ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

CONTROL DEL MOVIMIENTO DEL ROBOT MANIPULADOR DE 7 GRADOS DE LIBERTAD UTILIZANDO MATLAB

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

FRANCISCO XAVIER SUÁREZ GARCÍA

francisco1100@gmail.com

DIRECTOR:

ING. MARIO GERMÁN GRANJA RAMÍREZ MSc.

mario.granja@epn.edu.ec

Quito, Agosto 2015

DECLARACIÓN

Yo **Francisco Xavier Suárez García**, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.

Francisco Xavier Suárez García

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Francisco Xavier Suárez García bajo mi supervisión.

ING. MARIO GERMÁN GRANJA RAMÍREZ MSc.

DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios que me ha dado la oportunidad de estudiar y crecer en familia.

A mis padres que me han dado la vida y me han enseñado a ser trabajador y honesto en toda actividad.

A mi hermana por todo su apoyo y comprensión a lo largo de la carrera.

DEDICATORIA

Todo el trabajo y esfuerzo que implica una carrera universitaria al final tiene su recompensa.

Quiero dedicar este trabajo a mi Padre, Jorge por guiarme siempre y ayudar a descubrir mi camino, mi vocación, mi profesión.

A mi Madre, Diana por siempre apoyarme en mis proyectos, por más locos e improbables que parezcan.

A mi hermana, María Augusta que siempre ha sido para mí un ejemplo de dedicación y perseverancia.

Finalmente a todo el que encuentre en este trabajo una ayuda académica, ya sea en la vida universitaria o la vida profesional; ya que como dijo Leonardo Da Vinci: ”El aprendizaje es lo único que la mente nunca teme, nunca se cansa y nunca se arrepentirá”.

Índice General

1. Generalidades 1
1.1. Reseña Histórica 1
1.2. ¿Por qué estudiar Robótica? 6
1.3. Importancia de la Robótica y aplicaciones generales 6
2. Marco Teórico 8
2.1. Conceptos Básicos 8
2.1.1. Grados de libertad (GDL) de un robot 9
2.1.2. Fórmula de Grübler para robots planares 11
2.1.3. Fórmula de Grübler para robots en el espacio 12
2.2. Movimiento de cuerpos rígidos 13
2.2.1. Rotaciones 17
2.2.1.1. Ángulos de Euler 18
2.2.1.2. Ángulos RPY (Roll-Pitch-Yaw) 21
2.2.1.3. Representación Exponencial 23
2.2.2. El movimiento en cuerpos rígidos 27
2.2.3. Movimientos de Tornillo 29
2.3. Cinemática Directa 32
2.3.1. Convenio de Denavit-Hartenberg 33
2.3.1.1. Asignación de sistemas de coordenadas 33
2.3.1.2. Justificación del uso de cuatro parámetros en el convenio DH 35
2.3.2. Producto de Exponenciales 36
3. Determinación del modelo matemático 39

3.1. Definición del problema 39
3.1.1. Definición de variables 40
3.1.2. Metodología de cálculo a utilizar 40
3.1.3. Representación esquemática del robot manipulador 41
3.2. Modelo matemático utilizando DH_m 42
3.3. Modelo matemático utilizando Producto de Exponenciales 47
4. Simulación del funcionamiento utilizando MATLAB® 58
4.1. Consideraciones generales para el uso del Toolbox Robotics 58
4.2. Codificación para DH_m 60
4.3. Codificación para Producto de Exponenciales 62
4.4. Simulación tridimensional con Toolbox Robotics 63
4.5. Resultados en distintas posiciones 65
4.5.1. Posición cero 65
4.5.2. Posición vertical 66
4.5.3. Posición X 68
5. Análisis de resultados 70
5.1. Comparación de resultados de los distintos métodos 70
5.2. Aplicaciones 71
6. Conclusiones 72
7. Recomendaciones 74
Bibliografía 75
Anexos 77
Anexo A1. Representación esquematica del robot manipulador de siete grados de libertad. 78
Anexo A2. Asignación de sistemas de coordenadas según DH_m. 79

Anexo A3. Representación esquemática para el uso de Producto de Exponenciales. 80

Anexo A4. Codificación completa para el cálculo de la matriz de transformación según DH_m. 81

Anexo A5. Codificación completa para el cálculo de la matriz de transformación mediante Producto de Exponenciales. 84

Anexo A6. Codificación completa para la simulación tridimensional del robot manipulador. 88

Índice de Figuras

Figura 1.1. Mecanismo Antikythera (Rieke & Rieke, 2014) 1

Figura 1.2. Robot de Leonardo en una exhibición en Berlín. (Möller, 2005) 2

Figura 2.1. Representación en el plano de un punto (izquierda) y de una moneda (derecha). (Park & Lynch, pág. 10) 9

Figura 2.2. Tipos de articulaciones. (Ollero, 2001, pág. 17).....10

Figura 2.3. Coordenadas de un cuerpo rígido en el plano. (Park & Lynch, pág. 14) 11

Figura 2.4. Movimiento de cuerpo rígido en el plano. (Park & Lynch, pág. 40).....14

Figura 2.5. Descripción matemática de la posición y orientación de un cuerpo rígido en el espacio. (Park & Lynch, 2014, pág. 43).....16

Figura 2.6. Representacion de los ángulos de Euler en la posición cero del mecanismo de muñeca. (Park & Lynch, pág. 48).....19

Figura 2.7. Representacion de los ángulos RPY. (Ollero, pág. 58).....21

Figura 2.8. Rotación del vector $p(0)$ un ángulo θ alrededor del eje w hasta $p(\theta)$. (Park & Lynch, pág. 56).....24

Figura 2.9. Representación de tres sistemas de referencia distintos en el espacio. Tomado de (Park & Lynch, pág. 65).....28

Figura 2.10. Movimiento de cuerpo rígido representado como movimiento de tornillo. (Park & Lynch, 2014, pág. 69) 29

Figura 2.11. Cinemática directa de un robot planar de 3GDL. (Park & Lynch, 2014, pág. 102) 32

Figura 2.12. Representación de los parámetros de Denavit-Hartenberg. (Ollero, 2001, pág. 68) 33

Figura 2.13. Ejemplo donde los parámetros de Denavit-Hartenberg no pueden ser utilizados. (Park & Lynch, 2014, pág. 105) 35

Figura 2.14. Ilustracion de la fórmula de Producto de Exponenciales para un robot espacial de *n* eslabones. (Park & Lynch, 2014, pág. 110) 36

Figura 3.1. Robot KUKA LBR iiwa R800. (KUKA Labs, 2014).....39

Figura 3.2. Representación esquemática del robot manipulador de siete grados de libertad. Fuente Propia 41

Figura 3.3. Asignación de sistemas de coordenadas para DH_m. Fuente Propia ...42

Figura 3.4. Representación esquemática para el uso de Producto de Exponenciales. Fuente Propia.....47

Figura 4.1. Modificación del archivo "rotz.m". Fuente Propia. 59

Figura 4.2. Modificación del archivo "rotx.m". Fuente Propia. 59

Figura 4.3. Codificación del archivo "rotzt.m". Fuente Propia.....60

Figura 4.4. Ejemplo de la interfaz del programa para DH_m. Fuente Propia. 61

Figura 4.5. Ejemplo de la interfaz para DH_m utilizando valores numéricos. Fuente Propia. 61

Figura 4.6. Ejemplo de la interfaz del programa para producto de exponenciales. Fuente Propia. 62

Figura 4.7. Inicialización de la simulación tridimensional. Fuente Propia. 63

Figura 4.8. Resultado posición cero, DHm. Fuente Propia 65

Figura 4.9. Resultado posición cero, Producto de Exponenciales. Fuente Propia 65

Figura 4.10. Resultado posición cero, Simulación tridimensional. Fuente Propia .66

Figura 4.11. Resultado posición vertical, DHm. Fuente Propia 66

Figura 4.12. Resultado posición vertical, Producto de Exponenciales. Fuente Propia 67

Figura 4.13. Resultado posición vertical, Simulación tridimensional. Fuente Propia 67

Figura 4.14. Resultado posición X, DHm. Fuente Propia 68

Figura 4.15. Resultado posición X, Producto de Exponenciales. Fuente Propia...68

Figura 4.16. Resultado posición X, Simulación tridimensional. Fuente Propia.....69

Índice de Tablas.

Tabla 1. Condiciones algebráicas de una matriz exponencial.....23

Tabla 2. Parámetros DH_m para el robot articular de 7 grados de libertad. 43

Tabla 3. Variables en la simulación con Toolbox Robotics. Fuente Propia. 64

Índice de Ecuaciones.

Ecuación 2.1. Ecuación de Grübler en el plano.....12

Ecuación 2.2. Ecuación de Grübler en el espacio. 13

Ecuación 2.3. Vector posición *p* en coordenadas {s} 14

Ecuación 2.4. Orientación de {b} con respecto a {s} 14

Ecuación 2.5. Representación matricial de la Ecuación 2.4 y la Ecuación 2.5.....15

Ecuación 2.6. Coordenadas de {c} con respecto a {s} 15

Ecuación 2.7. Coordenadas de {c} con respecto a {b} 15

Ecuación 2.8. Representación del movimiento de {b} a {c} 16

Ecuación 2.9. Representación vectorial de {b} en el espacio. 16

Ecuación 2.10. Representación matricial de laEcuación 2.9. 17

Ecuación 2.11. Condición del vector unitario para rotaciones. 17

Ecuación 2.12. Condición de ortogonalidad para rotaciones. 18

Ecuación 2.13. Representación matricial de los ángulos de Euler. 19

Ecuación 2.14. Resultante matricial de los ángulos de Euler. 20

Ecuación 2.15. Ángulos de Euler para una matriz de rotación arbitraria. 20

Ecuación 2.16. Representación matricial de los águlos RPY. 22

Ecuación 2.17. Expansión en serie de la función exponencial matricial.....23

Ecuación 2.18. Teorema de Cayley-Hamilton. 24

Ecuación 2.19. Matriz de rotación del vector $p(0)$ alrededor del eje w, un ángulo θ. 26

Ecuación 2.20. Valor de w en función de R y el ángulo de rotación θ.....27

Ecuación 2.21. Matiz de transformación homogenea general.....27

Ecuación 2.22. Representación de movimiento de tornillo mediante una matriz SE(3). 30

Ecuación 2.23. Representación de $S \in \mathbb{R}4x4$ 30

Ecuación 2.24. Expansión de la serie exponencial $eS\theta$.....31

Ecuación 2.25. Valor de v para representación matricial de un movimiento de tornillo.....31

Ecuación 2.26.Matriz de transformación para el robot planar de la Figura 2.11 ...32

Ecuación 2.27. Representacion exponencial de un desplazamiento en el espacio de $M \in SE3$ a $T \in SE(3)$.....36

Ecuación 2.28. Configuración del efector en la posición cero. 37

Ecuación 2.29. Fórmula del Producto de Exponenciales para un robot de *n* eslabones. 38

Ecuación 3.1. Ecuación para el cálculo del Producto de Exponenciales para el robot manipulador de 7 GDL. 48

RESUMEN

El presente proyecto de titulación comprende el desarrollo de distintos métodos para la obtención del modelo matemático que describa la cinemática directa de un robot manipulador de 7 grados de libertad.

Se inicia mediante una introducción teórica a conceptos básicos de mecanismos y robótica, pasando a la descripción del movimiento de cuerpos rígidos, tanto en el plano como en el espacio, en el cual se introduce el concepto de la representación exponencial de matrices de rotación y de movimientos de tornillo. Posteriormente se establecen métodos para la obtención de un modelo matemático que describa la cinemática directa del robot manipulador utilizando el convenio de Denavit-Hartenberg, con la aplicación de un “eslabón virtual”, y el concepto de Producto de Exponenciales.

Una vez establecido el modelo matemático, se procede a simular en MATLAB® los distintos métodos, además de realizar una simulación tridimensional del robot manipulador con la ayuda del Toolbox Robotics de Peter Corke.

Finalmente se comparan los resultados de los distintos métodos obteniendo como resultado final una comprobación de todos los métodos propuestos. Con los resultados también se valida el uso de un “eslabón virtual” en la aplicación del convenio de Denavit-Hartenberg.

El resultado de este proyecto constituye un aporte significativo a la enseñanza de la robótica en la Escuela Politécnica Nacional, ya que demuestra la existencia de otras posibilidades alternas al convenio de Denavit-Hartenberg para el cálculo de la cinemática directa de un robot manipulador.

PRESENTACIÓN

En la actualidad el estudio de la robótica se ha convertido cada vez más en un punto de interés para la industria y las universidades de prestigio. La robótica es un campo extenso y multidisciplinario pero la parte mecánica es talvez la más importante ya que se requiere de un sólido conocimiento de mecanismos y de matemática para el correcto funcionamiento y desempeño de un robot manipulador.

Por esta razón, los objetivos del trabajo se enfocan en tres puntos fundamentales: la recopilación de información acerca de métodos matemáticos que permitan obtener la cinemática directa del robot manipulador; la determinación del modelo matemático que describa la posición del efector del robot manipulador; y la representación tanto de los cálculos como del robot usando el programa MATLAB®.

El proyecto también se enfoca en la comparación de los distintos métodos y determinar cuál de ellos es mejor para la su aplicación a futuros proyectos.

CAPÍTULO 1

1. GENERALIDADES

1.1. RESEÑA HISTÓRICA

La historia de la robótica está estrechamente relacionada con la historia de la ciencia y el desarrollo tecnológico. En el campo de la robótica se han utilizado avances en mecánica, electrónica, computación, neumática, hidráulica, entre otros.

En la mitología griega se habla de Talos, una criatura gigante de bronce, con forma humana que protegía a la isla de Creta de ataques de piratas, según la leyenda, Talos viajaba alrededor de la isla tres veces por día. Talos es considerado por algunos como el primer concepto de un robot en la historia (Ancient-Origins, 2013) ya que cumple funciones automáticas de defensa para el beneficio de los habitantes de la isla.

Algunos historiadores afirman que el primer mecanismo real data de hace más de 2000 años, se lo conoce como el 'mecanismo de Antikythera" desarrollado en la Grecia antigua, como se ilustra en la Figura 1.1. En la actualidad se especula sobre su uso como una computadora análoga muy rudimentaria capaz de calcular los movimientos de cuerpos celestes en el cielo (Rieke & Rieke, 2014).

Figura 1.1. Mecanismo Antikythera (Rieke & Rieke, 2014)

Los griegos realizaron otros avances importantes como la creación de un reloj de agua que, como resultado de la fuerza ejercida por la caída de agua a una tasa constante, medía el tiempo; anteriormente utilizaban relojes de arena para medir el tiempo. Algunos años antes, el filósofo griego Aristóteles había expresado una de sus famosas frases: “Si cada herramienta, al darle una orden, o bajo su propio juicio, pudiera realizar el trabajo para el que beneficia, no habría necesidad ni de aprendices para los maestros ni de esclavos para los señores” (Isom, 2005)

En el año de 1495, el inventor italiano Leonardo DaVinci diseña un aparato mecánico con la apariencia de un caballero en armadura. El mecanismo del interior llega a ser conocido como “el robot de Leonardo” y hace que la armadura tenga un movimiento similar al de una persona utilizando la armadura, como se puede apreciar en la Figura 1.2. Este tipo de mecanismo se hizo común entre la realeza para entretenimiento en sus fiestas. En el mismo año DaVinci diseñó otro mecanismo que muchos llaman el primer robot humanoide, capaz de sentarse, mover los brazos, la cabeza mientras abre y cierra la boca, aunque este mecanismo nunca fue construido. (RobotShop Distribution Inc., 2008)

Figura 1.2. Robot de Leonardo en una exhibición en Berlín. (Möller, 2005)

En 1645, Blaise Pascal inventó una maquina calculadora, llamada Pascalina, para ayudar a su padre con el cálculo de impuestos. Sólo se fabricaron alrededor de 50 Pascalinas.

En 1666, Samuel Morland inventó una versión de bolsillo de la Pascalina, la cual funcionaba con mayor precisión que su antecesora.

En 1738, el inventor francés Jacques de Vaucanson construye una serie de autómatas, entre ellos una flauta capaz de tocar doce canciones distintas y su autómata más famoso “el pato” el cual podía moverse, hacer sonidos, mover sus alas e incluso comer granos.

Durante el siglo XVIII se fabricaron muchos autómatas, especialmente para la realeza que los utilizaban como juguetes y elementos decorativos.

En 1801, Joseph Jacquard construye una máquina tejedora la cual es controlada mediante tarjetas perforadas, similares a las tarjetas de las primeras computadoras del siglo XX.

En 1847, George Boole es el primero en representar matemáticamente la lógica mediante el uso de su álgebra booleana.

En 1865, John Brainerd crea el “hombre de vapor”, utilizado para mover carritos con ruedas. Posteriormente en 1885, Frank Reade Jr. construye el “hombre eléctrico” el cual es básicamente la versión eléctrica del hombre de vapor.

En 1898, Nikola Tesla construye el primer barco a control remoto y demuestra su funcionamiento en Madison Square Garden en la ciudad de New York. Lamentablemente la gente piensa que es un truco y la tecnología no se desarrolla hasta muchos años después.

En 1921, el escritor checo Karel Capek introduce la palabra “robot” en su obra “R.U.R.” (Rossuum’s Universal Robots). La palabra robot se deriva de la palabra checa para esclavo o sirviente “robota”.

En 1936, Alan Turing introduce el concepto de una máquina teórica que puede simular argumentos lógicos y algoritmos matemáticos. A esta máquina se la conoce como la “Máquina de Turing” y se lo considera como uno de los primeros acercamientos a los procesadores y las computadoras modernas.

En 1942 Isaac Asimov, escritor de ciencia ficción y catedrático de la Universidad de Boston, introduce en una de sus obras de ciencia ficción el concepto de robótica, actualmente conocida como una rama de la ingeniería mecánica, eléctrica y de sistemas. También introduce las famosas tres reglas de la robótica en su obra “Runaround”.

En 1950, Alan Turing propone una prueba para determinar si una máquina ha alcanzado la capacidad de pensar por sí misma, se la conoce como la “prueba de Turing”.

En 1956, John McCarthy, Marvin Minsky, Nat Rochester y Claude Shannon organizan en la universidad de Dartmouth una conferencia de investigación de inteligencia artificial. Como resultado de esta conferencia se introduce al mundo científico el término “inteligencia artificial”.

En 1959, John McCarthy y Marvin Minsky fundan el laboratory de inteligencia artificial en el Massachusetts Institute of Technology (MIT).

En 1961, Heinrich Ernst desarrolla el MH-1, una mano mecánica controlada por computadora en MIT.

En 1962, Se introduce al mercado el primer brazo robótico industrial, el “Unimate”, diseñado principalmente para completar tareas repetitivas o peligrosas en las líneas de ensamblaje de General Motors.

En 1963, John McCarthy sale de MIT y funda el laboratorio de inteligencia artificial en la Universidad de Stanford, posteriormente conocido como SRI Technology. En el año de 1966, en el SRI Technology se construye el primer robot que puede reaccionar a estímulos externos, llamado “Shakey”. En el mismo año en el

laboratorio de inteligencia artificial de MIT, Joseph Weizenbaum crea el programa ELIZA de inteligencia artificial, el cual simula un psicólogo computarizado.

En 1969, Victor Scheinman, estudiante de ingeniería mecánica de la universidad de Stanford crea el famoso brazo Stanford, el cual aún se usa como referencia de diseño en la actualidad.

En 1976, el japonés Shigeo Hirose diseña el “Soft Gripper” en el instituto de tecnología de Tokio, el cuál fue diseñado para envolverse alrededor de un objeto a manera de una serpiente.

En 1986, Honda anuncia el inicio de un programa de investigación de robótica basado en la premisa que un robot debe coexistir y cooperar con un ser humano, realizando las tareas que una persona no puede hacer, para el beneficio final de la sociedad. Diez años después en 1996, la compañía introduce el robot “P3”, un robot humanoide producto de una década de investigación y desarrollo.

En 1999, SONY introduce al mercado la mascota robótica AIBO y un año después en el año 2000, Honda presenta su nuevo robot humanoide ASIMO.

