

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS
DE CONTROL MULTIVARIABLES
EN EL DOMINIO DE LA
FRECUENCIA**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN
ELECTRÓNICA Y CONTROL**

ERNESTO IVAN KRUGER TERAN

MARZO 1994

Certifico que el presente trabajo
ha sido realizado en su totalidad
por el Sr. Ernesto Kruger T.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Burbano R.", with a stylized flourish at the end.

Ing. Patricio Burbano R. MSc.

DIRECTOR DE TESIS

DEDICATORIA :

A JEHOVA Dios mi agradecimiento por nunca dejarme solo, y haberme dado la oportunidad de conocerlo, a mi madre las gracias por ser lo que soy y a quienes me apoyaron ...gracias.

AGRADECIMIENTO :

Mi más sincero agradecimiento al Ing. Patricio Burbano por su valiosa ayuda, por tener la paciencia de un verdadero maestro amigo y por sus acertados consejos para el desarrollo de este trabajo.

Un reconocimiento especial a todas las personas que de una u otra manera colaboraron desinteresadamente en su realización.

CONTENIDO

	PAGINA
Resumen	i
CAPITULO I : INTRODUCCION	
1.1 INTRODUCCION	1
1.2 DESCRIPCION DE SISTEMAS MULTIVARIABLES	4
1.2.1 Modelo a variables de estado (descripción A,B,C,D o interna)	5
1.2.2 Modelo mediante matriz función de transferencia (descripción externa)	7
1.2.3 Relaciones entre modelos	8
1.3 TECNICAS DE DISEÑO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	11
1.3.1 Análisis	11
1.3.2 Diseño	12
1.4 TECNICAS DE DISEÑO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	14
Citas capitulo I	26

CAPITULO II : METODOS EN FRECUENCIA

2.1	CRITERIO GENERALIZADO DE NYQUIST	28
2.1.1	Estabilidad de sistemas univariables	28
2.1.2	Criterio generalizado de estabilidad de sistemas multivariables	36
2.1.2.1	Ideas preliminares	36
2.1.2.2	Dominancia diagonal	39
2.1.2.3	Círculos de Gershgorin	40
2.1.2.4	Teorema de Gershgorin	41
2.1.2.5	Bandas de Gershgorin	42
2.1.3	Relaciones inversas	43
2.1.4	Teorema de estabilidad de sistemas multivariables	44
2.1.4.1	Teorema I	44
2.1.4.2	Teorema II. Criterio generalizado de estabilidad de Nyquist	46
2.1.4.3	Interpretación gráfica del teorema II	47
2.1.4.4	Teorema III	49
2.2	METODO DEL ARREGLO INVERSO DE NYQUIST (INA)	50
2.2.1	Ideas preliminares	50
2.2.2	Aplicación del teorema de Ostrowski	66
2.2.3	Cálculo de $K(s)$	67
	Método a)	68
	Método b)	68
	Método c)	70

Método c1)	70
Método c2)	77
2.3 ARREGLO DIRECTO DE NYQUIST (DNA)	79
2.3.1 Introducción	79
2.3.2 Método de pseudodiagonalización para el DNA	83
2.3.3 Método de minimización	87
2.4 LUGAR CARACTERISTICO (LC)	93
2.4.1 Introducción	93
2.4.2 Teorema generalizado de Nyquist para el lugar característico	97
2.4.3 Definiciones	98
2.4.4 Medidas de interacción	101
Citas capítulo II	106

Capítulo III :RUTINAS PARA ANALISIS Y DISEÑO EN FRECUENCIA

3.1 RUTINAS BASICAS DEL MATLAB PARA SISTEMAS DE CONTROL MULTIVARIABLES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	109
3.1.1 Funciones generales	109
3.1.2 CONTROL toolbox	114
3.1.3 Multivariable Frequency Domain (MFD) toolbox	115

3.2	RUTINAS PARA ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA USANDO EL DINA TOOLBOX	
3.2.1	Rutinas de enlace (drivers)	128
3.2.2	Funciones	135
3.2.2.1	Funciones de análisis gráfico en el dominio del tiempo	136
3.2.2.2	Funciones gráficas en el dominio de la frecuencia	138
3.2.2.3	Funciones de diseño	140
3.3.	ESTRUCTURA GENERAL Y METODO DE DISEÑO	144
3.3.1	Modelo de la planta	146
3.3.1.1	Matriz MVFR (Multivariable Frequency Response)	147
3.3.2	Módulo análisis gráfico.	148
3.3.2.1	Gráficos de Nyquist y círculos de Gershgorin	148
3.3.2.2	Respuesta de frecuencia de dominancia	149
3.3.2.3	Lugar característico	149
3.3.2.4	Diagramas de Bode	151
3.3.2.5	Interacción en el tiempo	151
3.3.2.6	Interpretación de resultados	152
3.3.3	Módulo de precompensación (diseño)	153
3.3.3.1	Diseño INA	153
3.3.3.2	Diseño DNA	154
3.3.3.3	Karbitra	156
3.3.4	Módulo de análisis con precompensación	157
3.3.5	Módulo diseño final SISO	157

Diagrama de flujo general del DINA Toolbox	160
Citas capítulo II	164
Capítulo IV : RESULTADOS Y CONCLUSIONES	
4.1 RESULTADOS	165
4.1.1 Modelos matemáticos	166
4.1.1.1 Sistema dominante totalmente	166
4.1.1.2 Sistema con fuerte interacción en una sola columna	174
4.1.1.3 Sistema con fuerte interacción en la segunda columna	181
4.1.1.4 Sistema base	190
4.1.2 Modelos matemáticos	226
4.1.2.1 Turbina	226
4.1.2.2 Compresor	258
Citas capítulo IV	284
4.2 CONCLUSIONES	285
4.3 RECOMENDACIONES	292
BIBLIOGRAFIA	294

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo fue el desarrollar una herramienta para el análisis y diseño, en el dominio de la frecuencia, de sistemas multivariables basado en el conocimiento del arreglo directo e inverso de Nyquist .

La herramienta desarrollada opera de la siguiente forma: una vez ingresado el modelo se procede al análisis, que puede ser en el tiempo, usando los diagramas de Bode de dominancia, el lugar característico, los diagramas de Nyquist asociado a los círculos de Gershgorin o los diagramas de Bode multivariable. Una vez que se determina que un sistema no es dominante se procede al diseño de un precompensador que haga dominante al mismo (pseudodesacoplado). Para esto se puede usar el método del INA usando ya sea evaluación a una frecuencia o por operaciones fundamentales de filas y columnas. Otra alternativa de diseño es el método del DNA basado en la pseudodiagonalización. Se verifica por los métodos gráficos mencionados anteriormente que se logró el objetivo. Una vez desacoplado el sistema se procede al diseño de los lazos independientes SISO (de una entrada y una salida).

El programa fue desarrollado en el paquete de simulación Matlab bajo el sistema operativo MS-DOS. Consiste de una serie de rutinas que son llamadas y supervisadas por un programa principal y que tiene como herramienta principal el toolbox MFD (Multivariable Frequency Domain) del Matlab. .

Para verificar la validez y limitaciones de la herramienta de análisis y diseño desarrollada, se realizaron varias pruebas con ejercicios con modelos teóricos y con plantas comúnmente encontradas en la industria.

1.1 INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo de tesis es el de realizar un estudio de los métodos más conocidos para el análisis y diseño de sistemas de control multivariable en el dominio de la frecuencia. El presente tema se justifica dado a que no se ha trabajado en el Laboratorio de Sistemas de Control con sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia.

Para cumplir con este objetivo se utilizará la potencialidad que ofrece el paquete MATLAB como herramienta principal. El MATLAB ha sido desarrollado con el propósito específico de ayudar en el cálculo con matrices, de ahí su nombre MATrix LABoratory. Este paquete ha sido desarrollado en lenguaje C con el que eventualmente se puede hacer un programa interactivo al relacionarlo con el ensamblador de este lenguaje, de esto último se desprende una ventaja de gran potencialidad pues se pueden desarrollar programas en C y utilizar las rutinas del MATLAB. Como complemento de las rutinas básicas del MATLAB se han desarrollado una serie de rutinas afines a los sistemas de control, que se han concentrado en los llamados TOOLBOX o librerías específicas con aplicaciones para : control automático, identificación de sistemas, procesamiento de señales y sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia . Esta última llamada *MFD (Multivariable Frequency Domain)* será la principal herramienta para el análisis y diseño de los sistemas multivariables (MIMO múltiple input múltiple output) en el dominio de la frecuencia.

La utilización de las rutinas del TOOLBOX MFD en MATLAB y el planteamiento para el análisis y diseño, en frecuencia, de sistemas de control multivariable que se ha desarrollado en este trabajo de tesis constituyen un aporte y el punto de partida para futuros trabajos en Control Moderno especialmente en el área de Laboratorio. Por otro lado este trabajo servirá para desarrollar diseños aplicables para el caso de control de procesos por computador.

A continuación se delinearé el contenido de la tesis. El capítulo I se dedica a tratar una descripción teórica general de los sistemas multivariables y enmarca la ubicación de las técnicas de análisis y diseño en el dominio de la frecuencia en contraposición con el dominio del tiempo en el contexto de los sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). No se trata de realizar un curso formal de Control Moderno, sino más bien recordar las ideas básicas principales y dar una visión esquemática de los sistemas multivariables.

El capítulo II contiene los lineamientos y descripciones teóricas de las técnicas de análisis y diseño en el dominio de la frecuencia. Entre otras cosas se establecen las bases matemáticas de soporte de los métodos de análisis del arreglo de Nyquist directo e inverso y del lugar característico. Se hace una extensión del caso univariable al caso multivariable de la estabilidad mediante el criterio generalizado de estabilidad de Nyquist. Por último en este capítulo se tratan propiamente los métodos de diseño para conseguir un pseudodesacoplamiento o minimización de las interacciones entre entradas

y salidas, en caso de que el sistema, en base a un análisis previo las tenga, para una posterior compensación a manera de un sistema multilazo para satisfacer los requerimientos deseados por el diseñador.

El capítulo III presenta las rutinas del MATLAB para sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia; esto es, las rutinas para el análisis y diseño mediante el arreglo de Nyquist directo e inverso y, mediante el lugar característico. Cabe recalcar además que estas rutinas servirán como material didáctico y de apoyo a la materia de Control Moderno. Finalmente el capítulo IV presenta ejemplos de validación de la teoría dada en el capítulo anterior y las conclusiones correspondientes al trabajo realizado.

El capítulo II puede ser considerado como el fundamento teórico de la tesis, mientras que en el capítulo III se desarrolla propiamente la parte práctica de la misma. Por último, en el anexo, se presentan las rutinas del toolbox MFD del MATLAB, de mayor importancia y que han sido utilizadas en esta tesis.

1.2 DESCRIPCION DE SISTEMAS MULTIVARIABLES.

Se puede establecer una clasificación de los sistemas en base al número de entradas y salidas. Así un sistema es SISO (Single Input Single Output) cuando tiene una entrada y solo una salida. El sistema es MIMO (Multiple Inputs Multiple Outputs) cuando tiene más de una entrada y más de una salida, tal como se aprecia en la figura 1.1.

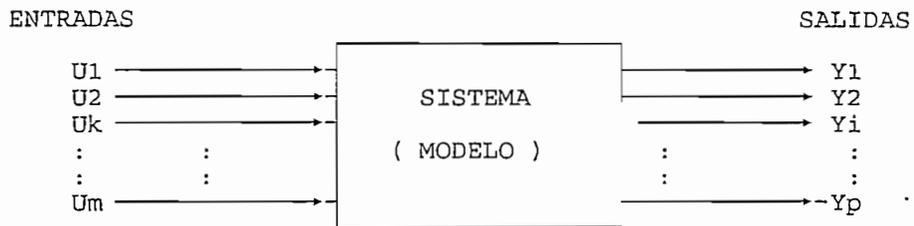


Figura 1.1 Sistema Multivariable

El presente trabajo de tesis tratará sobre los *sistemas continuos, lineales, invariantes en el tiempo y multivariables*.

Básicamente, en el estudio de los sistemas de control multivariable se utilizan los siguientes tipos de modelos :

- A variables de estado
- Mediante matriz función de transferencia

La primera descripción se realiza en el dominio del tiempo t , en tanto que la subsiguiente es una descripción en el dominio de la frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$. A continuación se resumen los aspectos más importantes de estos modelos.

1.2.1 Modelo a variables de estado (descripción A,B,C,D o interna)

Como se sabe todo sistema multivariable puede ser modelado o descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de n -ésimo orden que relacionan las salidas del sistema multivariable $y_i(t)$ con sus entradas $U_j(t)$. Mediante la introducción de un conjunto de variables adicionales $x_k(t)$, conocidas como variables de estado se puede llegar a un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden que permiten el uso del álgebra lineal. Este conjunto o sistemas de ecuaciones puede ser escrito de la forma vectorial-matricial de la siguiente manera dando lugar al modelo a variables de estado:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B u(t)$$

$$\underline{y}(t) = C \underline{x}(t) + D u(t)$$

(Ec.1.1)

donde:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}_{(p \times 1)} \quad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}_{(m \times 1)}$$

siendo n el orden del sistema que denota el número de estados

m el número de entradas

p el número de salidas

$\underline{x}(t)$ se denomina vector de estado

$\underline{y}(t)$ vector de salida

$\underline{u}(t)$ vector de entrada

De lo anterior se puede apreciar que las matrices A , B , C y D tienen las siguientes dimensiones $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(p \times n)$, $(p \times m)$ respectivamente. Cabe anotar que generalmente $D=0$ y que para el caso univariable $m=p=1$.

La descripción de espacio de estado de un sistema provee una completa visualización de la estructura del sistema en sí (figura. 1.2)[1], muestra como todas las variables internas $x_k(t)$ $\{k=1,n\}$ interactúan unas con otras, de ahí que se la denomina *Descripción Interna*; indica además como las entradas $u_j(t)$ $\{j=1,m\}$ afectan los estados del sistema y como las salidas y_i $\{i=1,p\}$ son obtenidas como combinaciones lineales de las variables de estado $x_k(t)$ y de las entradas $u_j(t)$.

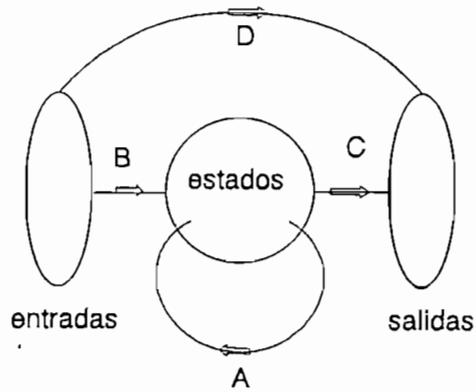


Figura 1.2 Descripción en el espacio de estado

1.2.2 Modelo mediante matriz función de transferencia (descripción externa)

La representación matriz función de transferencia de un sistema $G(s)$ (ver figura 1.3) es una proyección entrada-salida que relaciona la transformada de Laplace del *vector de salida* $Y(s)$ con la transformada de Laplace del *vector de entrada* $U(s)$, con condiciones iniciales nulas, por medio de la relación:

$$\underline{Y}(s) = G(s) * \underline{U}(s) \quad (\text{Ec. 1.2})$$

siendo

$$\underline{Y}(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_i(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{bmatrix}_{(p \times 1)} \quad \underline{U}(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}_{(m \times 1)}$$

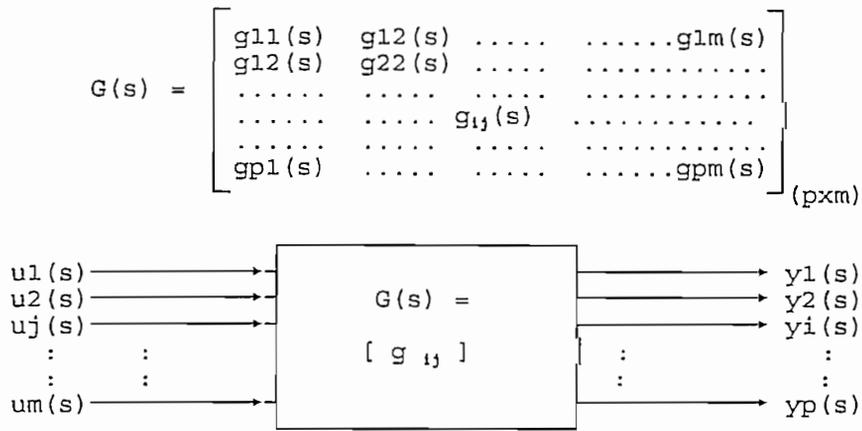


Figura 1.3 Descripción externa

Para un modelo lineal de orden arbitrario , los elementos $g_{ij}(s)$ de la matriz $G(s)$ son relaciones de polinomios en s que representan la función de transferencia entre la salida y_i y a la entrada u_j . Esta descripción provee una pequeña información de la estructura interna del sistema en base a los g_{ij} , por esta razón esta se la conoce también como *descripción externa*.

1.2.3 Relaciones entre modelos

A partir del modelo a variables de estado, que dicho sea de paso es el más fácil de obtener a partir del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden enésimo que representa a un sistema físico, se puede determinar la matriz función de transferencia $G(s)$ mediante la siguiente relación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

(Ec.1.3)

Para transformar el modelo mediante la matriz $G(s)$ a la descripción A,B,C,D existe el método de realización mínima.

Para ilustrar los diferentes tipos de modelos se considera el ejemplo del sistema físico de la figura 1.4., donde m_1 y m_2 son las masas del sistema, k_1 y k_2 son los coeficientes de elasticidad de los resortes. Interesa el desplazamiento x_2 de m_2 ; es decir $y = x_2$; cuando el sistema esta sujeto a una fuerza u aplicada a la masa m_1 . [2]

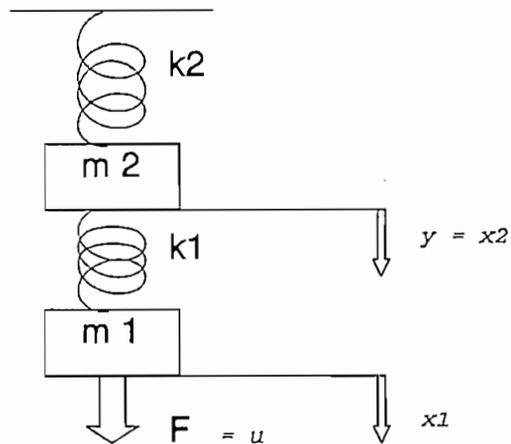


Figura 1.4 Sistema mecánico

Las ecuaciones diferenciales del sistema de la figura 1.4 son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= u - k_1 (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_1 (x_1 - x_2) - k_2 x_2 \end{aligned}$$

Considerando como vector de estado :

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Se llega a:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & k_1/m_1 & 0 & 0 \\ k_1/m_2 - (k_1+k_2)/m_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \underline{x}$$

La descripción mediante matriz función de transferencia que para este caso es escalar se obtiene como:

$$G(s) = C^t [sI - A]^{-1} B$$

ó a partir de las transformadas de Laplace de las ecuaciones diferenciales donde se llega a:

$$G(s) = \frac{k_1}{m_1 m_2 s^4 + [m_2 k_1 + m_1 (k_1 + k_2)] s^2 + k_1 k_2}$$

esto es : $y(s) = G(s) * \underline{u}(s)$

1.3 TECNICAS DE DISEÑO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

1.3.1 Análisis

El análisis de sistemas en el dominio del tiempo descritos a variables de estado; tiene que ver básicamente con la conversión de las diferentes formas canónicas con la finalidad de analizar estabilidad, controlabilidad, observabilidad.

El análisis implica también el cálculo de los estados y salidas del sistema utilizando la matriz transición de estado.

No se profundiza con mayor detalle este aspecto por cuanto no es el objetivo de la presente tesis.

1.3.2 Diseño

El diseño se basa fundamentalmente en considerar las interacciones que existen entre los diferentes estados, entradas y salidas de un sistema multivariable descrito en el espacio de estado. Se puede considerar las siguientes como las técnicas más importantes:

- Aproximación de un sistema multivariable a un sistema multilazo despreciando las interacciones cuando estas son débiles; o sea se asume que no existe acoplamiento.
- Desacoplamiento de sistemas, cuando las interacciones no son despreciables; se trata de descomponer un sistema multivariable en un sistema de lazos independientes (sin interacción entre las diferentes entradas y las diferentes salidas) utilizando para ello una realimentación de estado o de salida.
- Asignación de polos mediante realimentación de estado.
- Asignación de polos mediante realimentación de salida.
- Diseño del controlador del tipo realimentación más observador de estado.

- Regulador cuadrático lineal (LQR) que consiste en una realimentación óptima de estado con el criterio cuadrático de minimización.

- Estimador óptimo de estado que básicamente consiste en el filtro de Kalman.

Todas las técnicas anteriores se fundamentan en un proceso de síntesis, en otras palabras existe un algoritmo que permite satisfacer los requerimientos del diseñador, en forma sistemática y con resultados únicos.

No se profundiza con el detalle pertinente estas técnicas porque el objetivo de la presente tesis es el análisis y diseño en el dominio de la frecuencia, que no consiste en métodos de síntesis, sino más bien en técnicas iterativas, donde es posible que existan diferentes soluciones las cuales podrán hacer que el sistema al final satisfaga con los objetivos propuestos.

A continuación se hace una breve descripción a manera introductoria del análisis y diseño en frecuencia. El estudio detallado se realiza en el capítulo II.

1.4 TECNICAS DE DISEÑO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

En el numeral anterior se hizo una revisión breve de las técnicas de síntesis, en el dominio del tiempo. Estas técnicas presentan las siguientes desventajas:[3]

- Pueden producir esquemas de control complicados para sistemas de alto orden.
- Se dificulta satisfacer especificaciones como el máximo sobreimpulso, tiempo de subida , tiempo de establecimiento, etc.
- Cuando existen cambios en las ganancias de los lazos de realimentación el sistema tiene una alta sensibilidad y por ende no se garantiza la integridad del sistema controlado, que puede ser interpretada como la sensibilidad de un sistema de control a cambios en las ganancias de los lazos de realimentación, en términos reales se debe garantizar que no se destruya la planta a pesar de un daño físico en un lazo de control.

Por estas razones se ha optado, en este trabajo de tesis, por las técnicas de análisis y diseño de sistemas multivariables usando el dominio de la frecuencia que tienen la ventaja de satisfacer requerimientos anteriores y presentar una alternativa de análisis y diseño.

Estas pueden ser clasificadas en :

- Arreglo de Nyquist directo e inverso debido a Rosenbrock (DNA e INA).
- Lugar característico debido a Mac-Farlane (LC).

Para entender los métodos se parte del esquema de control para un sistema multivariable con realimentación de la figura 1.5.

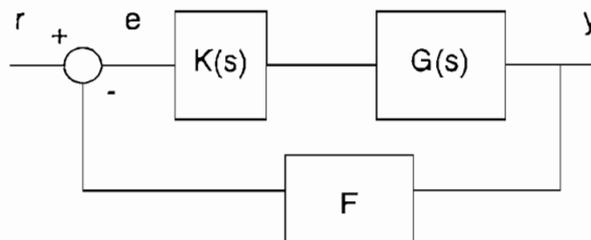


Figura1.5 sistema multivariable con realimentación

donde:

$G(s)$ es la *matriz función de transferencia de la planta*,

F es la *matriz de realimentación* diagonal de coeficientes constantes

$$F = \text{diag} \{f_i\} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{Ec.1.4})$$

$K(s)$ se denomina *matriz controlador* y se considerará que esta matriz consiste en el producto de dos matrices $K_p(s)$ y K_d , es decir:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{K}_p(s) * \mathbf{K}_d$$

(Ec 1.5)

donde \mathbf{K}_d es una matriz diagonal de ganancias escalares k_i ,

$$\mathbf{K}_d = \text{diag} \{k_i\}, i = 1, \dots, m$$

(Ec.1.6)

y $\mathbf{K}_p(s)$ será una matriz denominada *precompensador*; que permitirá desacoplar el sistema multivariable.

Por otro lado se define el producto de $\mathbf{G}(s)$ y $\mathbf{K}(s)$ como $\mathbf{Q}(s)$,

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{G}(s) * \mathbf{K}(s)$$

(Ec.1.7)

Tomando en cuenta estas últimas consideraciones el esquema de la figura 1.5 puede ser redefinido de la forma de la figura 1.6:

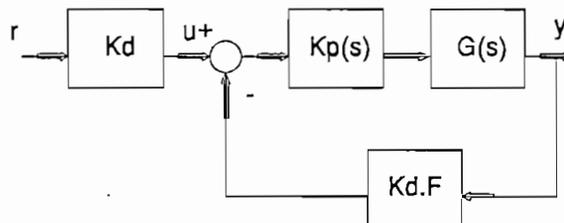


Figura 1.6 Sistema con realimentación redefinido

La matriz K_d fuera de los lazos de realimentación no altera la estabilidad del sistema, pues la estabilidad está dada por la ecuación característica $1 + G K_d K_p F = 0$ por lo que K_d puede ser omitida, por otro lado por conveniencia se redefine la matriz $K_d F$ como F solamente, la cual es una matriz diagonal, independiente de s , $F = \text{diag}(f_i)$. Note que el sistema será representado ahora por la figura 1.7, a continuación

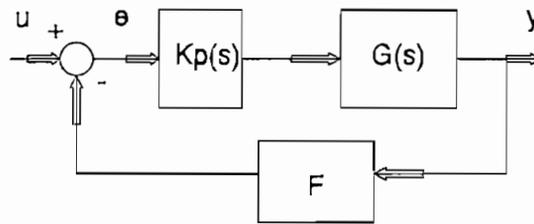


Figura 1.7 Sistema simplificado.

Los elementos f_i de $F = \text{diag}(f_i)$ pueden representar un *espacio k-dimensional* de la forma (f_1, f_2, \dots, f_k) denominado *espacio de ganancia*.

Usualmente el sistema será estable para algunos valores de f_i pero inestable para otros. Por lo tanto el espacio de ganancia será dividido en regiones estables y en regiones inestables. Se pretenderá que los valores de f_i estén en la región estable, de esta forma se garantizará que el sistema sea asintóticamente estable (todos los polos del sistema están en el semiplano izquierdo del plano complejo s). Conseguir esto último es una dificultad central de los sistemas multivariables que debe ser encarado en el diseño.

La idea que persigue el método del arreglo de Nyquist es hacer tanto el desacoplamiento como el diseño al mismo tiempo, utilizando ganancias f_i constantes en los lazos de realimentación, manteniendo la integridad del sistema, es decir manteniendo la estabilidad del sistema de control así varíen las ganancias desde los valores de diseño hasta cero inclusive, en otras palabras evitando que el sistema sea condicionalmente estable.

El desacoplamiento se hace mediante la transformación de un sistema diagonalmente no dominante a un sistema diagonalmente dominante (pseudo-desacoplado), entendiéndose por dominancia el desacoplamiento en frecuencia. En el capítulo siguiente se aclarará más respecto a este concepto. Como observación, en este punto, para que un sistema pueda ser desacoplado o bajar la dominancia al mínimo, es indispensable que el número de entradas sea igual al número de salidas.

Ahora bien supongase que la matriz $G(s)$ no es diagonal, por tanto existe la presencia de interacciones entre las salidas y las entradas en un proceso; así para un sistema con m - entradas y m - salidas existen $m(m-1)$ interacciones. Esto es precisamente lo que se quiere evitar, para esto se tiene que conseguir que la matriz Q sea diagonal, esto es:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & & & & 0 \\ & q_{22}(s) & & & \\ & & q_{33}(s) & & \\ & 0 & & \dots & \\ & & & & \dots & q_{mm}(s) \end{bmatrix}_{(m \times m)}$$

Pero todo tiene su costo, si se quiere tener Q diagonal el precompensador va a ser dinámico, en general, en otras palabras los elementos de la matriz Q van a ser polinomios función de la frecuencia compleja s y van a ser difíciles de implementar físicamente. Esto es la compensación es compleja.

Así para entender lo anterior se analiza el siguiente ejemplo:

Sea la planta descrita por la matriz función de transferencia $G(s)$ ($m \times m$) :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s + 1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s + 1} \end{bmatrix}$$

Se desea obtener un compensador serie $K(s)$ ($m \times m$) tal que las m entradas y m salidas estén desacopladas:

Si se considera el esquema de la fig. 1.5, con realimentación unitaria ($F=I$), la matriz de transferencia de lazo cerrado queda de la siguiente manera:

$$H(s) = [I + Q(s)]^{-1} * Q(s)$$

(Ec. 1.8)

Si se desea que no haya interacción la matriz $H(s)$ debe ser diagonal, esto es en general:

$$H(s) = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & & & \underline{0} \\ & h_{22}(s) & & \\ & & h_{33}(s) & \\ \underline{0} & & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & & h_{mm}(s) \end{bmatrix}_{(m \times m)}$$

Esta matriz $H(s)$ es conocida por especificaciones de diseño para desacoplamiento y además cada término de la diagonal de $H(s)$ debe satisfacer con las especificaciones de funcionamiento dadas por el diseñador, tales como estabilidad relativa, rapidez y precisión. Para el ejemplo que se está considerando se asume que la matriz $H(s)$ *deseada* deberá ser :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

Ahora corresponde calcular $K(s)$, se puede calcular de la siguiente forma:

De la ecuación 1.7 se tiene:

$$K(s) = G(s)^{-1} * Q(s) \quad (\text{Ec.1.9})$$

Falta definir $Q(s)$: De la ecuación 1.8 se puede establecer, multiplicando a ambos miembros por $[I+Q(s)]$ la siguiente expresión:

$$[I+Q(s)]H(s) = Q(s)$$

$$IH(s)+Q(s)H(s) = Q(s)$$

$$IH(s) = Q(s) - Q(s)H(s)$$

$$H(s) = Q(s)[I - H(s)]$$

luego se establece que:

$$Q(s) = H(s)[I - H]^{-1} \quad (\text{Ec.1.10})$$

Usando las ecuaciones 1.9 y 1.10, ya se puede realizar el desacoplamiento.

Se calcula primeramente la matriz Q(s):

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} & H & \end{matrix} & \begin{matrix} [I - H]^{-1} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s-1}{5s} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

reemplazando en la ecuación 1.9, se tiene :

$$K(s) = \begin{matrix} & G(s)^{-1} & & Q(s) \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{array} \right]^{-1} & & & \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Aquí cabe anotar que no siempre es conveniente el cálculo de $G(s)^{-1}$, pues a medida que se tenga un sistema con un alto orden habrá más complicaciones, ya que los elementos de dicha matriz son fracciones de polinomios.

$$K(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ \frac{(s+1)(2s+1)}{s} & \frac{s+1}{5s} \end{array} \right]$$

El resultado expresa que se tiene un compensador desacoplador dinámico pues k_{11} y k_{22} son controles que pueden ser interpretados como del tipo PI y k_{21} es un control del tipo PID. Pero también, es importante notar a más de la dificultad en la implementación del compensador y el problema de la inversión, que, por otro lado no se ha considerado en este análisis las perturbaciones externas. Esto es, se pueden perder algunos polos $G(s)$. Esto significa que aunque se ha conseguido desacoplar, si el sistema es perturbado por fuerzas externas, el sistema puede hacerse incontrolable debido a la respuesta producida por el polo cancelado que pudiera dar lugar a inestabilidad.

Se concluye por los inconvenientes anotados anteriormente que tener una matriz Q diagonal no siempre es lo más adecuado, por eso se prefiere que la matriz Q sea *casi diagonal*, o en otras palabras *pseudo-diagonal*, con esto se logra que las interacciones sean débiles y que por tanto puedan ser minimizadas de tal forma de poder aproximar el sistema multivariable a un sistema multilazo; y esto es precisamente la esencia de las técnicas del arreglo de Nyquist.

La pseudo-diagonalización tiene la ventaja que la matriz del precompensador sea sencilla, de ganancias constantes o dinámicas, de bajo orden (por lo tanto fácil de implementar físicamente), que cubra todo el rango de frecuencias. Por esto ahora ya no se habla de desacoplar el sistema, sino se habla de llegar a un sistema dominante, o pseudo-acoplado o casi desacoplado o de bajas interacciones

Es verdad que existen algoritmos de control muy buenos pero difíciles de llevar a la práctica, el mérito del Arreglo de Nyquist es el manejo de ganancias constantes, no dinámicas (función de s) ó en el peor de los casos, si el sistema es más complejo, el precompensador para pseudo-diagonalización, será dinámico pero de una estructura sencilla y sistemática.

El otro método sujeto de estudio en la presente tesis en el dominio de la frecuencia es el lugar característico que a breves rasgos y de la manera más fácil de definir consiste en utilizar los valores propios y vectores propios de una matriz función de transferencia,

para dibujar los diagramas de Nyquist de los valores propios (funciones complejas) de la matriz función de transferencia. Por ejemplo, para $G(s)$. se tiene de que si $g_i(s)$ y $\underline{w}_i(s)$ satisfacen la ecuación:

$$Q(s) \underline{w}_i(s) = g_i(s) \underline{w}_i(s) \quad (\text{Ec. 1.11})$$

entonces $g_i(s)$ y $\underline{w}_i(s)$ se denominan los valores propios y vectores propios de G , a la frecuencia s . Si se trazan los diagramas de Nyquist variando s sobre el contorno D de Nyquist, los lugares correspondientes son llamados los lugares característicos (LC) de $G(s)$. Los correspondientes vectores propios $\underline{w}_i(s)$ se llaman las direcciones características de $G(s)$, y en general, sus orientaciones variarán como s varíe.

El lugar característico provee una clara información acerca de los niveles de interacción en lazo cerrado. La más importante medida de interacción es el ángulo entre cada uno de los vectores propios de G y los vectores base estándar. Estos ángulos se denominan MA (en inglés Misalignment Angles) y son definidos por:

$$\cos(\Theta_i) = \frac{|\underline{w}_i|}{\|\underline{w}_i\|} \quad (\text{Ec 1.12})$$

donde:

$\|\underline{w}_i\|$ es la norma euclidiana del i -ésimo vector propio $\underline{w}_i(s)$ y

Θ_i denota el i -ésimo ángulo MA.

La segunda medida de interacción esta dada por las magnitudes de los lugares característicos de lazo abierto.

Así el método usual de presentar la información para el análisis de la interacción por la técnica del lugar característico (LC) es mostrar los gráficos de las magnitudes de lazo abierto de los lugares característicos y los ángulos de desalineamiento MA como funciones de la frecuencia, en una forma similar a los diagramas de Bode.

En el siguiente capítulo se estudiará en detalle los métodos de análisis y diseño en frecuencia ; esto es el arreglo directo e inverso de Nyquist; y, análisis con el lugar característico.

CITAS CAPITULO I:

- [1] Munro N., "Multivariable System Theory and Design. Ed. Pergamon Press,
London 1982 pag.20
- [2] Idem a [1], pag. 25
- [3] Idem a [1], pag. 237

CAPITULO II : METODOS EN FRECUENCIA

2.1 CRITERIO GENERALIZADO DE NYQUIST

2.2 METODO DEL ARREGLO INVERSO DE NYQUIST (INÁ)

2.3 METODO DEL ARREGLO DIRECTO DE NYQUIST (DNA)

2.4 METODO DEL LUGAR CARACTERISTICO (LC)

2.1 CRITERIO GENERALIZADO DE NYQUIST

Para los sistemas multivariables realimentados lineales e invariantes en el tiempo lo primero que se debe estudiar es la estabilidad . Se centrará el análisis con miras a encontrar condiciones de estabilidad en base a un procedimiento gráfico mediante los diagramas de Nyquist de las funciones de transferencia. Dichas condiciones se derivan del llamado criterio generalizado de Nyquist y proveen una base apropiada para el análisis posterior de las técnicas del arreglo de Nyquist y el lugar característico.

Para analizar el criterio generalizado de Nyquist previamente se hace referencia a la estabilidad de sistemas multivariables, a los conceptos de dominancia diagonal , círculos y bandas de Gershgorin. Antes de realizar el análisis a nivel multivariable. se hará una revisión breve de la estabilidad de sistemas univariables.

2.1.1 Estabilidad de sistemas univariables.

En los sistemas SISO (Single Input Single Output), la estabilidad se la puede determinar mediante el criterio de Nyquist, este se basa en un teorema de la teoría de la función de una variable compleja, debido a Cauchy. El teorema de Cauchy o también conocido comúnmente como *principio del argumento* está relacionado con la aplicación de contornos o proyección de trayectorias entre puntos del plano s al plano de la aplicación conforme que se llamará $F(S)$. Este teorema manifiesta lo siguiente:

" Si un contorno D en el plano s rodea Z ceros y P polos de la aplicación conforme $F(s)$ y no pasa a través de ningún polo o cero de $F(s)$ cuando el recorrido es en dirección del movimiento del reloj a lo largo del contorno D , el contorno correspondiente D_F (e.d. la evaluación de $F(s)$) en el plano $F(s)$ rodea al origen de dicho plano $N = Z - P$ veces en la misma dirección." [1]

El contorno escogido por Nyquist fue el de la figura 2.1, recalcando que no debe pasar a través de ningún polo o cero de $F(s)$ en el recorrido a lo largo del contorno D :

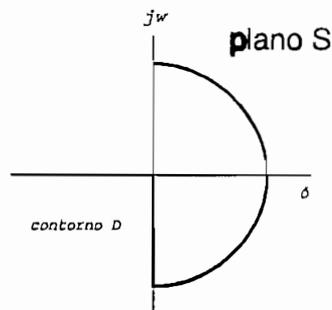


Figura 2.1 Contorno de Nyquist

Este lugar se llama la trayectoria o contorno de Nyquist que como se aprecia es una trayectoria cerrada en el plano s que rodea completamente el semiplano derecho del mismo, mediante una gran trayectoria circular de radio infinito. Se escoge esta trayectoria para averiguar si existen ceros de $F(s)$ en este semiplano derecho. Este procedimien-

to tiene el objetivo, según la teoría de control clásica, de garantizar la estabilidad de un sistema, pues $F(s)$ para sistemas de control es el polinomio característico del sistema. Si el sistema esta representado por el diagrama de la figura 2.2, y como la función de transferencia de lazo cerrado esta dada por:

$$Y(s)/R(s) = G(s) / [1 + GH(s)] \quad (\text{Ec.2.1})$$

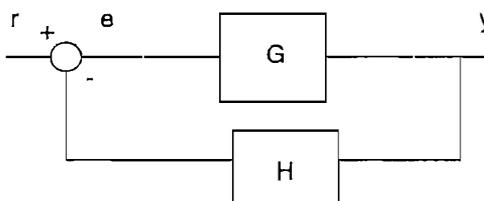


Figura 2.2 Sistema de control

Por tanto de esta expresión la ecuación característica del sistema es:

$$F(s) = 1 + GH(s) = 0 \quad (\text{Ec.2.2})$$

Entonces se debe verificar que todos los ceros del polinomio característico $F(s)$ caigan en la parte izquierda del plano s .

Nyquist basándose en esto último y en el principio del argumento postuló un criterio de estabilidad en el dominio de la frecuencia, el cual propone de igual forma la aplicación de la parte derecha del plano s , es decir el contorno D indicado anteriormente en el

plano s y proyectarlo en el plano $F(s)$; y, por el teorema de Cauchy determinar si algún cero de $F(s)$ cae dentro de D (ver figura 2.3).

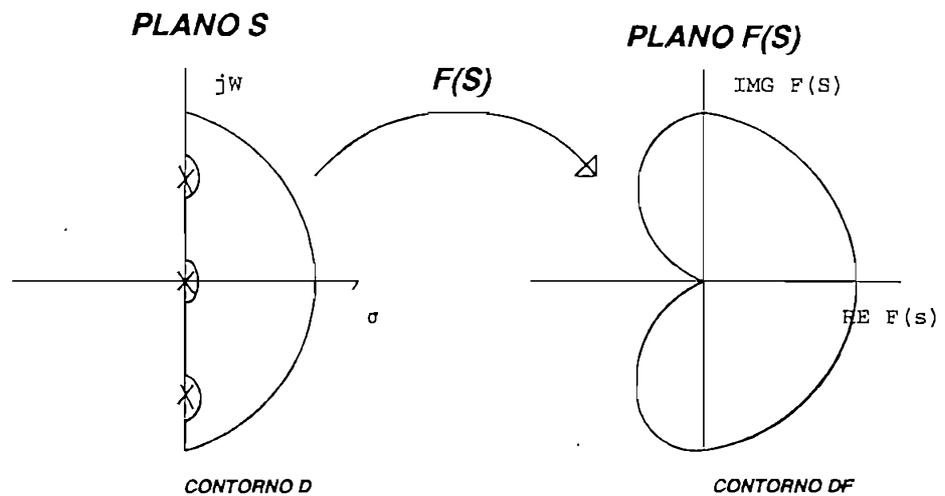


Figura 2.3
Teorema de Cauchy

Esto es graficar D_F en el plano $F(s)$ y determinar el número de rodeos N al origen; aunque si se considera que:

$$F(s) = 1 + GH(s) = 0$$

y entonces despejando $GH(s)$:

$$GH(s) = -1$$

Esto indica que el número de rodeos en el sentido horario al origen del plano $F(s)$ es idéntico a considerar el número de rodeos en el mismo sentido al punto -1 .

Por lo tanto el criterio de Nyquist queda de la siguiente forma:

" Un sistema de retroalimentación es estable si y solamente si la proyección del contorno D en el plano de lazo abierto $GH(s)$ no rodea al punto $(-1, 0)$ cuando el número de polos de $GH(s)$ en la parte derecha del plano s es cero."

Cuando el número de polos de $GH(s)$ en la parte derecha del plano s es diferente de cero, el criterio queda de la siguiente forma:

" Un sistema de control con realimentación es estable si y solamente si , para el contorno $GH(s)$, el número de rodeos del punto $(-1, 0)$ en el sentido contrario al movimiento del reloj, es igual al número de polos de la función de transferencia de lazo abierto con partes reales positivas." [2]

Para una mejor comprensión y por ende evitar confusiones se va a requerir una notación sistemática.

Considerando el sistema de la figura 2.2 y asumiendo que la función de transferencia de lazo abierto tiene la forma:

$$GH = N / D$$

Siendo : N el polinomio numerador de lazo abierto, y;

D el polinomio denominador de lazo abierto

entonces, la ecuación característica será de la siguiente manera:

$$1 + GH = 1 + N/D = [N + D] / D$$

Con las ecuaciones anteriores, se considera la siguiente notación que se encuentra a continuación:

NOTACION

- C_+ : semiplano derecho del plano s
- n_0 : polos de lazo abierto contenidos en $C_+ \Rightarrow P_0$. Se pueden obtener de la ecuación $D = 0$.
- n_c : polos de lazo cerrado contenidos en $C_+ \Rightarrow P_c$. Se pueden obtener de la ecuación $N + D = 0$.
- n_z : ceros de lazo cerrado o abierto (pues son los mismos para ambos casos) contenidos en $C_+ \Rightarrow Z$. Se puede obtener de la ecuación $N = 0$
- N : Número de vueltas al origen por la trayectoria de una función de transferencia cualquiera cuando s toma los valores del contorno de Nyquist D .
- N' : Número de vueltas a un punto crítico por la trayectoria de una función de transferencia cuando s toma los valores del contorno de Nyquist D .

- g : abreviación para la función de transferencia de lazo abierto GH.
- $N(g)$: Número de vueltas al origen por la trayectoria del lugar de GH de una función de transferencia de lazo cerrado cuando s toma los valores del contorno D .
- $N'(g_{ii})$: Número de vueltas a un punto crítico por ejemplo $(-1,0)$, por el elemento ii de una matriz función de transferencia $G(s)$.

Con esta notación, el *Criterio clásico de estabilidad de Nyquist* puede ser expresado concisamente, en tres formas. Para sistemas con la función de transferencia de lazo directo $G(s)$, se tiene:

$$N'(g) = n_c - n_o \quad (\text{Ec.2.3})$$

$$N'(1/g) = n_c - n_z \quad (\text{Ec.2.4})$$

$$N'(1/g) - N(1/g) = n_c - n_o \quad (\text{Ec.2.5})$$

La ecuación 2.3 se justifica pues el polinomio característico de la función de transferencia de lazo abierto GH (e.d. g según la nueva notación), $1 + GH$ da un polinomio de la forma $(D+N) / D$ de aquí se establece que si existen n_c polos de lazo cerrado y n_o polos de lazo abierto encerrado en el semiplano derecho, y como $N = Z - P$ se tiene $N = n_c - n_o$ y como se considera el punto crítico aparece la forma $N'(g)$.

La ecuación 2.4 se justifica la siguiente forma:

Si se trabaja con el diagrama inverso de Nyquist para la función de transferencia de lazo abierto de GH se tiene: $1/GH = D/N$, y se considerará el punto crítico -1 , se necesita trabajar con la siguiente expresión: $1 + (1/GH) = 1 + D/N = (N+D)/N$, entonces se tiene que el término $N+D$ da n_c y el término N da n_z ,

$$1 + (1/GH) \text{ da lugar a } 1 + D/N = (N+D)/N \text{ entonces } n_c/n_z$$

Utilizando el teorema de Cauchy, es decir, el número de vueltas de $1/GH(s)$ a un punto crítico es igual al número de ceros menos el número de polos, $N=Z-P$, y usando la notación, N' de $1/g$ al punto crítico en el sentido horario se tiene $N'(1/g)$ y se llega a la ecuación 2.4.

Por último la ecuación 2.5, resulta de:

$N(1/g)$ da lugar a $1/GH = D/N$ esto es n_o/n_z por tanto: $N(1/g) = n_o - n_z$, luego si esta última expresión se resta de la ecuación 2.4, se llega a la expresión 2.5.

Como observación, para un sistema de lazo abierto estable (e.d $n_o=0$) de la ecuación 2.3 el sistema en lazo cerrado será estable si no encierra el lugar GH el punto crítico, conclusión que se había llegado anteriormente, pero ahora se ve de una manera más simple.

2.1.2 Criterio generalizado de estabilidad de sistemas multivariables

2.1.2.1 Ideas Preliminares

Ahora se necesita generalizar los criterios del numeral anterior pues en sistemas multivariables se trabajará con matrices. Se pretenderá encontrar algún criterio de estabilidad que involucre los determinantes de matrices racionales. Para esto se considera el sistema de la figura 1.5, entonces los polos del sistema estarán dados por:

$$\det [I + Q(s)F] = 0:$$

como la matriz función de transferencia de lazo cerrado está dada por:

$$H(s) = [I + Q(s)F]^{-1}Q(s) \quad (\text{Ec. 2.6})$$

pero cuando $F=I$ (por simplicidad), entonces $H(s) = [I + Q(s)]^{-1}Q(s)$, de la ecuación (2.6) por tanto se tiene:

$$\det [H(s)] = \det [Q(s)] / \det [I + Q(s)]$$

luego $\det [I + Q(s)] = \det [Q(s)] / \det[H(s)]$

Por otro lado se tiene que: $\det [I + Q] = \Theta_c(s)/\Theta_o(s)$

donde: $\Theta_c(s)$ es el polinomio característico de lazo cerrado y,

$\Theta_o(s)$ es el polinomio característico de lazo abierto

por consiguiente: $\det [Q(s)] / \det [H(s)] = \Theta_c(s)/\Theta_o(s)$ (Ec.2.7)

ya que : $\det Q(s) = \Theta_z(s)/\Theta_o(s)$; $\det H(s) = \Theta_z(s)/\Theta_c(s)$

Para $\det[Q(s)]$ se proyecta el contorno de estabilidad de Nyquist D en el contorno D_Q , mientras que para $\det[H(s)]$ se proyecta en D_H , luego de esto se observa si D_Q encierra el origen $N(Q)$ veces en el sentido horario; lo mismo con D_H ($N(H)$). Entonces , si el polinomio característico de lazo abierto tiene n_o ceros (polos de lazo abierto) en el semiplano derecho, el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable si y solamente si:

$$N(H) - N(Q) = n_o - n_c \quad (\text{Ec.2.8})$$

Esto se deduce al manipular el criterio de Nyquist univariable, ya que de la teoría univariable:

$$N(H) = n_z - n_c$$

$$N(Q) = n_z - n_o$$

luego: $N(H)-N(Q) = n_o - n_c$; $n_c = 0$ para estabilidad

Se ha encontrado un criterio de estabilidad que involucra los determinantes de las matrices racionales, basado en el criterio de Nyquist univariable. Pero esos determinantes son complicados y funciones inconvenientes de los parámetros, es decir, de las ganancias de lazo f_i , las cuales sirven para ajuste en el método de diseño.

Por esta complicación, se busca condiciones bajo las cuales se pueda relacionar la estabilidad por el comportamiento de los diagramas de Nyquist de los elementos individuales de la matriz función de transferencia, en particular de los elementos de la diagonal, de modo que se pueda tratar al sistema hasta donde sea posible, como un conjunto de sistemas de lazos simples independientes.

Para conseguir este objetivo se necesita definir e interpretar ciertos términos tales como: dominancia diagonal, los círculos y bandas de Gershgorin. Esto se trata a continuación.

2.1.2.2 Dominancia diagonal

En esta parte conviene definir el concepto de dominancia diagonal:

" Una matriz racional Q ($m \times n$) (figura 2.4) es diagonalmente dominante (**d.d.**) si para cada $i=1,2,\dots,n$ y para cada j en ese rango excepto en j diferente de i , se tiene:

$$| q_{ii}(s) | > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n | q_{ij}(s) | \quad d.d. \text{ por filas}$$

(Ec.2.10)

$$| q_{ii}(s) | > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n | q_{ji}(s) | \quad d.d. \text{ por columnas}$$

(Ec.2.11)

$$| q_{ii}(s) | > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(| q_{ij}(s) | + | q_{ji}(s) |)}{2} \quad d.d. \text{ media}$$

(Ec.2.12)

La dominancia de una matriz racional puede ser determinada por una construcción gráfica simple. Esto se lo hace mediante los círculos de Gershgorin.

2.1.2.3 Círculos de Gershgorin

Se supone Q una matriz racional de orden mxm de la siguiente forma:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & q_{12}(s) & \dots & q_{1m}(s) \\ q_{21}(s) & q_{22}(s) & \dots & q_{2m}(s) \\ \dots & \dots & q_{33}(s) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1}(s) & q_{m2}(s) & \dots & q_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (mxm)$$

Matriz Q racional

Para cada elemento de la diagonal $q_{ii}(s)$ $i = 1, 2, \dots, m$ se proyecta el contorno de Nyquist D del plano s al contorno al contorno c_{ii} en el plano $q(s)$. Para cada $s=jw$, dibujamos un círculo de radio:

$$d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |q_{ij}(s)|$$

Centrado apropiadamente en $q_{ii}(s)$, $s=jw$ (elemento de la diagonal evaluado a la frecuencia real w). Esto se aprecia en el gráfico de la figura 2.4:

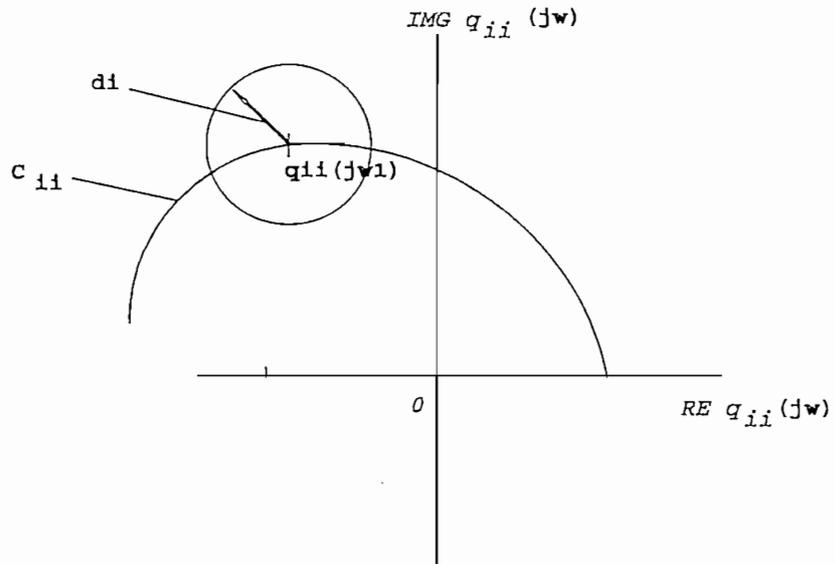


Figura 2.4
círculos de Gershgorin

2.1.2.4 Teorema de Gershgorin

Si $Q(s)$ es una matriz cuadrada de orden m en el campo de los números complejos, sus valores propios caen , en el plano complejo, dentro de la familia de m círculos (denominados círculos de Gershgorin) teniendo sus centros en $q_{ii}(s)$ con radio d_i : [1]

$$d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |q_{ij}(s)|$$

(Ec.2.13)

o también:

$$d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |q_{ji}(s)|$$

(Ec.2.14)

2.1.2.5 Bandas de Gershgorin

Si $Q(s)$ esta en el campo de las funciones racionales reales de s y s describe algún contorno simple D en el plano complejo, entonces en general el centro de un círculo de Gershgorin ($q_{ii}(s)$) y sus radios definidos en las expresiones anteriores variará con s .

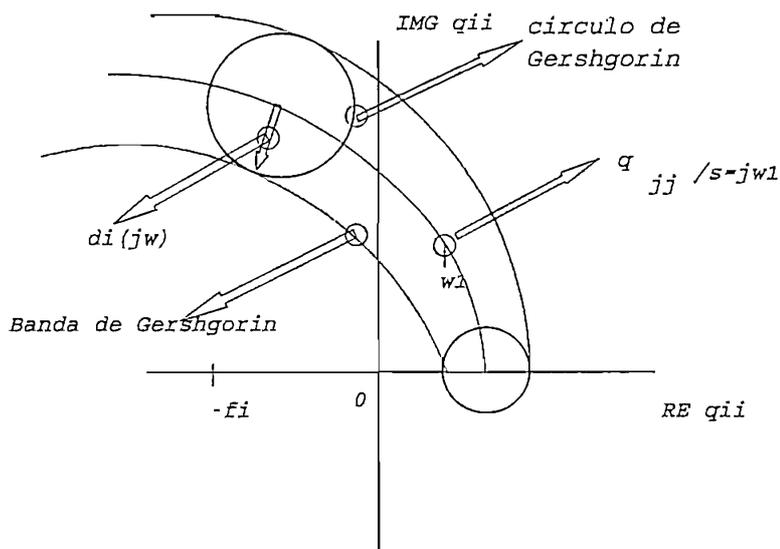


Figura 2.5
Bandas de Gershgorin

Mientras describe una vez el contorno D , la reunión de puntos sobre el plano complejo dentro de posiciones sucesivas de un círculo de Gershgorin particular mientras varia s se denomina *Banda de Gershgorin* [2]. El ancho de las bandas refleja la cantidad de interacción presente en el sistema (figura 2.5), en la página anterior.

2.1.3 Relaciones Inversas

La expresión que relaciona la matriz función de transferencia de lazo cerrado con la de lazo abierto de un sistema, esto es $H(s) = [I + Q(S)F]^{-1}Q(S)$ no es simple. Sin embargo si $Q^{-1}(s)$ existe, se tiene:

$$\{H(s)\}^{-1} = \{ [I + Q(S)F]^{-1}Q(S) \}^{-1}$$
$$H^{-1} = Q^{-1} [I + QF]$$

Entonces:

$$H^{-1} = Q^{-1} + F \quad (\text{Ec.2.15})$$

Esta expresión que igualmente relaciona $Q(s)$ con $H(s)$ es una forma más simple de relación.

Para facilitar la nomenclatura y no tener confusiones futuras, cualquier matriz o elemento genérico A^{-1} será representada como \hat{A} , así la ecuación 2.15, puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\hat{H} = \hat{Q} + F \quad (\text{Ec.2.16})$$

Esta ecuación es considerablemente más fácil de tratar. Entonces, $\hat{h}_{ii}(s)$ son los elementos de la diagonal de $H^{-1}(s)$. En general, $\hat{h}_{ii}(s)$ es diferente de $h_{ii}^{-1}(s)$, siendo $h_{ii}^{-1}(s)$ el inverso del elemento de la diagonal $h_{ii}(s)$ de $H(s)$

Teniendo en mira estas convenciones todo los tópicos vistos anteriormente se pueden validar en términos de las matrices inversas correspondientes.

2.1.4 Teoremas de estabilidad de sistemas multivariables

Anteriormente se encontró un criterio de estabilidad que involucra los determinantes de las matrices racionales, basado en el criterio de Nyquist univariable, pero esos determinantes son complicados y por tanto difíciles de tratar; por esta razón, surge la necesidad de teoremas más simples, consecuencia de los conceptos de dominancia, que tengan una interpretación gráfica para el análisis de estabilidad absoluta y si es posible de estabilidad relativa.

2.1.4.1 Teorema I

" Sea la matriz $Q(s)$ diagonalmente dominante sobre el contorno D y no existen polos de q_{ii} sobre D , $i = 1, 2, \dots, m$ cuando s describe en el sentido horario el contorno D . Supongase que la imagen o proyección de D , del $\det[Q(s)]$ encierra el origen N ($N(q)$) veces, y supongase que la imagen de D bajo $q_{ii}(s)$ encierra N_i

$(N(q_{ii}))$ veces el origen en el sentido horario. Entonces, Rosenbrock demostró que:"[3]

$$N(q) = \sum_{i=1}^m N(q_{ii}) \quad (\text{Ec.2.17})$$

El mismo resultado se obtiene para el tratamiento con los inversos, donde esta última expresión se escribe como:

$$N(1/q) = \sum_{i=1}^m N(1/q_{ii})$$

que se puede escribir también así:

$$N(\hat{q}) = \sum_{i=1}^m N(\hat{q}_{ii}) \quad (\text{Ec.2.18})$$

El resultado determina que la dominancia permite el mismo resultado con una condición menos restrictiva. Este teorema además a la vez permite generar diferentes teoremas de estabilidad, dependiendo de qué matrices se asuman dominantes. En cada caso el contorno D incluye todos los polos y ceros finitos que caen en el semiplano C_+ , del determinante de cada matriz dominante que es analizada y también no se tiene sobre este contorno ningún polo de cualquier elemento sobre la diagonal principal de tal matriz.

2.1.4.2 Teorema II .- Criterio Generalizado de Estabilidad de Nyquist

" Sea $\hat{Q}(s)$ y $\hat{H}(s)$ diagonalmente dominantes (DD), además sea $q_{ii}(s)$ el elemento i -ésimo de \hat{Q} cuya imagen bajo $\hat{q}_{ii}(s)$ encierra $N(\hat{q}_{ii})$ veces el origen y $N'(\hat{q}_{ii})$ veces alrededor de los puntos críticos $(-f_i, 0) i=1,2,\dots,m$. Por otra parte se supone que el sistema de lazo abierto tiene n_o polos en C_+ y que el sistema de lazo cerrado tiene n_c polos en C_+ . Entonces el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable si y solamente si:

$$\sum_{i=1}^m N'(\hat{q}_{ii}) - \sum_{i=1}^m N(\hat{q}_{ii}) = n_c - n_o$$

[4] (Ec.2.19)

Esta última expresión representa *el criterio de estabilidad de Nyquist generalizado* y este como se ve proviene del manipuleo de las ecuaciones 2.5 y 2.18. Esta generalización permite extender el criterio univariable simplemente reemplazando el lugar de Nyquist por las bandas de Gershgorin.

2.1.4.3 Interpretación gráfica del teorema II

Este teorema del criterio generalizado de Nyquist conduce a un resultado gráfico simple: Se dibuja el diagrama usual de Nyquist de los elementos $\hat{q}_{ii}(s)$, y para un conjunto seleccionado de valores de s sobre D se superpone los círculos de Gershgorin. Esos círculos barren una banda de Gershgorin. Si esta banda *NO INCLUYE EL ORIGEN O LOS PUNTOS CRITICOS* $(-f_i, 0)$ y si es verdad para $i=1,2,\dots,m$. Entonces $\hat{Q}(s)$ y $\hat{H}(s)$ son diagonalmente dominantes (*DD*) sobre D .

Si $\hat{Q}(s)$ es *DD* sobre el contorno D , entonces $N(\hat{q}_{ii})$ es el número de veces que la banda de Gershgorin encierra el origen, mientras que $N'(\hat{q}_{ii})$ es el número de veces que encierra los puntos críticos $(-f_i, 0)$

En otras palabras si el origen o el punto crítico $(-f_i, 0)$, esta encerrado por la banda de Gershgorin, no existe dominancia. Existe dominancia si se cumple la ecuación 2.19, está da una condición necesaria y suficiente para estabilidad asintótica, en términos de encirculamientos de las bandas de Gershgorin. Para entender esto último se considera dos sistemas imaginarios de segundo orden, el primero no dominante (sus bandas de Gershgorin rodean el origen y/o el punto f_i) y el segundo dominante (sus bandas de Gershgorin no rodean el origen y/o el punto f_i) .

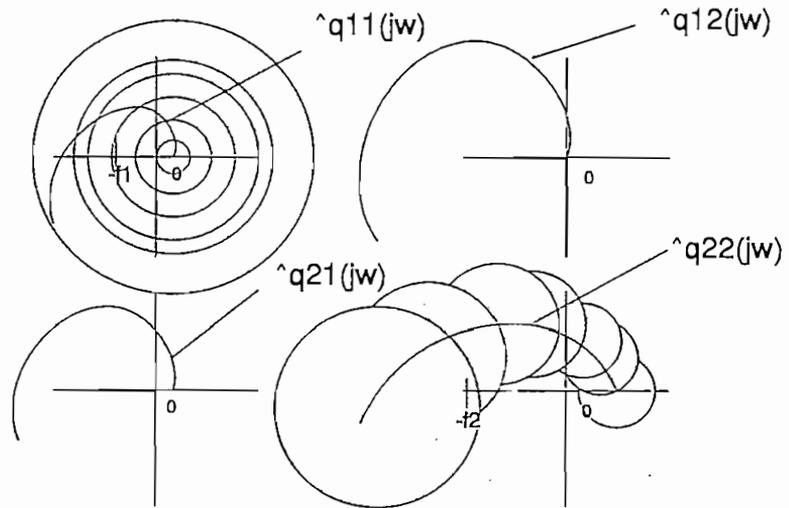


Figura 2.6 Interpretación Gráfica para sistemas de 2do orden no dominante

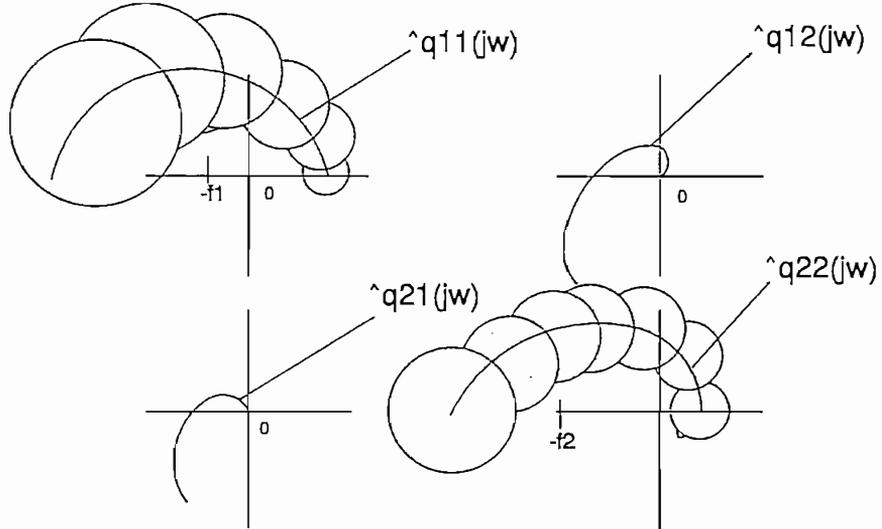


Figura 2.7 Interpretación Gráfica para sistemas de 2do orden dominante

2.1.4.4 Teorema III

Algunas veces es más conveniente poder hacer \hat{H} dominante pero no \hat{Q} . En ese caso toca usar el teorema siguiente que es una obvia consecuencia del teorema II.

" Sea \hat{H} DD sobre D , si la proyección de D para $\det\{\hat{Q}\}$ encierra el origen \hat{N}_Q veces, el sistema es asintóticamente estable si :

$$N'(\hat{q}) - \sum_{i=1}^m N(\hat{q}_{ii}) = n_c - n_o$$

[5](Ec.2.20)

2.2 METODO DEL ARREGLO INVERSO DE NYQUIST

2.2.1 Ideas preliminares

La investigación gráfica de la dominancia de los sistemas usando el teorema de Gershgorin se completa por el teorema debido a Ostrowski, pero previamente se necesita del siguiente análisis relativo a los efectos de cambio de la ganancia de cada lazo de realimentación:

Inicialmente considerese el sistema de la figura 2.8 :

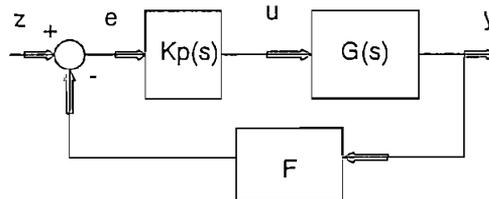


Figura 2.8 Sistema de Control Multivariable

donde $G(s)$ es de dimensión $m \times m$, $K(s)$ $m \times m$ y $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ representa las ganancias de los lazos de realimentación.

Para entender lo que se pretende explicar se va a considerar la figura 2.8 con un ejemplo de un sistema MIMO 2x2 en detalle de la siguiente manera:

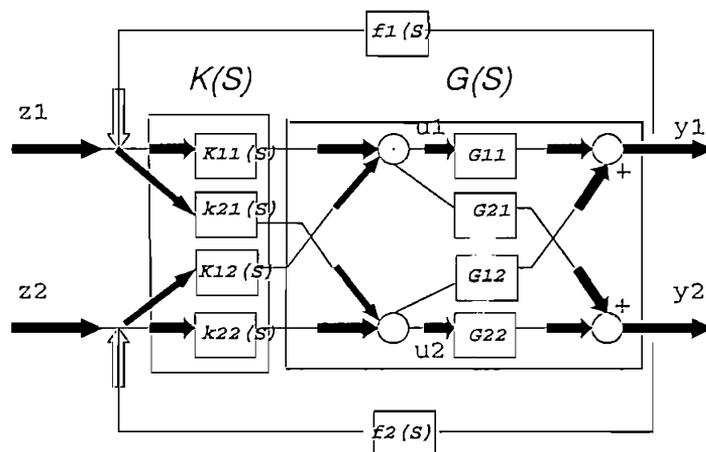


Figura 2.9 Sistema MIMO 2x2

La figura 2.9 se puede simplificar como un gran sistema $H(s)$, donde las salidas se interrelacionan con las entradas de la siguiente manera:

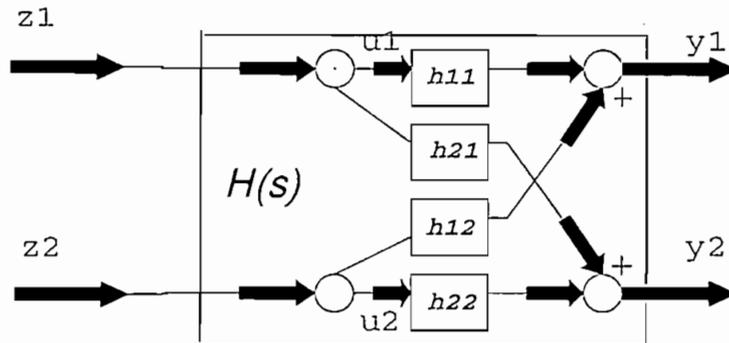


Figura2.10 Sistema MIMO simplificado 2x2

Para el sistema de la figura 2.10, se desea determinar y_1/z_1 y y_2/z_2 , o en forma general y_i/z_i , para hacer esto se requiere que las entradas $z_{i \neq j}$ sean igual a cero. En el ejemplo si se quiere y_1/z_1 se tendrá que anular z_2 .

