ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE GRADO

"CINEMATICA DE MANIPULADORES DE ROBOT"

TESIS PREVIA A LA OBTENCION

DEL TITULO DE INGENIERO EN

ELECTRONICA Y CONTROL

CARLOS ERNESTO CASTRO VINUEZA

FEBRERO, 1986

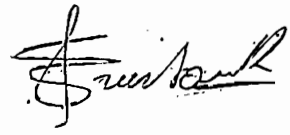
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
BIBLIOTECA
2891
E. P. N.

PROLOGO

El desarrollo de este tema de tesis se lo realizó con el propósito de dar una introducción al estudio de una nueva área de la Ingeniería Electrónica, que es la robótica. Por ser éste un primer trabajo relativo al tema, la finalidad que se persigue es la de estudiar y analizar la formulación matemática relacionada con el movimiento de un manipulador de robot y, la implementación de programas en computador digital que demuestren el empleo y utilidad de dicha formulación matemática.

El conocimiento cabal y profundo de la robótica, involucra el estudio de temas tales como: la cinemática, la dinámica, sistemas de control, lenguajes de programación, principalmente. En la presente tesis, se ha realizado el estudio de la cinemática de los manipuladores de robot y, se hará una introducción conteniendo las principales características de los sistemas de control y los lenguajes de programación, que permitirá conocer la sofisticada tecnología utilizada en los robots.

Certifico que el presente trabajo ha sido elaborado en su totalidad por el señor Carlos Castro V.



ING. PATRICIO BURBANO

Director de tesis

En el primer capítulo se desarrolla una introducción general al estudio de la robótica, tratando su historia, evolución a través de los años, se mencionan brevemente las diferentes clases de robots existentes, los efectos derivados de la utilización de robots en la industria y la estructura básica de un robot; en este último punto se estudian las partes constitutivas del mismo, poniendo énfasis en los lenguajes de programación utilizados en el control general.

En el segundo capítulo se entra al estudio de las bases teóricas necesarias para el posterior análisis de la cinemática del manipulador de robot. Se tratará y analizará el tema de las transformaciones homogeneas, su notación, definición, relación entre ellas y aplicación; incluyendo además, las demostraciones necesarias que faciliten su comprensión y posterior empleo.

En la descripción cinemática, tratada en el capítulo tercero, después de una introducción relativa a la definición del movimiento y orientación de los manipuladores, se analizarán y aplicarán los conceptos de pares cinemáticos y grados de libertad especificamante a éstos; posteriormente se estudiará la aplicación concreta de las

transformaciones homogeneas en la descripción de la orientación y la posición del brazo manipulador. Además, se estudiará el metodo de definición de ejes y sistemas de coordenadas en las junturas que forman el manipulador y la deducción de las respectivas matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$. Con ayuda de los temas tratados antes, se encontraran las ecuaciones cinemáticas para los manipuladores de Stanford y de Elbow, haciéndolo en forma detallada para el de Stanford. El capítulo termina desarrollando un método para determinar la región accesible relacionada con la síntesis de un brazo manipulador.

En el cuarto capítulo se desarrollan las aplicaciones de la descripción cinemática, elaborando diagramas de flujo que permitiran determinar las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ en las posiciones inicial o final, las soluciones de la matriz $\underline{T}6$ de los dos manipuladores estudiados y el movimiento entre estas dos posiciones. Con los diagramas de flujo se implementarán programas en lenguaje BASIC para computador digital, cuyos resultados se presentan en éste capítulo junto con las conclusiones y recomendaciones.

Una de las motivaciones que tuve para emprender este trabajo,

fué el hecho de que, en los últimos años la robótica ha tomado gran actualidad en los paises industrializados, consecuentemente, es un tema frecuentemente tratado en revistas técnicas y aún, en artículos de prensa; esperándose para los robots un futuro muy amplio en aplicaciones en el mundo y por ende en nuestro país.

Se espera que esta tesis constituya una contribución para el desarrollo del área de Sistemas Industriales del Departamento de Electrónica y Control en la teoria y práctica da la robótica.

Finalmente deseo expresar mis agradecimientos al Ingeniero Patricio Burbano por su acertada dirección.

CONTENIDO PAG.

CAPITULO I : INTRODUCCION

1.1 Historia, evolución y aplicaciones..... 1

1.2 Estructura básica de un robot..... 8

CAPITULO II : TRANSFORMACIONES HOMOGENEAS

2.1 Notación..... 23

2.2 Transformaciones..... 24

2.3 Sistemas de coordenadas..... 29

2.4 Ecuaciones de transformación..... 33

2.5 Transformación general de rotación..... 39

CAPITULO III : DESCRIPCION CINEMATICA

3.1 Introducción..... 47

3.2 Análisis de los grados de libertad..... 50

3.3 Especificaciones de la orientación y de la posición..... 54

3.4 Especificación de matrices A..... 60

3.5 Ecuaciones cinemáticas para los manipuladores de Stanford y de Elbow..... 67

3.6 Determinación de la región accesible para un manipulador..... 80

CAPITULO IV : APLICACIONES

4.1 Obtención de las matrices A y T6..... 86

4.2 Aplicaciones de la descripción cinemática..... 95

4.3 Noción de trayectorias..... 127

4.4 Movimiento entre posiciones..... 149

4.5 Resultados..... 155

4.6 Conclusiones y recomendaciones..... 212

APENDICE A : Manual de uso de los programas

APENDICE B : Listado de los programas

BIBLIOGRAFIA

1.1 HISTORIA, EVOLUCION Y APLICACIONES.

Los robots industriales actuales tienen su origen en los teleoperadores y en las máquinas herramientas controladas numéricamente. El teleoperador, es un aparato que permite a un operador realizar un trabajo a distancia, mientras que, la máquina herramienta controlada numéricamente, funciona en base a codificación de datos digitales.

El teleoperador fué desarrollado durante la segunda guerra mundial con el fin de manejar materiales radioactivos, como un substituto de las manos de un operador; consistía de un par de tenazas, ubicadas en el interior del ambiente radioactivo, llamadas esclavo y, dos mangos en el exterior, denominados maestro. Las tenazas y los mangos estaban conectadas entre sí por medio de elementos mecánicos que permitían el posicionamiento y la orientación, arbitrarios, del esclavo cuando un operador humano actuaba sobre el maestro.

En 1947, se desarrollo el primer teleoperador eléctrico servocontrolado, en el que, el esclavo era posicionado y orientado mediante servocontrol de acuerdo a la posición y orientación del maestro. Seguia siendo necesaria la presencia de un operador humano

para que el teleoperador realize un trabajo determinado. Los teleoperadores eran ya usados para mover objetos, mover palancas, ensamblajes y manipulación de llaves de tuercas.

En 1949, se construyó una máquina herramienta controlada numéricamente para trabajar en moldeo automático de piezas metálicas; en este diseño se combinó un sofisticado sistema de servocontrol con las nuevas técnicas de los computadores digitales, que estaban siendo desarrolladas. El modelo que se deseaba moldear sobre la pieza metálica, era almacenado en forma digital en una cinta perforada y, la máquina herramienta controlada numéricamente, usando la cinta como fuente de información, cortaba la pieza metálica.

En 1960, George Devol, considerado el padre de la robótica industrial, construyó una máquina en la que se combinan las articulaciones mecánicas del teleoperador, con el servocontrol mediante técnicas digitales de la máquina herramienta controlada numéricamente. A esta máquina se trató de darle ciertas características, como la flexibilidad en su adaptación a diversos trabajos y herramientas y, un manejo sencillo; de tal forma que, pueda reemplazar a un operador humano en el desempeño de su trabajo e incrementar la productividad de la industria. Simultaneamente al

desarrollo de este robot industrial, se intentó automatizar al teleoperador utilizando computadores digitales; se lo conoció como robot controlado por sensores y, consistía de un teleoperador equipado con todos los sensores posibles, conectados a un computador.

Desde la aparición del primer robot industrial, hasta mediados de la década del setenta, en que se inició el desarrollo de los microprocesadores, el avance de la robótica fué escaso. A partir de esa época y, con la sofisticación que han ido alcanzando los computadores, la robótica ha reiniciado su crecimiento.

En la actualidad los robots industriales están provistos de tacto y visión, control localizado de lazo cerrado, programación fuera de línea, sofisticados lenguajes de programación y simulación en pantalla. Estas características dan, a los operadores, un mayor control sobre el robot y, además, el robot está en capacidad de sensar su espacio de trabajo y considerarlo cuando realiza una tarea. A los robots que poseen estas características, se los conoce como robots inteligentes.

Un concepto de robot, dado por Robot Institute of America, lo define como: "un manipulador reprogramable y multifuncional diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o elementos especiales

mediante movimientos programables y variables, que tienen como finalidad el cumplimiento de una diversidad de tareas".

Existen varias clases de robot's industriales, diferentes tanto por sus aplicaciones como por su forma de trabajo; empezando por los más complejos, su clasificación es:

1- Robots inteligentes: son manipuladores o sistemas mecánicos multifuncionales controlados por computador, capaces de relacionarse con su entorno a través de sensores y de tomar decisiones en tiempo real (autoprogramables).

2- Robots por control por computador: son similares a los anteriores, pero carecen de la capacidad de relacionarse con el entorno que los rodea. Si se les añaden los sensores adecuados y el software respectivo, se covierten en robots inteligentes.

3- Robots de aprendizaje: se limitan a repetir una secuencia de movimientos realizados con la intervención de un operador humano y que ha sido memorizada.

4- Teleoperadores: son sistemas mecánicos multifuncionales, cuyo sencillo sistema de control permite gobernar el movimiento de sus elementos de las formas siguientes:

a) manual, cuando un operario se encarga de controlar en forma directa al teleoperador.

b) de secuencia variable, cuando es posible alterar algunas de las características de los ciclos de trabajo.

Otra clasificación de los robots, toma en cuenta el control de los movimientos, y es:

1- Sin servocontrol: el programa, que controla el movimiento de los diferentes elementos del robot, se realiza mediante un posicionamiento punto a punto en el espacio.

2- Con servocontrol: permite, a su vez, dos formas de trabajo:

a) control de los movimientos de los elementos del robot en función de sus ejes. Los desplazamientos pueden realizarse punto a punto o con trayectoria continua.

b) los movimientos se establecen en función de la posición respecto a los ejes de coordenadas (x,y,z) y de la orientación de la mano del robot.

La utilización de robots en la industria tiene como objetivos principales el aumento de la productividad y la mejora de la calidad de los productos fabricados mediante la repetitividad y la precisión.

El aumento de la productividad dentro de una industria se produce por las siguientes causas:

1- Aumento de la velocidad en el proceso productivo. La repetición automática de los movimientos del robot, con optimización de la velocidad, representa una reducción en el tiempo de trabajo dentro del proceso productivo y, consecuentemente, un incremento del rendimiento total en la linea de producción o montaje.

2- El elevado tiempo de funcionamiento sin fallas que tiene un robot industrial, repercute en la consecución de un trabajo uniforme e interrumpido.

3- El mantenimiento reducido que requieren y el empleo de módulos normalizados en la reparación de averías, minimiza del tiempo de parada.

4- Optimización sustancial del empleo del equipo o maquinaria principal a la que el robot alimenta en mumerosas aplicaciones. El robot permite trabajar a la máxima velocidad a las máquinas que atiende , así como, operar con las características más favorables de los equipos junto con los que trabaja.

5- Acoplamiento ideal para producciones de series cortas y medianas. La fácil programación, unida a la adaptabilidad de numerosas herramientas de trabajo, pemite al robot constituirse en una célula flexible de fabricación.

6- Rápida amortización de la inversión. La substitución de la mano de obra que el robot introduce, va acompañada de una reducción importante de los costos directos e indirectos.