En los años subsiguientes la NASA lanza una serie de misiones no tripuladas a Marte con sondas robóticas a bordo. Las más notables son Spirit (2004), Opportunity (2004) y Curiosity (2012).

En el año 2010 la compañía alemana KUKA lanza al mercado una serie de brazos robóticos industriales de 6 grados de libertad y en el año 2014 lanza el brazo robótico de 7 grados de libertad de peso liviano LBR iiwa.

1.2. ¿POR QUÉ ESTUDIAR ROBÓTICA?

La robótica, como disciplina académica, es un campo relativamente joven con objetivos ambiciosos como el de crear máquinas que tengan la capacidad de pensar y comportarse como los seres humanos. Este objetivo de crear máquinas inteligentes nos lleva a hacer un autoanálisis, considerando aspectos tales como el porqué del diseño corporal humano, ¿Qué funciones cumple?, ¿Cómo es controlado el movimiento?, ¿Cómo aprendemos y refinamos movimientos complejos?, entre otras interrogantes. (Park & Lynch, 2014, pág. 1)

El hecho de que las preguntas fundamentales de la robótica sean básicamente preguntas acerca de nuestra existencia, hacen que sea un campo muy interesante de investigación y desarrollo, pero a su vez hacen que el estudio sea de una mayor complejidad que en otro campo.

1.3. IMPORTANCIA DE LA ROBÓTICA Y APLICACIONES GENERALES

En la actualidad la robótica se está convirtiendo en un área de estudio de gran importancia en países desarrollados ya que incluso con el desarrollo limitado que se ha obtenido, tiene un muy amplio campo de aplicación, desde aplicaciones simples como soluciones para el hogar hasta desarrollo militar avanzado.

El estudio de la robótica influencia de manera directa al sector productivo, proveyendo de herramientas de suma importancia que aumentan la productividad y a su vez disminuyendo el personal humano destinado a tareas peligrosas o nocivas para la salud.

La robótica es un campo multidisciplinario, es decir, involucra diversas áreas de conocimiento, como teoría de mecanismos, electrónica, control automático,

programación, entre otros. Por esta razón las aplicaciones de la robótica están directamente ligadas al desarrollo tecnológico y buscan dar soluciones tanto a problemas grandes como a problemas cotidianos como es el caso del robot de limpieza Roomba, el cuál fue creado por tres estudiantes del Massachusetts Institute of Technology en 1990 con la finalidad de limpiar sus habitaciones y aprovechar de mejor manera el tiempo que invertían en esta actividad (iRobot Inc., 2014).

La aplicación más común de la robótica, es el desarrollo de brazos robóticos que puedan realizar procesos repetitivos o peligrosos con gran precisión y a bajo costo de producción. Los brazos robóticos tienen muy variadas aplicaciones, en distintas áreas, los más utilizados se los emplea para realizar pintura de precisión en vehículos, soldaduras en lugares de difícil acceso, ensamblajes de maquinaria y en últimos años incluso están siendo utilizados con fines médicos para operaciones de alto grado de peligrosidad donde se requiere alta precisión de los instrumentos, permitiendo que las cirugías sean menos invasivas, resultando en una pronta recuperación del paciente.

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

El estudio de la robótica, se basa en el estudio de mecanismos, por esta razón se deben tener claros los conceptos asociados a los mecanismos. Un mecanismo está formado de la unión de cuerpos rígidos, llamados *eslabones*, mediante juntas con el objetivo de que exista movimiento relativo entre los eslabones. En robótica, generalmente las juntas son motores eléctricos más conocidos como *actuadores*.

Dado un robot específico una de las preguntas más importantes es ¿Dónde está el robot?, es decir, donde están situados los eslabones del robot. Para poder responder esta interrogante es necesario conocer la configuración del mismo, en otras palabras, se debe especificar las posiciones de todos los puntos del robot; al ser este conformado por cuerpos rígidos, el trabajo se facilita ya que solo se necesitan unos pocos parámetros para describir su posición en el espacio. (Park & Lynch, 2014, pág. 9)

Por motivos didácticos es conveniente iniciar el análisis en un plano de dos dimensiones, para posteriormente pasar a un análisis tridimensional para robots en el espacio.

Para describir la posición de un punto en el plano se necesita conocer dos coordenadas (x, y); en cambio para describir la posición de un objeto, como es el caso de una moneda, en un plano se requieren tres coordenadas: dos coordenadas de posición (x, y) y una coordenada de orientación, un ángulo θ como se observa en la Figura 2.1.

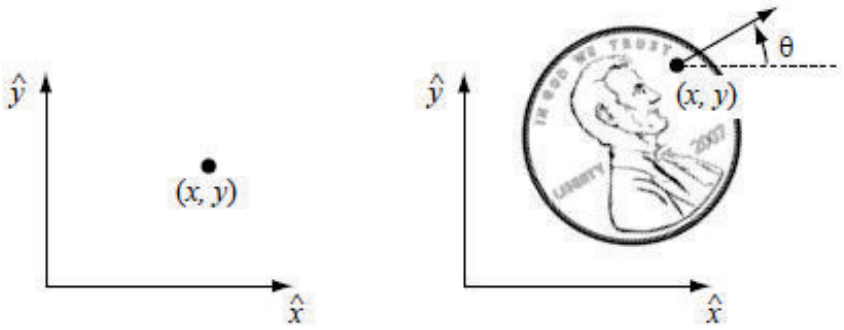


Figura 2.1. Representación en el plano de un punto (izquierda) y de una moneda (derecha). (Park & Lynch, pág. 10)

La configuración de un robot es el conjunto de parámetros que describen la posición de cada punto del robot. El número mínimo de variables requeridas para representar la configuración del robot se lo conoce como *grados de libertad (GDL)* del robot. El espacio de *n* dimensiones que contiene todas las configuraciones posibles, se lo conoce como el campo de acción o campo de trabajo del robot.

2.1.1. GRADOS DE LIBERTAD (GDL) DE UN ROBOT

Para entender los grados de libertad posibles en un manipulador robótico, primero es necesario comprender los distintos tipos de juntas que pueden existir. La Figura 2.2 ilustra los distintos tipos de juntas que se pueden utilizar en un robot y sus grados de libertad.

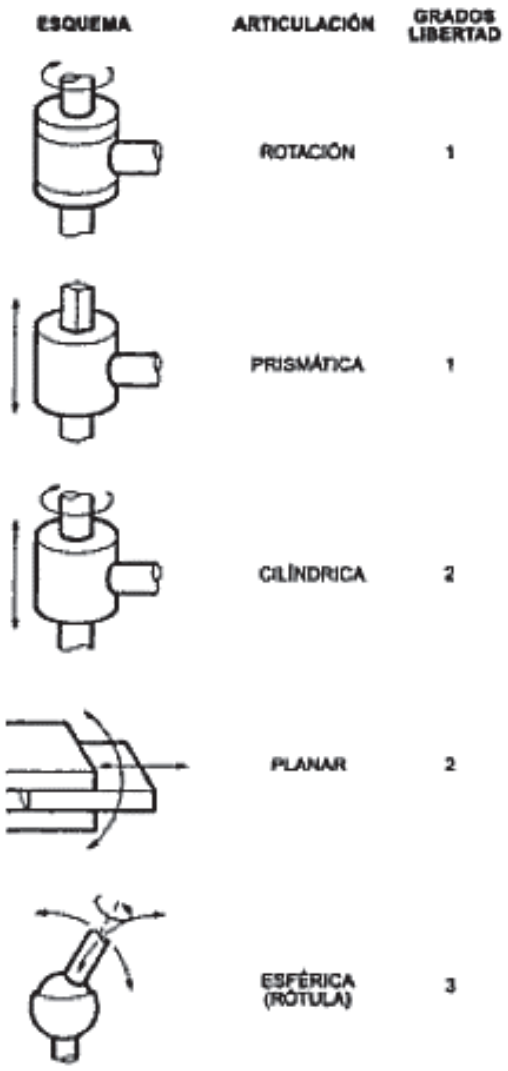


Figura 2.2. Tipos de articulaciones. (Ollero, 2001, pág. 17)

Los tipos de juntas más utilizadas son la de rotación y la prismática, ambas con un solo grado de libertad. También existen juntas con varios grados de libertad como es el caso de las juntas cilíndricas, planares y esféricas (conocidas también como juntas de rótula). Existen también otros tipos de juntas que resultan de la combinación de algunas de las juntas mencionadas previamente, como la junta de tornillo (rotatoria más prismática) o la denominada junta universal la cual consta de dos juntas rotatorias juntas; ambas poseen dos grados de libertad.

2.1.2. FÓRMULA DE GRÜBLER PARA ROBOTS PLANARES

La fórmula de Grübler permite calcular los grados de libertad o movilidad de un robot, basándose en el número de eslabones y el número y tipo de juntas que componen al mecanismo. En primer lugar se considera un cuerpo rígido en el plano, en el cual se escogen dos puntos A y B cuyas coordenadas respecto a un sistema de coordenadas fijo sean (x_A,y_A) y (x_B,y_B) respectivamente, como se muestra en la Figura 2.3. Como se trata de un cuerpo rígido, la distancia d_{AB} permanecerá siempre constante. Luego se define un ángulo Φ_{AB} el cual representa la rotación del cuerpo con respecto al eje x del sistema de coordenadas fijo.

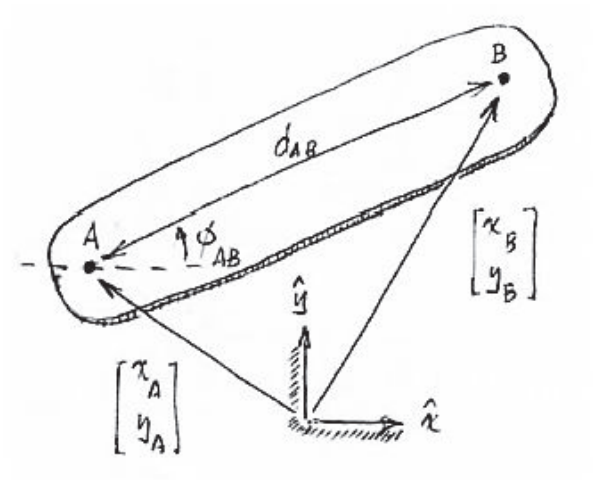


Figura 2.3. Coordenadas de un cuerpo rígido en el plano. (Park & Lynch, pág. 14)

Los parámetros x_A, y_A y Φ_{AB} pueden ser utilizados como tres coordenadas independientes que parametrizan la configuración planar del cuerpo rígido. Ahora, de manera similar, se considera un segundo cuerpo rígido con puntos C y D que cumplen las mismas propiedades que los puntos A y B del primer cuerpo rígido. Sí el punto B del primer cuerpo es conectado al punto C del segundo cuerpo rígido por una articulación rotatoria, esto impone dos restricciones adicionales: x_B=x_C y y_B=y_C resultando en ocho coordenadas y cuatro restricciones, por lo tanto se tienen 4 grados de libertad. Repitiendo el proceso para una articulación prismática y para

una articulación con dos grados de libertad, se puede concluir la siguiente proposición:

"*Si se considera un robot planar que consiste de N eslabones, donde la tierra o el sistema fijo es tomado en cuenta como un eslabón. Siendo J el número total de juntas y f_i el número de grados de libertad de la junta i-ésima; los grados de libertad de un mecanismo robótico obedecen la siguiente formula*:" (Park & Lynch, pág. 16)

$$GDL = 3(N-1) - \sum_{i=1}^{J}(3 - f_i)$$

Simplificando se obtiene la siguiente fórmula:

$$GDL = 3(N-1-J) + \sum_{i=1}^{J} f_i \tag{2.1}$$

Ecuación 2.1. Ecuación de Grübler en el plano.

2.1.3. FÓRMULA DE GRÜBLER PARA ROBOTS EN EL ESPACIO

Para describir la posición y orientación de un cuerpo rígido en el espacio es necesario utilizar seis parámetros independientes, tres coordenadas (x,y,z) y un ángulo de rotación con respecto a cada eje. Siguiendo un proceso análogo al de los robots planares, se puede derivar la fórmula de Grübler para robots en el espacio bajo la siguiente proposición:

"*Si se considera un robot espacial que consiste de N eslabones (incluyendo la tierra). Siendo J el número total de juntas (enumeradas desde 1 hasta J) y f_i el número de grados de libertad de la junta i-ésima; los grados de libertad de un mecanismo robótico obedecen la siguiente formula*:" (Park & Lynch, pág. 19)

$$GDL = 6(N-1) - \sum_{i=1}^{J}(6 - f_i)$$

Simplificando se obtiene la siguiente fórmula:

$$GDL = 6(N-1-J) + \sum_{i=1}^{J} f_i \tag{2.2}$$

Ecuación 2.2. Ecuación de Grübler en el espacio.

2.2. MOVIMIENTO DE CUERPOS RÍGIDOS

Si se quiere especificar la posición y orientación de un objeto en el espacio, se ha establecido que es necesario de seis parámetros. Otra forma de describir la posición y orientación de un objeto es mediante un sistema de referencia propio de cada cuerpo y tratar de describirlo según un sistema de coordenadas fijo previamente establecido, a esto se lo conoce como el aspecto *descriptivo* de los movimientos de los cuerpos rígidos. También existe el aspecto *prescriptivo*, el cual supone transformaciones de $\mathbb{R}^3 a\ \mathbb{R}^3$. Matemáticamente se puede representar el aspecto descriptivo y el prescriptivo de los movimientos de los cuerpos rígidos utilizando el mismo modelo.

Para iniciar el análisis, como en el caso anterior, es conveniente realizar un ejemplo en el plano y luego pasar al espacio. Si se considera el cuerpo planar de la Figura 2.4(a) su movimiento está confinado al plano. Al sistema de referencia fijo, también conocido como sistema espacial, se lo denota con {s} y sus respectivos vectores unitarios en cada eje. De manera similar se adjunta un sistema de referencia al cuerpo, denotado {b}, con sus respectivos vectores unitarios; debido a que éste es un sistema de coordenadas que se mueve con el cuerpo, se lo conoce como sistema de coordenadas fijo o del cuerpo.

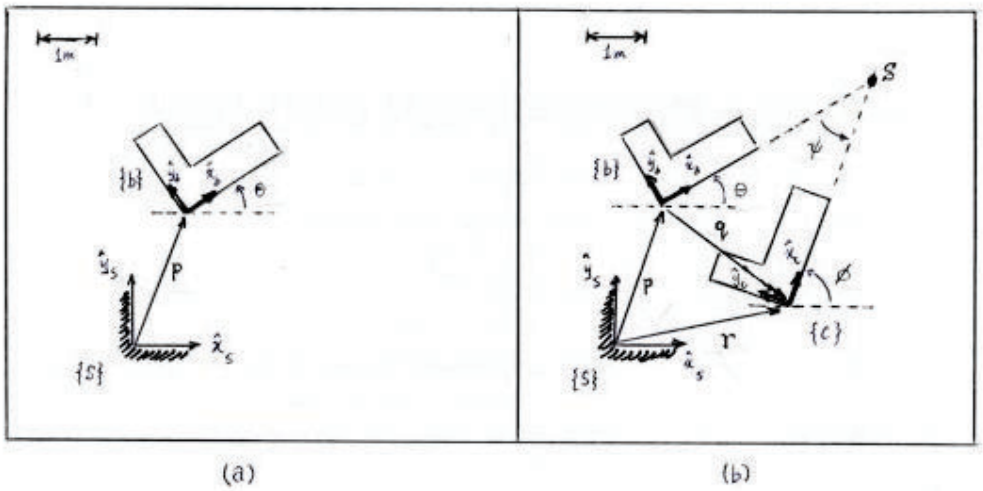


Figura 2.4. Movimiento de cuerpo rígido en el plano. (Park & Lynch, pág. 40)

Para describir la configuración del cuerpo, solo se necesita conocer la posición y orientación del sistema de referencia móvil con respecto al sistema fijo. El vector que describe la posición desde el sistema fijo al sistema móvil, denotado como *p*, puede ser expresado en términos del sistema de referencia fijo de la siguiente forma:

$$p = p_x \hat{x}_s + p_y \hat{y}_s \tag{2.3}$$

Ecuación 2.3. Vector posición *p* en coordenadas {s}

De manera similar, se puede representar la orientación en base al ángulo θ, como muestra la Figura 2.4(a), y los vectores unitarios del sistema {s}:

$$\begin{aligned} \hat{x}_b &= \cos\theta\, \hat{x}_s + \operatorname{sen}\theta\, \hat{y}_s \\ \hat{y}_b &= -\operatorname{sen}\theta\, \hat{x}_s + \cos\theta\, \hat{y}_s \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ecuación 2.4. Orientación de {b} con respecto a {s}

Si se asume que siempre se van a representar estos vectores con respecto al sistema de referencia fijo, se los puede representar de manera matricial:

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Ecuación 2.5. Representación matricial de la Ecuación 2.4 y la Ecuación 2.5

Ahora considerando la Figura 2.4(b), cuando el cuerpo es movido de {b} a {c} se debe seguir un proceso similar para el cálculo de los vectores r y q, con sus rotaciones R y Q, respectivamente.

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Ecuación 2.6. Coordenadas de {c} con respecto a {s}

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Ecuación 2.7. Coordenadas de {c} con respecto a {b}

Es posible representar este movimiento con la Ecuación 2.8 tomando en cuenta que Pq representa al vector *q* en coordenadas de {s}. El par (Q,q) representa el movimiento del sistema {b} al sistema {c}. A este par matriz-vector se lo conoce como el desplazamiento de cuerpo rígido o movimiento de cuerpo rígido. A este conjunto de movimiento se lo denomina también *movimiento de tornillo*. (Park & Lynch, pág. 43)

$$r = p + Pq \qquad\qquad R = PQ \tag{2.8}$$

Ecuación 2.8. Representación del movimiento de {b} a {c}

Para generalizar los conceptos anteriores al espacio, se debe considerar un cuerpo tridimensional como el de la Figura 2.5. Mediante a un proceso similar al del caso planar, se llegan a obtener las siguientes ecuaciones:

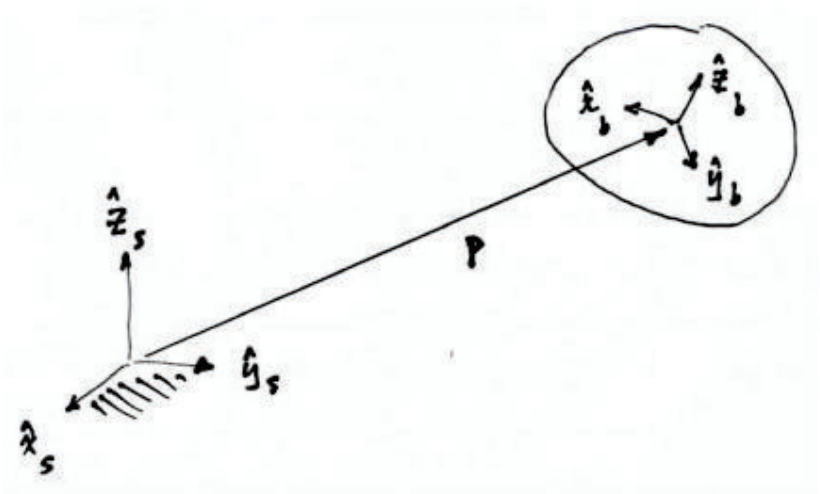


Figura 2.5. Descripción matemática de la posición y orientación de un cuerpo rígido en el espacio. (Park & Lynch, 2014, pág. 43)

$$\begin{aligned} p &= p_1\hat{x}_s + p_2\hat{y}_s + p_3\hat{z}_s \\ \hat{x}_b &= r_{11}\hat{x}_s + r_{21}\hat{y}_s + r_{31}\hat{z}_s \\ \hat{y}_b &= r_{12}\hat{x}_s + r_{22}\hat{y}_s + r_{32}\hat{z}_s \\ \hat{z}_b &= r_{13}\hat{x}_s + r_{23}\hat{y}_s + r_{33}\hat{z}_s \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ecuación 2.9. Representación vectorial de {b} en el espacio.

Esta notación vectorial puede ser condensada en notación matricial de manera similar que en el caso planar.