Para el ejemplo que se analiza se va a tener que, para el sistema en lazo cerrado, se tendrá el esquema de la figura 2.11 si el sistema ha de desacoplarse:

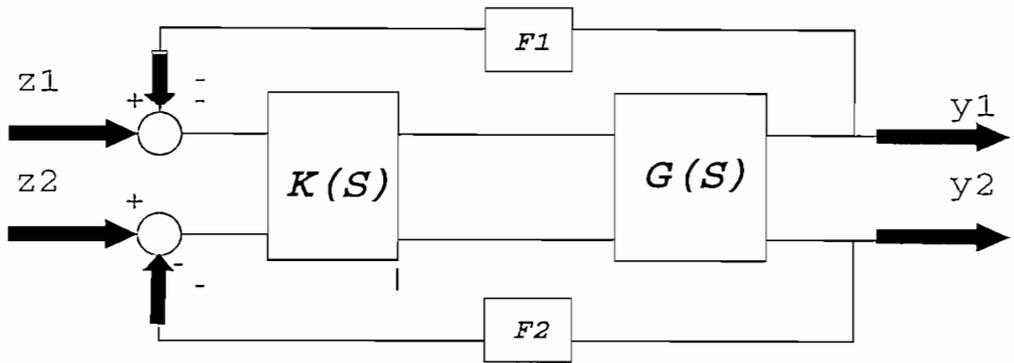


Figura 2.11 Sistema 2x2 en lazo cerrado desacoplado

La matriz función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

(Ec.2.21)

Con $z_2=0$ se halla z_1/y_1 de la matriz anterior, de la siguiente manera:

puesto que : $y_1/z_1 = h_{11}$

(Ec.2.22)

por tanto:

$$\frac{z_1}{y_1} = h_{11}^{-1}$$

(Ec.2.23)

Ahora, si se supone que $f_1 = 0$ y además se supone $z_2 = 0$, el sistema queda de la forma de la figura 2.12:

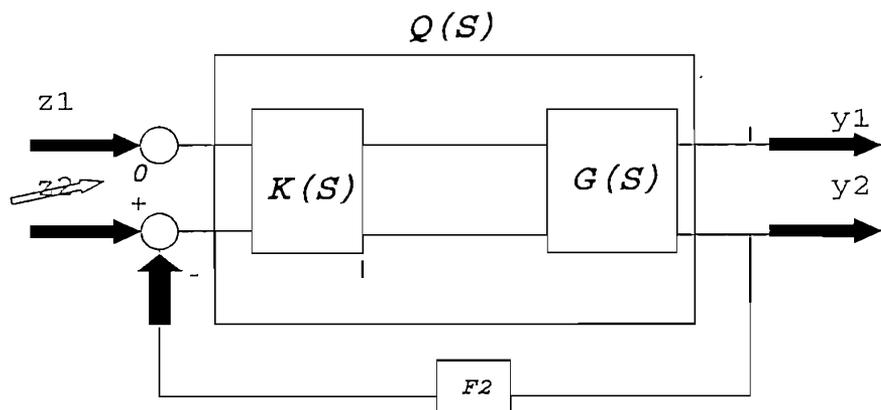


Figura 2.12 Sistema 2x2 con $f_1=0$

Entonces la matriz función de transferencia queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Big|_{f_1 = 0, z_2 = 0} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, bajo estas condiciones:

$$\frac{z_1}{y_1|_{f_1=0}} = h_{11}^{-1}$$

(Ec.2.24)

Puesto que el sistema ha de desacoplarse, ahora si se trabaja con $\hat{H} = \hat{Q} + F$, es decir:

$$\hat{H}(s) = \begin{pmatrix} \hat{q}_{11} + f_1 & \hat{q}_{12} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{pmatrix}$$

La matriz \hat{H} cambiará a la forma:

$$\hat{H}(s) \Big|_{f_1=0} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{11} & \hat{q}_{12} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_1 & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_2 \end{pmatrix}$$

Bajo estas condiciones se establece que :

$$\frac{z_1}{y_1} = \hat{h}_1 = \hat{q}_{11}$$

(Ec.2.25)

Es decir que a partir de solamente la función de transferencia de lazo abierto, eso sí bajo las condiciones de que $f_1 = 0$, y $z_2 = 0$ se establece la función de transferencia de la salida y_1 a la entrada z_1 :

$$\frac{y_1}{z_1} = h_1 = \frac{1}{\hat{q}_{11}}$$

(Ec.2.26)

Se puede obtener este resultado desde otro punto de vista, se puede considerar que $f_2 \rightarrow \infty$, esto es equivalente a decir que $f_1 \rightarrow 0$, o que es despreciable en relación a f_2 ; de ahí que la última expresión considerada arriba (Ec. 2.26) se transforma en:

$$\frac{y_1}{z_1} = h_1 = \frac{1}{\hat{q}_{11}}$$

(Ec.2.27)

Es decir que existe tendencia de la función de transferencia y_1/z_1 a $1/\hat{q}_{11}$, todo esto bajo la suposición de que el lazo 1 está abierto.

En general:

$$\frac{y_i}{z_i} = h_i = \left[\left(\hat{H}(s) \Big|_{f_i=0} \right)^{-1} \right]_{ii}$$

representa la función de transferencia de y_1 a z_1 , con el i-ésimo lazo abierto.

Ahora se verá a que es igual h_1 , mediante el análisis para del ejemplo de la figura 2.9:

Inicialmente se invierte \hat{H} , el resultado de tal operación es la matriz H , pues $\hat{H}^{-1} = H^{-1}$, entonces $[\hat{H}]^{-1} = H$.

$$[\hat{H}(s) \mid_{f_{1..0}}]^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \hat{Q}_{22} + f_2 & -\hat{Q}_{12} \\ -\hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{11} \end{pmatrix}}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]}$$

$$[\hat{H}(s) \mid_{f_{1..0}}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{Q}_{22} + f_2}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]} & \frac{-\hat{Q}_{12}}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]} \\ \frac{-\hat{Q}_{21}}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]} & \frac{\hat{Q}_{11}}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]} \end{pmatrix}$$

Esto último debido a la definición de inversa usando los adjuntos. Luego se aprecia que :

$$h_1 = [(\hat{H}(s) \mid_{f_{1..0}})^{-1}]_{11} = \frac{\hat{Q}_{22} + f_2}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]} = \frac{\det [\hat{H}^{11} \mid_{f_{1..0}}]}{\det [\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]}$$

Donde el término del numerador es el determinante eliminando la fila 1 y la columna 1 de la matriz $[\hat{H} \mid_{f_{1..0}}]$.

Por inferencia se puede generalizar este resultado si se asume $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ y si $f_i=0$ representa la abertura del i -ésimo lazo de realimentación y la matriz inversa H con el i -ésimo lazo abierto de la siguiente forma:

$$\hat{H}(s) /_{f_i=0} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{11}(s) + f_1 & \hat{q}_{12}(s) & \dots & \hat{q}_{1m}(s) \\ \hat{q}_{21}(s) & \hat{q}_{22}(s) + f_2 & \dots & \hat{q}_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \hat{q}_{i1} + (f_i=0) & \dots & \hat{q}_{im}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{q}_{m1}(s) & \dots & \dots & \dots & \hat{q}_{mm}(s) + f_m \end{bmatrix}$$

Por otro lado si se supone que z es el vector $(m \times 1)$ de señales de entrada a $H(s)$, entonces la función de transferencia entre z_i y y_i con el i -ésimo lazo abierto (elemento de la diagonal de la matriz $H(s)$ con la realimentación $f_i=0$) es :

$$\frac{y_i}{z_i} = h_i = [(\hat{H}(s) |_{f_i=0})^{-1}]_{ii} = \frac{\det[\hat{H}(s) |_{f_i=0}^{ii}]}{\det[\hat{H}(s) |_{f_i=0}]}$$

(Ec.2.28)

donde:

$$\left[\hat{H}(s) \mid_{f_i=0}^{ii} \right] \quad \text{Es justamente } \hat{H}(s) /_{f_i=0}, \text{ pero con la } i\text{-ésima fila y la } i\text{-ésima columna removida.}$$

Todo lo anterior se deduce del algebra lineal.

Para un mejor entendimiento se considera el siguiente ejemplo, para una matriz $\hat{H}(s)$ 3x3, la función de transferencia y_i/z_i con el primer lazo abierto ($f_1=0$); es:

$$h_1(s) = \frac{\det \begin{pmatrix} \hat{Q}_{22} + f_2 & \hat{Q}_{23} \\ \hat{Q}_{32} & \hat{Q}_{33} + f_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{13} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} + f_2 & \hat{Q}_{23} \\ \hat{Q}_{31} & \hat{Q}_{32} & \hat{Q}_{33} + f_3 \end{pmatrix}}$$

Una vez determinado el elemento h_i se pretende con solo la información de lazo abierto aproximar a lazo cerrado y ver que tan buena es esa aproximación, si se escoge inicialmente $y_i/z_i = 1/\hat{q}_{11}$ recordándose que $f_1 = 0$.

Aquí cabe la siguiente observación, se puede tener el mismo resultado pero ya no suponiendo $f_i=0$, si no que este valor sea cualquiera pero que los demás f_j $(j \neq i)$ tiendan a infinito. Ahora si se hace esta última suposición con cada $f_j \rightarrow \infty$ ($j \neq i$) entonces, expandiendo para la i -ésima fila, se obtiene:

$$\det [(\hat{H}(s) |_{f_i=0})] = \hat{q}_{ii} \cdot \det [\hat{H}(s) |_{f_i=0}]$$

(Ec.2.29)

Esto debido a que los $f_j \rightarrow \infty$, hace que los demás valores de la fila no se consideren por ser insignificantes en comparación a los elementos de la diagonal. Reemplazando (2.29) en (2.28) se establece que:

$$\frac{y_i}{z_i} = h_i - \frac{1}{\hat{q}_{ii}(s)}$$

(Ec.2.30)

Es decir, en otras palabras y_i/z_i tiende a $\rightarrow 1/\hat{q}_{ii}$ y ya no es una igualdad, esto bajo la suposición de que los f_j tiendan a infinito y f_i con un valor finito.

Este resultado tiene la siguiente interpretación:

Si las ganancias de todos los lazos excepto el i -ésimo lazo son altos (control ajustado o desacoplado) y el i -ésimo lazo es abierto, entonces $\hat{q}_{ii}(s)$ (el cual contiene solamente la información de lazo abierto) es la función de transferencia inversa entre z_i y y_i . El i -ésimo lazo dinámico (que es el elemento (i,i) de la matriz $K(s)$) puede ser entonces diseñado *independientemente* de los otros lazos y la inspección (dominancia) de $\hat{q}_{ii}(s)$ para el diseño final dará una buena indicación del comportamiento de ese lazo. El manifestar que $y_i/z_i \rightarrow 1/\hat{q}_{ii}$, denota " *que se puede hacer el diseño del precompensador elemento por elemento, independientemente sin incluir la realimentación y luego por superposición se forma la matriz $K(s)$* " (Pues se tiene un sistema dominante) [6]

Ahora se va a introducir los valores f_i en el diseño, pues hasta este instante se ha supuesto $f_{i=0}$ ó aproximadamente despreciable cuando los $f_j \rightarrow \infty$ para los demás lazos $i \neq j$. Esto se lo hace pues en la práctica las ganancias no pueden ser arbitrariamente altas y con frecuencia más bien son un poco bajas (condición real, pues la dominancia se consigue con la matriz K como precompensador). Así, es importante tener una medida del error incurrido al usar \hat{q}_{ii} como una aproximación de $1/h_i(s)$. Esta medida se obtiene al dibujar las bandas de Ostrowski, basadas en el siguiente teorema:

" Sea la matriz racional $[A(s)]_{k \times k}$ la cual es diagonalmente dominante por filas o por columnas a la frecuencia $s = s_o$ sobre el contorno de Nyquist D . Entonces $A(s_o)$ tiene una inversa $\hat{A}(s_o)$ y para $i = 1, 2, \dots, k$ se cumple:[7]

$$| (\hat{a}_{ii}^{-1}(s_o) - a_{ii}(s_o)) | < \phi(s_o) d_i(s_o) < d_i(s_o) \tag{Ec.2.31}$$

donde:

$$\phi(s_o) = \max_{j \neq i} \frac{d_j(s_o)}{|a_{jj}(s_o)|} \tag{Ec.2.32}$$

siendo $d_i(j)$ el i -ésimo (j -ésimo) radio de Gershgorin definido por la ecuación 2.13. Esta última expresión se la puede escribir usando la notación de control de la siguiente forma:

$$\left| \hat{h}_{ii}(s) - \frac{1}{h_{ii}(s)} \right| \leq \phi_i(s) d_i(s)$$

(Ec.2.33)

con:

$$\phi_i = \max_{j \neq i} \frac{d_j}{|h_{jj}|}$$

(Ec.2.34)

Que se obtiene sustituyendo \hat{h}_{ii} por a_{ii} en ec. 2.32., si se asume que cada banda de Gershgorin excluye al punto crítico $(-f, 0)$ para cada j en el contorno D los elementos de la diagonal h_{ii} de $H[Q, F]$ satisfacen :

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{Q}} + \mathbf{F}$$

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1}_{ii} = \mathbf{h}^{-1}_{ii} = 1/h_{ii}$$

$$\mathbf{a}_{ii} = \hat{\mathbf{h}}_{ii} = \mathbf{f}_i + \hat{\mathbf{g}}_{ii}$$

Entonces: $\left| \mathbf{h}^{-1}_{ii}(s) - (\mathbf{f}_i + \hat{\mathbf{g}}_{ii}(s)) \right| < \phi_i d_i(s) < d_i(s)$

Para entender lo que se tiene desarrollado hasta este momento se hace una revisión de caracter general de un sistema MIMO de orden $(n \times n)$ y luego se aplica al sistema 2×2 de la figura 2.9.

CONDICIONES IDEALES: $f_i=0$

$$\frac{y_i}{z_i} \approx h_{ii} \quad | \quad f_i = 0 = h_i = \frac{1}{\hat{q}_{ii}(s)}$$

(Ec.2.35)

CONDICIONES MENOS IDEALES $f_i \neq 0$ pero $f_j \rightarrow \infty$ para $i \neq j$.

$$\frac{y_i}{z_i} \approx h_{ii} \quad | \quad \begin{matrix} f_i = 0 \\ f_{i \neq j} \rightarrow \infty \end{matrix} = h_i = \frac{1}{\hat{q}_{ii}(s)}$$

(Ec.2.36)

CONDICIONES REALES $f_i \neq 0$ pero f_j para $i \neq j$. no muy grande

$$\frac{y_i}{z_i} \approx h_{ii} \quad | \quad \begin{matrix} f_i \neq 0 \\ f_{i \neq j} \end{matrix} = \frac{1}{\hat{q}_{ii}(s) + f_i}$$

(Ec.2.37)

Por definición la matriz \hat{H} de orden 2 es:

$$\hat{H}(s) = \begin{pmatrix} \hat{q}_{11} + f_1 & \hat{q}_{12} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\hat{h}_{ii}^{-1} = \frac{1}{\hat{q}_{ii}(s) + f_i}$$

(Ec.2.38)

Para esto último vale la aclaración que se presupone el sistema ya dominante y por esta razón se establece que $\Phi_i(s) < 1$ debido a la condición de dominancia de $H(s)$, esto por tanto conlleva a establecer que $1 / h_{ii}(s) - \hat{h}_{ii}(s)$ está contenida dentro de un círculo el cual coincide con el i -ésimo círculo de Gershgorin de $\hat{Q}(s)$, y que tiene un radio más pequeño que el i -ésimo círculo de Gershgorin por un factor de $\Phi_i(s)$. Este círculo se llamará un **círculo de Ostrowski** y la unión de tales círculos una **banda de Ostrowski**. Claramente la i -ésima banda de Ostrowski esta contenida dentro de la i -ésima banda de Gershgorin, si $\hat{H}(s)$ es DD. La situación es descrita en la figura 2.13.

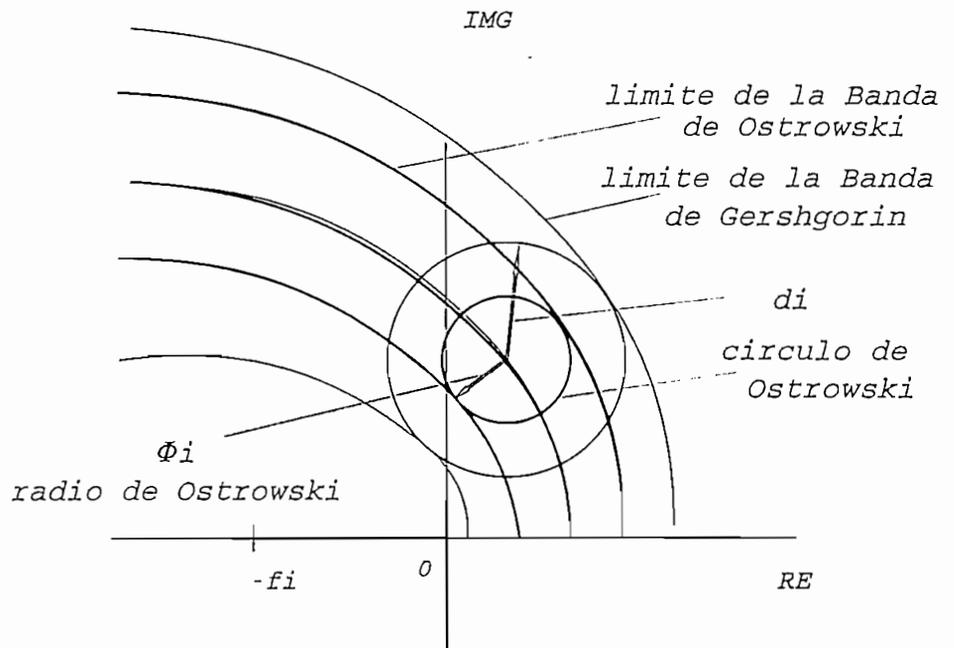


Figura 2.13
Bandas de Ostrowski

El resultado de la ecuación (2.40) se interpreta que para tener un error bajo, la banda formada por los círculos de Ostrowski que se forman deben estar dentro de la banda de Gershgorin, con esto se satisface los requerimientos de un error pequeño. .

2.2.2 Aplicación del teorema de Ostrowski

De la expresión 2.40 ó 2.34 se tiene :

$$| h_{ii}^{-1} - \hat{h}_{ii} | \leq \phi_i(s) d_i(s) \quad (\text{Ec.2.41})$$

$$| h_{ii}^{-1} - (\hat{q}_{ii} + f_i) | \leq \phi_i(s) d_i(s) \quad (\text{Ec.2.42})$$

El valor h_{ii}^{-1} es un valor de diseño que se impone, mientras que la información de q_{ii} que se conoce, y por lo tanto la información de f_i se puede determinar de la siguiente forma:

Como se pretende que el error sea lo más pequeño posible, se forza haciendo la última expresión igual a cero:

$$h_{ii}^{-1} - \hat{q}_{ii} - f_i = 0 \quad (\text{Ec.2.43})$$

La conclusión al método de diseño es que inicialmente con los *círculos de Gershgorin* se determina la *matriz* $K(s)$, es decir una vez que la dominancia diagonal ha sido obtenida , el diseño sigue adelante mediante intentar obtener las *bandas de Ostrowski*

satisfactorias, tratando a ellas como si ellas fueran los diagramas inversos de Nyquist de un sistema SISO. En otras palabras se procede al diseño de la *matriz diagonal* F , para lo cual debe el diseñador obtener un valor de la matriz H deseada y luego a partir de estos datos y de la matriz $Q(s)$ conocida se encuentra los f_i usando la expresión 2.43.

2.2.3. Cálculo de $K(s)$

Se ha dejado para esta parte el cómo determinar $K(s)$ por la diversidad de maneras de hacerlo y por la complejidad de ciertos métodos para la generación de un precompensador cuya función como se indico anteriormente es pseudodesacoplar, o hacer el sistema DD.

Existen disponibles varios métodos para escoger los compensadores para hacer las bandas de Gershgorin estrechas, y por tanto lograr dominancia diagonal y posteriormente a esto es posible estimar los márgenes de estabilidad relativa de lazo cerrado usando las bandas de Ostrowski.

El Arreglo Inverso de Nyquist ofrece varias alternativas, así:

Según la experiencia del diseñador el método de ensayo y error puede ser efectivo, sin embargo para sistemas con más de tres entradas y tres salidas es inconveniente.

Método a) Determinar $\hat{K}_p(s)$ mediante operaciones elementales de filas usando los gráficos de todos los elementos de $\hat{Q}(s)$ como una guía. La idea principal de este método es hacer cero los elementos fuera de la diagonal aprovechando para esto las propiedades de las matrices.

Esta técnica ha provisto excelentes resultados en la práctica, y en muchos casos $K_p(s)$ ha sido una matriz real de constantes, la cual es fácilmente implementable.

La necesidad obvia de un método más sistemático sugiere la siguiente alternativa:

Método b) Escoger $\hat{K}_p(s) = G(0)$, si el determinante de $G(0)$ no es singular. Esto se justifica por las condiciones de estacionariedad ($t \rightarrow \infty$), es decir en régimen permanente del sistema.

Esta técnica proporciona un compensador $\hat{K}_p(s)$ de constantes reales el cual simplemente diagonaliza la planta a la frecuencia cero.

Pero con este método no se garantiza dominancia en el transitorio, es decir en $G(\infty)$ (G evaluada cuando $s \rightarrow \infty$).

Se puede probar si existe o no dominancia a diferentes frecuencias, en el caso que haber ciertos rangos donde la dominancia no se cumpla, entonces es necesario la inclusión de un compensador dinámico con la siguiente estructura dependiendo de las características de la planta:

$$K_i = k_{-r} s^{-r} + \dots + k_{-1} s^{-1} + k_0 + k_1 s^1 + \dots + k_r s^r$$

(Ec.2.44)

Por ejemplo:

$$K = k_1 s + k_0$$

El orden r de las potencias de s se obtienen al considerar el transitorio usando el teorema del valor inicial ($s \rightarrow \infty, t \rightarrow 0$), considerando que $G(\infty)$ tiene que ser un valor finito, entonces ahí aparece el orden de la potencia r necesaria para que $G(\infty)$ sea finito.

La cuantificación de en que rangos de frecuencia existe dominancia se analizará mediante el diagrama de Bode de la dominancia, que son los diagramas de los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz correspondiente que se este analizando. Más adelante se verá la aplicación de esto último.

Por lo pronto se desea tener un compensador no dinámico, es decir K es una matriz constante y real, la cual tienda a cubrir un cierto rango de frecuencia donde el sistema sea DD alrededor de un cierto contorno que a lo mejor factibiliza la totalidad del rango; en otras palabras la estrategia es diagonalizar el sistema en una frecuencia y esperar que

el efecto sea lo suficientemente beneficioso sobre un ancho rango de frecuencias que de por resultado la dominancia diagonal. La manera más fácil de hacerlo es invertir $G(s)$ de la planta y luego evaluarlo a una frecuencia $s=0$ como ya se analizó. En cualquier otra frecuencia, $G^{-1}(j\omega)$ es compleja; pero puede obtenerse una matriz K de compensación real constante.

En este caso se utiliza el siguiente algoritmo:

Método c) Una metodología más eficiente, la cual es más sistemática que los anteriores, es determinar $K_p(s)$ como la *mejor* matriz, en el sentido medio cuadrático, enteramente real, la cual aproximadamente diagonalice el sistema \hat{Q} a alguna frecuencia $j\omega$. [8]

Método c1) Considerese los elementos \hat{q}_{ij} en alguna fila i de $\hat{Q}(j\omega) = \hat{K}\hat{G}(j\omega)$, es decir:

$$\hat{q}_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik} \hat{g}_{kj}(j\omega)$$

(Ec.2.45)

La idea ahora es escoger los coeficientes \hat{k}_{ij} de la matriz $K(s)$ tal que se obtenga el mínimo radio de Gershgorin para una frecuencia dada $j\omega$ cualquiera, es decir se está llevando la dominancia al mínimo. Si se supone \hat{k}_i como un vector fila de orden $1 \times$

m, que contiene los elementos de la i-ésima fila de $K(s)$, entonces lo que se minimizará será:

$$\min_{k_i} d_i = \min \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m | \hat{q}_{ij}(j\omega) | = \min \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m | \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik} \hat{g}_{kj} | \quad (\text{Ec.2.46})$$

sujeto a la restricción de \hat{k}_i siguiente:

$$| \hat{k}_i \hat{k}'_i | = \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik}^2 = 1 \quad (\text{Ec.2.47})$$

Esta restricción se la hace para garantizar uniformidad en los valores de k_i , de tal forma que no sean disparados entre sí. Es decir, para que tengan el mismo orden de magnitud, por está razón se hace esta ortonormalización.

Pero es más efectivo llevar la minimización en el sentido de mínimos cuadrados. Entonces la expresión anterior quedaría así:

$$\min_{k_i} d_i^2 = \min \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m | \hat{q}_{ij}(j\omega) |^2 = \min \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m | \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik} \hat{g}_{kj} |^2 \quad (\text{Ec.2.48})$$

Ahora si se define \hat{g}_{ik} de la siguiente forma:

$$\alpha_j + j\beta_j = \begin{pmatrix} \hat{g}_{1j} \\ \hat{g}_{2j} \\ \dots \\ \hat{g}_{mj} \end{pmatrix}$$

(Ec.2.49)

donde α_j , β_j son vectores columna de orden m.

Con esta consideración se tiene :

$$\left| \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik} \hat{g}_{kj}(s) \right|^2 = \left| \hat{k}_i (\alpha_j + j\beta_j) \right|^2$$

(Ec.2.50)

$$\left| \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik} \hat{g}_{kj}(s) \right|^2 = \hat{k}_i (\alpha_j \alpha_j' + \beta_j \beta_j') \hat{k}_i'$$

(Ec.2.51)

$$\left| \sum_{k=1}^m \hat{k}_{ik} \hat{g}_{kj}(s) \right|^2 = \hat{k}_i (A_j + B_j) \hat{k}_i'$$

(Ec.2.52)

donde: $A_j = \alpha_j \alpha_j'$ $B_j = \beta_j \beta_j'$

Las matrices A_j y B_j son simétricas y semidefinidas positivas y cada una de esas matrices tiene un rango 1 a menos que α_j o β_j sean nulos , en cuyo caso las correspondientes matrices son nulas.

Por tanto la expresión a minimizar quedaría así:

$$\min_{k_i} d_i^2 = \min (\hat{k}_i [\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (A_j + B_j)] \hat{k}'_i)$$

(Ec.2.53)

$$C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (A_j + B_j)$$

(Ec.2.54)

$$\min_{k_i} d_i^2 = \min (\hat{k}_i C_i \hat{k}'_i)$$

(Ec. 2.55)

Esta última expresión será la función a minimizar y la ecuación (2.47) será la restricción.

Tomando en cuenta esto, se tiene un problema de minimización con restricciones y el método más idóneo para resolverlo es mediante los multiplicadores de Lagrange cuya formula a breves rasgos considera tanto la función como las restricciones de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial \hat{k}_j} = \nabla \text{funcion} - \lambda [\nabla \text{restricciones}] = 0$$

(Ec.2.56)

Con las apropiadas substituciones, el problema de minimización queda planteado del siguiente modo :

$$\min_{\hat{k}_i} d_i^2 = \min \{ \hat{k}_i C_i \hat{k}'_i + \lambda (1 - \hat{k}_i \hat{k}'_i) \}$$

(Ec.2.57)

Para minimizar se aplica:

$$\frac{\partial \min d_i^2}{\partial \hat{k}_i} = 0$$

(Ec.2.58)

De donde realizando las operaciones pertinentes, se establece que:

$$C_i \hat{k}'_i - \lambda \hat{k}'_i = 0$$

(Ec.2.59)

Con $i=1,2,3,\dots,m$

Así , el problema de diseño llega a ser un *problema standard de valor y vector propio* para una matriz real simétrica.

$$\begin{aligned} & \textit{problema del vector propio} \\ & (A - \lambda I) \underline{y} = 0 \\ & \textit{problema del valor propio} \\ & \det | A - \lambda I | = 0 \end{aligned}$$

Donde el vector fila \hat{k}_i que pseudodiagonaliza la fila i de \hat{Q} en una frecuencia $j\omega$ es el vector propio de la matriz semidefinida positiva simétrica C_i correspondiente al valor

propio más pequeño de C_i . Además se puede ver que al minimizar la suma de los cuadrados de los términos de los elementos fuera de la diagonal de $\hat{Q}(s)$, también se minimiza los términos de $\hat{H}(s)$, debido a la relación $\hat{H} = \hat{Q} + F$.

Se puede llegar a un resultado parecido siguiendo el método de demostración que se encuentra en el libro de Munro, N, "Multivariable System Theory and Design", pag 247-249. [9]

La pseudodiagonalización podría ser obtenida de diferentes maneras, sin embargo es conveniente utilizar la ventaja de que se puede diseñar el vector k por separado. esto es fila por fila en el método de DD por filas (esto se demostró anteriormente pag. 56). Esto permite la opción de utilizar el mismo procedimiento pero a diferentes frecuencias para cada fila de Q . Es decir es posible pseudodiagonalizar con cierta ponderación en las frecuencias, llegándose a la misma formulación de un problema de vector y valor propio. Por tanto se escoje las frecuencias más críticas para cada fila y se hace el diseño para esas frecuencias.

En consecuencia las soluciones correspondientes a diferentes frecuencias deben ser analizadas y verificadas escogiendo aquellas que den los mejores resultados, lo cual garantiza una solución satisfactoria del problema.

En resumen en esta técnica de diseño se deben considerar las siguientes ideas:

- 1.- Selección de la i -ava fila
- 2.- Selección de la frecuencia w para hacer el diseño a esa frecuencia.
- 3.- Determinar la matriz C_i ; en base a la expresión 2.54.
- 4.- Calcular el vector propio asociado de C_i , \underline{y} correspondiente al menor valor propio de C_i
- 5.- Hacer la asignación $\hat{k}_i = \underline{y}$, y verificar si la condición de dominancia es satisfecha a lo largo del contorno de interés. Esto puede ser hecho en forma analítica o gráfica usando los círculos de Gershgorin. En la práctica solamente un sub-conjunto de los puntos del contorno D serán considerados.
- 6.- Si la condición de dominancia es satisfecha para $\hat{k} = \underline{y}$ entonces \underline{y} es una solución adecuada.
- 7.- En este punto, la alternativa que se escoge depende de la instancia a la que llegue el proceso de diseño; en otras palabras, depende del tipo de problema.

La primera instancia podría ser la simple investigación de una posible existencia de una matriz K constante de compensación. En este caso el diseño se reduciría al método a) si la solución es encontrada, si no es así, hay que continuar con el método b) hasta que se encuentre una solución adecuada o se visualice que tal solución no puede ser encontrada.

La segunda instancia involucra el método c), esto es, una investigación sistemática para cada fila de \hat{K} correspondientes a diferentes frecuencias del paso 2 hasta escoger la mejor solución.

Este método retiene el concepto del " *el hombre en el lazo* ", esto significa que el procedimiento no es automático en el que se ingresa datos y se obtiene resultados finales, sino que se basa en resultados intermedios; el diseñador debe decidir el camino o la alternativa a seguir y permitir el diseño bajo el contexto de interacción entre el usuario y un paquete computacional que disponga de facilidades gráficas. Alternativamente, la opción de diseño puede ser modificada reemplazando la decisión del usuario por una apropiada lógica del computador corriendo el programa en un esquema fuera de línea.

Método c2) Aunque la anterior forma de pseudodiagonalización frecuentemente produce resultados exitosos, otras formulaciones de este problema son posibles , y diferentes restricciones pueden substituir a la restricción de la ec 2.47, sin embargo, estos métodos no dan resultados simples como el resultado anterior.

Así la restricción que el vector de control \hat{k}_i tenga como norma la unidad, no siempre conlleva que los términos de la diagonal \hat{q}_{ij} ($i \neq j$) sean lo más pequeños posibles o desaparezcan completamente, aunque la fila sea DD.

Así, si en lugar de la restricción que la norma \hat{k}_i sea 1, se sustituye la siguiente restricción alternativa:

$$| \hat{q}_{jj}(j\omega) | = 1 \quad (\text{Ec.2.60})$$

Con un análisis similar al anterior se puede llegar a establecer el siguiente resultado:

$$C_i \hat{k}'_i - \lambda E_i \hat{k}'_i = 0 \quad (\text{Ec.2.61})$$

donde E_i es una matriz definida positiva, cuyas columnas están definidas de la siguiente forma:

$$E_i^{(j)} = (\alpha_j \alpha'_j + \beta_j \beta'_j) \quad (\text{Ec.2.62})$$

La ecuación (2.61) ahora representa *un problema del valor propio generalizado*, ya que E_i puede ser una matriz singular, y debe resolverse usando un apropiado método numérico.

$$\begin{aligned} & \textit{problema del vector propio generalizado} \\ & (A - \lambda E) \underline{y} = 0 \\ & \textit{problema del valor propio generalizado} \\ & \det | A - \lambda E | = 0 \end{aligned}$$

Cabe aclarar que el problema standard del vector/valor propio es válido si la matriz A es cuadrada, no singular (invertible) y sus valores propios no son repetidos.

En cambio el problema generalizado del vector/valor propio puede ser usado si A no es cuadrada y/o si no tiene inversa y sus valores propios son repetidos.

Además de estos métodos de determinar $K(s)$ tal que $\hat{Q}(s)$ sea DD existen otras que aún están sujetas a investigación, sin embargo los métodos documentados aquí han tenido resultados exitosos en problemas de control multivariable en la Industria. En el capítulo IV se ilustrarán los ejemplos de aplicación que validan lo anterior.

2.3 ARREGLO DIRECTO DE NYQUIST (DNA)

2.3.1 INTRODUCCION

Hasta este punto se ha concentrado fuertemente la atención en el método INA por las razones de facilidad que presenta al trabajar con la matriz \hat{Q} . La teoría presentada anteriormente sirve también para el método del Arreglo Directo de Nyquist DNA.

La razón por la que ahora se considera el DNA es que a veces se tiene plantas con función de transferencia $G(s)$ no cuadrada, es decir con el número de entradas distinto

al número de salidas, obviamente, no se puede invertir la matriz $G(s)$ a menos que sea cuadrada. Además se trabaja directamente sobre la matriz G para la minimización en vez de G^{-1} . Otra razón por la que se considera el DNA es que la teoría del INA data de los años 70, durante los últimos 20 años se ha realizado mayor investigación y el método de minimización se aplica directamente sobre $Q=G*K$, con un barrido de todas las frecuencias de interés incluyendo la estructura de un compensador dinámico. Por ello se estudia este método y por que además el MATLAB ya tiene desarrollado una rutina en este sentido.

Esta minimización se traduce en:

$$\min_{k_j} \sum_{l=1}^P V_l \sum_i |q_U(j\omega_l)|$$

(Ec.2.63)

donde V_l es una ponderación asignada a cada frecuencia. Ponderar significa agregar más peso a ciertas medidas o en este caso a cierto rango de frecuencia.

El método DNA utiliza los gráficos o diagramas de Bode del parámetro σ que se define de la siguiente forma:

Para una matriz función de transferencia $G=(g_{ij})_{n \times n}$ la dominancia de una columna (o fila) a una frecuencia $s_0=j\omega_0$ está determinada, como se analizó anteriormente por la suma de módulos de los elementos fuera de la diagonal de la columna (o fila), pero ahora se relaciona este resultado con el elemento de la diagonal de la siguiente manera:

$$\sigma_j = \frac{\sum_i' |q_{ij}|}{|q_{jj}|} \quad \text{(for columns)}$$
$$\sigma_i = \frac{\sum_j' |q_{ij}|}{|q_{ii}|} \quad \text{(for rows)}$$
$$\sum_i' = \sum_{i=1}^n$$

(Ec.2.64)

Donde ahora se define $\sigma_j(\sigma_i)$ como una medida de la dominancia por columnas (o filas), y se normaliza con respecto al elemento de la diagonal.

Los parámetros $\sigma_j(\sigma_i)$ de todas las columnas (o filas según el caso) indican la interacción de un sistema MIMO descrito por una matriz Q.

Cuando $\sigma_j < 1$ o $\sigma_i < 1$ para todo j (ó i) = 1, 2, ... n se dice que el sistema representado por la matriz función de transferencia Q es diagonalmente dominante (DD).

Con esta redefinición de la dominancia se puede ahora considerar el diseño de un precompensador que mejore la dominancia por columnas (o filas).

Inicialmente si la planta tiene una matriz función de transferencia $G_{n \times m}$ si compensar (con fuertes interacciones o sin dominancia diagonal) es necesario agregar un precompensador $K_{m \times n}$ tal que la $Q = GK$ así formada sea DD. La manera de hacer Q DD es mediante establecer a cualquier frecuencia $s_0 = j\omega$, un K , de la siguiente forma:

$$K = G^{-1}(s_0)$$

(Ec.2.65)

pero no siempre es posible o es muy complejo obtener $G^{-1}(s)$. Se utiliza entonces el concepto de minimización. El método de minimización inicialmente desarrollado **para una frecuencia** en el INA se basa en la minimización de módulos de la suma de los elementos fuera de la diagonal en el sentido cuadrático. El procedimiento de minimización, que se va a resumir a continuación se lo lleva a cabo mediante el método de Hawkins (pseudodiagonalización), el cual es una mejora al método clásico de Rosenbrock para el INA, explicado anteriormente y que mejora la dominancia al extenderle sobre un rango de frecuencias de interés.

2.3.2 METODO DE PSEUDIAGONALIZACION PARA EL DNA

En primer lugar para mejorar la dominancia se utiliza el método *Pseudodiagonalización de Hawkins* [10], el cual mejora la dominancia sobre un amplio rango de frecuencias, ahora sin importar de que K pueda tener una estructura compleja (ser dinámica) y adicionalmente es el método en el cual se basa el MATLAB.

Para mejorar la dominancia sobre un amplio rango de frecuencia en este paper se trabajo sobre Q en vez de \hat{Q} . Se minimiza los elementos fuera de la diagonal de Q sobre una *suma ponderada de frecuencias* .

sujeta a la restricción:

$$k_j \cdot k_j' = 1$$

(Ec.2.66)

donde k_j es la j -ava columna de K y K' indica traspuesta de K .

Para conseguir esta minimización se plantea un precompensador de la forma:

$$K(s) = K_0 + K_1 s + K_2 s^2 + \dots + K_\beta s^\beta$$

(Ec.2.67)

Notándose que se usa K en el método del DNA .

Si se utilizara el INA tratando de utilizar una estructura más compleja para K se debe trabajar con \hat{K} de la forma:

$$\hat{K}(s) = \hat{K}_0 + \hat{K}_1 s + \dots + \hat{K}_\beta s^\beta$$

(Ec.2.68)

Para calcular K se debe invertir \hat{K} , pero el hecho de invertir \hat{K} incrementa la complejidad, más si se incrementa el valor de β y las dimensiones de K , lo cual dificulta enormemente el método, inclusive se llega a problemas de estabilidad y perder significancia física.

El cálculo de K es sencillo cuando $s \rightarrow 0$ o $s \rightarrow \infty$, presupone utilizar $G^{-1}(0)$ ó $G^{-1}(\infty)$, donde K sí existe esta es real. En general K es compleja, esto es dinámica o dependiente de s a excepción del caso $s=0$ o $s \rightarrow \infty$.

El procedimiento que se sigue se basa en el paper [Dominace improved by pseudodecoupling][11]. A continuación se describe el fundamento del método DNA.

El procedimiento de pseudodesacoplamiento escoge un K para minimizar la expresión:

$$\sigma_j = \frac{\sum_i |q_{ij}|}{|q_{jj}|}$$

(Ec.2.69)

para cada columna con $j = 1, 2, \dots, n$

Una obvia y adecuada aproximación matemática a este problema es:

$$\sigma_j = \min_{k_j} \frac{\sum_i |q_{ij}|^2}{|q_{jj}|^2}$$

(Ec.2.70)

Con esto se evita la restricción $k_j k_j' = 1$ puesto que esta restricción es para normalizar los valores de K pero ya σ incluye dicha normalización y adicionalmente se utiliza el método de mínimos cuadrados.

Además una natural extensión a la ponderación de la suma de frecuencias es una integral ponderada, de la siguiente forma:

$$\min_{k_j} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} v(\omega) \sum_i |q_{ij}|^2 d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} v(\omega) |q_{ij}|^2 d\omega}$$

(Ec.2.71)

donde $v(\omega)$ es una función en ω o un factor ponderado dependiente de la frecuencia.

La estructura de $K(s)$ puede ser extendida de la siguiente forma:

$$K(s) = K_{-\alpha} s^{-\alpha} + \dots + K_{-1} s^{-1} + K_0 + K_1 s + \dots + k_B s^B$$

(Ec.2.72)

A medida que α y $\beta \rightarrow \infty$, $K(s)$ se aproxima a un mejor controlador de desacoplamiento para G , pero por otro lado se debe tener precaución en el escogitamiento de estos valores α, β . pues se complica enormemente el compensador.

Por lo tanto en el pseudodesacoplamiento, se intentará mejorar la dominancia de la planta compensada Q , usando el precompensador $K(s)$ de la forma expresada en la (ec. 2.72.) el cual es diseñado columna por columna por la minimización de la ecuación 2.71.

2.3.3 Método de minimización [12].

En la ecuación 2.72, la minimización de la j-ava columna de Q es tomada sobre la j-ava columna de K. Para K de la forma de la ecuación (2.73) una j-ava columna es:

$$k_j = k_{-\alpha_j} \frac{1}{s^{\alpha}} + \dots + k_{-1_j} \frac{1}{s} + k_{0_j} + k_{1_j} s + \dots + k_{\beta_j} s^{\beta}$$

(Ec.2.73)

La solución a la minimización se obtiene como sigue:

$$v(\omega) \sum |q_{ij}|^2 = v(\omega) \sum (q_i^* \cdot q_i) = q_j^* \cdot W_j \cdot q_j$$

(Ec.2.74)

donde * indica traspuesto conjugado.

$$W_j = \text{diag} [v(\omega), \dots, v(\omega), 0_{jj}, v(\omega), \dots, v(\omega)]$$

$$q_j = Gk_j = Gk_{-\alpha_j} \frac{1}{s^{\alpha}} + \dots + Gk_{-1_j} \frac{1}{s} + Gk_{0_j} + Gk_{1_j} s + \dots + Gk_{\beta_j} s^{\beta}$$

j ≠ i

(Ec.2.75)

Asociando las potencias de s con G, y formando un vector columna extendida de los componentes de los vectores columnas de k_j, se tiene :

$$q_j = G' k_j' = [G s^{-\alpha} G^{-\alpha+1} \dots G s^{-1} G G s \dots G s^\beta] = \begin{bmatrix} k_{-\alpha j} \\ \vdots \\ k_{-1 j} \\ k_{0 j} \\ k_{1 j} \\ \vdots \\ k_{\beta j} \end{bmatrix}$$

(Ec.2.76)

Por lo tanto:

$$v(\omega) \sum_i |q_{ij}|^2 = (G' k_j')^* W_j G' k_j' = k_j'^T G'^* W_j G' k_j'$$

(Ec.2.77)

Porque k_j' es independiente de s : por tanto $k_j'^* = k_j'^T$.

Similarmente, para $v(\omega)/|q_{ij}|^2$, se obtiene:

$$v(\omega) |q_{ij}|^2 = k_j'^T G'^* L_j G' k_j'$$

(Ec.2.78)

donde

$$L_j = \text{diag} [0 \dots 0, v(\omega)_{jj}, 0 \dots 0]$$

(Ec.2.79)

Por consiguiente:

$$\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} v(\omega) \sum |q_{ij}|^2 d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} v(\omega) |q_{jj}|^2 d\omega} = \frac{k_j'^T \int_{\omega_1}^{\omega_2} G'^* W_j G' d\omega k_j'}{k_j'^T \int_{\omega_1}^{\omega_2} G'^* L_j G' d\omega k_j'} = J$$

(Ec.2.80)

donde:

$$M_j = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G'^* W_j G' d\omega$$
$$N_j = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G'^* L_j G' d\omega$$

(Ec.2.81)

La solución a la minimización de J con respecto a k_j' lleva a un problema generalizado de valor propio, debido a que N_j , M_j son hermitianas [13].

$$\text{Re} \{M_j\} k'_j = J \text{Re} \{N_j\} k'_j$$

(Ec.2.82)

donde $\text{Re}\{ \}$ representa la parte real correspondiente. Resolviendo esto para k'_j asociado al valor propio mínimo se tiene la minimización requerida. Para resolver el problema generalizado del valor propio hay que considerar que $\text{Re}\{M_j\}$ y $\text{Re}\{N_j\}$ son simétricas y definidas positivas [14], porque en general:

$$k_j^T \text{Re} \{ M_j \} k_j = \int v(\omega) \sum |q_{ij}|^2 d\omega \neq 0$$

y

(Ec.2.83)

$$k_j^T \text{Re} \{ N_j \} k_j = \int v(\omega) \sum |q_{jj}|^2 d\omega \neq 0$$

(Ec.2.84)

Entonces siguiendo la minimización de MacFarlane y Kouvaritakis [15] se tiene:

$$k_{j \min}' = E \Lambda^{-1} s_{j \min} \Lambda$$

(Ec.2.85)

y

$$J_{\min} = \lambda_{s_{\min}}$$

(Ec.2.86)

donde:

Λ es la matriz diagonal de los valores propios, luego de una transformación de semejanza, E .

$$Re\{N_j\} = E \Lambda^2 E^T \tag{Ec.2.87}$$

y $\lambda_{s \min}$ y $s_{j \min}$ es el valor propio mínimo y su respectivo vector propio de:

$$\Lambda^{-1} E^T Re\{M_j\} E \Lambda^{-1} s_j = \lambda_{s_j} \tag{Ec.2.88}$$

En particular, para un k_j cuyos elementos tienen la forma de un controlador de tres términos:

$$k_j = k_{0j} + k_{-1j} \frac{1}{s} + k_{1j} s \tag{Ec.2.89}$$

Se tiene que :

$$Re\{M_j\}_{3m \times 3m} = \begin{bmatrix} \int A & \int \frac{B}{\omega} & -\int \omega B \\ \int \frac{B^T}{\omega} & \int \frac{A}{\omega^2} & -\int A \\ -\int \omega B^T & \int A & \int \omega^2 A \end{bmatrix}$$

$$Re\{N_j\}_{3m \times 3m} = \begin{bmatrix} \int C & \int \frac{D}{\omega} & -\int \omega D \\ \int \frac{D^T}{\omega} & \int \frac{C}{\omega^2} & -\int C \\ -\int \omega D^T & \int C & \int \omega^2 C \end{bmatrix} \tag{Ec.2.90}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Re}\{G^*W_jG\} = A_{m \times m}^T \\ B &= \operatorname{Im}\{G^*W_jG\} = -B_{m \times m}^T \\ C &= \operatorname{Re}\{G^*L_jG\} = C_{m \times m}^T \\ D &= \operatorname{Im}\{G^*L_jG\} = -D_{m \times m}^T \end{aligned}$$

(Ec.2.91)

Se nota que , teniendo integrado y formado $\operatorname{Re}\{M_j\}$ y $\operatorname{Re}\{N_j\}$, se resuelve el problema del valor propio generalizado.

Las regiones punteadas muestran la solución para el caso de controladores de uno y dos términos. Así para un controlador con un término ($K_j=K_{0j}$) se tendría :

$$\operatorname{Re}\{M_j\} = \int A \quad \operatorname{Re}\{N_j\} = \int C$$

(Ec.2.92)

Puesto que la minimización de k'_j se consigue a partir de un vector propio, k'_j puede ser definido mediante un factor constante por el vector propio lo cual puede ser explotado en problemas de implementación práctica tales como la variación de ganancia proporcional , derivativa ,etc.

Los valores propios mínimos asociados con esas varias formas de controlador dan alguna indicación de su efectividad relativa en la minimización de J (ec 2.80)

2.4 LUGAR CARACTERISTICO (LC)

2.4.1 INTRODUCCION

Otro método de estudio en la presente tesis en el dominio de la frecuencia es el Lugar Característico que está basado en que, cualquier matriz cuadrada $G(s)$ ($m \times m$) de una variable compleja s , tiene un conjunto de valores propios y sus asociados vectores propios. (Esos valores y vectores propios en sí mismo son funciones de la variable compleja s).

Para encontrar los valores y vectores propios de $G(s)$ se debe resolver las siguientes ecuaciones:

problema del vector propio

$$(g_i I_m - G(s)) \underline{w}_i = 0$$

problema del valor propio

$$\det | g_i I_m - G(s) | = 0$$

(Ec.2.93)

donde:

$w_i = i$ -ésimo vector propio

$g_i = i$ -ésimo valor propio

Para dar un significado físico de $g_i(s)$, suponga $g_i(s)=g$ para todo i (es decir g es una ganancia escalar compleja), entonces la ecuación 2.93 representa el polinomio característico del sistema de realimentación de m entradas y m salidas mostrado en la figura 2.9:
[16]

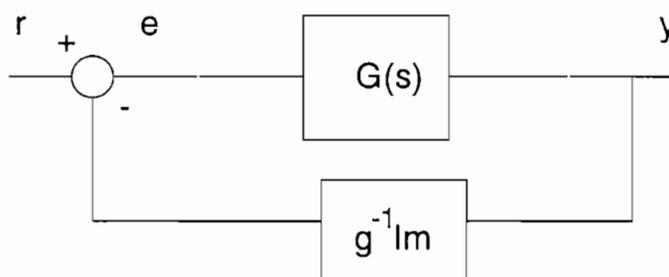


Figura 2.9
SISTEMA DE REALIMENTACION PARA EL LUGAR CARACTERISTICO

Las frecuencias características del sistema de lazo cerrado (polos de lazo cerrado) son frecuencias a las cuales los valores de $g^{-1}I_m$ son tales que el sistema de lazo cerrado tiene ganancia infinita.

Esas frecuencias características corresponden a los polos de lazo cerrado del sistema de

la figura 2.9, así la correspondiente ganancia de realimentación $g_i(s)=g$, es un polo de lazo cerrado o una frecuencia característica.

En sistemas SISO, los diagramas de Nyquist representan las variaciones de esas ganancias de realimentación para valores de frecuencia w alrededor del contorno de Nyquist D . Así mismo, en el lugar geométrico de las raíces de sistemas SISO, los diagramas de las frecuencias características (polos de lazo cerrado) se obtienen para diferentes ganancias.

En el caso MIMO, existen dos parámetros independientes : las ganancias complejas $g_i(s)$ y la frecuencia compleja s . Si los elementos del vector de ganancias $g=\{g_i\}$ fueran expresados como funciones de la frecuencia compleja s , las señales de realimentación en la figura 2.9 pueden ser consideradas ya sea como funciones de frecuencia compleja (dando un lugar de frecuencias en vez del lugar de las raíces) o como funciones de ganancias complejas (dando un lugar de ganancias en vez de los diagramas de Nyquist).

Esta generalización de las funciones de ganancias de realimentación forman la base de una interpretación algebraica de polos y ceros y una extensión a los sistemas MIMO de los conceptos del dominio de la frecuencia clásicos de sistemas SISO.

El determinante de la ecuación 2.93 produce un conjunto de m funciones de variables complejas, teniendo la siguiente forma:

$$g^m(s) + a_1 g^{m-1}(s) + \dots + a_m(s) = 0$$

(Ec.2.94)

donde cada $a_i(s)$, $i=1,2,\dots,m$ es una función racional de s .

Si esos coeficientes tienen mínimo común denominador $b_0(s)$, entonces la ecuación 2.94 puede ser escrita como:

$$g^m(s) + \frac{b_1(s)}{b_0(s)} g^{m-1}(s) + \dots + \frac{b_m(s)}{b_0(s)} = 0$$

(Ec.2.95)

o como

$$b_0(s) g^m(s) + b_1 g^{m-1}(s) + \dots + b_m(s) = 0$$

(Ec.2.96)

donde ahora cualquier coeficiente $b_i(s)$ es una función polinomial.

El conjunto de m valores de $g_i(s)$ se llama las *funciones características de $G(s)$* .

La ecuación 2.96 es una ecuación algebraica relativa a un par de variables complejas: s y g .

Por lo tanto los diagramas de Nyquist de los valores propios (funciones complejas) de la matriz función de transferencia $G(s)$ mientras s atraviesa el contorno de Nyquist D

en dirección horaria se denominan **lugares característicos**.

2.4.2 TEOREMA GENERALIZADO DE NYQUIST PARA EL LUGAR CARACTERISTICO

En base a la teoría del numeral 2.1 se plantea el criterio generalizado de Nyquist para el análisis de estabilidad usando el lugar característico, de la siguiente forma:

Si un sistema lineal de m entradas y m salidas tiene una matriz función de transferencia $G(s)$ y tiene n_0 polos inestables (ubicados en el semiplano derecho del plano complejo s), entonces el sistema de lazo cerrado con $KG(s)$ es estable si y solamente si todos los lugares característicos de $KG(s)$, tomados juntos, encierran el punto crítico $(-1, j0)$, n_0 veces de manera antihoraria. (asumiendo que no existen modos inestables ocultos y además que se desea que no existan polos inestables en el sistema de lazo cerrado), es decir:

$$-n_0 = \sum_{i=1}^m N_i$$

(Ec.2.97)

donde: N_i es el número de encirculamientos al punto $(-1, j0)$ por los i -ésimos lugares característicos de $KG(s)$.

Planteado en términos de los lugares característicos de $G(s)$, la condición para la estabilidad en lazo cerrado es:

$$-n_0 = \sum_{i=1}^m N'_i \quad (\text{Ec.2.98})$$

donde: N'_i es el número de encirculamientos al punto crítico $(-1/k, j)$ por los i -ésimos lugares característicos de $G(s)$.

Esto último se da porque los lugares característicos de $KG(s)$ y $G(s)$ son relacionados por el factor de escalamiento k . Aquello implica que la estabilidad de lazo cerrado del sistema (con $KG(s)$) puede ser determinada por los lugares característicos de $G(s)$.

2.4.3 DEFINICIONES

En los numerales anteriores se definió el concepto de lugar característico (LC). Ahora se necesita definir otros términos para poder viabilizar el análisis de interacción con la técnica LC.

Suponga que la matriz función de transferencia $Q(s)$ con $\mathbf{q}_i(s)$ y $\mathbf{w}_i(s)$ satisfacen la ecuación:

$$Q(s) \underline{w}_i(s) = q_i(s) \underline{w}_i(s) \quad i=1,2,\dots,m$$

(Ec.2.99)

entonces $q_i(s)$ y $\underline{w}_i(s)$ respectivamente son los valores propios y vectores propios de Q , a la frecuencia s . Si se traza los diagramas de Nyquist variando s sobre el contorno D de Nyquist, los lugares correspondientes son llamados los lugares característicos (LC) de $Q(s)$.

Los correspondientes vectores propios $\underline{w}_i(s)$ se llaman las direcciones características de $Q(s)$, y en general, sus orientaciones variarán como s varíe, adicionalmente estas son las mismas para lazo abierto como cerrado, esto se verifica con el siguiente análisis:

Si $W(s)$ y $V(s)$ son definidos respectivamente como las matrices que contienen en sus columnas y filas los vectores propios y sus duales de $Q(s)$, entonces se verifica:

$$Q(s) = W(s) [\text{diag}(q_i(s))] V(s)$$

(Ec.2.100)

Para realimentación unitaria en el esquema estancar MIMO, con $F(s)=I_m$, la función de transferencia de lazo cerrado esta dada por:

$$H(s) = [I_m + Q(s)]^{-1}Q(s)$$

De esta última expresión se establece claramente que:

$$H(s) = W(s) \left[\text{diag} \frac{q_i(s)}{1 + q_i(s)} \right] V(s)$$

(Ec.2.101)

Así, en el caso de realimentación unitaria y basados en las ecuaciones 2.100 y 2.101, las funciones características de lazo abierto y lazo cerrado son:

$$q_i \quad \text{y} \quad \frac{q_i(s)}{1 + q_i(s)}$$

(Ec. 2.102)

y adicionalmente los vectores propios son los mismos, entonces es lo mismo a decir que: las direcciones características son las mismas para las configuraciones de lazo abierto como lazo cerrado.

Por otro lado se observa que la ecuación 2.101 es una extensión natural entre las funciones de transferencia de lazo abierto y cerrado para sistemas de realimentación SISO. Esto muestra claramente porque las funciones de transferencia características permiten una simple generalización del criterio de estabilidad de Nyquist al caso multivariable.

2.4.4 MEDIDAS DE INTERACCION

En general, si alguna entrada de referencia $r_i(s)$ es impuesta sobre un sistema MIMO, alguna forma de respuesta ocurrirá en todas las salidas $y_j(s)$ del sistema. Naturalmente, se esperaría que una específica salida $y_i(s)$ responda a una entrada $r_i(s)$, y que todas las demás salidas ($y_j(s): i \neq j$) permanezcan en todo sentido pequeñas. La manera como una entrada $r_i(s)$ afecta un conjunto de salidas ($y_j(s): i \neq j$) es referida como interacción.

Mediante el lugar característico se analiza los sistemas a baja, media y alta frecuencia. Interacción a baja frecuencia puede en un principio suprimirse en cualquier grado requerido por simplemente asegurar que el modulo del lugar característico sea lo suficientemente grande a una frecuencia determinada. A altas frecuencias, sin embargo, no se puede hacer el módulo muy grande, debido a que el lugar característico debe satisfacer el un criterio de estabilidad de Nyquist, y por esto es imprescindible tener un módulo pequeño a frecuencias altas. Mas aún, para todas las formas prácticas de matrices función de transferencia, los elementos de estas matrices, y por lo tanto sus lugares característicos, tenderán todos a cero cuando el módulo de s tienda a infinito.

En otras palabras se tiene que a altas frecuencias ($j\omega_h$), los lugares característicos de $Q(j\omega)$ tienen módulos pequeños, por tanto:

$$H(j\omega_h) \rightarrow Q(j\omega_h)$$

Con esto se llega a la siguiente conclusión general con respecto a la interacción a altas frecuencias: las frecuencias altas de corte, en su conjunto, de $H(j\omega_h)$ son esencialmente las mismas en $Q(j\omega_h)$ y no son por lo tanto influenciadas por cualquier acción de realimentación. Así en términos generales, la manera de remover la interacción a alta frecuencia es solamente en el camino directo de $Q(j\omega)$.

Una aplicación útil para el problema de la interacción de alta frecuencia es mediante el conjunto de direcciones características.

Si se considera realimentación unitaria y recordando que las direcciones características son las mismas para lazo abierto y lazo cerrado entonces se dice que existe una baja interacción de lazo cerrado cuando solamente la i -ésima salida de $H(s)$ responde a la i -ésima entrada, esto significa que uno de los vectores básicos standard deben ser vectores dirección características de $H(s)$, y por lo tanto de $Q(s)$.

Los vectores básicos standard se definen de la siguiente forma:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \underline{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior entonces, sigue que una condición necesaria y suficiente para una pequeña cantidad de interacción a altas frecuencias es que el conjunto de direcciones características de $Q(jw)$ debe acercarse al conjunto de direcciones básicas standard. Así una manera de tomar una medida conveniente de interacción a altas frecuencias es por medio del ángulo entre el vector $w_i(jw)$ y las direcciones básicas standard e_i para $i=1,2,\dots,m$. Esta medida de interacción es el ángulo de desalineamiento MA (en inglés Misalignment Angles) definidos así:

$$\cos (\Theta_i (jw)) = \frac{ | \langle \underline{w}_i (jw) , e_i \rangle | }{ \| \underline{w}_i \| }$$

(Ec 2.102)

donde:

$| \underline{w}_i (jw), e_i |$ es la norma euclidiana del i-ésimo vector propio $\underline{w}_i(s)$; y,

Θ_i denota el i-ésimo ángulo MA

Así el método usual de presentar la información para el análisis de la interacción por la técnica del lugar característico LC es mostrar los gráficos de las magnitudes de lazo abierto vs w de los lugares característicos y los ángulos de desalinamiento MA como funciones de la frecuencia, en una forma similar a los diagramas de Bode.

Así una manera de manipular el análisis sobre un rango de frecuencia requerido es mediante un par de gráficos:

- i) módulo de $q_i(j\omega)$ versus ω .
- ii) el ángulo de desalineamiento $\Theta(j\omega)$ versus ω .

Se concluye que para el análisis se espera que a bajas frecuencias el gráfico i) sea lo más grande posible; mientras que a altas frecuencias se espera que ii) sea lo más pequeño posible.

En el presente trabajo de tesis se utiliza el método del lugar característico para apreciar la interacción de un sistema multivariable y para ilustrar los conceptos de este método.

Al igual que en el caso del INA, en este método no se utiliza un procedimiento de diseño mediante minimización que implica trabajar con precompensación a frecuencias altas, medias y bajas ya que se dispone de las rutinas de optimización del método DNA.

En cuanto a las rutinas para diseño del Lugar Característico no se considera el desarrollo completo, por las siguientes razones:

- 1) Implica un método totalmente diferente al seguido en la presente tesis y esto justifica otro tema de tesis, debido a que usa otros algoritmos especializados de

optimización como son : el de Ferron_Frobenius y el ALIGN.

- 2) Porque en este trabajo se utilizan los conceptos de dominancia; como son los gráficos de los círculos de Gershgorin, círculos de Ostrowski y gráficos de dominancia, que tienen que ver con el proceso de minimización válidos para el DNA (Direct Nyquist Array) e INA (Inverse Nyquist Array).
- 3) Se utiliza el lugar característico (LC) verificar resultados luego del proceso de precompensación (análisis).

CITAS CAPITULO 2:

- [1] **Rosenbrock H.H.**, " Computer Aided Control System Design. " Ed. Academic Press, London 1974 pag.145.
- [2] Idem a [1], pag. 147.
- [3] Idem a [1], pag. 143.
- [4] Idem a [1], pag. 147.
- [5] Idem a [1], pag. 148.
- [6] Notas del V Curso de Automática en la Industria. La Rábida. Junio 1985.
- [7] Idem a [1], pag. 149.
- [8] **Hawkins, D.J.** " Pseudodiagonalisation and the inverse Nyquist array method" PROC.IEE, Vol. 119, No3 Marzo 1972.

- [9] **Munro N.**, "Multivariable System Theory and Design. Ed. Pergamon Press, London 1982 pag.247-249
- [10] **Hawkins, D.J.** " Pseudodiagonalisation and the inverse Nyquist array method" PROC.IEE, Vol. 119, No3 Marzo 1972.
- [11] **M.P. Ford y K.G. Daly.** " Dominance Improvement by pseudodecoupling" PROC.IEE, Vol. 126, pp 1316-1320 1979.
- [12] Idem a [11].
- [13] Idem a [11] y **Donald M., Wiberg** " Espacio de estado y sistemas lineales " Ed. McGraw Hill. 1973 pag: 41
- [14] Idem a [11]
- [15] **Mac. Farlane, B. Kouvaritakis David** " A design for linear multivariable feedback systems. Int.J. Control ,1977, vol 25, No6, 849-850
- [16] Idem a [6].

CAPITULO III : RUTINAS PARA ANALISIS Y DISEÑO EN FRECUENCIA

3.1 RUTINAS BASICAS DEL MATLAB PARA SISTEMAS DE CONTROL MULTIVARIABLES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

3.2 RUTINAS PARA ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

3.3 METODO DE DISEÑO

3.1.- RUTINAS BASICAS DEL MATLAB PARA SISTEMAS DE CONTROL MULTIVARIABLES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Antes de continuar con el desarrollo del método de diseño, es necesario introducir una descripción concisa de las rutinas y funciones de la biblioteca de programas del MATLAB básico , del Control toolbox y del Multivariable Frequency Domain Toolbox (MFD), pues estas sirven de soporte al presente trabajo de tesis.

A continuación se describe las rutinas y funciones principales, se establece lo que realiza y sus características funcionales.

Si desea mayores detalles estos los puede encontrar en el Manual PC-MATLAB User Guide [1], en el Control Toolbox User Guide [2] o en el MFD Help [3].

3.1.1 Funciones generales.

Las principales funciones de carácter general que se usan a lo largo de todas las rutinas y que por ser parte del Matlab básico, no requieren mucha explicación y detalles; son las siguientes:

Generales

who	Lista las variables corrientes de memoria
what	Lista los archivos en el directorio de trabajo
quit	Salida del MATLAB
clear	limpia todas las variables en memoria
clc	limpia la pantalla de comandos

Operadores no muy comunes

==	igual	./	división derecha
~=	no igual	'	transpuesta
&	And		Or
~	Not	^	Potenciación

Caracteres especiales

=	Declaración de asignación
[]	Usados para formar vectores y matrices
()	Para agrupación
,	Separador entre argumentos
%	Comentarios
:	Para generación de vectores
!	Para ejecución de comando del DOS

Gráficos

plot	Dibuja gráfico lineal Y vs. X.
semilogx	Dibuja gráfico y vs logx
grid	Dibuja líneas de Grilla
title	Despliega título de gráfico
xlabel	Despliega título de eje X
ylabel	Despliega título de eje Y
text	Despliega texto en cualquier parte del gráfico
axis	Para escalamiento manual de gráfico
hold	Mantiene en pantalla el gráfico
shg	Muestra gráfico corriente en pantalla
clg	Borra gráfico corriente en pantalla
subplot	Divide la pantalla de gráficos en varias secciones

Control de flujo

If	Estructura de decisión
elseif	Usado con if
else	Usado con if
end	Terminación de if,for o while
while	Estructura do while
for	Repetición de una serie de instrucciones un determinado número de veces

break	Salida de una estructura for o while
return	Retorno de funciones.
pause	Pausa hasta que se presione una tecla

Instrucciones para programación

input	Obtención de variables del teclado
keyboard	Llamada al teclado como un archivo .M
error	Despliega mensaje de error
function	Define una función
eval	Interpreta texto en variables
exist	Chequea si existen variables o archivos
disp	despliega matriz o texto
echo	habilita el despliegue de comandos
sprintf	convierte números a string

Funciones matemáticas elementales

abs	Valor absoluto o magnitud compleja
sqrt	raíz cuadrada
real	parte real
imag	parte imaginaria
log10	logaritmo base 10

Utilitarios

eye	matriz identidad
ones	matriz de unos
zeros	matriz de ceros
diag	matriz diagonal
logspace	vector logarítmicamente espaciado, usado para escalas
length	devuelve la longitud de un vector
size	devuelve la dimensión de una matriz
max	máximo de un vector
find	encuentra un elemento en un vector

Manejo de polinomios

roots	raíces de un polinomio
conv	multiplicación
deconv	división
eig	valores propios
polyval	evaluación de polinomios

Manejo de archivos

dir	Lista los archivos en el directorio de trabajo.
load	Carga variables de un archivo
save	Salva variables a un archivo

type	Despliega el contenido de un archivo
delete	Borra un archivo

3.1.2 CONTROL Toolbox.

Este Toolbox se basa en las funciones básicas del MATLAB descritas anteriormente. Posteriormente estas funciones del CONTROL toolbox servirán de base para el toolbox MFD.

Las principales funciones usadas del CONTROL Toolbox son las siguientes:

Funciones principales

damp	Calcula los factores de amortiguamiento y la frecuencia ω_n de un modelo de variables de estado
tzeros	Devuelve los ceros de transmisión de un modelo de variables de estado
append	Agrupar dos modelos en variables de estado en uno solo
series	Conexión entre sistemas en serie descritos en variables de estado.
parallel	Conexión entre sistemas paralelos descritos en variables de estado.
connect	Conecta diagramas de bloque convertidos a variables de estado

blkbuild	Convierte diagramas de bloque a modelos a variables de estado
obsvf	Forma observable
ctbrf	Forma controlable
ctbr	Matriz de controlabilidad
obsv	Matriz de observabilidad
step	Respuesta en el tiempo a una función escalón
impulse	Respuesta en el tiempo a una función impulso
abcdcheck	Chequea la consistencia de un modelo A,B,C,D
r2p	Transformación de coordenadas rectangulares a polares

3.1.3 MULTIVARIABLE FREQUENCY DOMAIN (MFD) TOOLBOX

Como una parte previa y antes de empezar el desarrollo de las rutinas del DINA Toolbox que constituye la parte principal de la presente tesis, es necesario realizar una breve descripción de las funciones del MFD Toolbox, fundamento de las rutinas desarrolladas en el presente trabajo de tesis.

Los argumentos más comunes que se utilizan en las rutinas son:

f	matriz respuesta de frecuencia MVFR
w	contiene las frecuencias, en radianes, en las que la respuesta de frecuencia va a ser evaluada (vector de frecuencias)

K	precompensador.
c	una matriz compleja cualquiera.
linetype	tipo de línea; que puede ser punteada continua, etc.
a,b,c,d	modelo descrito a variables de estado
iu	i-ésima entrada
numg,deng	modelo descrito con función de transferencia
mag	magnitud de un vector o matriz
ph	fase de un vector o matriz
r	valor real
im	valor imaginario

En caso de que los argumentos mencionados anteriormente no estén contenidos en este grupo, se realiza una explicación de los mismos. A continuación se especifican alfabéticamente los formatos de las funciones y su respectiva descripción:

CSORT

Función: $[cs, fs] = \text{csort}(c, f)$

Descripción: Clasifica columnas en vectores continuos, redistribuyendo las columnas una fila a la vez para minimizar las diferencias entre las filas. También retorna matrices clasificadas u ordenadas en la forma MVFR de f de acuerdo con c. Con esto se consigue gráficos más suaves.

Parámetros: cs y fs son las matrices ordenadas de c y f.

EYEF

Función: $y = \text{eyef}(w, m, n)$

$y = \text{eyef}(w, n)$

Descripción: Genera matriz identidad MVFR. de orden $m \times n$

Argumentos: m, n son las dimensiones de la matriz identidad

FADJ

Función: $[\text{upper}, \text{lower}] = \text{fadj}(w, f)$

Descripción: Estima la diferencia en los órdenes de los elementos del precompensador a altas y bajas frecuencias para diagonalizar un sistema, a través del análisis de pendientes relativas de los elementos de las columnas de la pseudo -inversa de la planta. Es decir determina el orden relativo ideal de los elementos de la columna correspondiente del precompensador.

Argumentos: UPPER contiene los órdenes relativos de los elementos del precompensador para las frecuencias superiores

LOWER contienen los órdenes relativos para las frecuencias más bajas.

w necesita ser monotónico.

Observación: Si los números en UPPER Y LOWER no son aproximadamente enteros entonces el rango de frecuencia no es suficientemente alto o suficientemente bajo respectivamente.

FCDOM

Función: $s = \text{fcdom}(w, f)$

Descripción: Calcula la matriz de dominancias por columnas de la matriz de MVFR. Es decir, retorna el vector de la dominancia de cada columna .

FCGERSH

Función: $c = \text{fcgersh}(w, f, iu)$

Descripción: Genera columna con los valores necesarios para dibujar los círculos de Gershgorin. Regresa una columna por frecuencia que contiene los puntos de un círculo en esa frecuencia.

FCOST

Función: $c = \text{fcost}(w, f, iu, k)$

Descripción: Genera columna círculos de Ostrowski .

Argumentos: k es un vector de ganancias, para cada ganancia de retroalimentación.

FDISP

Función: $\text{fdisp}(w, f)$

Descripción: Muestra una matriz MVFR en pantalla con los valores asociados de frecuencia.

FDLY

Función: $f = \text{fdly} (w, f, \text{dly})$

Descripción: Añade retardos a una matriz MVFR.