El problema básico que se debe resolver, en el estudio de la

robótica, es el de la capacidad de colocar la herramienta de un manipulador en una determinada posición y orientación en el espacio; se trata pues, de un problema cinemático que puede resolverse utilizando una formulación matricial, que es lo que se tratará en los capítulos siguientes. También, será necesario aplicar unas fuerzas y momentos en los acionamientos del robot, que muevan al mecanismo hasta una posición deseada, manteniendo la estabilidad del sistema; este es el campo de interés de la dinámica.

1.2 ESTRUCTURA BASICA DE UN ROBOT.

Un robot se compone de tres partes fundamentales:

1- El manipulador.

2- El control.

3- Los sistemas sensitivos.

El manipulador constituye la parte mecánica del robot y, está formado por los siguientes componentes:

1- Varios elementos rígidos relacionados entre sí mediante uniones que permiten su movimiento relativo. A estas uniones se las denomina pares cinimáticos o junturas y, si el movimiento relativo permitido es una rotación al rededor de un eje cualquiera, se llama par cinemático tipo R o juntura revolutiva; o si el movimiento relativo es una traslación, se llama par cinemático tipo P o juntura prismática.

2- Los dispocitivos de agarre o sujeción, conocidos también como herramienta, y que poseen la capacidad de sujetar, orientar y operar sobre las piezas manipuladas. Dependiendo de la aplicación, se utilizará la herramienta adecuada.

3- Sistemas motores, como motores eléctricos de paso a paso, dispocitivos neumáticos e hidráulicos, motores eléctricos de corriente continua, etc. Estos sistemas proporcionan la energía mecánica, transmitida directamente o por medio de elementos auxiliares (engranajes, correas dentadas, etc.), necesaria para el movimiento de las junturas del manipulador.

En cuanto al sistema de control, según el concepto de robot dado anteriormente, se encarga de controlar el movimiento del mecanismo producido por la variación en el tiempo de las variables de juntura o grados de libertad. El control de movimiento está referido a la mano o herramienta final, directamente; este método de control, llamado TCP (Tool Center Point), determina las coordenadas de la posición del elemento final de trabajo del robot y su orientación. El problema es muy complejo, debido a que, las propiedades cinemáticas y dinámicas del robot varían con la posición y que las ecuaciones resultantes son fuertemente no lineales. Existen diferentes técnicas de control aplicadas a los robots: se puede controlar sólo la posición y la velocidad, llamado control cinemático; si además, se tienen en cuenta las propiedades dinámicas del manipulador y de los motores, aparece el control dinámico; y, considerando la variación de los parámetros del robot con la posición, se tiene el control adaptativo.

El control de la posición del brazo se lo realiza: sólo en determinados puntos del recorrido o con control continuo. En el primer caso no se pueden predecir las trayectorias que el extremo del brazo va ha seguir; en el segundo, la trayectoria se controla en forma continua, lo cual, resulta más eficaz. Con el control continuo, se controla el movimiento de todos los grados de libertad del manipulador en los

puntos intermedios entre dos posiciones sucesivas. En la figura 1.1 se muestra un esquema con los diferentes tipos de control.

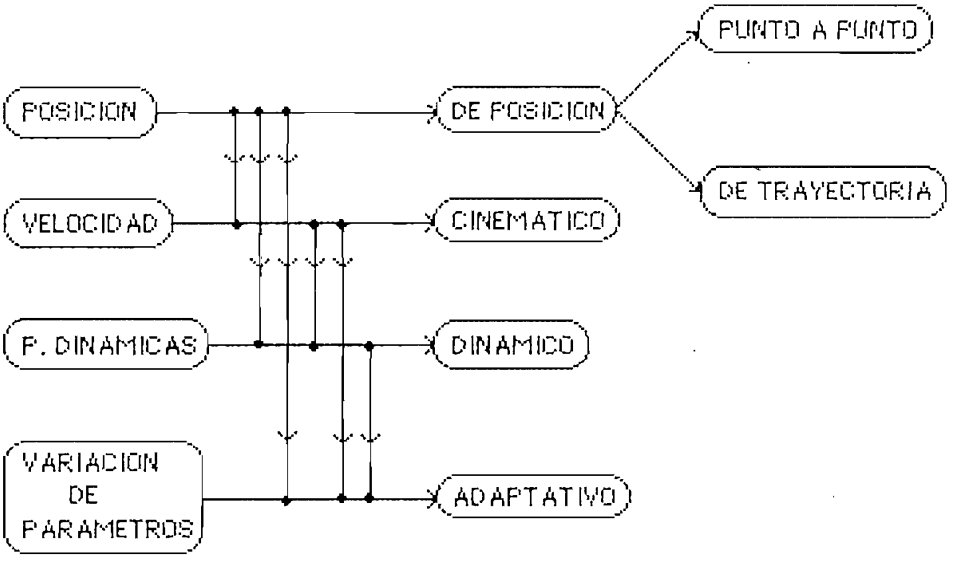


Figura 1.1 Sistemas de control

El computador, ya sea mini o micro, interviene dentro del sistema de control del robot principalmente en dos aspectos:

1- Adaptación de las entradas (sensores y comandos) y de las salidas (actuadores o motores).

2- Control general, tanto de los movimientos, como de los cálculos y otros parámetros de trabajo.

En los robots inteligentes, el computador se encarga, también, de procesar la información proveniente de los sensores que proporcionan datos del estado del mundo exterior al robot.

Para la programación del computador, se han desarrollado numerosos lenguajes de programación de robots, de los cuales, no ha aparecido el ideal que, destacandose sobre los demás, cumpla la mayor parte de requisitos para ser considerado de buena calidad. Las dos causas principales de la existencia de estos numerosos lenguajes han sido: primero, que cada uno de ellos se ha diseñado para un robot concreto, lo que, anula la posibilidad de emplearlo en modelos diferentes; y segundo, que otros lenguajes están dirigidos a una aplicación especifica, lo que, restringe su uso en tareas diferentes.

El desarrollo de un lenguaje válido para cualquier robot y aplicación, que reuna además, las características necesarias para la elaboración de un software, es una de las metas actuales de investigación.

La evolución de los nuevos lenguajes para robots, se va dirigiendo hacia una programación textual, que permita la creación y depuración de programas off-line, es decir, sin usar el robot directamente en la tarea

durante la fase de programación. También, en otros casos se realizan simulaciones, en las que, el programador debe conocer solo un lenguaje, el de simulación y, el simulador se encarga de traducir los comandos de simulación al lenguaje específico de cada robot. Con la simulación también, no es necesario considerar las diferentes configuraciones de hardware existentes para una determinada aplicación; el hardware se lo escoge después de la simulación. De esta forma, la simulación evita el problema de los numerosos lenguajes existentes.

Para la organización del software relacionado con los robots, se han seguido dos líneas tradicionales: programación explícita del sistema, en la que, el operador es el responsable de las acciones de control y de las instrucciones adecuadas que las implementan; y, la modelación del mundo exterior, la que, se basa en una amplia descripción de la tarea y del entorno, es el propio sistema el que lleva a cabo la toma de ciertas decisiones. La más utilizada es la programación explícita, existiendo dos técnicas fundamentales:

a) programación gestual o directa

b) programación textual

En la programación gestual directa, el operador guia el brazo, directamente, a través del camino que ha de seguir en su trabajo de aplicación; posteriormente, el sistema repetirá dicho camino cíclicamente. Esta programación es del tipo on-line.

La programación textual, consiste en la confección de un programa de instrucciones o sentencias, con las que, las acciones del brazo manipulador se definen y regulan.

La programación y su lenguaje, inicialmente, son dependientes totalmente del tipo de descripción del trabajo que el robot debe realizar, existiendo los niveles siguientes:

1- Nivel de control del elemento motriz o accionador que gobierna el movimiento de cada articulación del brazo.

2- Nivel de control del elemento final de trabajo, es decir, la mano de sujeción o herramienta (TCP).

3- Nivel del objeto sobre el que el sistema opera.

4- Nivel de la tarea que el robot realiza.

Estos cuatro niveles de descripción, se utilizan tanto en la programación textual como en la gestual, y son determinantes de importantes caracteristicas del lenguaje que las soporte.

La programación gestual o directa, se divide en dos clases: programación por aprendizaje directo y programación mediante un dispocitivo de enseñanza.

En el aprendizaje directo, el punto final del brazo se traslada con ayuda de un dispocitivo especial, colocado en la muñeca, que efectua los desplazamientos necesarios para realizar una tarea determinada que, luego de ser memorizados, serán repetidos por el robot. Esta técnica se utiliza más en robots dedicados a labores de pintura donde, un operario, sin conocimientos de software pero con experiencia en el trabajo, guia la muñeca del manipulador. En este caso el software se organiza a manera de intérprete.

La programación usando un dispocitivo de enseñanza, consiste en determinar las acciones y movimientos del brazo, a través de un elemento especial para este cometido, que suele estar construido por botones, teclas, pulsadores, luces indicadoras, ejes giratorios o joystick. Dependiendo del tipo de control que se utilize, el robot pasa

punto a punto, similares a los de la programación gestual, pero bajo la forma de un lenguaje formal.

Dentro de la programación explícita hay dos niveles: nivel de movimiento elemental y nivel estructurado. El nivel de movimiento elemental comprende los lenguajes dirigidos a controlar los movimientos del brazo manipulador. Existen dos tipos:

a) Articular, cuando el lenguaje se dirige al control de los movimientos de las diversas articulaciones del brazo manipulador.

b) Cartesiano, cuando el lenguaje define los movimientos del punto final de trabajo (TCP).

Los lenguajes del tipo cartesiano utilizan transformaciones homogeneas, que permiten independizar a la programación del modelo particular de robot, puesto que, un programa confeccionado en coordenadas cartesianas para un robot, puede utilizarse en otro, con diferentes coordenadas, mediante el sistema de transformación correspondiente.

Los lenguajes del tipo articular, calculan los incrementos angulares de las distintas articulaciones que forman el mecanismo. El inconveniente es que no se tiene una referencia general de la posición

de las articulaciones con relación al medio que le rodea, entonces, será difícil relacionar al sistema con piezas móviles, obstáculos, etc.

El nivel estructurado, intenta introducir relaciones entre el objeto y el sistema del robot, desarrollando lenguajes sobre una estructura formal, es decir, adoptan la filosofía del lenguaje PASCAL. Describen objetos y transformaciones con objetos, disponiendo muchos de ellos de una estructura de datos.

El uso de lenguajes con programación explícita estructurada, aumenta la comprensión del programa, reduce el tiempo de edición y simplifica las acciones encaminadas a la consecución de tareas determinadas.

La programación textual especificativa, es un tipo de programación no procesal, en la que, el usuario describe las especificaciones de los objetos a manipular mediante una modelización, al igual que las tareas que hay que realizar sobre ellos.

En la figura 1.2 se presenta un cuadro con los diferentes tipos de programación que se han tratado.