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Ecuación 2.10. Representación matricial de laEcuación 2.9.

Si se analiza el conjunto (R,p) se observa que existen doce parámetros y se sabe que solo se requieren de seis parámetros independientes para describir la posición y orientación de un objeto en el espacio. Si se asume que los parámetros de *p* son incluidos siempre, tres de los nueve parámetros de la matriz R tienen que ser independientes. Para lograr esto existen varias formas de representar con tres parámetros las rotaciones de un cuerpo rígido.

2.2.1. ROTACIONES

Como se vio en el apartado anterior, en una matriz de rotación deben existir tres parámetros independientes, razón por la cual se requiere de seis parámetros con restricciones en la matriz R. Para satisfacer este principio se requiere el cumplimiento de las siguientes condiciones:

1. La condición del vector unitario: $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ son vectores unitarios, esto se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ecuación 2.11. Condición del vector unitario para rotaciones.

2. Condición de ortogonalidad: $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$, también representado como:

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0$$

$$r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} = 0 \qquad (2.12)$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0$$

Ecuación 2.12. Condición de ortogonalidad para rotaciones.

Estas restricciones pueden ser resumidas en forma la matricial $R^T R = I$. Se debe tener en cuenta también el tipo de sistema de coordenadas, se asume el uso de un sistema de coordenadas de mano derecha, por lo tanto $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$. La última restricción es $\det R = 1$ debido a que es un sistema de coordenadas derecho. A todo conjunto de matrices de rotación que cumplen estas condiciones se las conoce como *Grupo Ortogonal Especial* o SO, por sus siglas en inglés ("Special Orthogonal Group").

Por ejemplo la denominación "SO(3)" abarca todas las matrices reales 3x3 que cumplan con (i) $R^T R = I$ y (ii) $\det R = 1$. Las matrices de 2x2 para rotaciones en el plano son un subgrupo de SO(3) y se las denomina SO(2).

2.2.1.1. Ángulos de Euler

Una de las representaciones más populares para rotaciones son los denominados ZYX Ángulos de Euler, los cuales representan ángulos de rotación alrededor de tres ejes del mecanismo, cuando estos están en la posición cero, como se puede observar mejor en la Figura 2.6 en la que se ilustra un mecanismo de muñeca donde el sistema {0} es el sistema de referencia fijo y los sistemas de referencia {1}, {2} y {3} son los sistemas de cada eslabón del mecanismo. Cuando el mecanismo se encuentra en la posición cero todos los sistemas de referencia poseen la misma orientación.

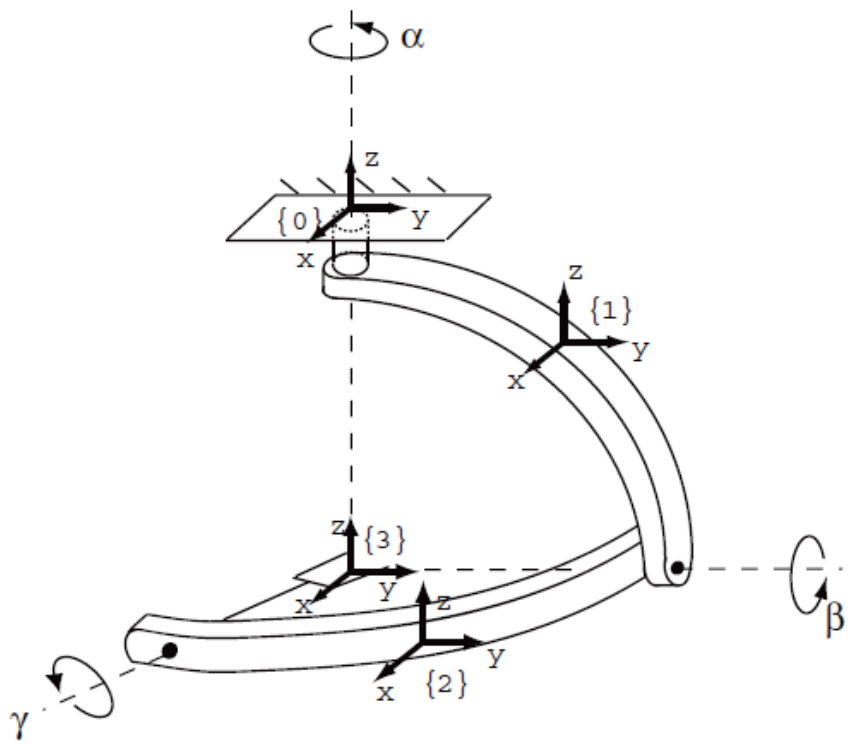


Figura 2.6. Representacion de los ángulos de Euler en la posición cero del mecanismo de muñeca. (Park & Lynch, pág. 48)

Para describir los ángulos de Euler se definen las matrices de rotación $Rot(\hat{z},\alpha)$, $Rot(\hat{y},\beta)$ y $Rot(\hat{x},\gamma)$. Donde $Rot(\hat{z},\alpha)$ representa una rotación alrededor del eje $\hat{z}$ un ángulo α y de manera similar para los ejes $\hat{x}$ y $\hat{y}$.

$$R_{01} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Rot(\hat{z},\alpha)$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = Rot(\hat{y},\beta) \qquad (2.13)$$

$$R_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = Rot(x,\gamma)$$

Ecuación 2.13. Representación matricial de los ángulos de Euler.

En robótica se acostumbra utilizar la abreviatura C_α para representar $\cos\alpha$ y S_α para representar $\operatorname{sen}\alpha$. Con esto en cuenta, la matriz de rotación resultante para los ángulos de Euler es la siguiente:

$$R_{03} = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & C_\alpha S_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma \\ S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma \\ -S_\beta & C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Ecuación 2.14. Resultante matricial de los ángulos de Euler.

Si se tiene una matriz de rotación arbitraria y se desea conocer los ángulos de Euler que corresponden a dicha matriz, se los puede obtener mediante la función matemática “atan2” la cual calcula el arco tangente en base a dos parámetros de manera que se pueda obtener el signo del ángulo adecuado según el cuadrante en el que se ubique. Esta función es muy utilizada en programas de computación modernos.

$$\begin{gathered} \beta = atan2\left(-r_{31}\,;\,\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \alpha = atan2\,(r_{21}\,;\,r_{11}) \\ \gamma = atan2\,(r_{32}\,;\,r_{33}) \end{gathered} \tag{2.15}$$

Ecuación 2.15. Ángulos de Euler para una matriz de rotación arbitraria.

2.2.1.2. Ángulos RPY (Roll-Pitch-Yaw)

Las matrices de rotación también pueden ser utilizadas para describir transformaciones de una orientación a otra de un cuerpo rígido. Los ángulos RPY consideran rotaciones a los ejes de balanceo (“roll”), inclinación (“pitch”) y orientación (“yaw”); estos son términos utilizados comúnmente en el campo aeronáutico y están representados en la Figura 2.7.

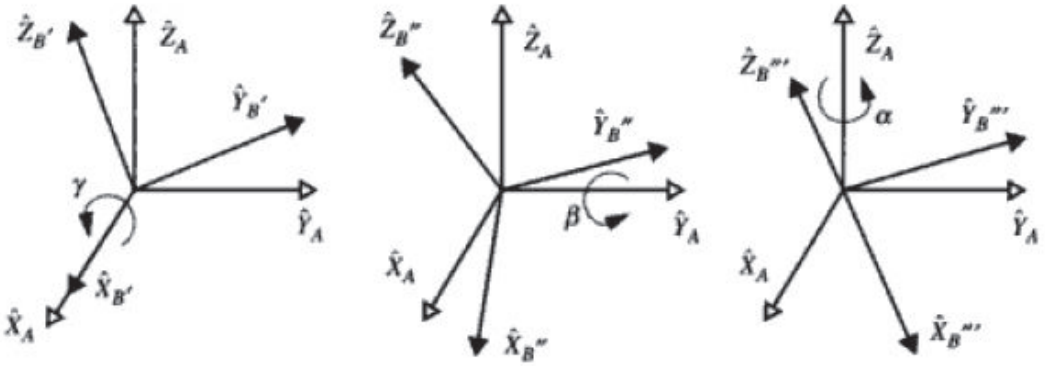


Figura 2.7. Representacion de los ángulos RPY. (Ollero, pág. 58)

Realizando un proceso similar al anterior, podemos obtener las matrices de rotación para cada ángulo RPY y posteriormente la matriz resultante de la rotación, asumiendo que el sistema de referencia se encuentra en la posición inicial R = I.

$$v' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\operatorname{sen}\gamma \\ 0 & \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} . I$$

$$v'' = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} . v'$$

$$v''' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . v''$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = v''' = Rot(\hat{z},\alpha).Rot(\hat{y},\beta).Rot(x,\gamma).I$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\gamma & -S_\gamma \\ 0 & S_\gamma & C_\gamma \end{bmatrix}$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & C_\alpha S_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma \\ S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma \\ -S_\beta & C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Ecuación 2.16. Representación matricial de los águlos RPY.

Los resultados de los ángulos RPY son exactamente los mismos que para los ángulos de Euler, lo cual lleva a concluir que el producto de tres rotaciones puede ser representado desde dos puntos de vista distintos. Para que esto sea verdadero, se tienen que cumplir las siguientes restricciones:

- Los ejes del sistema de coordenadas deben ser ortogonales entre sí.
- Los ángulos representan tres rotaciones sucesivas, ya sea con respecto al sistema fijo (ángulos de Euler) o al sistema móvil (ángulos RPY).
- La primera y tercera rotación deben tener un valor de ángulo dentro de un rango de 2π, la segunda rotación en un rango de π. (Park & Lynch, 2014, pág. 53)

2.2.1.3. Representación Exponencial

Las rotaciones también pueden ser representadas con tres parámetros en notación exponencial. A diferencia de los métodos anteriores que toman en cuenta el producto de tres rotaciones, la representación exponencial parametriza una matriz de rotación en términos de un solo eje de rotación, denotado por un vector unitario $\widehat{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, junto con un ángulo de rotación θ alrededor de este eje. De esta forma el vector $r = w\theta \ \in \mathbb{R}^3$ describe los tres parámetros necesarios para la rotación.

Para poder asociar estos conceptos con la notación exponencial es necesario resumir ciertos resultados básicos de ecuaciones diferenciales lineares y de álgebra lineal. En primer lugar se considera una ecuación diferencial matricial básica $\dot{x}(t) = Ax(t)$ y su solución $x(t) = e^{At}x_0$, donde $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{nxn} \mid A\ cte$. Es importante recordar también la expansión en serie de la función exponencial.

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \tag{2.17}$$

Ecuación 2.17. Expansión en serie de la función exponencial matricial.

La matriz exponencial también debe cumplir una serie de condiciones, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1. Condiciones algebráicas de una matriz exponencial.

i	$D = diag\{d_1 \dots d_n\} \ \rightarrow \ e^{Dt} = diag\ \{e^{d_1 t}, \dots, e^{d_n t}\}$
ii	$Si\ \ A = PDP^{-1} \ \rightarrow \ e^{At} = Pe^{At}P^{-1}$
iii	$Ae^{At} = \ e^{At}A$
iv	$AB = BA \ \rightarrow \ e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$
v	$(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Un último resultado de álgebra lineal que se debe tener en cuenta es el llamado teorema de Cayley-Hamilton, el cual dice que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{nxn}} \mid \boldsymbol{A\ cte}$ con un polinomio característico de la forma $p_{(s)} = det(I_s - A) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$ entonces:

$$p_{(A)} = A^n + C_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0 \qquad (2.18)$$

Ecuación 2.18. Teorema de Cayley-Hamilton.

Para la representación exponencial de rotaciones, se asume un vector tridimensional $p_{(0)}$, el cual es rotado un ángulo θ alrededor del eje $\widehat{w}$ hasta la posición $p_{(\theta)}$ como se observa en la Figura 2.8

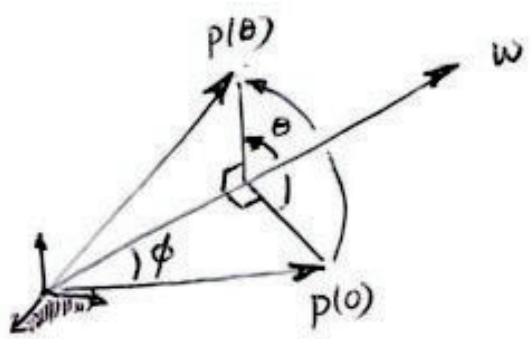


Figura 2.8. Rotación del vector $p_{(0)}$ un ángulo θ alrededor del eje $\widehat{w}$ hasta $p_{(\theta)}$. (Park & Lynch, pág. 56)

Si se considera a $p_{(t)}$ como la trayectoria que describe $p_{(0)}$ al rotar a una velocidad constante de 1 rad/s, entonces se puede escribir la velocidad como $\dot{p_{(t)}} = \widehat{w} \times p_{(0)}$

Teniendo en cuenta otra propiedad del álgebra lineal para las matrices, se puede expresar el producto cruz de dos matrices en función de la matriz anti simétrica, denotada como $[\widehat{w}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$. De esta manera el producto $\widehat{w} \times p_{(0)}$ se lo puede expresar como $[\widehat{w}]\, p_{(0)}$ obteniendo la ecuación $\dot{p}_{(t)} = [\widehat{w}]\, p_{(0)}$.

La solución a esta ecuación diferencial es $p_{(t)} = e^{[\widehat{w}]t}\, p_{(0)}$; como $t = \theta$ debido a que la velocidad de rotación es de 1 rad/s la ecuación final es $p_{(\theta)} = e^{[\widehat{w}]\theta}\, p_{(0)}$. Utilizando el concepto de series exponenciales para $e^{[\widehat{w}]\theta}$ y el teorema de Cayley-Hamilton se obtiene los siguientes resultados:

Aplicación del teorema de Cayley-Hamilton:

$$\det(Is - A) = \det \begin{bmatrix} s & -w_3 & w_2 \\ w_3 & s & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(I_s - A) = S^3 + (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)S$$

$$(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = 1 \qquad | \qquad \|\widehat{w}\| = 1$$

$$\det(I_s - A) = S^3 + S$$

$$p_{([\widehat{w}])} = \widehat{[w]}^3 + [\widehat{w}] = 0 \qquad \rightarrow \qquad \widehat{[w]}^3 = -[\widehat{w}]$$

$$e^{[\widehat{w}]\theta} = I + [\widehat{w}]\theta + \frac{\widehat{[w]}^2\theta^2}{2!} + \frac{\widehat{[w]}^3\theta^3}{3!} + \frac{\widehat{[w]}^4\theta^4}{4!} + \frac{\widehat{[w]}^5\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$Reemplazando\ \widehat{[w]}^3 = -[\widehat{w}]\ y\ agrupando\ se\ obtiene:$$

$$e^{[\widehat{w}]\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)[\widehat{w}] + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)\widehat{[w]}^2$$

Utilizando la expansión de Taylor para las funciones seno y coseno podemos obtener una expresión para $e^{[\widehat{w}]\theta}$ más fácil de calcular.

$$\boldsymbol{e^{[\widehat{w}]\theta} = I + \ \mathrm{sen}(\theta)\,[\widehat{w}] + \ (1 - \cos\theta)[\widehat{w}]^2} \qquad (2.19)$$

Ecuación 2.19. Matriz de rotación del vector $p_{(0)}$ alrededor del eje $\widehat{w}$, un ángulo θ.

Para expresar una matriz $R \in SO(3)$ previamente establecida, en términos de una función exponencial se debe igualar y despejar de la siguiente forma:

$$R = \ e^{[\widehat{w}]\theta}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \ I + \mathrm{sen}\,\theta \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \ (1 - \cos\theta) \begin{bmatrix} -w_3^2 - w_2^2 & w_1 w_2 & w_1 w_3 \\ w_1 w_2 & -w_1^2 - w_3^2 & w_2 w_3 \\ w_1 w_3 & w_2 w_3 & -w_1^2 - w_2^2 \end{bmatrix}$$

$$r_{12} - \ r_{21} = \ -2 \ \mathrm{sen}\,\theta\, w_3$$

$$r_{13} - \ r_{31} = \ 2 \ \mathrm{sen}\,\theta\, w_2$$

$$r_{11} + \ r_{22} \ + \ r_{33} = \ 1 + 2\cos\theta = tr(R) \qquad [\text{Traza de R}]$$

Obteniendo el valor de la traza de R, se despeja el valor del ángulo de rotación θ y se reemplaza en la Ecuación 2.20 para obtener el valor equivalente de $[\widehat{w}]$. Se debe tener en cuenta que de $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, es decir, $\theta \neq (0, \pi, \ldots)$.

$$[\widehat{w}] = \frac{1}{2\ \operatorname{sen}\theta}\,(R - R^T) \tag{2.20}$$

Ecuación 2.20. Valor de $[\widehat{w}]$ en función de R y el ángulo de rotación θ.

2.2.2. EL MOVIMIENTO EN CUERPOS RÍGIDOS

Como se ha visto el movimiento en cuerpos rígidos es una combinación de posición y orientación, es decir, un vector de posición y una matriz de rotación. Para simplificar el cálculo, se acostumbra unirlos en una sola matriz de transformación T, donde $p \in \mathbb{R}^3$, $R \in SO(3)$ y 0 representa un vector fila tridimensional de ceros.

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Ecuación 2.21. Matiz de transformación homogenea general.

A todo el grupo de transformaciones homogéneas o movimientos de cuerpo rígido en $\mathbb{R}^3$ que cumplan con la matriz T de la Ecuación 2.21 se lo conoce como *Grupo Euclidiano Especial* o SE, por sus siglas en inglés (“Special Euclidean Group”). (Park & Lynch, 2014, pág. 63). SE(3) representa al grupo de matrices 4x4 que cumplen con la Ecuación 2.21.

Una consideración importante es la del desplazamiento relativo entre sistemas de referencia, como ilustra la Figura 2.9. Dados tres sistemas de referencia {a}, {b} y

{c} los desplazamientos relativos entre sistemas de coordenadas están representados por las matrices de transformación homogénea $T_{ab}, T_{bc}, T_{ac} \in SE(3)$.

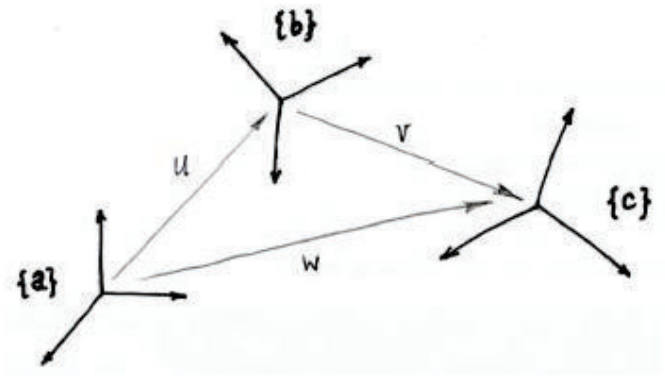


Figura 2.9. Representación de tres sistemas de referencia distintos en el espacio. Tomado de (Park & Lynch, pág. 65)

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{bc} = \begin{bmatrix} R_{bc} & p_{bc} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{ac} = \begin{bmatrix} R_{ac} & p_{ac} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $R_{ab}\, R_{bc} = R_{ac}$ y expresando el vector de posición *w* de la Figura 2.9 en términos de {a} (*u* + *v* = *w)*, obtenemos $p_{ac} = R_{ab}\, p_{bc} + p_{ab}$. Reemplazando en las matrices anteriores podemos concluir que $T_{ab}\, T_{bc} = T_{ac}$

$$\begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{bc} & p_{bc} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ac} & p_{ac} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta conclusión es de mucha utilidad al momento de describir la cinemática de los cuerpos rígidos mediante matrices de transformación homogénea.

2.2.3. MOVIMIENTOS DE TORNILLO

Para un movimiento de cuerpo rígido en el plano se ha establecido que se necesita de una rotación y una traslación. Para cuerpos rígidos en el espacio se llega a una conclusión similar, llamada el teorema de Chasles-Mozzi; el cual dice que todo movimiento de cuerpo rígido en el espacio $T \in SE(3)$ admite una representación como un movimiento de tornillo, es decir una rotación alrededor de un eje fijo en el espacio (eje de tornillo) seguido de una traslación paralela a dicho eje.