Argumentos: dly valor del retardo

En cada elemento de la matriz de MVFR f , se ha estado multiplicado por $\exp (- j * w * \text{dly})$. La matriz dly especifica el retardo en segundos por cada elemento de f .

FEIG

Función: $[v, d] = \text{feig} (w, f)$

Descripción: retorna los valores y vectores propios de la matriz MVFR f

FFB

Función: $\text{cltfm} = \text{ffb} (w, f, k)$

Descripción: Calcula la matriz MVFR en lazo cerrado con realimentación unitaria .

FGET

Función: $x = \text{fget} (w, f, \text{index})$

Descripción: Obtiene los elementos especificados por el índice (index) de la matriz de MVFR f .

FINSERT

Función: $[fi, wi] = \text{finsert}(w, f, wadd, a, b, c, d, iu)$

Descripción: Inserta puntos en la matriz MVFR f de acuerdo a un nuevo subconjunto de frecuencias ($wadd$), retornando una nueva matriz MVFR fi y un nuevo vector de frecuencias wi .

FINV

Función: $f_{out} = \text{finv}(w, f)$

Descripción: FINV Invierte una matriz de MVFR. La matriz f puede ser cuadrada o no, en cuyo caso se pseudoinvierte.

FMISALG

Función : $misa = \text{fmisalg}(w, f)$

Descripción: Calcula los ángulos de desalineamiento, retorna una matriz ($misa$) cuyas columnas son los ángulos de desalineamiento de f

FMUL

Función : $f_{out} = \text{fmul}(w, f, c)$

Descripción: multiplica la matriz mvfr f con una matriz de constantes c , compatible con los componentes de la matriz f . El resultado se lo guarda en f_{out} .

FMULF

Función: $f_{out} = \text{fmulf}(w, f1, f2)$

Descripción: Multiplica dos matrices MVFR $f1$ con $f2$, y regresa una matriz MVFR f_{out} .

FPUT

Función: $f_{out} = \text{fput}(w, f, \text{elementos}, \text{index})$

Descripción: Reemplazan los elementos de matriz de MVFR f , con los elementos especificados en las columnas del argumento elementos , en las posiciones especificadas por index .

FPSEUDO

Función: $[\text{knum}, \text{comden}, \text{lamda}, \text{cdomi}] = \text{fpseudo}(w, f, \text{ci}, \text{kform}, \text{weight})$

Descripción: Calcula el precompensador K (pseudo-decoupling controlador). Calcula los coeficientes que minimizan Q , de una columna específica sobre un rango de frecuencia. Una función de ponderación puede ser especificada para concentrar el efecto de la minimización sobre frecuencias puntuales.

Argumentos: El precompensador tiene la forma : $K = \text{knum}/\text{kden}$

cdomi es la columna que tiene los valores de dominancia

ci es la columna ci -th de knum

lamda es el mínimo costo

f es la matriz MVFR de la planta

w es el vector de frecuencia asociado con f .

k_{form} . especifica los ordenes en s del precompensador.

$weight$ es una ponderación.

MCIRC

Función: $c = mcirc(m)$

Descripción: Calcula los círculos M para los diagramas de Nyquist

Argumentos: m es el vector de valores de los m círculos

MKNIC

Función : $mknic(mag, ph, w, plt)$

Descripción: Marca los puntos a lo largo de un diagrama de Nichols . Marca los puntos mag , ph con los números del vector w .

Argumentos: plt es opcional e indica la cantidad de diagramas por página ya sea 1 o 4. El valor por omisión tiene 4.

MKNYQ

Función: $mknyq(r, im, w, plt)$

Descripción: Marca puntos a lo largo de los diagramas de Nyquist con los números del vector w .

Argumento: plt es opcional e indica la cantidad de diagramas por página ya sea 1 o 4. El valor por omisión tiene 4.

MKPLOT

Función : `mkplot (x, y, w, plt)`

Descripción: Marca puntos (x,y) con los números del vector w a lo largo de un diagrama (x,y) . Si X y Y son matrices entonces se dibujan columnas contra columnas.

Argumentos: `plt` es opcional y especifica de 1 o 4 diagramas por página. Si estuviera faltando el valor por omisión de 4 , se dibuja la curva especificada en real (C) contra imaginario (C).

MV2FR

Función: `[f]=mv2fr (a,b,c,d,w,iu)`

`[f]=mv2fr (numg,deng,w)`

Descripción: Calcula la matriz MVFR (Multivariable Frequency Response) del sistema descrito con variables de estado o como una función de transferencia MIMO.

MVBLKB

Descripción: Construye un sistema o modelo total en el espacio de estado desde varios tipos de bloques con varias representaciones como::

Bloques con función de transferencia SISO descritos como n_x, dx (x indica la posición del bloque).

Bloques con funciones de transferencia MIMO descritos como : $num_x,$

comdenx

Bloques descritos con variables de estado descritos como: ax, bx, cx, dx.

Bloques con funciones de transferencia SISO descritos con: n_{xij} d_{xij} para ser conformados en un sistema MIMO en el espacio de estado.

Requiere de tres vectores {nblocks}, {mvnblks} y {ssnblks} los mismos que contienen los valores de x respectivamente para las primeras tres formas de bloque explicadas anteriormente.

MVBODE

Función : mvbode (w, f, index)

Descripción: Dibuja las magnitudes de los elementos de la matriz MVFR de f , especificados por el index, sobre un diagrama de Bode.

MVCON

Función: [a,b,c,d]=mvcon(ap,bp,cp,dp,q,iu,iy,sz)

Descripción: MVCON conecta todas las salidas de un bloque con las entradas del siguiente bloque de los sistemas multivariables descritos en variables de estado.

Argumentos: ap,bp,cp,dp son los sistemas en variables de estado de todos los bloques añadidos todos juntos.

q es la matriz especificar las conexiones entre bloques.

iu es un vector de bloques de entrada.

iy es un vector de bloques de salida.

sz es un matriz que contiene en la fila 1 el número de estados de las matrices a que constituyen ap, en la fila 2 la cantidad de entradas y en la fila 3 la cantidad de salidas. MVBLKB produce la matriz requerida sz

MVDB

Función: mvdb (w, f, index)

Descripción: Dibuja el diagrama multivariable de bode de magnitudes de elementos de la matriz MVFR

Argumentos: Index especifica el elemento a dibujarse.

f es la matriz MVFR

w es el vector de frecuencias

MVNIC

Función: mvnic(w,f,index)

Descripción:: Dibuja los elementos de la MVFR f, especificados por index en una carta de Nichols y marca los diagramas con puntos que representan frecuencias.

MVNYQ

Función : mvnyq (w, f, index)

Descripción: Dibuja los diagramas de Nyquist Multivariables de los elementos de la MVFR f especificado por el índice(index) y marca las diagramas con puntos de frecuencia.

MVSS2TF

Función: [num, Comden]=MVSS2TF(a,b,c,d)

Descripción: Calcula la función de transferencia multivariable a partir de un modelo a variables de estado, mediante la siguiente operación:

$$H(s) = \text{num}(s) / \text{Comden}(s) = C(sI - A)B^{-1} + D$$

Argumentos: Comden(s) contiene los coeficientes del común denominador en potencias descendentes de s.

num es el numerador de la matriz función de transferencia con tantas filas como salidas existan en el sistema.

MVTF2SS

Función: [a,b,c,d]=mvtf2ss(num,comden,iu)

[a,b,c,d]=MVTF2SS(num,comden,iu)

Descripción: Conversión de función de transferencia multivariable a variables de estado.

[a,b,c,d]=MVTF2SS(Num, Comden, iu) calcula la representación en el espacio de estado para una entrada iu y todas las salidas.

Argumentos: Comden contiene los coeficientes de los denominador en potencias

descendentes de s .

El Num es el numerador de la matriz función de transferencia con tantas filas como salidas existan en el sistema.

PLOTBODE

Función: `plotbode (w,mag,ph,linetype)`

Descripción: dibuja $20 \log (\text{mag})$ y ph en formato Bode con grillas y títulos

PLOTDB

Función: `plotdb (w,mag,linetype)`

Descripción: Dibuja la magnitud de $20 \log (\text{mag})$ en formato Bode.

PLOTNIC

Función : `plotnic (mag, ph, {linetype })`

Descripción: Dibuja la carta de Nichols. conjuntamente con los diagramas de Nichols, con cuadrículas y etiquetas. Esto es dibuja la fase vs. $20 \cdot \log_{10}(\text{MAG})$

PLOTNYQ

Función : `plotnyq (r, im, {linetype })`

Descripción: Dibuja los diagramas de Nyquist de una matriz compleja o un de vector.
Las columnas de las matrices son dibujadas contra las columnas

3.2 RUTINAS PARA ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA USANDO EL DINA TOOLBOX

Antes de continuar con el desarrollo del método de diseño, se necesita introducir una descripción de las funciones desarrolladas en el presente trabajo de tesis. Todas ellas se encuentran enlazadas en un Toolbox denominado DINA (Direct and Inverse Nyquist Array). Este utiliza como base las funciones del MFD Toolbox.

En el DINA Toolbox existen dos diferentes clases de rutinas :

- De enlace (drivers)
- Funciones

3.2.1 RUTINAS DE ENLACE (DRIVERS)

Estas sirven para dirigir de una forma amigable al usuario a través de un conjunto de menús, que finalmente invocan a unas funciones. Las rutinas de enlace pueden ser de varios tipos:

- Generales
- Carga de modelos
- Análisis sin precompensación
- Métodos de diseño
- Análisis con precompensación, y,
- Utilitarios

A continuación se nombra las rutinas, y a que función llama, se pone entre [] para indicar la función, más adelante se explicará las características de estas.

DRIVERS GENERALES

- DINA : Programa arrancador y carátula
- DINA2 : Driver principal que direcciona a todas las rutinas o funciones del Toolbox.
- KHELP3 : Apunta a la ayuda del DINA TOOLBOX

DRIVERS DE CARGA DE MODELO

- KESTADO3 : Apunta a las funciones de ingreso del modelo: [KESTADO] Y [KGENG]
- KMVFR3 : Direcciona a las funciones generadoras de la matriz MVFR

correspondiente según el modelo: [KWG] o [KWABCD].

DRIVERS DE ANALISIS SIN PRECOMPENSACION

KANALD3 : Apunta a otros drivers de análisis directo (MVFR Directa), estos son:

KCSTEPLD Invoca a la función [KSTEPLD] interacción en tiempo lazo abierto

KCSTEPLC Invoca a la función [KSTEPLC] interacción en tiempo lazo cerrado.

KCDOM Invoca a la función [KDOM] gráfico de dominancia.

KCNYQ Invoca a la función [KNYQ] gráficos de Nyquist con círculos de Gershgorin

KCMVBODE Invoca a la función [KMVBODE] gráficos de Bode multivariables.

KCLC Invoca la función [KLC] gráficos del lugar característico.

KANALI3 : Apunta a otros drivers de análisis inverso (MVFR inversa), estos son:

KICTEPLD Invoca a la función [KISTEPLD] interacción en tiempo

	lazo abierto
KICTEPLC	Invoca a la función [KISTEPLC] interacción en tiempo lazo cerrado
KICDOM	Invoca a la función [KDOM] gráfico de dominancia
KICNYQ	Invoca a la función [KNYQ] gráficos inversos de Nyquist con círculos de Gershgorin
KICBODE	Invoca a la función [KMVBODE] gráficos de Bode multivariables.
KICLC	Invoca la función [KLC] gráficos del lugar característico.

DRIVERS PARA DISEÑO

KDISEÑO3	:	Llama a las funciones de diseño, las mismas que pueden ser: [KDNA], [KARBITRA] para el método directo, de prueba y error respectivamente. Adicionalmente direcciona otro menú driver [KCINA].
KCINA	:	Maneja submétodos de diseño en base a INA, [KINAW] para técnica de evaluación a una frecuencia, $\hat{k}=G(0)$, o por operacio- nes elementales de filas y columnas.

- KSISO : apunta a otros drivers que sirven para el diseño de los compensadores SISO y por la verificación final, estos son:
- KCTSISO Invoca a los drivers siguientes:
- KC2TEPLC invoca la función [K2TEPLC]
- KiC2TEPC invoca la función [KI2TEPLC]
- KCNICH : Invoca los drivers siguientes:
- KC2NICH Invoca la función [KNICH] que sirve para el diseño de compensadores SISO usando el diagrama de Nichols para satisfacer especificaciones de Máximo de resonancia y por ende margen de fase, margen de ganancia.
- KIC2NICH Invoca también a la función [KNICH] , solo que utiliza las definiciones inversas.
- KBODELC : dibuja los diagramas de bode multivariables con realimentación incluyendo los compensadores SISO, el precompensador K y la planta
- KCOST : Invoca los siguientes drivers:
- KC2OST Maneja la función [KOST] gráficos de los círculos de Ostrowski para diversas ganancias usando las definiciones directas.

KIC2OST Maneja la función [KOST] gráficos de los círculos de Ostrowski para diversas ganancias usando las funciones inversas de MVFR

DRIVERS PARA ANALISIS CON PRECOMPENSACION

KANALCD3 Maneja los drivers de análisis directo con precompensación, estos son:

KC2TEPLD	Maneja la función [K2STEPLD] interacción en el tiempo con precompensación en lazo directo.
KC2TEPLC	Maneja la función [K2STEPLC] interacción en el tiempo con precompensación en lazo cerrado, con opción de variar compensadores SISO.
KC2DOM	Maneja la función [KDOM] gráficos de dominancia.
KC2NYQ	Maneja la función [KNYQ] gráficos de Nyquist con círculos de Gershgorin.
KC2MVBOD	Maneja la función [KMVBODE] gráficos de Bode multivariables en lazo cerrado (con realimentación), y con opción de añadir compensadores SISO.
KC2LC	Maneja la función [KLC] gráficos el lugar característico

KANALCI3 Maneja los drivers de análisis inverso con precompensación, estos son:

KIC2TEPD	Maneja la función [KI2TEPLD] interacción en el tiempo con precompensación en lazo directo.
KIC2TEPC	Maneja la función [KI2TEPLC] interacción en el tiempo con precompensación en lazo cerrado, con opción de variar compensadores SISO.
KIC2DOM	Maneja la función [KDOM] gráficos de dominancia.
KIC2NYQ	Maneja la función [KNYQ] gráficos de Nyquist con círculos de Gershgorin.
KIC2BODE	Maneja la función [KMVBODE] gráficos de Bode multi-variables en lazo cerrado (con realimentación), y con opción de añadir compensadores SISO.
KIC2LC	Maneja la función [KLC] gráficos del lugar característico

DRIVERS UTILITARIOS

KKEYB	:	Invoca una salida temporal al MATLAB
KSAVLOAD	:	Invoca los siguientes drivers
KSAVE		Sirve para salvar el ejercicio corriente.
KLOAD		Sirve para cargar un ejercicio desde el disco.

KCONVAR3 : Consulta las variables presente ese momento en memoria

3.2.2 FUNCIONES

En su conjunto todas las rutinas de enlace invocan a otras rutinas principales denominadas funciones.

Estas están estructuradas de tal forma que reciben parámetros o argumentos de entrada los cuales son procesados, para dar resultados en forma de parámetros de salida o gráficos.

Las funciones pueden ser clasificadas de tres tipos:

- Funciones para análisis gráfico en el dominio del tiempo
- Funciones para análisis gráfico en el dominio de la frecuencia
- Funciones de generación y diseño en el dominio de la frecuencia

A continuación se explica cada una de las ellas, se describe el formato de como se debe llamar la función, se describe que hace y se explica cada uno de los argumentos que son necesarios para el procesamiento normal de las función:

3.2.2.1 Funciones de análisis gráfico en el dominio del tiempo

Todas las funciones de análisis gráfico en el dominio del tiempo calculan y gráficas la interacción en el tiempo de una planta multivariable de orden 2×2 . Desarrollan gráficos de las salidas y_1 y y_2 debidos a la entrada u_1 con u_2 igual a cero y de las salidas y_1 y y_2 debidos a la entrada u_2 con u_1 igual a cero. La diferencia se establece si se dibujan en lazo abierto o lazo cerrado y a partir de que modelo lo hacen y que parámetros necesitan.

KSTEPLD

- Descripción : gráfica lazo directo a partir de G sin precompensación K .
- Formato : `kstepld(a,b,c,d)`
- Parámetros : a, b, c, d variables de estado de la planta

KSTEPLC

- Descripción : gráfica lazo cerrado sin precompensación K a partir de G con opción de incluir unos compensadores SISO. .
- Formato : `ksteplc(a,b,c,d)`
- Parámetros : a, b, c, d es el modelo en variables de estado de la planta

KI2TEPLD

- Descripción : gráfica lazo directo con precompensación \hat{K} a partir de $(GK)^{-1}$

Formato : $ki2tepld(a,b,c,d,kinv)$
Parámetros : a,b,c,d es el modelo en variables de estado
 $kinv$ es el precompensador inverso \hat{K} , formado por elementos reales y constantes.

KI2TEPLC

Descripción : gráfica lazo cerrado con precompensación \hat{K} a partir de $(GK)^{-1}$
Formato : $ki2steplc(a,b,c,d,kinv)$
Parámetros : a,b,c,d es el modelo en variables de estado.
 $kinv$ es el precompensador inverso \hat{K} , formado por elementos reales y constantes.

K2STEPLD

Descripción : gráfica lazo directo con precompensación K a partir de G
Formato : $k2stepld(a,b,c,d,knum,kden)$
Parámetros : a,b,c,d es el modelo en variables de estado.
 $knum$ es el numerador del precompensador K .
 $kden$ es el denominador del precompensador K .

K2STEP LC

Descripción : gráfica lazo cerrado con precompensación K a partir de G
Formato : $k2steplc(a,b,c,d,knum,kden)$

Parámetros : a,b,c,d : es el modelo en variables de estado
knum : es el numerador del precompensador
kden : es el denominador del precompensador

3.2.2.2 Funciones gráficas en el dominio de la frecuencia

Todas estas funciones tienen como parámetros:

w vector de frecuencias
g matriz respuesta de frecuencia MVFR que según el caso puede ser $G(s)$
o $Q(s)$.

Las funciones gráficas en el dominio de la frecuencia son:

KDOM

Descripción : Función para graficar los diagramas de la dominancia de un sistema multivariable.

Formato : kdom(w,g)

KLC

Descripción : Función para graficar los diagramas de Lugares característicos el sistema multivariable, adicionalmente se aprecia los gráficos de modulo de los lugares característicos vs. la frecuencia y los de los

ángulos de desalineamiento vs la frecuencia w del sistema.

Formato : `klc(w,g)`

KMVBODE

Descripción : Función para graficar la interacción de frecuencia (Diagrama de Bode de los elementos de una matriz función de transferencia $G(s)$ (MVFR).

Formato : `kmvbode(w,g)`

KNICH

Descripción : Función para calcular los compensadores SISO luego que el sistema es desacoplado. Usa los diagramas de Nichols para satisfacer especificaciones

Formato : `knich(w,g)`

KNYQ

Descripción : Función para graficar los diagramas de Nyquist del sistema multivariable, opcionalmente se puede agregar los respectivos círculos de Gershgorin para el análisis de la dominancia del sistema.

Formato : `knyq(w,g)`

KOST

Descripción : Función para graficar los círculos de Ostrowski mediante los cuales se analiza el espacio de ganancia

Formato : `kmvbode(w,g)`

3.2.2.3 Funciones de diseño

Estas funciones son las siguientes:

KARBITRA

Descripción : Función para desarrollar el precompensador K , en base a parámetros dados por el usuario arbitrariamente. Adicionalmente gráfica el diagrama de dominancia de $q=g*k$.

Formato : `[q,knum,kden]=karbitra(w,g)`

Parámetros : q = respuesta de frecuencia de $g*k$

$knum$ = numerador del precompensador

$kden$ = denominador del precompensador

w = es el vector de frecuencias

g = es la matriz MVFR de la función de transferencia $G(s)$

KDNA

Descripción : Función para desarrollar el diseño del precompensador K , basado en el método de minimización de Ford y Daly.

Formato : $[q, k_{num}, k_{den}] = kdna(w, g)$

Parámetros : q = respuesta de frecuencia de $g \cdot k$ (planta incluido el precompensador)

k_{num} = numerador del precompensador

k_{den} = denominador del precompensador

w = es el vector de frecuencias

g = es la matriz MVFR de la función de transferencia $G(s)$

KESTADO

Descripción : Función para ingresar el modelo de una planta de 2 entradas y 2 salidas con m estados (sistema 2×2) por variables de estado, para un posterior análisis y diseño.

Formato : $[a, b, c, d] = kmodelo()$

Parámetros : a, b, c, d es la descripción del espacio de estado de la planta

KGENG

Descripción : Función para ingresar la matriz función de transferencia G de un sistema 2×2 para un posterior análisis y diseño.

Formato : $[numg, comdeng] = kgeng()$

Parámetros : numg = numerador de la matriz función de transferencia
G
comdeng = denominador de la matriz
función de transferencia G

KINAFc

Descripción : Función para desarrollar el diseño del precompensador K, basado en el método del arreglo inverso de Nyquist (I.N.A.) mediante operaciones de filas y columnas.

Formato : [qinv,kinv]=kina(w,ginv)

Parámetros : qinv = \hat{K}^*Q planta y precompensador

kinv = precompensador

w = es el vector de frecuencias

g = es la matriz MVFR de la función de transferencia G(s)

KINAW

Descripción : Función para desarrollar el diseño del precompensador K, basado en el método de evaluación a una frecuencia ($\hat{K}=G(0)$) del arreglo inverso de Nyquist (I.N.A.)

Formato : [qinv,knuminv,kdeninv]=kina(w,ginv)

Parámetros : qinv = \hat{K}^*Q planta y precompensador

kinv = precompensador

w = es el vector de frecuencias

g = es la matriz MVFR de la función de transferencia $G(s)$

KWABCD

Descripción : Función para determinar el rango dinámico de trabajo de la frecuencia w . Adicionalmente calcula la matriz respuesta de frecuencia multivariable directa o inversa a partir de un modelo descrito en variables de estado.

Formato : $[w,g,ginv]=kwabcd(a,b,c,d)$

Parámetros : a,b,c,d : es el modelo en variables de estado

w : es el vector de frecuencias

g : es la matriz MVFR de la función de transferencia $G(s)$

$ginv$: es la matriz inversa MVFR (s)

KWG

Descripción : Función para determinar el rango dinámico de trabajo de la frecuencia w .

Adicionalmente calcula la respuesta de frecuencia multivariable a partir del modelo descrito mediante la matriz función de transferencia

$G(s)=numg/deng.$

Formato : $[w,g]=kwg(numg,comdeng)$

Parámetros : numg, comdeng: es el modelo en función de transferencia $G(s)$
w es el vector de frecuencias
g es la matriz MVFR de la función de transferencia $G(s)$

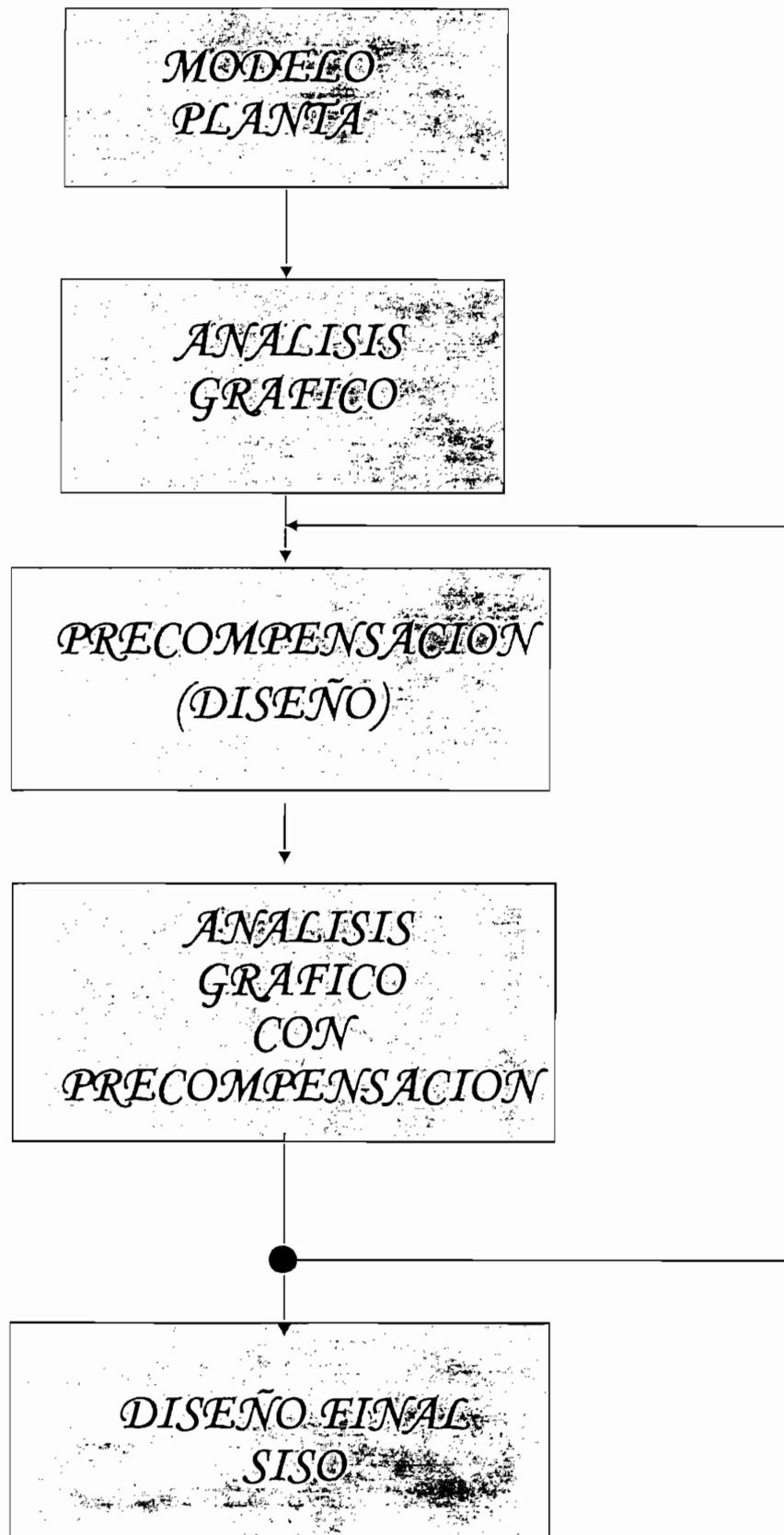
3.3.- ESTRUCTURA GENERAL Y METODO DE DISEÑO

Lo que se presenta a continuación es la metodología que se sigue para el análisis y diseño de sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia, tomando como fundamento todo el desarrollo teórico de los capítulos anteriores.

La estructura general de diseño se enmarca bajo el contexto del siguiente diagrama de flujo que se presenta en la página siguiente::

La estructura general de diseño se enmarca bajo el contexto del siguiente diagrama de flujo que se presenta en la página siguiente:

ESTRUCTURA GENERAL DE DISEÑO



Como se aprecia esta tesis se basa en el desarrollo de cinco *módulos* relacionados entre sí mediante las rutinas de enlace del DINA TOOLBOX.

A continuación se explica brevemente cada módulo, se pone entre [] la función que se usa para realizar el proceso pertinente, no se pondrán las rutinas de enlace, porque, fueron explicadas anteriormente, y su función es de únicamente direccionar las variables de memoria para que se procesen usando las diferentes funciones :

3.3.1 Modelo de la planta

- 1) Inicialmente se ingresa el modelo de la planta que puede ser representado ya sea por variables de estado [KESTADO] o por matriz función de transferencia [KGENG]. Este modelo puede ser obtenido por ejemplo del TOOLBOX de Identificación del MATLAB, al procesar datos experimentalmente de plantas reales o pueden ingresarse ejemplos teóricos.
- 2) El modelo así ingresado es transformado a formato MATLAB [KESTADO] o [KGENG].
- 3) Una vez que el Matlab tiene los modelos, lo que se hace es generar el rango dinámico de trabajo para la frecuencia; este vector w , sirve para generar la matriz MVFR , ya sea directa o inversa, según se vaya a trabajar ya sea con el DNA, el INA o el metodo de prueba y error. Todo esto se lo realiza usando según el caso [KWABCD] o [KWG].

Los parámetros de salida de este módulo son :

- a, b, c, d (El modelo)
- w (Rango dinámico de trabajo de la frecuencia)
- MVFR de la planta (respuesta de frecuencia de la planta), que según el caso como se vaya a trabajar puede ser directa o inversa según como se lo quiera tratar, si se va a usar el método DNA o de prueba o error (Precompensador K arbitrario) se trabajará con la matriz MVFR sin invertir, si se va usar el INA se usará la matriz MVFR inversa.

En este punto es conveniente aclarar el concepto de la matriz MVFR, pues se lo ha venido utilizando a lo largo de todo el presente trabajo de tesis, y se lo va a seguir nombrando.

3.3.1.1 Matriz MVFR (Multivariable Frequency Response).-

Existe solamente una estructura de datos en el MATLAB que es la matriz compleja. La estructura más comúnmente usada por el MFD Toolbox y por ende también por el DINA Toolbox es la matriz Multivariable Frequency Response (MVFR), la cual es una matriz con una particular estructura. A una frecuencia cualquiera, la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo con n entradas y m salidas es descrito por una matriz compleja. La respuesta a k frecuencias es representada por una pila de matrices respuestas de frecuencias individuales una sobre otra, dando lugar a una matriz $km \times n$, esta representación se denomina la matriz MVFR. Por ejemplo, si las matrices

respuestas de frecuencias a distintas frecuencias son : G_1, G_2, \dots, G_k , entonces la correspondiente matriz respuesta de frecuencia multivariable es:[4].

$$MVFR \text{ de } G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \cdot \\ G_k \end{bmatrix}$$

3.3.2 MODULO ANALISIS GRÁFICO.

Los parámetros de salida anteriores (w,a,b,c,d,g) son los parámetros de entrada a este módulo, con estos se pretende determinar en un primer momento, el grado de dominancia de la planta para según sea el caso se determine si la planta requiere o no precompensación para el desacoplamiento de la misma. Este módulo de análisis sin precompensación ofrece las siguientes alternativas:

3.3.2.1.- Gráficos de Nyquist y círculos de Gershgorin

Usa para el análisis de dominancia los diagramas de Nyquist de cada elemento de la matriz función de transferencia $G(s)$ conjuntamente con los círculos de Gershgorin asociados a los elementos de la diagonal de la misma matriz. Estos nos muestran la difusidad del sistema . La función que se realiza esto es: [KNYQ]

Interpretación:

Al observar los diagramas de Nyquist de los elementos g_{ii} y la bandas generadas por los círculos de Gershgorin para cada g_{ii} , se debe apreciar que estas bandas no incluyan el origen o un punto crítico $(-f_i, 0)$, Si el origen o el punto crítico $(-f_i, 0)$, está encerrado por la banda de Gershgorin, no existe dominancia. Por otra parte al tener bandas más pequeñas se tiene menos difusidad y por tanto menos incertidumbre. Para mayor referencia puede revisar la sección 2.1.4.3. de esta tesis.

3.3.2.2.- Respuesta de frecuencia de dominancia

Usa diagramas de Bode, estos permiten ver como varia en cada columna la dominancia con la frecuencia al estilo de un diagrama de bode. La función que se usa en este caso es: [KDOM].

Interpretación:

Un valor de σ bajo 0 dB (menor a 1) indica que la dominancia diagonal se mantiene a esa frecuencia para la columna que se este tratando, caso contrario no.

3.3.2.3.- Lugar característico

Cada matriz MVFR esta compuesta de varias submatrices, cada una de ellas tiene valores evaluados de $G(s)$ a una frecuencia. Cada de estas submatrices por ende tiene sus respectivos valores propios a diferente frecuencia, estos al

graficarlos como el diagrama de Nyquist nos dan un gráfico denominado lugar característico donde se aplica el criterio generalizado de Nyquist para el lugar característico .

Por otro lado en esta alternativa de análisis también existe los gráficos de la magnitud de los lugares característicos vs. w y los del ángulo de desalineamiento (ángulo entre cada uno de los vectores propios de G y los vectores base standard) vs. w . Estas gráficos pueden obtenerse usando la función [KLC].

Interpretación

Mediante este método de análisis inicialmente utiliza el gráfico de Nyquist de los valores propios de la matriz MVFR, estos sirven solamente para ver la estabilidad del sistema, estos no deben encerrar al punto -1, pues si lo encierran el sistema es inestable.

Los otros gráficos, magnitud de los lugares característicos vs. w y ángulo de desalineamiento vs. w . se deben analizar de la siguiente forma:

A bajas frecuencias debe fijarse la atención en el gráfico de magnitud del lugar característico vs. w . Para que el sistema sea dominante su magnitud debe ser lo suficientemente grande y para altas frecuencias, en cambio se presta atención en el gráfico del ángulo de desalineamiento, este debe tener la fase lo más pequeña posible, para decir que el sistema esta desacoplado o es DD. Para mayores detalles se puede ver la sección 2.4.4.

3.3.2.4.- Diagramas de Bode

Permite visualizar los diagramas de Bode en lazo abierto de cada elemento g_{ij} de la matriz función de transferencia G , usa la función: [KMVBODE]

Interpretación

Se compara los elementos g_{11} con g_{21} , la magnitud en dB del primero debe ser mayor al segundo, lo mismo ocurre en el caso de g_{12} y g_{22} , g_{22} debe ser mayor en magnitud [dB], sino sucede así no existe dominancia.

3.3.2.5.-Interacción en el tiempo

Para medir la interacción entre las entradas y las salidas en lazo abierto o lazo cerrado se usa los gráficos de interacción en el tiempo. Este en cualquier caso permite verificar las características dinámicas de los sistemas. Estos gráficos permiten ver la respuesta de y_1 y y_2 a una función escalón u_1 con u_2 igual cero (y_{11} y_{21}), y también ver la respuesta de y_1 y y_2 a una función escalón u_2 con u_1 igual cero (y_{12} y_{22}), Es decir, se ve la influencia de la entrada u_1 en las salidas y_1 y y_2 con u_2 igual cero; y la influencia que ejerce la entrada u_2 sobre y_1 y y_2 con u_1 igual cero.

Dependiendo del caso que se trate, análisis sin precompensación directo o inverso, en lazo cerrado o directo, se invoca las siguientes funciones:

[KSTEPLD] análisis directo lazo directo sin precompensación.

[KSTEPLC] análisis directo lazo cerrado sin precompensación.

[KISTEPLD] análisis inverso lazo directo sin precompensación.

[KISTEPLC] análisis inverso lazo cerrado

Interpretación

Un sistema será dominante si la magnitud de y_{11} (salida y_1 debido a u_1) es mayor a y_{21} (salida y_2 con u_1) y adicionalmente la magnitud de y_{22} (salida y_2 debido a u_2) es mayor a y_{12} (salida y_1 con u_2), es decir, en el primer caso con u_1 aplicado se debe esperar y_1 diferente de cero y y_2 tendiendo a cero.; en el segundo caso en cambio, con u_2 aplicado se debe esperar y_2 diferente de cero y y_1 tendiendo a cero.

Si se quiere saber la respuesta en el tiempo de y_1 se tienen que sumar las interacciones y_{12} y y_{11} , lo mismo si se quiere saber la respuesta en el tiempo de y_2 igualmente se debe sumar las interacciones y_{21} y y_{22} . Cuando un sistema es desacoplado la respuesta en el tiempo de y_1 es igual a y_{11} y para y_2 es y_{22} .

3.3.2.6.-Interpretación de resultados

Luego del análisis gráfico sin precompensación se puede establecer:

Si el sistema es dominante en lazo directo, posiblemente es dominante en lazo cerrado o también se puede dar el caso de que tal vez la planta no es dominante en lazo directo, pero a lo mejor si lo es en lazo cerrado (esto se puede analizar usando interacción en el tiempo en lazo cerrado). De cualquier forma si la planta es dominante en lazo cerrado directamente se puede pasar al diseño de lazos individuales (compensación SISO) para satisfacer especificaciones de: máximo sobreimpulso, tiempo de establecimiento, error

en estado estable, máximo de resonancia, ancho de banda, etc.

Para el caso de establecer que la planta no es dominante o si se quiere mejorar la dominancia (para mejorar respuesta transitoria) se ejecuta el siguiente módulo: Precompensación (Diseño).

3.3.3 MODULO DE PRECOMPENSACION (DISEÑO)

Los parámetros de entrada de este módulo son los de salida del módulo modelo de la planta. Este módulo ofrece las siguientes alternativas:

- DISEÑO USANDO EL ARREGLO INVERSO DE NYQUIST (INA)
- DISEÑO USANDO EL ARREGLO DIRECTO DE NYQUIST (DNA)
- DISEÑO ARBITRARIO (MANIPULACION MANUAL)

3.3.3.1 DISEÑO INA

Necesita como parámetros de entrada w y g^{-1} . Existen dos alternativas para el método INA:

- 1) Operaciones elementales de filas y columnas de $G(s)$, usando este método el diseñador tratará off line hacer cero los elementos fuera de la diagonal principal y este resultado ingresar al computador para el cálculo del Q . Esto se lo hace

mediante la función [KINAFc].

- 2) Escoger $\hat{K}_p = G(0)$ basados en las condiciones de estacionalidad. La función que se ejecuta para obtener \hat{K}_p es : [KINAW]

Los parámetros de salida para cualquiera de los dos casos son:

La matriz MVFR q inversa con su respectivo vector de frecuencias w , y el precompensador k inverso ($kinv$)

3.3.3.2 DISEÑO DNA

Otra alternativa de diseño es el método del DNA. Todo lo que este método realiza es incluido en la función [KDNA], la más importante del DINA Toolbox. Esta función necesita como parámetros de entrada: w , ancho de banda de trabajo o rango dinámico de trabajo (mínima frecuencia y máxima frecuencia) que se lo calcula en base a los polos de la planta (que se obtienen de los valores propios de la matriz A), y de los ceros de transmisión (ceros comunes en todos los elementos de la función de transferencia $G(s)$) y g (matriz MVFR de la planta).

El proceso que sigue el método de diseño para el DNA es el siguiente:

- 1) Se determina los ordenes relativos del precompensador K . En otras palabras, si se supone que el sistema tiene interacciones, o en otros términos no es dominante, o es dominante pero no lo suficientemente, entonces se debe hacer el diseño de un compensador que desacople o reduzca las interacciones o mejore la dominancia en la planta, comenzando por determinar la *mínima estructura* de cada columna del precompensador: es decir, determinando la más alta potencia β y la más baja potencia α .
- 2) Con la información anterior se procede al cálculo de los coeficientes de la estructura encontrada anteriormente mediante el proceso de minimización mejorado que permite el diseño de un $K(s)$ dinámico que permite cubrir todo el rango de frecuencia. Esto arroja como resultados un numerador de K (k_{num}) y un denominador de K (k_{den}).
- 3) Mediante el gráfico de Bode de la dominancia, se chequea si el sistema es dominante o si requiere la redefinición de la estructura del precompensador, si es este el caso se regresa al paso 2).
- 4) Si no tiene buena dominancia a pesar de lo anterior, se puede agregar:
 - Una función de ponderación para agregar más peso a la influencia del precompensador sobre un cierto rango de frecuencia, es decir, concentrar el efecto de la minimización sobre un rango de frecuencia.
 - Filtros para atenuar el ruido de alta frecuencia; y/o,
 - Filtros resonantes que sirven para cancelar la resonancia mediante un cero a la misma frecuencia que se produce la misma, con lo que se

minimiza el efecto de resonancia.

- 5) Chequear los gráficos de dominancia para establecer que el desacoplamiento se ha realizado efectivamente.
- 6) Una vez desacoplado se calcula la matriz MVFR q , y se puede hacer el diseño de lazos individuales usando el siguiente módulo.

Los parámetros de salida de esta función son:

- La matriz MVFR q que es igual a la multiplicación de la matriz MVFR g (la planta) por la MVFR del precompensador K ($K=k_{num}/k_{den}$)
- La matriz k_{num} (numeradores del precompensador K) y el vector k_{den} (denominador común del precompensador).

3.3.3.3 KARBITRA

Sirve como una alternativa, pues se da el caso que se quiere probar el comportamiento de una planta al ponerse un precompensador arbitrario en base a parámetros dados por el usuario, adicionalmente se puede usar este método cuando se requiera probar compensadores de papers o de libros. La función que se realiza el precompensador arbitrario es :[KARBITRA].

Tiene como parámetros de salida la matriz MVFR q y el precompensador K (k_{num}/k_{den}).

3.3.4 MODULO DE ANALISIS CON PRECOMPENSACION

Los parámetros de entrada a este módulo son : q , k_{num} y k_{den} si se utilizó el DNA, o el K arbitrario ó k_{inv} si se utilizó el INA.

Una vez que se ha realizado el diseño se verifica los resultados con todas las herramientas gráficas que se dispone. Este módulo básicamente tiene los mismas alternativas que el módulo análisis gráfico con la diferencia que no se trabaja con G , sino con $Q=G*K$. Esto permite verificar que efectos tiene la precompensación y adicionalmente habilita las opciones de otro módulo: Diseño final SISO.

Lo único que cambia es que se usan otras funciones para interacción en el tiempo, puesto que en estas hay que incluir :

[K2STEPLD] análisis directo lazo directo con precompensación.

[K2STEPLC] análisis directo lazo cerrado con precompensación.

[KI2TEPLD] análisis inverso lazo directo con precompensación.

[KI2TEPLC] análisis inverso lazo cerrado con precompensación.

3.3.5 MODULO DISEÑO FINAL SISO

Los parámetros de entrada a este módulo son: w y q , explicados anteriormente.

Una vez desacoplado se procede al diseño de los lazos individuales con bloques SISO

y realimentación, pues este solo tiene sentido para cuando existe control, usando para este cometido uno de las siguientes alternativas:

1.- EN FRECUENCIA .- Para esto se usa los diagramas de Nichols y los círculos de Gershgorin para el diseño de compensadores SISO, en estos se debe tratar de conseguir un máximo de resonancia de -3dB , lo que significa un margen de fase mayor o igual a 50° , con lo que se consigue un factor de amortiguamiento de 0.5 y por tanto un máximo sobreimpulso menor al 20%, con lo que se garantiza un buen comportamiento del lazo individual. Los círculos de Gershgorin sirven para ver el grado de difusidad del lugar que se forma sobre la carta de Nichols.

2.- EN TIEMPO.- Una vez desacoplado, también se puede hacer el diseño de lazos individuales usando la respuesta en el tiempo, donde se puede implementar controladores del tipo PID, PI, P, redes adelanto/atraso, etc. y para saber que efecto tiene su implementación se ve la respuesta en el tiempo para apreciar : tiempo de establecimiento, máximo sobre-impulso, error de estado estable para garantizarse un buen comportamiento del lazo individual.,

Complementariamente, en este módulo se puede verificar los resultados finales usando:

DIAGRAMAS DE BODE CON REALIMENTACIÓN. Estos incluyen la planta , el precompensador y los compensadores SISO en lazo cerrado. Para esto se usa la función

[KBODELC], que básicamente es la misma función [KMVBODE], solo que se que se trabaja en lazo cerrado con una matriz MVFR qlc que es igual a la multiplicación de las matrices MVFR g, k y la respectiva matriz MVFR de los compensadores SISO

ESPACIO DE GANANCIA.- mediante estos se puede ver la *robustez* de la planta verificando la región del espacio de ganancia mediante los círculos de Ostrowski, estos permiten predecir el performance o comportamiento de la planta al alterarse las ganancias f_i que pueden considerarse como ganancias k_i en los lazos directos, pues en este caso lo único que cambia es la redefinición de la entrada cuando se pone en lazo cerrado, y además, sirve para garantizar estabilidad en las peores condiciones.

El sistema si el diseño ha sido llevado adecuadamente, debe ser robusto, esto significa tres cosas:

- Baja sensibilidad, es decir, la respuesta de salida no se ve afectada al cambiarse los parámetros de la planta, por ejemplo, si hay un cambio en la entrada de un 30%, la salida puede cambiar en un porcentaje bajo como 1%.
- Rechazo a perturbaciones
- Confiabilidad, es decir, un sistema que sea seguro.

Todo lo explicado anteriormente en cada uno de los módulos se aprecia mejor en el diagrama de flujo general del DINA Toolbox en la página siguiente.

DIAGRAMA DE FLUJO PRINCIPAL PARA EL DINA TOOLBOX

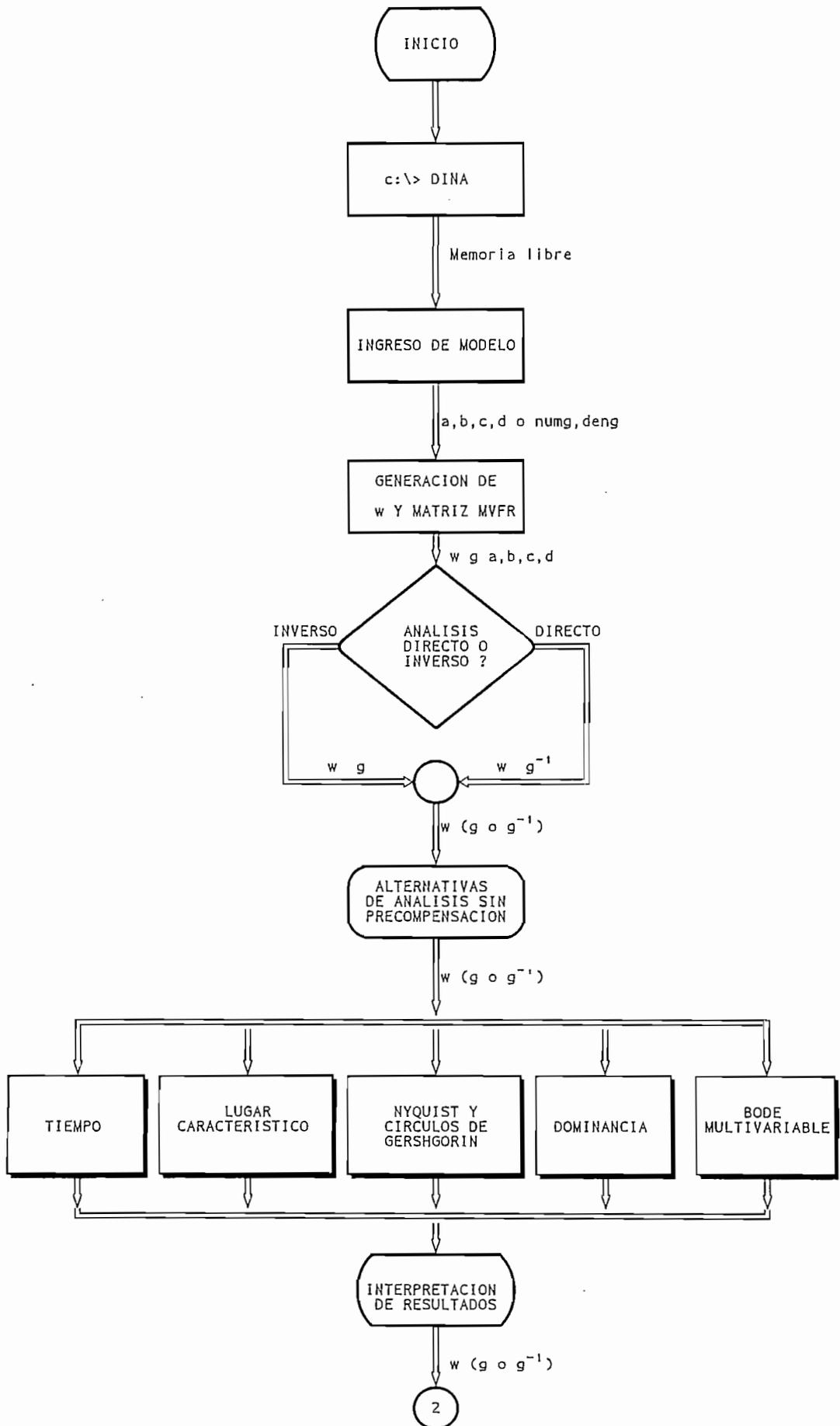


DIAGRAMA DE FLUJO PRINCIPAL PARA EL DINA TOOLBOX

(continuacion.....)

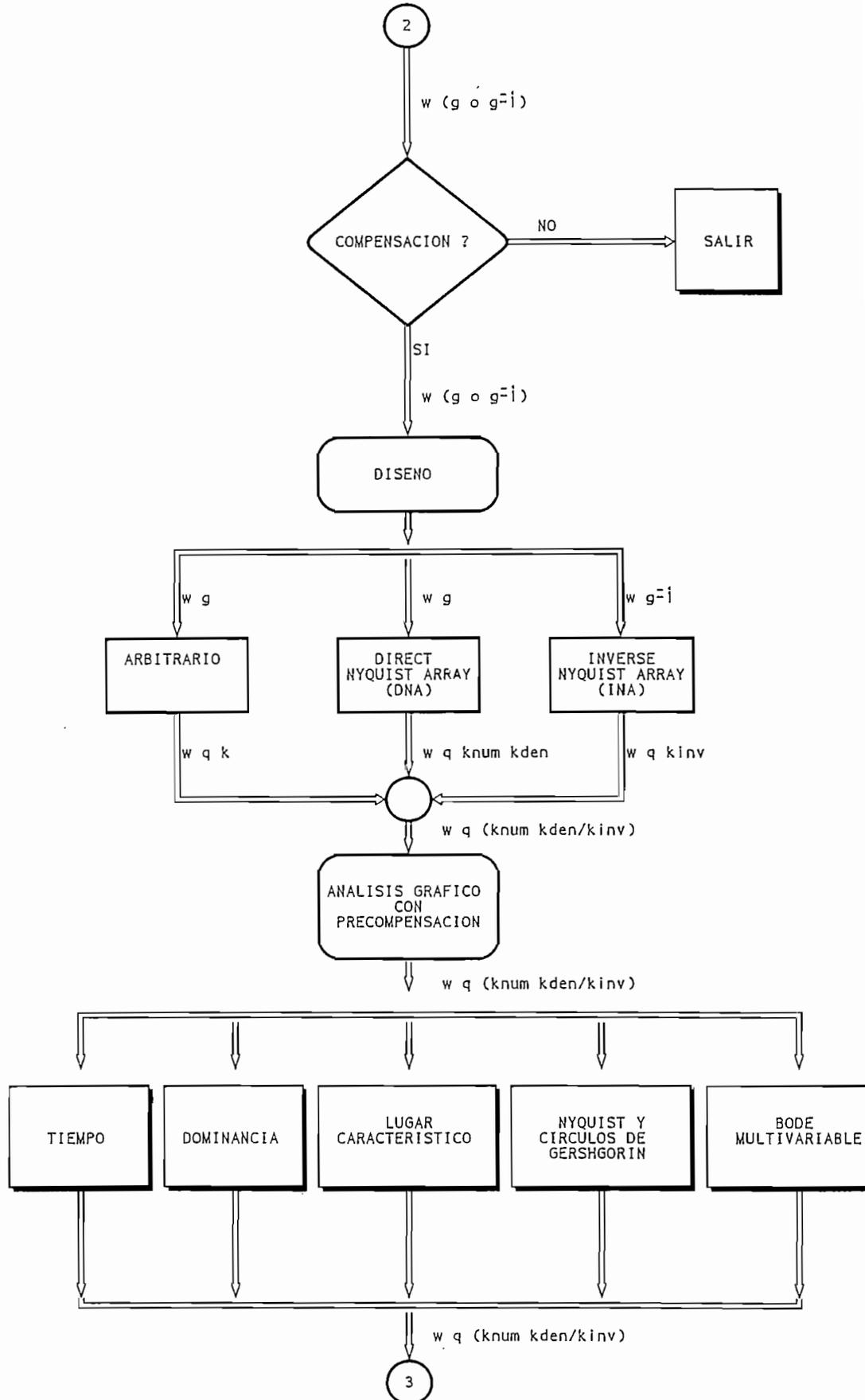
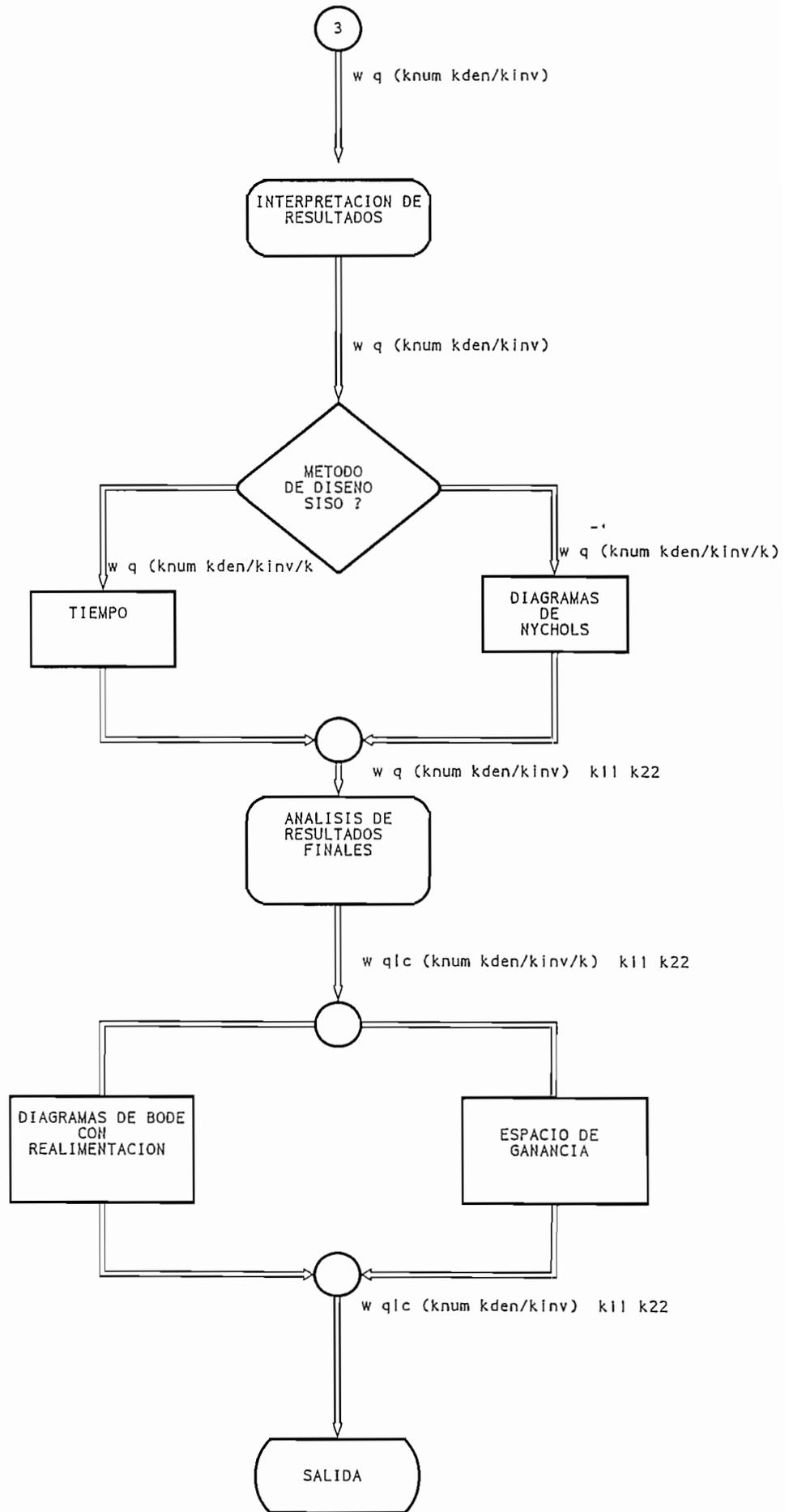


DIAGRAMA DE FLUJO PRINCIPAL PARA EL DINA TOOLBOX

(continuacion.....)



CITAS CAPITULO III:

- [1] The MathWorks, Inc , " MATLAB USER GUIDE " .
21 Eliot St. South Natick, Ma 01760 (508) 653-1415. e_MAIL:
na.mathworks@na-net.stanford.edu
- [2] The MathWorks, Inc , " CONTROL TOOLBOX USER GUIDE "
- [3] J.M.Maciejowski, " MULTIVARIABLE FREQUENCY DOMAIN TOOLBOX
" Versión 1.3 Ed. GEC Engineering Research Centre & Cambridge Control Ltd.
21 Dec 1987.
- [4] J.Boyle, M. Ford, J.Maciejowski " MULTIVARIABLE TOOLBOX FOR
USE WITH MATLAB ". Control system magazine. Enero 1989.

CAPITULO IV : RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 RESULTADOS

4.2 CONCLUSIONES

4.3 RECOMENDACIONES

4.1 RESULTADOS

En el presente capítulo se presentan seis ejemplos (modelos) implementados para el análisis y diseño de sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia usando el DINA TOOLBOX .

Los cuatro primeros ejemplos presentados son teóricos, es decir que no tienen ninguna representación de algún sistema físico, pero que se los ha incluido porque sirven para ilustrar la utilización de los programas.

El ejemplo 5 es un modelo de un turbo generador nuclear de 1072 MVA, en el cual se ilustra las bondades del método de diseño DNA.

El ejemplo 6 es un modelo lineal de un compresor con en el que se ilustra el uso del método de diseño INA .

En todos los ejemplos presentados en este capítulo se ha puesto los resultados obtenidos en el computador al usar el DINA TOOLBOX. En estos resultados se ha incluido tanto los gráficos de análisis como los de diseño y los resultados finales, y todos ellos se encuentran al final de cada ejercicio.

Como se aprecia, se pretende mostrar la utilidad y eficiencia que puede ofrecer la presente tesis, en el análisis y diseño de los sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia con la ventaja de obtener resultados gráficos mediante el uso del DINA TOOLBOX.

4.1.1 MODELOS MATEMÁTICOS

Los siguientes ejemplos son puramente teóricos y no tienen significación física, solamente sirven para ilustrar el uso del Toolbox DINA.

4.1.1.1 SISTEMA DOMINANTE TOTALMENTE

El modelo de este sistema es:

Variables de estado

$$a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0 & -2 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizando la transformación a matriz función de transferencia, la planta queda:

Matriz función de transferencia

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Como se aprecia el sistema está totalmente desacoplado y funciona como un sistema multilazo sobre el cual se puede hacer diseño SISO directamente. Para verificar el hecho de que existe dominancia (pues ya está desacoplado) se va a realizar el análisis directo con los diagramas de Nyquist con los círculos de Gershgorin, con los gráficos de dominancia, el lugar característico y la respuesta en el tiempo.

Resultados:

Los gráficos se encuentran al final del ejemplo:

En la *figura 4.1* se aprecia los diagramas de Nyquist para este ejemplo, en el se aprecia que no existen círculos de Gershgorin, como era de esperarse, puesto que esta desacoplado el sistema.

Al graficarse dominancia, puesto que $\sigma=0 / a_{ii}$, esto implica que al sacar Bode, es decir, dibujar $20 \log \sigma$ vs w , se tendría $-\infty$ y por lo tanto el gráfico correspondiente a la dominancia no aparece.

En el lugar característico *figura 4.2* la magnitud del LC es alta a bajas frecuencias como es de esperarse, mientras que en el ángulo de desalineamiento a altas frecuencias la fase es baja, 0° como era de esperarse en un sistema totalmente desacoplado.

En la *figura 4.3* se observa que no existe interacción en la respuesta en el tiempo en lazo cerrado sin precompensación, por lo tanto se puede proceder al diseño SISO para mejorar la respuesta en régimen transitorio y el error en estado estable. Con los compensadores SISO :

$$k_{11} = 10 + 10/s \quad (\text{lazo 1})$$

$$k_{22} = 5 + 5/s \quad (\text{lazo 2})$$

Se tiene una respuesta satisfactoria (ver *figura 4.4*), donde y_1 es la salida 1 y y_2 es la salida 2. Estos gráficos de interacción se convierten en las respuestas en el tiempo del sistema cuando se ha desacoplado el sistema.

EJEMPLO N°1

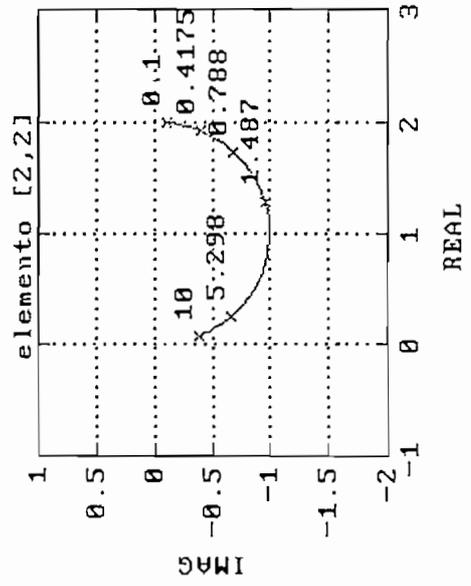
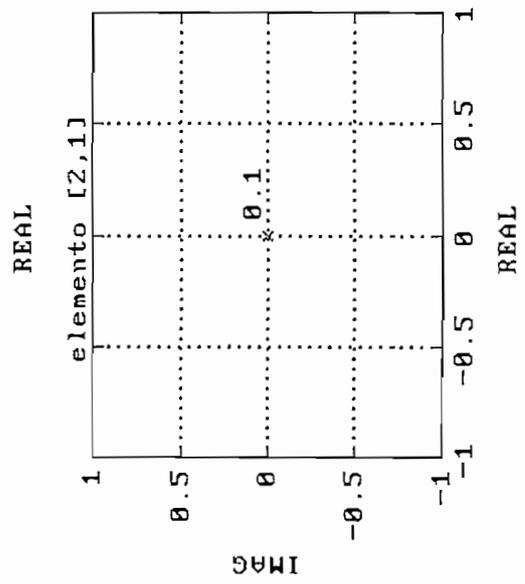
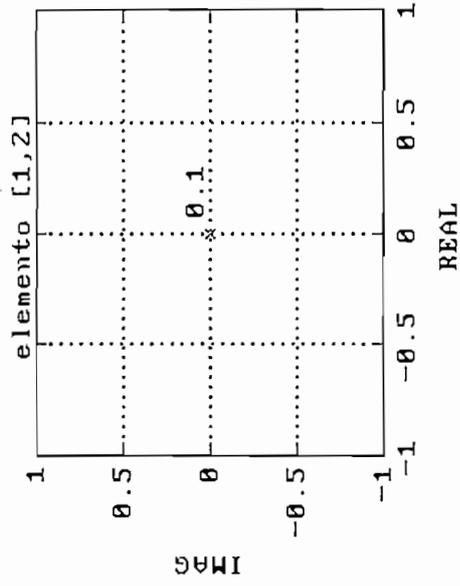
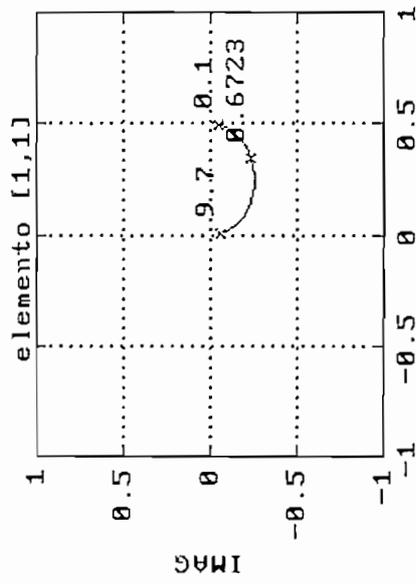


Figura 4.1

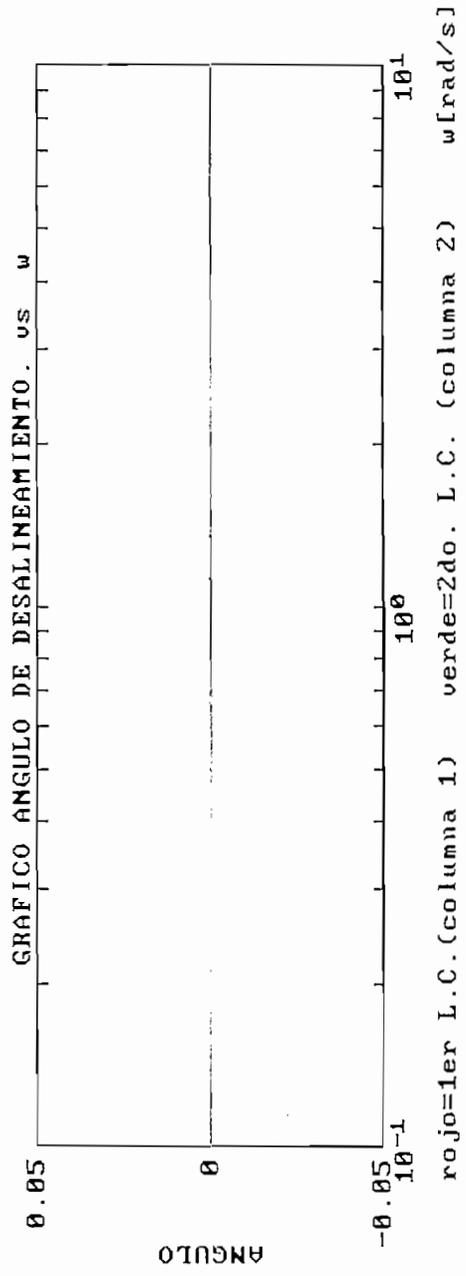
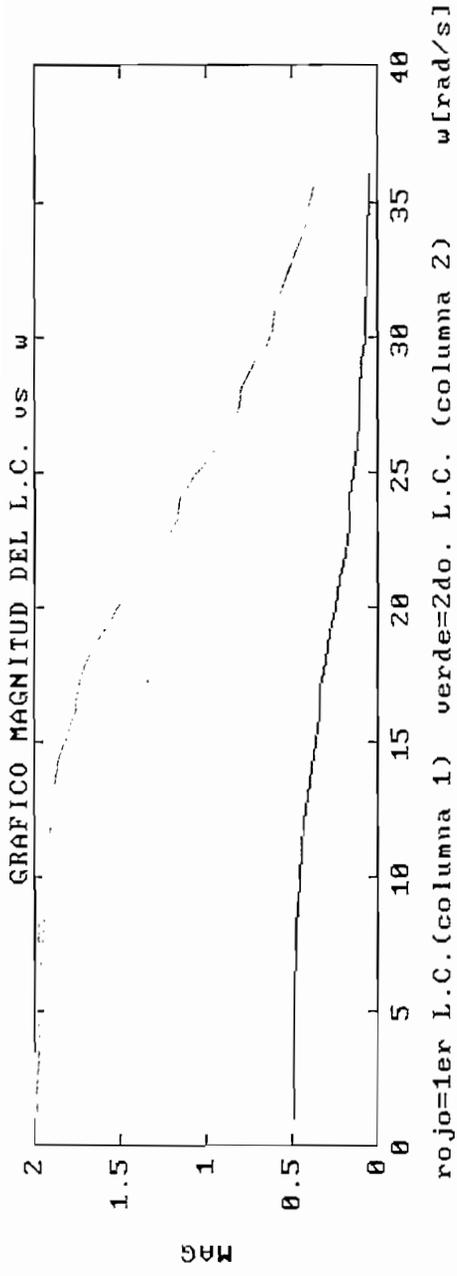


Figura 4.2

— Verde
— Rojo

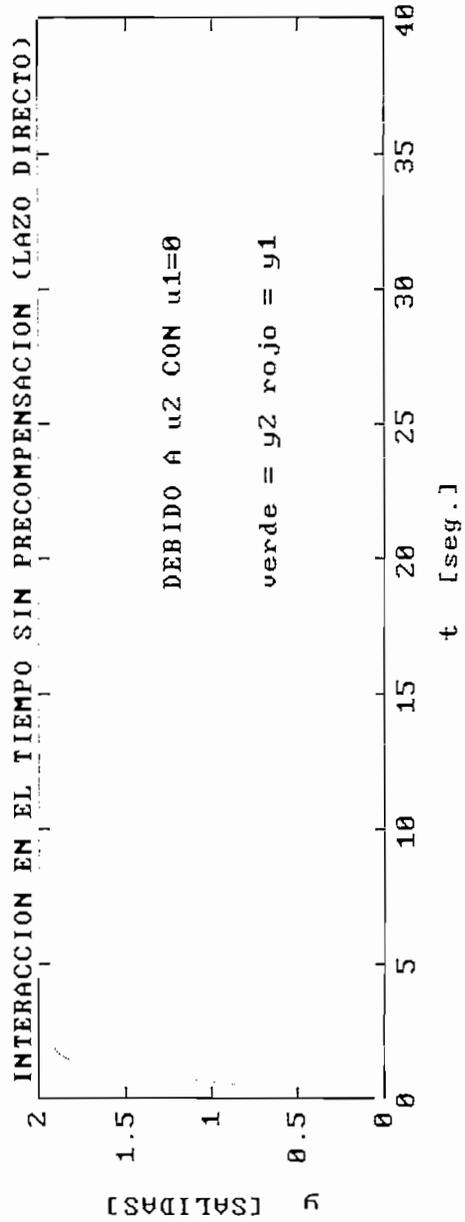
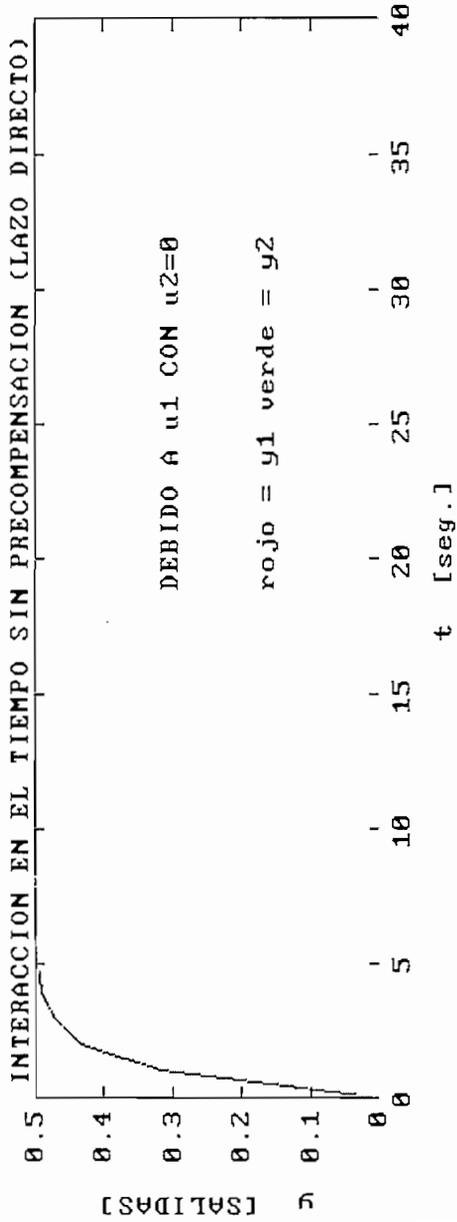


Figura 4.3

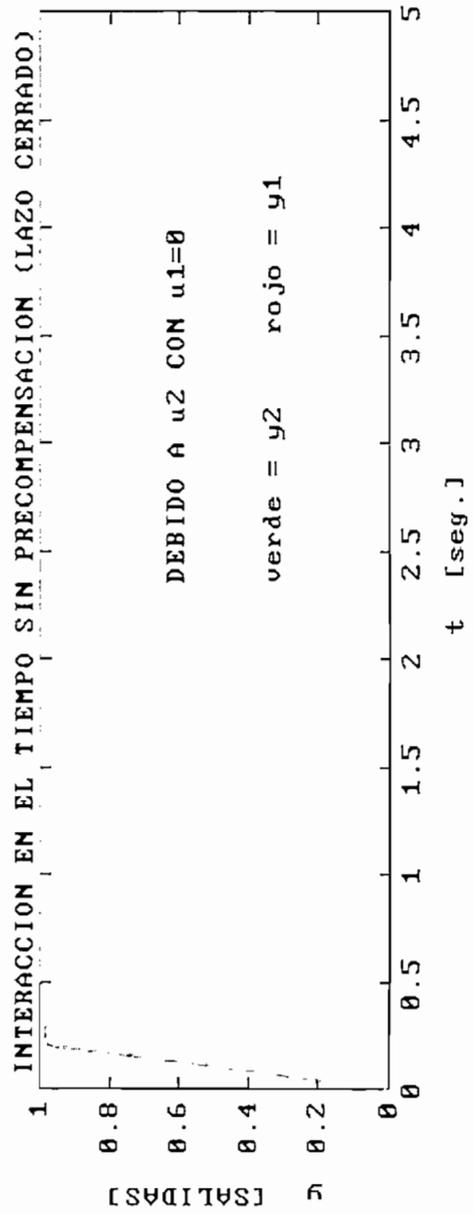
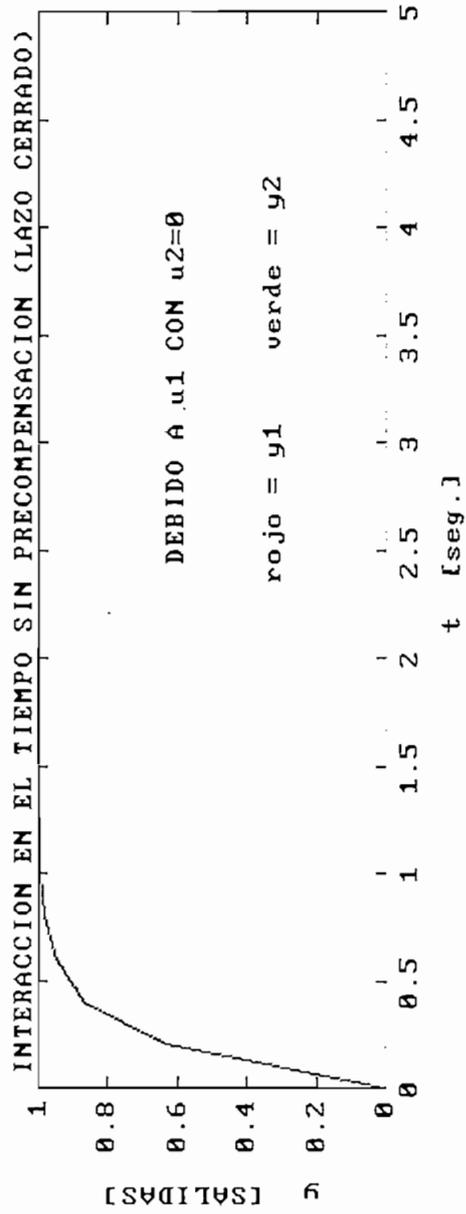


Figura 4.4

Verde
Rojo

4.1.1.2 SISTEMA CON FUERTE INTERACCIÓN EN UNA SOLA COLUMNA

Este ejemplo tiene el siguiente modelo:

Matriz función de transferencia

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

pasando a :

Variables de estado

$$a = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 \\ 0 & 0.8944 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 \\ 0 & -0.8944 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resultados :

Los gráficos se encuentran la final de este ejercicio:

La *figura 4.5* muestra Nyquist con los círculos de Gershgorin, se aprecia una fuerte interacción en la columna , pues la banda de Gershgorin encierra el origen.