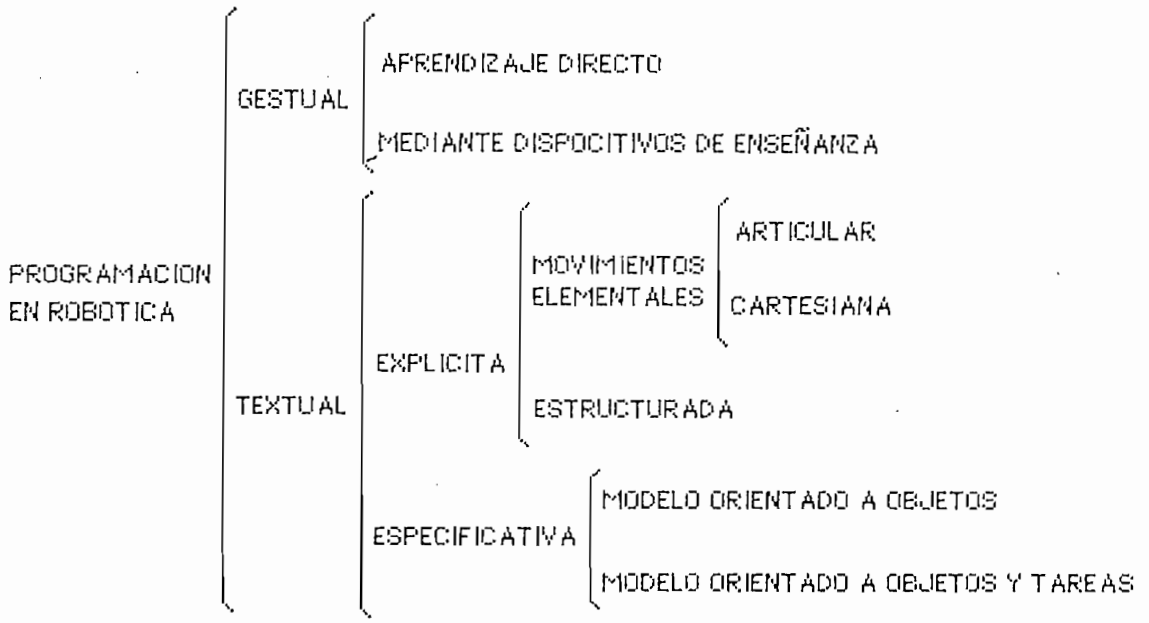


Figura 1.2 Tipos de programación en robótica.

Los lenguajes de programación aplicados a la robótica que actualmente existen son: WAVE, LAMA, VAL(I, II), AL, MAL y AUTOPASS entre los principales.

Las características básicas que debe reunir un lenguaje para ser considerado como ideal son:

1- Claridad y sencillez.

2- Claridad de la estructura del programa.

3- Sencillez de aplicación.

4- Facilidad de ampliación.

5- Facilidad de corrección y mantenimiento.

6- Eficacia.

7- Transportabilidad sobre cualquier equipo mecánico o informático.

8- Adaptabilidad a sensores (tacto, visión, etc.).

9- Posibilidad de descripción de todo tipo de herramienta acoplables al manipulador.

10- Interacción con otros sistemas.

Será necesario, además, que los lenguajes para robots sean fácilmente ampliables, por lo que, se les debe dotar de una estructura modular, con inclusión de subrutinas definidas por el mismo usuario.

Aunque los intérpretes son más lentos que los compiladores, a la hora de la ejecución de un programa, resultan más adecuados para las

aplicaciones de la robótica por las siguientes razones: primero, el intérprete ejecuta el código como lo encuentra, mientras que el compilador recorre el programa varias veces antes de generar el código ejecutable; segundo, los intérpretes permiten una ejecución parcial del programa; y tercero, la modificación de alguna instrucción es más rápida con intérpretes, ya que un cambio en una de ellas no supone la compilación de las demás.

En la actualidad, los robots son usados para realizar trabajos pesados, como soldadura de piezas metálicas y pintura; sin embargo, su uso potencial está en realizar tareas de ensamblaje en la industria electrónica, que requiere de cuidado y exactitud además, en la industria automovilística donde se encargan de cumplir un sinnúmero de tareas.

Un área de la robótica que experimenta continuos cambios, es la mecánica del robot en sus mecanismos de comando. Utilizando motores paso a paso y servomotores DC se obtiene gran exactitud al realizar los movimientos; pero, con el fin de reducir más las pérdidas asociadas a las escobillas de los motores DC, y también, reducir la inercia, se están utilizando servomotores AC con alta relación torque-peso que operan tanto en vacio como en ambientes inflamables. Estos motores se fabrican con un material, que es el samario-cobalto, el cual, tiene

características magnéticas ideales, que dan como resultado una alta densidad de flujo magnético.

CAPITULO II : TRANSFORMACIONES HOMOGENEAS

2.1 NOTACION

2.2 TRANSFORMACIONES

2.3 SISTEMAS DE COORDENADAS

2.4 ECUACIONES DE TRANSFORMACION

2.5 TRANSFORMACION GENERAL DE ROTACION

2.1 NOTACION.

La representación de vectores de un sistema n-dimensional en un sistema de coordenadas homogeneas, es otro sistema idéntico pero (n+1)-dimensional, al que se le ha aumentado una coordenada extra, llamada factor de escala (w), de tal forma qué, cada vector tendrá la misma denominación si a todas sus componentes, incluido el factor de escala, se les multiplica por una constante. Dado el vector:

$$\underline{v} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$$

donde una letra minúscula subrayada va ha representar un vector; su representación en coordenadas homogeneas, como matriz columna es:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

donde:

$$a = x/w$$

$$b = y/w$$

$$c = z/w$$

La representación homogenea para un plano es una matriz columna dada por:

$$\underline{P} = [\, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \,]$$

donde una letra mayúscula subrayada va ha representar una matriz.

2.2 TRANSFORMACIONES.

El movimiento de un manipulador o brazo de robot se reduce a efectuar traslaciones y rotaciones dentro de un espacio tridimensional, el enfoque matricial de estos problemas tiene algunas ventajas; su formulación es muy sencilla y, la aplicación de varias transformaciones sucesivas, sobre un mismo objetivo, se la considera como una nueva transformación.

Para determinar la matriz de transformación de traslación, se considera a un sólido rígido en el espacio tridimensional. Un punto P del mismo está representado por el vector $\underline{v}_1$. Una traslación se define por un vector $\underline{d}$, de modo que, al aplicarla sobre el sólido, el punto P pasará a ocupar una nueva posición dada por el vector $\underline{v}_2$, como muestra la

figura 2.1, donde:

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underline{d}$$

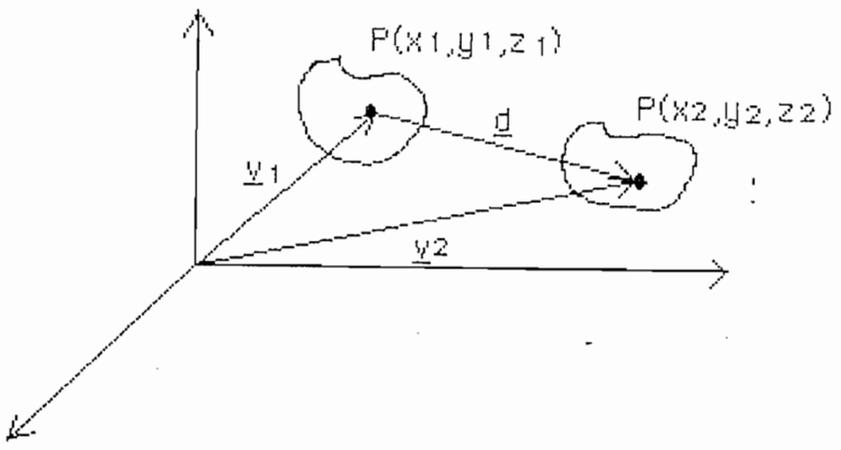


Figura 2.1 Traslación de un cuerpo

desarrollando:

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + d_x w \\ y_1 + d_y w \\ z_1 + d_z w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/w + d_x \\ y_1/w + d_y \\ z_1/w + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA
BIBLIOTECA
2891
E. P. N.

expresando en coordenadas homogeneas, con w = 1:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}\text{ø},x = \begin{bmatrix} 0 & \cos\text{ø} & -\text{seno} & 0 \\ 0 & \text{seno} & \cos\text{ø} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación se verá con detalle como llegar a la matriz $\underline{R}ß,z$, un procedimiento igual se sigue para las otras matrices.

En la figura 2.2 se muestra el vector $\underline{v}_1\ (x_1,y_1,z_1)$, en su posición inicial que después de realizada la rotación alrededor del eje z, en sentido antihorario un ángulo ß, pasa a ocupar una posición dada por el vector $\underline{v}_2\ (x_2,y_2,z_2)$. Como la componente en el eje z del vector no se ve afectada por la operación de rotación, se trabajará con las proyecciones de los vectores sobre el plano (x,y) , que son: $\underline{v}_1(x_1,y_1)$ y $\underline{v}_2(x_2,y_2)$; el ángulo entre estos vectores sigue siendo ß y, el ángulo entre el eje x y el vector $\underline{v}_1(x_1,y_1)$ es ∂ .

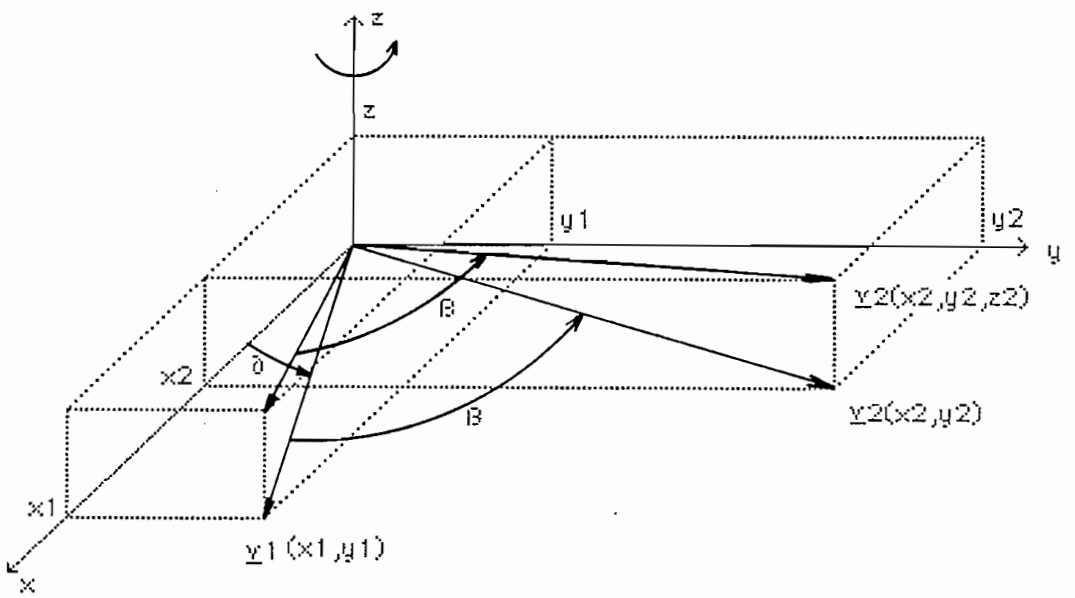


Figura 2.2 Rotación de un vector

entonces:

$$y_2 = x_1\ \text{sen}ß + y_1\ \cos ß \qquad (2.7)$$

conocemos que:

$$z_2 = z_1 \tag{2.8}$$

pasando a una notación matricial a las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) y, considerando que el factor de escala no cambia; se llega a:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta & 0 & 0 \\ \text{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \underline{R}\beta,z \ \underline{v}_1$$

La rotación total se calcula mediante el producto de matrices:

$$\underline{R}\beta,\partial,\phi = \underline{R}\beta,z \ \underline{R}\partial,y \ \underline{R}\phi,x$$

Hay que tomar en cuenta que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, por tanto, el resultado final que se obtenga dependerá del orden en que se realizen las diferentes rotaciones.

2.3 SISTEMAS DE COORDENADAS.

Se anlizará en primer lugar el procedimiento de cambio de coordenadas. Se puede interpretar a los elementos de una transformación homogenea como cuatro vectores que describen un segundo sistema de coordenadas. Por ejemplo: considerando los dos sistemas de coordenadas de la figura 2.3; la matriz de transformación homogenea entre dichos sistemas es una matriz $\underline{T}$; tal que:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El origen del segundo sistema de coordenadas está definido por el vector $[0,0,0,1]^T$; realizando la transformación se obtiene un vector que define el origen del primer sistema de coordenadas respecto del anterior $[4,-3,7,1]^T$ el cual, corresponde a la cuarta columna de la matriz de transformación. La transformación de los vectores unitarios a lo largo de los ejes x,y,z, se obtienen de forma similar. Se ha considerado un factor de escala igual a 1.

