESVIACION	0.002208329	0.011041640	0.002208329	
DESVIACION DB	-53.118710000	-39.139290000	-53.118710000	

FRECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0263672	0.0517578	0.0751953	0.0927734
0.1000000	0.2000000	0.2292969	0.2595703	0.2868672
0.3171875	0.3396484	0.3500000	0.4250000	0.4329125
0.4523438	0.4826172			

****

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-53.119
0.010	-61.432
0.020	-56.106
0.030	-53.858
0.040	-78.881
0.050	-53.447
0.060	-58.536
0.070	-56.050
0.080	-55.537
0.090	-55.138
0.100	-53.119
0.110	-28.651
0.120	-17.899
0.130	-10.977
0.140	-6.300
0.150	-3.218
0.160	-1.351
0.170	-0.402
0.180	-0.076
0.190	-0.063
0.200	-0.096
0.210	-0.048
0.220	0.050
0.230	0.095
0.240	0.043
0.250	-0.054
0.260	-0.096
0.270	-0.041
0.280	0.056
0.290	0.095
0.300	0.032
0.310	-0.068
0.320	-0.089
0.330	0.009
0.340	0.095
0.350	-0.096
0.360	-0.863
0.370	-2.470
0.380	-5.165
0.390	-9.230
0.400	-15.100
0.410	-23.667
0.420	-37.864
0.430	-54.917
0.440	-66.044
0.450	-53.658

IMPRESO POR OFFSETEC S.A.

RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 32 DENSIDAD DE LA GRILLA = 32

**** RESPUESTA IMPULSO ****

H(1) = -0.4501048OE-02 = H(32)
H(2) = 0.3406319OE-02 = H(31)
H(3) = 0.4289809OE-02 = H(30)
H(4) = -0.1116179OE-01 = H(29)
H(5) = 0.1377481OE-01 = H(28)
H(6) = 0.4611521OE-02 = H(27)
H(7) = -0.1192400OE-01 = H(26)
H(8) = 0.1079915OE-01 = H(25)
H(9) = -0.4546545OE-01 = H(24)
H(10) = 0.3601610OE-02 = H(23)
H(11) = 0.5740170OE-01 = H(22)
H(12) = -0.6513763OE-02 = H(21)
H(13) = 0.9859585OE-01 = H(20)
H(14) = -0.1128494OE 00 = H(19)
H(15) = -0.2956347OE 00 = H(18)
H(16) = 0.2910191OE 00 = H(17)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3
BANDA INFERIOR	0.000000000	0.199999900	0.425000000
BANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000
VALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000
PONDERACION	20.000000000	1.000000000	20.000000000
DESVIACION	0.000981146	0.019622920	0.000981146
DESVIACION DB	-60.165290000	-34.144710000	-60.165290000

FRECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0263672	0.0527344	0.0791953	0.0927734
0.1000000	0.2000000	0.2166016	0.2478516	0.2800781
0.3113281	0.3376953	0.3500000	0.4250000	0.4306594
0.4484375	0.4729516			

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-60.169
0.010	-68.450
0.020	-63.180
0.030	-60.886
0.040	-87.662
0.050	-60.528
0.060	-65.395
0.070	-63.239
0.080	-62.429
0.090	-62.310
0.100	-60.164
0.110	-35.376
0.120	-24.335
0.130	-17.023
0.140	-11.815
0.150	-8.023
0.160	-5.254
0.170	-3.240
0.180	-1.795
0.190	-0.796
0.200	-0.172
0.210	0.125
0.220	0.154
0.230	0.022
0.240	-0.128
0.250	-0.168
0.260	-0.066
0.270	0.090
0.280	0.169
0.290	-0.101
0.300	-0.061
0.310	-0.170
0.320	-0.107
0.330	0.091
0.340	0.162
0.350	-0.172
0.360	-1.205
0.370	-3.179
0.380	-6.326
0.390	-10.939
0.400	-17.491
0.410	-26.976
0.420	-42.683
0.430	-69.661
0.440	-72.082
0.450	-60.540
0.460	-80.411
0.470	-60.521
0.480	-62.397
0.490	-72.312

NOMBRE DEL PROGRAMA: ELECFDAR

TARJETAS DE DATOS VARIANDO LA LONGITUD DE LA DENSIDAD DE LA GRILLA

Se deben perforar desde la columna 1:

```
 32 3 8
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10


 32 316
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10


 32 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10


 32 348
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10
```

RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 32 . DENSIDAD DE LA GRILLA = 8

***** RESPUESTA IMPULSO *****

H(1)	= -0.57198470E-02	= H(32)	
H(2)	= 0.10207530E-02	= H(31)	
H(3)	= 0.74799580E-02	= H(30)	
H(4)	= -0.65753780E-02	= H(29)	
H(5)	= 0.14016900E-01	= H(28)	
H(6)	= 0.23371570E-02	= H(27)	
H(7)	= -0.19886270E-01	= H(26)	
H(8)	= 0.71583530E-02	= H(25)	
H(9)	= -0.39785620E-01	= H(24)	
H(10)	= 0.11193900E-01	= H(23)	
H(11)	= 0.66134390E-01	= H(22)	
H(12)	= -0.10451670E-01	= H(21)	
H(13)	= 0.85343710E-01	= H(20)	
H(14)	= -0.12016550E 00	= H(19)	
H(15)	= -0.29680460E 00	= H(18)	
H(16)	= 0.30395490E 00	= H(17)	

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3
BANDA INFERIOR	0.000000000	0.199999900	0.425000000
BANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000
VALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000
PONDERACION	10.000000000	1.000000000	10.000000000
DESVIACION	0.001497710	0.014977090	0.001497710
DESVIACION DB	-56.491420000	-36.491420000	-56.491420000

FRECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0271438	0.0507813	0.0742188	0.0937500
0.1000000	0.2000000	0.2195312	0.2507812	0.2820312
0.3132812	0.3405250	0.3500000	0.4250000	0.4328125
0.4523438	0.4796875			

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-55.492
0.010	-64.864
0.020	-59.409
0.030	-57.219
0.040	-81.064
0.050	-56.690
0.060	-61.771
0.070	-59.325
0.080	-58.727
0.090	-58.458
0.100	-56.490
0.110	-31.843
0.120	-20.982
0.130	-13.913
0.140	-9.027
0.150	-5.650
0.160	-3.384
0.170	-1.929
0.180	-1.031
0.190	-0.478
0.200	-0.131
0.210	0.069
0.220	0.129
0.230	0.065
0.240	-0.055
0.250	-0.130
0.260	-0.093
0.270	0.025
0.280	0.122
0.290	0.107
0.300	-0.010
0.310	-0.120
0.320	-0.100
0.330	0.046
0.340	0.132
0.350	-0.131
0.360	-1.035
0.370	-2.330
0.380	-5.755
0.390	-10.094
0.400	-16.298
0.410	-25.303
0.420	-40.200
0.430	-57.498
0.440	-89.999
0.450	-56.334
0.460	-64.233
0.470	-60.453
0.480	-56.504
0.490	-60.272

POLITECNICA NACIONAL QUITO

RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 32 LA DENSIDAD DE LA GRILLA = 16

***** RESPUESTA IMPULSO *****

H(1) = -0.37533900E-02	= H(32)
H(2) = 0.99030130E-03	= H(31)
H(3) = 0.75733400E-02	= H(30)
H(4) = -0.65142060E-02	= H(29)
H(5) = 0.13960480E-01	= H(28)
H(6) = 0.22952550E-02	= H(27)
H(7) = -0.19994300E-01	= H(26)
H(8) = 0.71369630E-02	= H(25)
H(9) = -0.39657350E-01	= H(24)
H(10) = 0.11259970E-01	= H(23)
H(11) = 0.66233570E-01	= H(22)
H(12) = -0.10497170E-01	= H(21)
H(13) = 0.85136110E-01	= H(20)
H(14) = -0.12024960E 00	= H(19)
H(15) = -0.29678550E 00	= H(18)
H(16) = 0.30410890E 00	= H(17)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3	BANDA
ANDA INFERIOR	0.000000000	0.199999900	0.425000000	
ANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000	
ALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000	
ONDERACION	10.000000000	1.000000000	10.000000000	
ESVIACION	0.001513119	0.015131180	0.001513119	
ESVIACION DB	-56.402520000	-36.402520000	-56.402520000	

RECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0273438	0.0527344	0.0761719	0.0937500
0.1000000	0.2000000	0.2195312	0.2527344	0.2839844
0.3132812	0.3396719	0.3500000	0.4250000	0.4328125
0.4503906	0.4796875			