Dado que la segunda columna es dominante, el gráfico respectivo de dominancia sale en $-\infty$, mientras que la primera columna tiene valores de $\sigma > 1$, que determinan que no existe dominancia en esta columna. (*figura 4.6*)

Si bien es cierto que en la magnitud de LC a bajas frecuencias existe un ganancia, se aprecia que para la 1era columna la fase del ángulo de desalineamiento es aproximadamente 80° , y para la 2da 0° , con lo que se concluye que la 1era columna no es dominante. (*figura 4.7*)

Al proceder a la precompensación ocurre lo siguiente:

Dado que el sistema no es estrictamente propio, pues la matriz d tiene un valor 1, se hace necesario agregar un filtro para que la matriz G tenga el denominador común que igual o mayor a los numeradores, para obviarse este paso que si lo puede hacer el DNA, se opta por un diseño de un precompensador dinámico K arbitrario (obtenido con operaciones de filas y columnas), que es igual a:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & 1 \end{bmatrix}$$

Y usando $k_{11} = 10 + 5/s$ y $k_{22} = 10 + 10/s$ el resultado es el que es muestra en la *figura 4.8.*, que como se ve es muy satisfactorio.

EJEMPLO N°2

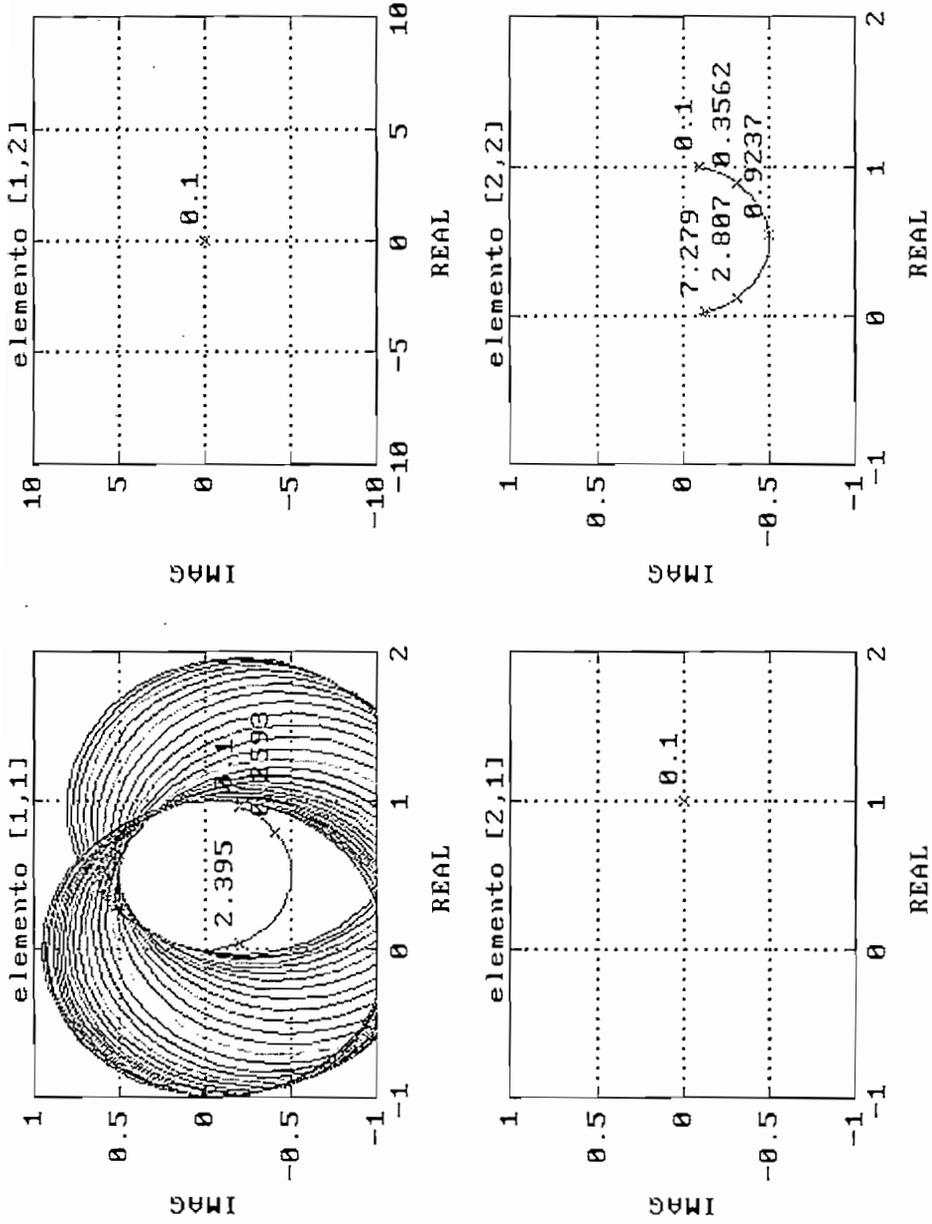


Figura 4.5

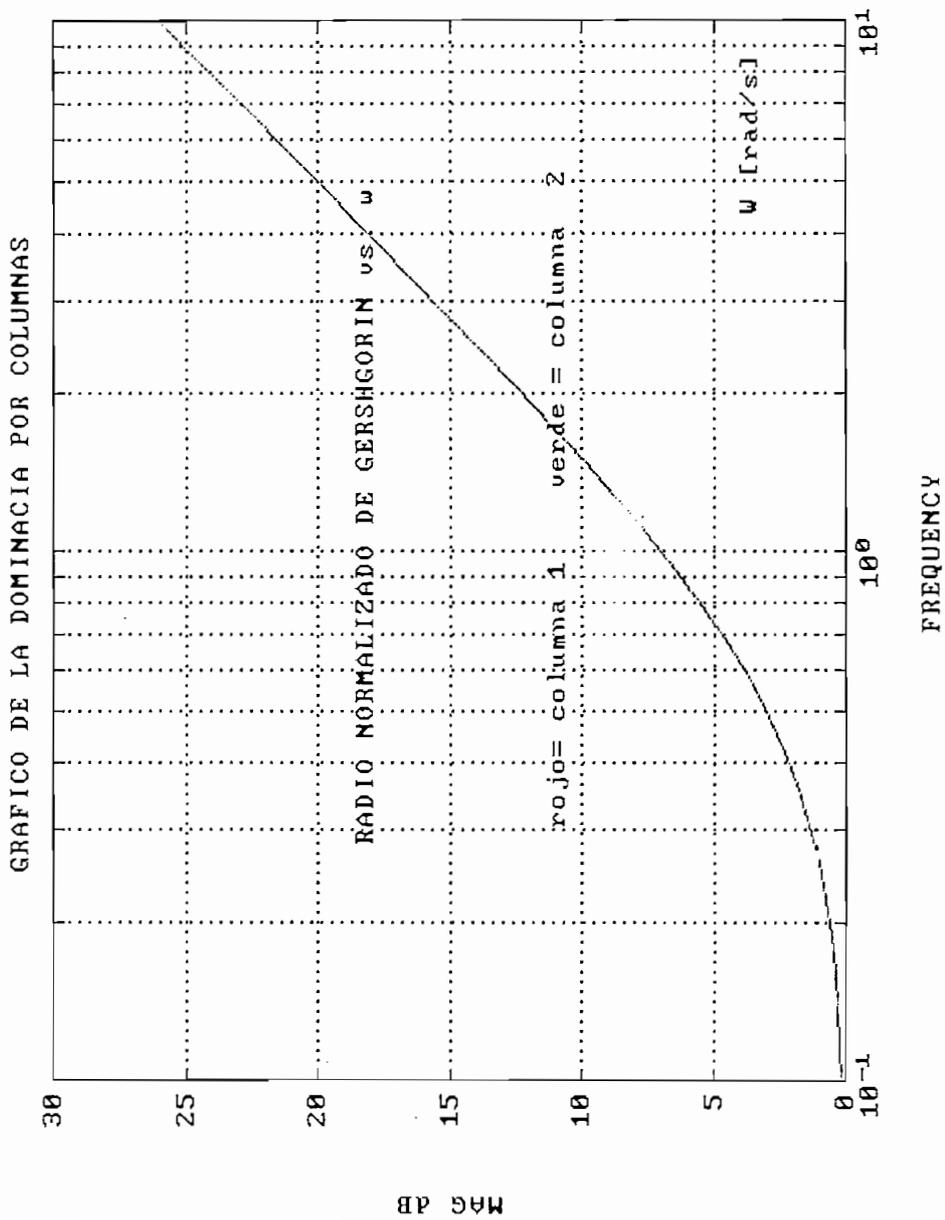


Figura 4.6

Verde
Rojo

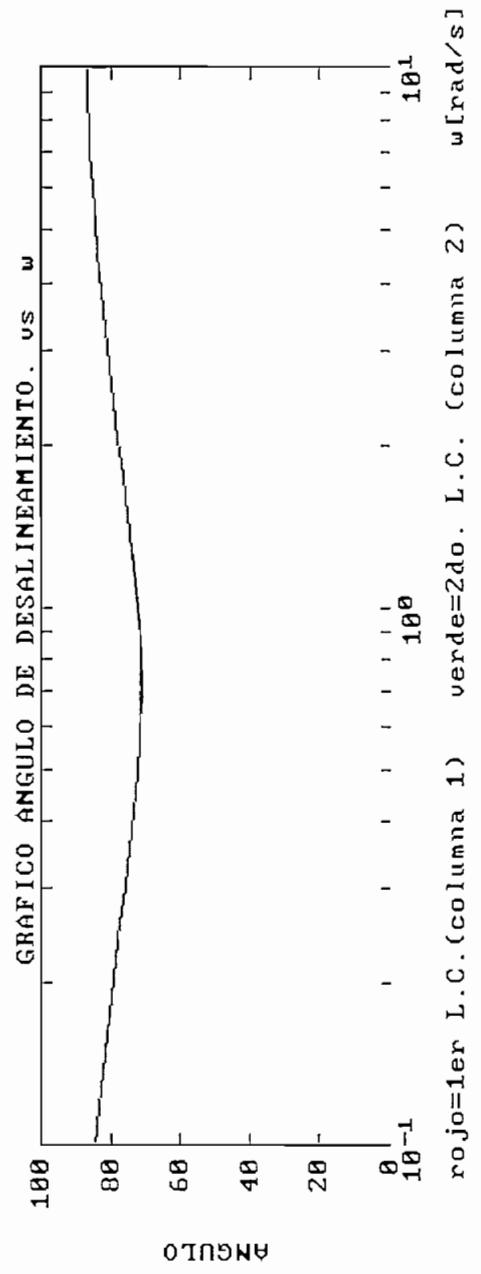
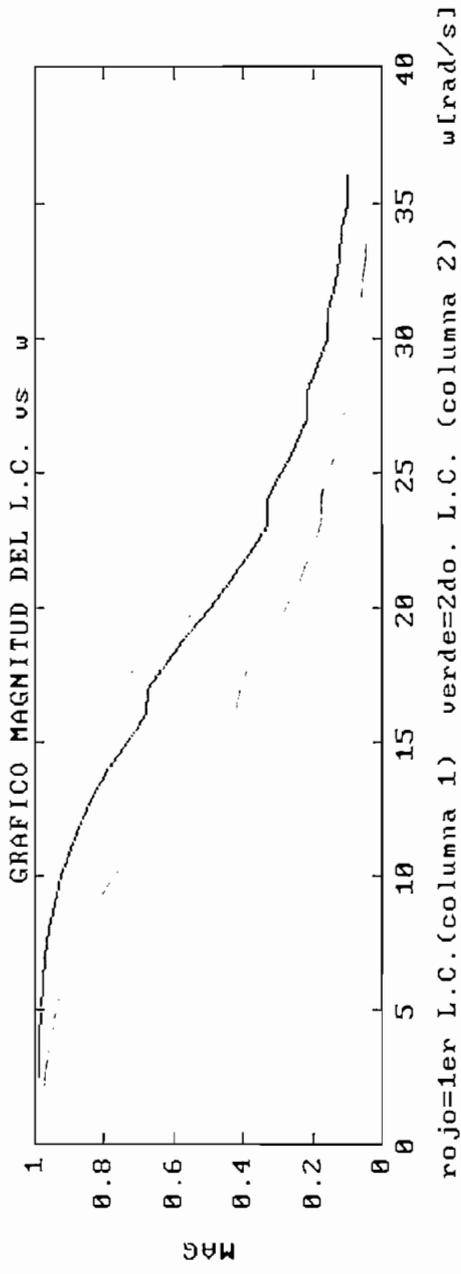


Figura 4.7

— Verde
- - - Rojo

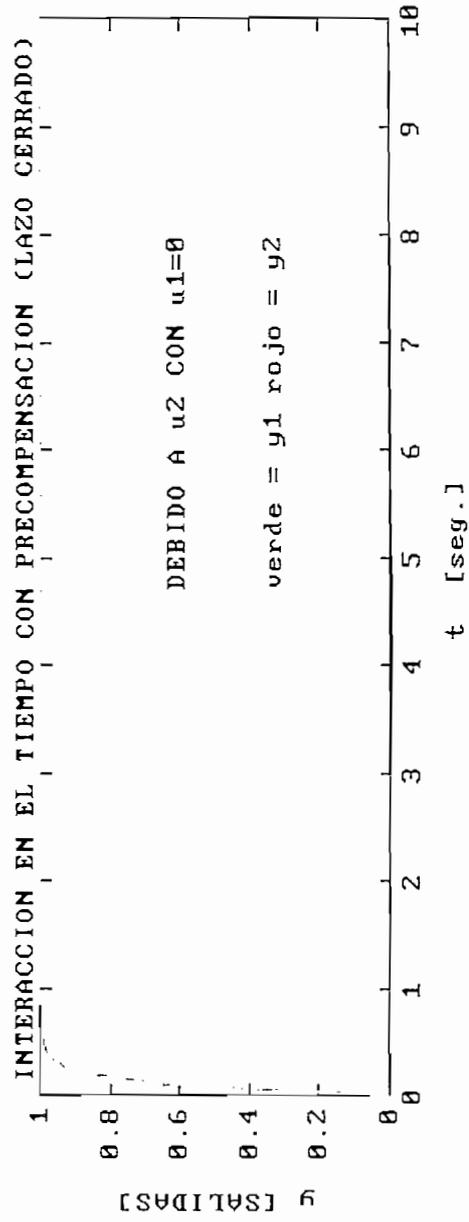
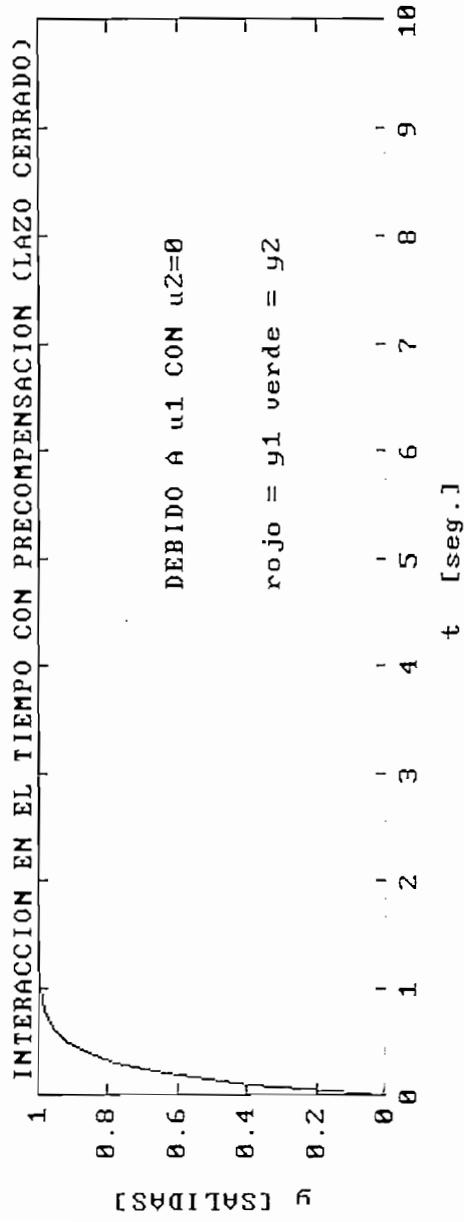


Figura 4.8

— Verde
— Rojo

4.1.1.3 SISTEMA CON FUERTE INTERACCIÓN EN LA SEGUNDA COLUMNA

Este sistema tiene el siguiente modelo:

Variables de estado

$$a = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene una fuerte interacción en la columna 2, como se aprecia en el gráfico de interacción en el tiempo sin precompensación en lazo directo (*figura 4.9*), en el gráfico de dominancia (*figura 4.10*), en Nyquist con Gershgorin en el elemento [2,2] se aprecia que la banda encierra al origen (*figura 4.11*)

Por lo anterior, es necesario un precompensador. El DNA calculó el siguiente precompensador:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -8.4427 \\ 0 & 2.6761 \end{bmatrix}$$

Con este precompensador el gráfico de dominancia permite apreciar que ya se logro desacoplar al estar las dominancias de cada columna bajo cero (*figura 4.12*).

La *figura 4.13* muestra que en tiempo (lazo directo) el sistema está desacoplado, pero se necesita cambiar el signo la 2da columna, para el compensador SISO de esta columna.

El resultado final en tiempo usando $k_{11} = 5 + 5/s$ y $k_{22} = - \{10 + 10/s\}$ es el que es muestra en la *figura 4.14*.

Este resultado utilizando un precompensador de coeficientes constantes es satisfactorio.

EJEMPLO N°3

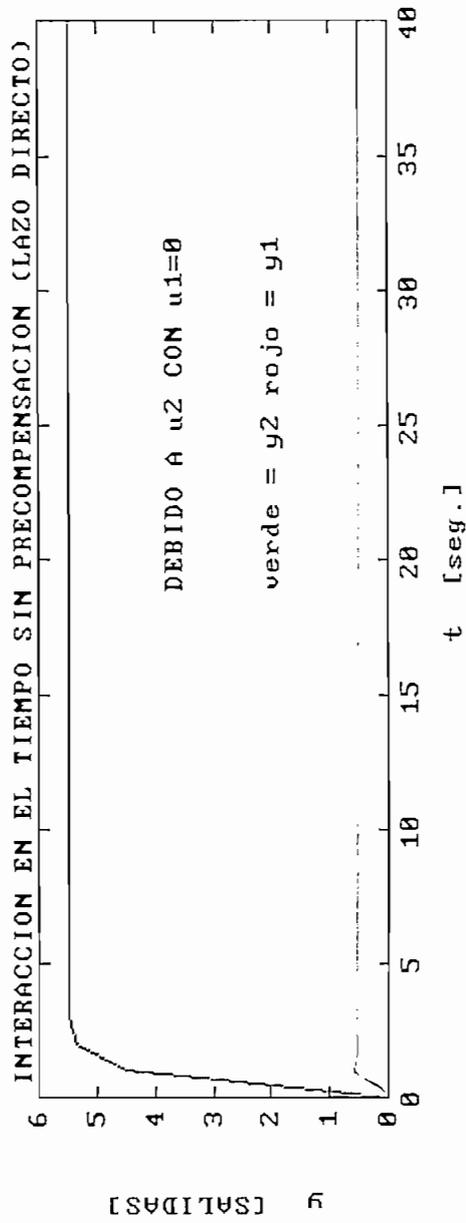
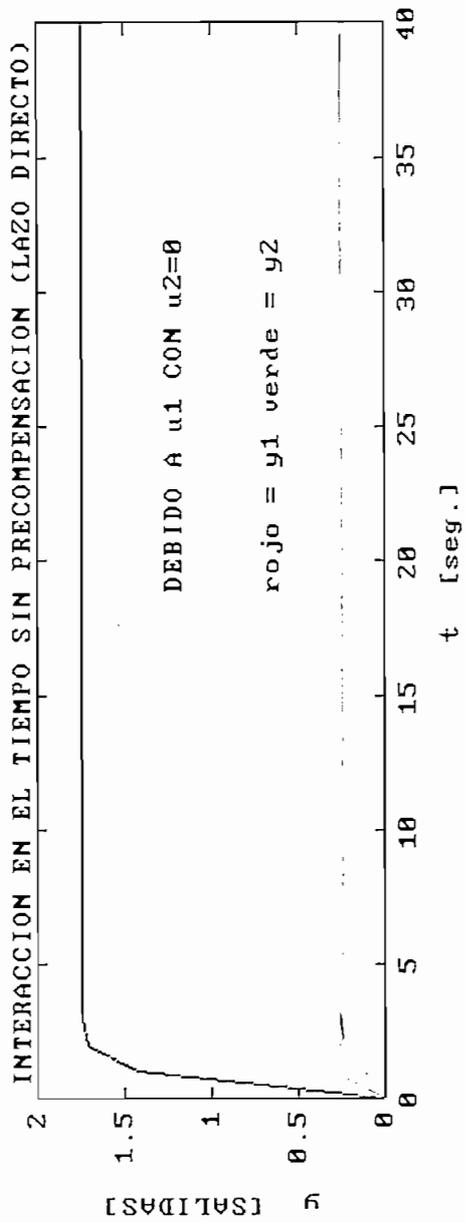


Figura 4.9

— Verde
— Rojo

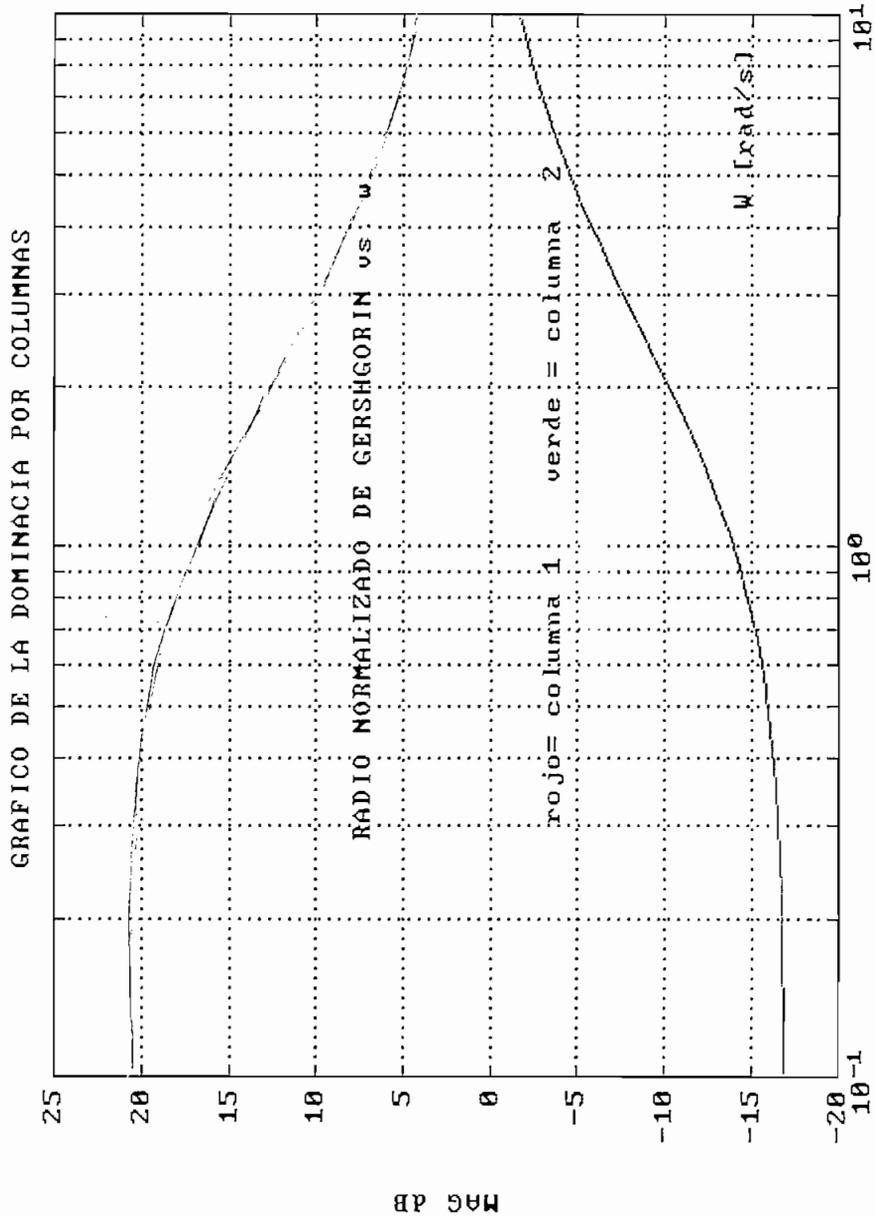


Figura 4.10

Verde
Rojo

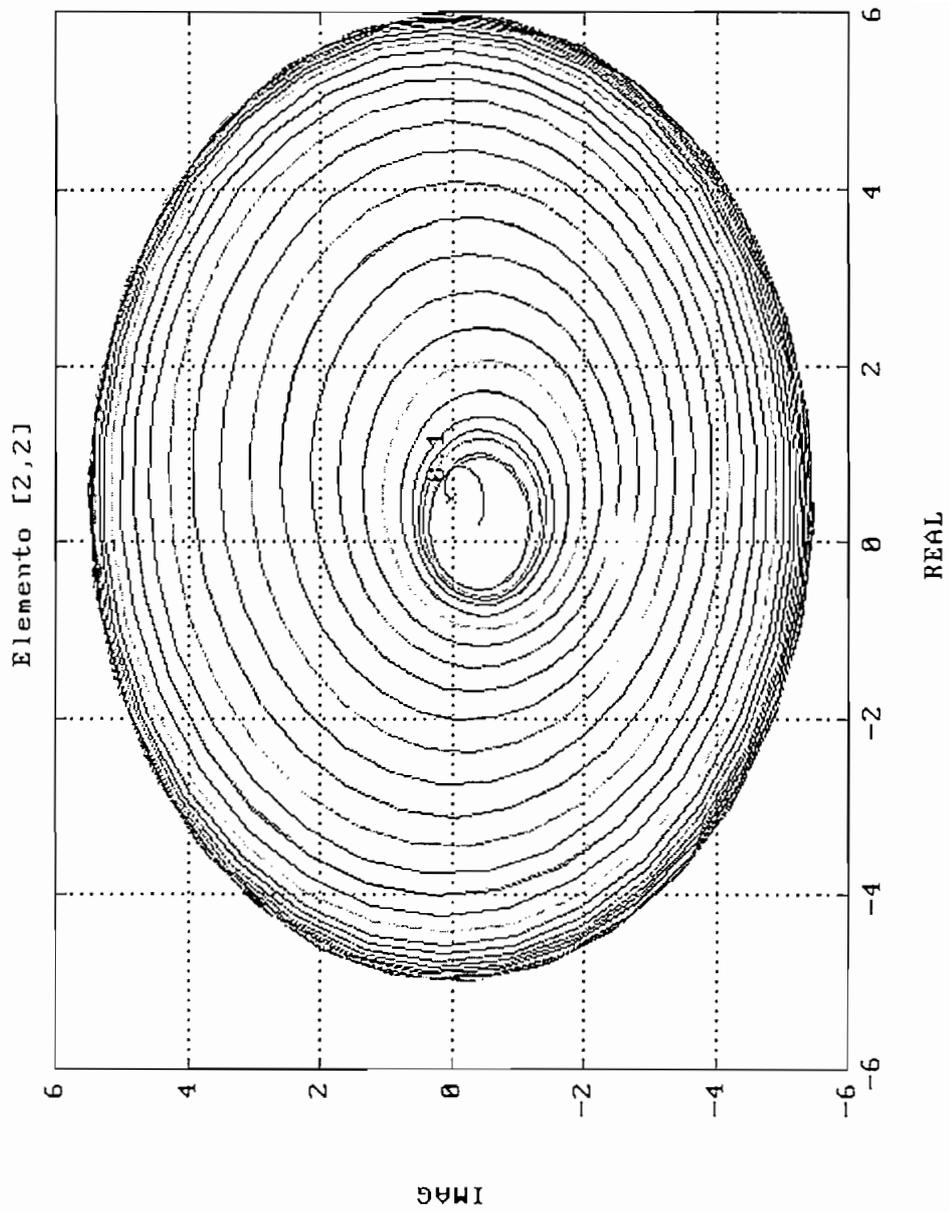


Figura 4.11

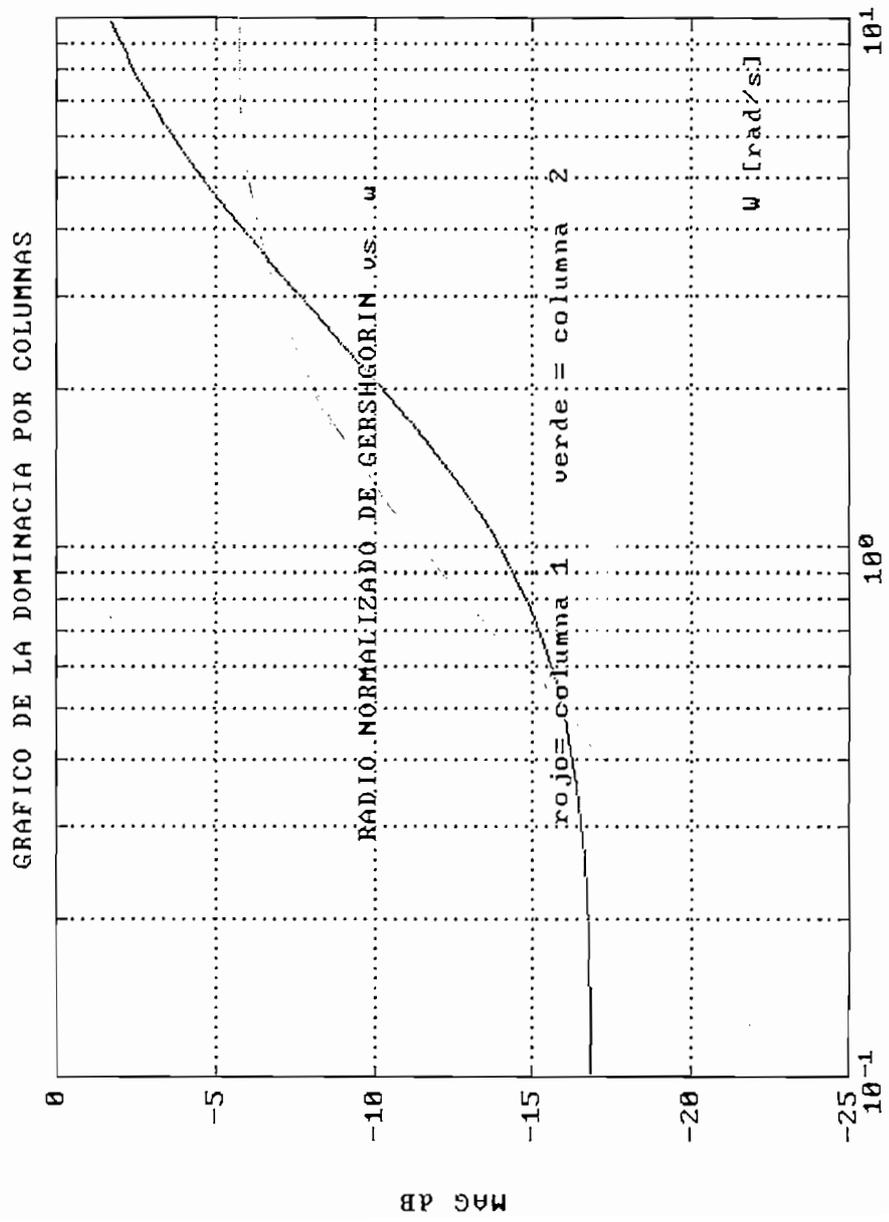


Figura 4.12

Verde
Rojo

4.1.4.4 SISTEMA BASE

Se denomina sistema base porque sirve de ejemplo base para ilustrar el diseño mediante los dos métodos: DNA e INA

El modelo de este sistema es el siguiente:

Variables de estado

$$a = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DNA

El sistema no es dominante en la 1era columna, pues tiene una fuerte interacción en esta columna, como se aprecia en el gráfico de interacción en el tiempo sin precompensación en lazo directo (*figura 4.15*), en el gráfico de dominancia (*figura 4.16*), en Nyquist con Gershgorin en el elemento [1,1] se aprecia una banda muy grande que encierra al origen (*figura 4.17*)

En cuanto a la 2da columna si bien es cierto que es dominante pero no lo suficiente, como se aprecia en el gráfico de Nyquist con los círculos de Gershgorin del elemento [2,2] (*figura 4.18*)

En los diagramas multivariables de Bode se ve más claramente la poca dominancia de la 2da columna. Adicionalmente en el gráfico para el criterio de Nyquist para el lugar característico (*figura 4.20*) se observa cierta tendencia a la inestabilidad por parte de la 1era columna, pues tiende a cerrar el punto -1.

A bajas frecuencias la 2da columna se comporta bien, no así la 1era, mientras que en alta frecuencia analizando el ángulo de desalineamiento se observa que la fase de la 2da columna es 30° , y para la 1era columna es 130° , esto denota que la 2da columna va a presentar problemas a altas frecuencias (respuesta transitoria mala) como se desprende de la *figura 4.21*.

Por lo expuesto anteriormente se hace necesario el uso del método del DNA para diseñar un precompensador que desacople la planta. Este calculó el siguiente K:

$$K = \begin{bmatrix} 1.2752 & - 0.7193 \\ - 0.2978 & 0.0785 \end{bmatrix}$$

Con este precompensador se consigue una mejora en la dominancia tal como se aprecia en el gráfico de la *figura 4.22* , en los gráficos de Nyquist con los círculos de Gershgorin de las *figuras 4.23, 4.24 y 4.25*. .

En la interacción en el tiempo con precompensación en lazo directo (*figura 4.26*) se ha logrado desacoplar el sistema, pero aún falta por un lado mejorar el error de estado estable y por otro, hay que introducir un cambio de signo en los compensadores SISO que se vayan a incluir.

En el gráfico del criterio de Nyquist para el lugar característico (*figura 4.27*), el sistema es estable, aunque la 2da columna está en el límite de la estabilidad. Se aprecia también que se ha logrado que la magnitud del lugar característico a baja frecuencia sea mayor que a altas frecuencias, pero se necesita ganancia para aumentar el valor de la magnitud. Con gráfico del ángulo de desalineamiento, se observa que se ha bajado la fase de este pero es necesario mejorar esto con los compensadores SISO. (*figura 4.28*)

El resultado final en tiempo usando los compensadores SISO :

$$k_{11} = -[5 + 5/s] \quad \text{y} \quad k_{22} = -\{5 + 5/s\}$$

es el que es muestra en la *figura 4.29*..

El diseño SISO en frecuencia con un $k_{11} = -1$ y los círculos M de 0 y 3 dB se observa

en la *figura 4.30* , por otro lado, con los mismos compensadores k_{11} y k_{22} anteriores se aprecia resultados satisfactorios en frecuencia, puesto que el primer lazo no tiene margen de resonancia, tiene un gran margen de fase y un margen de ganancia muy grande, así mismo el segundo lazo tiene los círculos de Gershgorin formando una banda con gran difusidad , pero que en todo caso es estable, y tiene un margen de resonancia menor a 3dB. (Ver figuras 4.31 y 4.32).

Habiéndose completado los diseños de los lazos univariados se procedió a realizar el análisis final de resultados usando diagrama de Bode multivariable en lazo cerrado (incluye precompensación y compensadores SISO), en el se aprecia como el diseño da resultados satisfactorios , pues se ha bajado la interacción y por ende se ha mejorado la dominancia. Este último gráfico se encuentra en la *figura 4.32 b*

INA

Como una fuente de comparación, se procede al análisis y diseño usando la otra alternativa , el INA .

Los diagramas inversos de Nyquist adjuntos con los círculos de Gershgorin permiten establecer que no existe dominancia en la 2da columna, y para la primera columna se nota que existe dominancia tal como se aprecia en las *figuras 4.33, 4.34 y 4.35*

Por lo anterior, es necesario para desacoplar calcular mediante el INA, un precompensador inverso. Este fue calculado de la siguiente manera:

$$K_{inv} = \begin{bmatrix} 1.00 & 7.00 \\ 2.60 & 11.20 \end{bmatrix}$$

Con este K_{inv} la respuesta en el tiempo es aceptable, faltando mejorar solo el tiempo de establecimiento. (*figura 4.36*)

Para mejorar el tiempo de establecimiento se usa los compensadores SISO $k_{11} = 5 + 5/s$ y $k_{22} = 5 + 5/s$, y se obtiene un resultado mucho mejor al anterior (*figura 4.37*). En frecuencia, usando Nichols se observa para el 1er lazo un sistema con un margen de ganancia alto, igual cosa sucede con el lazo 2. (*figuras 4.42 y 4.43*)

La influencia del K_{inv} determina que el sistema sea desacoplado, tal como se aprecia en los gráficos de Nyquist inversos con Gershgorin. (*figuras 4.38, 4.39*)

En cuanto al espacio de ganancia de la planta compensada, se observa que el sistema es robusto, pues para distintos valores de f_i mantiene la dominancia. (*figura 4.40 1era columna y figura 4.41 2da columna*)

Conclusión: Los dos métodos son válidos y llevan a resultados satisfactorios.

EJEMPLO N°4

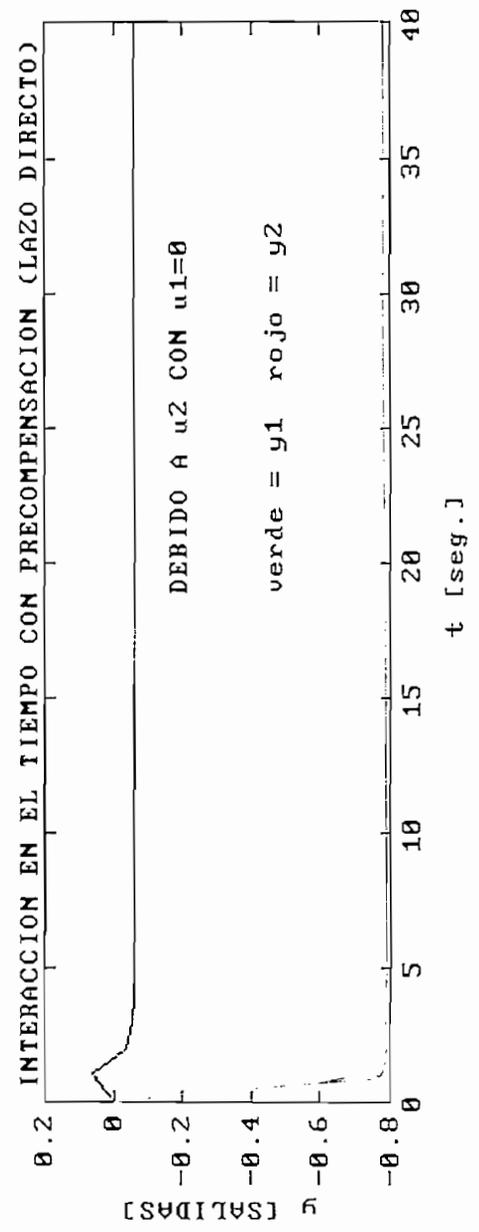
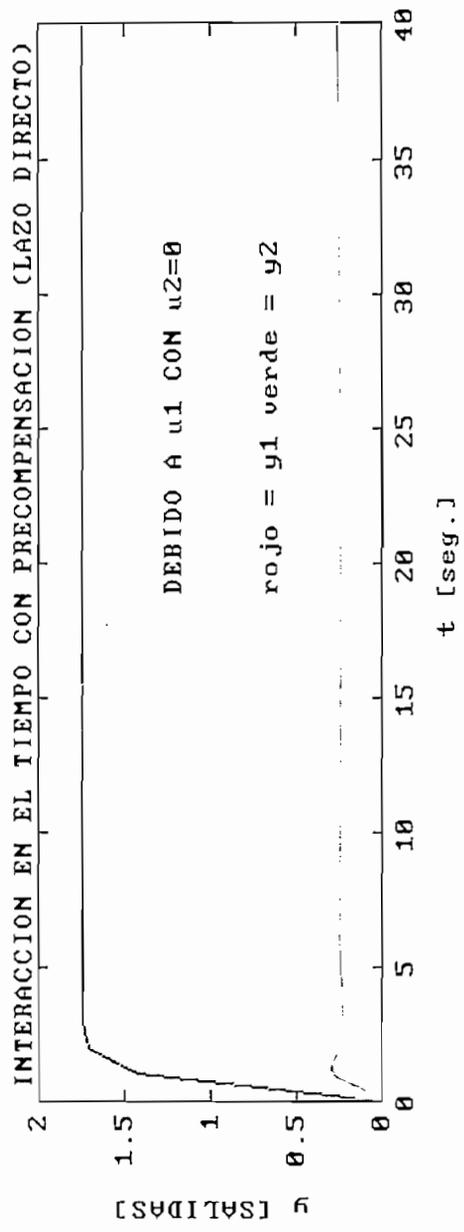


Figura 4.13

Verde
Rojo

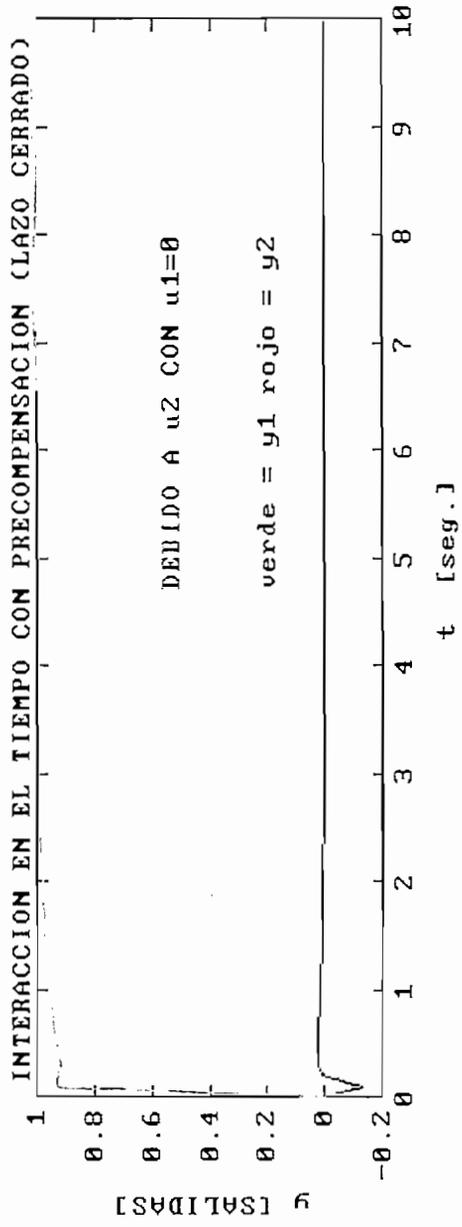
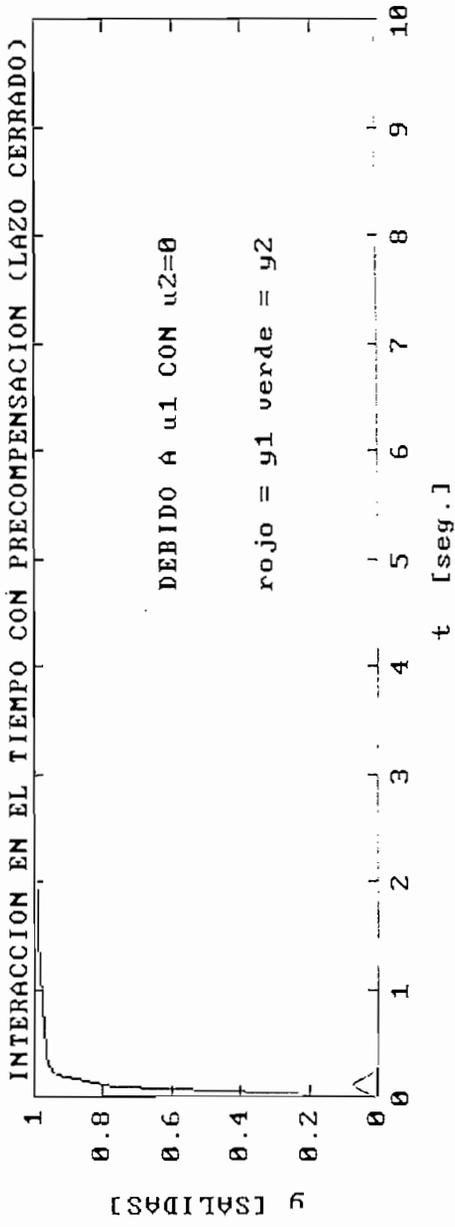


Figura 4.14

Verde
Rojo

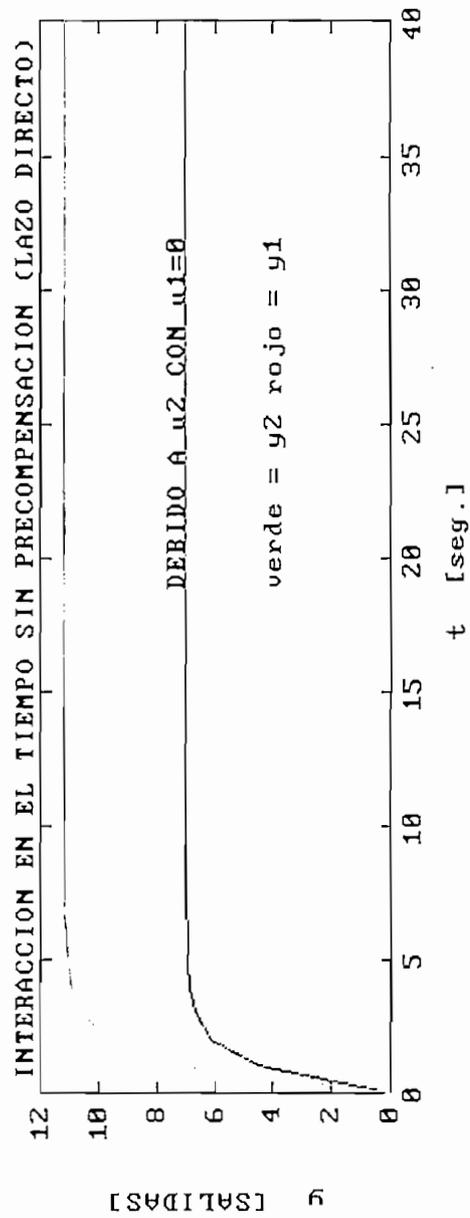
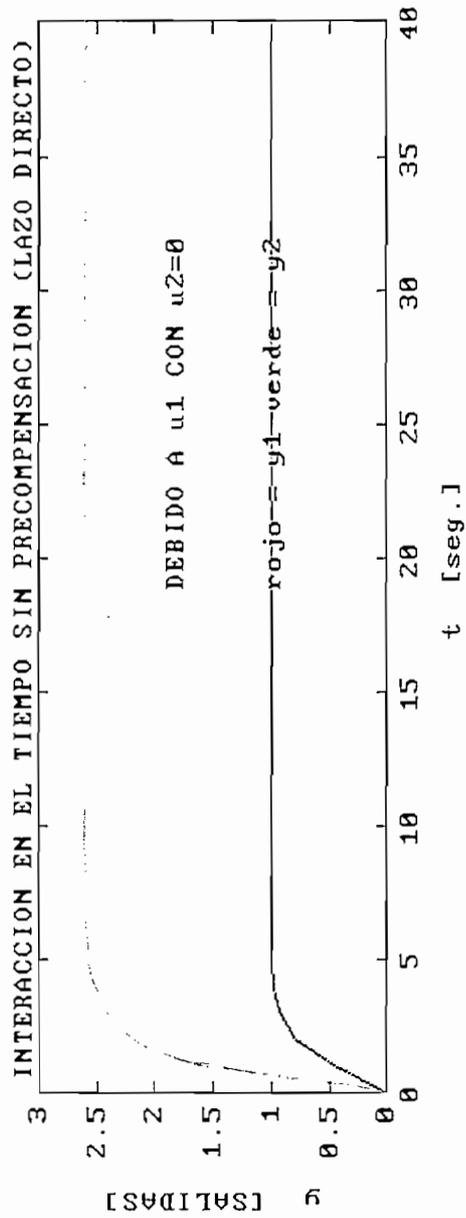


Figura 4.15

Verde
Rojo

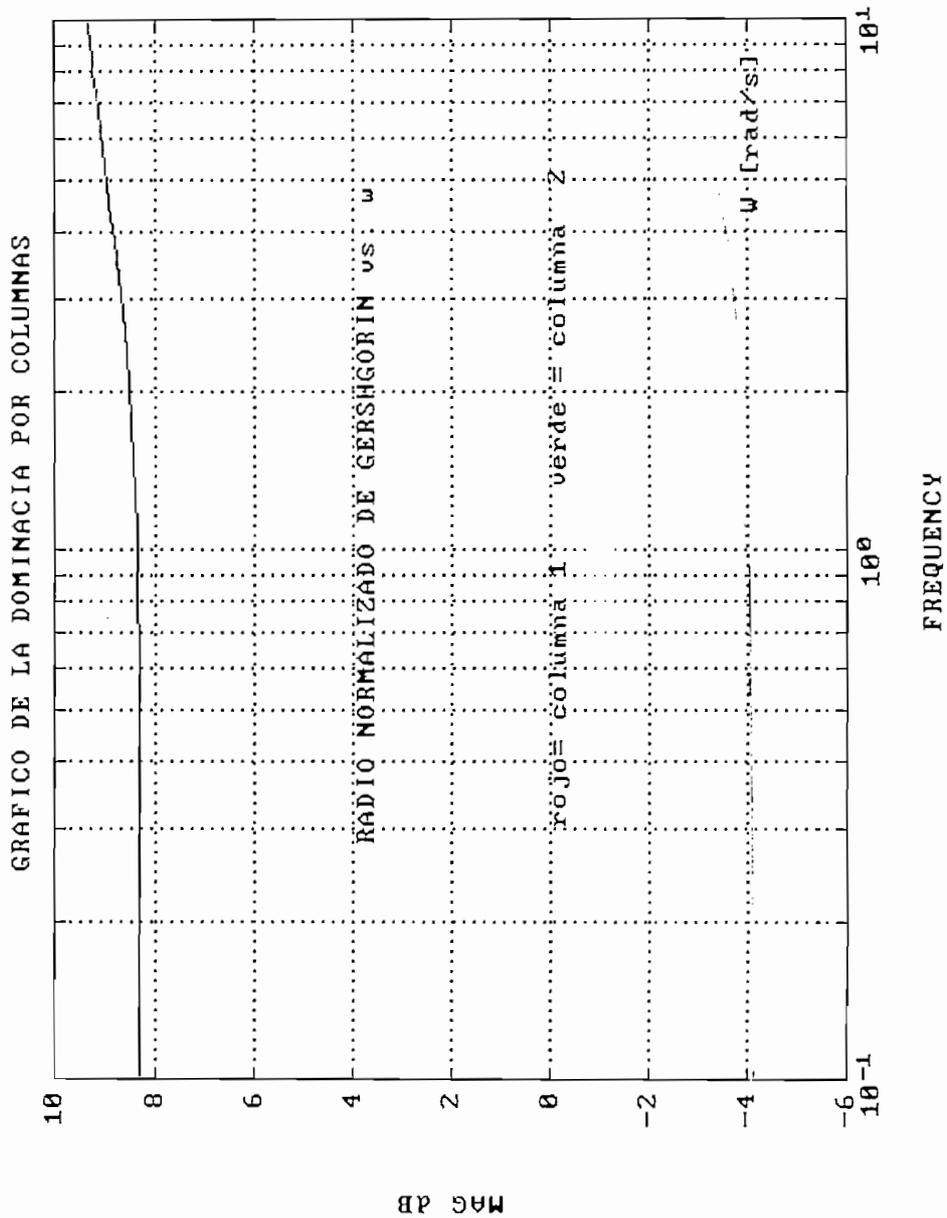


Figura 4.16

— Verde
- - - Rojo

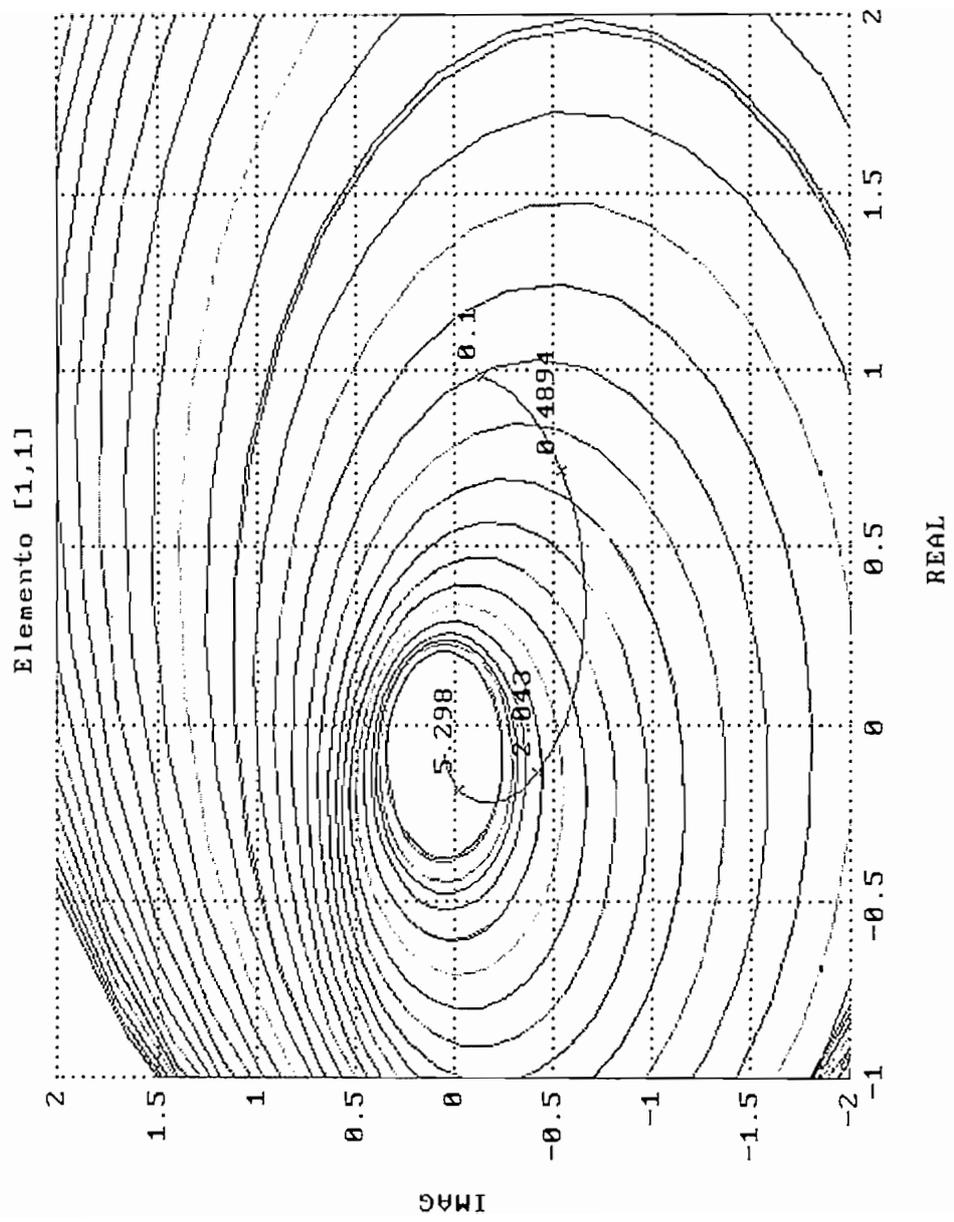


Figura 4.17

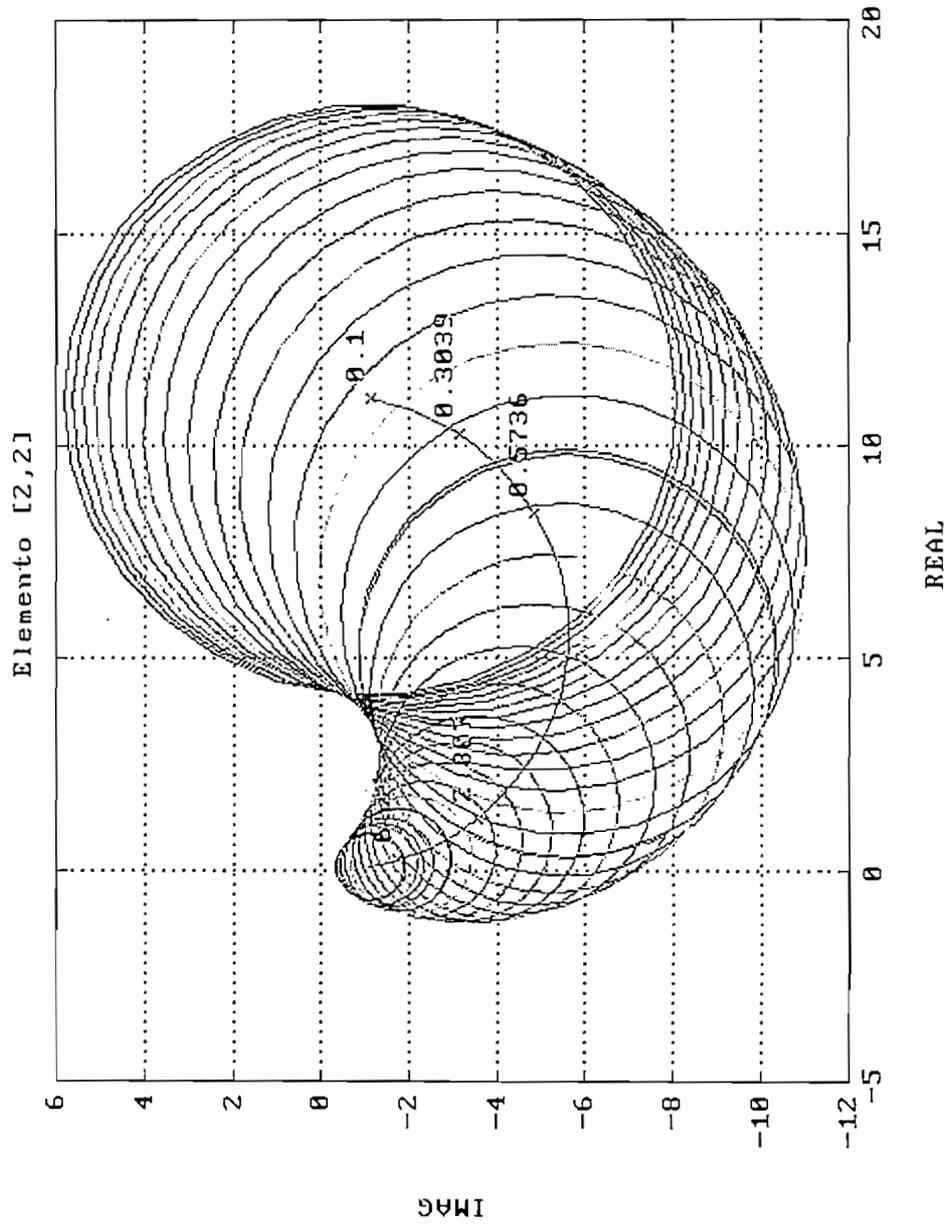


Figura 4.18

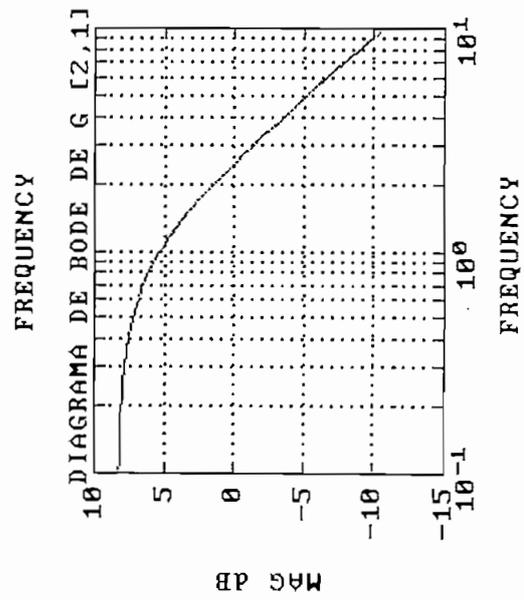
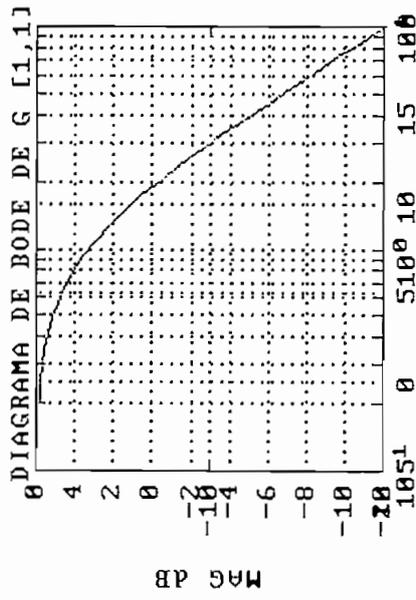
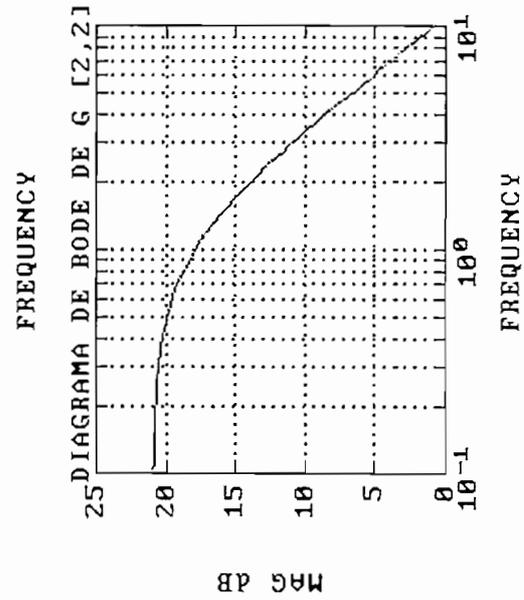
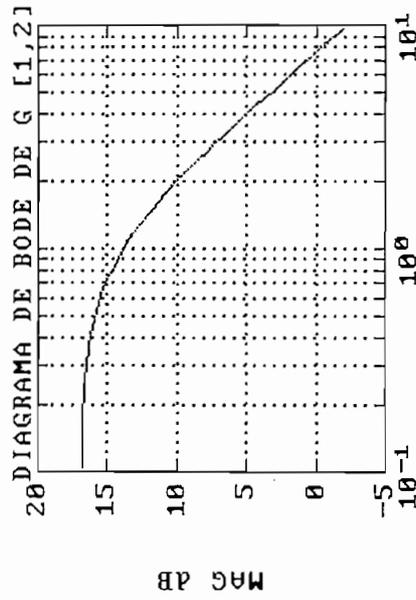