La dirección de los vectores unitarios se la encuentra restando dichos vectores, del vector que define el origen del sistema de coordenadas y extendiendo los vectores al infinito, es decir, haciendo

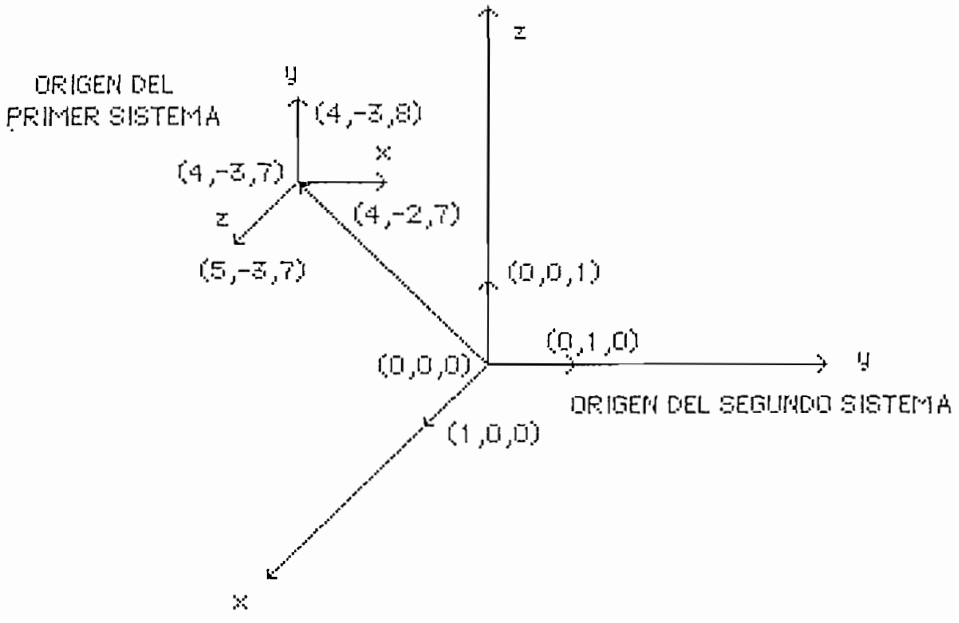


Figura 2.3 Interpretación de la matriz de transformación

cero el factor de escala de cada uno de ellos. Las tres direcciones están dadas por los vectores $[0,1,0,0]^T$, $[0,0,1,0]^T$ y $[1,0,0,0]^T$ para los ejes x,y,z del primer sistema. Estos vectores de dirección corresponden a las primeras tres columnas de la matriz de transformación. Entonces, la matriz de transformación describe la dirección de los tres ejes de coordenadas y la posición del origen de un sistema rotado y trasladado respecto de un sistema de coordenadas de referencia. En éste ejemplo se ha tomado como referencia al segundo sistema.

Cuando se habla de transformaciones, hay que especificar con relación a que sistema se hace dicha transformación (transformaciones

La aplicación de las transformaciones y de los sistemas de coordenadas, en esta tesis, se orienta a la definición de las posiciones de un objeto. En efecto, las transformaciones de traslación y rotación, antes descritas, sirven para definir la posición y orientación de objetos en el espacio. Primeramente se deben localizar un conjunto de puntos que describan la posicion inicial del cuerpo, con respecto a un sistema de coordenadas fijo en el objeto; la matriz de transformación que representa una operación, ya sea rotación, traslación o ambas, está referida al sistema de coordenadas fijo en el objeto. Los nuevos puntos se encuentran transformando los puntos iniciales, sucesivamente.

La aplicación de estos criterios a los manipuladores de robot reside en la necesidad de conocer la posición de un punto respecto a un sistema fijo, llamado global, pero, generalmente, la posición de cada elemento está definida respecto al sistema anterior, en lugar de respecto al sistema global.

Este concepto puede ser tratado cuatitativamente mediante las ecuaciones de transformación.

2.4 ECUACIONES DE TRANSFORMACION.

Usualmente se va ha encontrar sistemas de coordenadas que están descritos de dos o más maneras mediante ecuaciones de transformación. Considerando el caso de la figura 2.4, la base del manipulador está posicionada respecto a las coordenadas globales por la matriz $\underline{Z}$. El extremo del manipulador por la matriz ${}^{Z}\underline{T6}$ (con respecto a la base del mismo) y, la mano por la matriz ${}^{T6}\underline{E}$ (con respecto al extremo). El objeto está posicionado con referencia a las coordenadas globales por la transformada $\underline{B}$ y, la mano del manipulador está posicionada con respecto al objeto por ${}^{B}\underline{G}$.

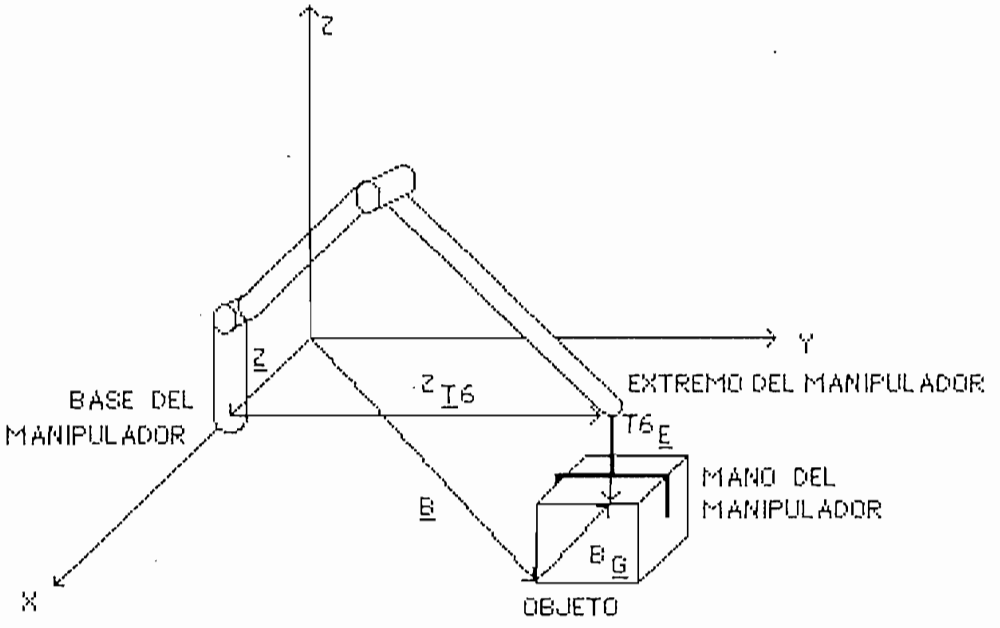


Figura 2.4 Ecuaciones de posición de un manipulador

La posición de la mano puede ser descrita de dos maneras: una

con respecto al objeto;

$$\underline{B}\ {}^{B}\underline{G}$$

y otra respecto a la base del manipulador;

$$\underline{Z}\ {}^{Z}\underline{T_6}\ {}^{T6}\underline{E}$$

como la posición es la misma, las dos descripciones pueden igualarse, resultando una ecuación matricial:

$$\underline{Z}\ {}^{Z}\underline{T_6}\ {}^{T6}\underline{E} = \underline{B}\ {}^{B}\underline{G} \qquad (2.11)$$

En caso ser necesario despejar una de las matrices de la ecuación (2.11), entonces, es útil conocer la transformación inversa.

La transformación inversa tiene la finalidad de transformar a un sistema de coordenadas, sobre el que se aplicó una transformación, al sistema de coordenadas inicial. En general, dada una transformación con elementos:

desarrollando cada producto vectorial:

$$(n_y\, o_z - n_z\, o_y)\,\underline{i} + (n_z\, o_x - n_x\, o_z)\,\underline{j} + (n_x\, o_y - n_y\, o_x)\,\underline{k} = a_x\,\underline{i} + a_y\,\underline{j} + a_z\,\underline{k} \qquad (2.12)$$

$$(a_y\, n_z - a_z\, n_y)\,\underline{i} + (a_z\, n_x - a_x\, n_z)\,\underline{j} + (a_x\, n_y - a_y\, n_x)\,\underline{k} = o_x\,\underline{i} + o_y\,\underline{j} + o_z\,\underline{k} \qquad (2.13)$$

$$(o_y\, a_z - o_z\, a_y)\,\underline{i} + (o_z\, a_x - o_x\, a_z)\,\underline{j} + (o_x\, a_y - o_y\, a_x)\,\underline{k} = n_x\,\underline{i} + n_y\,\underline{j} + n_z\,\underline{k} \qquad (2.14)$$

Para encontrar la matriz inversa se utilizara el desarrollo por cofactores del determinante de la matriz $\underline{T}$; entonces:

$$\underline{T}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{T}}\ \underline{C}^T$$

donde, $\underline{C}^T$ es la matriz de cofactores transpuesta. Primero se realizará el cálculo del determinante de la matriz $\underline{T}$:

$$\det \underline{T} = n_x o_y a_z + n_y o_z a_x + o_x a_y n_z - a_x o_y n_z - o_x n_y a_z - a_y o_z n_x$$

agrupando términos:

$$\det \underline{T} = a_x(n_y o_z - n_z o_y) + a_y(n_z o_x - n_x o_z) + a_z(n_x o_y - n_y o_x) \qquad (2.15)$$

reemplazando los términos de la ecuación (2.12) en (2.15):

$$\det \underline{I} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z$$

$$\det \underline{I} = \underline{a} \cdot \underline{a}$$

$$\det \underline{I} = 1$$

La matriz de cofactores transpuesta $\underline{C}^T$ resulta ser:

$$\underline{C}^T = \begin{bmatrix} (o_y a_z - o_z a_y) & -(o_x a_z - o_z a_x) & (o_x a_y - o_y a_x) \\ -(a_z n_y - a_y n_z) & (a_z n_x - a_x n_z) & -(a_y n_x - a_x n_y) \\ (n_y o_z - n_z o_y) & -(n_x o_z - n_z o_x) & (n_x o_y - n_y o_x) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -[d_x(o_y a_z - o_z a_y) + d_y(o_z a_x - o_x a_z) + d_z(o_x a_y - o_y a_x)] \\ -[d_x(a_z n_y - a_y n_z) + d_y(a_x n_z - a_z n_x) + d_z(a_y n_x - a_x n_y)] \\ -[d_x(n_y o_z - n_z o_y) + d_y(n_z o_x - n_x o_z) + d_z(n_x o_y - n_y o_x)] \\ 1 \end{matrix}$$

reemplazando las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) en la matriz anterior se tiene :

$$\underline{C}^T = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -(d_x n_x + d_y n_y + d_z n_z) \\ o_x & o_y & o_z & -(d_x o_x + d_y o_y + d_z o_z) \\ a_x & a_y & a_z & -(d_x a_x + d_y a_y + d_z a_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cuarta columna de ésta matriz es el producto escalar del vector $\underline{d}$ con los vectores $\underline{n}$, $\underline{o}$ y $\underline{a}$, respectivamente, y como det $\underline{T}$ = 1 la matriz inversa $\underline{T}^{-1} = \underline{C}^T$, entonces se demuestra que:

$$\underline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -\underline{d} \cdot \underline{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\underline{d} \cdot \underline{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\underline{d} \cdot \underline{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 TRANSFORMACION GENERAL DE ROTACION.