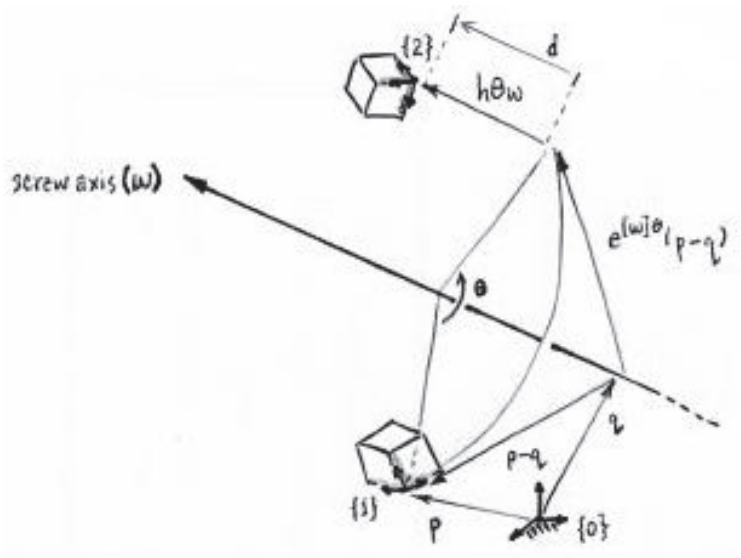


Figura 2.10. Movimiento de cuerpo rígido representado como movimiento de tornillo. (Park & Lynch, 2014, pág. 69)

Para desarrollar un modelo matemático de los movimientos de tornillo en el espacio, se considera la traslación y la rotación del cuerpo rígido de la Figura 2.10 desde el sistema {1} al sistema {2}. El teorema de Chasles-Mozzi dice que existe un eje de rotación (representado como el eje del tornillo o “screw axis”) tal que el movimiento puede ser representado como un movimiento de tornillo alrededor de este eje.

Para obtener un modelo matemático del movimiento de tornillo se utilizan los conceptos de transformación homogénea y representación exponencial de las rotaciones de la siguiente manera:

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{02} = \begin{bmatrix} R' & p' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R' = e^{[\widehat{w}]\theta} R \qquad p' = q + e^{[\widehat{w}]\theta}(p - q) + h\theta w \quad \text{(donde h es el paso de la rosca)}$$

$$\begin{bmatrix} R' & p' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{[\widehat{w}]\theta} & \left(I - e^{[\widehat{w}]\theta}\right)q + h\theta w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Ecuación 2.22. Representación de movimiento de tornillo mediante una matriz SE(3).

La matriz $\begin{bmatrix} e^{[\widehat{w}]\theta} & \left(I - e^{[\widehat{w}]\theta}\right)q + h\theta w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ representa la transformación homogénea del movimiento de tornillo. Esta matriz puede ser expresada como un exponencial siguiendo el siguiente proceso:

Si se asumen dos vectores $w, v \in \mathbb{R}^3$, se define un vector $S = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ conocido como el enroscamiento o “twist” del movimiento de tornillo. Posteriormente se define una matriz en base a los datos de S, $[S] \in \mathbb{R}^{4x4}$.

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{bmatrix} [\widehat{\boldsymbol{w}}] & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 & v_1 \\ w_3 & 0 & -w_1 & v_2 \\ -w_2 & w_1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Ecuación 2.23. Representación de $[S] \in \mathbb{R}^{4x4}$

Con la notación de [S] se puede definir una matriz exponencial $e^{[S]\theta}$, donde $S = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ y $\|w\| = 1$. Para cumplir esta condición se debe despejar un valor adecuado de v.

$$e^{[S]\theta} = I + [S]\theta + \frac{[S]^2\theta^2}{2!} + \frac{[S]^3\theta^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{[S]\theta} = \begin{bmatrix} e^{[\widehat{w}]\theta} & G_{(\theta)}v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } G_{(\theta)} = I\theta + [\widehat{w}]\frac{\theta^2}{2!} + [\widehat{w}]^2\frac{\theta^3}{3!} + \cdots \tag{2.24}$$

Ecuación 2.24. Expansión de la serie exponencial $e^{[S]\theta}$

Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton $G_{(\theta)}$ puede simplificarse de la siguiente manera:

$$G_{(\theta)} = I\theta + [\widehat{w}]\frac{\theta^2}{2!} + [\widehat{w}]^2\frac{\theta^3}{3!} + \cdots$$

$$G_{(\theta)} = I\theta + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\right)[\widehat{w}] + \left(\frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \cdots\right)[\widehat{w}]^2$$

$$G_{(\theta)} = I\theta + (1 - \cos\theta)[\widehat{w}] + (\theta - \sin\theta)[\widehat{w}]^2$$

Para seleccionar un valor de v se debe igualar la Ecuación 2.24 con la matriz SE (3) de la Ecuación 2.22 y despejar el valor de v.

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{hw} \quad \text{(siendo q un punto cualquiera del eje de rotación } w \text{ y h el paso)} \tag{2.25}$$

Ecuación 2.25. Valor de v para representación matricial de un movimiento de tornillo.

2.3. CINEMÁTICA DIRECTA

La cinemática directa permite conocer la posición y orientación del último sistema de referencia de un robot, generalmente este sistema de referencia se lo ubica en el efector del robot. Si se considera un robot planar como el de la Figura 2.11, la cinemática directa puede ser representada por la multiplicación de las matrices de transformación correspondientes de los sistemas de coordenadas {0} a {4}.

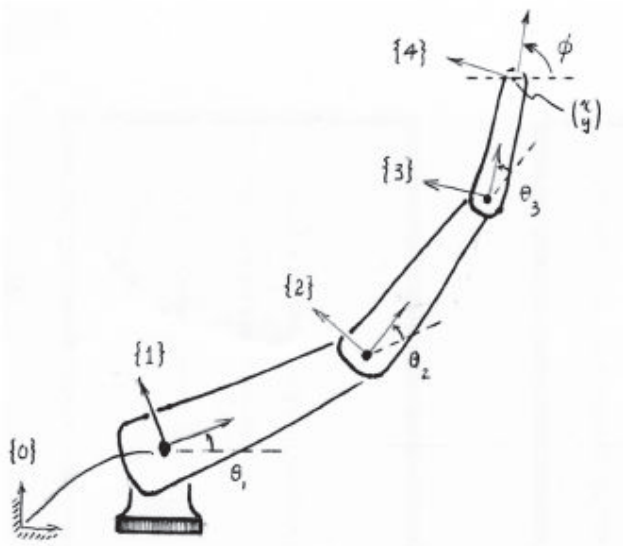


Figura 2.11. Cinemática directa de un robot planar de 3GDL. (Park & Lynch, 2014, pág. 102)

$$T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34} \tag{2.26}$$

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{12} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & L_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_3 & L_2 \\ \operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 2.26.Matriz de transformación para el robot planar de la Figura 2.11

2.3.1. CONVENIO DE DENAVIT-HARTENBERG

El convenio de Denavit-Hartenberg fue desarrollado alrededor del año 1950, con la finalidad de asignar sistemas de coordenadas a cada eslabón de un robot manipulador y poder obtener la cinemática directa conociendo las matrices de transformación de un sistema de coordenadas al siguiente.

2.3.1.1. Asignación de sistemas de coordenadas

El convenio de Denavit-Hartenberg establece una serie de reglas para asignar los sistemas de coordenadas a cada eslabón en lugar de asignarlos de manera arbitraria. En la Figura 2.12 se puede observar una ilustración de los parámetros de Denavit-Hartenberg para dos juntas adyacentes *i-1* e *i*, conectadas por el eslabón *i-1*.

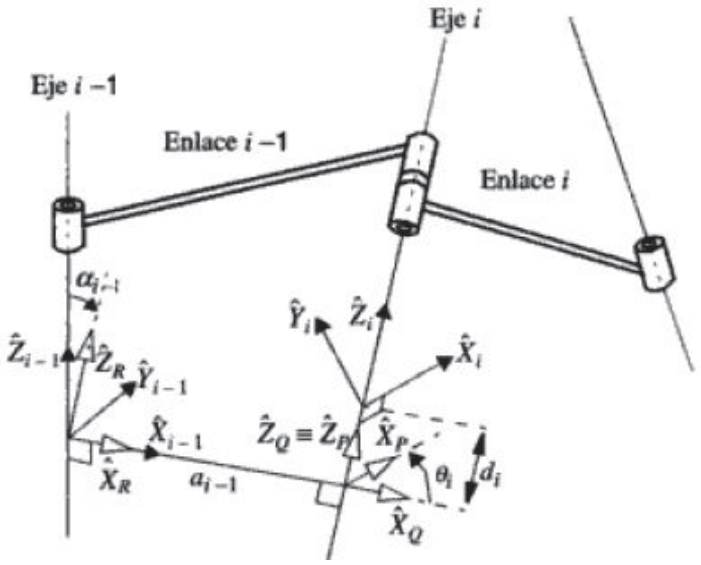


Figura 2.12. Representación de los parámetros de Denavit-Hartenberg. (Ollero, 2001, pág. 68)

La primera consideración es que el eje $\hat{z}_i$ coincida con el eje *i*, de igual manera el eje $\hat{z}_{i-1}$ debe coincidir con el eje *i-1*. La dirección de cada eje $\hat{z}$ se determina mediante la regla de la mano derecha según el sentido de giro alrededor de dicho eje. El siguiente paso es encontrar una línea mutuamente perpendicular a los ejes $\hat{z}_{i-1}$ y $\hat{z}_i$, en el punto de intersección de esta línea con el eje $\hat{z}_{i-1}$ se ubica el origen del sistema de coordenadas. El eje $\hat{x}$ se lo escoge en la dirección de la línea perpendicular desde el eje *i-1* al eje *i*. El eje $\hat{y}$ se lo determina mediante el producto $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ ya que se trata de un sistema de coordenadas derecho.

Una vez asignados los sistemas de referencia en los eslabones, se analizan los parámetros que se utilizan en el convenio de Denavit-Hartenberg para obtener la matriz de transformación $T_{i-1,i}$.

- La distancia escalar de la línea mutuamente perpendicular a los dos ejes de los eslabones. Esta distancia es denominada a_{i-1} y es conocida también como una traslación a lo largo del eje $\hat{x}$.
- La rotación entre el eje $\hat{z}_{i-1}$ y el eje $\hat{z}_i$, conocida como α_{i-1} o rotación alrededor del eje $\hat{x}$.
- La distancia escala d_i entre la intersección del eje $\hat{x}_{i-1}$ y el eje $\hat{z}_i$ y el origen del sistema de coordenadas del eslabón *i*, conocida como traslación a lo largo del eje $\hat{z}$.
- El ángulo de rotación θ_i, que representa la rotación entre el eje $\hat{x}_{i-1}$ y el eje $\hat{x}_i$, conocido también como rotación alrededor del eje $\hat{z}$.

Estos cuatro valores representan los parámetros del convenio de Denavit-Hartenberg. Es importante notar el orden de estos, cuando se realiza en el orden rosca en z (rotación en z, traslación en z) y luego rosca en x (rotación en x, traslación en x) se denomina Denavit-Hartenberg estándar o DH_s. En cambio cuando se realiza primero rosca en x y luego rosca en z, se denomina Denavit-Hartenberg modificado o DH_m. El escoger uno de los dos métodos DH_s o DH_m depende de la conveniencia del usuario, ya que los dos modelos producen el mismo resultado final.

2.3.1.2. Justificación del uso de cuatro parámetros en el convenio DH

En el convenio de Denavit-Hartenberg se establece que solo con cuatro parámetros independientes se puede establecer la matriz de transformación de un sistema de coordenadas. Previamente se había establecido que para describir el movimiento de un cuerpo rígido se requieren seis parámetros independientes, entonces surge naturalmente la pregunta: ¿Por qué son suficientes cuatro parámetros?

Para responder esta interrogante es necesario analizar las reglas de Denavit-Hartenberg expuestas anteriormente. En estas reglas se establecen ciertas restricciones como el asignar previamente el sistema de coordenadas fijo. Otra restricción implícita es que la posición cero del robot, es decir la posición por defecto, debe ser previamente establecida para que los parámetros DH puedan ser aplicados correctamente.

Existen casos en que el convenio de Denavit-Hartenberg no es aplicable, como en el ejemplo de la Figura 2.13 donde se requiere de una rotación alrededor del eje $\hat{y}$ para T_{ac} y de una traslación a lo largo del eje $\hat{y}$ para T_{ab}

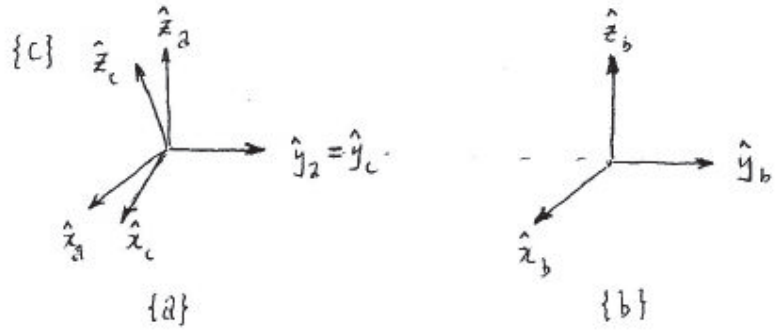


Figura 2.13. Ejemplo donde los parámetros de Denavit-Hartenberg no pueden ser utilizados. (Park & Lynch, 2014, pág. 105)

2.3.2. PRODUCTO DE EXPONENCIALES

En base al teorema de Chasles-Mozzi que dice que cualquier movimiento de un cuerpo rígido en el espacio puede ser descrito por un movimiento de tornillo, como se vio en el apartado 2.2.3, se puede expresar la cinemática directa de un manipulador como un producto de exponenciales.

Se asume un sistema de coordenadas fijo anclado al cuerpo rígido. Si el cuerpo se desplaza desde una configuración predeterminada $M \in SE(3)$ a otra configuración $T \in SE(3)$, entonces este desplazamiento se puede expresar de la forma:

$$T = e^{[S]\theta} M \quad \text{donde } [S] = \begin{bmatrix} [\widehat{w}] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Ecuación 2.27. Representacion exponencial de un desplazamiento en el espacio de $M \in SE(3)$ a $T \in SE(3)$

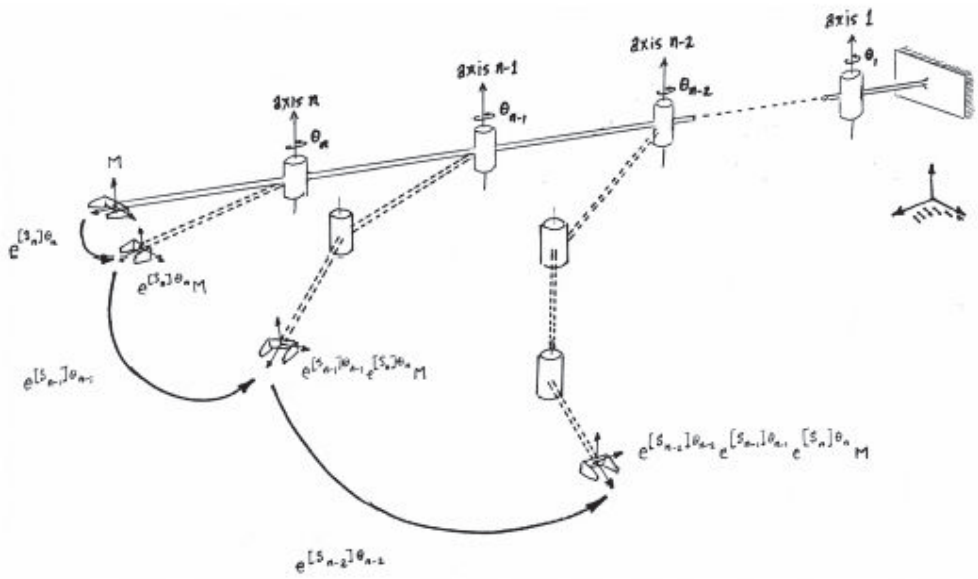


Figura 2.14. Ilustracion de la fórmula de Producto de Exponenciales para un robot espacial de *n* eslabones. (Park & Lynch, 2014, pág. 110)

Los casos límite en un movimiento de tornillo ocurren para rotación pura (paso de tornillo cero, h = 0) y traslación pura (paso de tornillo infinito, h=∞). En robótica las articulaciones más comunes son las rotatorias (h=0) y las prismáticas (h=∞). Esto ayuda a simplificar el cálculo de movimiento de tornillo cuando existen juntas rotatorias y juntas prismáticas.

El concepto del producto de exponenciales se basa en aplicar un movimiento de tornillo a cada eslabón de la cadena como se ilustra en la Figura 2.14. A diferencia del convenio de Denavit-Hartenberg para el producto de exponenciales no es necesario definir un sistema fijo de coordenadas de una manera específica, se define un sistema de coordenadas fijo arbitrariamente y un sistema de coordenadas para el efector; generalmente por facilidad de cálculo el sistema del efector tiene la misma orientación que el sistema fijo de coordenadas, pero este no es un requisito del método.

Posteriormente se coloca el robot en la posición cero o posición por defecto. La matriz $M \in SE(3)$ representa la configuración del efector en esta posición.

$$M = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \tag{2.28}$$

Ecuación 2.28. Configuración del efector en la posición cero.

Si se asume que una junta *n-1* también varía, se debe agregar el efecto que esto tiene sobre una junta *n*. Por lo tanto el movimiento de tornillo se puede expresar de la siguiente forma:

$$T = e^{[S_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[S_n]\theta_n} M$$

Siguiendo la configuración del robot articular numerando las juntas desde *1* hasta *n*, podemos llegar a la siguiente fórmula:

$$T = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} \dots e^{[S_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[S_n]\theta_n} M \tag{2.29}$$

Ecuación 2.29. Fórmula del Producto de Exponenciales para un robot de *n* eslabones.

Es importante notar que para juntas rotatorias (paso de tornillo cero) $w_n \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario en la dirección positiva del eje de rotación y $v_n = -w_n \times q_n$, siendo q_n un punto arbitrario a lo largo del eje de rotación.

Si se trata de una junta prismática (paso de tornillo infinito), entonces $w_n = 0$ y $v_n \in \mathbb{R}^3$ se expresa como un vector unitario en la dirección del movimiento de la junta.

CAPÍTULO 3

3. DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

3.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El caso de estudio es un robot manipulador de siete grados de libertad. Se ha tomado como modelo el robot KUKA LBR iiwa R800 de siete ejes o grados de libertad introducido al mercado en Abril del año 2014, representado en la Figura 3.1. Se ha seleccionado este robot manipulador debido a varios factores entre los que destacan la falta de información pública acerca del modelo matemático que gobierna a este robot y la similitud con un brazo humano, el cual también posee siete grados de libertad. El estudio comprende realizar la cinemática directa del robot manipulador y determinar el modelo matemático que lo gobierna, es decir, la matriz de transformación del brazo.

Figura 3.1. Robot KUKA LBR iiwa R800. (KUKA Labs, 2014)

3.1.1. DEFINICIÓN DE VARIABLES

Las variables del problema están directamente relacionadas al número de grados de libertad, por esta razón se debe comprobar el número de grados de libertad utilizando la Ecuación 2.2. Ecuación de Grübler en el espacio. En robótica el número de grados de libertad determina el número de variables independientes necesarias para describir el comportamiento de un mecanismo. Siendo N = 8 (tomando en cuenta el efector), J = 7 y f_i = 1 (juntas rotatorias de 1 GDL) se procede a reemplazar en la fórmula:

$$GDL = 6(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i$$

$$GDL = 6(8 - 1 - 7) + \sum_{i=1}^{7} 1 \quad \rightarrow \quad GDL = 0 + 7 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{GDL = 7}$$

Las variables independientes son por tanto $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$.

3.1.2. METODOLOGÍA DE CÁLCULO A UTILIZAR

Para el cálculo del modelo matemático del robot manipulador, se utilizará DH_m, es decir el convenio de Denavit-Hartenberg realizando primero las operaciones de rosca en x y luego rosca en z. Se escoge este método por facilidad de programación para la simulación del Capítulo 4.