Figura 4.19

GRAFICO PARA EL CRITERIO DE NYQUIST PARA EL LUGAR CARACTERISTICO

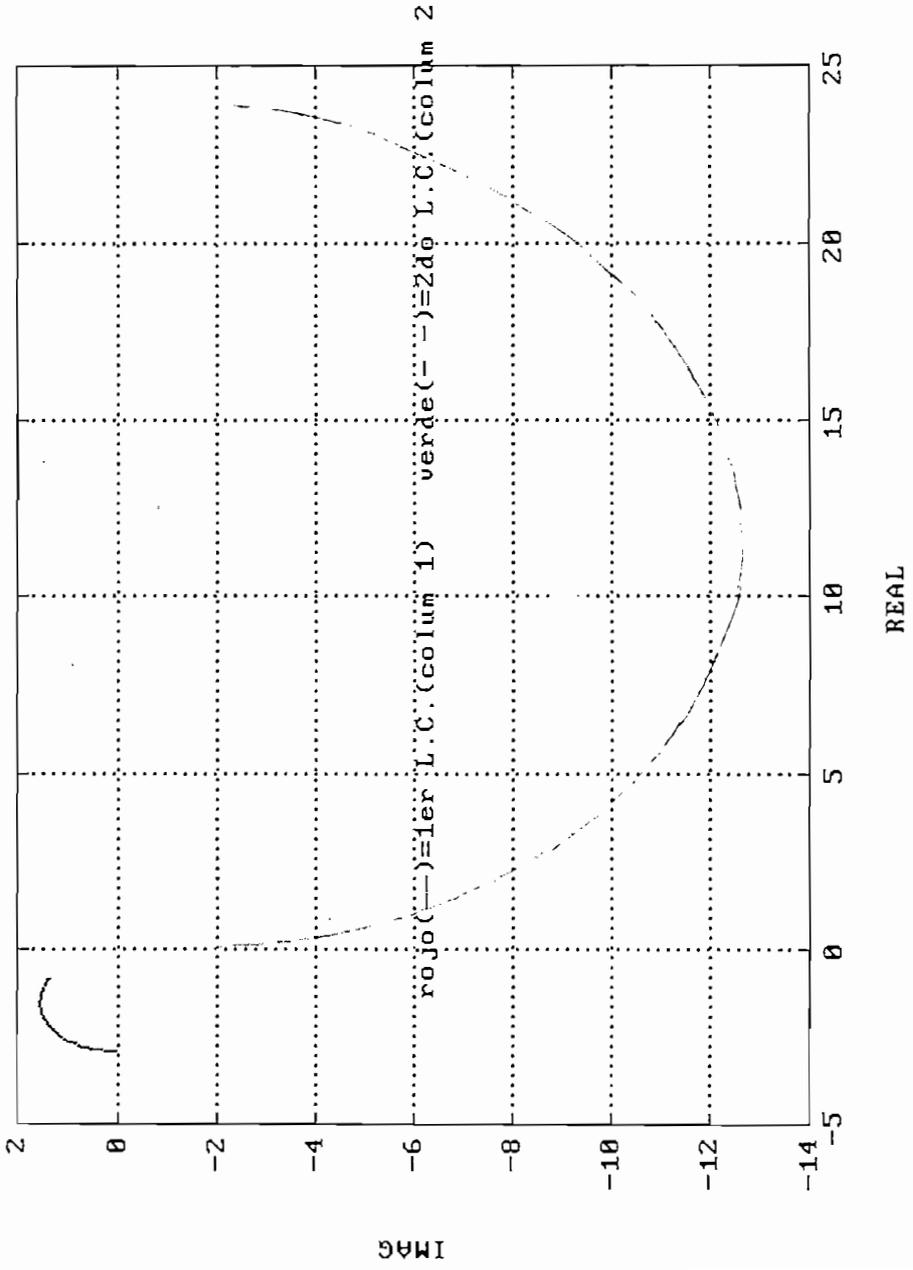


Figura 4.20

— Verde
- - Rojo

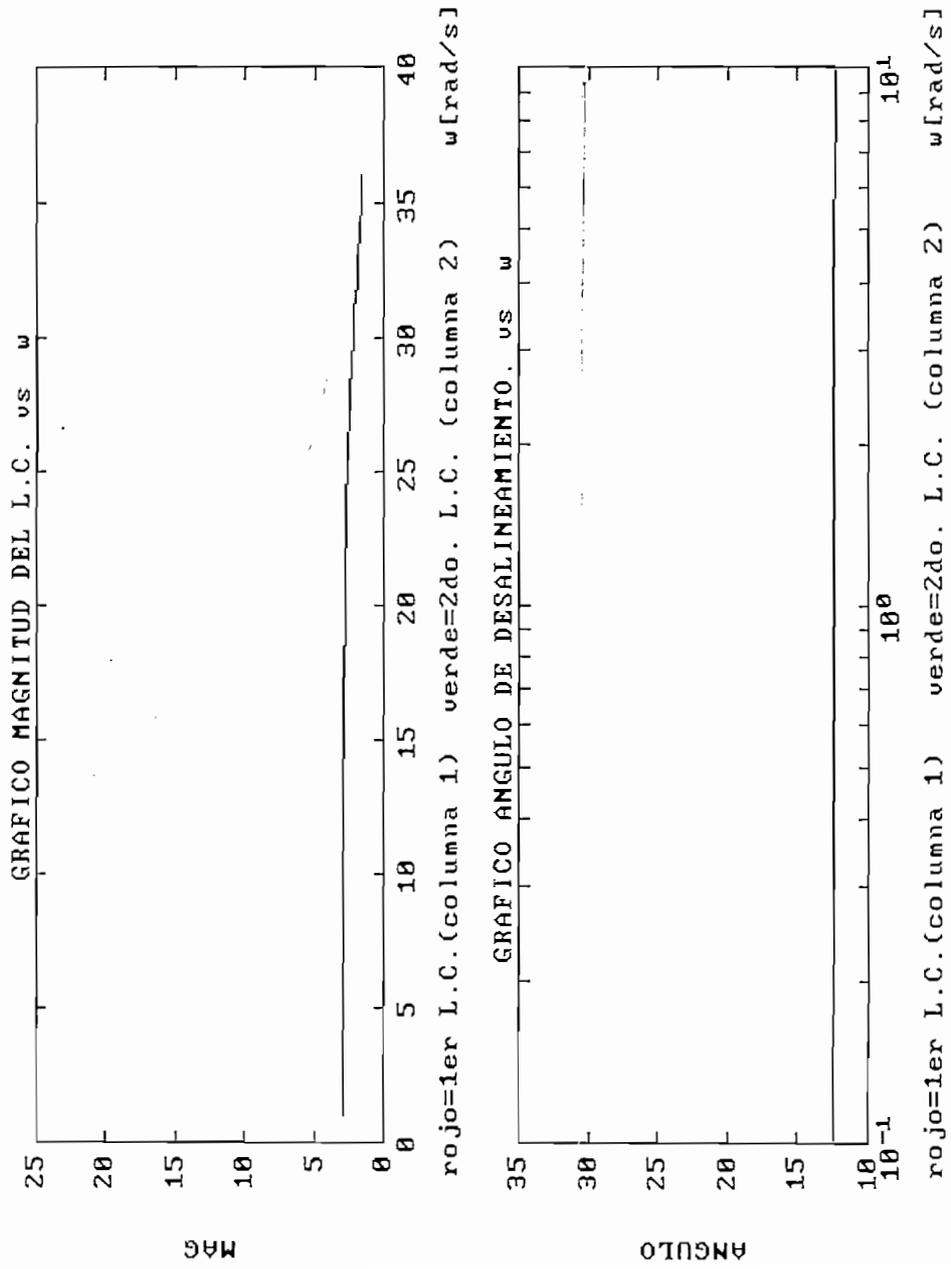


Figura 4.21

— Verde
 — Rojo

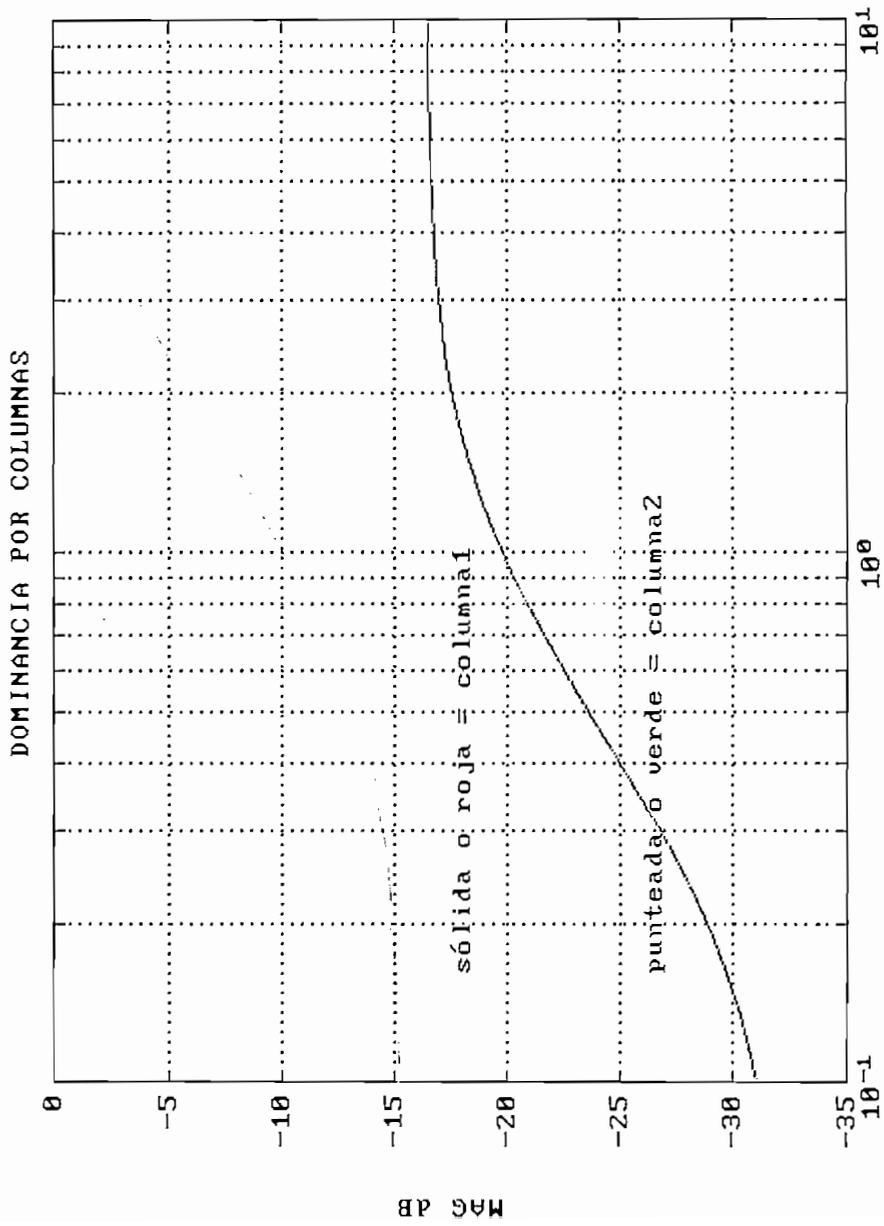


Figura 4.22

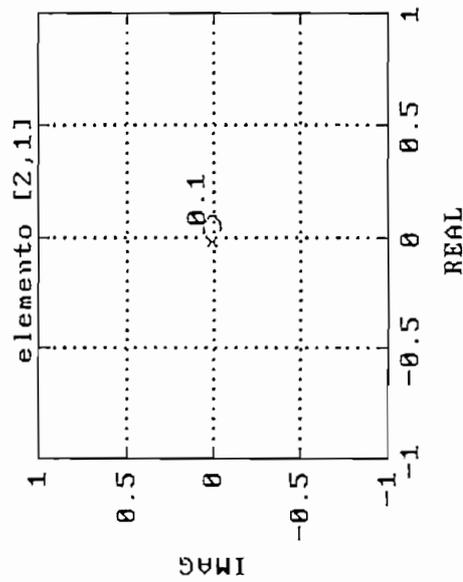
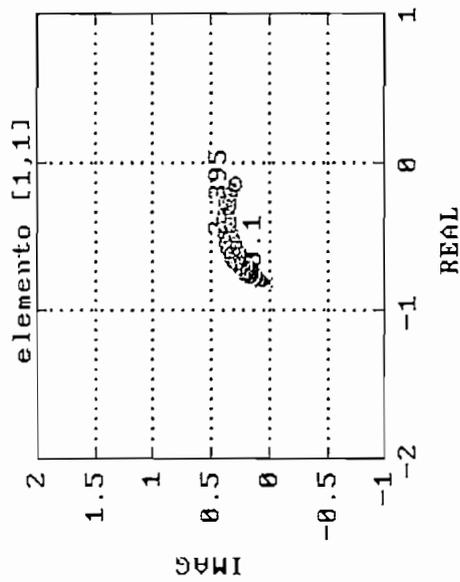
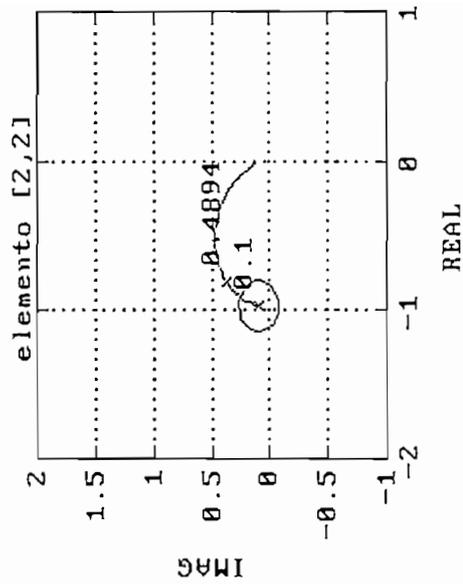
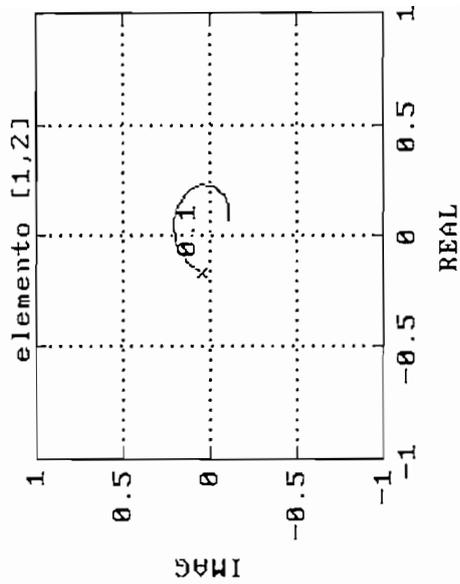


Figura 4.23

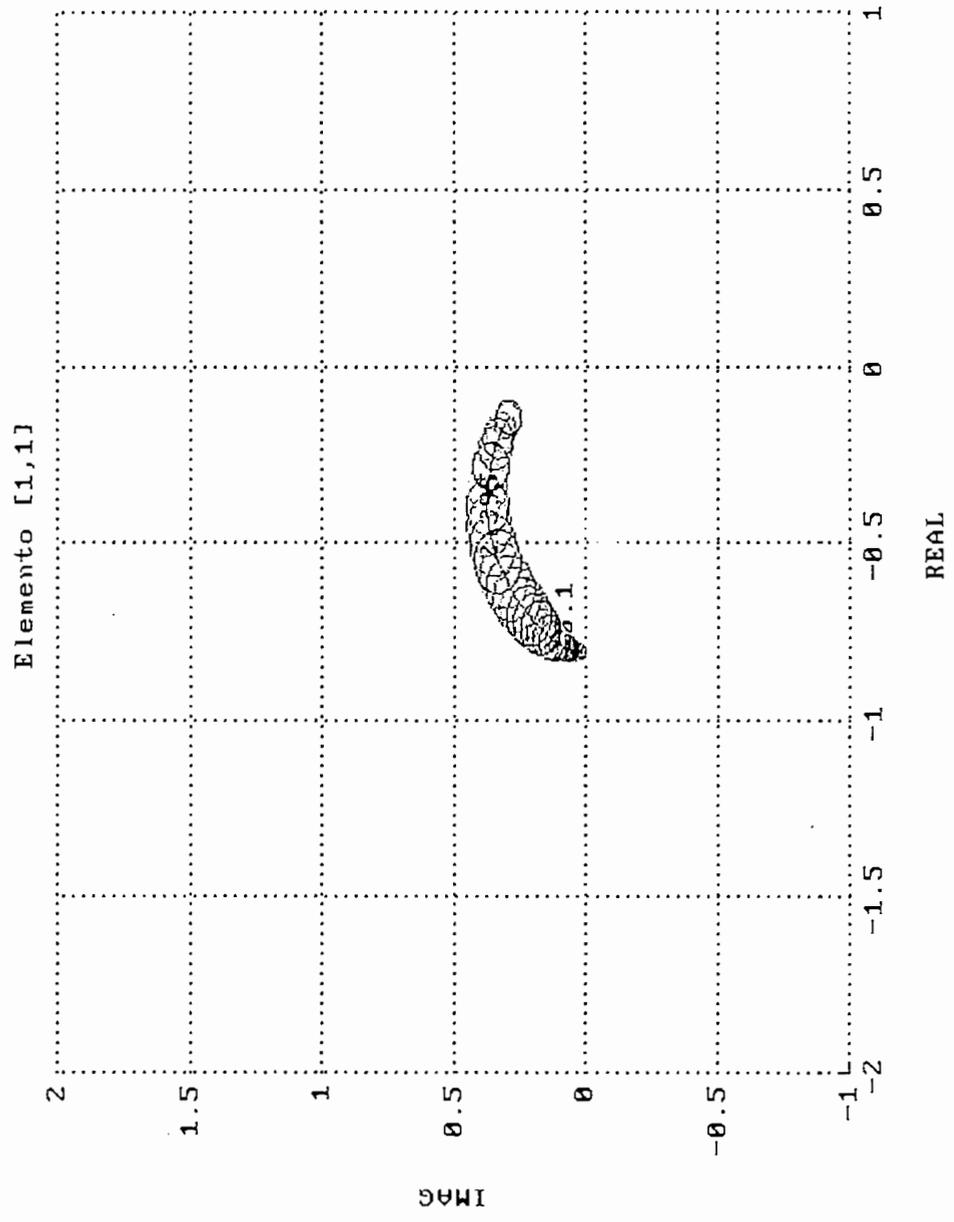


Figura 4.24

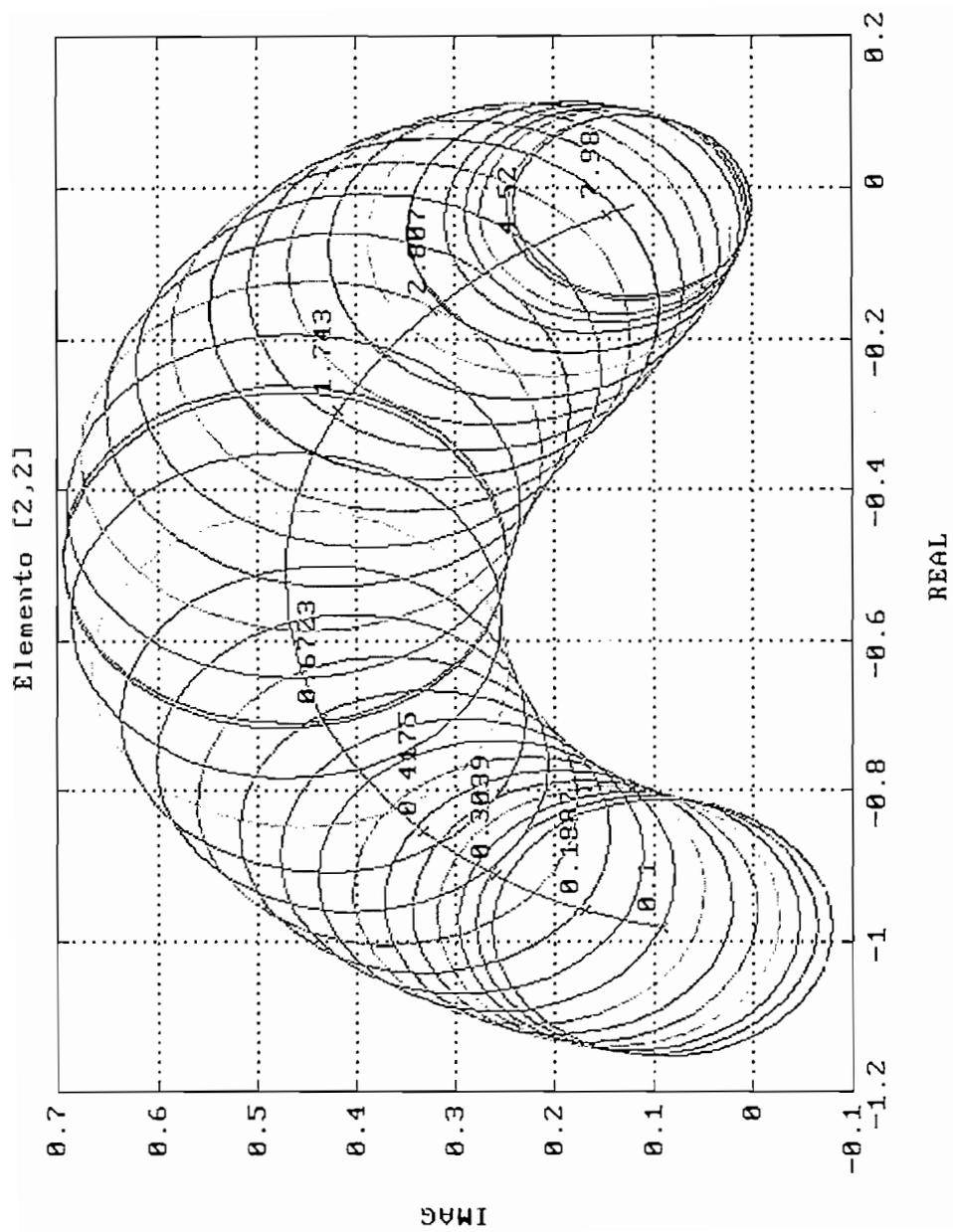


Figura 4.25

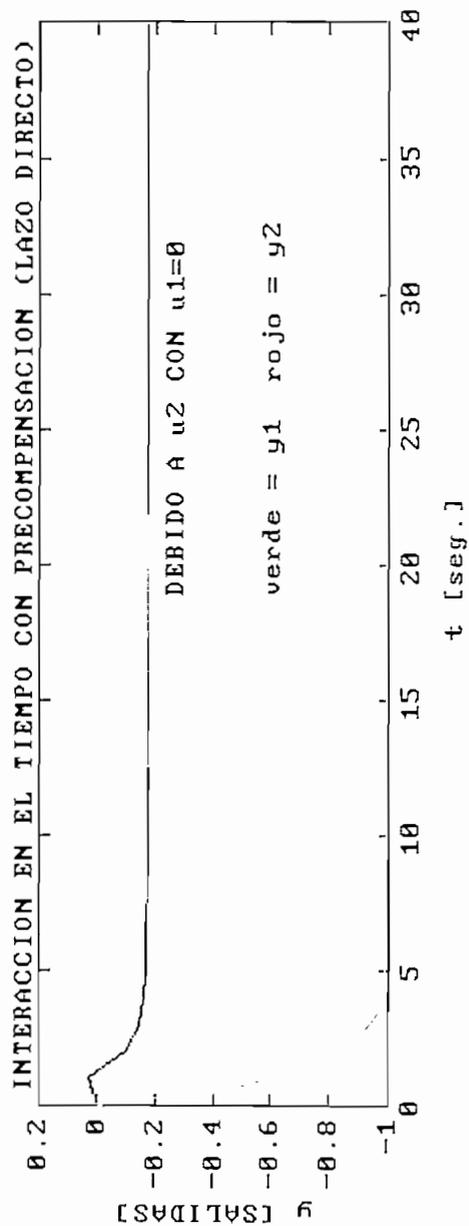
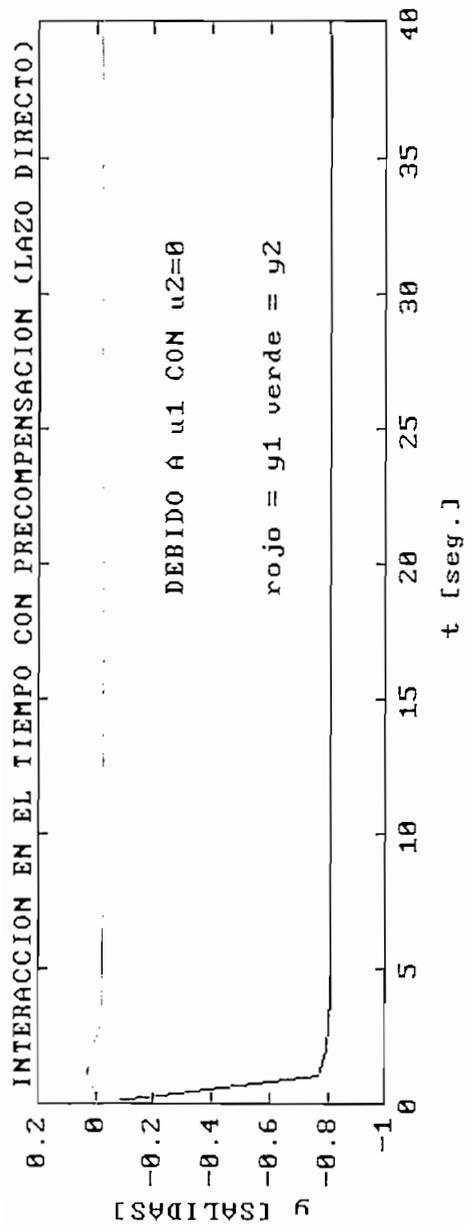


Figura 4.26

Verde
Rojo

GRAFICO PARA EL CRITERIO DE NYQUIST PARA EL LUGAR CARACTERISTICO

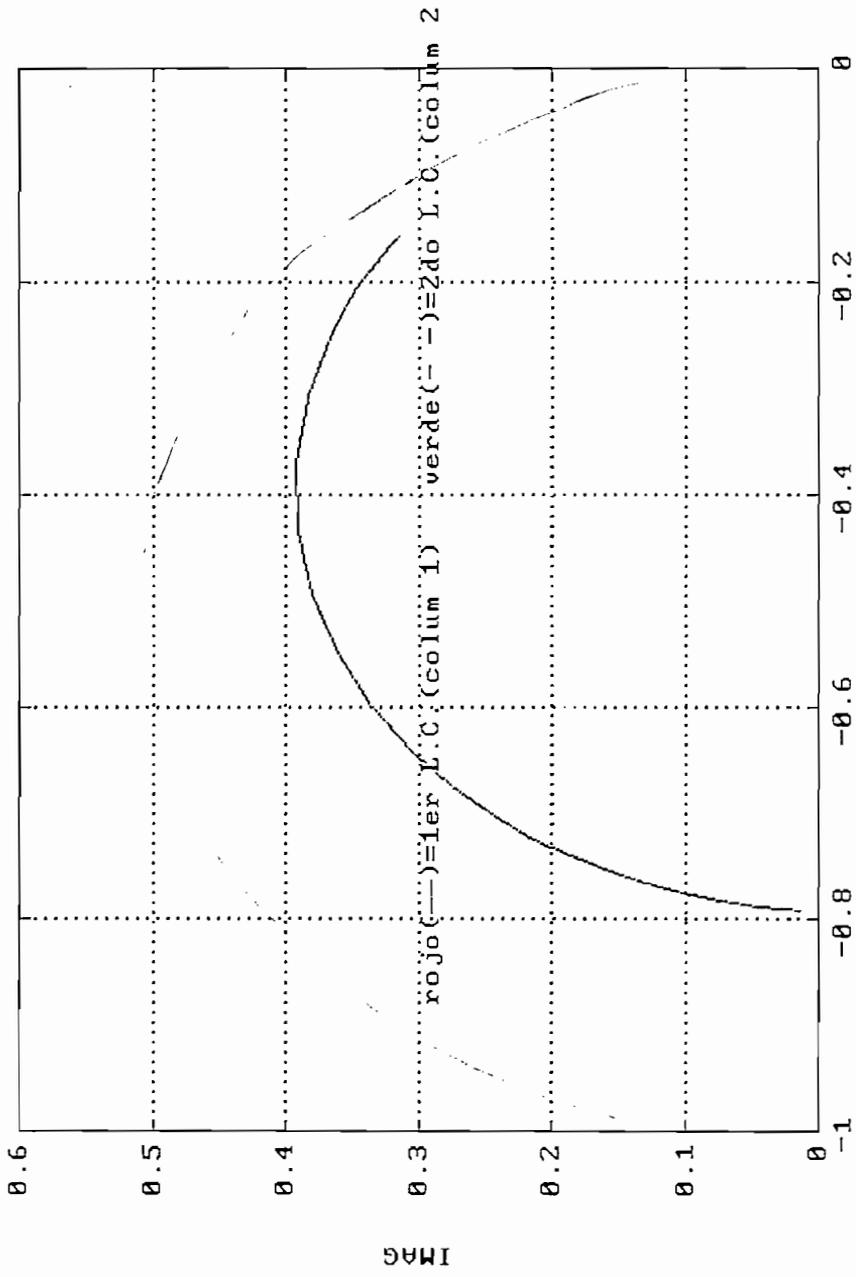


Figura 4.27

Verde
Rojo

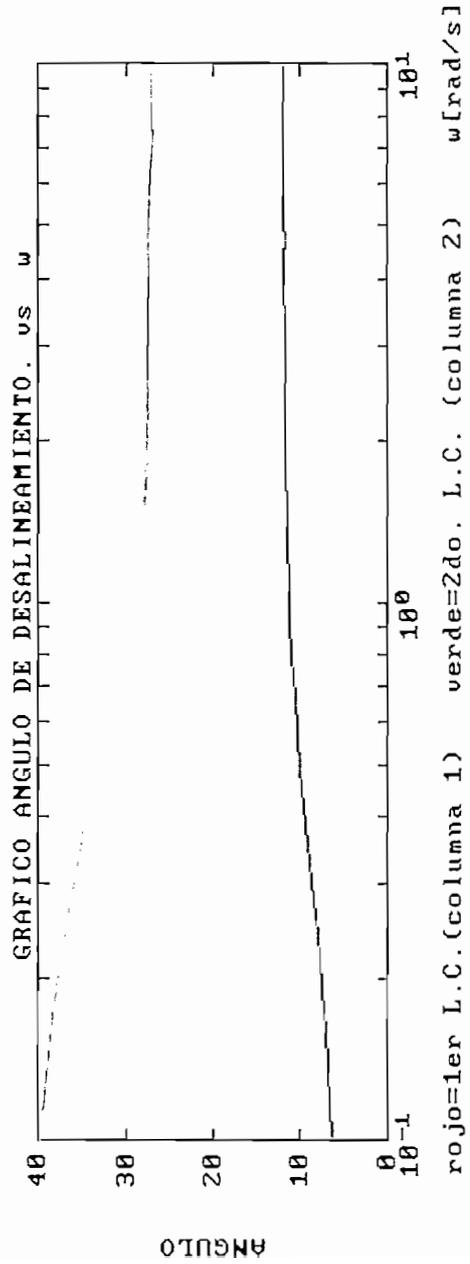
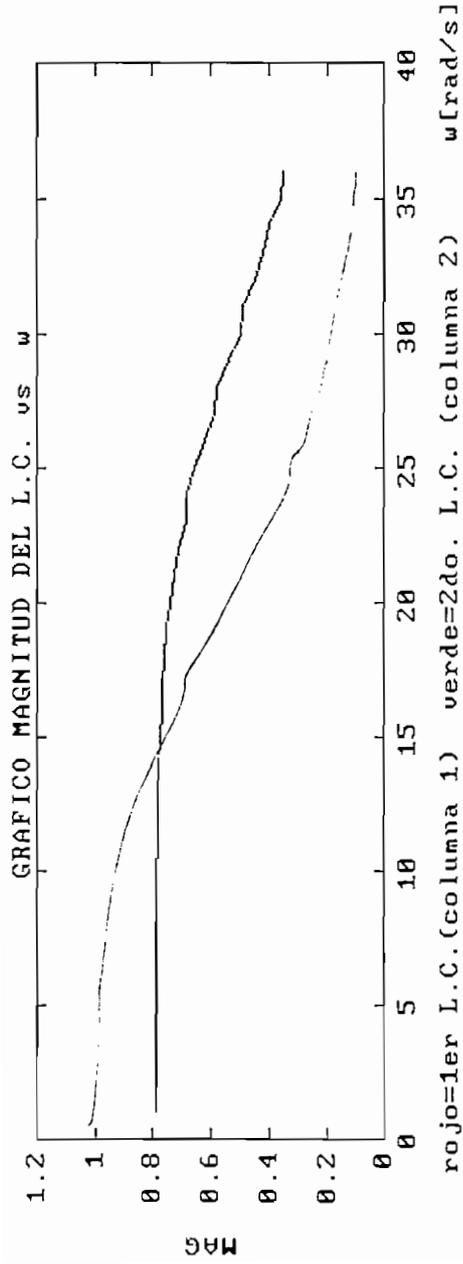


Figura 4.28

Verde
Rojo

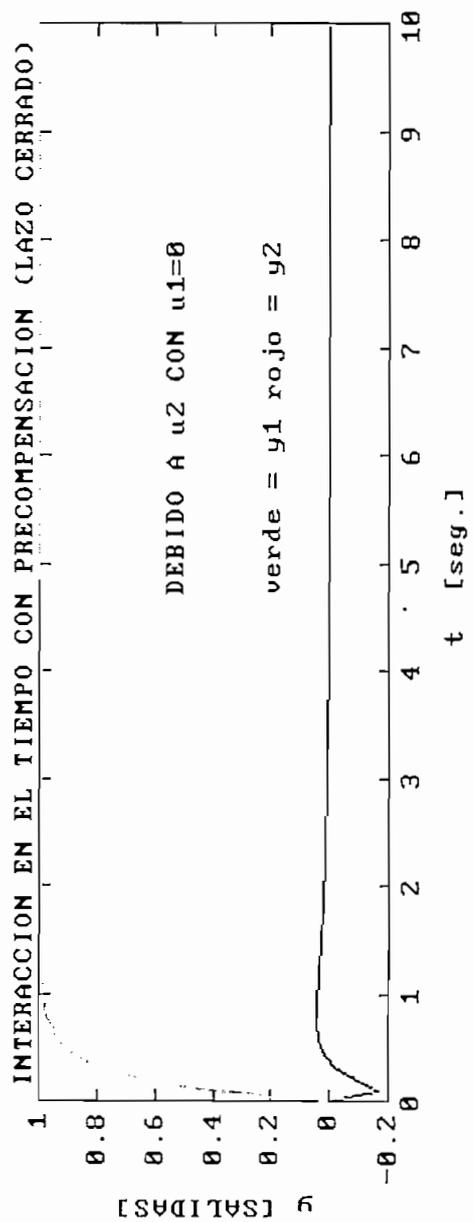
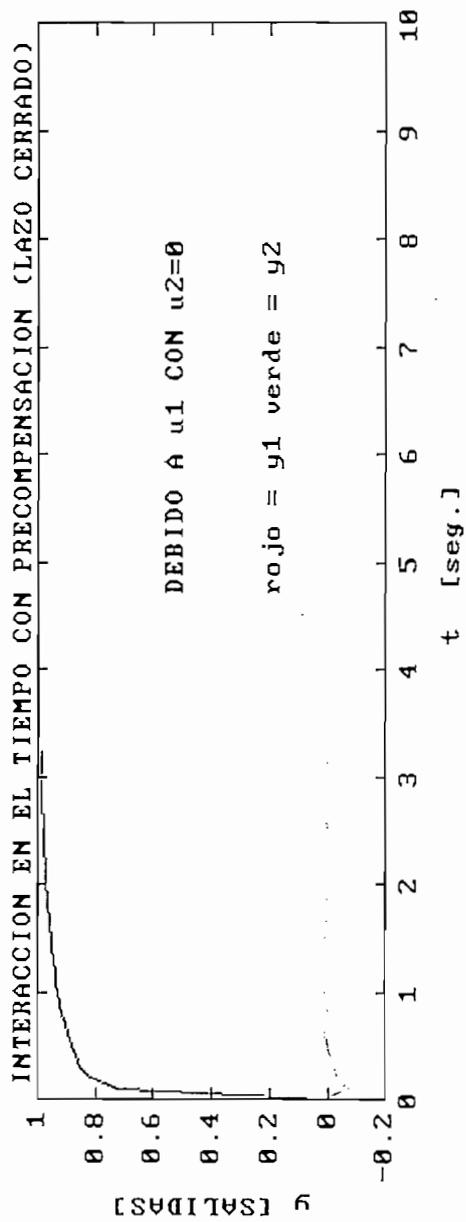


Figura 4.29

— Verde
 - - - Rojo

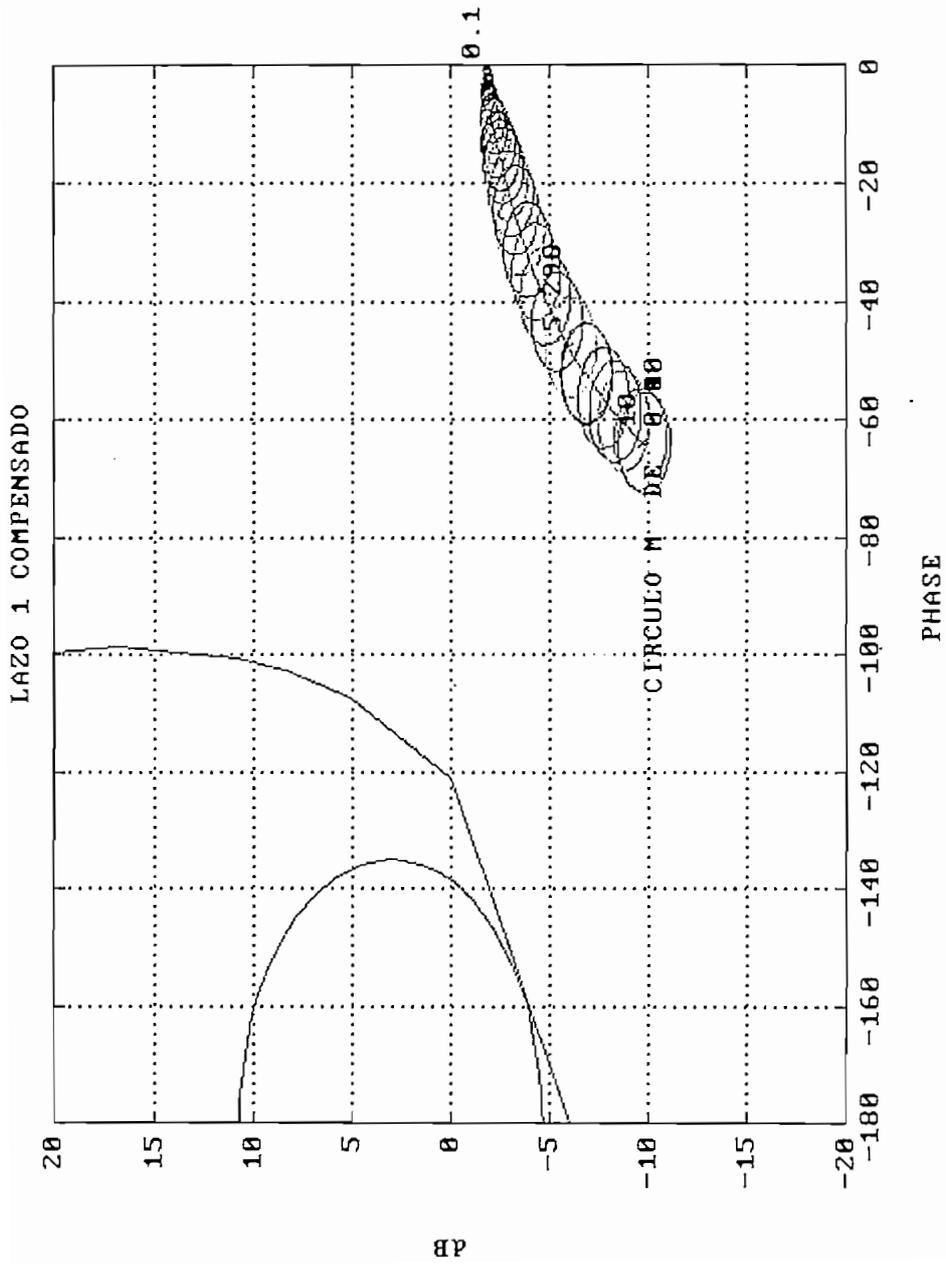


Figura 4.30

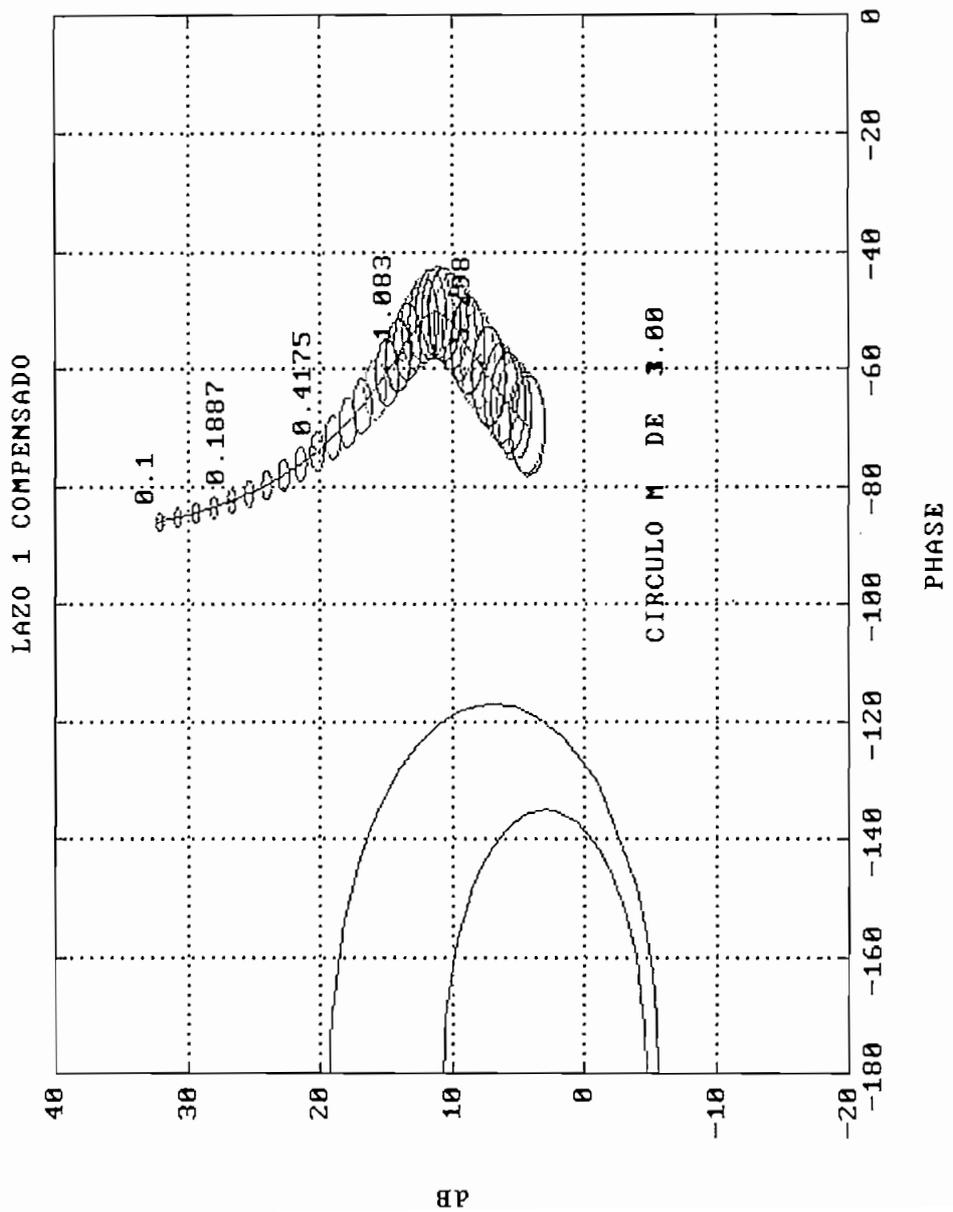


Figura 4.31

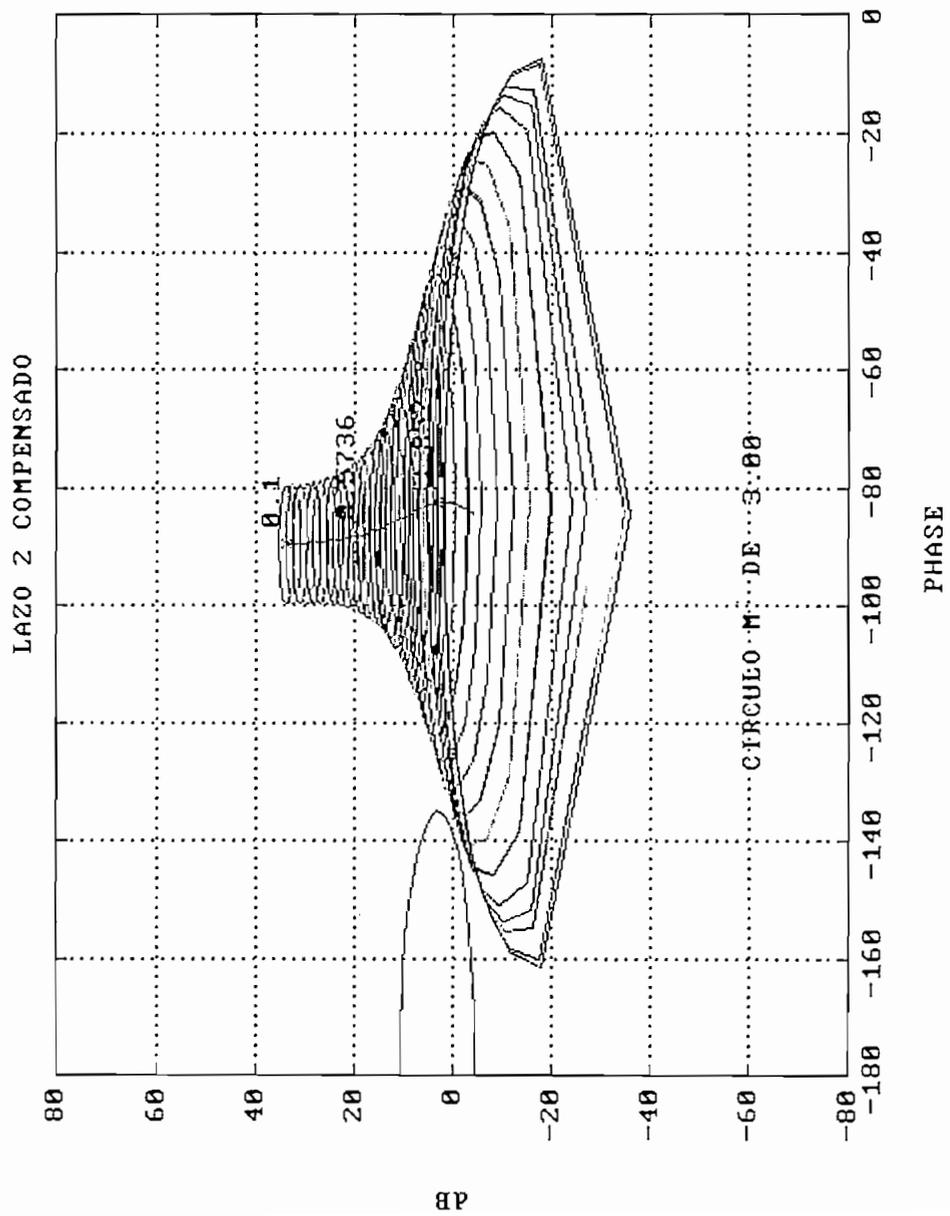


Figura 4.32

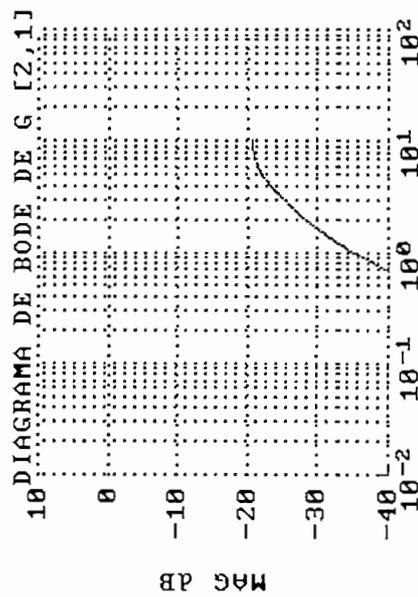
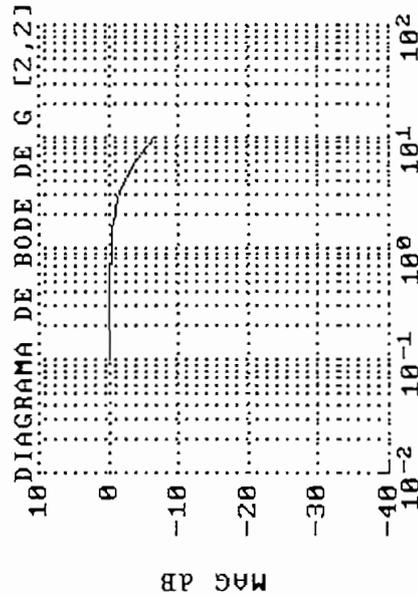
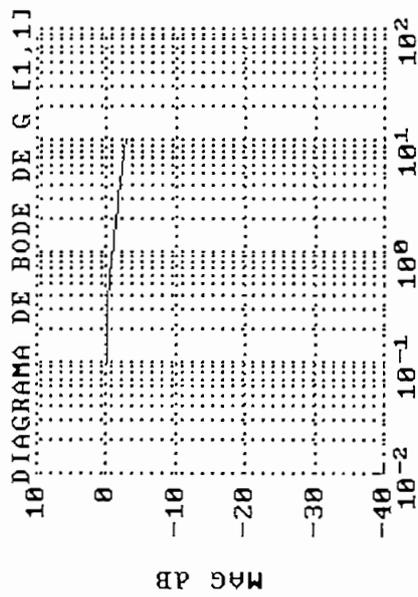
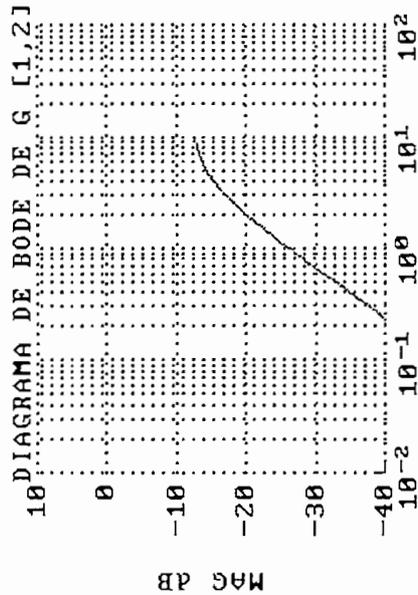


Figura 4.32 b

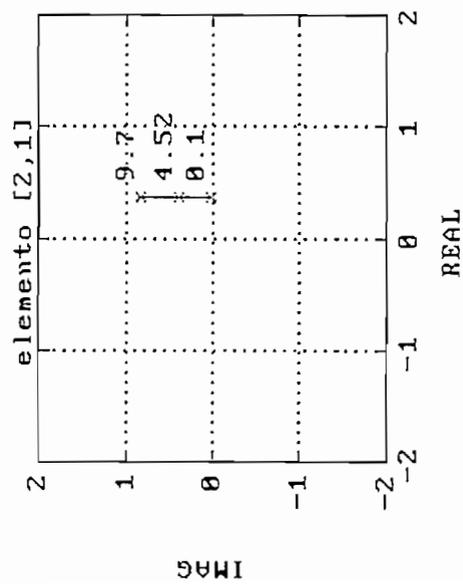
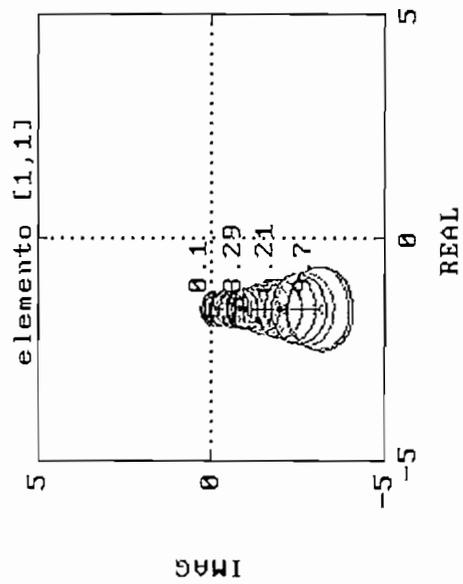
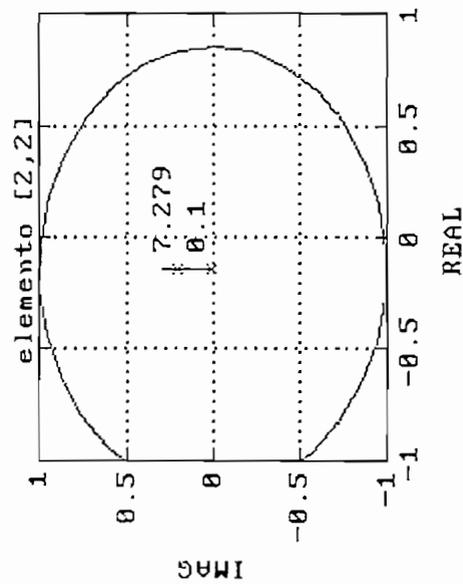
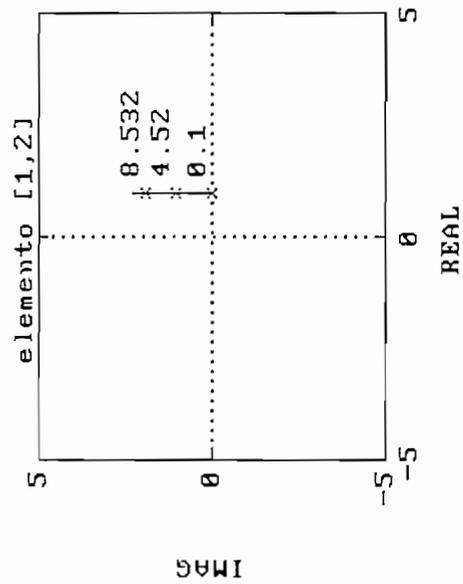


Figura 4.33

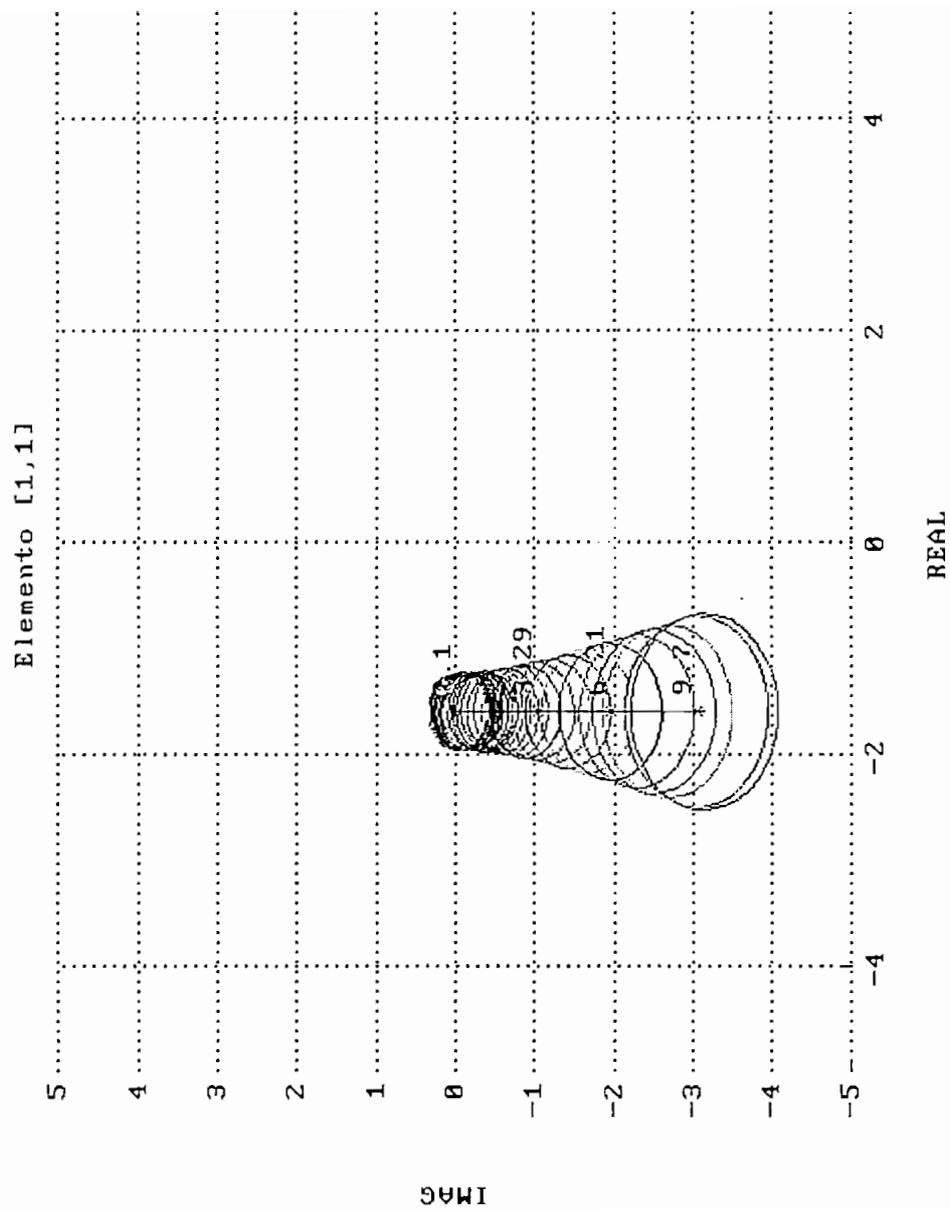


Figura 4.34

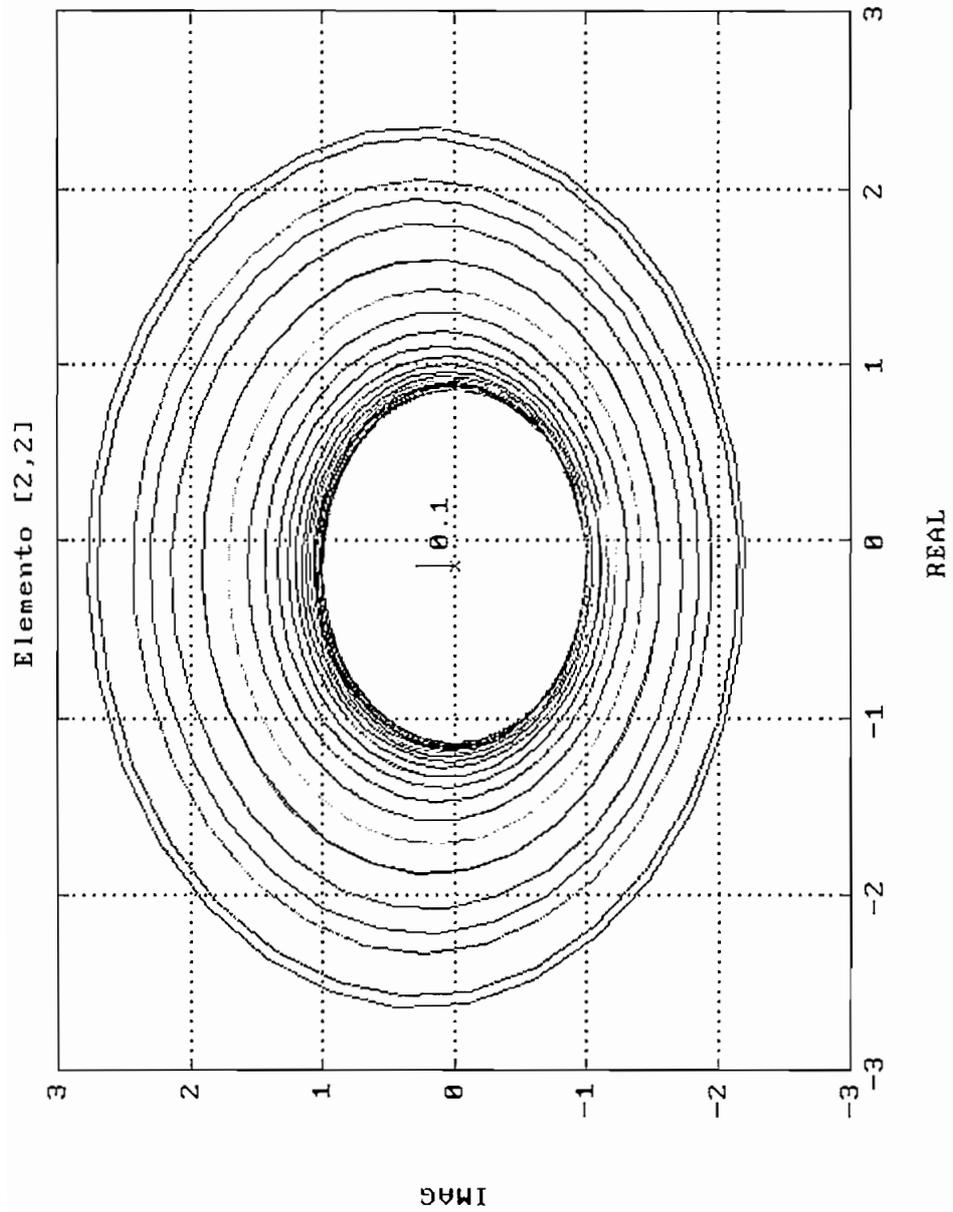


Figura 4.35

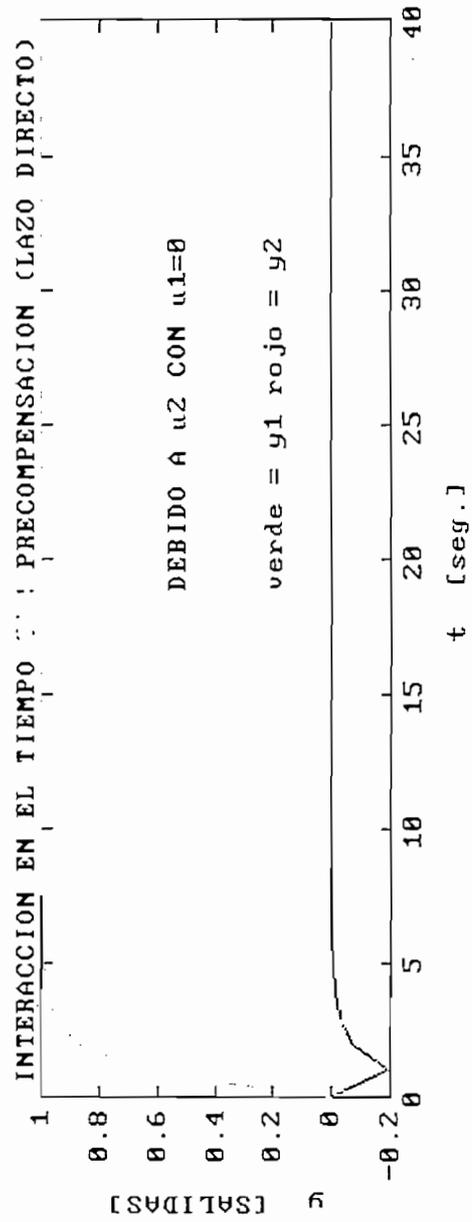
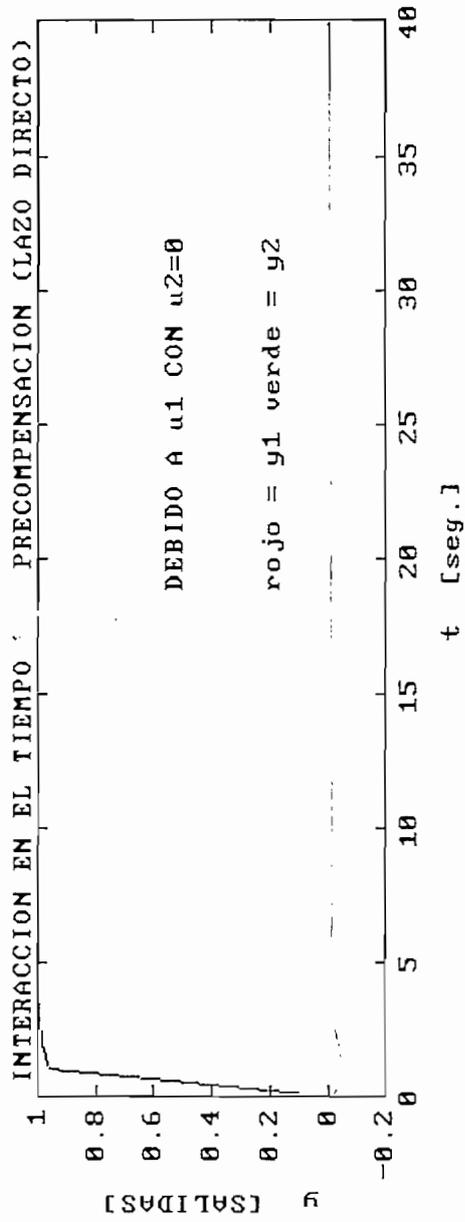


Figura 4.36

Verde
Rojo

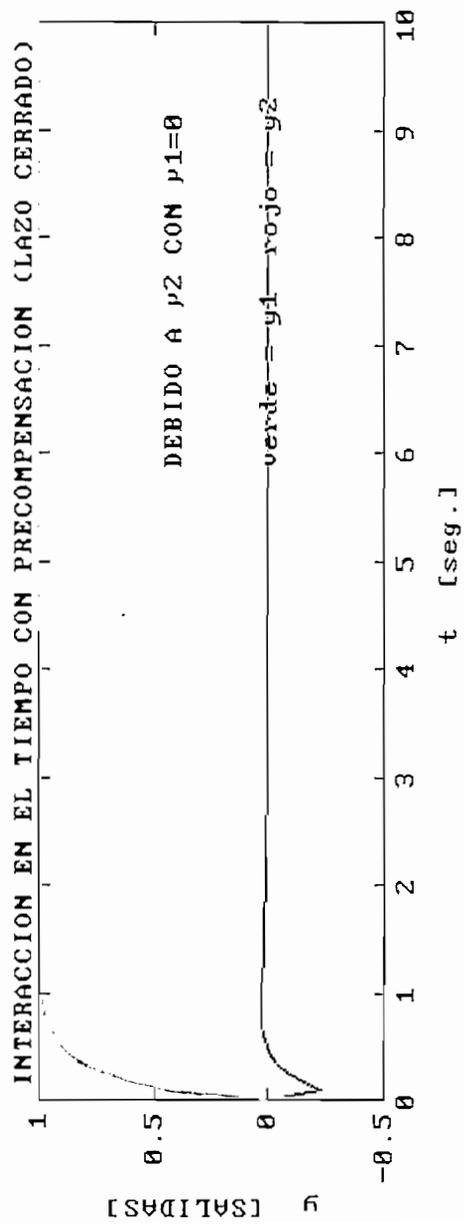
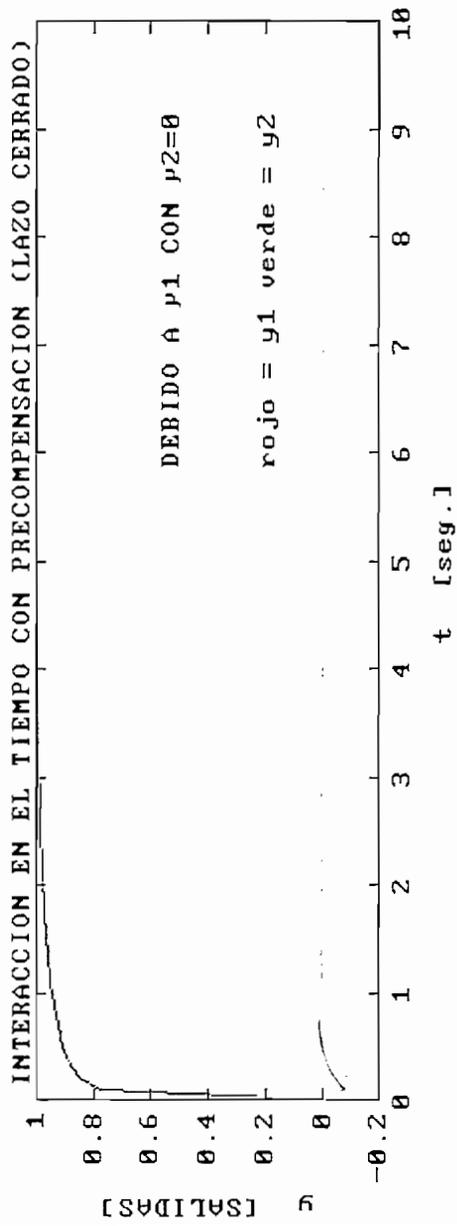