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FR	DB
0.000	-56.404
0.010	-64.750
0.020	-59.345
0.030	-57.116
0.040	-82.460
0.050	-56.728
0.060	-61.834
0.070	-59.268
0.080	-58.750
0.090	-59.330
0.100	-56.401
0.110	-31.781
0.120	-20.930
0.130	-13.868
0.140	-8.989
0.150	-5.620
0.160	-3.362
0.170	-1.916
0.180	-1.025
0.190	-0.478
0.200	-0.132
0.210	0.068
0.220	0.130
0.230	0.068
0.240	-0.053
0.250	-0.130
0.260	-0.095
0.270	0.023
0.280	0.120
0.290	0.107
0.300	-0.009
0.310	-0.120
0.320	-0.103
0.330	0.042
0.340	0.129
0.350	-0.102
0.360	-1.033
0.370	-2.824
0.380	-5.745
0.390	-10.079
0.400	-16.277
0.410	-25.272
0.420	-40.152
0.430	-57.446
0.440	-84.838
0.450	-56.437
0.460	-64.446
0.470	-60.310
0.480	-56.415
0.490	-60.184

QUITO

RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 32 DENSIDAD DE LA GRILLA = 48

***** RESPUESTA IMPULSO *****

H(1) = -0.57425310E-02 = H(32)
H(2) = 0.10091520E-02 = H(31)
H(3) = 0.75418530E-02 = H(30)
H(4) = -0.65583250E-02 = H(29)
H(5) = 0.13959190E-01 = H(28)
H(6) = 0.23196780E-02 = H(27)
H(7) = -0.19911020E-01 = H(26)
H(8) = 0.71707470E-02 = H(25)
H(9) = -0.39717030E-01 = H(24)
H(10) = 0.11181870E-01 = H(23)
H(11) = 0.86145240E-01 = H(22)
H(12) = -0.10456050E-01 = H(21)
H(13) = 0.85273200E-01 = H(20)
H(14) = -0.12017440E 00 = H(19)
H(15) = -0.29678080E 00 = H(18)
H(16) = 0.30398040E 00 = H(17)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3	BANDA
ANDA INFERIOR	0.000000000	0.199999900	0.425000000	
ANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000	
ALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000	
ONDERACION	10.000000000	1.000000000	10.000000000	
ESVIACION	-0.001517674	0.015176730	-0.001517674	
ESVIACION DB	-56.376410000	-36.376410000	-56.376410000	

RECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0266926	0.0520831	0.0755198	0.0930969
0.1000000	0.2000000	0.2195300	0.2520801	0.2839792
0.3139253	0.3386634	0.3500000	0.4250000	0.4321610
0.4503891	0.4790132			

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-56.376
0.010	-64.678
0.020	-59.376
0.030	-57.120
0.040	-82.671
0.050	-56.726
0.060	-61.759
0.070	-59.348
0.080	-58.749
0.090	-58.450
0.100	-56.375
0.110	-31.813
0.120	-20.960
0.130	-13.996
0.140	-9.014
0.150	-5.641
0.160	-3.379
0.170	-1.928
0.180	-1.032
0.190	-0.481
0.200	-0.133
0.210	0.069
0.220	0.131
0.230	0.068
0.240	-0.054
0.250	-0.130
0.260	-0.095
0.270	0.024
0.280	0.121
0.290	0.107
0.300	-0.010
0.310	-0.121
0.320	-0.103
0.330	0.042
0.340	-0.129
0.350	-0.133
0.360	-1.034
0.370	-2.827
0.380	-5.750
0.390	-10.087
0.400	-16.287
0.410	-25.286
0.420	-40.166
0.430	-57.547
0.440	-87.796
0.450	-56.409
0.460	-64.558
0.470	-60.256
0.480	-56.396
0.490	-60.177

NOMBRE DEL PROGRAMA: ELECFDAR

TARJETAS DE DATOS VARIANDO LA LONGITUD DEL FILTRO

Se deben perforar desde la columna 1:

```
  8 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10

 16 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10

 24 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10

 32 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10

 50 332
0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
0,1,0
10,1,10
```

RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 3 DENSIDAD DE LA GRILLA = 32