También se realizará el modelo mediante el método de producto de exponenciales y se compararán los resultados de los distintos métodos posteriormente en el Capítulo 5.

3.1.3. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL ROBOT MANIPULADOR

La representación esquemática del robot manipulador, ilustrada en la Figura 3.2 es necesaria para realizar el análisis de la cinemática directa según el convenio de Denavit-Hartenberg, ya que debe escogerse una posición cero o posición por defecto adecuada. Si bien se puede escoger cualquier posición inicial para el análisis mediante producto de exponenciales, se utilizará la misma posición por defecto en ambos métodos para poder comparar los resultados adecuadamente.

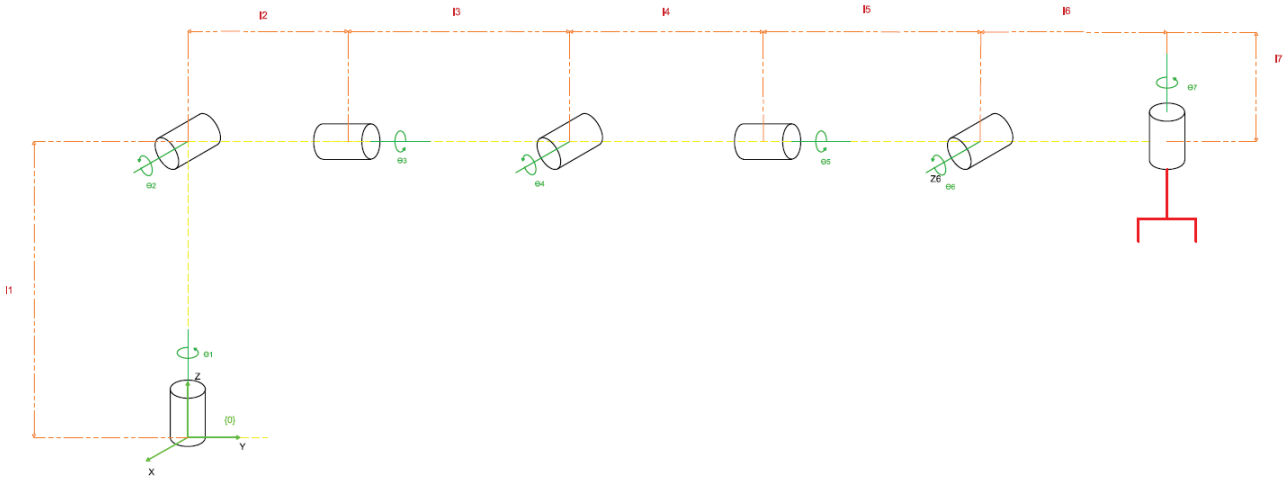


Figura 3.2. Representación esquemática del robot manipulador de siete grados de libertad. Fuente Propia[1]

[1] La Figura 3.2 se la puede ver ampliada en el Anexo A1.

3.2. MODELO MATEMÁTICO UTILIZANDO DH_M

Para obtener el modelo matemático de la cinemática directa utilizando el convenio de Denavit-Hartenberg primero se debe asignar sistemas de coordenadas a cada articulación, siguiendo el procedimiento discutido en el apartado Asignación de sistemas de coordenadas como muestra la Figura 3.2.

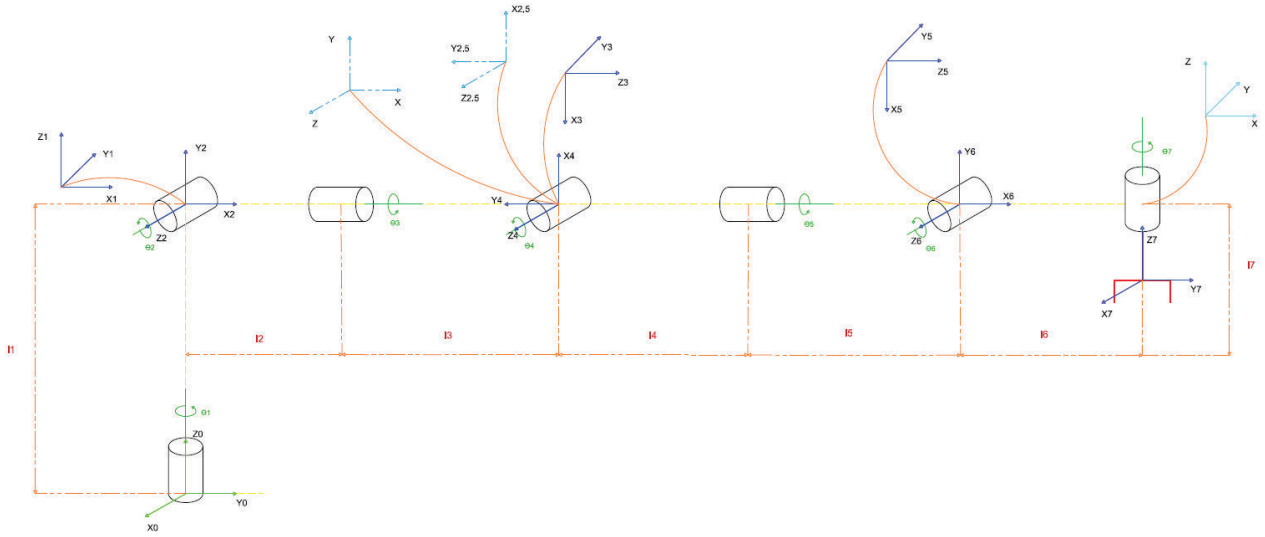


Figura 3.3. Asignación de sistemas de coordenadas para DH_m. Fuente Propia[2]

Para poder completar el modelo fue necesario introducir el concepto de un eslabón virtual, el cual permite 4 movimientos extra sobre el mismo eslabón para poder cumplir con los requerimientos de alineación de los ejes, este eslabón virtual está representado en la Figura 3.3 por el sistema de coordenadas {2.5}. Este artificio es necesario debido a las limitaciones de utilizar DH_m para la obtención del modelo matemático. Cabe recalcar que el sistema {2.5} al ser parte de un eslabón virtual no cuenta con un ángulo de rotación θ, de esta manera no aumenta una variable al problema matemático.

[2] La Figura 3.3 se la puede ver ampliada en el Anexo A2.

A continuación se presenta la tabla de resumen de los parámetros DH, incluyendo el eslabón virtual {2.5}

Tabla 2. Parámetros DH_m para el robot articular de 7 grados de libertad.

i	*α(i-1)*	*a(i-1)*	*di*	*ϑi*	
1	0	0	l1	θ1 + 90°	
2	90	0	0	θ2	
2.5	0	l2 + l3	0	90°	Eslabón Virtual
3	90	0	0	θ3 + 180°	
4	90	0	0	θ4 + 180°	
5	90	0	l4 + l5	θ5 + 180°	
6	90	0	0	θ6 + 90°	
7	-90	l6	-l7	θ7 - 90°	

Con la tabla de resumen de los parámetros de Denavit-Hartenberg, se puede calcular una matriz de transformación para cada una de las filas, estas matrices son las siguientes:

$$T_1 = \begin{bmatrix} C_{90+\theta_1} & -S_{90+\theta_1} & 0 & 0 \\ S_{90+\theta_1} & C_{90+\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{\theta_2} & C_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{2_5} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & l2+l3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} -C_{\theta_3} & S_{\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_{\theta_3} & -C_{\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} -C_{\theta_4} & S_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_{\theta_4} & -C_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_5 = \begin{bmatrix} -C_{\theta_5} & S_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l4-l5 \\ -S_{\theta_5} & -C_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} C_{90+\theta_6} & -S_{90+\theta_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{90+\theta_6} & C_{90+\theta_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_7 = \begin{bmatrix} C_{90-\theta_7} & -S_{90-\theta_7} & 0 & l6 \\ 0 & 0 & 1 & -l7 \\ -S_{90-\theta_7} & -C_{90-\theta_7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando todas las matrices en orden, se obtiene la matriz de transformación homogénea del robot manipulador T_{07} según DH$_m$. Los puntos p1, p2 y p3 representan las coordenadas finales en *x*, *y* y *z* respectivamente del efector.

$$T_{07} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} r_{11} = {} & S_{\theta_7-90} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) \\ & - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) - C_{\theta_7-90} * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} \\ & * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} \\ & * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) - S_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} \\ & - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * C_{\theta_1+90})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} = {} & C_{\theta_7-90} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) \\ & - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) + S_{\theta_7-90} * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} \\ & * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} \\ & * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) - S_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} \\ & - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * C_{\theta_1+90})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} = {} & S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3}) * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) \\ & + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) + C_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_3} \\ & * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * C_{\theta_1+90}) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{p_1} = (l4 + l5) * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * C_{\theta_1+90}) - l7 * (S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) + C_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * C_{\theta_1+90})) - l6 * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} + C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) - S_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90} - C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * C_{\theta_1+90})) + C_{\theta_2} * C_{\theta_1+90} * (l2 + l3)$$

$$r_{21} = C_{\theta_7-90} * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90})) - S_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1+90})) - S_{\theta_7-90} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90}))$$

$$r_{22} = - C_{\theta_7-90} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90})) - S_{\theta_7-90} * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90})) - S_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}))$$

$$r_{23} = - S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90})) - C_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1+90})$$

$$\boldsymbol{p_2} = l6 * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90})) - S_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1+90})) + l7 * (S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * C_{\theta_1+90} - S_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_1+90})) + C_{\theta_6+90} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1+90})) - (l4 + l5) * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1+90} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_2} * S_{\theta_1+90}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1+90}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1+90} * (l2 + l3)$$

$$r_{31} = C_{\theta_7-90} * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) + S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4})) - S_{\theta_7-90} * (S_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_5} * S_{\theta_3})$$

$$r_{32} = - C_{\theta_7-90} * (S_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_5} * S_{\theta_3}) - S_{\theta_7-90} * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) + S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}))$$

$$r_{33} = C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}) - S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5})$$

$$\boldsymbol{p_3} = l1 + (l4 + l5) * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}) + l6 * (C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) + S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4})) + l7 * (S_{\theta_6+90} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) - C_{\theta_6+90} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4})) + S_{\theta_2} * (l2 + l3)$$

Como se puede observar, la matriz de transformación representa un modelo matemático muy extenso, por esta razón en el Capítulo 4 se procede a una simulación en computadora para comprobar la validez del modelo matemático.

3.3. MODELO MATEMÁTICO UTILIZANDO PRODUCTO DE EXPONENCIALES

Para obtener el modelo matemático de la cinemática directa y calcular la matriz de trasformación por este método, se deben seguir los pasos detallados en el apartado 2.3.2 Producto de Exponenciales y adicionalmente realizar la representación esquemática como se indica en la Figura 3.4.

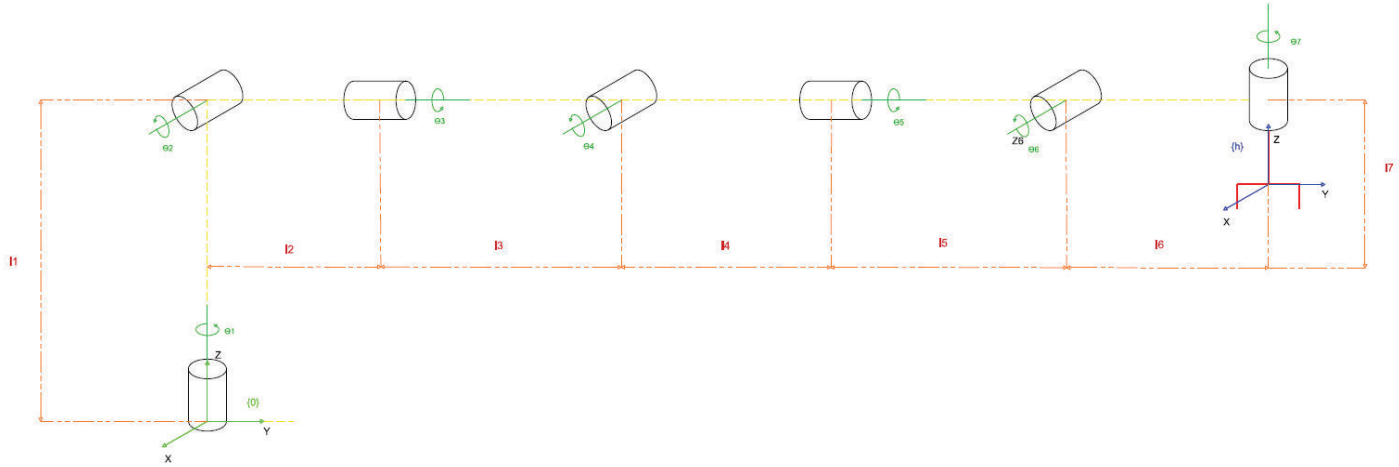


Figura 3.4. Representación esquemática para el uso de Producto de Exponenciales. Fuente Propia[3]

[3] La Figura 3.4 se la puede ver ampliada en el Anexo A3.

El primer paso es colocar el robot en una posición predeterminada. Por motivos comparativos la posición por defecto del robot se la considera igual que en el modelo DH_m, así como también el sistema fijo de coordenadas {0} y el sistema del efector {h}.

El siguiente paso es escribir los vectores unitarios $w_n \in \mathbb{R}^3$, el punto q_n (al ser un punto cualquiera a lo largo del eje de rotación, se escoge el punto que se encuentra a la distancia del eslabón, es decir l1, l2, etc.). Con estos dos datos se procede a calcular el vector $v_n = -w_n \times q_n$ necesario para calcular la matriz [Sn]. También es necesario definir la matriz M que describe la posición inicial del efector. La matriz de transformación resultante se la calcula con la siguiente fórmula:

$$T = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} e^{[S_7]\theta_7} M \qquad (3.1)$$

Ecuación 3.1. Ecuación para el cálculo del Producto de Exponenciales para el robot manipulador de 7 GDL.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L2 + L3 + L4 + L5 + L6 \\ 0 & 0 & 1 & L1 - L7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ L1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathrm{w}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ L2 \\ L1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} -L1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathrm{w}}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ L2 + L3 \\ L1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ L1 \\ -L2 - L3 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathrm{w}}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad q_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ L2 + L3 + L4 \\ L1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_5 = \begin{pmatrix} -L1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathrm{w}}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad q_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ L2 + L3 + L4 + L5 \\ L1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ L1 \\ -L2 - L3 - L4L - 5 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\mathrm{w}}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , q_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ L2 + L3 + L4 + L5 + L6 \\ L1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_7 = \begin{pmatrix} L2 + L3 + L4 + L5 + L6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con estos datos es posible encontrar la matriz [S] para cada eslabón.

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [S_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [S_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L1 \\ 0 & 1 & 0 & -L2 - L3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [S_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L1 \\ 0 & 1 & 0 & -L2 - L3 - L4 - L5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S_7] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & L2 + L3 + L4 + L5 + L6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con todos estos datos, utilizando el concepto de $e^{[S]\theta} = I + \operatorname{sen}(\theta)\,[S] + (1-\cos\theta)[S]^2$ se procede a calcular cada matriz que conforma la transformación T.

$$e^{[S_1]\theta_1} = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 & 0 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{[S_2]\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & l1 * S_{\theta_2} \\ 0 & S_{\theta_2} & C_{\theta_2} & -l1 * (C_{\theta_2} - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{[S_3]\theta_3} = \begin{bmatrix} C_{\theta_3} & 0 & S_{\theta_3} & -l1 * S_{\theta_3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_{\theta_3} & 0 & C_{\theta_3} & -l1 * (C_{\theta_3} - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{[S_4]\theta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\theta_4} & -S_{\theta_4} & l1 * S_{\theta_4} - \left(C_{\theta_4} - 1\right) * (l2 + l3) \\ 0 & S_{\theta_4} & C_{\theta_4} & -l1 * \left(C_{\theta_4} - 1\right) - S_{\theta_4} * (l2 + l3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{[S_5]\theta_5} = \begin{bmatrix} C_{\theta_5} & 0 & S_{\theta_5} & -l1 * S_{\theta_5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_{\theta_5} & 0 & C_{\theta_5} & -l1 * (C_{\theta_5} - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{[S_6]\theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\theta_6} & -S_{\theta_6} & -l1 * S_{\theta_6} - \left(C_{\theta_6} - 1\right) * (l2 + l3 + l4 + l5) \\ 0 & S_{\theta_6} & C_{\theta_6} & -l1 * \left(C_{\theta_6} - 1\right) - S_{\theta_6} * (l2 + l3 + l4 + l5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{[S_7]\theta_7} = \begin{bmatrix} C_{\theta_7} & -S_{\theta_7} & 0 & S_{\theta_7} * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) \\ S_{\theta_7} & C_{\theta_7} & 0 & -\left(C_{\theta_7} - 1\right) * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar todas estas matrices en orden junto con la matriz de posición del efector M se obtiene la matriz de transformación según el método del producto de exponenciales.

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$r_{11} = S_{\theta_7} * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) - C_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))$$

$$r_{12} = C_{\theta_7} * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) + S_{\theta_7} ** (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))$$

$$r_{13} = C_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) - S_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1})$$

$$r_{21} = S_{\theta_7} * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) - C_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))$$

$$r_{22} = C_{\theta_7} * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) + S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))$$

$$r_{23} = C_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) - S_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4})$$

$$r_{31} = C_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_5} * S_{\theta_3}) - S_{\theta_7} * (S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) - C_{\theta_6} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}))$$

$$r_{32} = -S_{\theta_7} ** (S_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_5} * S_{\theta_3}) - C_{\theta_7} * (S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) - C_{\theta_6} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}))$$

$$r_{33} = -C_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_3} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) - S_{\theta_6} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4})$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p_1} = {} & (C_{\theta_7} * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} \\
& * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) + S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} \\
& * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) * (l2 \\
& + l3 + l4 + l5 + l6) - (S_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) \\
& - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1}) - C_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) \\
& + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) * (l1 - l7) \\
& - (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} \\
& * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) * (l1 * (C_{\theta_6} - 1) + S_{\theta_6} * (l2 + l3 \\
& + l4 + l5)) - (S_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1}) \\
& * ((C_{\theta_6} - 1) * (l2 + l3 + l4 + l5) - l1 * S_{\theta_6}) - (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} \\
& * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) * (l1 * (C_{\theta_4} - 1) + S_{\theta_4} * (l2 + l3)) - l1 * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} \\
& * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) * (C_{\theta_5} - 1) - l1 * S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}) - S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} \\
& * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) * (l2 \\
& + l3 + l4 + l5 + l6) - l1 * C_{\theta_1} * S_{\theta_3} - (C_{\theta_7} - 1) * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} \\
& * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_4} * S_{\theta_1}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} \\
& * (C_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_3} * S_{\theta_1} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_1} * C_{\theta_3} \\
& - S_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) - l1 * S_{\theta_1} * S_{\theta_2} \\
& - C_{\theta_2} * S_{\theta_1} * (l1 * S_{\theta_4} - (C_{\theta_4} - 1) * (l2 + l3)) - l1 * S_{\theta_1} * S_{\theta_2} \\
& * (C_{\theta_3} - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p_2} = {} & (C_{\theta_7} * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} \\
& * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} \\
& * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) + S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} \\
& * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) * (l2 \\
& + l3 + l4 + l5 + l6) - (S_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) \\
& + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) \\
& - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) * (l1 - l7) \\
& - (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4}) * ((C_{\theta_6} - 1) \\
& * (l2 + l3 + l4 + l5) - l1 * S_{\theta_6}) - (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) \\
& * (l1 * (C_{\theta_6} - 1) + S_{\theta_6} * (l2 + l3 + l4 + l5)) - (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) * (l1 * (C_{\theta_4} - 1) + S_{\theta_4} * (l2 + l3)) - l1 * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} \\
& * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) * (C_{\theta_5} - 1) - S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} \\
& * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) - C_{\theta_5} * (C_{\theta_3} \\
& * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3})) * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) - l1 * S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} \\
& * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}) - (C_{\theta_7} - 1) * (C_{\theta_6} * (S_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) + C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * C_{\theta_4}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (C_{\theta_4} * (S_{\theta_1} * S_{\theta_3} - C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_3} * S_{\theta_2}) - C_{\theta_1} * C_{\theta_2} * S_{\theta_4}) + S_{\theta_5} * (C_{\theta_3} * S_{\theta_1} + C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * S_{\theta_3}))) \\
& * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) + l1 * C_{\theta_1} * S_{\theta_2} - l1 * S_{\theta_1} * S_{\theta_3} + C_{\theta_1} \\
& * C_{\theta_2} * (l1 * S_{\theta_4} - (C_{\theta_4} - 1) * (l2 + l3)) + l1 * C_{\theta_1} * S_{\theta_2} * (C_{\theta_3} - 1)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{p_3} = S_{\theta_2} * (l1 * S_{\theta_4} - (C_{\theta_4} - 1) * (l2 + l3)) - l1 * (C_{\theta_2} - 1) + (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) * (l1 * (C_{\theta_6} - 1) + S_{\theta_6} * (l2 + l3 + l4 + l5)) - (S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_5} * S_{\theta_3}) + C_{\theta_7} * (S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) - C_{\theta_6} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}))) * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) - (C_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) + S_{\theta_6} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4})) * (l1 - l7) - (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4}) * ((C_{\theta_6} - 1) * (l2 + l3 + l4 + l5) - l1 * S_{\theta_6}) + (C_{\theta_7} - 1) * (S_{\theta_6} * (C_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}) - C_{\theta_6} * (C_{\theta_4} * S_{\theta_2} + C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * S_{\theta_4})) * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) + l1 * (C_{\theta_5} - 1) * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) + S_{\theta_7} * (S_{\theta_5} * (S_{\theta_2} * S_{\theta_4} - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * C_{\theta_4}) - C_{\theta_2} * C_{\theta_5} * S_{\theta_3}) * (l2 + l3 + l4 + l5 + l6) - l1 * C_{\theta_2} * (C_{\theta_3} - 1) - C_{\theta_2} * C_{\theta_3} * (l1 * (C_{\theta_4} - 1) + S_{\theta_4} * (l2 + l3)) + l1 * C_{\theta_2} * S_{\theta_3} * S_{\theta_5}$$

Al igual que en la matriz de transformación según DHm, se trata de un modelo matemático muy extenso. Es importante recalcar que ambos modelos, devuelven la misma respuesta cuando las variables son reemplazadas por valores numéricos. Para demostrar este principio es de gran utilidad el uso de un programa computacional que ayude en el cálculo del valor numérico de las matrices de transformación.