Figura 4.37

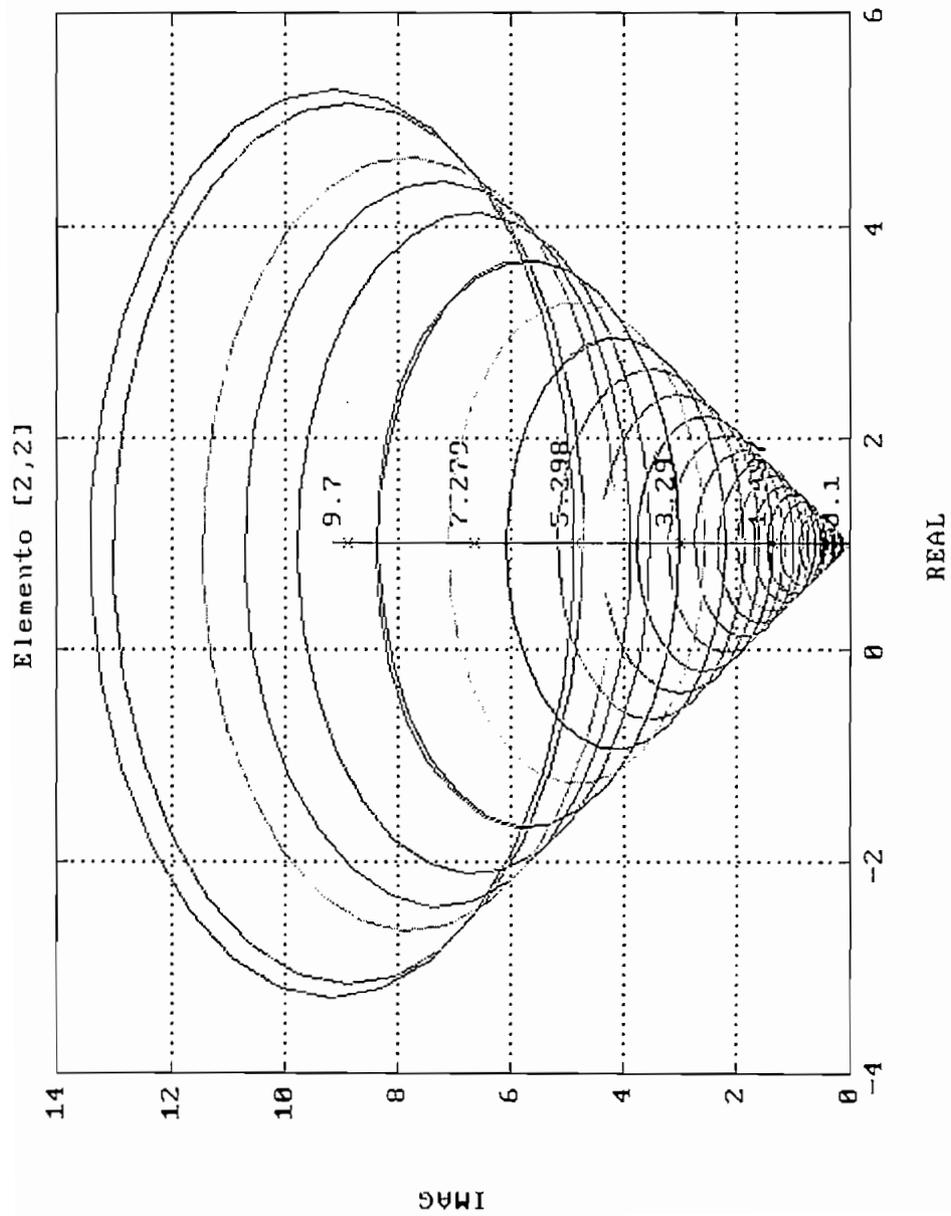


Figura 4.38

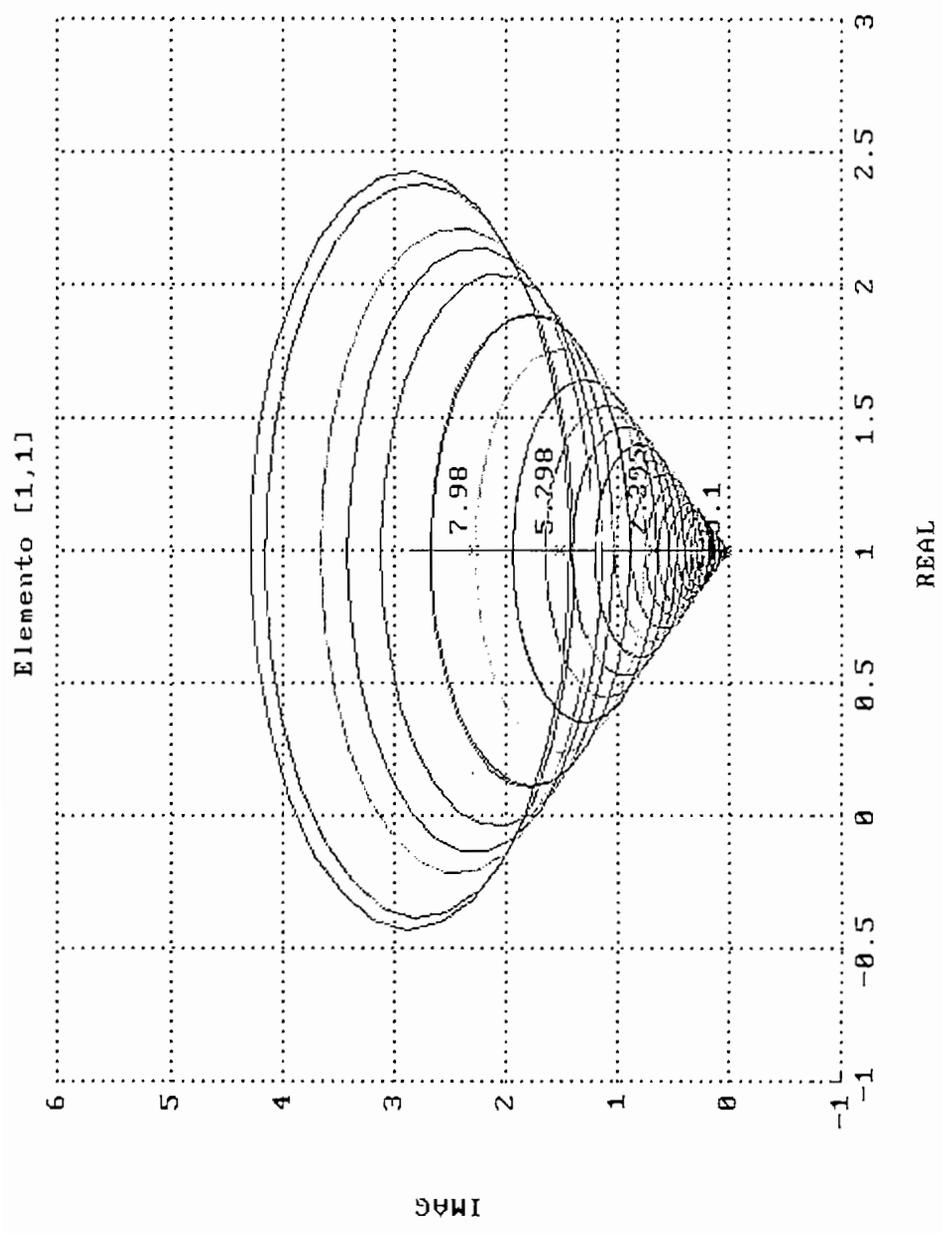


Figura 4.39

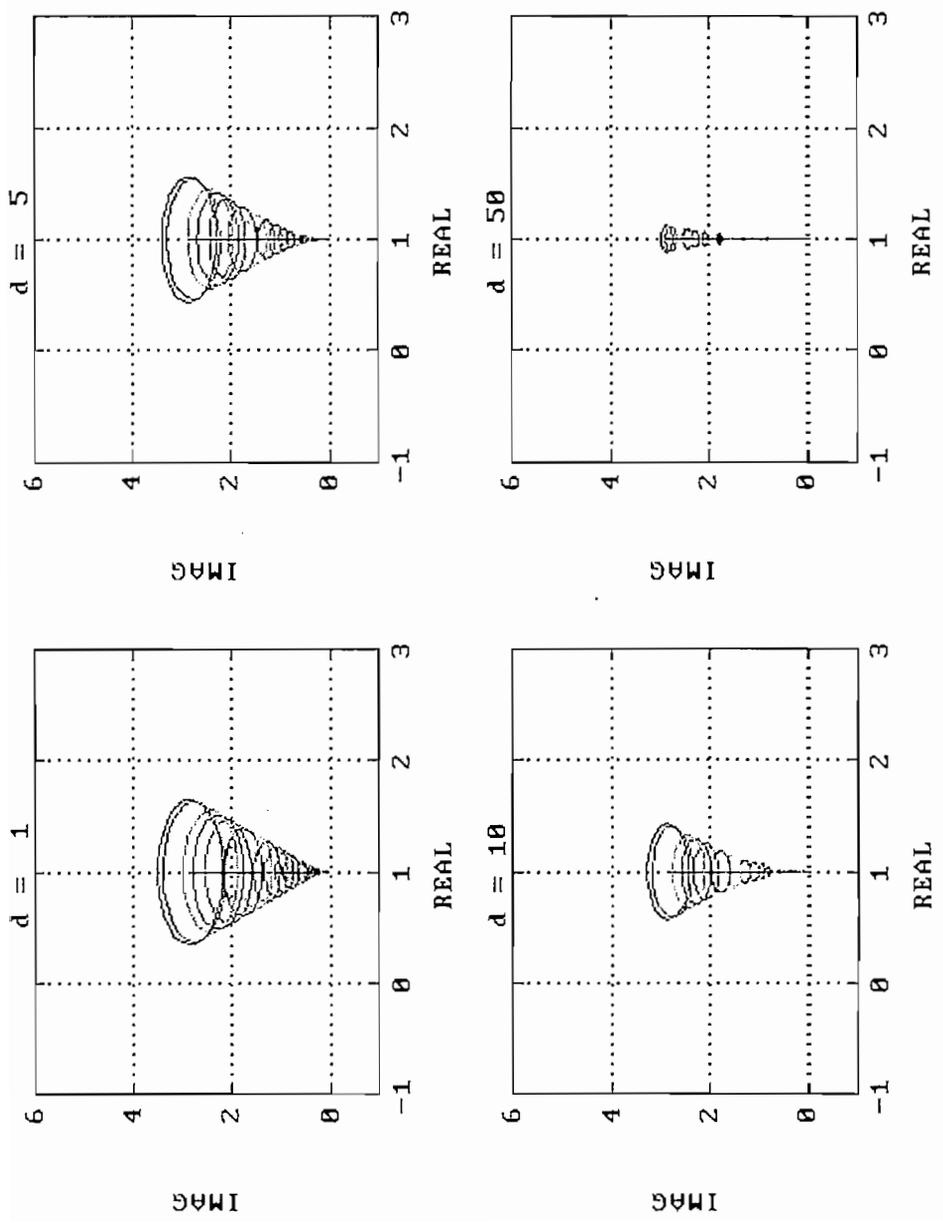


Figura 4.40

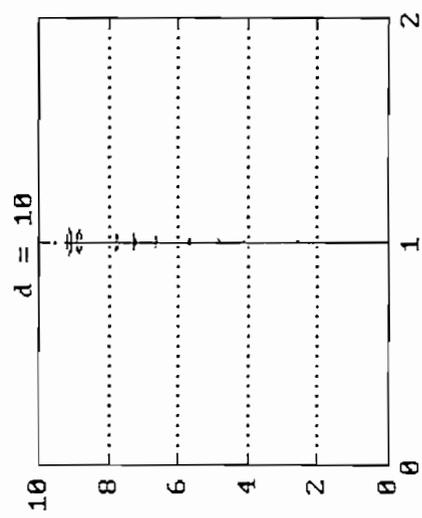
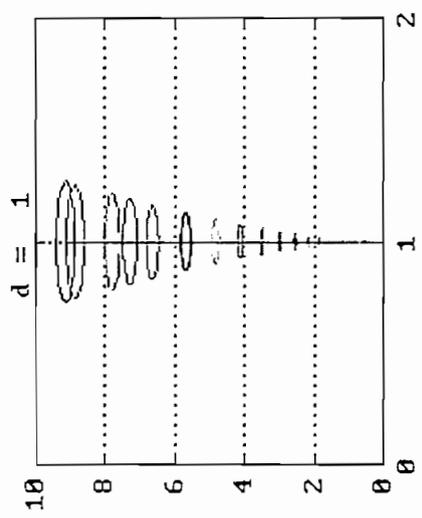
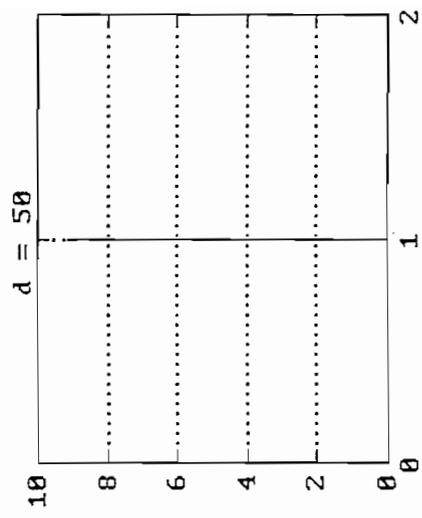
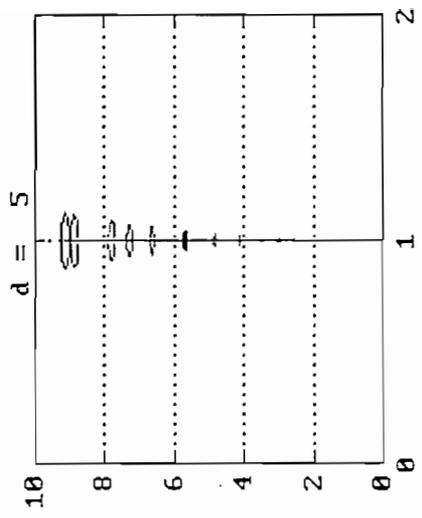


Figura 4.41

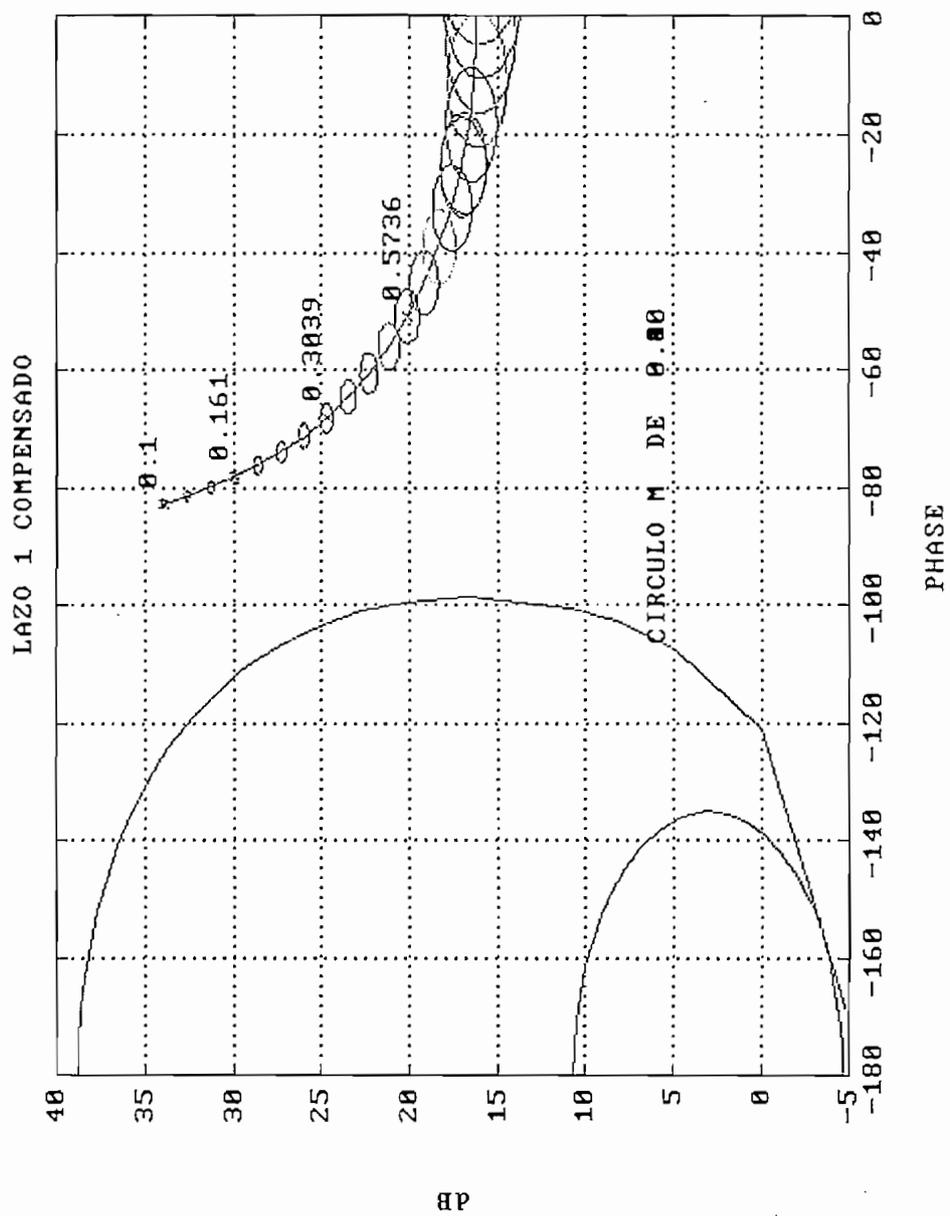


Figura 4.42

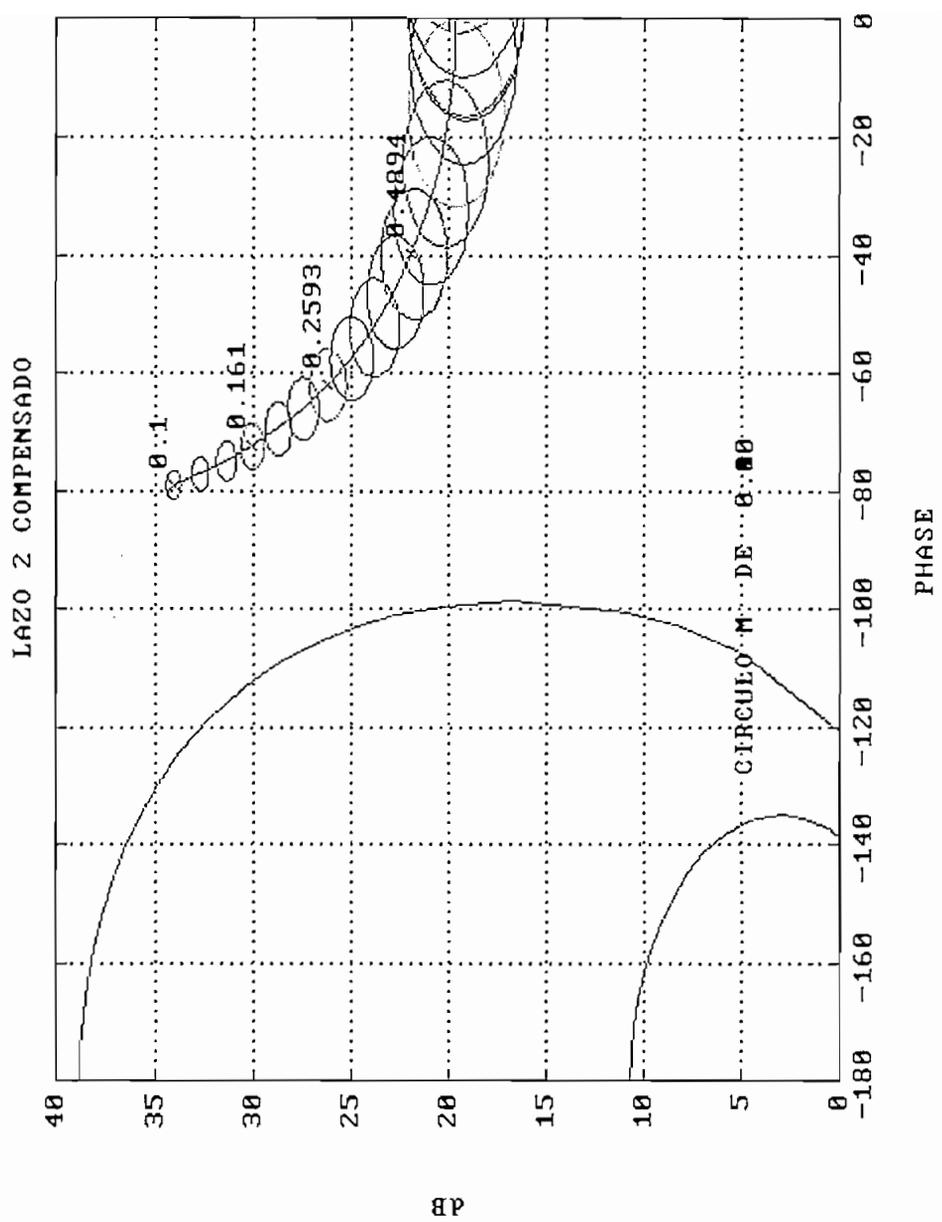


Figura 4.43

4.1.2 MODELOS PRÁCTICOS

Estos ejemplos tienen significación real, pues son modelos de plantas existentes en la realidad. Estos han sido escogidos para ilustrar diferentes aspectos de los procedimientos de diseño.

4.1.2.1 Turbina

En esta sección se presenta el método de diseño DNA aplicado a un turbo generador de potencia nuclear de 1072 MVA. Los parámetros de esta planta que es un generador marca Alstom-Atlantique instalado en una estación de potencia en Sudáfrica, se han tomado de las ecuaciones linealizadas de las características electromagnéticas internas de los generadores sincrónicos. Las entradas de la planta son la posición de una válvula Y_g (u_1) y el voltaje de control de la excitación U_{e2} (u_2). Las salidas de la planta del turbo generador es el voltaje terminal V_t (y_1) y el ángulo de carga del generador δ (y_2). El objetivo de diseño es una respuesta rápida no interactuante. [1]

El sistema tiene dos entradas, dos salidas y 10 estados, es estable en lazo abierto, y está descrito de la siguiente manera:

$$c = [\quad 1.00000 \quad 0.00000 \quad 0.00000; \\ \quad -0.49134 \quad 0.00000 \quad -0.63203 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad -0.20743 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad 0.00000 \quad 0.00000];$$

$$d = \quad \quad \quad [\quad 0 \quad \quad 0 \\ \quad \quad \quad \quad 0 \quad \quad 0]$$

Como primer paso en el diseño es mirar los diagramas de Nyquist con las bandas de Gershgorin, de esto se establece según las *figuras 4.44, 4.45, 4.46*, que la dominancia de la 1era columna es aceptable pero la de la 2da no.

En la interacción en el tiempo lazo directo (*Figura 4.47*) se aprecia claramente que la 1era columna es dominante ligeramente y tiene el signo negativo, esto se debe tomar en cuenta al cerrar el lazo, pues si no se le cambia el signo, esto hace inestable al sistema. Por otro lado la 2da columna no es dominante

El gráfico de la dominancia por columnas (*figura 4.48*) especifica adicionalmente que existe un par de polos muy resonantes. Entonces la estrategia de diseño será incluir la cancelación de esa resonancia y permitir a la planta un ancho de banda de 10 ras /s (típico en un sistema de control)

En las *figuras 4.49 y 4.50* donde se usa el lugar característico se aprecia primeramente, existe estabilidad tomando en cuenta que en la *figura 4.49* la columna 2 esta atenuada 400 veces incluso. En los gráficos de ángulo del lugar característico se observa el efecto de resonancia a 6.34 ras /s.

Con los diagramas de Bode multivariable (*figura 4.51*) , se tiene otra forma de ver que la 2da columna no es dominante.

Por todo lo expuesto anteriormente la 2da columna necesita precompensación antes de continuar al diseño SISO. Para esto el DNA calculó el siguiente precompensador:

$$K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1478s+0.2099 \\ 0 & \frac{-0.0002s^2 - 0.0014s + -0.0005}{s(1/500s + 1)} \end{bmatrix}$$

En este precompensador se añadió un integrador para régimen permanente y un filtro de alta frecuencia para filtrar ruido , y se puso una ponderación de 50 entre 4 y 10 rad/s, para mejorar dominancia. El efecto sobre la 2da columna es satisfactorio tal como se aprecia en la *figura 4.52*.

Para minimizar el efecto de la resonancia se añadió un filtro resonante, quedando K de la siguiente manera:

$$K(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 0.6989s + 40.320 & 0.1478s + 0.2099 \\ 0 & -0.0002s^2 - 0.0014s + -0.0005 \end{bmatrix}}{s(1/500s + 1)}$$

El resultado de la dominancia para todo el sistema se muestra en la *figura 4.53.*, y es adecuado, así que se puede proceder al diseño SISO de cada lazo del sistema compensado

Esto es corroborado por Nyquist con Gershgorin en las *figuras 4.58, 4.59, 4.60 y 4.61.* Cabe destacar que en el gráfico 4.60 los círculos son muy pequeños y el eje x está escalado por mil, lo que deforma el gráfico y no se aprecia correctamente. Para visualizarlos correctamente hubo que hacer ajustes en las escalas, para observar los círculos de Gershgorin correctamente (ver *figura 4.61*)

En el gráfico 4.62 y en el 4.63 con escalamiento de 400 veces la 2da columna, se determina que las dos columnas son estables.

En la magnitud del lugar característico se aprecia altas ganancias a bajas frecuencias, que es justamente lo que se quiere conseguir, en cambio con el ángulo de desalineamiento a altas frecuencias existe un problema de resonancia por 300 rad/s para la 1era columna pero esto es intrascendente, puesto que se trabaja con un ancho de banda de 10 rad/s. (ver *figura 4.64*)

Para saber que signo deben tener los compensadores SISO recurrimos al gráfico de interacción en el tiempo (figura 4.54), de este se establece que ambos compensadores van a requerir de un cambio de signo.

Al hacer los compensadores SISO $k_{11} = -1$ y $k_{22} = -1$ se obtienen para el primer lazo un sistema con máximo sobreimpulso y para el segundo lazo en cambio se tiene un sistema muy lento (figura 4.55).

La situación anterior se mejora con los siguientes compensadores SISO:

$$K_{11} = - \frac{0.5 s + 0.5}{1/50 s + 1}$$

y con:

$$K_{22} = - \frac{20}{1/50 s + 1}$$

tal como se aprecia en la figura 4.56

Para mejorar aún más la diagonal dominancia se usa los siguientes compensadores SISO:

$$K_{11} = - \frac{1/5 s + 1.66/5}{1/50 s + 1}$$

$$K_{22} = - \frac{40}{1/50 s + 1}$$

Con estos se obtiene una respuesta muy satisfactoria, que se la aprecia en la *figura 4.57* y que se refuerza con los gráficos de Nichols *figuras 4.65 y 4.66*, en la primera se aprecia el efecto de k_{11} y se dibuja los círculos M de 3, 1 y 0.4 dB, en la segunda se mira el efecto de k_{22} y se ve los círculos M de 1,0.4, 0.1 y 0 dB.

Habiéndose completado los diseños de lazo, ahora se puede verificar el comportamiento final del sistema apreciando los diagramas de Bode multivariables en lazo cerrado. Esos gráficos se muestran en la *figura 4.67*. Esos gráficos indican una baja interacción, y no existencia de sobretiro.

TURBO GENERADOR

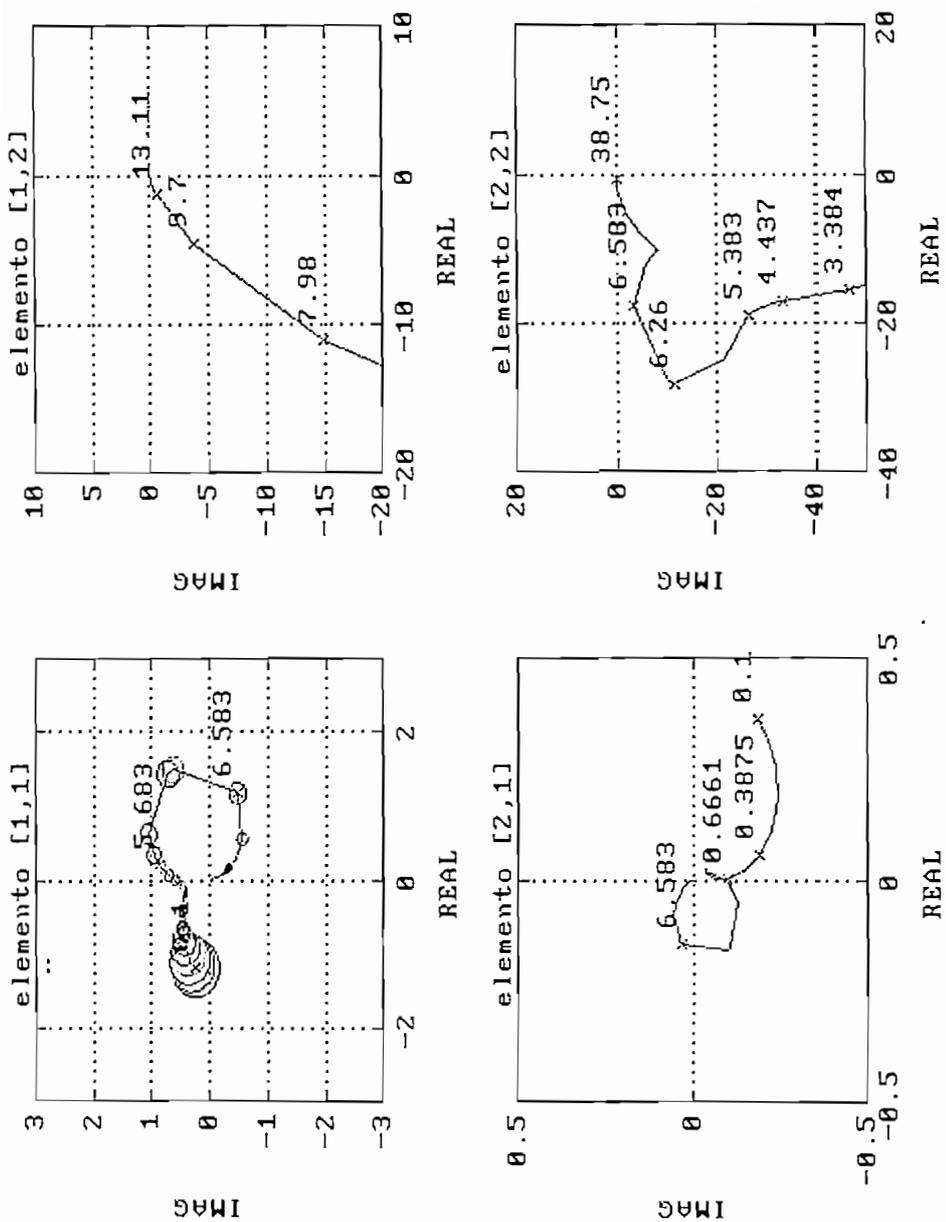


Figura 4.44

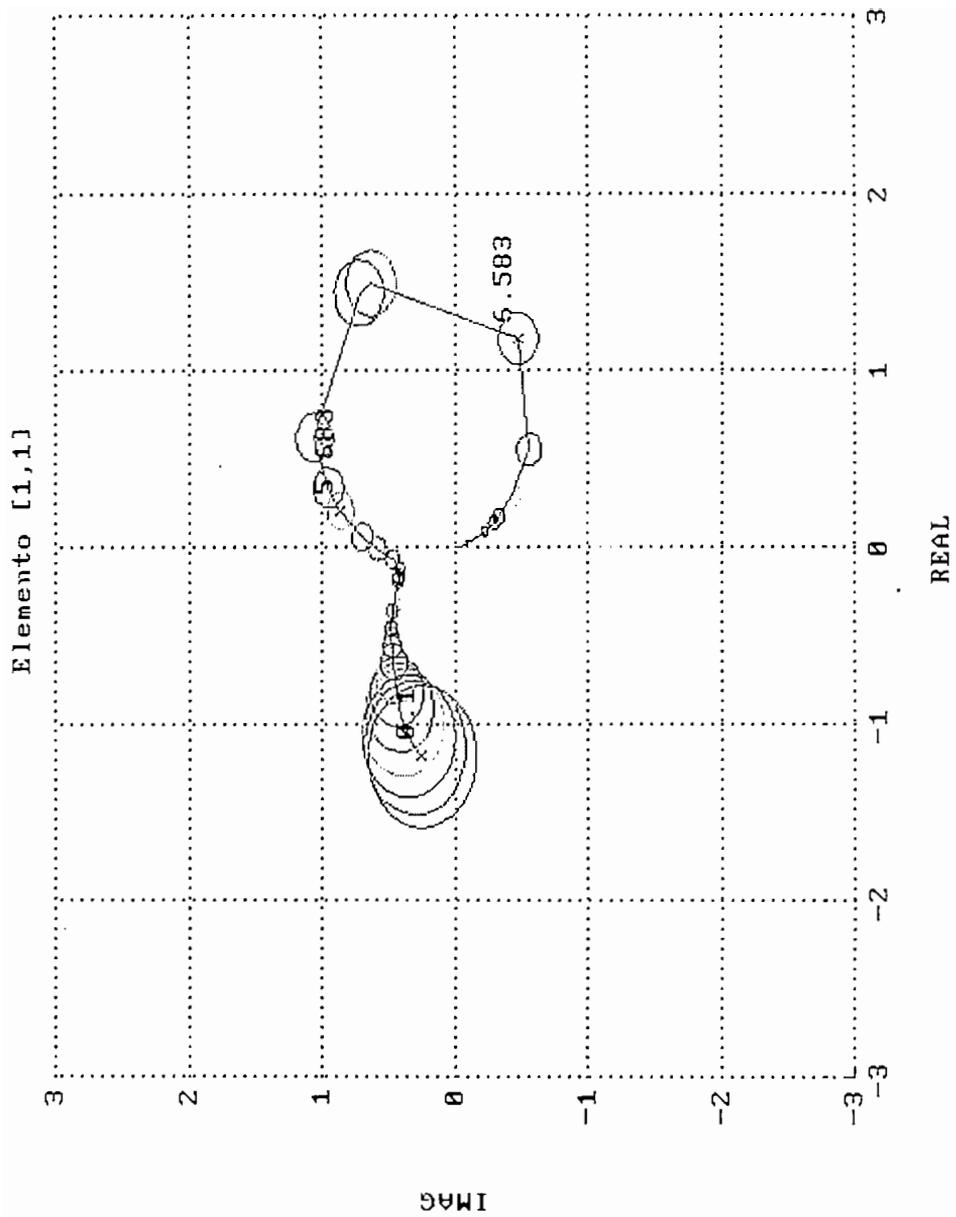


Figura 4.45

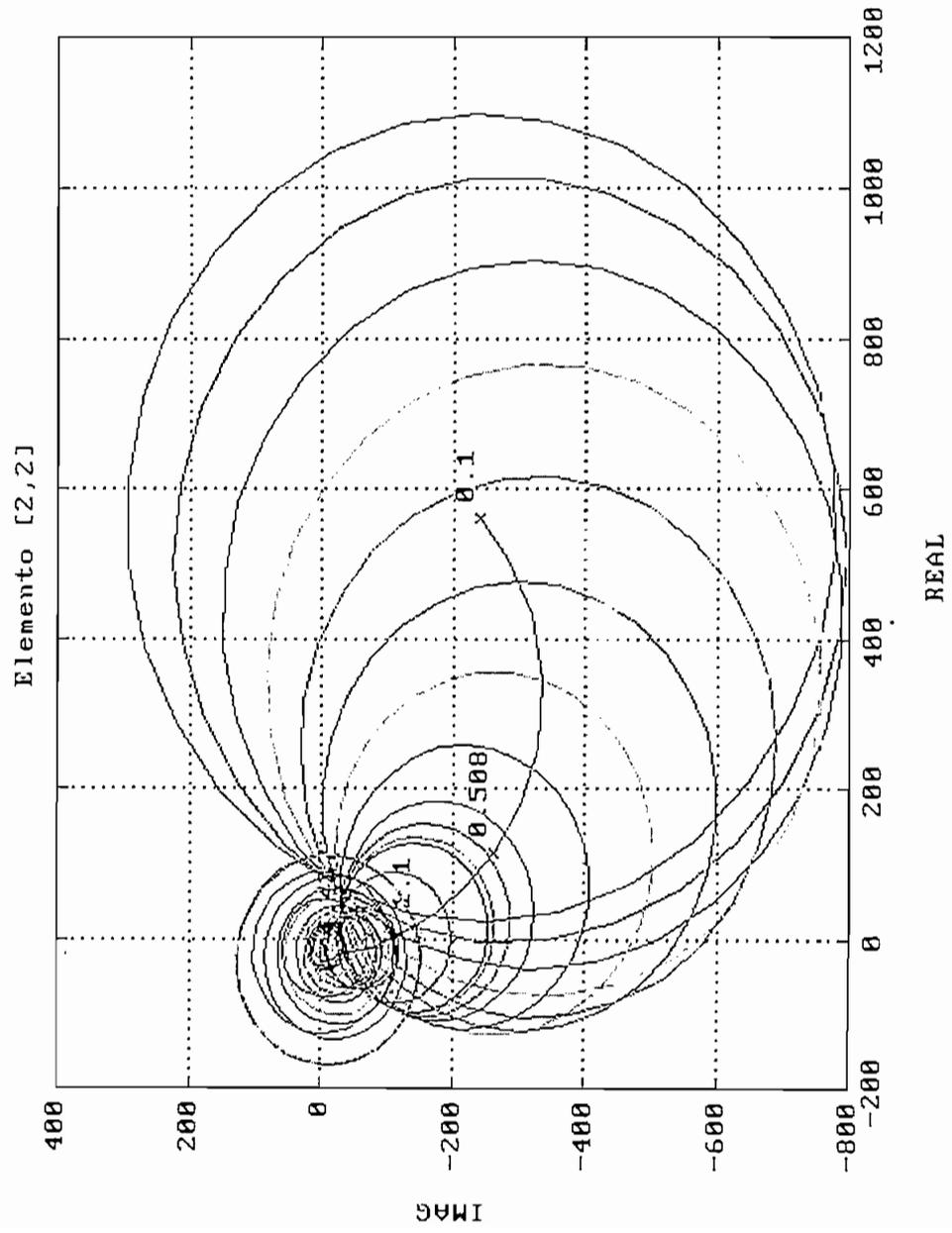


Figura 4.46

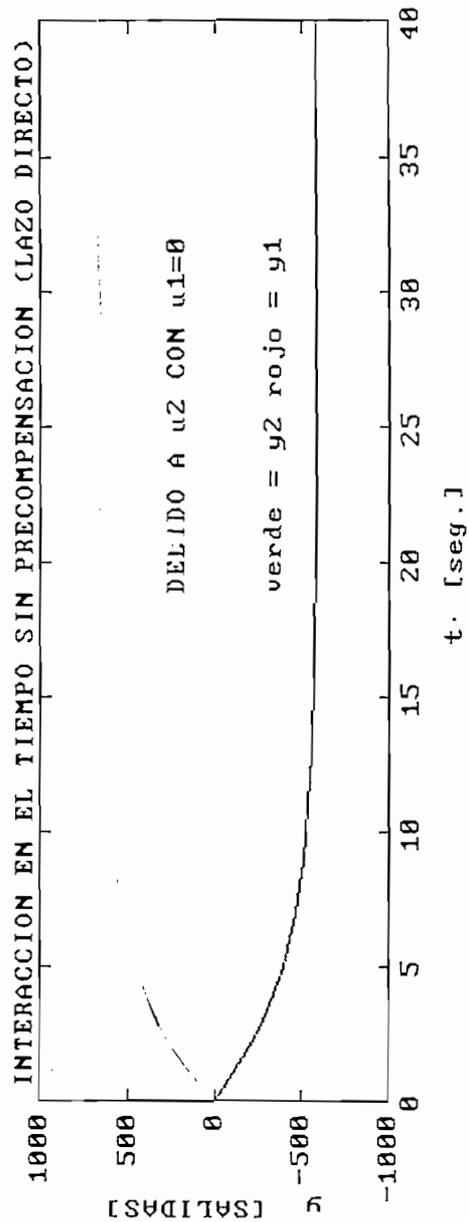
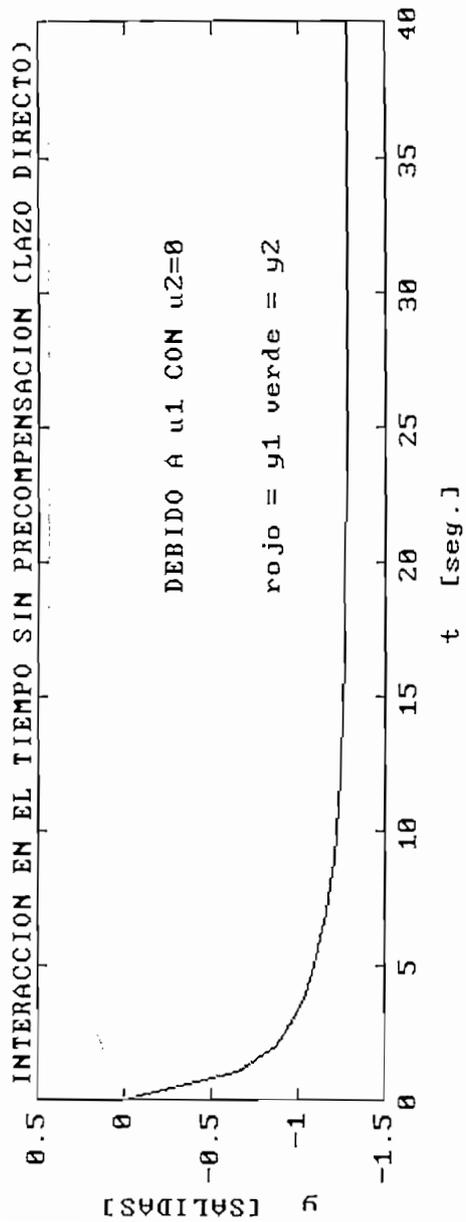


Figura 4.47

— Verde
- - - Rojo

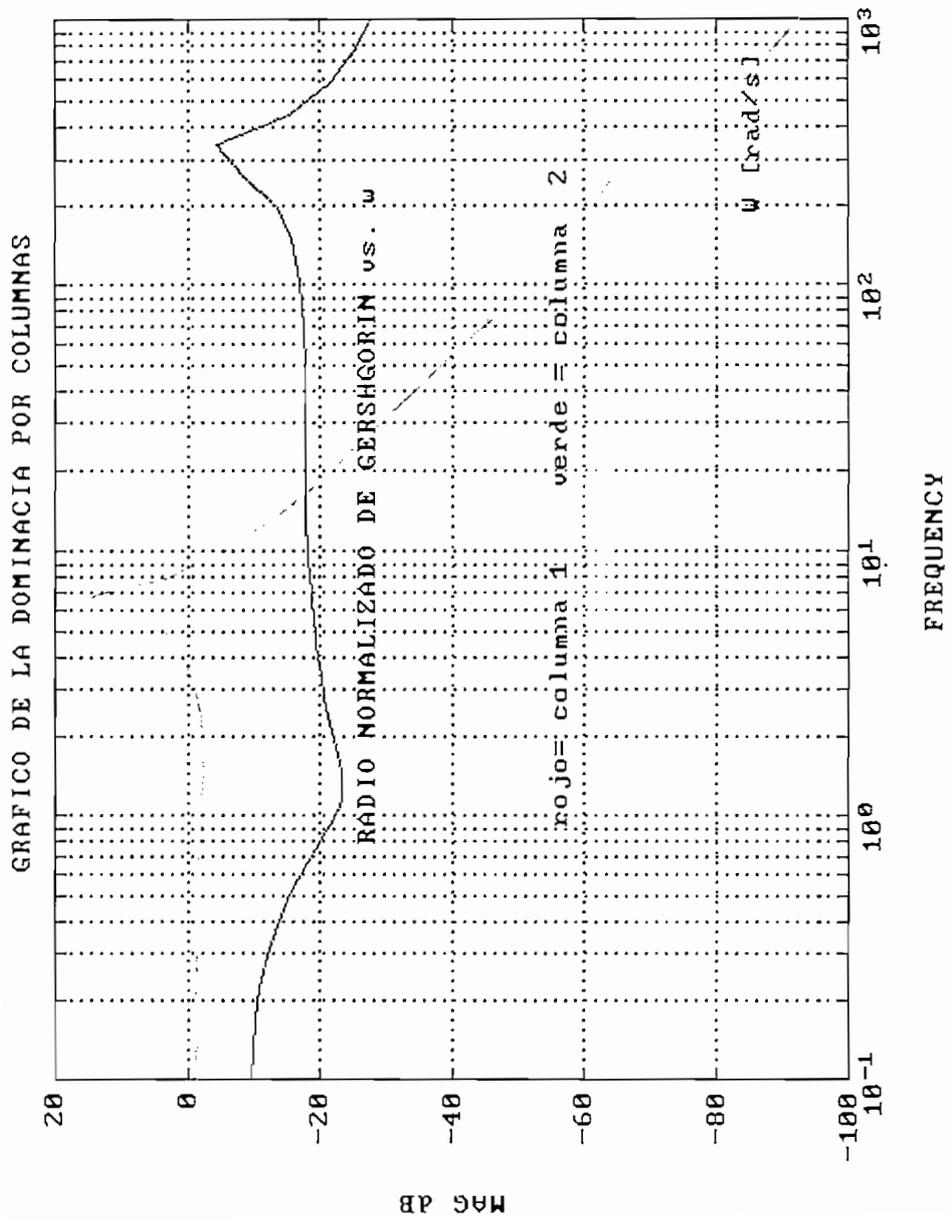


Figura 4.48

GRAFICO PARA EL CRITERIO DE NYQUIST PARA EL LUGAR CARACTERISTICO

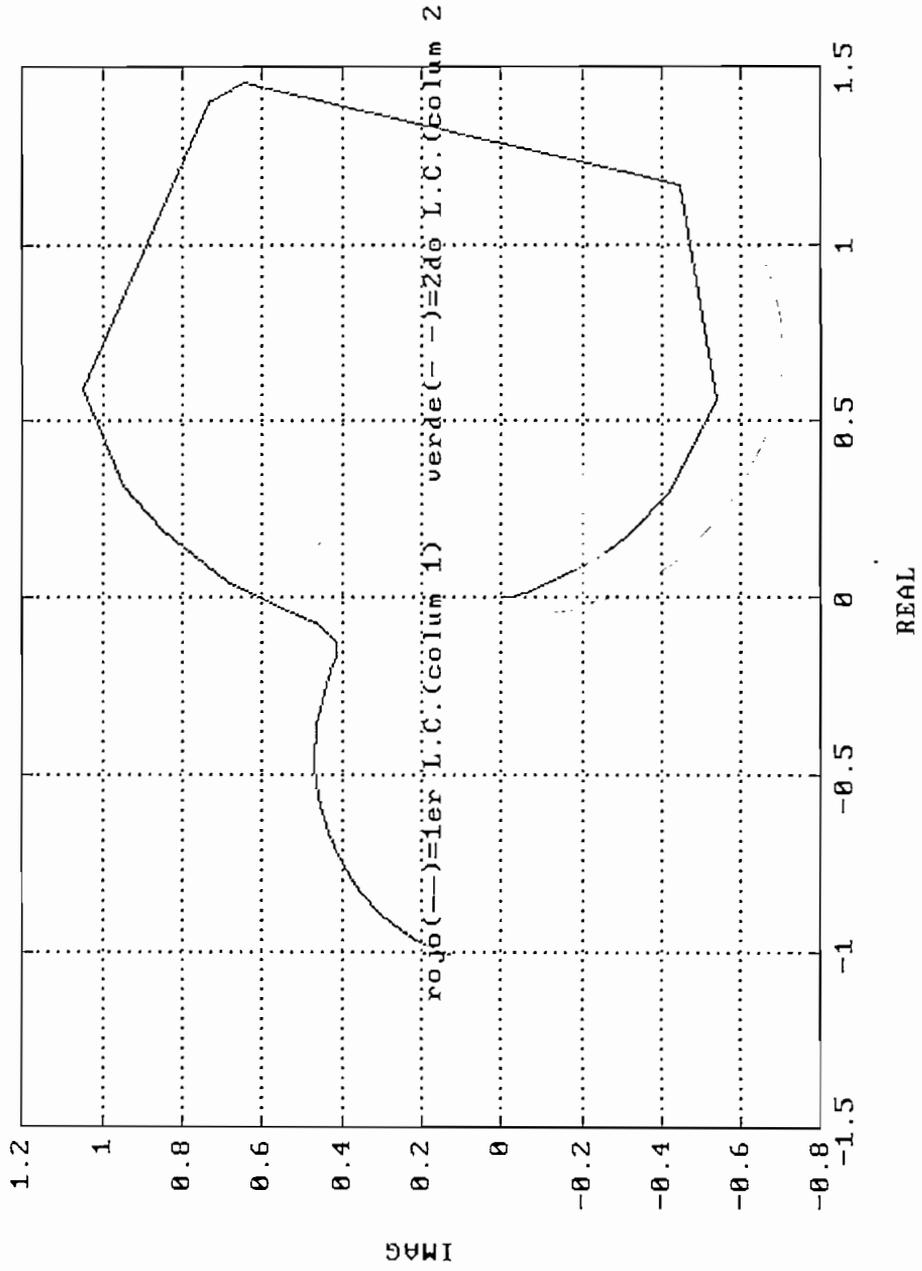


Figura 4.49

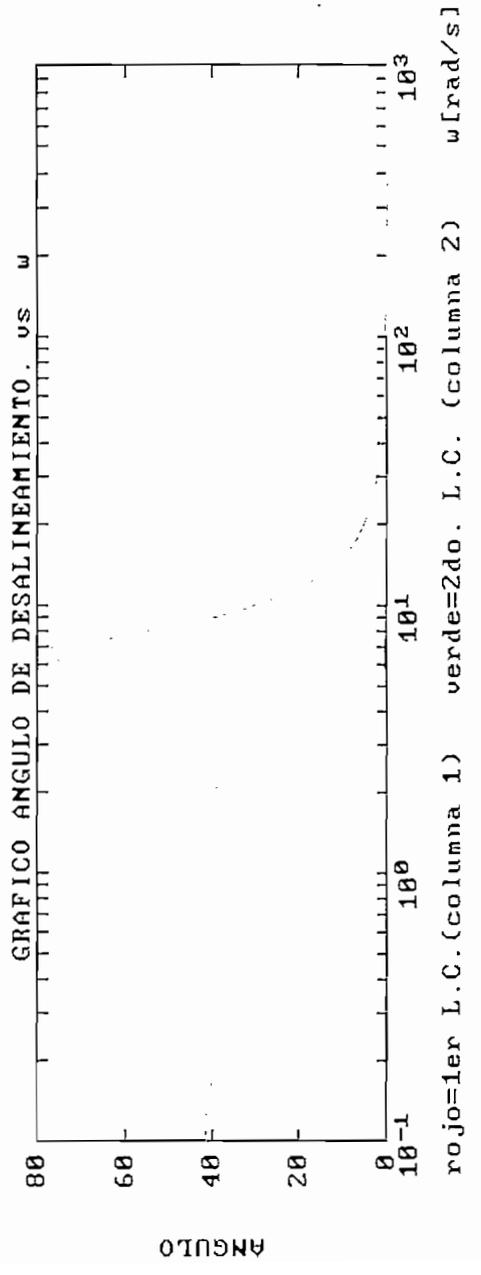
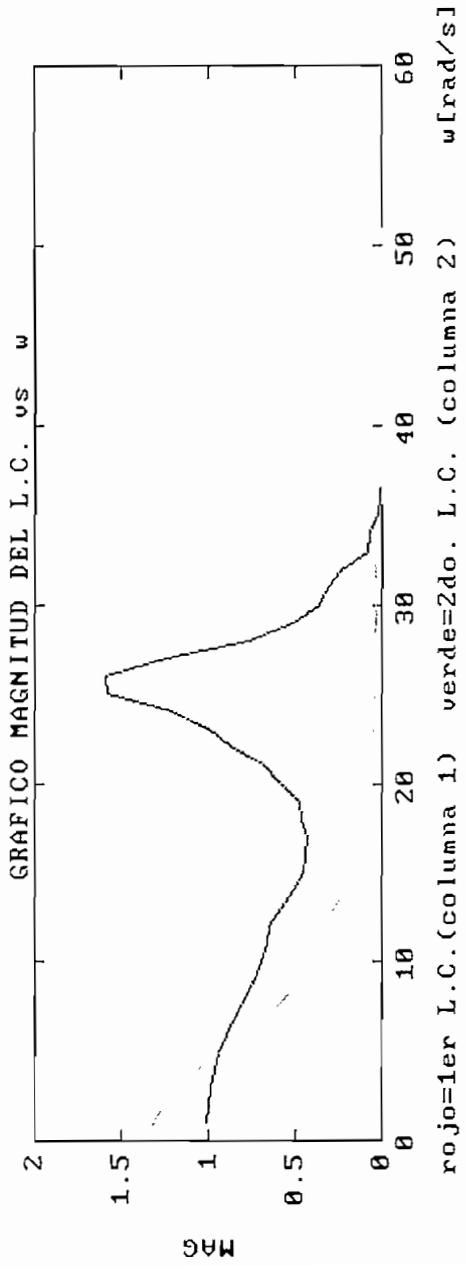


Figura 4.50

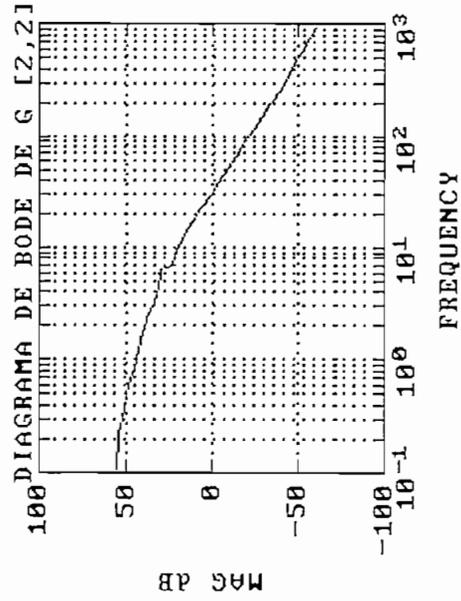
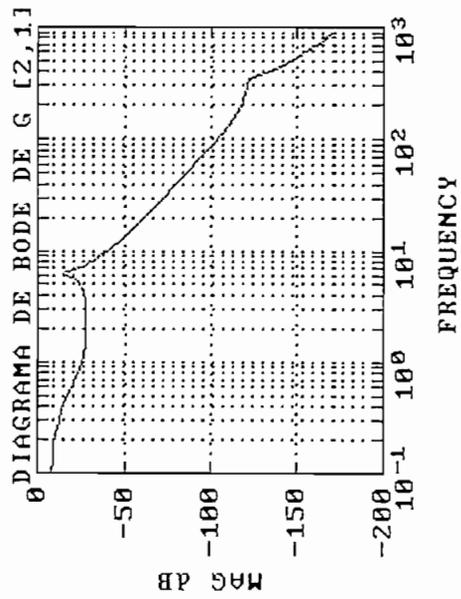
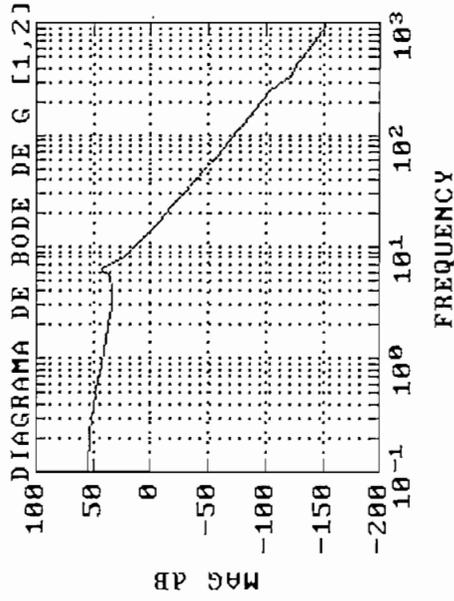
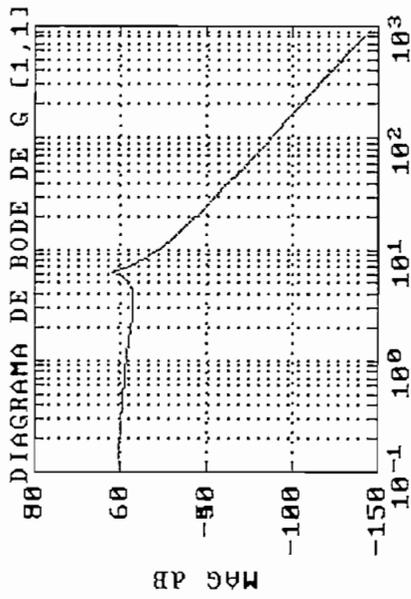


Figura 4.51

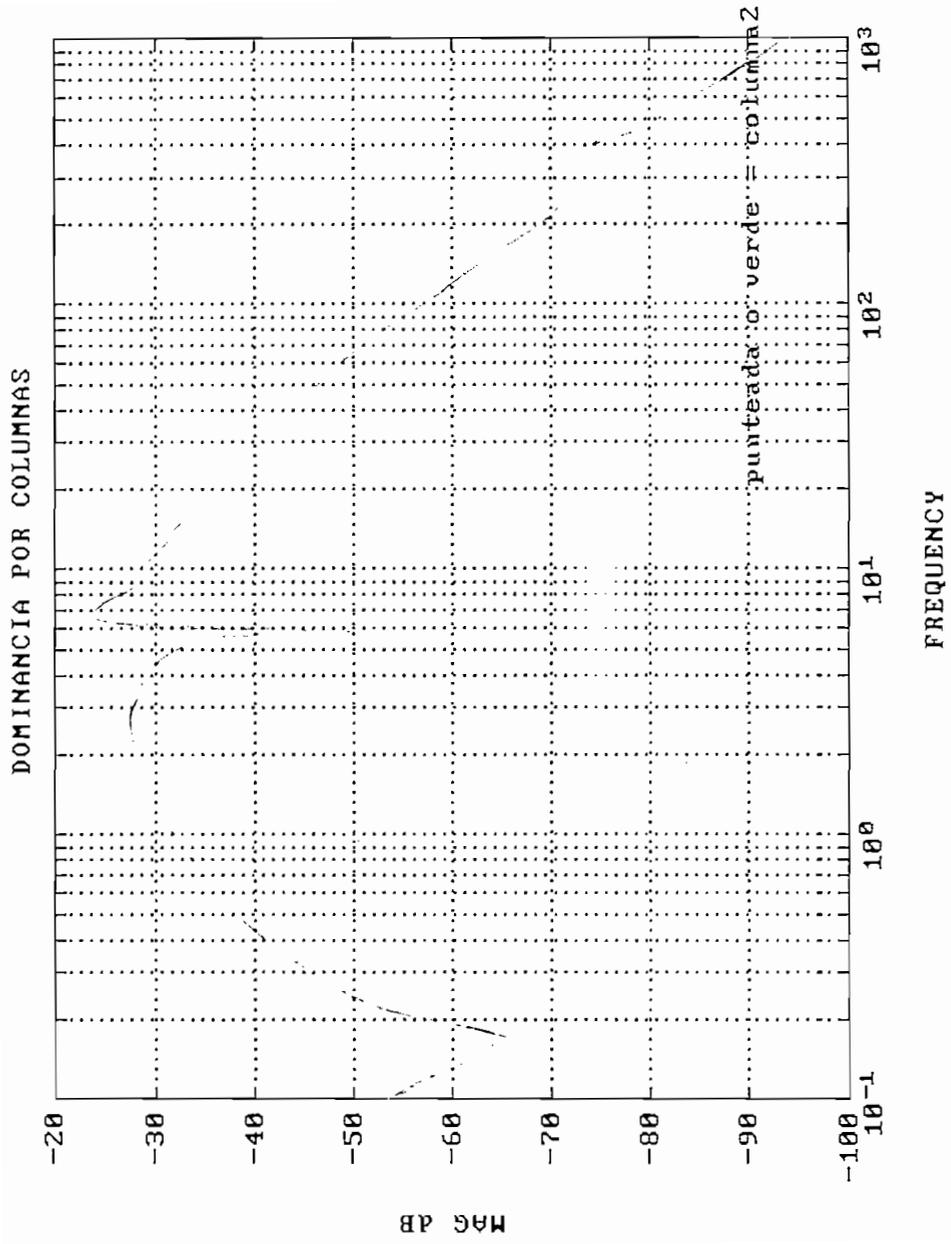


Figura 4.52

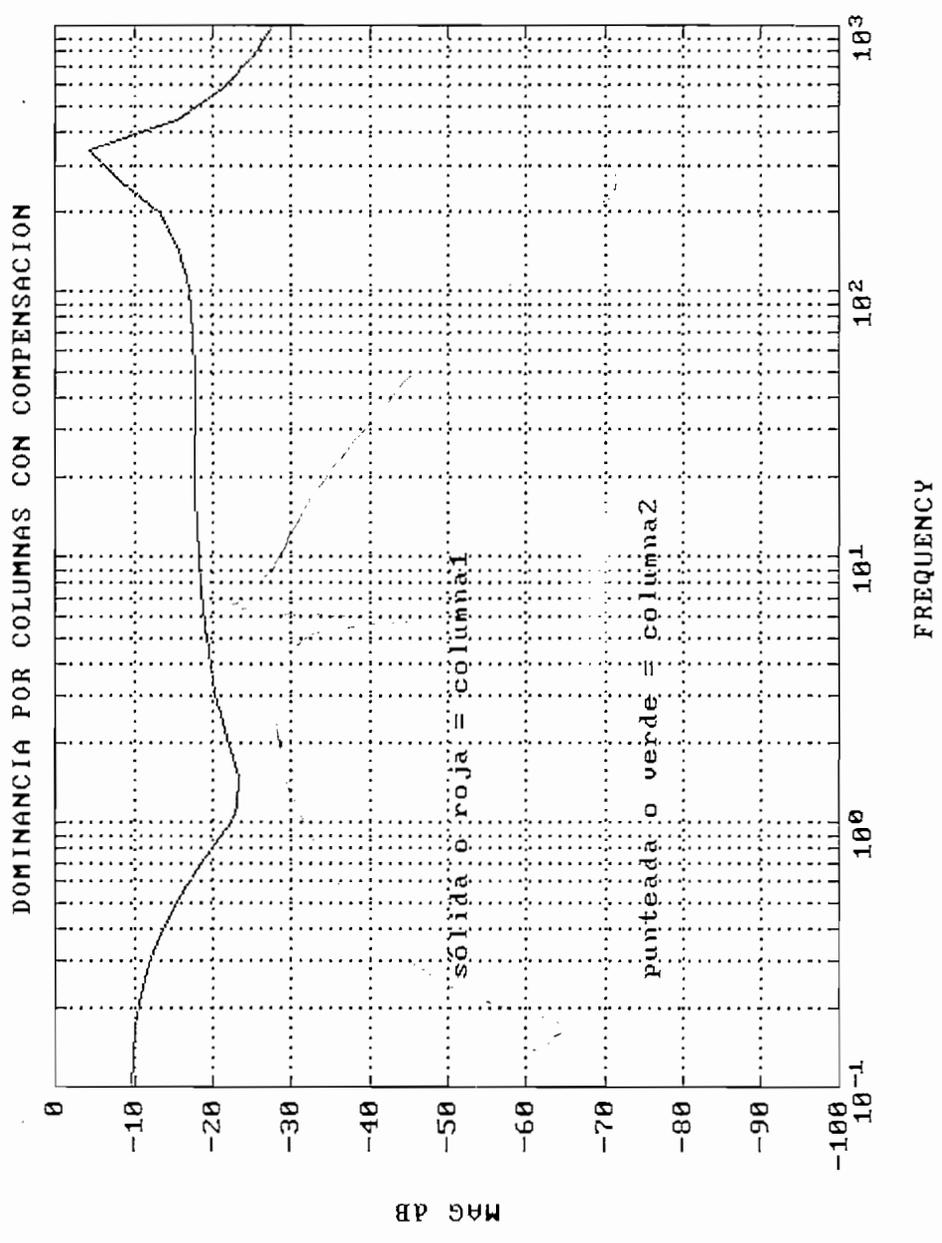


Figura 4.53

Verde
Rojo

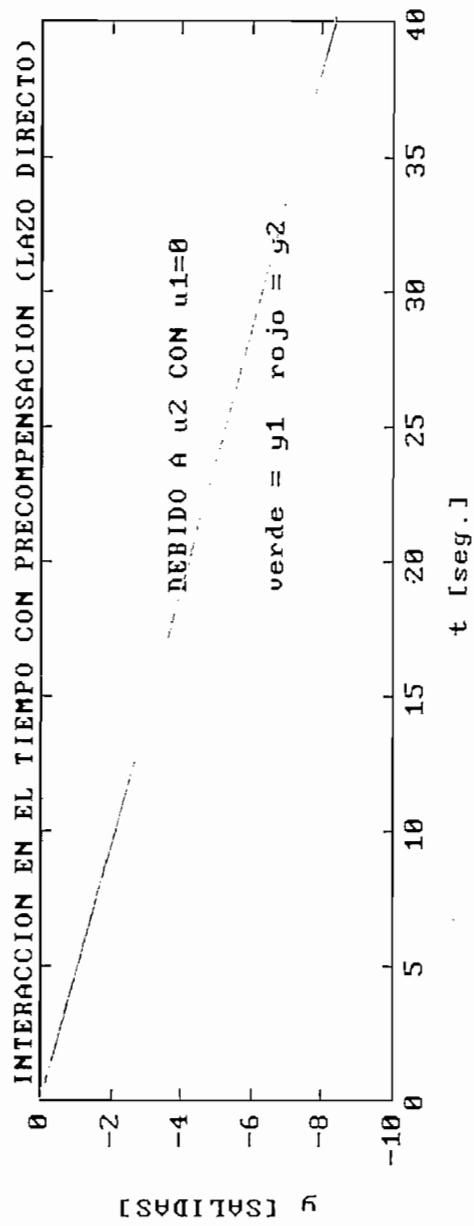
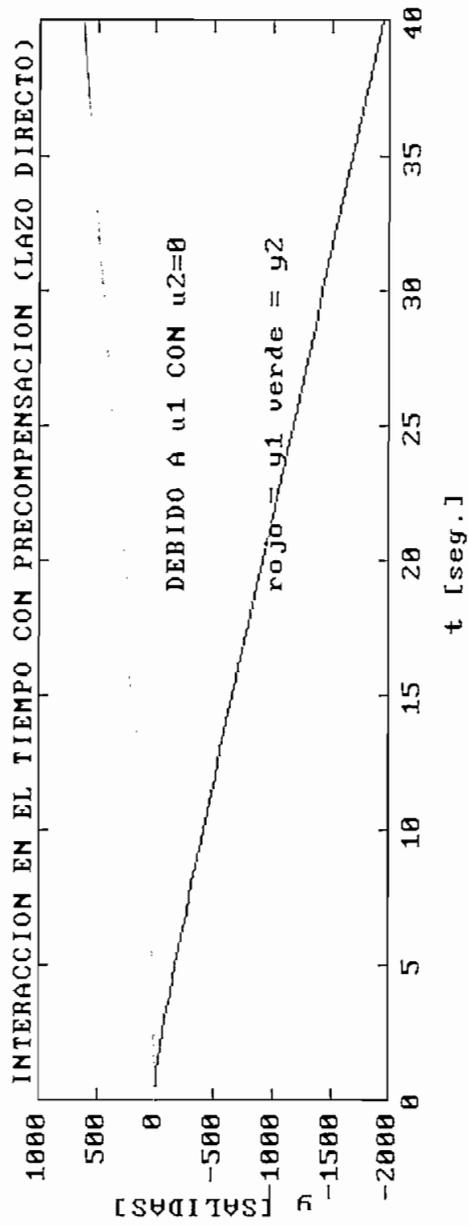


Figura 4.54

Verde
Rojo

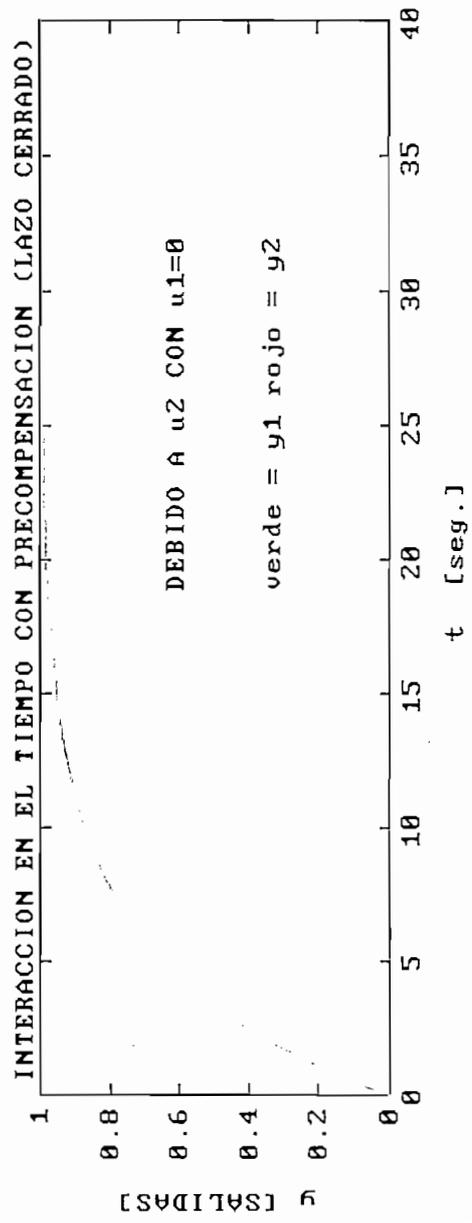
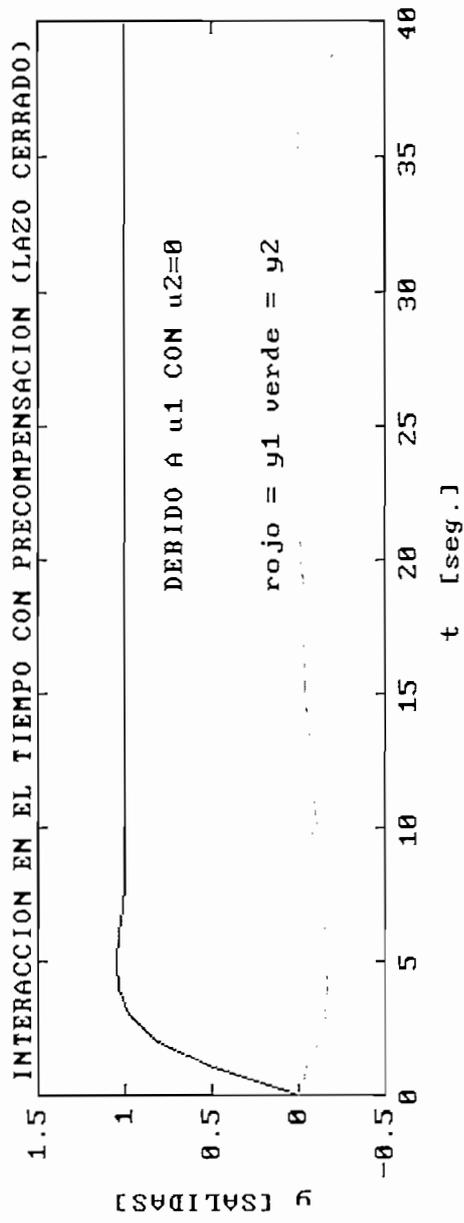