Esta matriz de transformación representa a una rotación alrededor de un eje, dado por un vector $\underline{p}$ arbitrario y localizado en el origen. Considerando que el vector $\underline{p}$ es el vector unitario en el eje z de un sistema de coordenadas $\underline{C}$, entonces:

$$\underline{R}\beta,p = \underline{R}\beta,z$$

Dado un sistema $\underline{T}$, descrito con respecto al sistema de

coordenadas de referencia, se puede encontrar una transformada $\underline{X}$ que describa a este sistema con respecto al sistema $\underline{C}$. Rotar a $\underline{T}$ al rededor de $\underline{p}$ es equivalente a rotar a $\underline{X}$ al rededor del eje z del sistema $\underline{C}$. Entonces $\underline{C}\,\underline{X} = \underline{T}$;

$$\underline{R}\beta,p\ \underline{T} = \underline{C}\ \underline{R}\beta,z\ \underline{X}$$

de donde se obtiene, luego de reemplazar $\underline{X}\ \underline{T}^{-1} = \underline{C}^{-1}$:

$$\underline{R}\beta,p = \underline{C}\ \underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1}$$

desarrollando el producto matricial:

$$\underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta & 0 & 0 \\ \text{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} n_x\cos\beta - o_x\text{sen}\beta & n_y\cos\beta - o_y\text{sen}\beta & n_z\cos\beta - o_z\text{sen}\beta & 0 \\ n_x\text{sen}\beta + o_x\cos\beta & n_y\text{sen}\beta + o_y\cos\beta & n_z\text{sen}\beta + o_z\cos\beta & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

premultiplicando por la matriz $\underline{C}$ se obtiene:

$$\underline{C}\ \underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} n_x n_x \cos\beta - n_x o_x \operatorname{sen}\beta + o_x n_x \operatorname{sen}\beta + o_x o_x \cos\beta + a_x a_x & n_x n_y \cos\beta - n_x o_y \operatorname{sen}\beta + o_x n_y \operatorname{sen}\beta + o_x o_y \cos\beta + a_x a_y & n_x n_z \cos\beta - n_x o_z \operatorname{sen}\beta + o_x n_z \operatorname{sen}\beta + o_x o_z \cos\beta + a_x a_z & 0 \\ n_y n_x \cos\beta - n_y o_x \operatorname{sen}\beta + o_y n_x \operatorname{sen}\beta + o_y o_x \cos\beta + a_y a_x & n_y n_y \cos\beta - n_y o_y \operatorname{sen}\beta + o_y n_y \operatorname{sen}\beta + o_y o_y \cos\beta + a_y a_y & n_y n_z \cos\beta - n_y o_z \operatorname{sen}\beta + o_y n_z \operatorname{sen}\beta + o_y o_z \cos\beta + a_y a_z & 0 \\ n_z n_x \cos\beta - n_z o_x \operatorname{sen}\beta + o_z n_x \operatorname{sen}\beta + o_z o_x \cos\beta + a_z a_x & n_z n_y \cos\beta - n_z o_y \operatorname{sen}\beta + o_z n_y \operatorname{sen}\beta + o_z o_y \cos\beta + a_z a_y & n_z n_z \cos\beta - n_z o_z \operatorname{sen}\beta + o_z n_z \operatorname{sen}\beta + o_z o_z \cos\beta + a_z a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

agrupando términos en cada elemento de la matriz:

$$\underline{C}\ \underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} (n_x n_x + o_x o_x)\cos\beta + a_x a_x & (n_x n_y + o_x o_y)\cos\beta + (o_x n_y - o_y n_x)\operatorname{sen}\beta + a_y a_x & (n_x n_z + o_x o_z)\cos\beta + (o_x n_z - o_z n_x)\operatorname{sen}\beta + a_z a_x \\ (n_y n_x + o_y o_x)\cos\beta + (o_y n_x - o_x n_y)\operatorname{sen}\beta + a_y a_x & (n_y n_y + o_y o_y)\cos\beta + a_y a_y & (n_y n_z + o_y o_z)\cos\beta + (o_y n_z - o_z n_y)\operatorname{sen}\beta + a_z a_y \\ (n_z n_x + o_z o_x)\cos\beta + (o_z n_x - o_x n_z)\operatorname{sen}\beta + a_z a_x & (n_z n_y + o_z o_y)\cos\beta + (o_z n_y - n_z o_y)\operatorname{sen}\beta + a_z a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (n_x n_z + o_x o_z)\cos\beta + (o_x n_z - o_z n_x)\operatorname{sen}\beta + a_x a_z & 0 \\ (n_y n_z + o_y o_z)\cos\beta + (o_y n_z - o_z n_y)\operatorname{sen}\beta + a_y a_z & 0 \\ (n_z n_z + o_z o_z)\cos\beta + a_z a_z & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

desarrollando el elemento (1,1) mediante el reemplazo de los términos respectivos de las ecuaciones (2.14) y (2.13), se tiene:

$$(n_x n_x + o_x o_x)\cos\beta + a_x a_x$$

$$[(o_y a_z - o_z a_y)(o_y a_z - o_z a_y) + (a_y n_z - a_z n_y)(a_y n_z - a_z n_y)]\cos\beta + a_x a_x$$

$$(o_y o_y a_z a_z - 2o_y o_z a_y a_z + o_z o_z a_y a_y + a_y a_y n_z n_z - 2a_y a_z n_y n_z + a_z a_z n_y n_y)\cos\beta + a_x a_x$$

$$[a_z a_z (o_y o_y + n_y n_y) + a_y a_y (o_z o_z + n_z n_z) - 2a_y a_z (o_y o_z + n_y n_z)]\cos\beta + a_x a_x$$

nuevamente reemplazando los términos respectivos de las ecuaciones (2.13) y (2.14):

$$\{a_z a_z [o_y (a_z n_x - a_x n_z) + n_y (o_z a_x - o_x a_z)] + a_y a_y [o_z (a_x n_y - a_y n_x) + n_z (o_x a_y - o_y a_x)] -$$

$$-2a_y a_z [o_y (a_x n_y - a_y n_x) + n_y (o_x a_y - o_y a_x)]\}\cos\beta + a_x a_x$$

desarrollando y reagrupando términos:

$$[a_z a_z[a_z(o_y n_x - o_x n_y) + a_x(n_y o_z - o_y n_z)] + a_y a_y[a_x(o_z n_y - o_y n_z) + a_y(n_z o_x - n_x o_z)] -$$

$$-2a_y a_z[a_y(n_y o_x - n_x o_y)]]\cos\beta + a_x a_x$$

realizando el reemplazo de las expresiones entre paréntesis por los términos respectivos de la ecuación (2.12), se obtiene una nueva expresión para el elemento (1,1) en función sólo de las componentes del vector $\underline{a}$;

$$[a_z a_z(a_z a_z + a_x a_x) + a_y a_y(a_x a_x + a_y a_y) + 2a_y a_y a_z a_z]\cos\beta + a_x a_x$$

agrupando:

$$[a_z a_z(a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z) + a_y a_y(a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z)]\cos\beta + a_x a_x$$

las expresiones entre paréntesis corresponden al producto escalar del vector $\underline{a}$ por sí mismo, $\underline{a} \cdot \underline{a}$ que es igual a uno. Entonces:

$$(a_z a_z + a_y a_y)\cos\beta + a_x a_x$$

utilizando el desarrollo del producto escalar $\underline{a} \cdot \underline{a} = 1$ se obtiene:

$$(1-a_x a_x)\cos\beta + a_x a_x$$

$$a_x a_x(1-\cos\beta)+\cos\beta$$

mediante igual procedimiento se encuentran las expresiones para los otros términos de la diagonal principal de la matriz. Tomando el término (2,1) de la matriz $\underline{C}\ \underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1}$:

$$(n_y n_x + o_y o_x)\cos\beta + (o_y n_x - o_x n_y)\operatorname{sen}\beta + a_y a_x$$

reempalzando términos de las ecuaciones (2.12) y (2.14);

$$[(o_y a_z - o_z a_y)(o_z a_x - o_x a_z) + o_y o_x]\cos\beta + a_z \operatorname{sen}\beta + a_y a_x$$

desarrollando y agrupando:

$$[(a_x o_y(o_z a_z) + o_y o_x - o_y o_x a_z a_z - o_z o_z a_y a_x + o_x a_y(o_z a_z)]\cos\beta + a_z \operatorname{sen}\beta + a_y a_x$$

se conoce que $\underline{a} \cdot \underline{o} = 0$ (son vectores unitarios $\underline{a}$ y $\underline{o}$), entonces;

$$0 = a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z \qquad (2.16)$$

reemplazando la ecuación (2.16) en la expresión anterior:

$$[a_x o_y(-o_x a_x - o_y a_y) + o_y o_x - o_y o_x a_z a_z - o_z o_z a_y a_x + o_x a_y(-o_x a_x - o_y a_y)]\cos\beta +$$

$$+ a_z \operatorname{sen}\beta + a_y a_x$$

desarrollando y reagrupando:

$$[-o_x o_y(a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z) - a_x a_y(o_x o_x + o_y o_y + o_z o_z) + o_y o_x]\cos\beta + a_z \operatorname{sen}\beta + a_y a_x$$

los productos escalares $\underline{a} \cdot \underline{a} = 1$ y $\underline{o} \cdot \underline{o} = 1$, entonces se tiene:

$$-a_x a_y \cos\beta + a_z \operatorname{sen}\beta + a_y a_x$$

obteniéndose un resultado final en función $a_y a_x$:

$$a_y a_x(1-\cos\beta)+a_z\operatorname{sen}\beta$$

mediante un procedimiento análogo se encuentran los restantes términos de la matriz $\underline{C}\ \underline{R}\beta,z\ \underline{C}^{-1}$ (fuera de la diagonal principal). Utilizando las siguientes substituciones: $\operatorname{vers}\beta = (1-\cos\beta)$, $p_x = a_x$, $p_y = a_y$ y $p_z = a_z$, donde p_x , p_y y p_z son las componentes del vector $\underline{p}$, se llega a la transformación general de rotación:

$$\underline{R}\beta,z = \begin{pmatrix} p_x p_x \operatorname{vers}\beta+\cos\beta & p_y p_x \operatorname{vers}\beta-p_z\operatorname{sen}\beta & p_z p_x \operatorname{vers}\beta+p_y\operatorname{sen}\beta & 0 \\ p_x p_y \operatorname{vers}\beta+p_z\operatorname{sen}\beta & p_y p_y \operatorname{vers}\beta+\cos\beta & p_z p_y \operatorname{vers}\beta-p_x\operatorname{sen}\beta & 0 \\ p_x p_z \operatorname{vers}\beta-p_y\operatorname{sen}\beta & p_y p_z \operatorname{vers}\beta+p_x\operatorname{sen}\beta & p_z p_z \operatorname{vers}\beta+\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siempre que sobre un sistema se realizen varias rotaciones, secuencialmente, al rededor de sus ejes, con ayuda de la transformación general de rotación, éstas varias operaciones de rotación, se pueden realizar en un solo paso, es decir, una rotación al rededor de un eje $\underline{p}$, equivalente a las varias rotaciones al rededor de los ejes x,y,z del sistema.

CAPITULO III : DESCRIPCION CINEMATICA

3.1 INTRODUCCION

3.2 ANALISIS DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

3.3 ESPECIFICACIONES DE LA ORIENTACION Y DE LA POSICION

3.4 ESPECIFICACION DE MATRICES $\underline{A}$

3.5 ECUACIONES CINEMATICAS PARA LOS MANIPULADORES DE STANFORD Y DE ELBOW

3.6 DETERMINACION DE LA REGION ACCESIBLE PARA UN MANIPULADOR

3.1 INTRODUCCION.

La cinemática de robots industriales y de brazos manipuladores, estudia su movimiento respecto de un sistema de coordenadas fijo o global en función del tiempo, independientemente de las causas que lo producen (sean fuerzas o momentos).