CAPÍTULO 4

4. SIMULACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO UTILIZANDO MATLAB®

Para realizar la simulación de ambos modelos matemáticos, se utilizó el programa MATLAB® ya que este permite un fácil manejo operaciones matriciales. El objetivo de la simulación es comprobar que ambos modelos matemáticos presentados en el Capítulo 3 son válidos. Adicionalmente se realizó una simulación tridimensional del esquema del robot manipulador con la ayuda del paquete computacional "Robotics Toolbox for Matlab", versión 9.1. El manual de este paquete se encuentra referenciado como (Corke, 2014).

4.1. CONSIDERACIONES GENERALES PARA EL USO DEL TOOLBOX ROBOTICS

El Toolbox Robotics de Peter Corke es una gran herramienta para MATLAB® ya que provee de herramientas básicas para realizar cálculos comunes en robótica. Es necesario tener en cuenta que la versión del Toolbox sea compatible con la versión de MATLAB® que se va a utilizar. Se utilizó la versión R2015a de MATLAB® para esta simulación.

Para poder utilizar los recursos que ofrece el Toolbox Robotics en el problema expuesto en el Capítulo 3, fue necesario realizar modificaciones a dos programas internos del Toolbox debido a que el programa está codificado para trabajar con matrices 3x3 y se necesita trabajar con matrices 4x4. Adicionalmente surgió la necesidad de agregar una restricción de entrada de variables a estos archivos, para el uso correcto de variables simbólicas. Los archivos editados fueron "*rotz.m"* y *"rotx.m"* como se indican en la Figura 4.1 y la Figura 4.2 respectivamente.

```
28      %
29      % http://www.petercorke.com
30
31      function R = rotz(t, deg)
32 -        if nargin > 1 && strcmp(deg, 'deg')
33 -            t = t *pi/180;
34 -        end
35
36 -       if isa(t,'sym')
37 -        ct = (cos(t));
38 -        st = (sin(t));
39 -        R = [
40              ct  -st  0  0;
41              st   ct  0  0;
42              0    0   1  0;
43              0   0    0  1;
44              ];
45 -       else
46 -        ct = (cos(t));
47 -        st = (sin(t));
48 -        R = [
49              ct  -st  0  0;
50              st   ct  0  0;
51              0    0   1  0;
52              0   0    0  1;
53              ];
54 -       end
```

Figura 4.1. Modificación del archivo "rotz.m". Fuente Propia.

```
31      function R = rotx(t, deg)
32 -        if nargin > 1 && strcmp(deg, 'deg')
33 -            t = t *pi/180;
34 -        end
35
36 -        if isa(t,'sym')
37
38 -        ct = (cos(t));
39 -        st = (sin(t));
40 -        R = [
41              1   0    0  0
42              0   ct  -st 0
43              0   st   ct 0
44              0   0    0  1
45              ];
46
47 -        else
48
49 -         ct = round(cos(t));
50 -        st = round(sin(t));
51 -        R = [
52              1   0    0  0
53              0   ct  -st 0
54              0   st   ct 0
55              0   0    0  1
56              ];
57 -        end
```

Figura 4.2. Modificación del archivo "rotx.m". Fuente Propia.

Adicionalmente se creó el archivo *"rotzt.m"* para mejorar el desempeño del programa cuando trabaja netamente con variables simbólicas como se indica en la Figura 4.3. Este archivo esta codificado en base a *"rotz.m"*.

```
30
31  function R = rotz(t, deg) %#ok<FNDEF>
32      if nargin > 1 && strcmp(deg, 'deg')
33          t = t *pi/180;
34      end
35
36     if isa(t,'sym')
37      ct = (cos(t));
38      st = (sin(t));
39      R = [
40          ct  -st  0  0;
41          st   ct  0  0;
42          0    0   1  0;
43          0   0    0  1;
44          ];
45     else
46      ct = round(cos(t));
47      st = round(sin(t));
48      R = [
49          ct  -st  0  0;
50          st   ct  0  0;
51          0    0   1  0;
52          0   0    0  1;
53          ];
54     end
```

Figura 4.3. Codificación del archivo "rotzt.m". Fuente Propia.

4.2. CODIFICACIÓN PARA DH_M

El programa se codificó para calcular el modelo matemático de manera simbólica y de manera numérica. Se puede obtener la matriz de transformación para tres posiciones distintas del robot manipulador, estas posiciones son: la posición cero o por defecto del robot; posición vertical y finalmente una posición arbitraria denominada en el programa como "posición X". La posición X se la obtiene con los siguientes valores de variables: $\theta_1 = 60^o, \theta_2 = 45^o, \theta_3 = 0^o, \theta_4 = -45^o, \theta_5 = 180^o, \theta_6 = 45^o, \theta_7 = 30^o$

Adicionalmente se agregó la función “tic toc” para tomar el tiempo en el que el modelo es calculado. La codificación completa del programa se encuentra en el Anexo A4. Tanto la Figura 4.4 como la Figura 4.5 muestran un ejemplo de la interfaz del programa para DH_m.

```
Editor - C:\Users\Francisco\Dropbox\10 Semestre\MATLAB\TESIS\Tesis_3_0.m
rotzt.m | Tesis_3_0.m | Exponential_Form.m | mdl_KUKA_LBR_iiwa_modif2.m
46 -            end
47 -        end
48 -        tic
49 -          A1m=transl(0,0,l1)*rotzt(t1+(pi/2));
50 -          A2m=rotx(pi/2)*rotzt(t2);
51 -          A2_5m=transl(l2+l3,0,0)*rotzt(pi/2);
52 -          A3m=rotx(pi/2)*rotzt(t3+pi);
53 -          A4m=rotx(pi/2)*rotzt(t4+pi);
54 -          A5m=rotx(pi/2)*transl(0,0,l4+l5)*rotzt(t5+pi);
55 -          A6m=rotx(pi/2)*rotzt(t6+(pi/2));
56 -          A7m=rotx(-pi/2)*transl(l6,0,0)*transl(0,0,-l7)*rotzt(t7-(pi/2));
57 -          Hm=A1m*A2m*A2_5m*A3m*A4m*A5m*A6m*A7m;
58 -          display(Hm);
59 -        toc
60 -    else
61 -       if key==2
62

Command Window
>> Tesis_3_0
 1. Modelo DHm; 2. D-Hm:  1

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  1

Hm =

[ 1, 0, 0,                        0]
[ 0, 1, 0, l2 + l3 + l4 + l5 + l6]
[ 0, 0, 1,                  l1 - l7]
[ 0, 0, 0,                        1]

Elapsed time is 0.243317 seconds.
fx >>
```

Figura 4.4. Ejemplo de la interfaz del programa para DH_m. Fuente Propia.

```
Editor - C:\Users\Francisco\Dropbox\10 Semestre\MATLAB\TESIS\Tesis_3_0.m
rotzt.m | Tesis_3_0.m | Exponential_Form.m | mdl_KUKA_LBR_iiwa_modif2.m
56 -          A7m=rotx(-pi/2)*transl(l6,0,0)*transl(0,0,-l7)*rotzt(t7-(pi/2));
57 -          Hm=A1m*A2m*A2_5m*A3m*A4m*A5m*A6m*A7m;
58 -          display(Hm);
59 -        toc
60 -    else
61 -       if key==2
62
63 -         l1=340;
64 -         l2=400;
65 -         l3=400;
66 -         l4=540;
67 -         l5=260;
68 -         l6=86;
69 -         l7=20;
70 -        display(' ');
71 -        display('Escoga una Posicion del brazo:');
72 -        key2=input(' 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  ');
73

Command Window
>> Tesis_3_0
 1. Modelo DHm; 2. D-Hm:  2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  2

Hm =

     1     0     0     0
     0     0    -1    20
     0     1     0  2026
     0     0     0     1

Elapsed time is 0.085753 seconds.
fx >>
```

Figura 4.5. Ejemplo de la interfaz para DH_m utilizando valores numéricos. Fuente Propia.

4.3. CODIFICACIÓN PARA PRODUCTO DE EXPONENCIALES

El programa para calcular la matriz de transformación mediante el producto de exponenciales fue codificado bajo los mismos criterios que el programa para DH_m. Cabe recalcar que este programa no hace uso del Toolbox Robotics ya que utiliza directamente las matrices calculadas en apartado 3.3. El programa también cuenta con la opción de escoger entre la posición cero, posición vertical y posición X, la cual es la misma para ambos modelos con el fin de poder comparar adecuadamente los resultados. De manera similar al programa para DH_m se agregó la función “tic toc” para tomar el tiempo en el que el modelo es calculado y poder compararlo con el programa para DH_m. La codificación completa del programa se encuentra en el Anexo A5. La Figura 4.6 muestra un ejemplo de la interfaz del programa para producto de exponenciales.

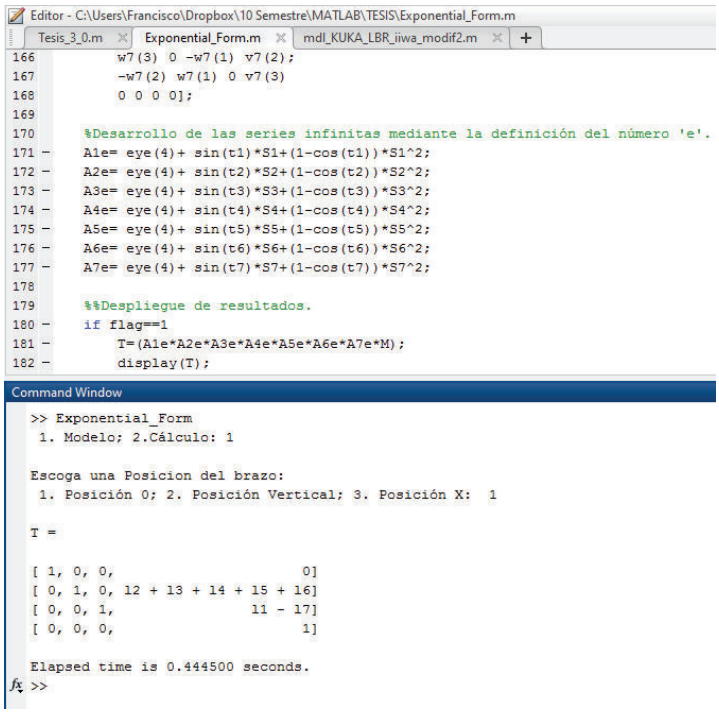


Figura 4.6. Ejemplo de la interfaz del programa para producto de exponenciales. Fuente Propia.

4.4. SIMULACIÓN TRIDIMENSIONAL CON TOOLBOX ROBOTICS

La programación para la simulación tridimensional utilizando el Toolbox Robotics se la realizo en base al programa de ejemplo "*mdl_puma560akb.m*" para un robot manipulador PUMA de seis grados de libertad. Este programa viene incluido en el Toolbox. La codificación contempla el uso de los parámetros de DH_m, razón por la cual la Tabla 2 presentada en el aparatado 3.2 es de gran ayuda al momento de realizar la codificación. Para visualizar el robot se utiliza la función "*teach*" del Toolbox, la cual despliega una interfaz gráfica, como la que ilustra la Figura 4.7, en la que se puede controlar en tiempo real la simulación del robot. La codificación completa del programa se encuentra en el Anexo A6.

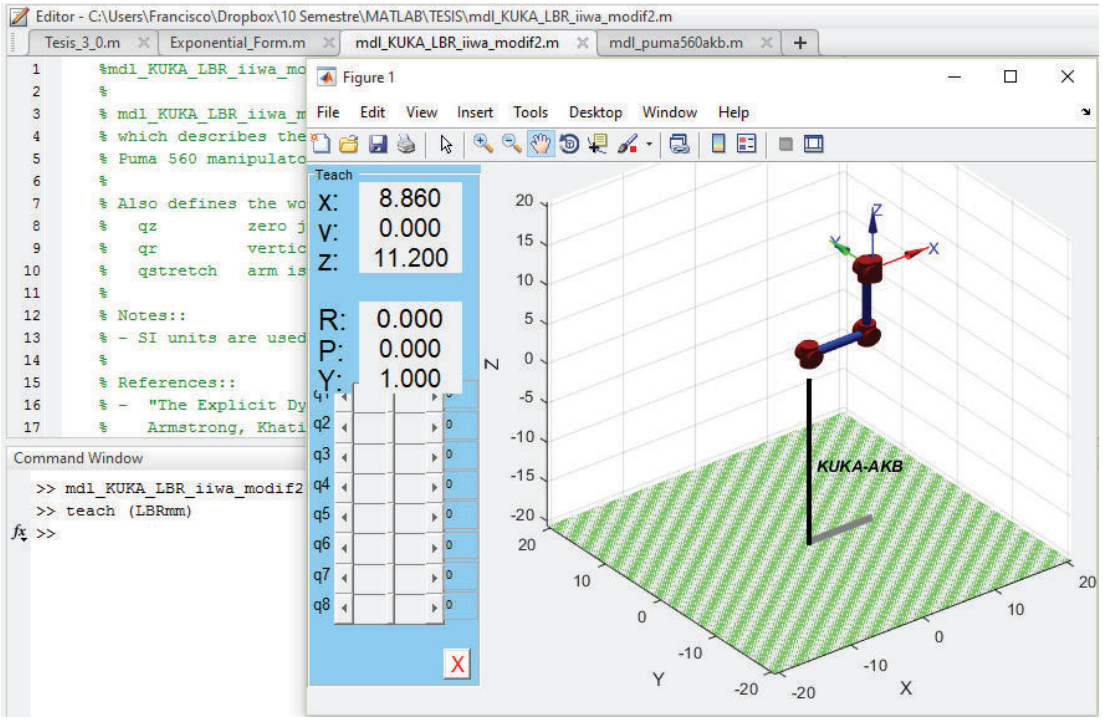


Figura 4.7. Inicialización de la simulación tridimensional. Fuente Propia.

Es importante notar que todos los valores de θ (representados como '*q*' en la simulación) son inicializados en cero. Para obtener la posición cero es necesario introducir los valores que se suman a las variables en la Tabla 2. Otro aspecto a tomar en cuenta es que en la simulación solo se admiten valores enteros para designar los eslabones, razón por la cual el eslabón virtual {2.5} es representado por la variable '*q3*'; al ser este un eslabón virtual su valor siempre debe ser 90°.

Tabla 3. Variables en la simulación con Toolbox Robotics. Fuente Propia.

Eslabón	Variable en la simulación	Valor para obtener la posición cero.
1	q1	90°
2	q2	0°
2.5	q3	90° (valor fijo, eslabón virtual)
3	q4	180°
4	q5	180°
5	q6	180°
6	q7	90°
7	q8	-90°

Se debe tener en cuenta que en la representación gráfica se realiza primero la traslación a lo largo de un eje y posteriormente la rotación alrededor de dicho eje. También es importante considerar el orden en que se realizaron las traslaciones según la Tabla 2 y que algunas distancias son relativamente pequeñas. Por las razones expuestas se puede observar que existen dos juntas rotatorias en una misma posición del gráfico. Los valores de las distancias de los eslabones se las obtuvo del catálogo para el robot KUKA LBR iiwa R800 (KUKA Labs, 2014).

4.5. RESULTADOS EN DISTINTAS POSICIONES

En esta sección se presentan los resultados de los dos modelos calculados y de la simulación tridimensional para las tres posiciones del robot propuestas anteriormente.