Figura 4.55

— Verde
 - - - Rojo

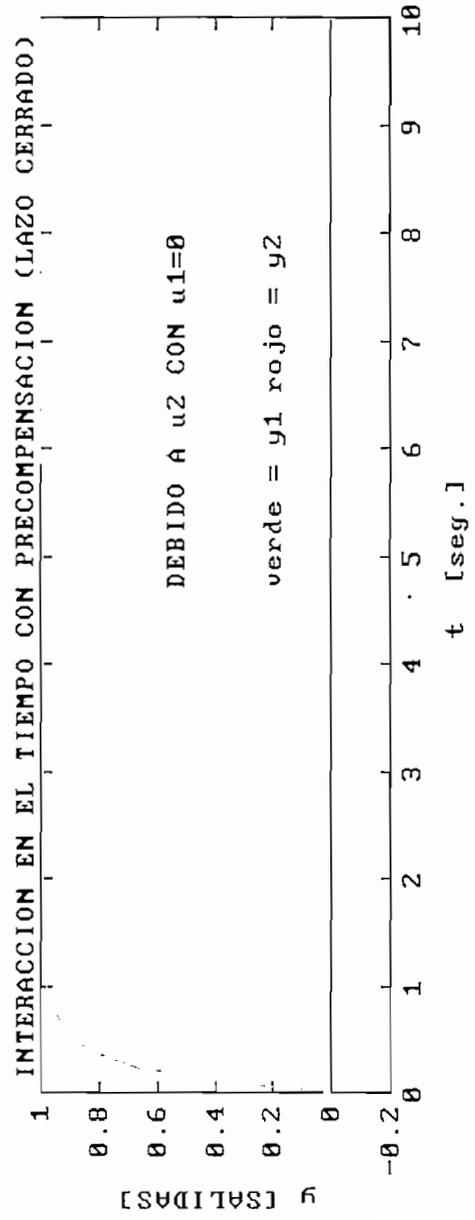
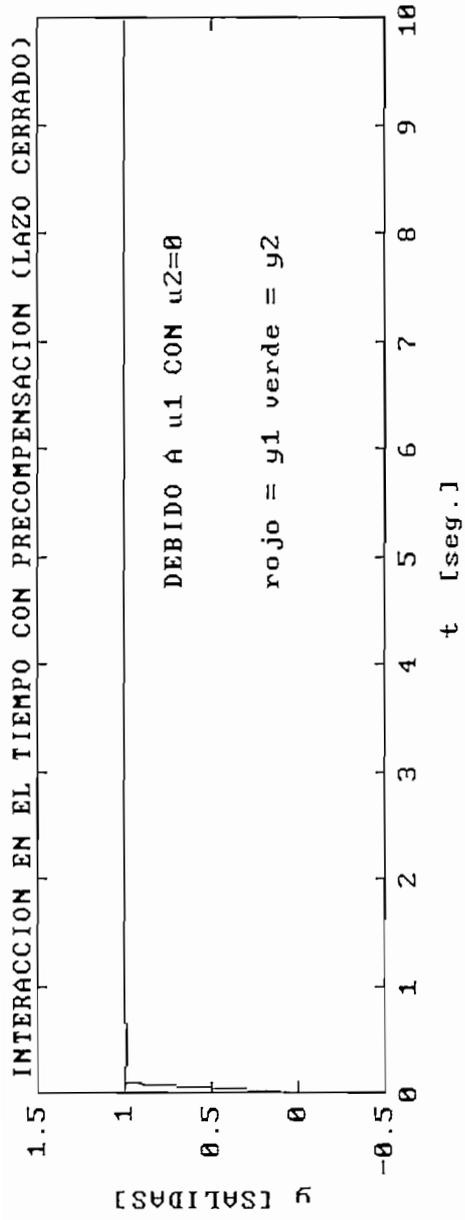


Figura 4.56

Verde
Rojo

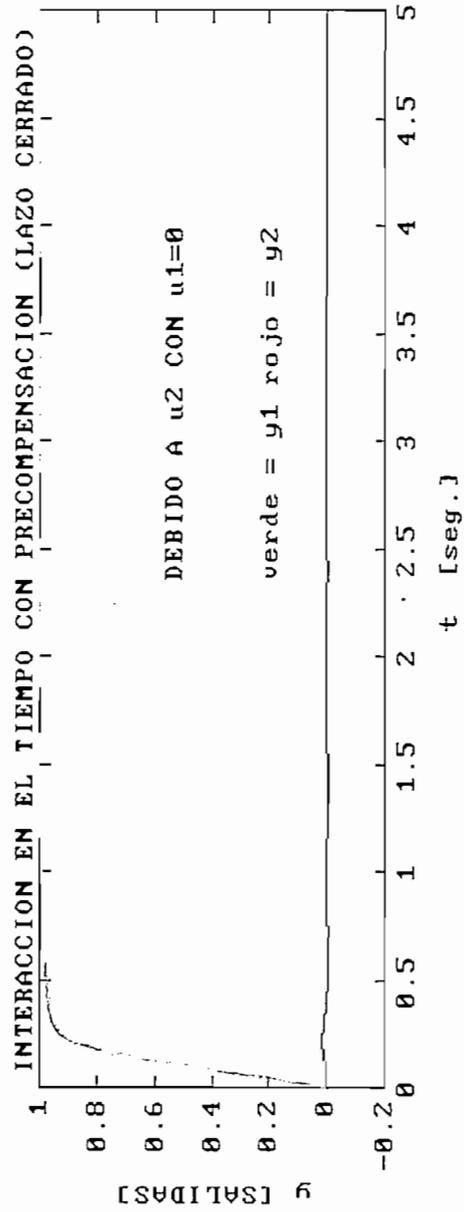
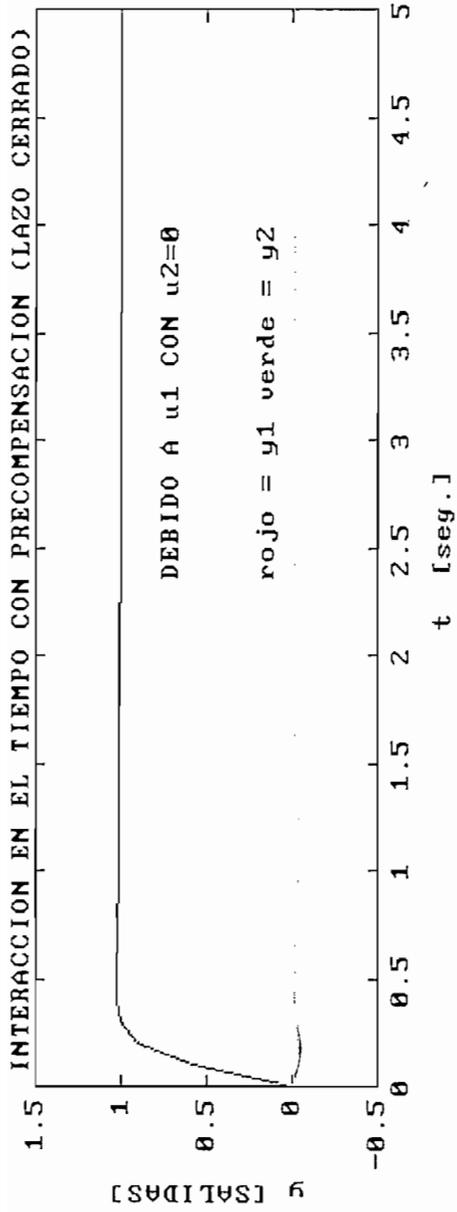


Figura 4.57

Verde
Rojo

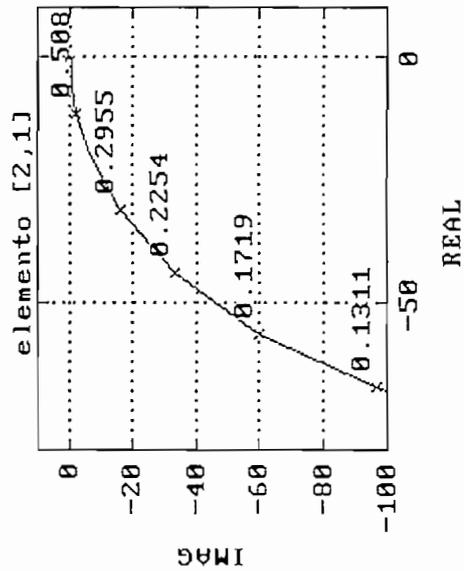
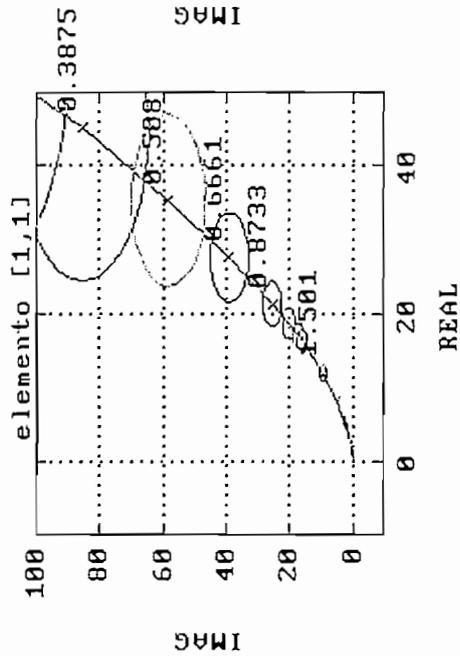
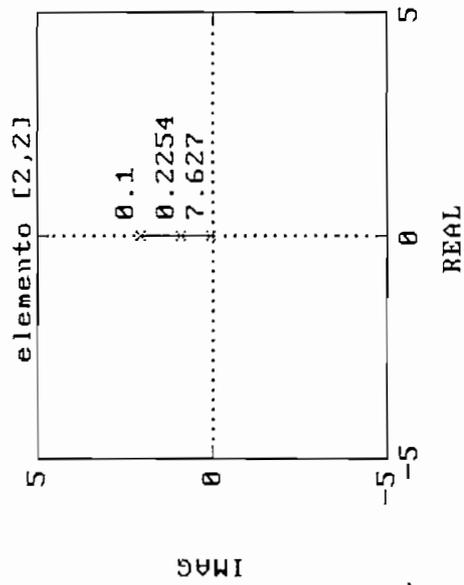
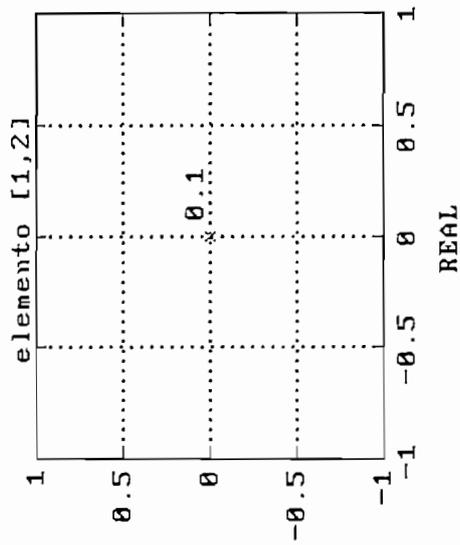


Figura 4.58

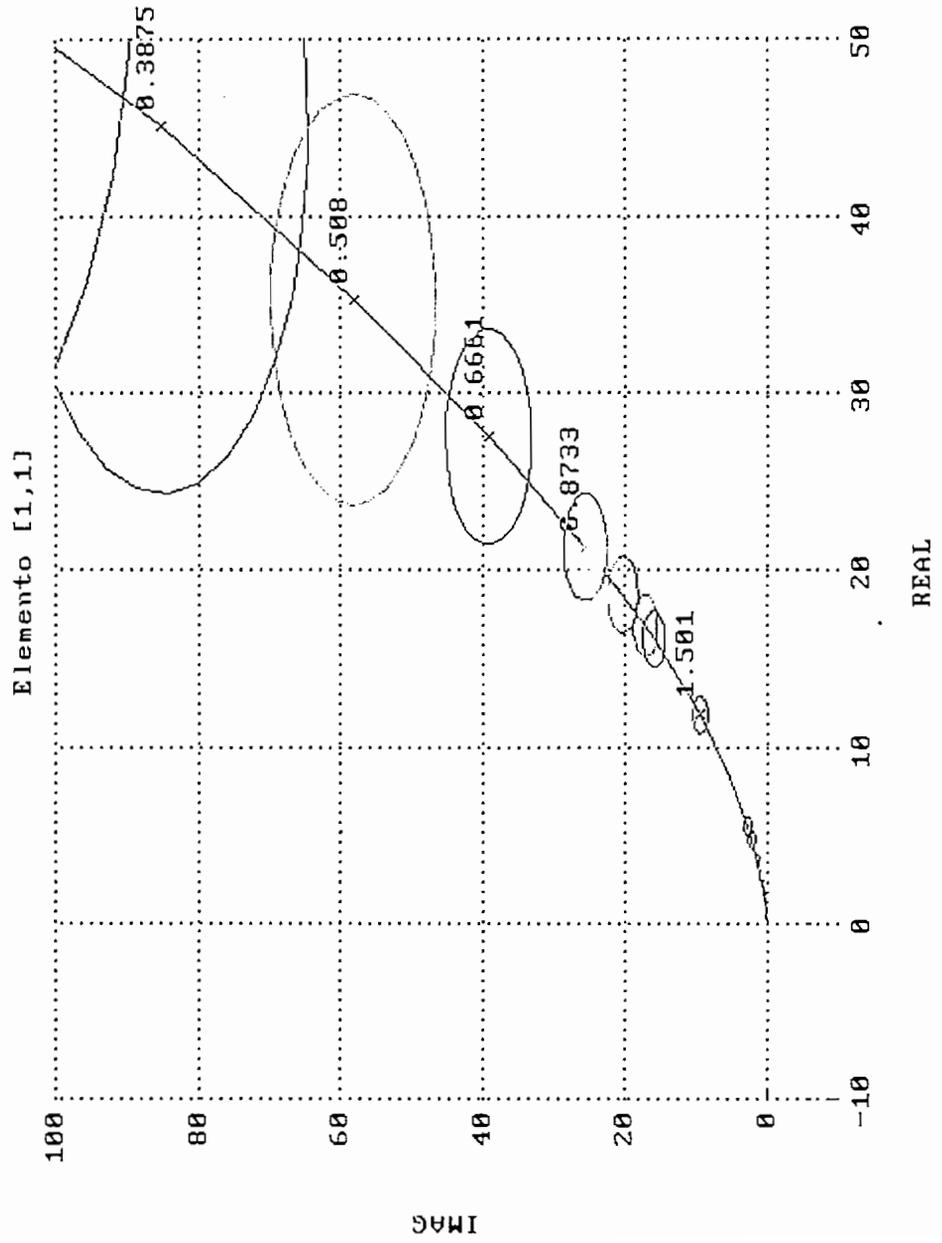


Figura 4.59

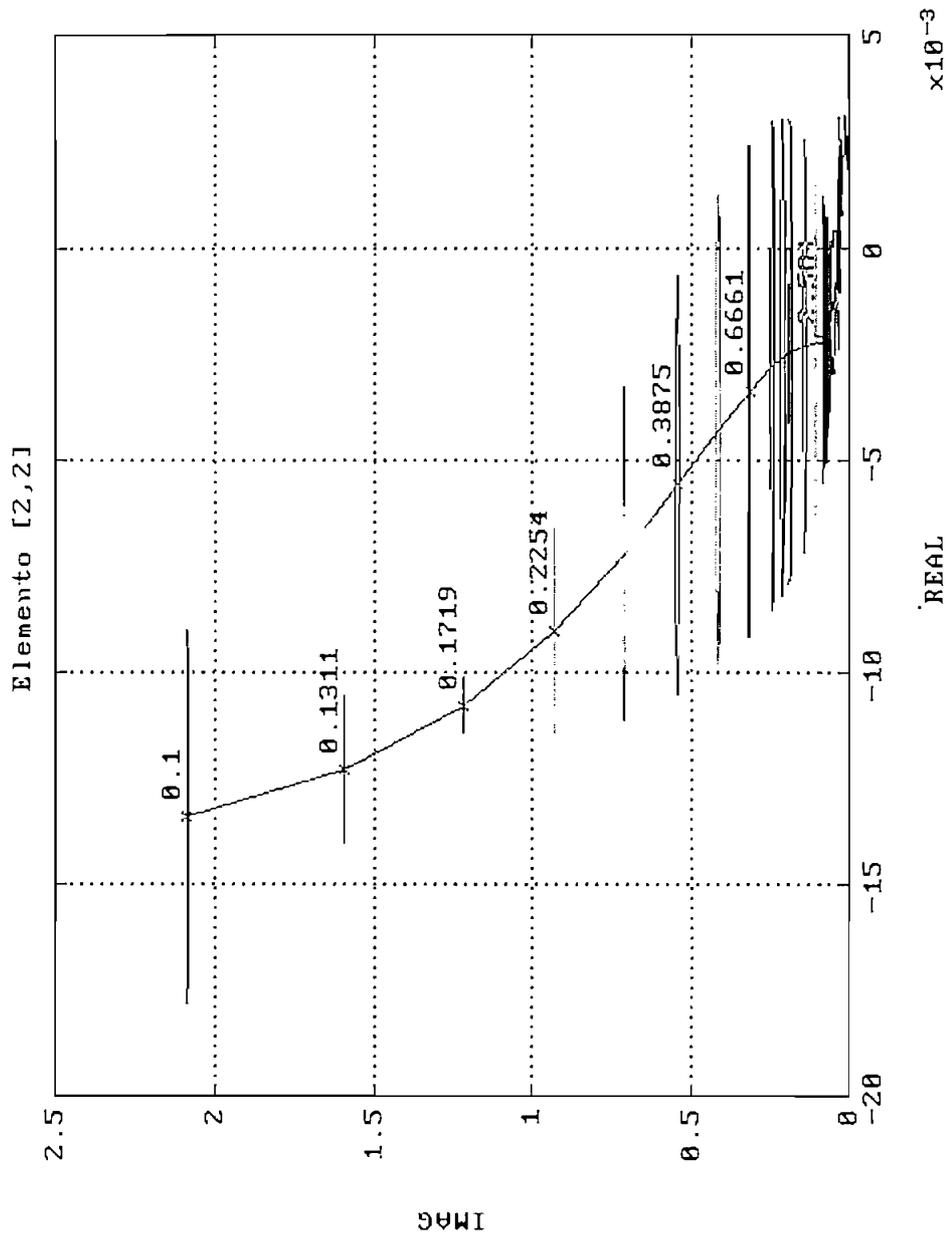


Figura 4.60

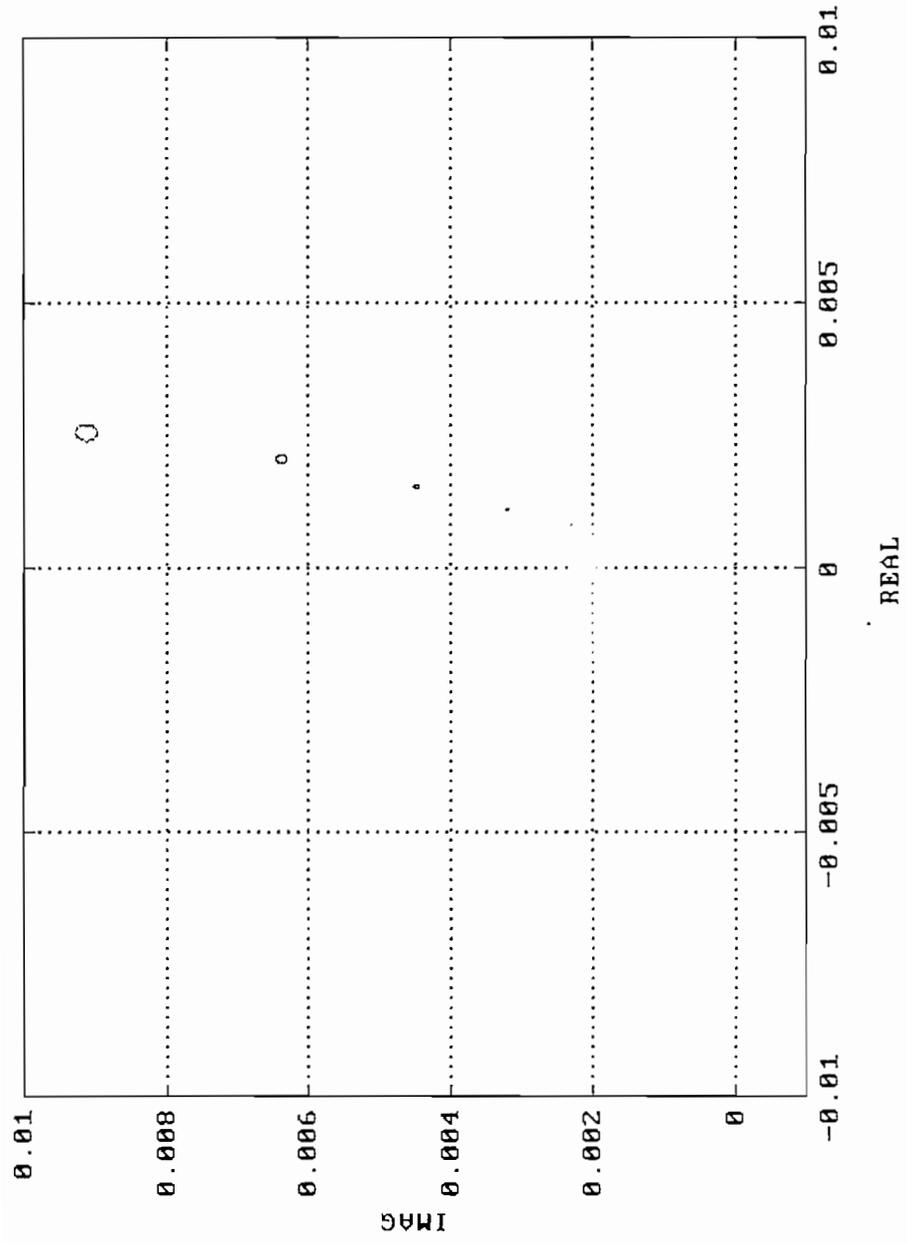


Figura 4.61

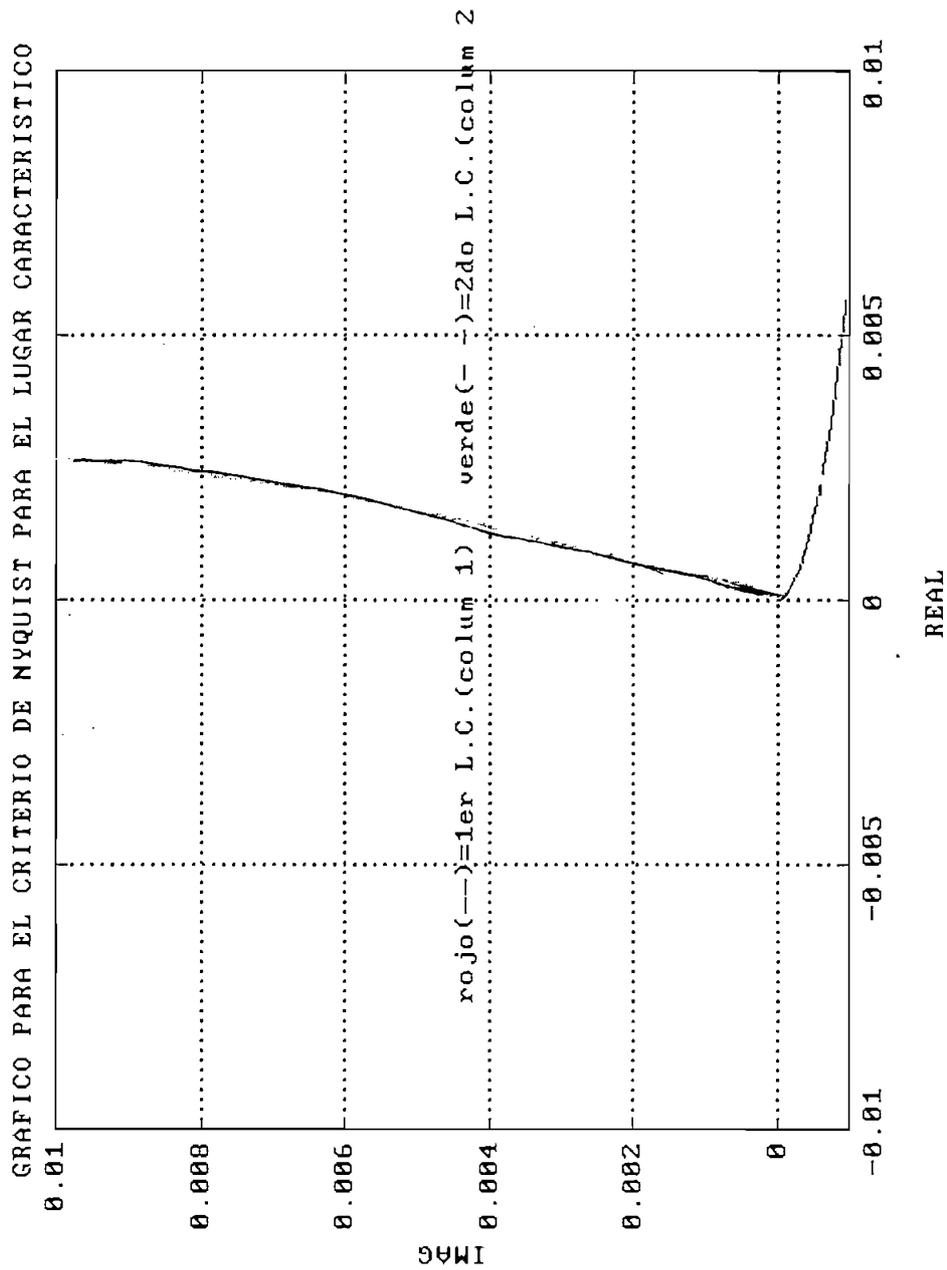


Figura 4.62

— Verde
- - Rojo

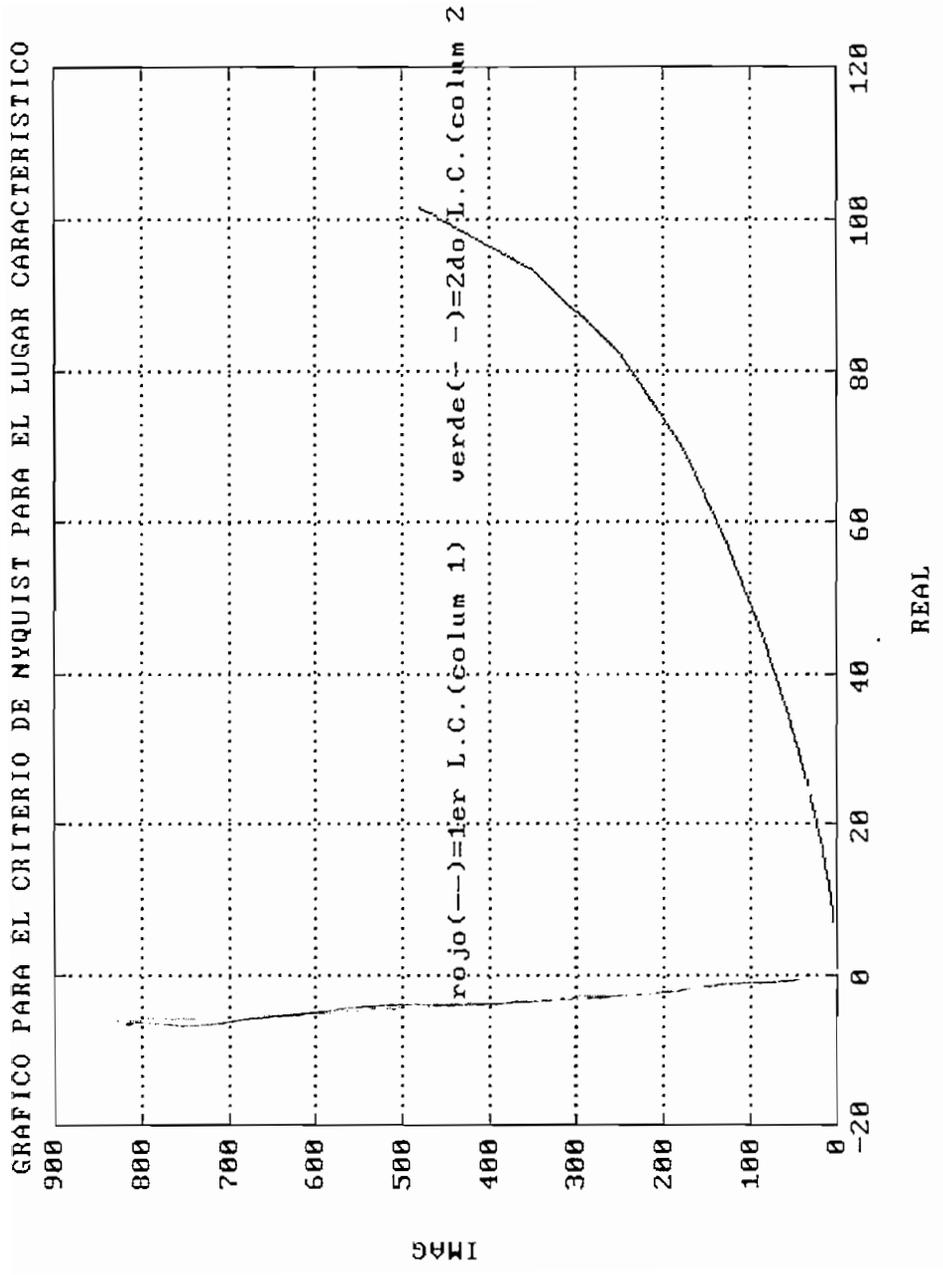


Figura 4.63

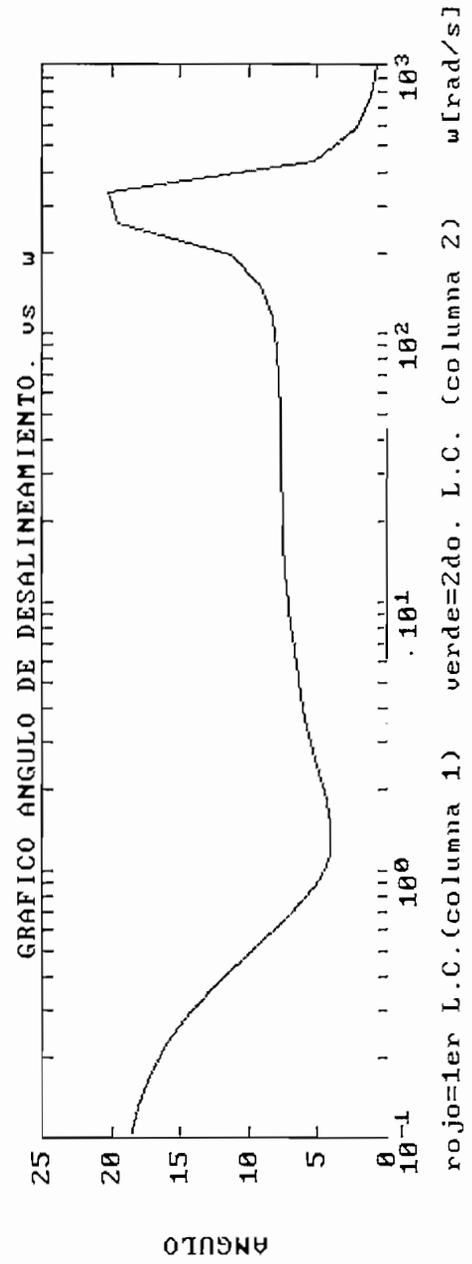
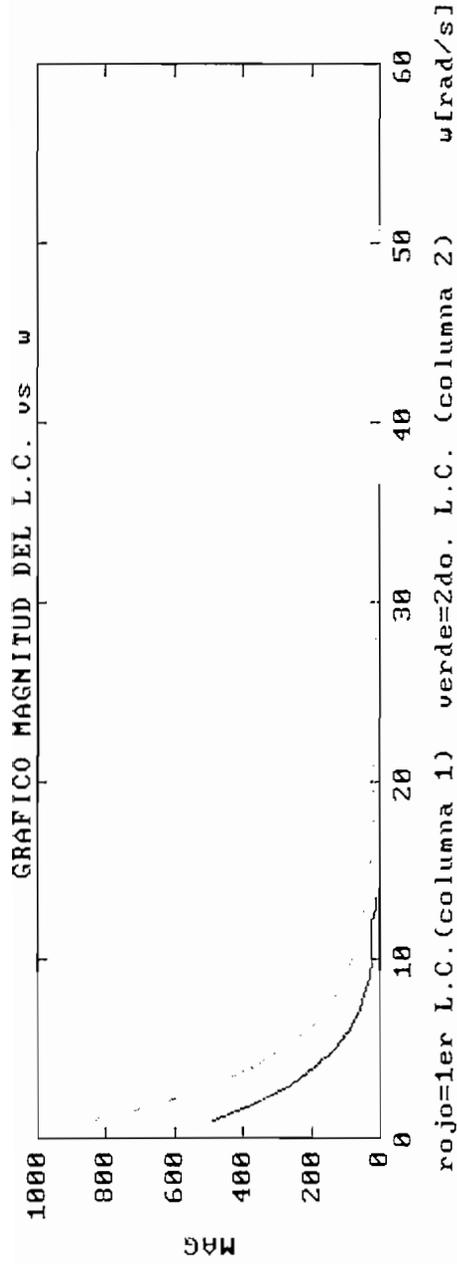


Figura 4.64

— Verde
 - - - Rojo

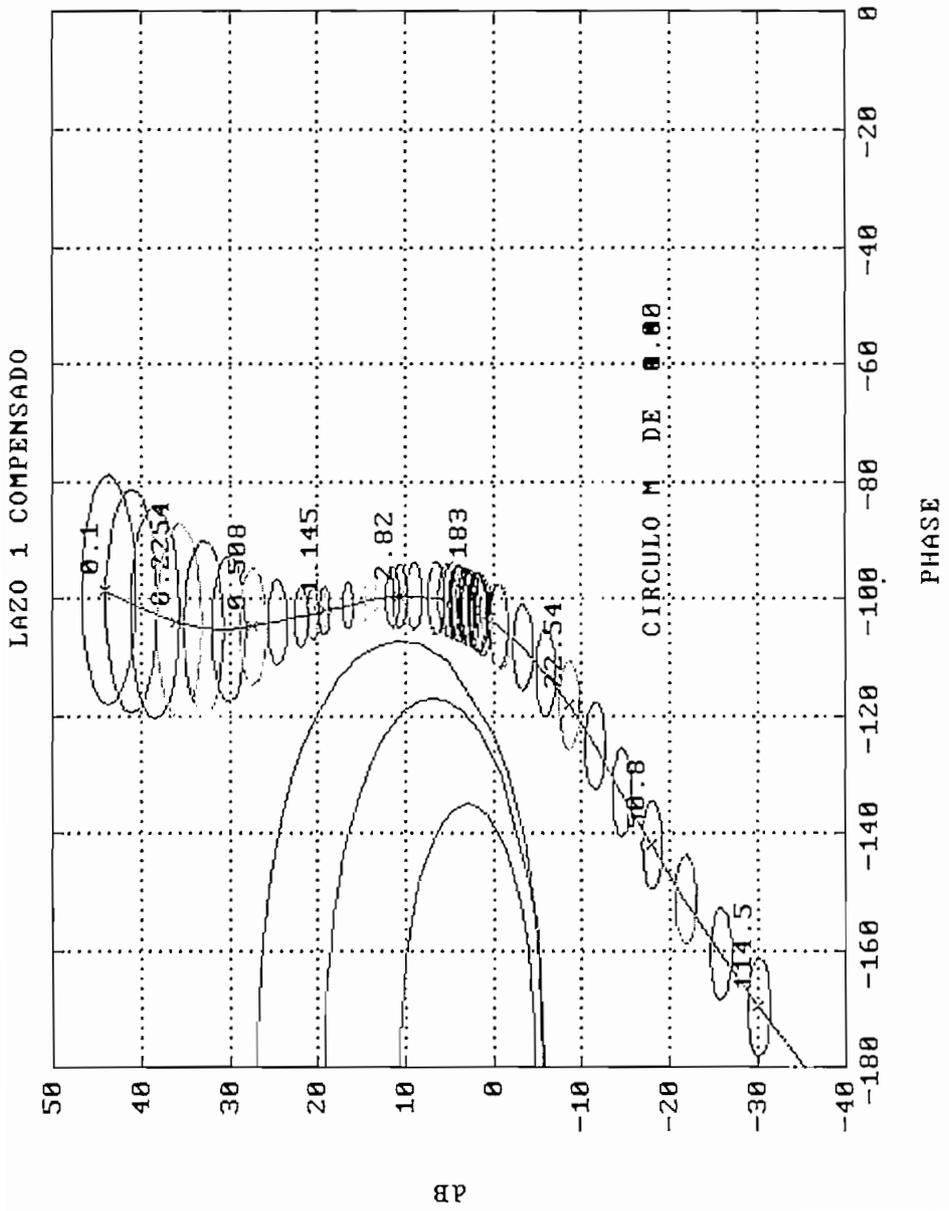


Figura 4.65

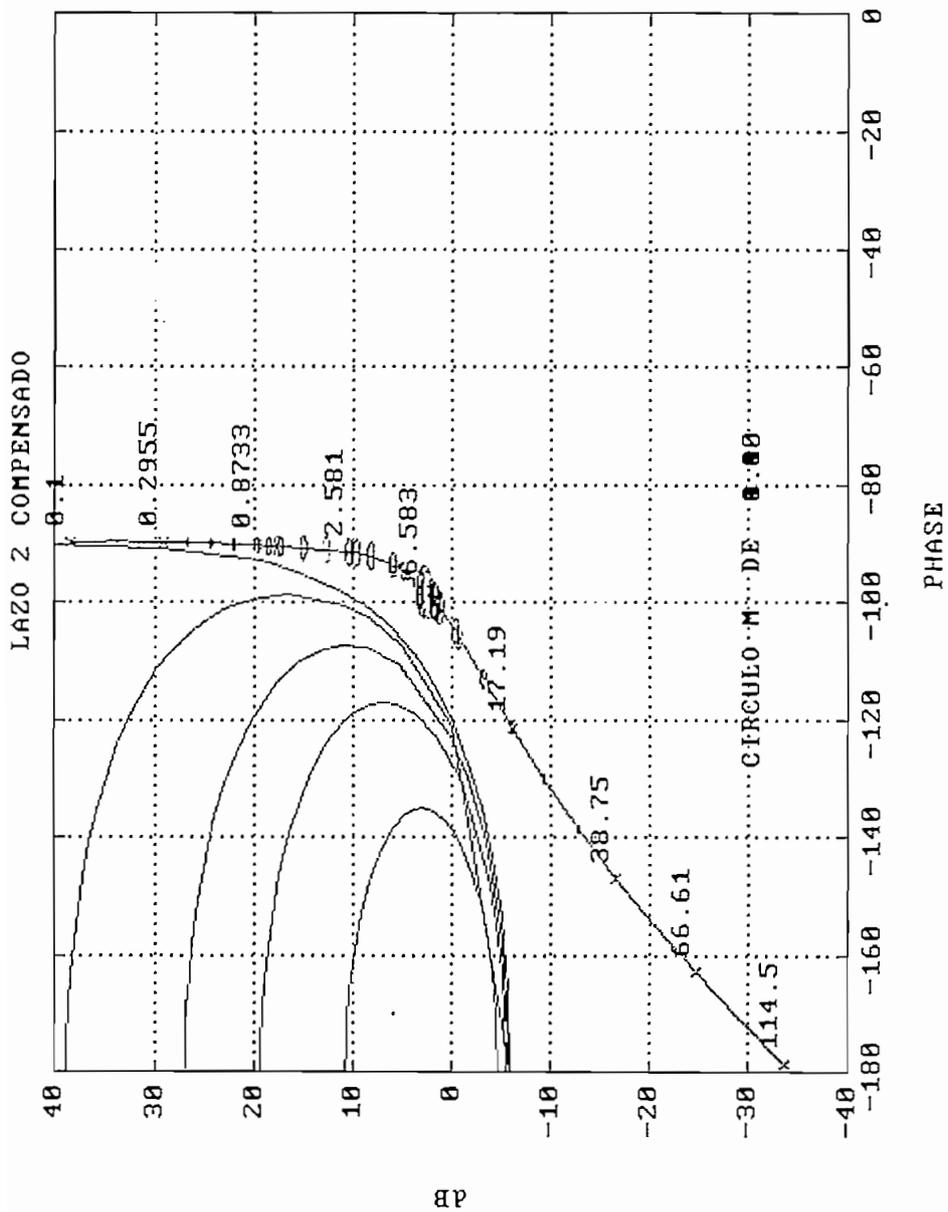


Figura 4.66

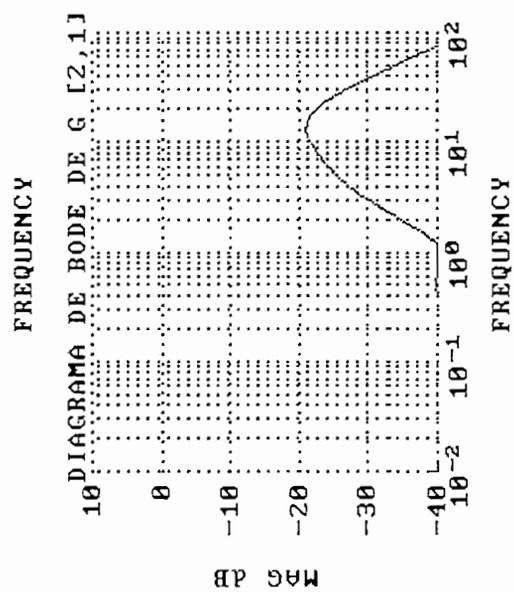
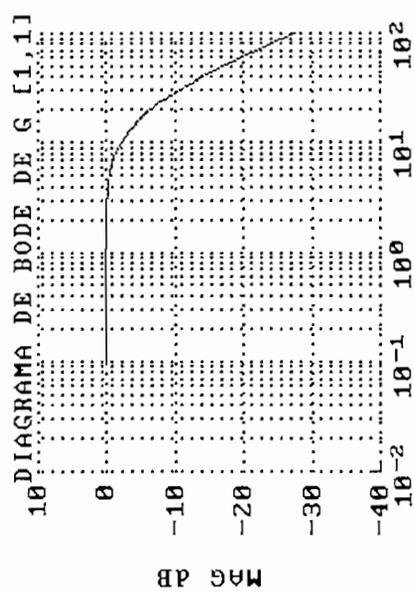
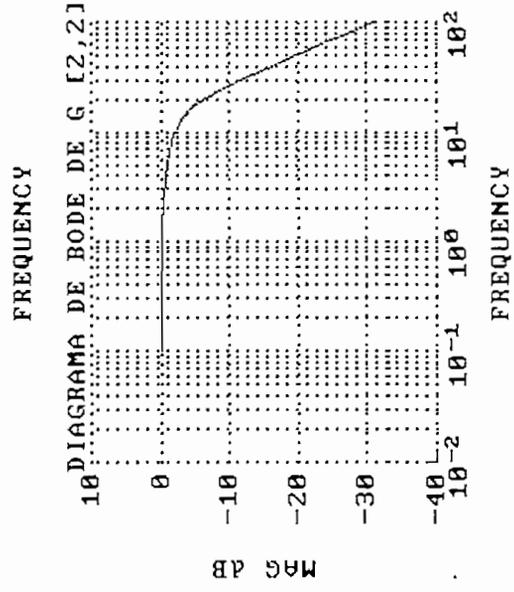
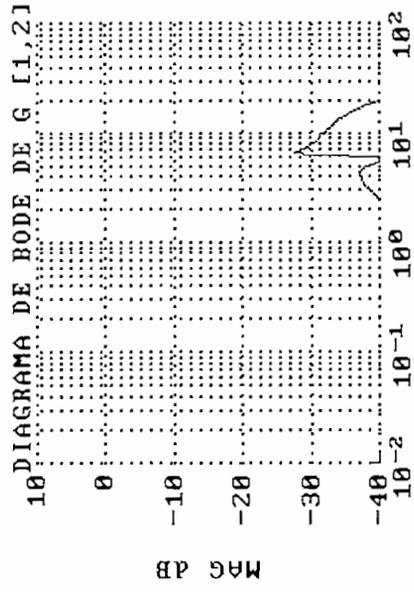


Figura 4.67

4.1.2.2 Compresor

Este compresor supe aire a una planta química . Sus variables de entrada son: el switch de calibración de las hélices del computador (u1) y la posición de una válvula (u2) . Sus salidas son: presión (y1) y flujo (y2). [2]

El modelo en matriz función de transferencia es:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.1134e^{-0.72s}}{1.78^2+4.48s+1} & \frac{0.924}{2.07s+1} \\ \frac{0.3378e^{-0.3s}}{0,361s^2+1.09s+1} & \frac{-0.318e^{-1.29s}}{2.93s+1} \end{bmatrix}$$

En este modelo se aprecia la presencia de retardos de transporte, los cuales también los maneja el DINA TOOLBOX.

Del análisis gráfico se concluye:

Que el sistema no es dominante en ninguna columna pues las bandas de Gershgorin encierran el origen. (figura 4.68, 4.69, 4.70), igual cosa sucede con la interacción en el tiempo en lazo cerrado pues $y_{11} < y_{21}$; $y_{22} < y_{12}$. (figura 4.71)

En dominancia por columnas las dos columnas están sobre el valor cero dB, por tanto, no es dominante (figura 4.72).

En el gráfico del criterio de Nyquist para el lugar característico , se establece que el sistema es estable. (figura 4.73)

En la magnitud del lugar característico se aprecia bajas ganancias a bajas frecuencias, por lo que es necesario compensar para aumentar estas, en cambio con el ángulo de desalineamiento a altas frecuencias especialmente la segunda columna crece conforme aumenta la frecuencia, y esto de por sí da problemas a altas frecuencias. (ver *figura 4.74*)

Por todo lo anteriormente expuesto se hace necesario la compensación, que en este caso se lo hace con el INA.

El precompensador calculado con este método es el siguiente:

$$K = G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1134 & 0.924 \\ 0.3378 & -0.318 \end{bmatrix}$$

Este precompensador produce el gráfico de interacción en el tiempo de la *figura 4.75*, y 4.79 que se repitió por error, los cuales tienen una respuesta muy lenta para la 1era y 2da columna, pero que se puede corregir con compensadores SISO.

En los gráficos de Nyquist y las bandas de Gershgorin se observa que el sistema mejoró respecto a su dominancia, y por tanto se encuentra desacoplado como se aprecia en las *figuras 4.76*, *4.77* y *4.78*.

En dominancia, ambas columnas están bajo el valor 0 dB, lo que comprueba aún más que el sistema tiene interacciones pequeñas. (*figura 4.80*)

El hecho de que ninguna columna del lugar característico encierre el punto -1, garantiza que el sistema es estable. Por otra parte a bajas frecuencias ambas columnas su magnitud es mayor que en altas columnas, pero es necesario dar ganancia usando los compensadores SISO. Con el ángulo para la 1era columna se nota la tendencia a disminuir la fase a altas frecuencias, pero la segunda columna si bien baja la fase, pero conserva la tendencia a crecer. Esto se corregirá con los compensadores SISO. (ver *figura 4.82*)

En los diagramas de Bode multivariables (*figura 4.83*), se aprecia que hay dominancia al comparar las magnitudes entre los elementos de cada columna.

Habiéndose completado el diseño, es importante evaluar el grado de robustez del sistema, esto se lo hace mediante los círculos de Nyquist con los círculos de Ostrowski, que para este caso (*figuras 4.84 y 4.85*) muestran un amplio margen de ganancia, tanto para la 1era como la 2da columna

Luego de estar desacoplado el sistema se puede implementar los compensadores SISO, uno para cada lazo, que para este caso los que mejor dieron resulta fueron:

$$K_{11} = \frac{2s^2 + 10s + 4}{1/100 s^2 + s}$$

$$K_{22} = \frac{2s^2 + 10s + 8}{1/100 s^2 + s}$$

Con estos compensadores se obtiene una respuesta satisfactoria, que se la aprecia en la *figura 4.86* y que se refuerza con los gráficos de Nichols de las *figuras 4.87* y *4.88*, en la primera se aprecia el efecto de k_{11} y se dibuja los círculos M de 3 y 0.4 dB, en la segunda se mira el efecto de k_{22} y se ve los círculos M de 3 dB.

Con estos ejercicios se ha comprobado la validez de todo el conjunto de herramientas del DINA TOOLBOX para el cálculo, manipulación y presentación de las propiedades para el análisis y diseño de sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia .

COMPRESOR

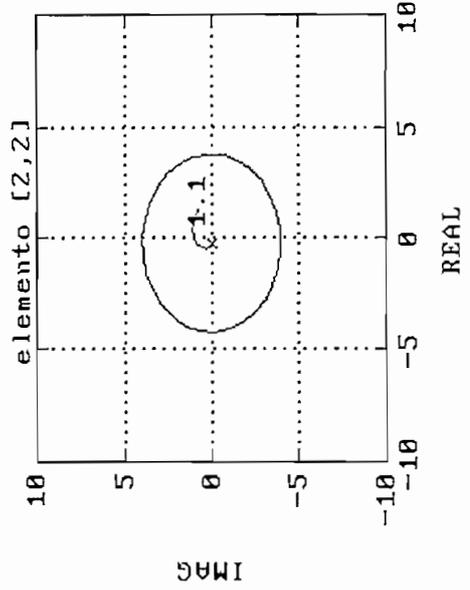
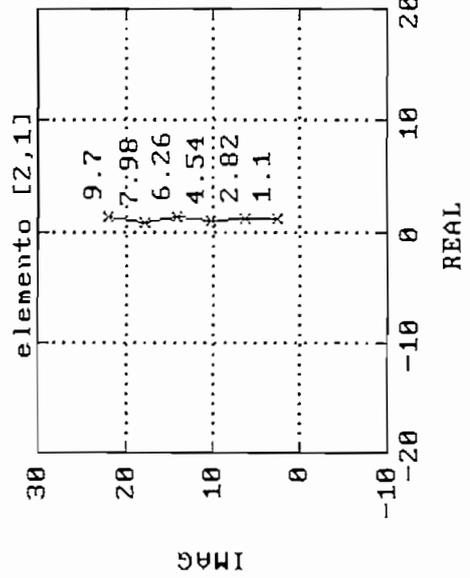
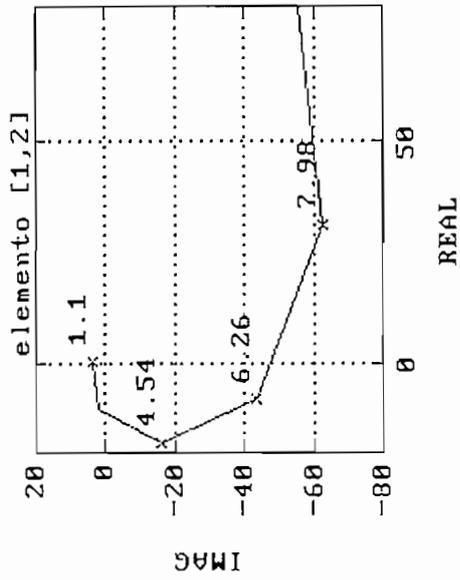
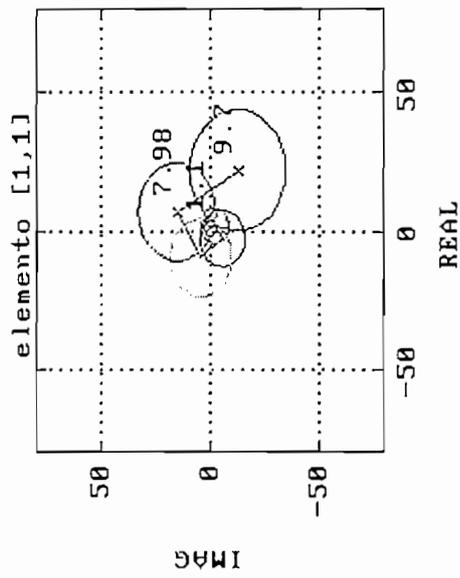


Figura 4.68

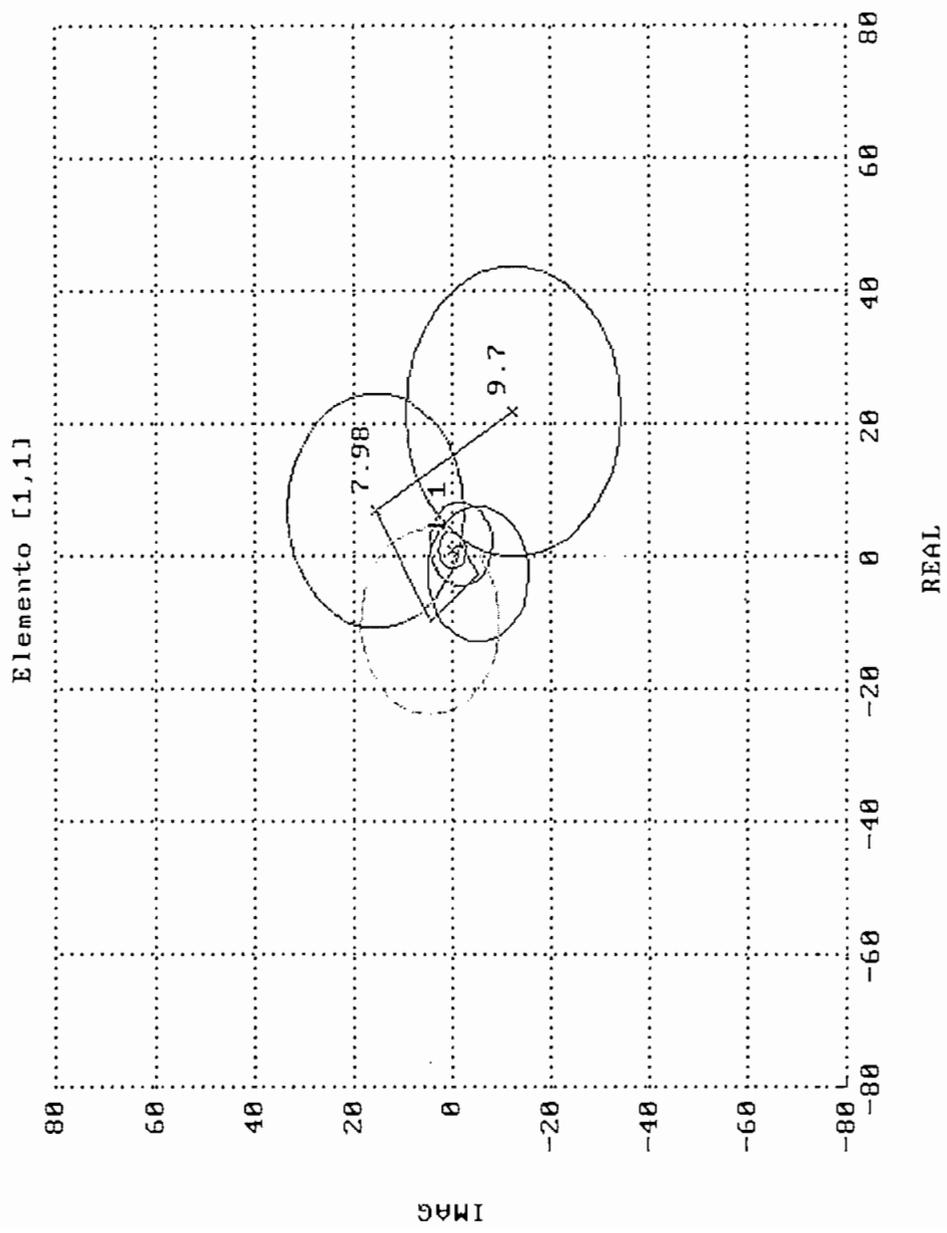


Figura 4.69

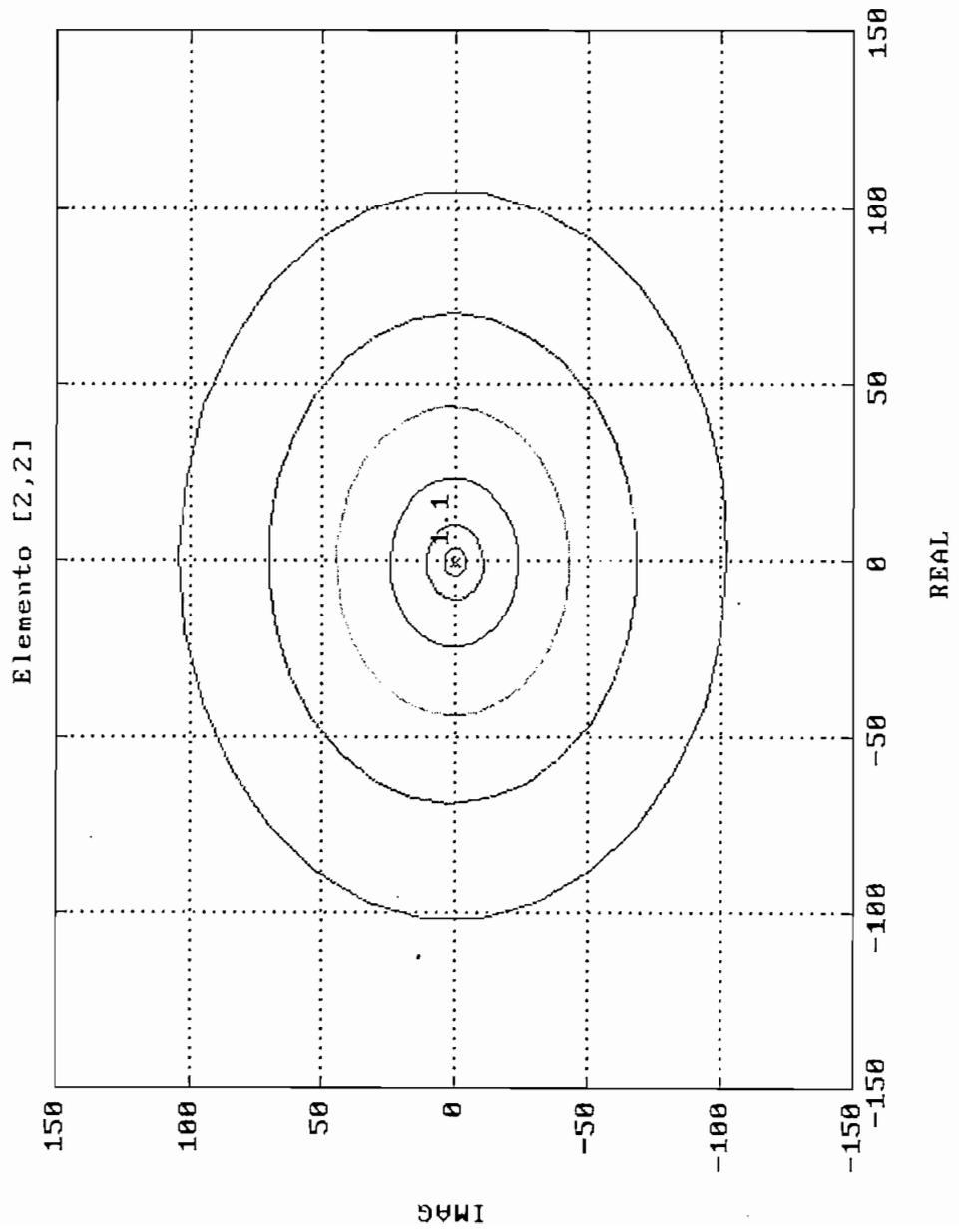


Figura 4.70

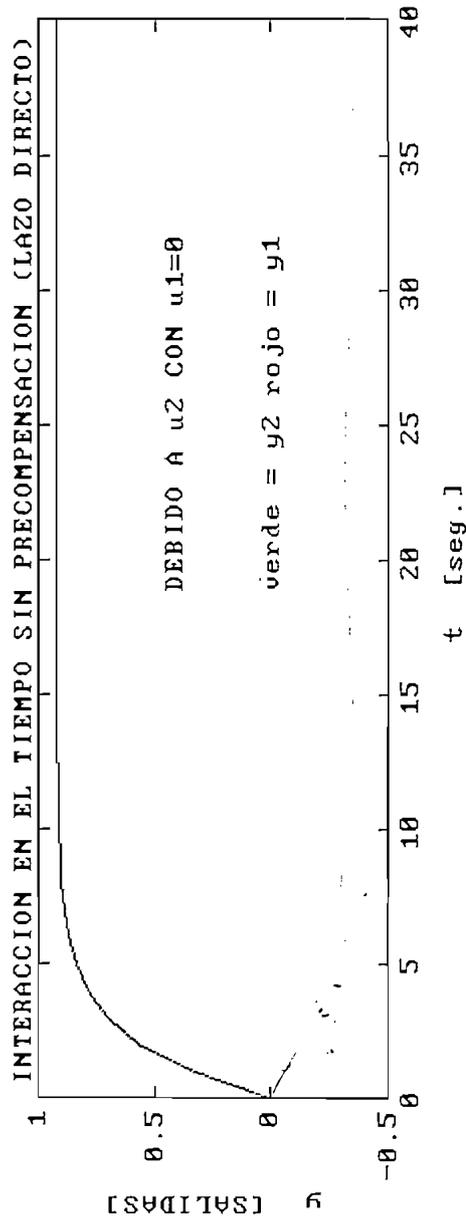
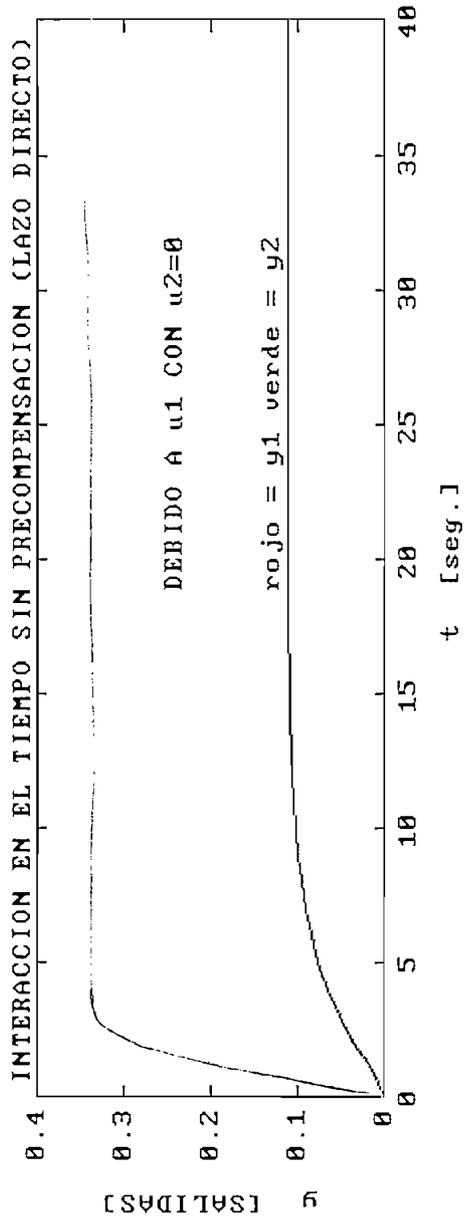
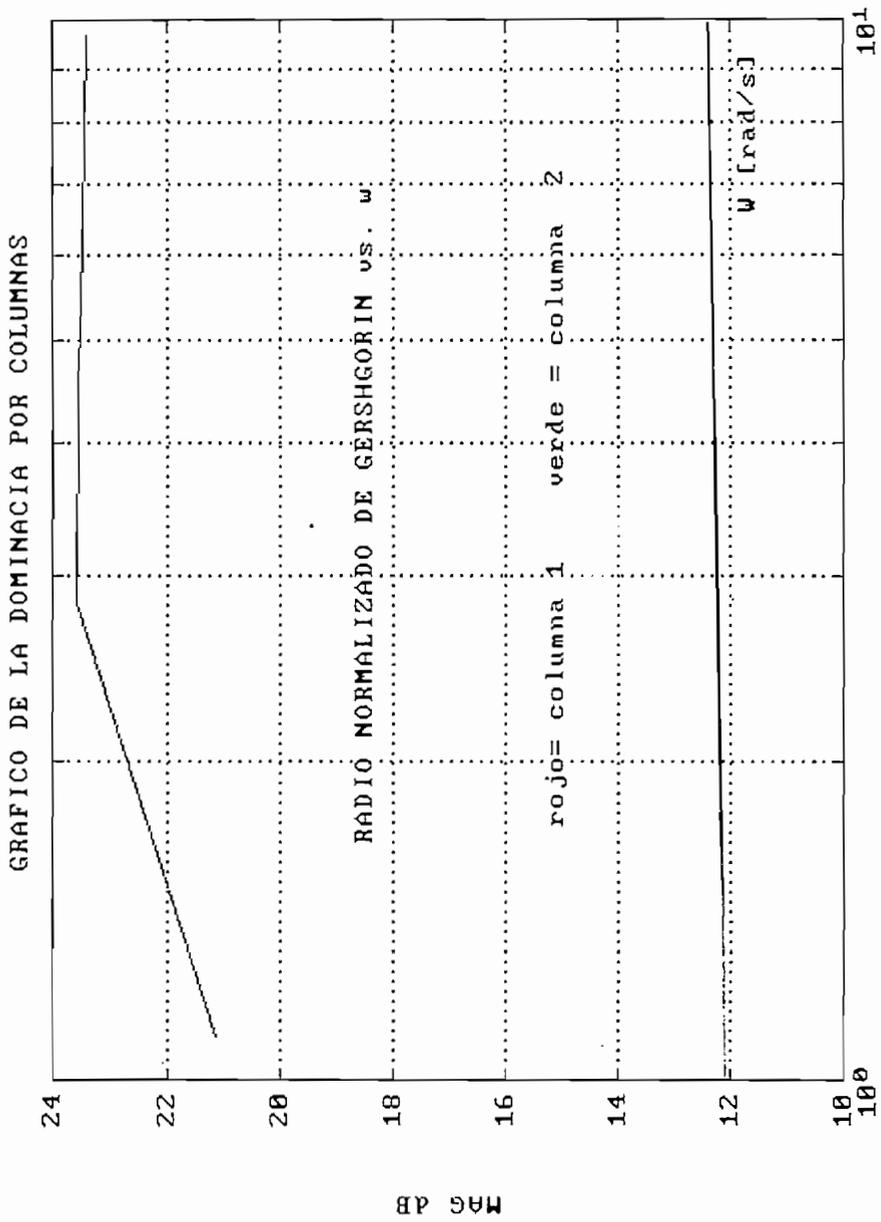