***** RESPUESTA IMPULSO. *****

H(1) = 0.10453890E 00 = H(8)
H(2) = -0.10956490E 00 = H(7)
H(3) = -0.25835080E 00 = H(6)
H(4) = 0.24476380E 00 = H(5)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3	BANDA
BANDA INFERIOR	0.0000000000	0.1999999000	0.4250000000	
BANDA SUPERIOR	0.1000000000	0.3500000000	0.5000000000	
VALOR DESEADO	0.0000000000	1.0000000000	0.0000000000	
PONDERACION	10.0000000000	1.0000000000	10.0000000000	
DESVIACION	0.0389659700	0.0389659700	0.0389659700	
DESVIACION DB	-28.1862700000	-8.1862870000	-28.1862700000	

FRECUENCIAS EXTREMAS
0.0351563 0.1000000 0.3500000 0.4250000 0.4640625

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-28.583
0.010	-28.517
0.020	-29.356
0.030	-28.207
0.040	-28.233
0.050	-28.657
0.060	-29.837
0.070	-32.597
0.080	-40.535
0.090	-39.113
0.100	-28.185
0.110	-22.497
0.120	-18.442
0.130	-15.242
0.140	-12.504
0.150	-10.349
0.160	-8.418
0.170	-6.747
0.180	-5.298
0.190	-4.046
0.200	-2.972
0.210	-2.061
0.220	-1.303
0.230	-0.689
0.240	-0.215
0.250	0.123
0.260	0.329
0.270	0.401
0.280	0.349
0.290	0.144
0.300	-0.193
0.310	-0.676
0.320	-1.314
0.330	-2.117
0.340	-3.102
0.350	-4.289
0.360	-5.705
0.370	-7.392
0.380	-9.405
0.390	-11.840
0.400	-14.846
0.410	-18.723
0.420	-24.199
0.430	-34.308
0.440	-39.017
0.450	-30.434
0.460	-28.328
0.470	-28.542
0.480	-30.699
0.490	-35.980

BIBLIOTECA POLITECNICA NACIONAL
IMPRESO POR OFFSET S.A.
023039

LONGITUD DEL FILTRO = 16 DENSIDAD DE LA GRILLA = 32

***** RESPUESTA IMPULSO *****

```
H( 1) = -0.39546860E-01 = H( 16)
H( 2) =  0.23234900E-01 = H( 15)
H( 3) =  0.48082750E-01 = H( 14)
H( 4) = -0.21884500E-01 = H( 13)
H( 5) = -0.97542980E-01 = H( 12)
H( 6) = -0.10126740E 00 = H( 11)
H( 7) = -0.28798100E 00 = H( 10)
H( 8) =  0.28471180E 00 = H(  9)
```

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3
BANDA INFERIOR	0.000000000	0.100000000	0.425000000
BANDA SUPERIOR	0.100000000	0.350000000	0.500000000
VALOR DESEADO	0.000000000	1.000000000	0.000000000
PONDERACION	10.000000000	1.000000000	10.000000000
DESVIACION	0.011197060	0.111970600	0.011197060
DESVIACION DB	-39.017890000	-19.017910000	-39.017890000

FRECUENCIAS EXTREMAS

0.0351563 0.0820313 0.1000000 0.2000000 0.3152344
0.3500000 0.4250000 0.4406250 0.4777344

****

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-44.754
0.010	-43.470
0.020	-41.014
0.030	-39.278
0.040	-39.313
0.050	-42.475
0.060	-59.330
0.070	-43.786
0.080	-39.098
0.090	-42.798
0.100	-39.018
0.110	-26.094
0.120	-19.061
0.130	-14.120
0.140	-10.389
0.150	-7.509
0.160	-5.285
0.170	-3.602
0.180	-2.375
0.190	-1.538
0.200	-1.031
0.210	-0.791
0.220	-0.743
0.230	-0.804
0.240	-0.880
0.250	-0.883
0.260	-0.753
0.270	-0.478
0.280	-0.094
0.290	0.322
0.300	0.680
0.310	0.893
0.320	0.898
0.330	0.601
0.340	-0.022
0.350	-1.031
0.360	-2.486
0.370	-4.459
0.380	-7.050
0.390	-10.419
0.400	-14.843
0.410	-20.909
0.420	-30.402
0.430	-57.107
0.440	-39.072
0.450	-42.666
0.460	-56.107
0.470	-40.920
0.480	-39.061
0.490	-42.585