4.5.1. POSICIÓN CERO

En la Figura 4.8 se muestra el programa DHm para la posición cero:

```
Command Window
>> Tesis_3_0
 1. Modelo DHm; 2. D-Hm:  2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  1

Hm =

           1           0           0           0
           0           1           0        1686
           0           0           1         320
           0           0           0           1

Elapsed time is 0.002317 seconds.
fx >>
```

Figura 4.8. Resultado posición cero, DHm. Fuente Propia

En la Figura 4.9 se muestra el programa Producto de Exponenciales para la posición cero:

```
Command Window
>> Exponential_Form
 1. Modelo; 2.Cálculo: 2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  1

T =

           1           0           0           0
           0           1           0        1686
           0           0           1         320
           0           0           0           1

Elapsed time is 0.007065 seconds.
fx >>
```

Figura 4.9. Resultado posición cero, Producto de Exponenciales. Fuente Propia

En la Figura 4.10 se muestra el programa de Simulación Tridimensional para la posición cero:

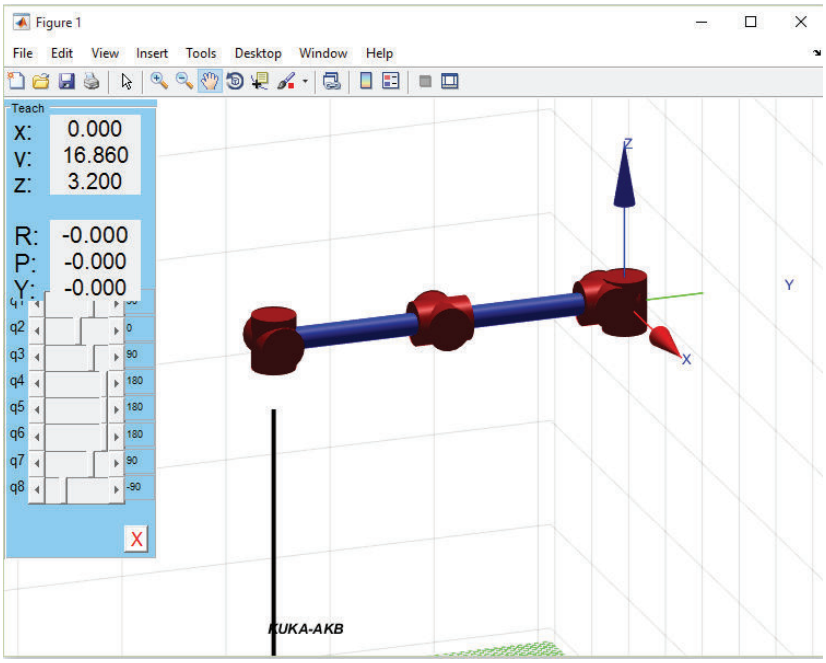
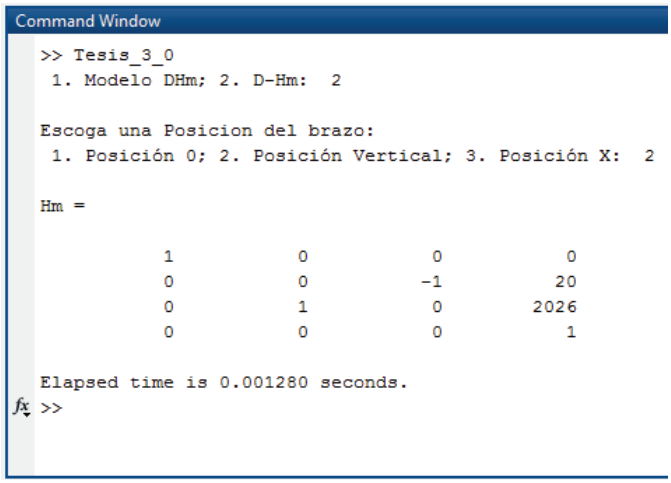


Figura 4.10. Resultado posición cero, Simulación tridimensional. Fuente Propia

4.5.2. POSICIÓN VERTICAL

En la Figura 4.11 se muestra el programa DHm para la posición vertical:



```
Command Window
>> Tesis_3_0
 1. Modelo DHm; 2. D-Hm:  2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  2

Hm =

     1     0     0     0
     0     0    -1    20
     0     1     0  2026
     0     0     0     1

Elapsed time is 0.001280 seconds.
fx >>
```

Figura 4.11. Resultado posición vertical, DHm. Fuente Propia

En la Figura 4.12 se muestra el programa Producto de Exponenciales para la posición vertical:

```
Command Window
>> Exponential_Form
 1. Modelo; 2.Cálculo: 2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  2

T =

           1           0           0           0
           0           0          -1          20
           0           1           0        2026
           0           0           0           1

Elapsed time is 0.001607 seconds.
fx >>
```

Figura 4.12. Resultado posición vertical, Producto de Exponenciales. Fuente Propia

En la Figura 4.13 se muestra el programa de Simulación Tridimensional para la posición vertical:

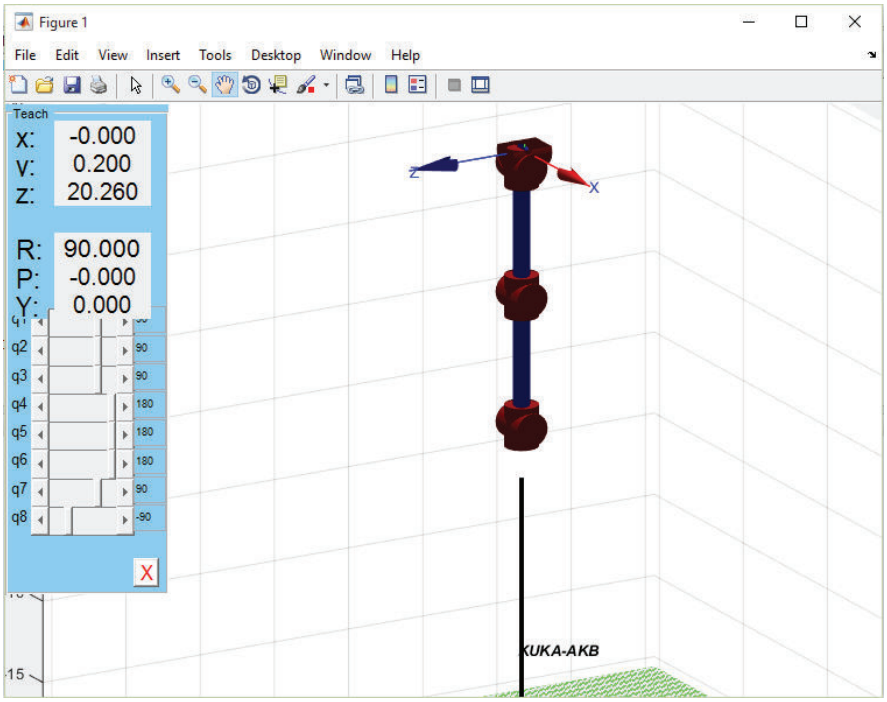


Figura 4.13. Resultado posición vertical, Simulación tridimensional. Fuente Propia

4.5.3. POSICIÓN X

En la Figura 4.14 se muestra el programa DHm para la posición X:

```
Command Window
>> Tesis_3_0
 1. Modelo DHm; 2. D-Hm:  2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  3

Hm =

    -1     0     1 -1248
    -1     1     0   720
     0    -1    -1   859
     0     0     0     1

Elapsed time is 0.002170 seconds.
fx >>
```

Figura 4.14. Resultado posición X, DHm. Fuente Propia

En la Figura 4.15 se muestra el programa Producto de Exponenciales para la posición X:

```
Command Window
>> Exponential_Form
 1. Modelo; 2.Cálculo: 2

Escoga una Posicion del brazo:
 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:  3

T =

    -1     0     1 -1248
    -1     1     0   720
     0    -1    -1   859
     0     0     0     1

Elapsed time is 0.001262 seconds.
fx >>
```

Figura 4.15. Resultado posición X, Producto de Exponenciales. Fuente Propia

En la Figura 4.16 se muestra el programa de Simulación Tridimensional para la posición X:

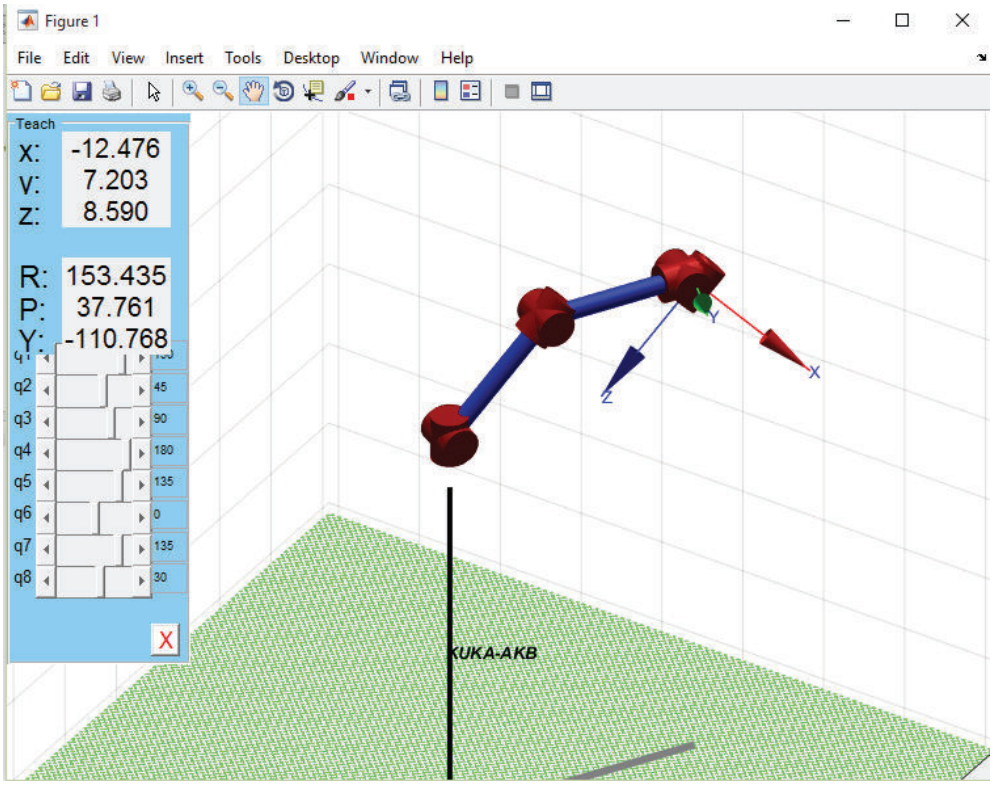


Figura 4.16. Resultado posición X, Simulación tridimensional. Fuente Propia

CAPÍTULO 5

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LOS DISTINTOS MÉTODOS

Al comparar los resultados obtenidos por los diferentes métodos simulados, se puede comprobar que ambos modelos matemáticos (DH_m y Producto de Exponenciales) son correctos. Al probar los modelos matemáticos con distintas posiciones del robot manipulador se puede observar que los resultados siempre son iguales. Cabe recalcar que se cambió la escala de los eslabones en la simulación tridimensional por restricciones propias del programa.

Si se toma en cuenta los tiempos de cálculo de ambos métodos se puede apreciar una diferencia pequeña. Esta diferencia se debe a que el convenio de Denavit-Hartenberg intenta simplificar el cálculo con matrices imponiendo ciertas restricciones discutidas en el apartado 2.3.1.2 en el cual se justifica el uso de cuatro parámetros en lugar de seis para describir a un sistema de coordenadas. En la época en la que el convenio de Denavit-Hartenberg fue desarrollado el ahorro en tiempo de cálculo era muy considerable. En la actualidad, con los avances en tecnología informática, el ahorro de tiempo de cálculo mediante restricción de parámetros no es justificado, como se lo demuestra contrastando con los tiempos de cálculo por el método de Producto de Exponenciales, esta diferencia se encuentra en el orden de 10^{-3} segundos.

Si se toma en cuenta la facilidad de aplicación del método de Producto de Exponenciales en comparación al método DH_m y considerando que la diferencia de tiempo de cálculo es relativamente insignificante, este resulta ser un método más atractivo para calcular la cinemática directa de un robot manipulador.

5.2. APLICACIONES

Una vez que se ha obtenido el programa que permite conocer la cinemática directa del robot manipulador, ya que está codificado en MATLAB®, este puede ser modificado para permitir la integración de módulos de control si se desea construir el robot. Existen plataformas de bajo costo muy populares en la robótica amateur como el Arduino® o la computadora RaspberryPi®. Ambas plataformas son fácilmente integrables a MATLAB® para programar el control y movimiento de un robot pequeño. Esta aplicación se sugiere como futuro proyecto.

El conocer la cinemática directa del manipulador permite saber la posición exacta del efector con cualquier combinación posible de las variables de entrada que estén dentro del campo de trabajo del robot presentado en el catálogo del fabricante. Con esta información el robot tiene una serie de aplicaciones en las que se requiere precisión de herramientas y de movimientos, entre estas posibles aplicaciones se encuentran:

- Soldadura en posiciones de difícil acceso.
- Pintura de alta precisión.
- Ensamblaje de piezas pequeñas.
- Cirugías de alto riesgo.
- Tratamientos de rehabilitación.

Existen también otras aplicaciones actuales del robot, como el entrenamiento asistido para trabajadores de plantas de producción. Esta es una de las principales aplicaciones con las que se comercializa el robot KUKA LBR iiwa R800.

CAPÍTULO 6

6. CONCLUSIONES

1) Una vez concluido el proyecto se puede afirmar que los objetivos generales descritos en la presentación del proyecto han sido cumplidos en su totalidad. Se ha descrito detalladamente la teoría asociada a la matemática de un robot manipulador; Se calculó correctamente dos modelos matemáticos que describen la cinemática directa del manipulador utilizando distintos métodos; Finalmente se corroboraron los modelos matemáticos obtenidos mediante una simulación por computadora y un modelo virtual tridimensional.

2) El uso adecuado del convenio de Denavit-Hartenberg requiere de tiempo extra para la preparación del modelo, es decir, encontrar una posición cero o por defecto adecuada y ubicar correctamente el sistema fijo de coordenadas. Esta preparación es necesaria para poder describir las transformaciones de un sistema a otro utilizando solamente 4 parámetros independientes. Si el cálculo se lo realiza manualmente esta disminución de parámetros es de gran ayuda para obtener el modelo rápidamente.

3) El método de Producto de Exponenciales expuesto en este proyecto, es de fácil implementación ya que no requiere de la asignación de sistemas de coordenadas individuales ni un orden especifico de rotaciones. Sin embargo se requiere de un nivel matemático un poco más avanzado que el que se utiliza en el convenio de Denavit-Hartenberg. Este inconveniente es fácilmente superado mediante el uso de un programa de computadora que permita calcular todas las matrices necesarias.

4) El hecho de que los resultados numéricos de ambos modelos matemáticos sean iguales permite concluir la validez del uso de eslabones virtuales cuando se utiliza el convenio de Denavit-Hartenberg. El uso de estos eslabones virtuales permite obtener la matriz de transformación homogénea

en configuraciones del manipulador en las que tradicionalmente no sería posible. Si el concepto de los eslabones virtuales no funcionara, sería necesario cambiar la posición cero del robot manipulador hasta que este esté de acuerdo con el convenio de Denavit-Hartenberg.

5) El uso de una simulación tridimensional es una herramienta poderosa que permite la visualización y comprobación de los modelos matemáticos que se han obtenido mediante distintos métodos.

6) Debido a que el Toolbox no admite el concepto de eslabones virtuales se debe fijar siempre el valor de la variable del eslabón virtual, ya que esta no debe contribuir en el resultado final.

7) Al comprender el significado y el modelo matemático de la cinemática directa de un robot manipulador se pueden obtener un sinnúmero de aplicaciones tanto en la industria como en otros campos como el de la medicina, entretenimiento o social.

8) La aplicación y comprobación de distintos métodos de cálculo para la obtención del modelo matemático permite tener una idea de la gran extensión de la robótica y la complejidad de su estudio.

CAPÍTULO 7

7. RECOMENDACIONES

1) En la actualidad, con el avance de la tecnología, el tiempo de cálculo para matrices no es muy elevado. Por esta razón se recomienda el uso e implementación del método de Producto de Exponenciales para el cálculo de la cinemática directa ya que posee claras ventajas frente al convenio de Denavit-Hartenberg.

2) Para el adecuado funcionamiento del Toolbox Robotics es recomendable revisar la compatibilidad de versiones, tanto del Toolbox como de MATLAB®, antes de realizar cualquier operación con el programa.

3) Es importante actualizar el Toolbox Robotics a la versión más reciente para evitar errores de programación. Con cada actualización del Toolbox es necesario revisar los cambios realizados en el manual que se incorpora en cada versión.

4) Se sugiere como futuro proyecto la construcción de un pequeño robot manipulador con 7 grados de libertad, utilizando como base este trabajo y el programa de cálculo del modelo matemático. La construcción podría realizarse mediante el uso de motores eléctricos y de una plataforma de control de bajo costo como Arduino® o RaspberryPi® como se ha mencionado previamente.

5) La robótica es un campo de estudio multidisciplinario, por lo cual se recomienda también la incursión en otras áreas de la ingeniería, ya que con una visión más amplia de los problemas que cada campo tiene se puede obtener una mayor cantidad de aplicaciones de la robótica.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ancient-Origins. (16 de Febrero de 2013). *Talos - Crete*. Recuperado el 02 de Junio de 2015, de Ancient Origins: http://www.ancient-origins.net/myths-legends/talos-crete-00157

2. Chang Herrera, A. N. (2014). *Diseño y simulación del un robot articular con seis grados de libertad utilizando el Toolbox Robotics de MATLAB para fortalecer las clases teóricas realizando prácticas de laboratorio con el software presentado en este proyecto.* Quito: EPN.

3. Corke, P. (2014). *Robotics Toolbox for MATLAB, Release 9.*

4. Fu, K. S., Gonzales, R. C., & Lee, C. S. (2006). *Robótica: Control, detección, visión e inteligencia.* Madrid: McGraw-Hill.

5. Granja Oramas, M. V. (2014). *Modelación y análisis de la cinemática directa e inversa del manipulador Stanford de seis grados de libertad.* Quito: EPN.

6. International Federation of Robotics. (2012). *History of Robotics*. Recuperado el 02 de Junio de 2015, de IFR: http://www.ifr.org/history/

7. iRobot Inc. (2014). *History of Roomba*. Obtenido de http://www.irobot.com/About-iRobot/Company-Information/History.aspx

8. Isom, J. (2005). *A brief History of Robotics*. Recuperado el 06 de Junio de 2015, de http://robotics.megagiant.com/history.html

9. KUKA Labs. (Abril de 2014). Obtenido de http://www.kuka-robotics.com/en/products/industrial_robots/sensitiv/lbr_iiwa_7_r800/start.htm

10. Möller, E. (2005). Leonardo da Vinci - Genie exhibit. Berlín.

11. NASA JSC. (2010). *A Short History of Robots*. Recuperado el 02 de Junio de 2015, de JSC Learning Technologies: http://prime.jsc.nasa.gov/ROV/history.html

12. Ollero, A. (2001). *Robótica. Manipuladores y robots móviles.* Barcelona: Marcombo.

13. Park, F. C., & Lynch, K. M. (2014). *Introduction to Robotics. Mechanics, Planning, and Control.* Seoul: Seoul National University.

14. Rieke, M., & Rieke, G. (Octubre de 2014). *Antikythera Mechanism*. Recuperado el 06 de Junio de 2015, de University of Arizona - Astronomy 170B1: http://ircamera.as.arizona.edu/NatSci102/NatSci102/text/extgreek.htm

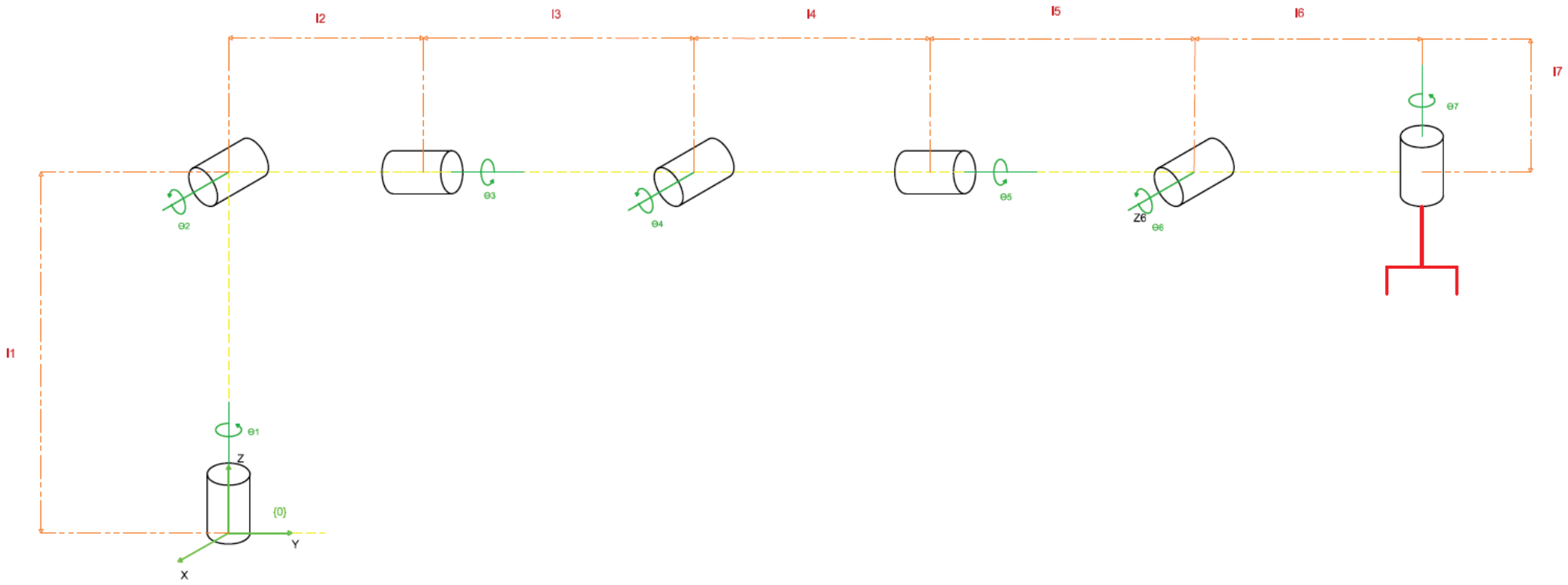
15. RobotShop Distribution Inc. (2008). *History of Robotics: Timeline*. Recuperado el 02 de Junio de 2015, de Robot Shop: http://www.robotshop.com/media/files/PDF/timeline.pdf

16. Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot Dynamics and Control* (2nd ed.). John Wiley & Sons Inc.