Desde el punto de vista mecánico, un robot se compone de dos elementos principales: el manipulador o brazo y la mano o herramienta. El manipulador utilizado más frecuentemente tiene tres grados de libertad; por lo que respecta a la mano de sujeción, se encuentra unida a una muñeca que permite otros tres grados de libertad, es decir, en los robots industriales se encuentra generalmente seis grados de libertad, donde el brazo constituye el macanismo de posicionamiento, mientras que la muñeca es el de orientación.

Entre los diferentes tipos de movimiento del brazo manipulador, los usados más frecuentemente se presentan en las figuras 3.1, a, b, c, d ; en cada una de las cuales se emplea un tipo de coordenadas determinado: sistema cartesiano (figura 3.1,a), sistema de revolución (figura 3.1,b), sistema cilíndrico (figura 3.1,c) y sistema esférico

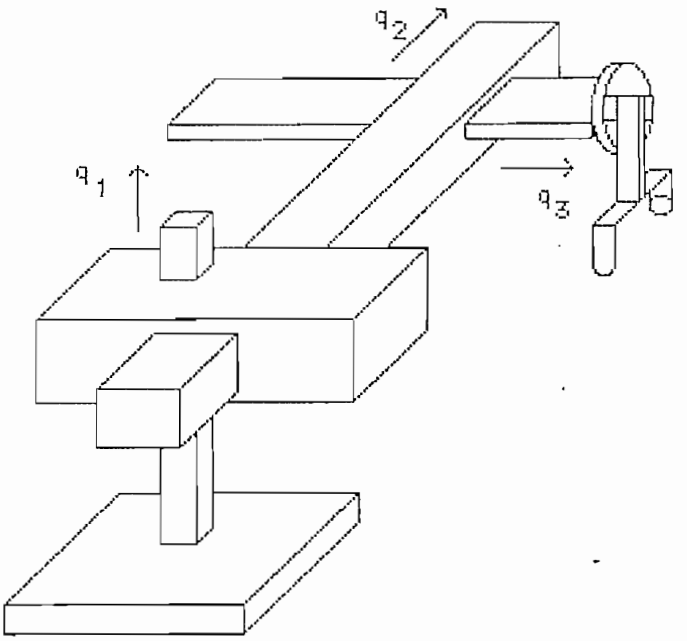


Figura 3.1,a Movimientos de un brazo con sistema cartesiano

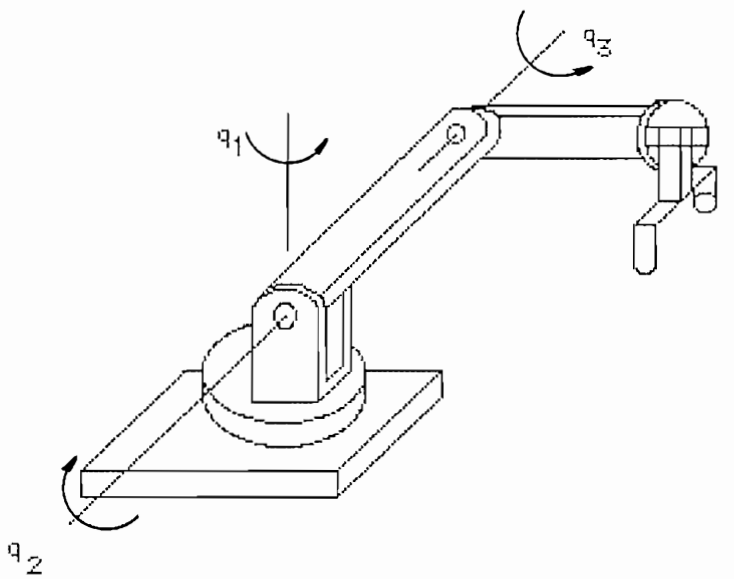


Figura 3.1,b Movimientos de un brazo con sistema de revolución

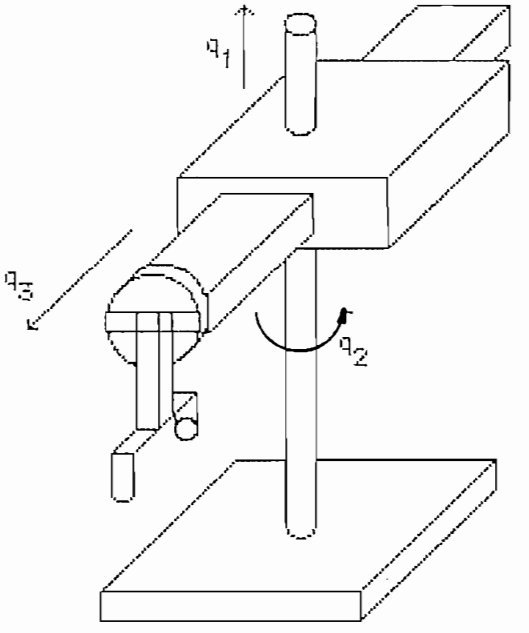


Figura 3.1,c Movimientos de un brazo con sistema cilíndrico

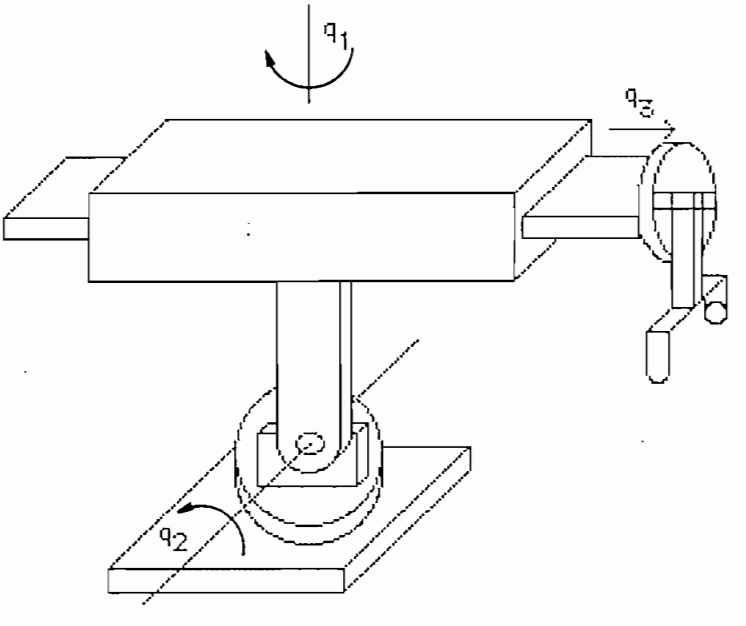


Figura 3.1,d Movimientos de un brazo con sistema esférico

(figura 3.1,d); donde q_1, q_2 y q_3 son los tres parámetros de posicionamiento.

Los tres grados de libertad para la mano o herramienta generalmente son de rotación, figura 3.2. La combinación de los ángulos (ß, ∂, ø) orienta a la mano de sujeción de acuerdo con la posición y características del objeto que se desea manipular; se los conoce como balanceo (roll), cabeceo (pitch) y derrape (yaw), respectivamente.

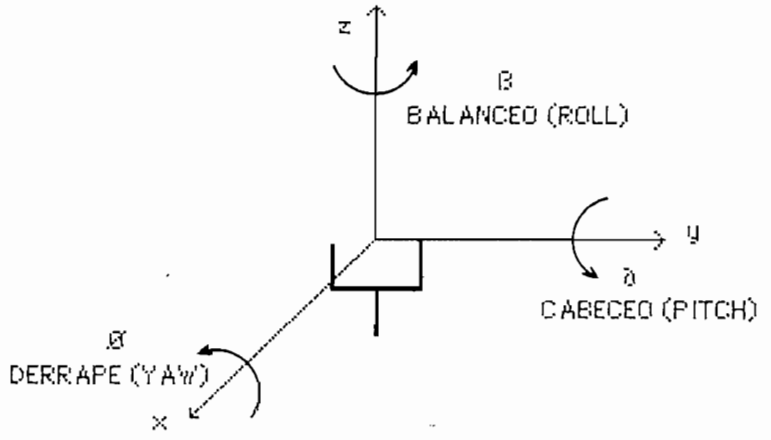
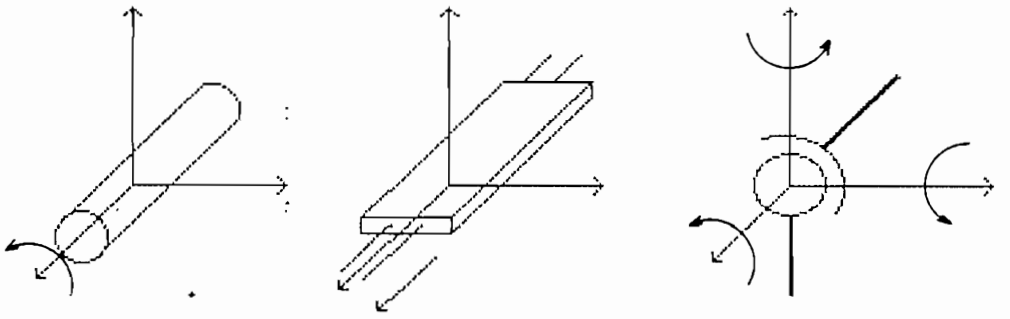


Figura 3.2 Angulos que definen la orientación de la mano

3.2 ANALISIS DE LOS GRADOS DE LIBERTAD.

Desde el punto de vista de la teoría de macanismos y máquinas, se denomina grados de libertad de un macanismo al número de

parámetros que es necesario conocer para determinar su posición. Mediante el criterio de Grübler se puede establecer el número de grados de libertad de una determinada configuración cinemática. Para un sistema formado por N elementos indeformables, cada uno con seis grados de libertad, es preciso conocer 6N parámetros para definir las posiciones de todos ellos. Si el elemento de soporte es fijo se reduce a 6(N-1) el número de grados de libertad. En un manipulador los elementos se encuentran unidos entre sí mediante pares cinemáticos R o P que permiten una rotación o un desplazamiento; en la mano existe un par que permite tres rotaciones (par esférico), denominado par Q. Estos tres tipos de pares cinemáticos se muestran en la figura 3.3, a, b, c, respectivamente.



(a) (b) (c)

Figura 3.3, a, b, c Pares cinemáticos tipo R, P y Q

En un robot que tenga la configuración tradicional de la figura

3.4, el número de elementos es cinco y cada uno tiene dos pares cinemáticos, exepto el soporte y la mano que tienen sólo uno. El número de pares cinemáticos R o P es entonces N-2 y, hay un sólo par esférico Q, por tanto, el número de grados de libertad se calcula de la siguiente manera:

$$G = 6(N-1) - 5(N-2) - 3 \qquad (3.1)$$

en donde se ha descontado tres grados de libertad de la mano debido al par esférico Q. Desarrollando y simplificando se llega a:

$$G = N+1$$

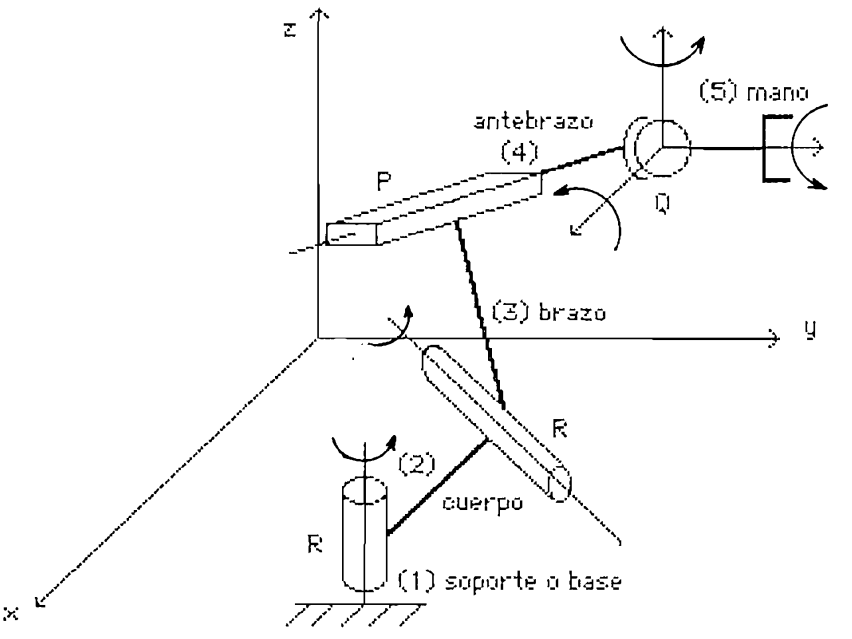


Figura 3.4 Configuración tradicional de un manipulador.