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

```
*****************************************************************

                    RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
                    DISENO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
                    ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
                    FILTRO PASABANDA

          LONGITUD DEL FILTRO =  24      DENSIDAD DE LA GRILLA =  32

                 ***** RESPUESTA IMPULSO *****

                 H(  1) =  0.15963710E-01 = H(  24)
                 H(  2) = -0.43153019E-02 = H(  23)
                 H(  3) = -0.18511630E-01 = H(  22)
                 H(  4) =  0.10049370E-01 = H(  21)
                 H(  5) = -0.37402770E-01 = H(  20)
                 H(  6) =  0.10787690E-01 = H(  19)
                 H(  7) =  0.61334870E-01 = H(  18)
                 H(  8) = -0.92129140E-02 = H(  17)
                 H(  9) =  0.86052350E-01 = H(  16)
                 H( 10) = -0.12096530E 00 = H(  15)
                 H( 11) = -0.29480020E 00 = H(  14)
                 H( 12) =  0.30298740E 00 = H(  13)

                      BANDA  1          BANDA  2          BANDA  3          BANDA
NDA INFERIOR        0.000000000      0.199999900      0.425000000
NDA SUPERIOR        0.100000000      0.350000000      0.500000000
LOR DESEADO         0.000000000      1.000000000      0.000000000
NDERACION          10.000000000      1.000000000     10.000000000
SVIACION            0.003934927      0.039349290      0.003934927
SVIACION OB       -48.101240000    -28.101240000    -48.101240000

ECUENCIAS EXTREMAS
  0.0000000   0.0338541   0.0651041   0.0898433   0.1000000
  0.2000000   0.2507805   0.2950506   0.3328105   0.3500000
  0.4250000   0.4354165   0.4614578

*****************************************************************
```

```
***********  RESPUESTA  DE  FRECUENCIA  ***********

 FN        OB
0.000    -48.102
0.010    -52.468
0.020    -59.389
0.030    -48.672
0.040    -49.730
0.050   -108.057
0.060    -49.497
0.070    -49.383
0.080    -64.460
0.090    -48.101
0.100    -48.102
0.110    -28.724
0.120    -19.529
0.130    -13.371
0.140     -8.964
0.150     -5.784
0.160     -3.543
0.170     -2.041
0.180     -1.115
0.190     -0.604
0.200     -0.349
0.210     -0.200
0.220     -0.057
0.230      0.111
0.240      0.265
0.250      0.335
0.260      0.273
0.270      0.086
0.280     -0.153
0.290     -0.324
0.300     -0.323
0.310     -0.132
0.320      0.145
0.330      0.328
0.340      0.221
0.350     -0.349
0.360     -1.524
0.370     -3.439
0.380     -6.247
0.390    -10.164
0.400    -15.554
0.410    -23.188
0.420    -35.563
0.430    -52.878
0.440    -50.727
0.450    -56.064
0.460    -48.162
0.470    -50.838
0.480    -63.449
0.490    -68.052
```

RESPUESTA IMPULSO FINITA (FIR)
DISEÑO DE UN FILTRO DIGITAL CON FASE LINEAL
ALGORITMO DE INTERCAMBIO REMEZ
FILTRO PASABANDA

LONGITUD DEL FILTRO = 50 DENSIDAD DE LA GRILLA = 32

***** RESPUESTA IMPULSO *****

H(1) = 0.13525040E-02 = H(50)
H(2) = -0.2[illegible]E-03 = H(49)
H(3) = -0.24784770E-02 = H(48)
H(4) = -0.6020780E-03 = H(47)
H(5) = -0.2325753E-02 = H(46)
H(6) = 0.45115610E-02 = H(45)
H(7) = 0.79043170E-02 = H(44)
H(8) = -0.24318980E-02 = H(43)
H(9) = -0.4774965E-03 = H(42)
H(10) = -0.14785720E-01 = H(41)
H(11) = -0.10848050E-01 = H(40)
H(12) = 0.16587460E-01 = H(39)
H(13) = 0.6527185E-02 = H(38)
H(14) = 0.26803700E-01 = H(37)
H(15) = 0.12557050E-02 = H(36)
H(16) = -0.4509904E-01 = H(35)
H(17) = -0.6337098E-02 = H(34)
H(18) = -0.3680238E-01 = H(33)
H(19) = 0.29781430E-01 = H(32)
H(20) = 0.9176707E-01 = H(31)
H(21) = -0.14915400E-01 = H(30)
H(22) = 0.615222E-01 = H(29)
H(23) = -0.13966530E 00 = H(28)
H(24) = -0.30066080E 00 = H(27)
H(25) = 0.32908500E 00 = H(26)