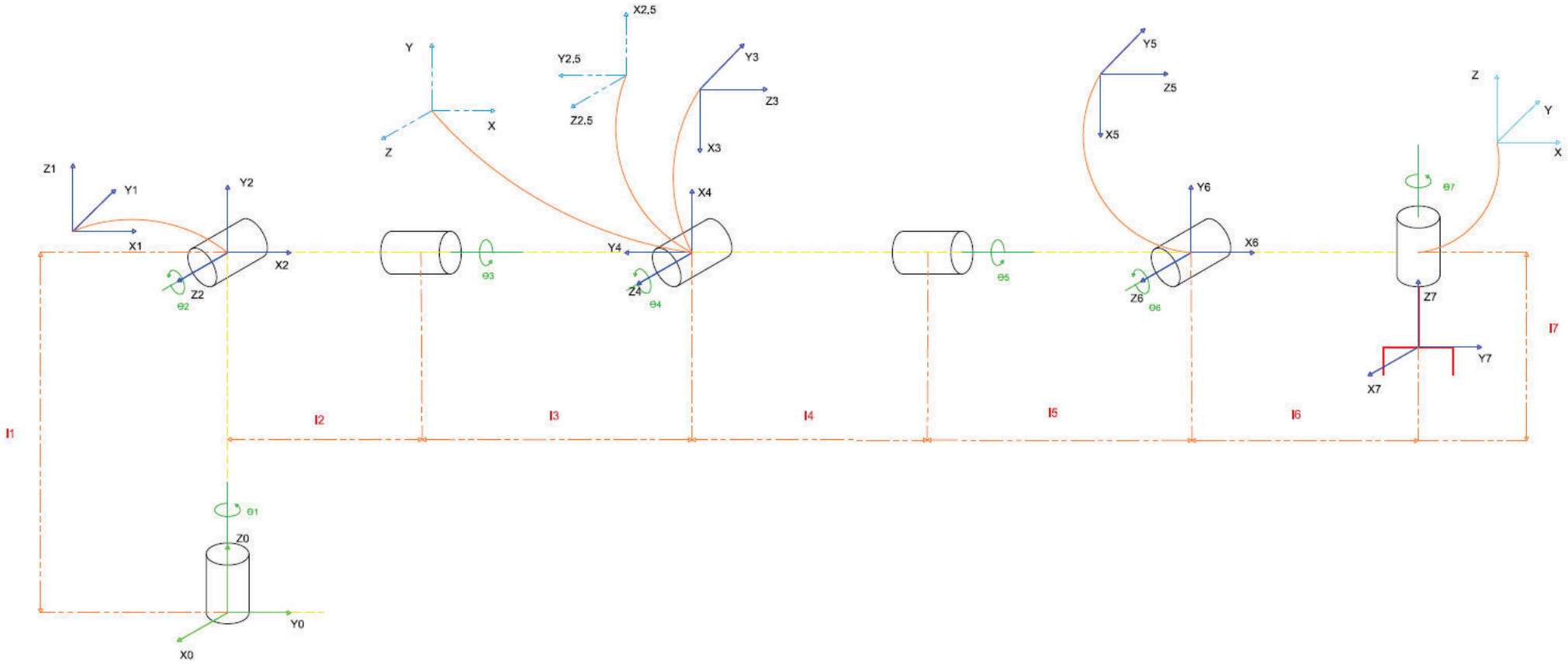
17. Varshney, A., Gautam, R., & Mukerjee, A. (2013). *Human Arm Imitation by a 7-DOF Serial Manipulator.* Kanpur: Indian Institute of Technology.

ANEXOS

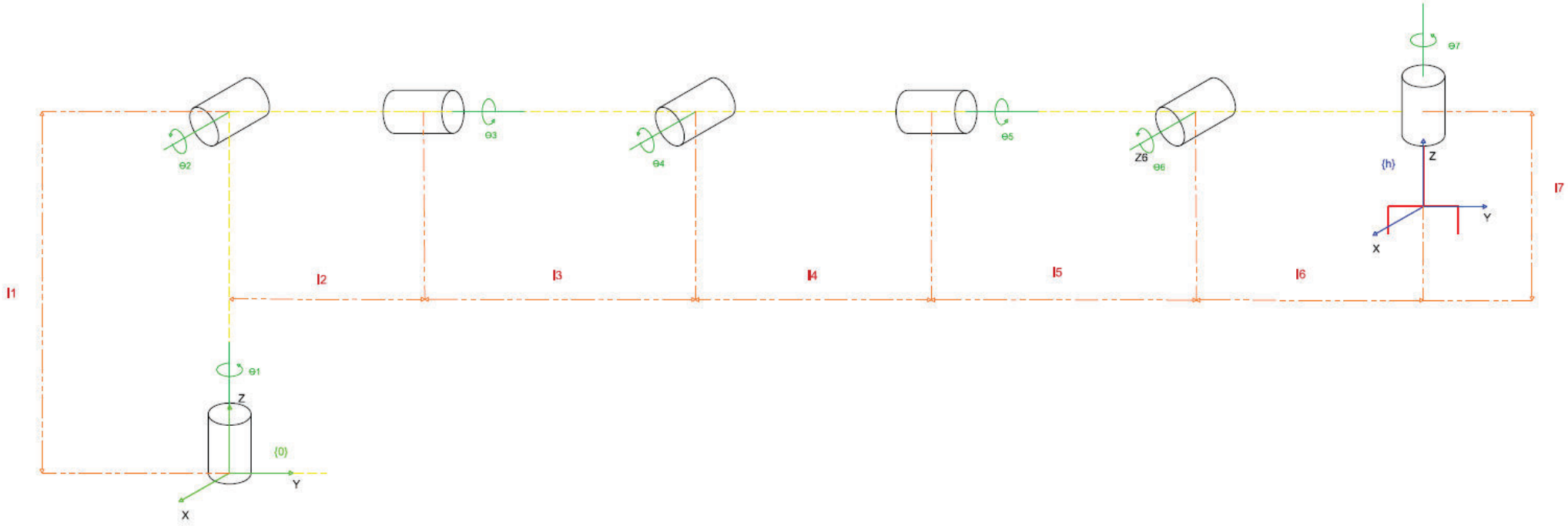
ANEXO A1. REPRESENTACIÓN ESQUEMATICA DEL ROBOT MANIPULADOR DE SIETE GRADOS DE LIBERTAD.



ANEXO A2. ASIGNACIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS SEGÚN DH_M.



ANEXO A3. REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA PARA EL USO DE PRODUCTO DE EXPONENCIALES.



ANEXO A4. CODIFICACIÓN COMPLETA PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN SEGÚN DH_M.

```
%Tesis 3.0

%Francisco X Suárez G.


syms t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7;
syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7;

key=input(' 1. Modelo DHm; 2. D-Hm:  ');

if key==1
           display(' ');
     display('Escoga una Posicion del brazo:');
     key2=input(' 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:
');

     if key2==1
        %%Posición 0
         t1=0;
         t2=0;
         t3=0;
         t4=0;
         t5=0;
         t6=0;
         t7=0;
     else
          if key2==2
            %%Posición Vertical
             t1=0;
             t2=pi/2;
             t3=0;
             t4=0;
             t5=0;
             t6=0;
             t7=0;
          else
              if key2==3
                %%Posición X
                   t1=pi/3;
                   t2=pi/4;
                   t3=0;
                   t4=-pi/4;
                   t5=pi;
                   t6=pi/4;
                   t7=pi/6;
              end
          end
     end
     tic
       A1m=transl(0,0,l1)*rotzt(t1+(pi/2));
       A2m=rotx(pi/2)*rotzt(t2);
       A2_5m=transl(l2+l3,0,0)*rotzt(pi/2);
       A3m=rotx(pi/2)*rotzt(t3+pi);
```

```
      A4m=rotx(pi/2)*rotzt(t4+pi);
      A5m=rotx(pi/2)*transl(0,0,l4+l5)*rotzt(t5+pi);
      A6m=rotx(pi/2)*rotzt(t6+(pi/2));
      A7m=rotx(-pi/2)*transl(l6,0,0)*transl(0,0,-l7)*rotzt(t7-(pi/2));
      Hm=A1m*A2m*A2_5m*A3m*A4m*A5m*A6m*A7m;
      display(Hm);
    toc
 else
    if key==2

     l1=340;
     l2=400;
     l3=400;
     l4=540;
     l5=260;
     l6=86;
     l7=20;
    display(' ');
    display('Escoga una Posicion del brazo:');
    key2=input(' 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:
');

    if key2==1
       %%Posición 0
        t1=0;
        t2=0;
        t3=0;
        t4=0;
        t5=0;
        t6=0;
        t7=0;
    else
         if key2==2
           %%Posición Vertical
            t1=0;
            t2=pi/2;
            t3=0;
            t4=0;
            t5=0;
            t6=0;
            t7=0;
         else
             if key2==3
               %%Posición X
                  t1=pi/3;
                  t2=pi/4;
                  t3=0;
                  t4=-pi/4;
                  t5=pi;
                  t6=pi/4;
                  t7=pi/6;
             end
         end
    end
        tic
          A1m=transl(0,0,l1)*rotz(t1+(pi/2));
          A2m=rotx(pi/2)*rotz(t2);
          A2_5m=transl(l2+l3,0,0)*rotz(pi/2);
          A3m=rotx(pi/2)*rotz(t3+pi);
          A4m=rotx(pi/2)*rotz(t4+pi);
```

```
            A5m=rotx(pi/2)*transl(0,0,l4+l5)*rotz(t5+pi);
            A6m=rotx(pi/2)*rotz(t6+(pi/2));
            A7m=rotx(-pi/2)*transl(l6,0,0)*transl(0,0,-l7)*rotz(t7-
(pi/2));
            Hm=A1m*A2m*A2_5m*A3m*A4m*A5m*A6m*A7m;
            Hm=round(Hm);
            display(Hm);
        toc
    end
end
```

ANEXO A5. CODIFICACIÓN COMPLETA PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN MEDIANTE PRODUCTO DE EXPONENCIALES.

```
%Producto de Exponenciales para el robot manipulador de 7 GDL

%Francisco X Suárez G.

syms t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7
syms l1 l2 l3 l4 l5 l6 l7

%%Selección de las variables de entrada para el problema

flag=input(' 1. Modelo; 2.Cálculo: ');
if flag==1
    display(' ');
     display('Escoga una Posicion del brazo:');
     key2=input(' 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:
');

     if key2==1
        %%Posición 0
         t1=0;
         t2=0;
         t3=0;
         t4=0;
         t5=0;
         t6=0;
         t7=0;
     else
          if key2==2
            %%Posición Vertical
             t1=0;
             t2=pi/2;
             t3=0;
             t4=0;
             t5=0;
             t6=0;
             t7=0;
          else
              if key2==3
                %%Posición X
                   t1=pi/3;
                   t2=pi/4;
                   t3=0;
                   t4=-pi/4;
                   t5=pi;
                   t6=pi/4;
                   t7=pi/6;
              end
          end
     end
else
```

```
    if flag==2
      l1=340;
      l2=400;
      l3=400;
      l4=540;
      l5=260;
      l6=86;
      l7=20;
     display(' ');
     display('Escoga una Posicion del brazo:');
     key2=input(' 1. Posición 0; 2. Posición Vertical; 3. Posición X:
');

     if key2==1
        %%Posición 0
         t1=0;
         t2=0;
         t3=0;
         t4=0;
         t5=0;
         t6=0;
         t7=0;
     else
          if key2==2
            %%Posición Vertical
             t1=0;
             t2=pi/2;
             t3=0;
             t4=0;
             t5=0;
             t6=0;
             t7=0;
          else
              if key2==3
                %%Posición X
                   t1=pi/3;
                   t2=pi/4;
                   t3=0;
                   t4=-pi/4;
                   t5=pi;
                   t6=pi/4;
                   t7=pi/6;
              end
          end
     end
    end
end

%%Matriz de posición del efector en la posición 0.
tic
%M
 M=[1 0 0 0;
    0 1 0 (l2+l3+l4+l5+l6);
    0 0 1 (l1-l7);
    0 0 0 1];

%%Matrices de movimiento de tornillo de cada articulación.

%S1
```

```
w1=[0;0;1];
q1=[0;0;0];
v1=cross(-w1,q1);
S1=[0 -w1(3) w1(2) v1(1);
    w1(3) 0 -w1(1) v1(2);
    -w1(2) w1(1) 0 v1(3)
    0 0 0 0];

%S2
w2=[1;0;0];
q2=[0;0;l1];
v2=cross(-w2,q2);
S2=[0 -w2(3) w2(2) v2(1);
    w2(3) 0 -w2(1) v2(2);
    -w2(2) w2(1) 0 v2(3)
    0 0 0 0];

%S3
w3=[0;1;0];
q3=[0;l2;l1];
v3=cross(-w3,q3);
S3=[0 -w3(3) w3(2) v3(1);
    w3(3) 0 -w3(1) v3(2);
    -w3(2) w3(1) 0 v3(3)
    0 0 0 0];


%S4
w4=[1;0;0];
q4=[0;l2+l3;l1];
v4=cross(-w4,q4);
S4=[0 -w4(3) w4(2) v4(1);
    w4(3) 0 -w4(1) v4(2);
    -w4(2) w4(1) 0 v4(3)
    0 0 0 0];

%S5
w5=[0;1;0];
q5=[0;l2+l3+l4;l1];
v5=cross(-w5,q5);
S5=[0 -w5(3) w5(2) v5(1);
    w5(3) 0 -w5(1) v5(2);
    -w5(2) w5(1) 0 v5(3)
    0 0 0 0];

%S6
w6=[1;0;0];
q6=[0;l2+l3+l4+l5;l1];
v6=cross(-w6,q6);
S6=[0 -w6(3) w6(2) v6(1);
    w6(3) 0 -w6(1) v6(2);
    -w6(2) w6(1) 0 v6(3)
    0 0 0 0];

%S7
w7=[0;0;1];
q7=[0;l2+l3+l4+l5+l6;l1];
v7=cross(-w7,q7);
S7=[0 -w7(3) w7(2) v7(1);
```

```
    w7(3) 0 -w7(1) v7(2);
    -w7(2) w7(1) 0 v7(3)
    0 0 0 0];

%Desarrollo de las series infinitas mediante la definición del número
'e'.
A1e= eye(4)+ sin(t1)*S1+(1-cos(t1))*S1^2;
A2e= eye(4)+ sin(t2)*S2+(1-cos(t2))*S2^2;
A3e= eye(4)+ sin(t3)*S3+(1-cos(t3))*S3^2;
A4e= eye(4)+ sin(t4)*S4+(1-cos(t4))*S4^2;
A5e= eye(4)+ sin(t5)*S5+(1-cos(t5))*S5^2;
A6e= eye(4)+ sin(t6)*S6+(1-cos(t6))*S6^2;
A7e= eye(4)+ sin(t7)*S7+(1-cos(t7))*S7^2;

%%Despliegue de resultados.
if flag==1
    T=(A1e*A2e*A3e*A4e*A5e*A6e*A7e*M);
    display(T);
else if flag==2
    T=round(A1e*A2e*A3e*A4e*A5e*A6e*A7e*M);
    display(T);
    end
end
toc
```

ANEXO A6. CODIFICACIÓN COMPLETA PARA LA SIMULACIÓN TRIDIMENSIONAL DEL ROBOT MANIPULADOR.

```
%mdl_KUKA_LBR_iiwa_modif2 Create model of Puma 560 manipulator
%
% mdl_KUKA_LBR_iiwa_modif is a script that creates the workspace variable
p560m
% which describes the kinematic and dynamic characterstics of a Unimation
% Puma 560 manipulator modified DH conventions.
%
% Also defines the workspace vectors:
%   qz         zero joint angle configuration
%   qr         vertical 'READY' configuration
%   qstretch   arm is stretched out in the X direction
%
% Notes::
% - SI units are used.
%
% References::
% -  "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the Puma 560
Arm"
%    Armstrong, Khatib and Burdick
%    1986
%
% See also SerialLink, mdl_puma560, mdl_stanford_mdh.

% MODEL: Unimation, KUKA_LBR_iiwa, dynamics, 7DOF, modified_DH


% Copyright (C) 1993-2015, by Peter I. Corke
%
% This file is part of The Robotics Toolbox for MATLAB (RTB).
%
% RTB is free software: you can redistribute it and/or modify
% it under the terms of the GNU Lesser General Public License as
published by
% the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
% (at your option) any later version.
%
% RTB is distributed in the hope that it will be useful,
% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
% MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
% GNU Lesser General Public License for more details.
%
% You should have received a copy of the GNU Leser General Public License
% along with RTB.  If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
%
% http://www.petercorke.com

clear L
%               theta        d        a          alpha
L(1) = Link([  0+(pi/2)      3.4      0            0       0],
'modified');%1
```

```
L(2) = Link([  0             0        0            pi/2    0],
'modified');%2
L(3) = Link([  0+(pi/2)      0        8            0       0],
'modified');%2.5     %%%
L(4) = Link([  0+pi          0        0            pi/2    0],
'modified');%3
L(5) = Link([  0+pi          0        0            pi/2    0],
'modified');%4
L(6) = Link([  0+pi          8        0            pi/2    0],
'modified');%5
L(7) = Link([  0+(pi/2)      0        0            pi/2    0],
'modified');%6
L(8) = Link([  0-(pi/2)     -0.2      0.86        -pi/2    0],
'modified');%7



L(1).m = 10;
L(2).m = 17.4;
L(3).m = 4.8;
L(4).m = 0.82;
L(5).m = 0.34;
L(6).m = .09;
L(7).m = .09;
L(8).m = .09;


%         rx      ry      rz
L(1).r = [0   0   0 ];
L(2).r = [0.068   0.006   -0.016];
L(3).r = [0   -0.070  0.014 ];
L(4).r = [0   0   -0.019];
L(5).r = [0   0   0 ];
L(6).r = [0   0   .032  ];
L(7).r = [0   0   .032  ];
L(8).r = [0   0   .032  ];


%        Ixx     Iyy      Izz    Ixy     Iyz     Ixz
L(1).I = [0   0   0.35    0   0   0];
L(2).I = [.13   .524    .539    0     0   0];
L(3).I = [.066    .0125   .066    0   0   0];
L(4).I = [1.8e-3  1.8e-3  1.3e-3  0   0   0];
L(5).I = [.3e-3   .3e-3   .4e-3   0   0   0];
L(6).I = [.15e-3  .15e-3  .04e-3  0   0   0];
L(7).I = [.15e-3  .15e-3  .04e-3  0   0   0];
L(8).I = [.15e-3  .15e-3  .04e-3  0   0   0];


L(1).Jm =  291e-6;
L(2).Jm =  409e-6;
L(3).Jm =  299e-6;
L(4).Jm =  35e-6;
L(5).Jm =  35e-6;
L(6).Jm =  35e-6;
L(7).Jm =  35e-6;
L(8).Jm =  35e-6;
```

```
L(1).G =  -62.6111;
L(2).G =  107.815;
L(3).G =  -53.7063;
L(4).G =  76.0364;
L(5).G =  71.923;
L(6).G =  76.686;
L(7).G =  76.686;
L(8).G =  76.686;

% viscous friction (motor referenced)
% unknown

% Coulomb friction (motor referenced)
% unknown

%
% some useful poses
%
qz = [pi/2 0 pi/2 pi pi pi pi/2 -pi/2]; % zero angles, L shaped pose
qr = [pi/2 pi/2 pi/2 pi pi pi pi/2 -pi/2]; % ready pose, arm up
qx = [(pi/2+pi/3) pi/4 pi/2 pi (pi-pi/4) pi (pi/2+pi/4) (-pi/2+pi/6)]; %
position X

LBRmm = SerialLink(L, 'name', 'KUKA-AKB', 'manufacturer', 'Unimation',
'comment', 'AK&B');
clear L
```