Figura 4.71



FREQUENCY

Figura 4.72

Verde
Rojo

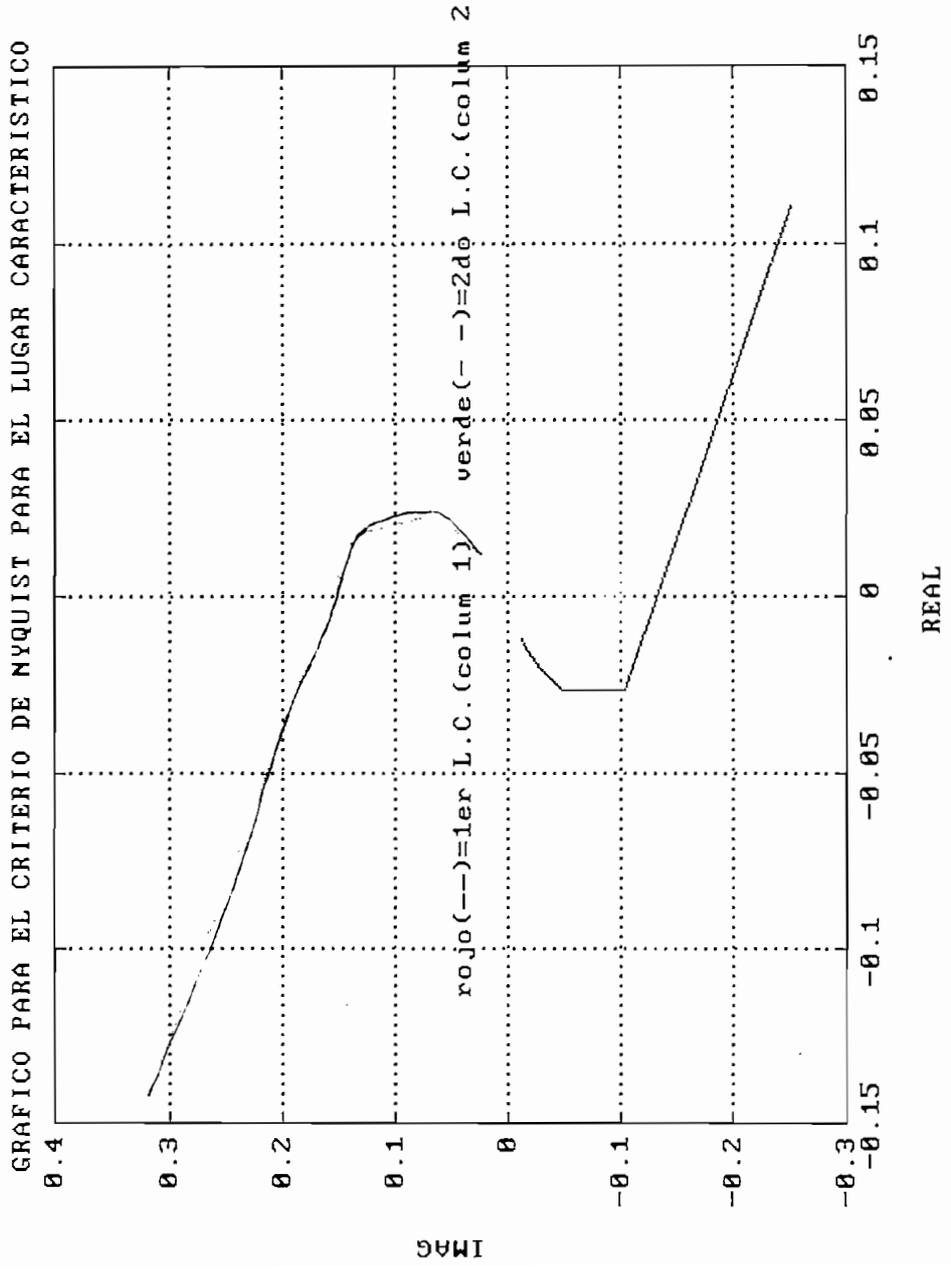
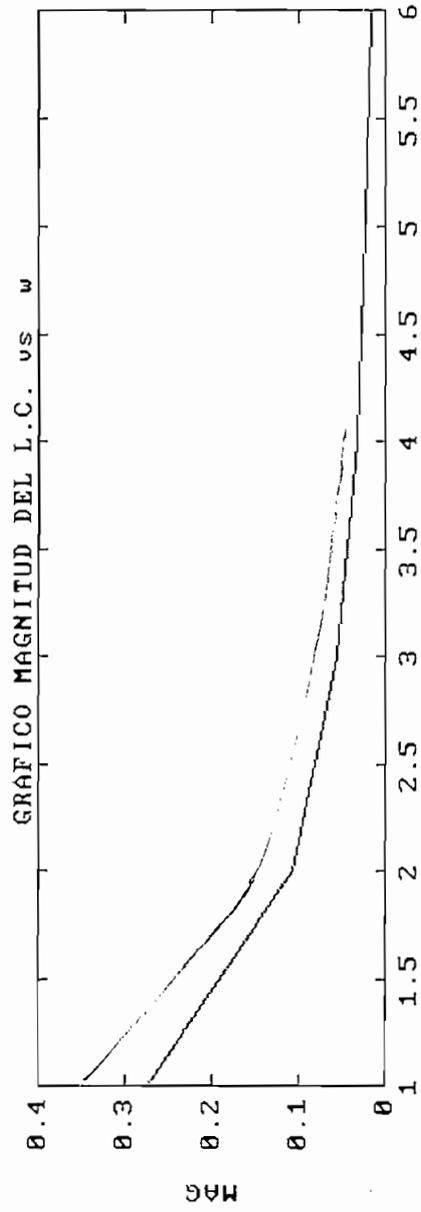
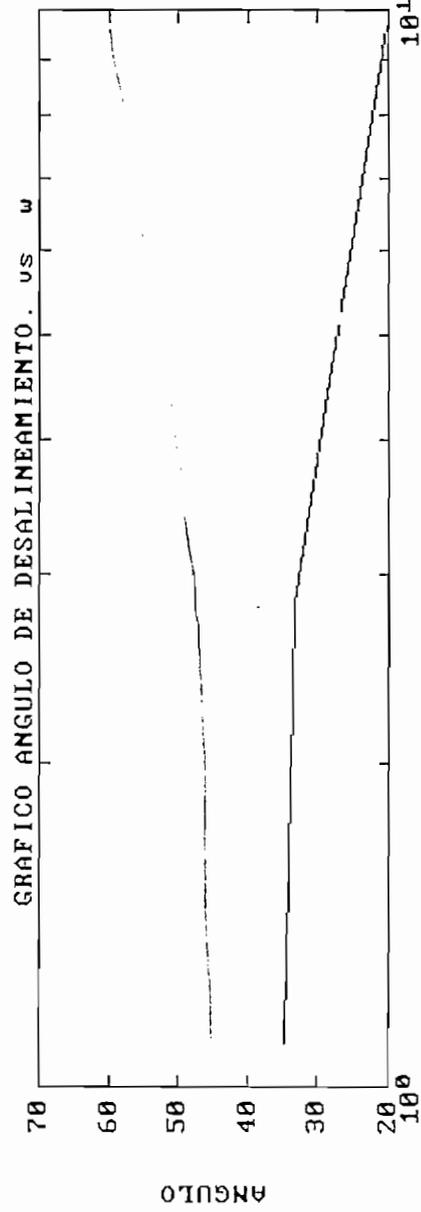


Figura 4.73



rojo=1er L.C. (columna 1) verde=2do. L.C. (columna 2) ω [rad/s]



rojo=1er L.C. (columna 1) verde=2do. L.C. (columna 2) ω [rad/s]

Figura 4.74

Verde
Rojo

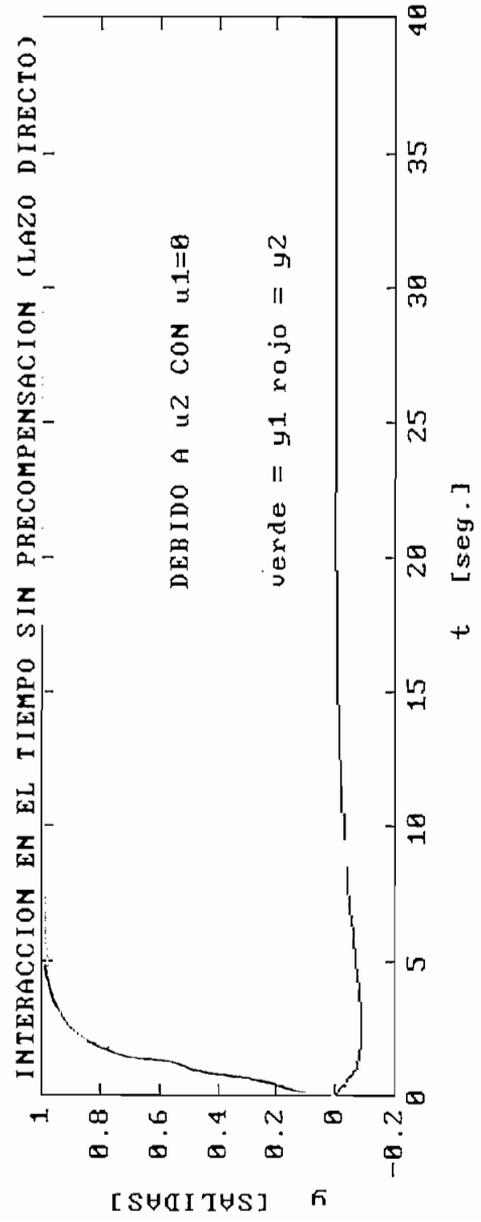
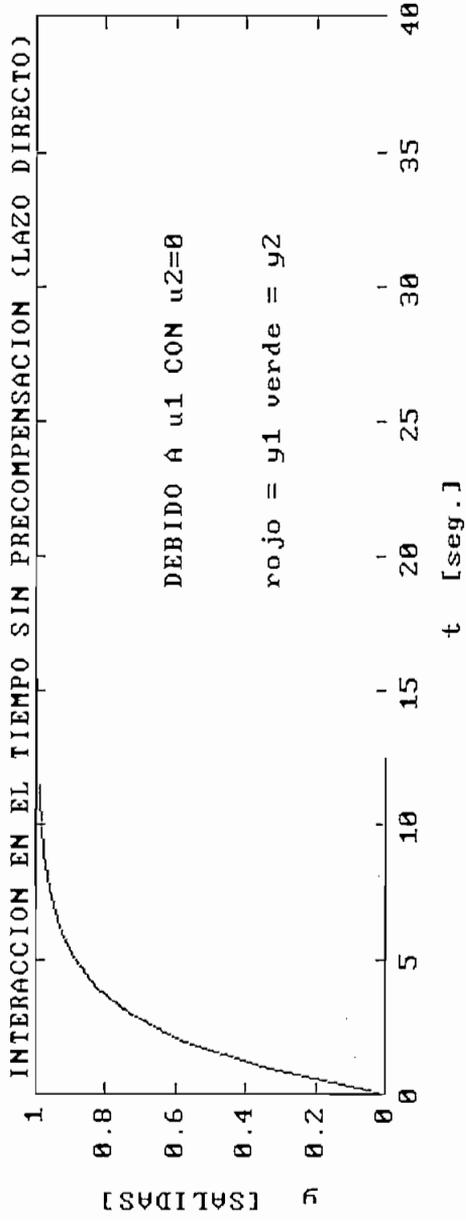


Figura 4.75

Verde
Rojo

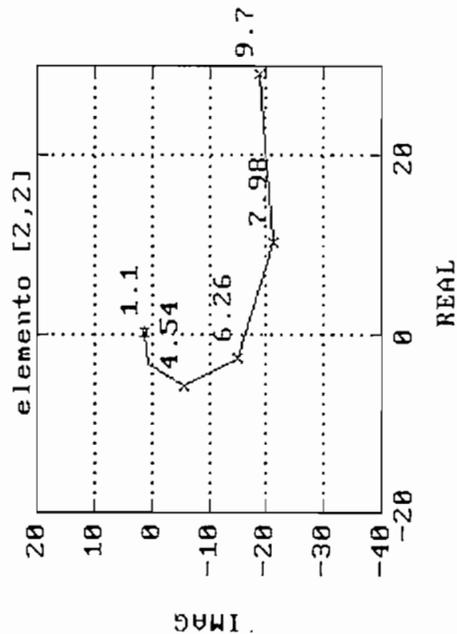
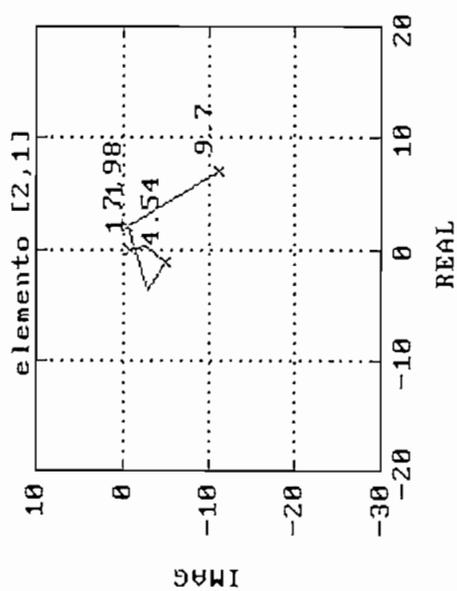
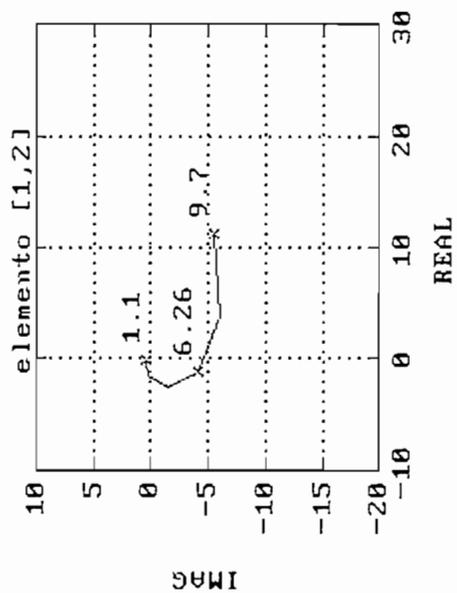
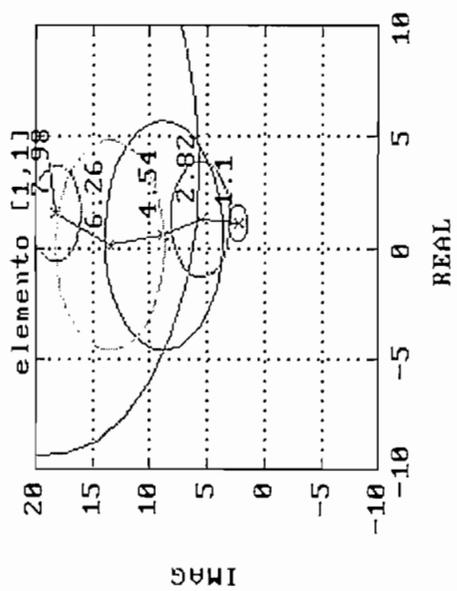


Figura 4.76

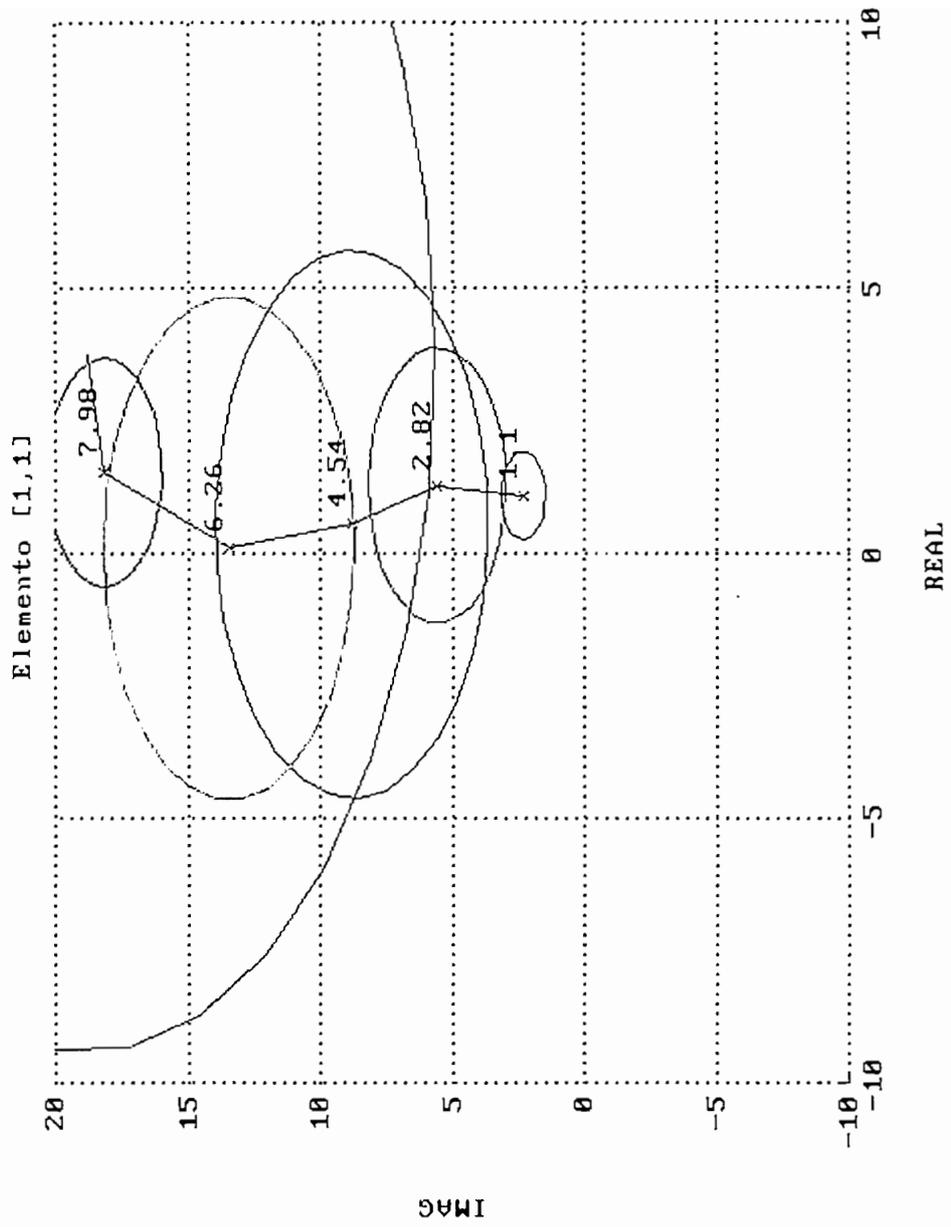


Figura 4.77

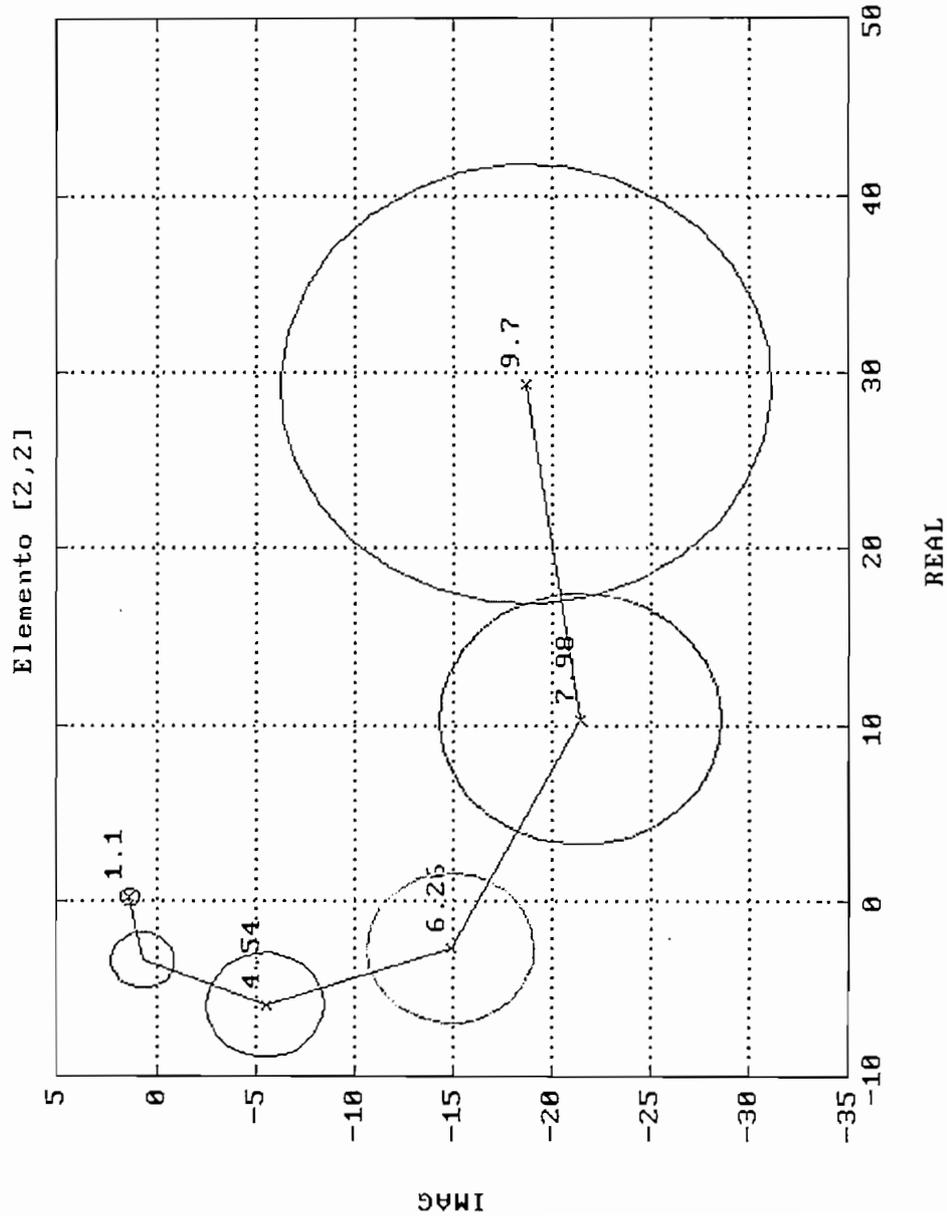


Figura 4.78

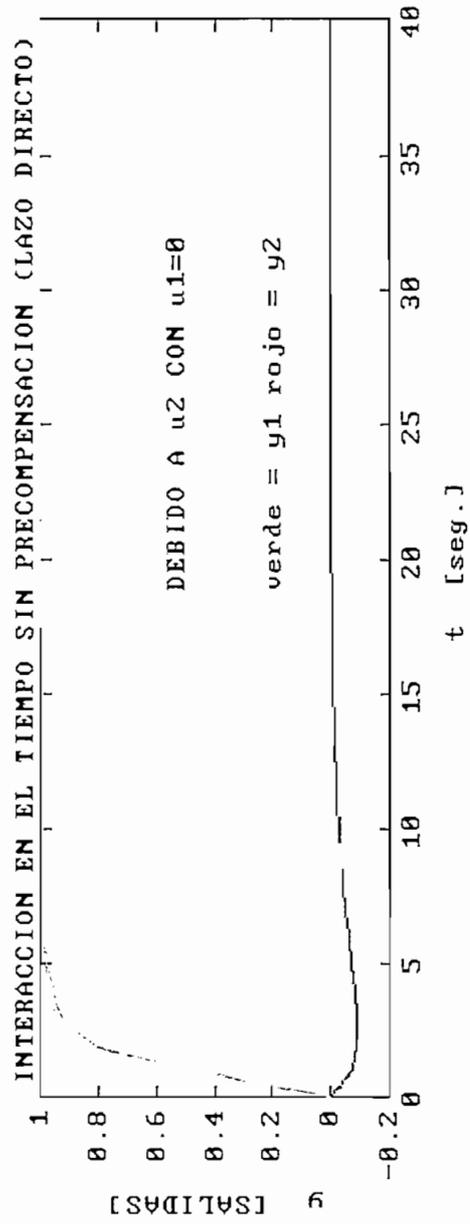
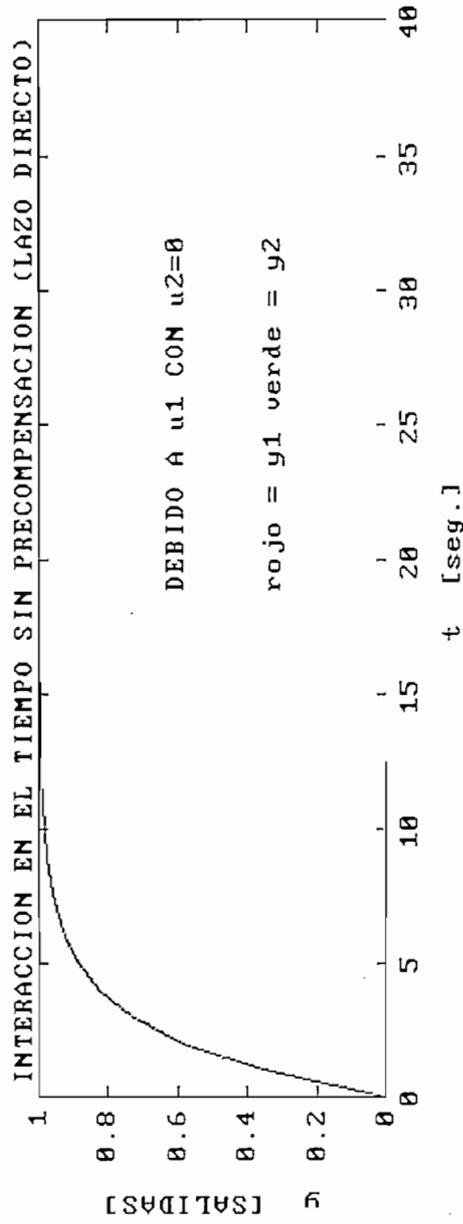


Figura 4.79

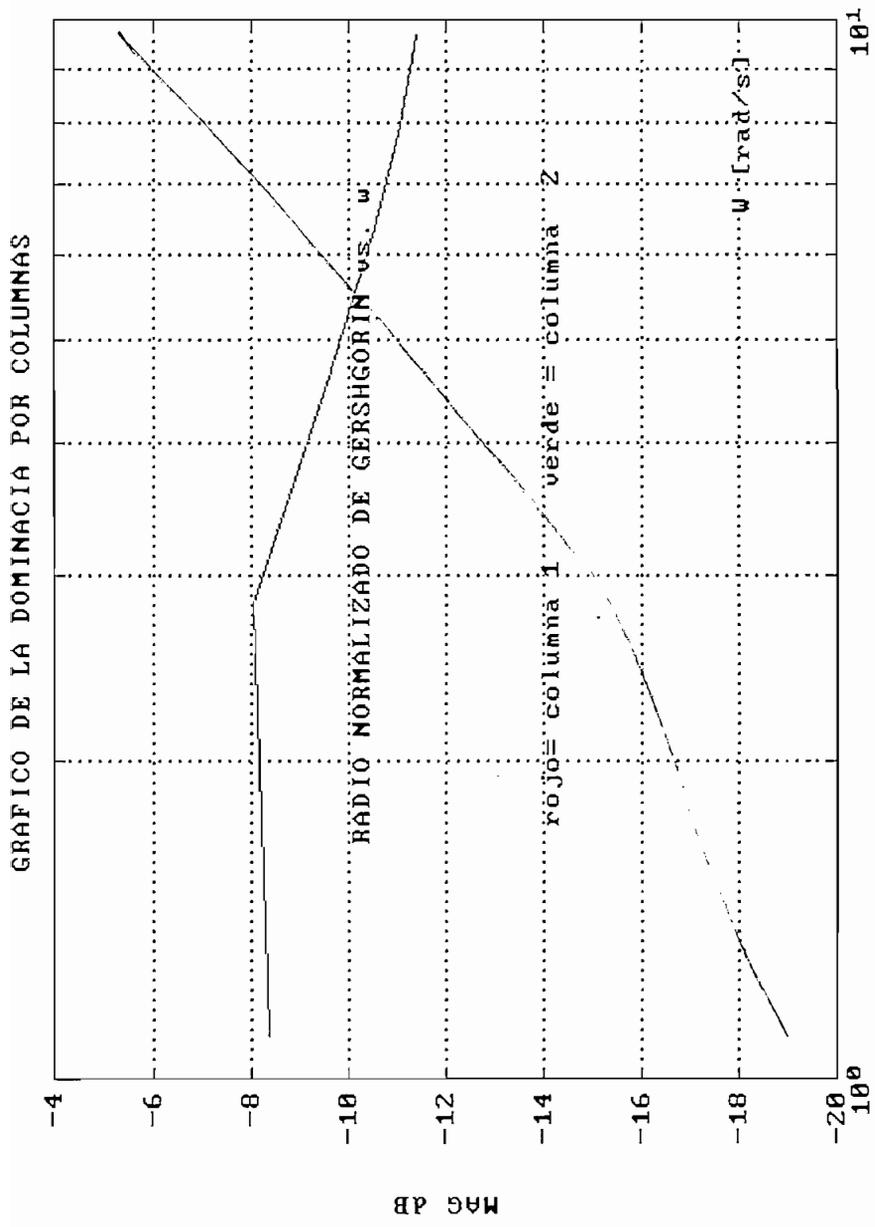


Figura 4.80

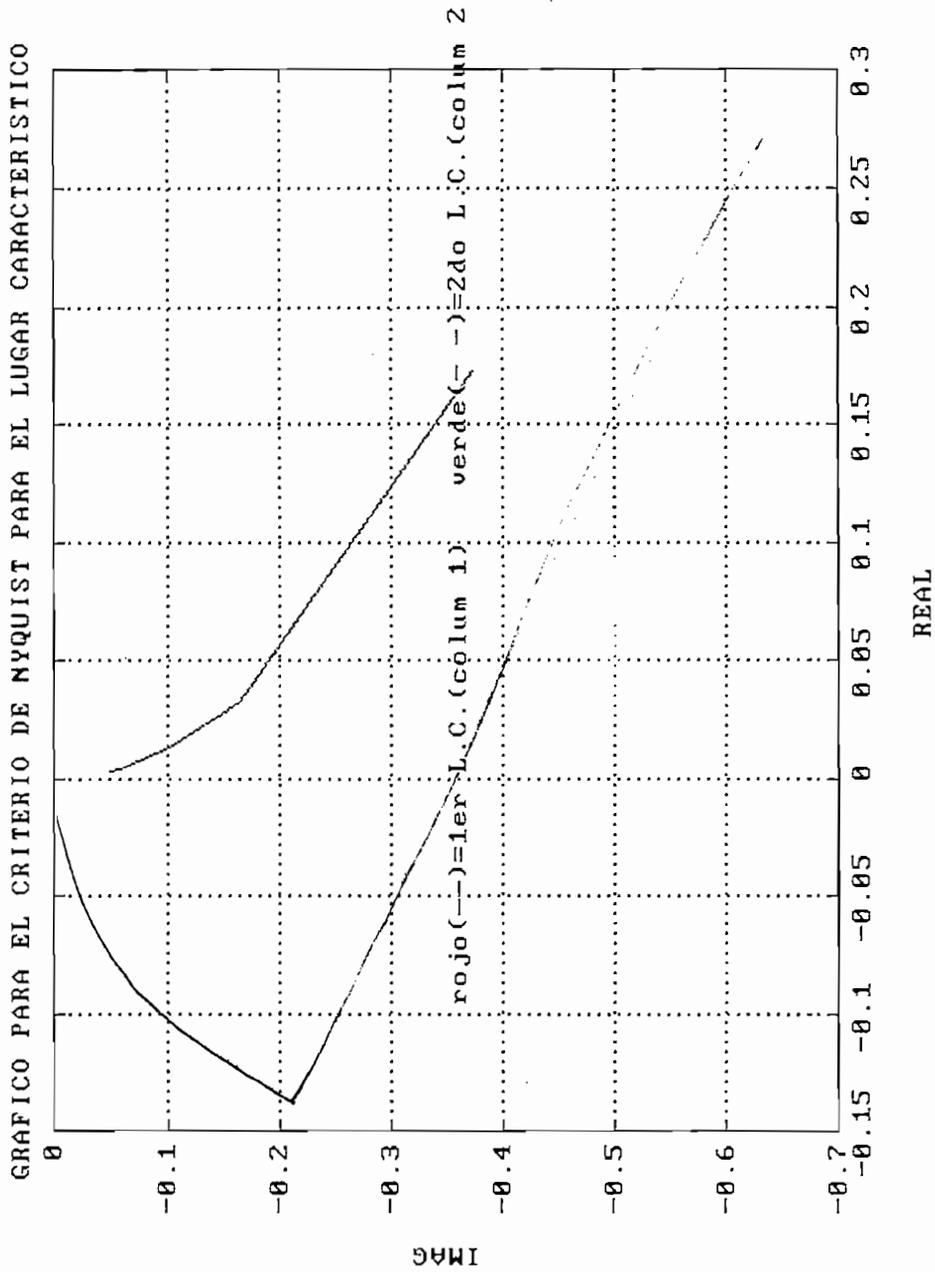


Figura 4.81

Verde
Rojo

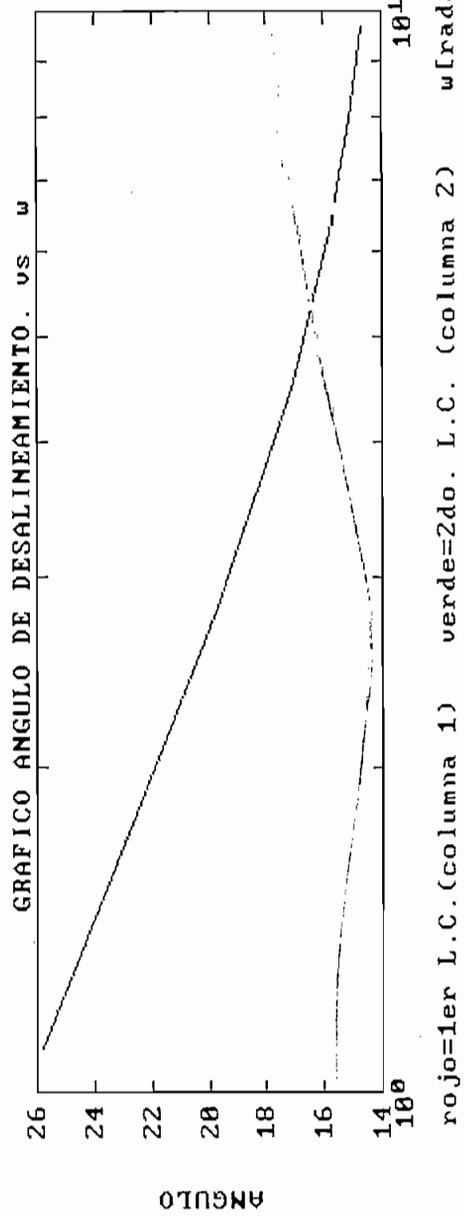
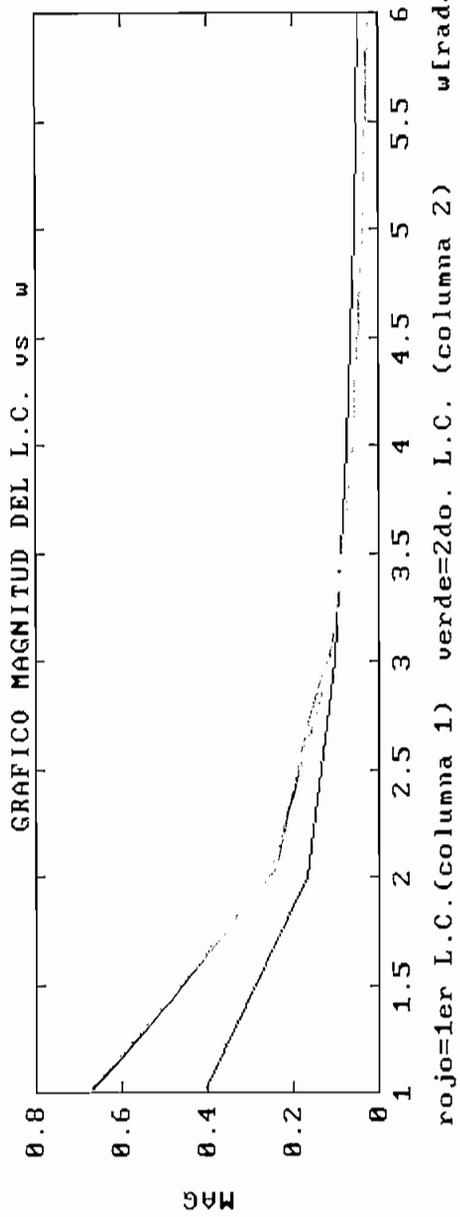


Figura 4.82

Verde
Rojo

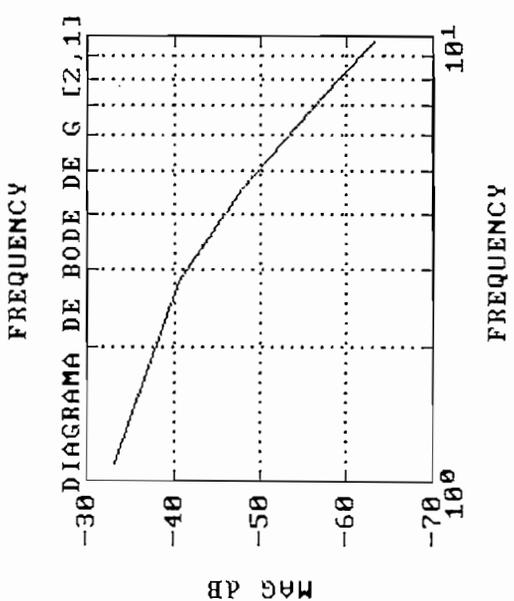
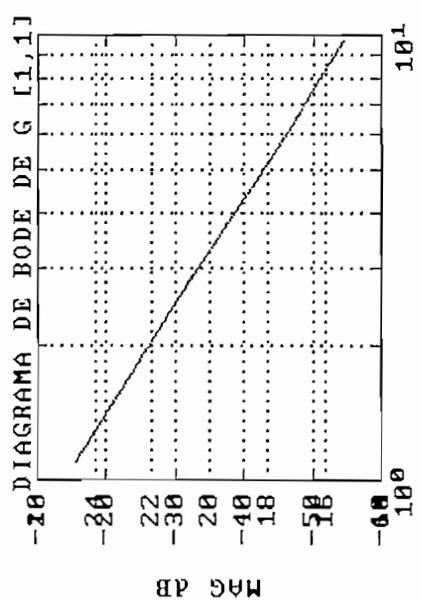
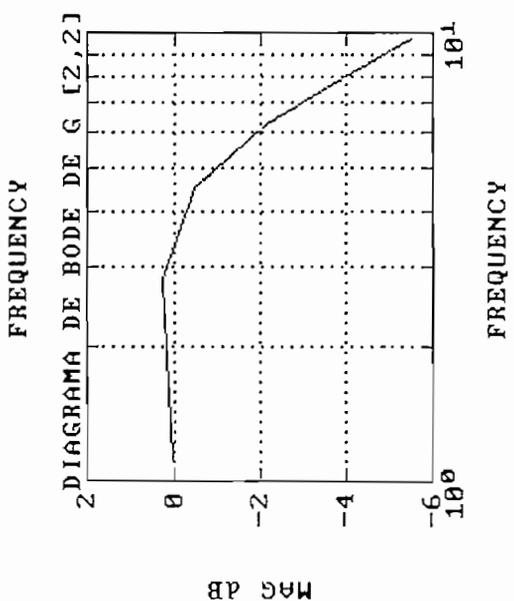
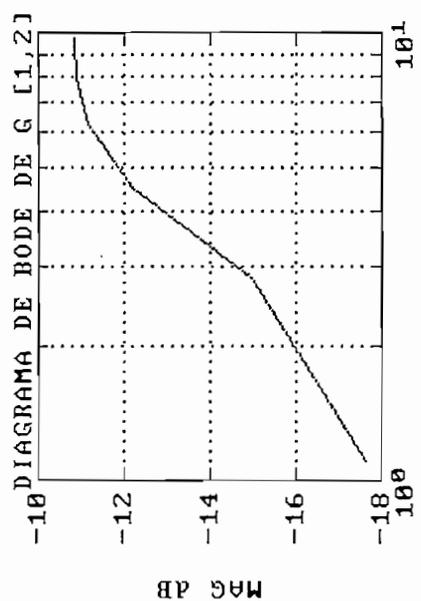


Figura 4.83

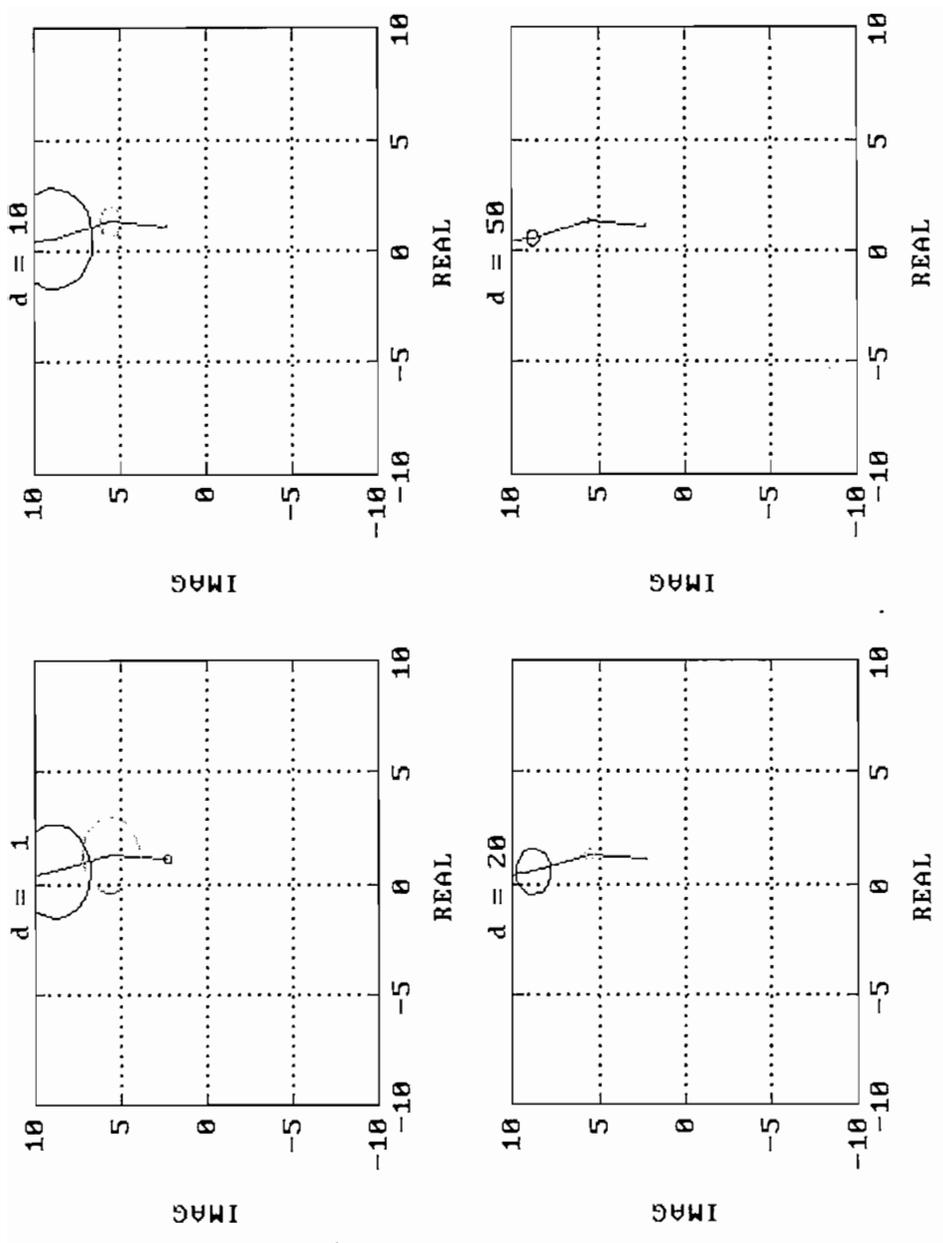


Figura 4.84

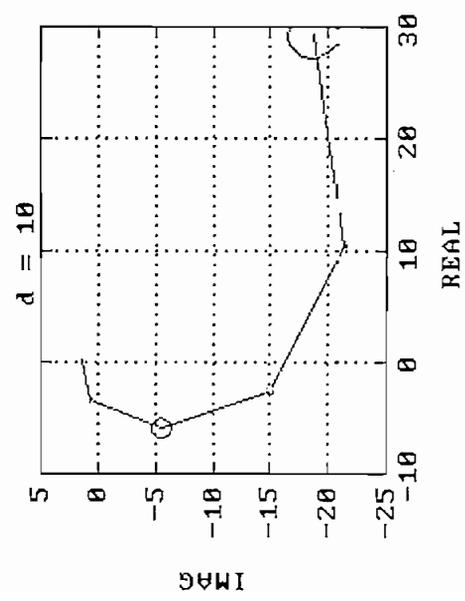
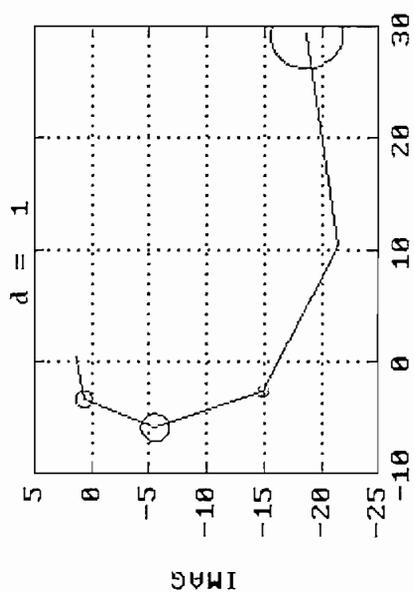
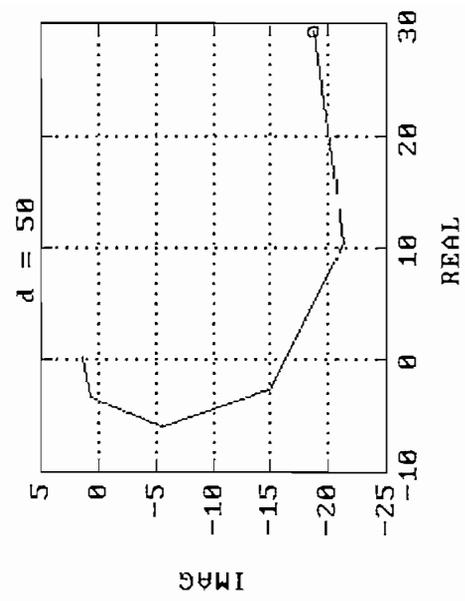
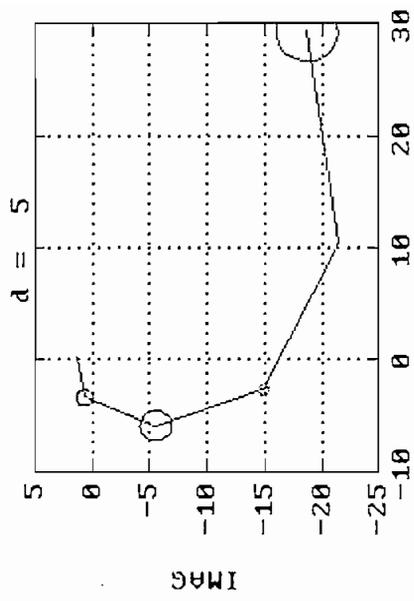


Figura 4.85

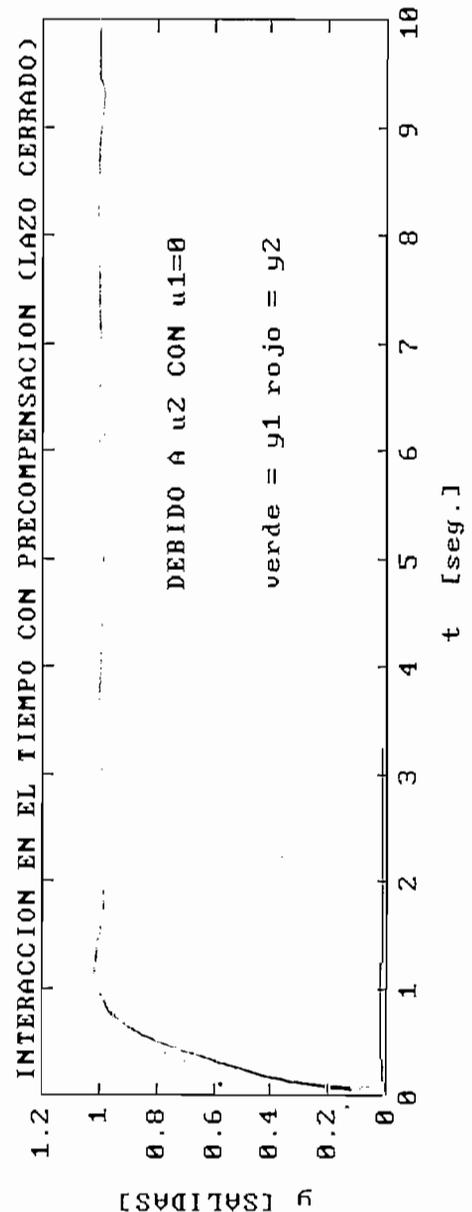
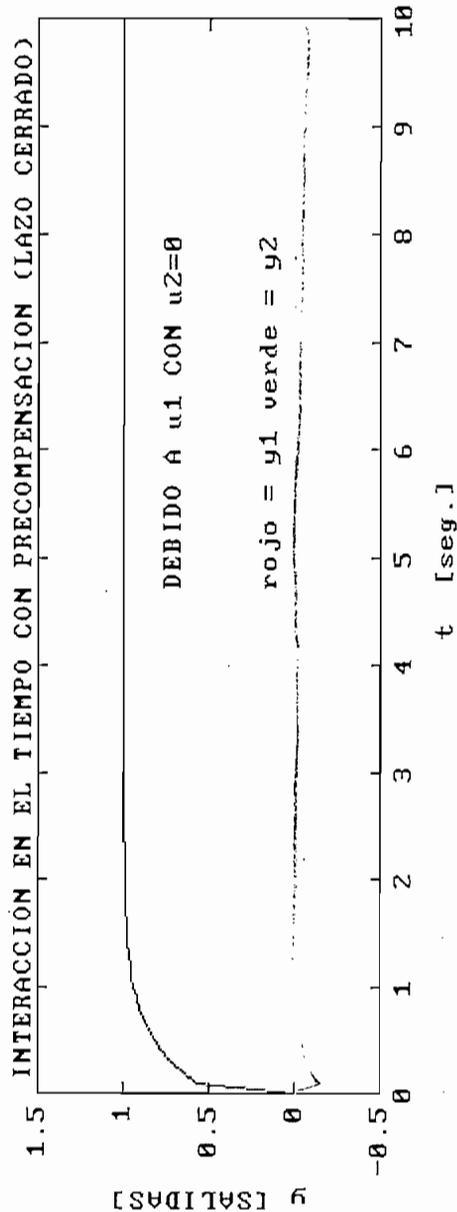


Figura 4.86

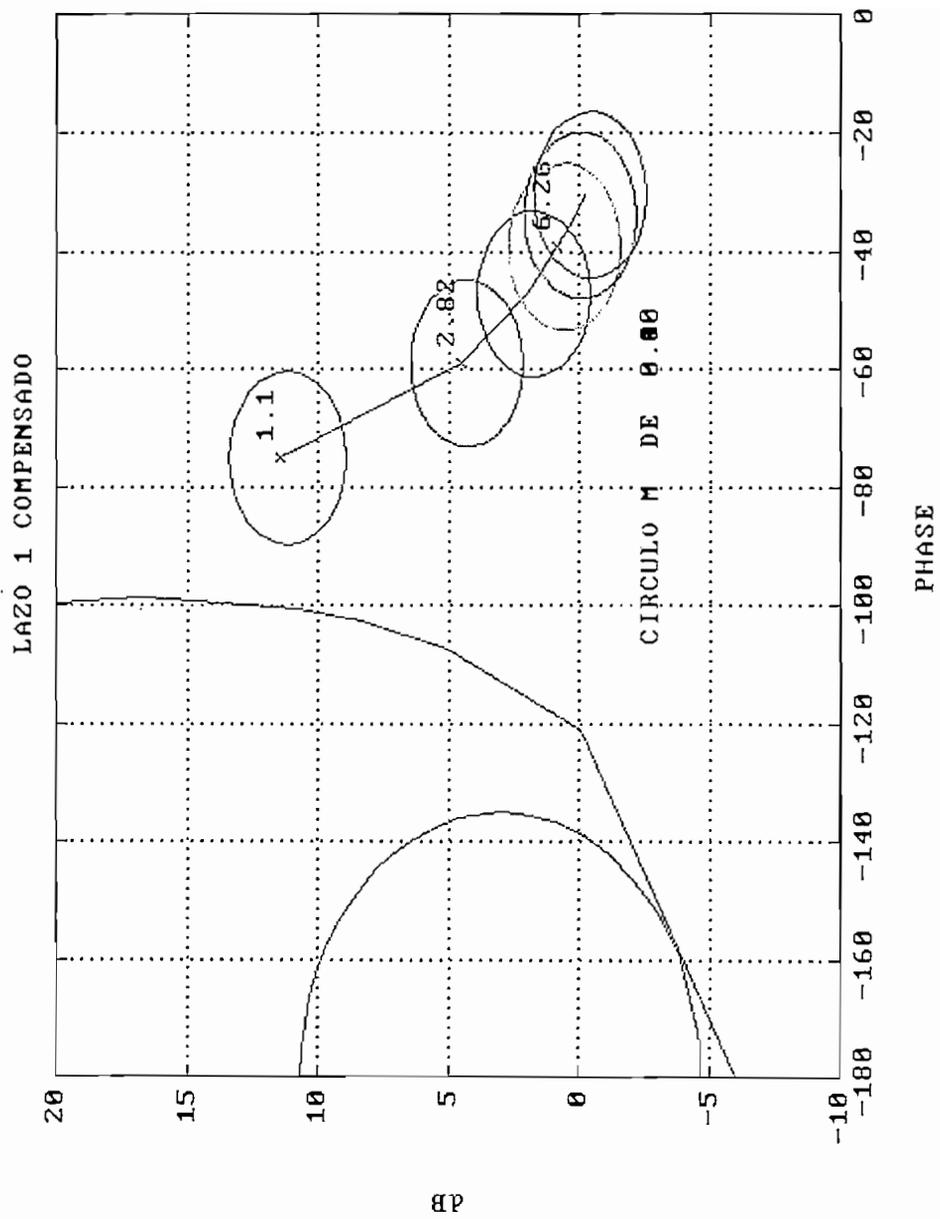


Figura 4.87

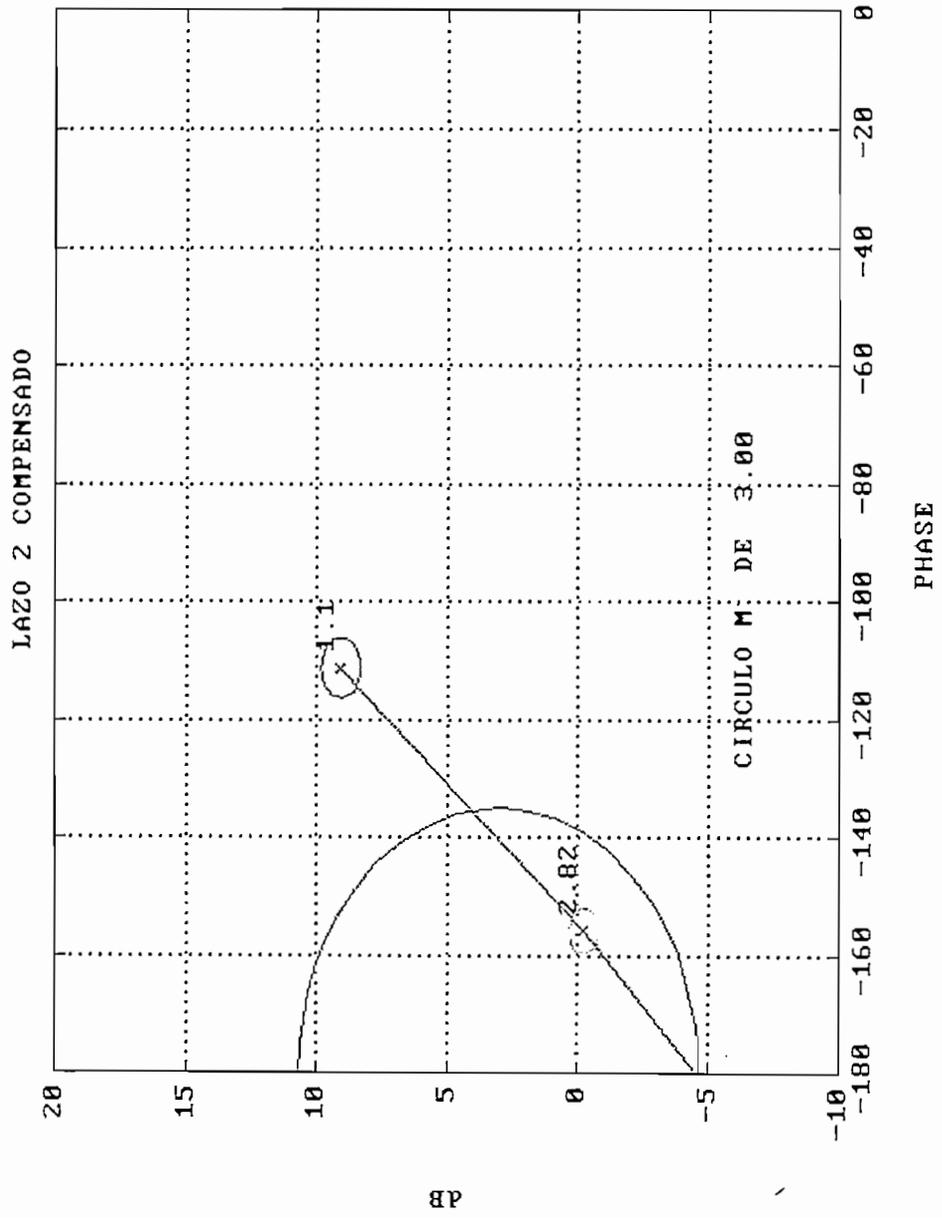


Figura 4.88

CITAS CAPITULO IV

- [1] Limebeer, N, Macijowski, J " Two tutorial examples of multivariable control system design " Inst. M.C. Vol 7, No2 , April 1985. Londres

- [2] Rosenbrock, H;H, " COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN ". Ed. Academic Press., New York, 1981. pag. 202-203

4.2 CONCLUSIONES

En base a toda la teoría desarrollada en esta tesis, a las rutinas implementadas en el DINA Toolbox, y a los ejemplos presentados en el capítulo anterior, se pueden mencionar los siguientes aspectos como los más relevantes, a manera de conclusiones:

En general:

- Se ha logrado cumplir el objetivo de la tesis, esto es realizar análisis y diseño de sistemas de control multivariable en el dominio de la frecuencia, poniendo énfasis en el método directo e inverso de Nyquist.

Del punto de vista teórico, se puede concluir que:

- En el caso de sistemas multivariables la percepción es que todas las metodologías clásicas pueden ser extendidas de alguna forma al diseño MIMO pero inesperadamente varias, nuevas y complicadas características aparecen. La principal causa de estas nuevas complicaciones es en general la presencia de interacciones entre los lazos de control en un proceso; así para un sistema con m -entradas y m -salidas existen $m(m-1)$ interacciones, y para un ser humano resulta muy complejo y dificultoso manipular tanta información sin la ayuda de métodos matemáticos asistidos con una infraestructura CAD (Computer Aided Design), de ahí el porque el uso el MATLAB en la presente tesis.

- Los métodos de respuesta de frecuencia son robustos, es decir, tienen un alto rechazo a perturbaciones, excelente regulación, baja sensibilidad a cambios en las entradas, esto último tiene que ver con los componentes de la planta. Especialmente el Arreglo de Nyquist es mucho más robusto, pues se puede variar la ganancia en un amplio rango y el sistema sigue trabajando claro que no con las especificaciones deseadas.
- La matriz $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ representa las ganancias de los lazos los cuales fueron usualmente implementados en el camino directo, pero que fue mejor moverlo a los caminos de realimentación como se vio en el primer capítulo. Esto se lo hizo por motivos de facilitar el estudio de los efectos de cambios de la ganancia de cada lazo de realimentación mientras mantenemos las características dinámicas fijas.
- Con los métodos de diseño en el dominio de la frecuencia se garantiza estabilidad dentro de la región del espacio de ganancia.
- Se puede decir que la condición de dominancia diagonal se la puede determinar por las bandas de Gershgorin para sistemas multivariables, de manera parecida que con los diagramas de Nyquist para sistemas univariables.

obsoleto trabajar con un método que solo dio lugar a versiones mejoradas, pero que hoy resulta obsoleto.

- El método de diseño del DNA ofrece varias ventajas dando considerable libertad al diseñador y tiene la virtud del método de respuesta de frecuencia , estas son:
 - Baja sensibilidad
 - Rechazo a perturbaciones
 - No es sensible a errores de modelación pues se puede hacer mediciones experimentales.
 - El considerar la minimización a varias frecuencias de interés dentro de un rango de trabajo.
 - Poder determinar la estructura del compensador dinámico.
 - Utilizar los diagramas de Bode de dominancia
 - Facilidad en desacoplar el sistema, incluso se puede llegar a conseguir un alto grado de desacoplamiento.
 - Introducir un compensador dinámico para mejorar la dominancia, esto tiene varias consecuencias:
 - 1) Permite el diseño SISO, es decir, tener una planta con varios lazos univariables.
 - 2) Está garantizada la estabilidad definida en el teorema I de la presente tesis
 - 3) Permite tener un sistema robusto.

- Una vez desacoplado el sistema se puede diseñar los compensadores SISO en base especificaciones en frecuencia como el margen de ganancia y margen de fase, que son más fáciles de tratar.

- Las interacciones de un sistema multivariable pueden medirse:
 - Usando la interacción en el tiempo
 - Mediante el análisis de la dominancia usando los diagramas de Nyquist de cada elemento de la matriz función de transferencia $G(s)$ conjuntamente con los círculos de Gershgorin asociados a los elementos de la diagonal de la misma matriz.
 - Mediante la respuesta de frecuencia usando los diagramas de Bode en lazo cerrado de cada elemento de la matriz función de transferencia $G(s)$. Este es el método más usado por el DNA.
 - Mediante el lugar característico de las funciones valores propios y sus respectivos vectores propios de $G(s)$.

Respecto al MATLAB y al DINA Toolbox:

- Las funciones (rutinas) desarrollados incluidos en un gran conjunto llamado DINA TOOLBOX dan resultados muy satisfactorios., pues han sido probados extensamente , tanto con los prototipos iniciales como con el toolbox (programa)

final . Las principal limitación de la presente tesis ha sido la capacidad de memoria RAM del computador utilizado, por ello solo se puede trabajar hasta con sistemas de orden dos.

- Extensas sesiones de MATLAB podrían causar que la memoria se fragmente. Cuando esto ocurre existe en memoria RAM tal vez espacio libre lo suficiente pero no la suficiente memoria contigua para almacenar variables largas generadas por cualquier Toolbox del MATLAB, y el MATLAB falla. .

Respecto a los ejemplos

- Se comprobó la validez de todo el conjunto de herramientas del DINA TOOLBOX para el cálculo, manipulación y presentación de las propiedades para el análisis y diseño de sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia .

En general:

- Se espera que el presente trabajo de tesis sea una contribución para el estudio de los sistemas multivariables y que sirva de base para el desarrollo de nuevas librerías (toolboxes) con otros métodos de diseño basados en otros algoritmos y que se apliquen a modelos industriales.

- El campo del análisis y diseño de sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia es muy amplio. El presente estudio es una contribución y una herramienta más para el desarrollo de este campo.

4.3 RECOMENDACIONES

En base a estas conclusiones se podrían dar las siguientes recomendaciones:

- Sugerir la compra de un nuevo computador o agregar memoria para poder manejar más entradas y mas salidas, es decir. manejar sistemas multivariables de más alto orden.
- Se debe fomentar el estudio de los sistemas multivariables en el dominio de la frecuencia en el pensum de alguna materia, puesto que en la mayoría de los sistemas reales que pueden ser modelados a sistemas multivariables es necesario tener alternativas de control.
- El presente trabajo puede servir de base para la realización de futuros trabajos de tesis .
- Tener contacto con la Universidad de Cambridge, para obtener una suscripción al MATLAB. Con esta alternativa se podría tener las nuevas versiones del

MATLAB pues incluso se sabe que existe versiones para Windows.

- Aplicar el DINA TOOLBOX a los prototipos de plantas multivariables del laboratorio, como por ejemplo los tanques acoplados y futuras tesis que usen control multivariable.
- Usar la teoría y el DINA TOOLBOX en prácticas de laboratorio.
- Averiguar en las industrias del país donde existen plantas multivariables con sus respectivos modelos, los mismos que los puede proporcionar el fabricante de la planta o se puede obtener experimentalmente usando la respuesta de frecuencia, con el objetivo de poder ofrecer precompensadores electrónicos diseñados con el DINA TOOLBOX que mejoren el funcionamiento de las mismas.
- Implementar la precompensación y compensación SISO en tiempo real anteponiendo un dispositivo de retención ZOH (zero order hold) a la planta, a través de un conversor analógico digital PID; esto es, mediante software a través de un computador digital.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Araki, M Nwokah O, I. " BOUNDS FOR CLOSED LOOP TRANSFER FUNCTIONS OF MULTIVARIABLE SYSTEMS" IEEE Trans Auto Contr., vol.AC- 20, pp 666-670, 1975

Barnnet, S , Cameron, R "INTRODUCTION TO MATHEMATICAL CONTROL THEORY " . Claveron Press Oxford, .

Boyle, J.M, and GEC Engieneering Research Centre
" MULTIVARIABLE TOOLBOX FOR USE WITH MATLAB"
Control Systems magazine. nero 1989

Notas del V Curso de Automática en la Industria. La Rábida. Junio 1985.

J.C. Doyle and G. Stein " MULTIVARIABLE FEEDBACK DESIGN: CONCEPTS FOR A CLASSICAL/MODERN SYNTHESIS" IEEE Trans. Automatic Contr., vol.AC- 26, pp 4-16, 1982

Dorf, R " SISTEMAS AUTOMÁTICOS DE CONTROL " Ed. Fondo Educativo Interamericano. U.S.A , 1978.

J.C. Doyle and G. Stein " MULTIVARIABLE FEEDBACK DESIGN: CONCEPTS FOR A CLASSICAL/MODERN SYNTHESIS" IEEE Trans. Automatic Contr., vol.AC-26, pp 4-16, 1982

J.M. Edmunds " CONTROL SYSTEM DESIGN AND ANALYSIS USING CLOSE-LOOP NYQUIST AND BODE ARRAYS" Intl. J. Contr., vol. 30. pp 773-802, 1979

J.M. Edmunds and B.Kouvaritakis " EXTENSIONS OF THE FRAME ALIGNMENT TECHNIQUE AND THEIR USE IN THE CHARACTERIC LOCUS DESIGN METHOD" Intl. J. Contr., vol. 29. pp 787-796, 1979

A.G.J. Mac Farlane and B. Kouvaritakis, " A DESIGN TECHNIQUE FOR LINEAR MULTIVARIABLE FEEDBACK SYSTEM" Intl. J. Contr., vol. 25. 837-874, 1977

A.G.J. Mac Farlane and Scott-Jones D.F.A. " VECTOR GAIN"
Intl. J. Contr., vol. 29. 65-91, 1979

A.G.J. Mac Farlane and J.J Belletrutti " THE CHARACTERISTIC LOCUS DESIGN METHOD" Automatica vol.9 pp. 575-588,1973

M.P.Ford and K.C. Daly, " DOMINANCE IMPROVEMENT BY PSEUDO DECOUPLING" Proc. IEE, vol. 126,pp. 1316-1320, 1979

Fricker A.J." THE APPLICATION OF A DIRECT METHOD FOR DESIGNING DECOUPLING PRECOMPESATORS FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS " Trans. Inst M C Vol 6 No4 Julio 1984.

D.J. Hawkins " PSEUDIAGONALIZATION AND THE INVERSE NYQUIST ARRAY METHOD" Proc. IEE, vol 119, pp 337-342,1972

Y.S.Hung and A.G.J. Mac Farlane " MULTIVARIABLE FEEDBACK : A QUASI-CLASSICAL APPROACH. Springe-Verlag, 1982.

J.C. Kantor and R.P. Andres " A NOTE ON THE EXTENSION OF ROSENBROCK'S NYQUIST ARRAY TECHNIQUES TO A LARGER CLASS OF TRANSFER FUNCTION MATRICES"Intl. J. Contr., vol. 30. pp 387-393, 1979.

B. Kouvaritakis " THEORY AND PRACTICE OF THE CHARACTERISTIC LOCUS METHOD" Proc. IEE, vol 126, pp 542-548, 1979

G.G. Leininger " DIAGONAL DOMINANCE FOR MULTIVARIABLE NYQUIST ARRAY METHODS USING FUNCTION MINIMIZATION"

Automatica., vol. 15. pp 339-345, 1979

G.G. Leininger " NEW DOMINANCE CHARACTERISTICS FOR THE MULTIVARIABLE NYQUIST ARRAY METHOD" Int. Contr., vol. 30.No3,pp 459-

475,19798

Limebeer, N, Macijowski, J " Two tutorial examples of multivariable control system design " Inst. M.C. Vol 7, No2 , April 1985. Londres

Mayne D,Q. " DESIGN OF LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS"

Automatica No9 pp 201-207, 1973

Maciejowski. J,M " MULTIVARIABLE FRECUENCY DOMAIN TOOLBOX"

Cambridge University, Engieniering Departament, Cambridge Control Ltd, High Cross, Madinley Road, Cambrigde, CB3 0hb, England.

Trumpington Street, Cambrigde CB2 1PZ, England.

Maciejowski J. M. and Mac Farlane A.G.J " CLADP: THE CAMBRIGDE LINEAR ANALYSIS AND DESIGN PROGRAMS" computer aided control systems engieniering

A.I. Mees " ACHIEVING DIAGONAL DOMINANCE." Syst. Contr.Lett, vol. 1 pp 155-158, 1981

N. Munro "DESIGN OF CONTROLLER FOR AN OPEN LOOP UNSTABLE MULTIVARIABLE SYSTEM USING THE INVERSE NYQUIST ARRAY"
Proc. IEE, vol 119, No 9 pp 1377-1382,1972

Munro,N , Patel,r " MULTIVARIABLE SYSTEMS THEORY AND DESIGN ", Ed.
Pergamon Press, 1982

Munro,N , Patel,r " MODERN APPROACHES TO CONTROL SYSTEM DESIGN"
Ed. IEEE Control Engineering Series, 1979

A.m. Ostrowski " NOTE ON BOUNDS FOR DETERMINANTS WITH DOMINANT PRINCIPAL DIAGONAL" Proc. Am.Math.Soc.,3,pp.26-30, 1952

Postlethwaite I,A.G.J. Mac Farlane,J.M. Edmunds " PRINCIPAL GAINS AND PRINCIPAL PHASES IN THE ANALYSIS OF LINEAR MULTIVARIABLE FEEDBACK SYSTEMS" IEEE Trans Auto Contr., vol. 26

Rosenbrock, H.H " STATESPACE AND MULTIVARIABLE THEORY SYNTHESIS"
editorial Nelson

Rosenbrock, H;H, " COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN ". Ed.
Academic Press., New York, 1981.

M.G.Sofonov, Laub A. J, and Hartman G. L. " FEEDBACK PROPERTIES OF
MULTIVARIABLE SYSTEMS: THE ROLE AND USE OF THE RETURN-
DIFFERENCE MATRIX" IEEE Trans Auto Contr., vol.AC- 26, 1981

M.G.Sofonov. STABILITY MARGINS OF DIAGONALLY PERTURBED
MULTIVARIABLE FEEDBACK SYSTEMS. Proc. IEE, Part D, vol 129, pp 251-
256,1982.

Weiberg, D " Espacio de estado y sistemas lineales " Ed. MCGraw Hill. Colombia
1975.

D.E. Winterbone, N.Munro and P.M.G. Lourtie " DESIGN OF A
MULTIVARIABLE CONTROLLER FOR AN AUTOMOTIVE GAS TURBINE" ASME
Gas Turbine conference, Wasghinton Paper No 73-GT-14