	BANDA 1	BANDA 2	BANDA 3	BANDA
ANDA INFERIOR	0.0000000000	0.1999999900	0.4250000000	
IANDA SUPERIOR	0.1000000000	0.3500000000	0.5000000000	
'ALOR DESEADO	0.0000000000	1.0000000000	0.0000000000	
ONDERACION	10.0000000000	1.0000000000	10.0000000000	
ESVIACION	0.0001036060	0.0001036060	0.0001036060	
ESVIACION DB	-79.692270000	-59.692270000	-79.692270000	

RECUENCIAS EXTREMAS

0.0000000	0.0168750	0.0337500	0.0500000	0.0649998
0.0793737	0.0912479	0.0993723	0.2000000	0.2049996
0.2168738	0.2324976	0.2493714	0.2668701	0.2849938
0.3024926	0.3193663	0.3343652	0.3456144	0.3500000
0.4250000	0.4281248	0.4362492	0.4487483	0.4631222
0.4806210				

****

********** RESPUESTA DE FRECUENCIA **********

FN	DB
0.000	-79.658
0.010	-90.800
0.020	-81.281
0.030	-81.842
0.040	-89.023
0.050	-79.713
0.060	-86.474
0.070	-85.139
0.080	-79.807
0.090	-80.246
0.100	-80.291
0.110	-43.937
0.120	-25.217
0.130	-13.816
0.140	-6.443
0.150	-1.920
0.160	0.406
0.170	1.094
0.180	0.777
0.190	0.253
0.200	0.009
0.210	-0.000
0.220	0.007
0.230	-0.008
0.240	-0.031
0.250	0.009
0.260	-0.003
0.270	-0.008
0.280	0.006
0.290	0.005
0.300	-0.008
0.310	-0.002
0.320	0.009
0.330	-0.005
0.340	-0.002
0.350	-0.009
0.360	-0.368
0.370	-1.677
0.380	-4.569
0.390	-9.661
0.400	-17.739
0.410	-30.293
0.420	-52.174
0.430	-83.688
0.440	-84.715
0.450	-80.060
0.460	-81.948
0.470	-90.428
0.480	-79.736
0.490	-89.025

A N E X O 3

MANUAL DE UTILIZACION DEL PROGRAMA ELECFDAR

I N D I C E

OBJETIVO M - 1

METODO DE SOLUCION M - 1

Descripción del Programa

NOMENCLATURA M - 3

Variables de Entrada

Variables de Salida

FORMA DE PROPORCIONAR LOS DATOS AL PROGRAMA (INGRESO DE DATOS) M - 3

FORMA DE UTILIZAR EL PROGRAMA M - 4

OBJETIVO

El objetivo al diseñar un filtro digital es el de determinar su función de transferencia; la cual es una función racional en Z^{-1} en el caso de filtros recursivos (IIR) o es un polinomio en Z^{-1} en el caso de filtros no recursivos (FIR).

La función de transferencia debe generar una respuesta de frecuencia que cumpla con las especificaciones de diseño, sino exactamente, por lo menos determinar la mejor aproximación.

El programa diseña un filtro digital (FIR) con fase lineal.

METODO DE SOLUCION

El algoritmo utiliza el método de intercambio Remez, mediante el cual se obtiene la respuesta de frecuencia deseada que corresponde a los coeficientes de la mejor aproximación de Chebyshev.

El programa consta de las siguientes partes:

Programa Principal

Determina los coeficientes del filtro; genera la grilla de frecuencias; llama a ejecución a la subrutina Remez; calcula la respuesta a la función impulso unitaria, así como también la respuesta de frecuencia del filtro; por último imprime los resultados obtenidos.

Subrutina Remez

Calcula la mejor aproximación de Chebyshev hasta conseguir minimizar la función de error, para el efecto utiliza la función D, la función G, que se necesitan para la interpolación de Lagrange.

Determina la transformada discreta inversa de Fourier de la respuesta de frecuencia para obtener los coeficientes de la mejor aproximación.

Función D

Calcula los coeficientes de la interpolación de Lagrange que serán usados en la función G.

Función G

Evalua la respuesta de frecuencia utilizando la fórmula de interpolación de Lagrange en la forma baricéntrica.

Subrutina Error

Es llamada a ejecución por el programa principal si es que se presenta un error en los datos de entrada.