La diferencia entre el punto de vista de la teoría de mecanismos y máquinas y el de la robótica, está en el número de elementos a tener en cuenta y en la forma de construir la muñeca de la mano. El par cinemático Q se materializa mediante tres pares de rotaciones y la mano mediante tres elementos, entonces, el número de elementos pasa a ser dos más que los N considerados antes. Además no se considera al elemento fijo, de esta forma, podemos definir desde el punto de vista de la robótica el número total de elementos E, como:

$$E = N + 1$$

el número de grados de libertad se calcula según la ecuación (3.1), pero añadiendo dos elementos más, con lo cual, se tiene el término 6(N+1); además, hay tres pares cinemáticos para implementar el par esférico Q, entonces, se tiene el término 5(N+1) y se elimina el término -3 que provino de la consideración del par esférico Q en abstracto; puesto que E= N+1, el número de grados de libertad está dado finalmente por:

$$G = 6E - 5E$$

$$G = E$$

Todos los modelos de robot de las figura 3.1,a b, c, d tienen seis elementos y seis grados de libertad.

3.3 ESPECIFICACIONES DE LA ORIENTACION Y DE LA POSICION.

Un manipulador consiste de una serie de pares cinemáticos, cada uno de los cuales identificado por un sistema de coordenadas. Con ayuda de las transformaciones homogeneas es posible describir la posición y la orientación entre los distintos sistemas de coordenadas.

Para especificar la orientación de la mano uno de los métodos que se usa frecuentemente es el de los ángulos de Euler; el cual, consiste en una secuencia de rotaciones: una rotación ß al rededor del eje z, luego una rotación ∂ al rededor del nuevo eje y', para terminar con la rotación ø al rededor del nuevo eje z", como muestra la figura 3.5.

La transformación de Euler se evalua multiplicando las matrices de rotación respectivas:

$$\underline{R}ß,∂,ø = \underline{R}ß,z \ \ \underline{R}∂,y \ \ \underline{R}ø,z$$

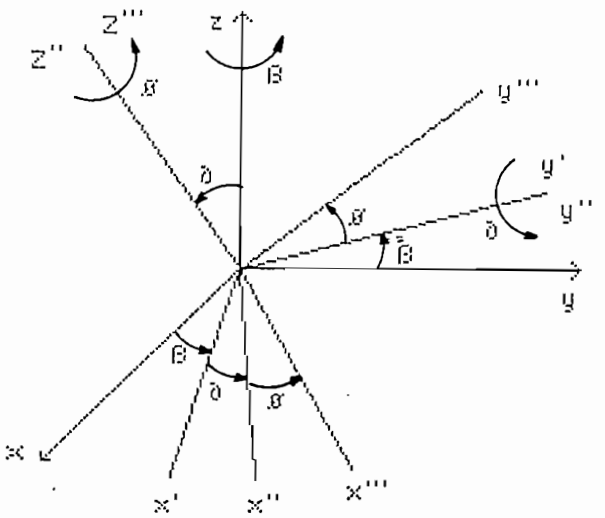


Figura 3.5 Angulos de Euler.

$$\underline{R}\beta,\partial,\phi = \underline{R}\beta,z \begin{pmatrix} \cos\partial & 0 & \operatorname{sen}\partial & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\partial & 0 & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}\beta,\partial,\phi = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\partial\cos\phi & -\cos\partial\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\partial & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\partial\cos\phi & \operatorname{sen}\partial\operatorname{sen}\phi & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R}\beta,\partial,\phi = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\partial\cos\phi-\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\phi & -\cos\beta\cos\partial\operatorname{sen}\phi-\operatorname{sen}\beta\cos\phi & \cos\beta\operatorname{sen}\partial & 0 \\ \operatorname{sen}\beta\cos\partial\cos\phi+\cos\beta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\beta\cos\partial\operatorname{sen}\phi+\cos\beta\cos\phi & \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\partial & 0 \\ -\operatorname{sen}\partial\cos\phi & \operatorname{sen}\partial\operatorname{sen}\phi & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otro método para describir la orientación de la mano es el RPY, que significa roll, pitch y yaw; corresponde a rotar un ángulo ß al rededor del eje z (roll), luego una rotación ∂ al rededor del eje y (pitch) y, una rotación ø al rededor del eje x (yaw); como ilustra la figura 3.2. La matriz de transformación se calcula como:

$$\underline{RPY}ß,∂,ø = \underline{R}ß,z\ \underline{R}∂,y\ \underline{R}ø,x$$

$$\underline{RPY}ß,∂,ø = \underline{R}ß,z \begin{pmatrix} cos∂ & 0 & sen∂ & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen∂ & 0 & cos∂ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cosø & -senø & 0 \\ 0 & senø & cos∂ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{RPY}ß,∂,ø = \begin{pmatrix} cosß & -senß & 0 & 0 & cos∂ \\ senß & cosß & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -sen∂ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sen∂\ senø & sen∂\ cosø & 0 \\ cosø & -senø & 0 \\ cos∂\ senø & cos∂\ cosø & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resultando que:

$$\underline{RPY}ß,∂,ø = \begin{pmatrix} cosß\ cos∂ & cosß\ sen∂\ senø - senß\ cosø \\ senß\ cos∂ & senß\ sen∂\ senø + cosß\ cosø \\ -sen∂ & cos∂\ senø \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} cosß\ sen∂\ cosø + senß\ senø & 0 \\ senß\ sen∂\ cosø - cosß\ senø & 0 \\ cos∂\ cosø & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La posición de la mano puede ser expresada en diferentes sistemas de coordenadas, como se mencionó en el numeral 3.1 de esta tesis. Se va ha realizar el desarrollo para sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas que son los más comunes.

En coordenadas cilíndricas el centro de la mano se define mediante una traslación r a lo largo del eje x, luego una rotación ß al rededor del eje z y por una traslación d a lo largo del eje z; como puede verse en la figura 3.6.

La transformación, notada por $\underline{C}z,ß,x$, está dada por:

$$\underline{C}z,ß,x = \underline{T}d,z \ \underline{R}ß,z \ \underline{T}r,x$$

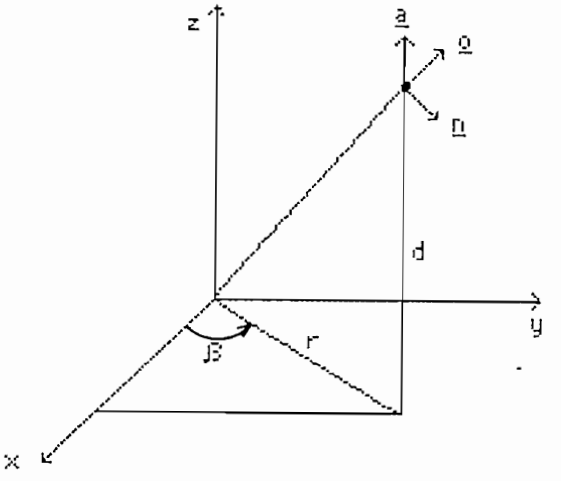


Figura 3.6 Coordenadas cilíndricas

realizando el producto matricial se tiene:

$$\underline{C}z,ß,x = \underline{T}d,z \begin{pmatrix} \cos ß & -\text{sen}ß & 0 & 0 \\ \text{sen}ß & \cos ß & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}z,ß,x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos ß & -\text{sen}ß & 0 & r\cos ß \\ \text{sen}ß & \cos ß & 0 & r\,\text{sen}ß \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}z,ß,x = \begin{pmatrix} \cos ß & -\text{sen}ß & 0 & r\cos ß \\ \text{sen}ß & \cos ß & 0 & r\,\text{sen}ß \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la figura 3.6 se observa que el nuevo sistema resultante está girado un ángulo ß al rededor del eje z, entonces la orientación de la mano está respecto a las coordenadas fijas. Para especificar la orientación respecto de las coordenadas fijas no rotadas es necesario rotar un ángulo (-ß) sobre el eje z. Por tanto:

$$\underline{C}z,ß,x = \begin{pmatrix} \cos ß & -\text{sen}ß & 0 & r\cos ß \\ \text{sen}ß & \cos ß & 0 & r\,\text{sen}ß \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-ß) & -\text{sen}(-ß) & 0 & 0 \\ \text{sen}(-ß) & \cos(-ß) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obteniendose así la transformación:

$$\underline{C}z,\beta,x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r\cos\beta \\ 0 & 1 & 0 & r\,\mathrm{sen}\beta \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El método para especificar la posición mediante coordenadas esféricas, corresponde a una traslación r a lo largo del eje z, luego una rotación ∂ sobre el eje y, y finalmente, una rotación ß sobre el eje z de las coordenadas fijas. Este método se ilustra en la figura 3.7.

La transformación, notada por $\underline{S}\partial,\beta,z$, está definida por:

$$\underline{S}\partial,\beta,z = \underline{R}\partial,z \;\; \underline{R}\beta,y \;\; \underline{T}r,z$$

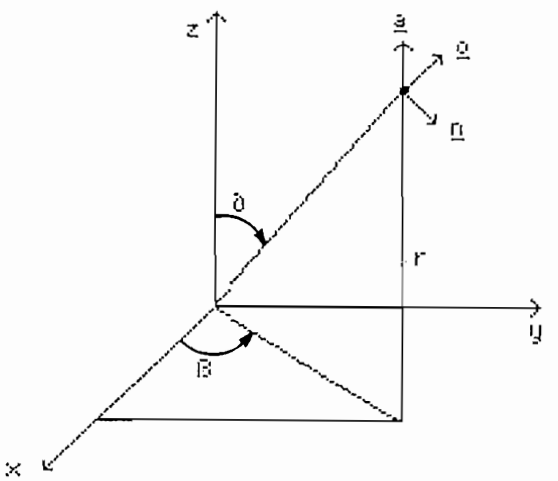


Figura 3.7 Coordenadas esféricas

$$\underline{S}\beta,\partial,z = \underline{R}\beta,z \begin{bmatrix} \cos\partial & 0 & \operatorname{sen}\partial & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\partial & 0 & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}\beta,\partial,z = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\partial & 0 & \operatorname{sen}\partial & r\operatorname{sen}\partial \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\partial & 0 & \cos\partial & r\cos\partial \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}\beta,\partial,z = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\partial & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta\operatorname{sen}\partial & r\cos\beta\operatorname{sen}\partial \\ \operatorname{sen}\beta\cos\partial & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\partial & r\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\partial \\ -\operatorname{sen}\partial & 0 & \cos\partial & r\cos\partial \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y para no tener la orientación de la mano expresada con respecto al sistema de coordenadas rotado, se posmultiplica la transformación por $\underline{R}(-\partial)$, y $\underline{R}(-\beta),z$. Obteniendose la matriz de transformación para coordenadas esféricas:

$$\underline{S}\beta,\partial,z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r\cos\beta\operatorname{sen}\partial \\ 0 & 1 & 0 & r\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\partial \\ 0 & 0 & 1 & r\cos\partial \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 ESPECIFICACION DE MATRICES $\underline{A}$.