Subrutina Falla

Es llamada a ejecución por la subrutina Remez cuando existen fallas en la convergencia.

NOMENCLATURA

Variables de Entrada

NFILT.- Longitud del filtro

NBANDS.- Número de bandas de frecuencia

LGRID.- Longitud de la densidad de la grilla

EDGE( ).- Límites superior e inferior de las bandas de frecuencia

FX( ).- Atenuación deseada en cada banda de frecuencia

WTX( ).- Valor de la ponderación en cada banda de frecuencia

Variables de Salida

H( ).- Respuesta impulso unitaria

DEVIAT.- Desviación en cada par de bandas de frecuencia

IEXT( ).- Valor de las frecuencias extremas (arreglo)

RESPA( ).- Valor de la respuesta de frecuencia (arreglo)

INGRESO DE DATOS

Se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- La longitud máxima del filtro es de 128
- El número máximo de bandas de frecuencia es de 10
- El límite de las bandas de frecuencia oscila entre 0.0 y 0.5
- El valor de la ponderación deseada en cada banda debe ser mayor que cero

- El margen superior de cada banda no debe ser menor que el límite inferior
- Los datos de las bandas de frecuencia deben darse en forma ascendente

En la Tabla M-1 se presenta el contenido que deben tener tanto las tarjetas de datos como las tarjetas de control.

FORMA DE UTILIZAR EL PROGRAMA

El presente trabajo ha sido catalogado en el computador de la Escuela Politécnica Nacional (IBM 370/125) y estará almacenado tanto en disco como en cinta, por lo que para su utilización es necesario codificar tarjetas de control, las cuales se encuentran en la Tabla M - 2.

TABLA M-1

PERFORACION DE LAS TARJETAS DE DATOS

TARJETAS DE DATOS	COLUMNAS	FORMATO	NOMBRE DE VARIABLE	CONTENIDO Y OBSERVACIONES
Primera	1 a 3	I3	NFILT	Longitud del filtro
	4 a 5	I2	NBANDS	Número de bandas de frecuencia
	6 a 7	I2	LGRID	Longitud de la densidad de la grilla, si se perfora un cero o si se omite, el programa asume un valor igual a 16
Segunda		Variable	EDGE( )	Arreglo de 20 elementos. Determina los márgenes superior e inferior en cada una de las bandas.
Tercera		Variable	FX( )	Arreglo de 10 elementos. Determina la atenuación deseada en cada una de las bandas.
Cuarta		Variable	WTX( )	Arreglo de 10 elementos. Determina la ponderación deseada en cada una de las bandas para una mejor visualización en la grafización.

TABLA M-1 (CONTINUACION)

El formato variable almacena en precisión simple; los datos de entrada deben ir separados por una coma y se debe perforar el punto decimal. Los datos pueden ocupar una o más tarjetas, en cuyo caso la tercera tarjeta se convertiría en cuarta y así sucesivamente.

NOTAS: Formato I (enteros) perforar el valor justificado a la derecha

TARJETAS DE CONTROL

Se deben perforar desde la columna 1:

```
// JOB  Nombre  N° Cuenta
// EXEC WATFIV
$JOB
$ENTRY
Tarjetas de datos
/*
/&
* $$ EOJ
```

↑
Columna 1

TABLA M - 2

TARJETAS DE CONTROL PARA UTILIZAR EL PROGRAMA GRABADO EN DISCO

Se deben perforar desde la columna 1:

CODIGO DE CUENTA

```
// EXEC ELECFDAR
DATOS
/*
/&
* $$ EOJ
```

TARJETAS DE CONTROL PARA UTILIZAR EL PROGRAMA GRABADO EN CINTA

Se deben perforar desde la columna 1:

CODIGO DE CUENTA

```
* OPERADOR CARGUE LA CINTA DE ELECTRICA
* EN LA UNIDAD 28Ø  GRACIAS
// PAUSE CARGAR CINTA DE EELECTRICA EN LA UNIDAD 28Ø  GRACIAS
   MTC FSF,X'28Ø',4
// ASSGN SYSIPT,X'28Ø'
```

TABLA M - 2 (CONTINUACION)

```
// OPTION LINK,NOLIST
   ACTION CANCEL,NOMAP
// EXEC FFORTRAN
// EXEC LNKEDT
// ASSGN SYSIPT,X'ØØC'
// EXEC
DATOS
/*
/&
   MTC REW,X'28Ø'
*$$ EOJ
```