Las transformaciones homogéneas que describen la relación entre los sistemas de coordenadas que identifican a dos elementos

adyacentes, se le conoce como matriz $\underline{A}$. Una matriz $\underline{A}$ describe las traslaciones y rotaciones relativas entre ambos sistemas; así, $\underline{A}1$ describe la posición y orientación del primer elemento respecto del soporte (sistema de referencia global), $\underline{A}2$ la del segundo respecto del primero, etc. La posición y orientación del segundo elemento con respecto a las coordenadas globales está dado por:

$$\underline{T}2 = \underline{A}1 \ \underline{A}2$$

este producto de matrices $\underline{A}$ se lo conoce historicamente como matrices $\underline{T}$, con el superíndice omitido cuando es cero (referido al sistema global). Para un manipulador de seis elementos se tiene:

$$\underline{T}6 = \underline{A}1 \ \underline{A}2 \ \underline{A}3 \ \underline{A}4 \ \underline{A}5 \ \underline{A}6$$

el manipulador de seis elementos (seis grados de libertad) puede ser posicionado y orientado, dentro de su zona de trabajo; de los seis grados de libertad, tres definen la posición del origen del sistema de referencia de la mano del manipulador y, los otros tres la orientación de la mano.

Para la especificación de las matrices $\underline{A}n$, se conoce que un manipulador está formado por una secuencia de elementos conectados entre sí por junturas móviles, formando pares cinemáticos. Para un manipulador de n grados de libertad se tienen n elementos y n junturas, por tanto, el elemento 1 está conectado al elemento base por la juntura 1 y así sucesivamente; no hay juntura al final del último elemento. Los distintos elementos que forman un manipulador se encargan de mantener fija la relación entre las junturas de elementos adyacentes.

Cada elemento está definido por dos condiciones: una distancia normal común entre los ejes localizados en las junturas adyacentes,

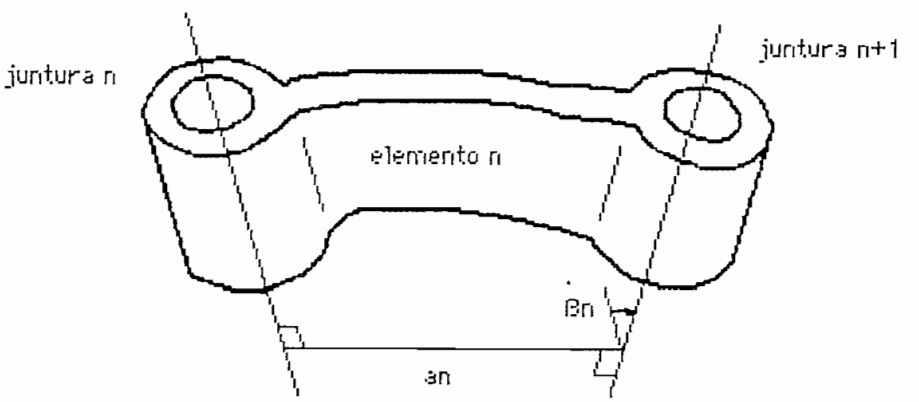


Figura 3.8 Longitud y ángulo de torsión para un elemento n.

llamada a_n y, el ángulo β_n entre los ejes de las junturas medido en un

plano perpendicular a a_n. A la distancia a_n se la denomina longitud del elemento y al ángulo β_n ángulo de torsión. En la figura 3.8 se muestra a un elemento n, en cuyos extremos se encuentran las junturas n y n+1 y, mostrando la distancia a_n y el ángulo β_n.

En la figura 3.9 se presenta una serie de elementos interconectados por sus respectivas junturas; se han identificado las longitudes de cada elemento y su ángulo de torsión. La distancia entre las normales a la juntura n se representa con d_n y el ángulo entre las normales medido en un plano normal al eje n se denomina ϕ_n. A esta

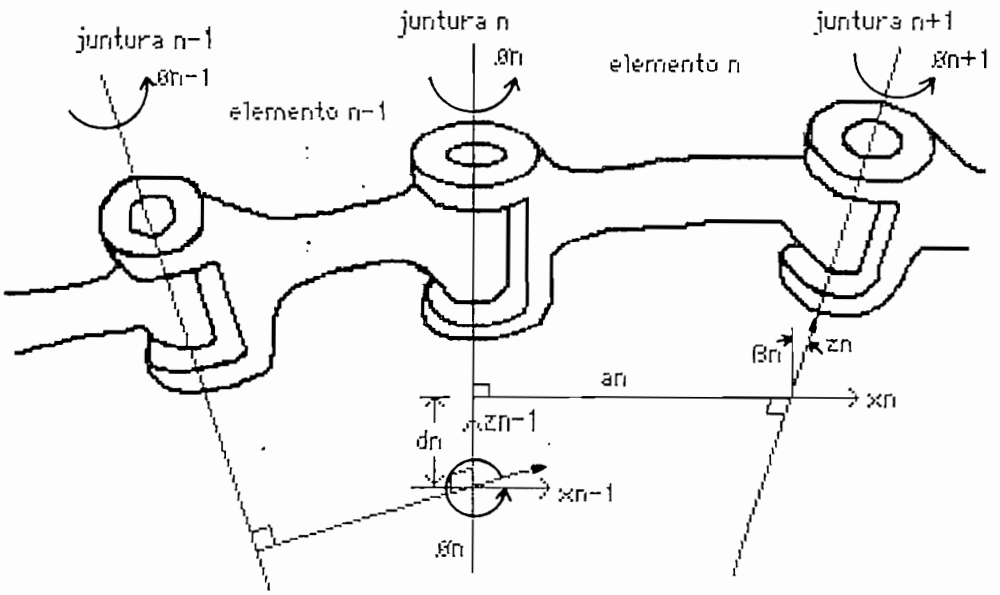


Figura 3.9 Parámetros de una serie de elementos y junturas

distancia y al ángulo se los conoce como distancia y ángulo entre elementos.

Para describir la relación entre elementos primero se asignan sistemas de coordenadas para cada uno. Considerando inicialmente las junturas revolutivas, donde la variable es el ángulo ϕ_n; el origen del sistema de coordenadas del elemento n se localiza en la intersección de la normal común entre los ejes de las junturan n y n+1 y el eje de la juntura n+1, si se diera el caso de que los ejes de las junturas se intersequen, el origen está en el punto de intersección y, si los ejes son paralelos, el origen se escoge de tal forma que la distancia entre los elementos d_n sea cero. El eje z para el elemento n está alineado con el eje de la juntura n+1 y, el eje x está en linea con la normal común entre los ejes de las junturas n y n+1; en caso de que haya intersección entre los ejes de las junturas, el vector x está en paralelo o antiparalelo al producto vectorial $\underline{z}_{n-1} * \underline{z}_n$.

Otro caso es el de las junturas prismáticas, como la de la figura 3.10, en las que la variable es la distancia d_n. La dirección del eje de juntura es la misma en la que se mueve la juntura; la longitud del

elemento a_n no tiene significado y se la considera igual a cero; entonces, el origen del sistema de coordenadas, para este tipo de juntura, coincide con el origen del sistema de coordenadas definido para el elemento siguiente. Los ejes se situan de la siguiente forma: el eje z alineado con el eje de la juntura n+1 y el eje x_n en paralelo o antiparalelo al producto vectorial de la dirección de desplazamiento de la juntura prismática y z_n.

Una vez que se han definido los sistemas de coordenadas para todos los elementos, de acuerdo a la descripción anterior, se puede

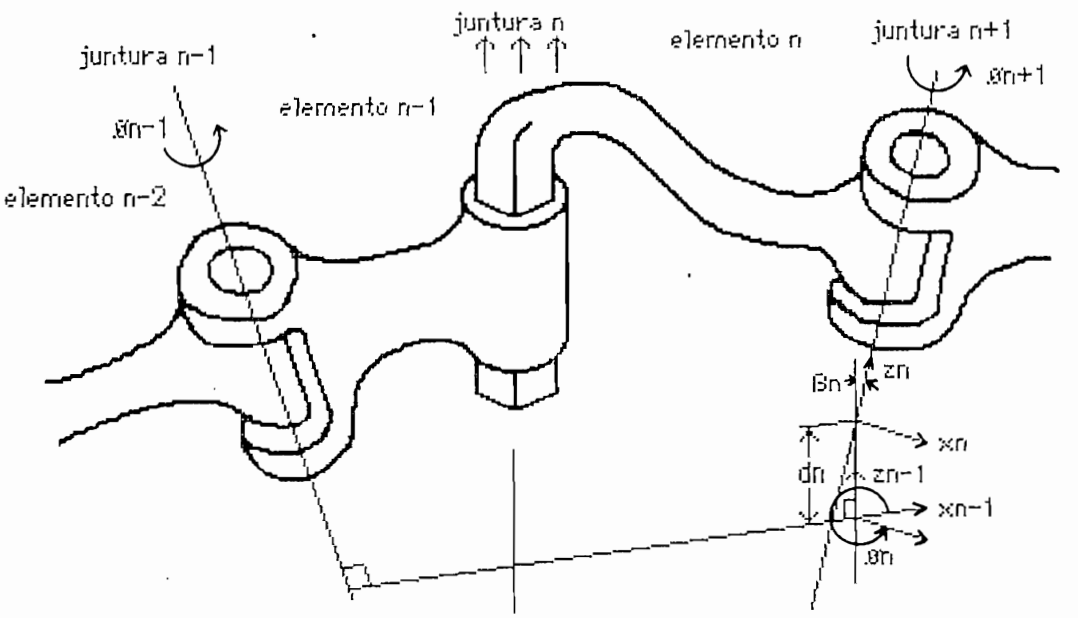


Figura 3.10 Parámetros para una juntura prismática

plantear la relación entre los sistemas n-1 y n de acuerdo con la secuencia siguiente:

a) rotación sobre el eje z_{n-1} un ángulo θ_n

b) traslación a lo largo del eje z_{n-1} una distancia d_n

c) traslación de una distancia a_n a lo largo del eje $x_{n-1} = x_n$

d) rotación al rededor del eje x_n un ángulo β_n

Utilizando un producto de matrices homogeneas que represente la secuencia anterior se obtiene la matriz $\underline{A}n$ (el sistema de coordenadas del elemento n en función del sistema de coordenadas del elemento n-1), entonces:

$$\underline{A}n = \underline{R}\theta,z \ \underline{T}d,z \ \underline{T}a,x \ \underline{R}\beta,x$$

$$\underline{A}n = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & \text{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y multiplicando se obtiene para la juntura revolutiva:

$$\underline{A}n = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi\cos\beta & \text{sen}\phi\,\text{sen}\beta & a\cos\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi\cos\beta & -\cos\phi\,\text{sen}\beta & a\,\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\beta & \cos\beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

para la juntura prismática $a = 0$, entonces:

$$\underline{A}n = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi\cos\beta & \text{sen}\phi\,\text{sen}\beta & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi\cos\beta & -\cos\phi\,\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & \text{sen}\beta & \cos\beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

Después de que se asignaron los sistemas de coordenadas a cada elemento, se puede calcular los parámetros constantes para cada juntura (por construcción); para la revolutiva la variable es ø y se conocen d, a y ß; para la prismática la variable es d y se conocen ø, a y ß, que dan la posición inicial.

3.5 ECUACIONES CINEMATICAS PARA LOS MANIPULADORES DE STANFORD Y DE ELBOW.

Primero se encontraran las ecuaciones cinemáticas para el manipulador de Stanford, mostrado en la figura 3.11, junto con unos posibles sistemas de coordenadas para cada uno de sus seis elementos. Este manipulador está compuesto de seis pares cinemáticos, de los

cuales cinco son de rotación (1, 2, 4, 5 y 6) y un prismático (3), como se puede ver en la figura 3.12.

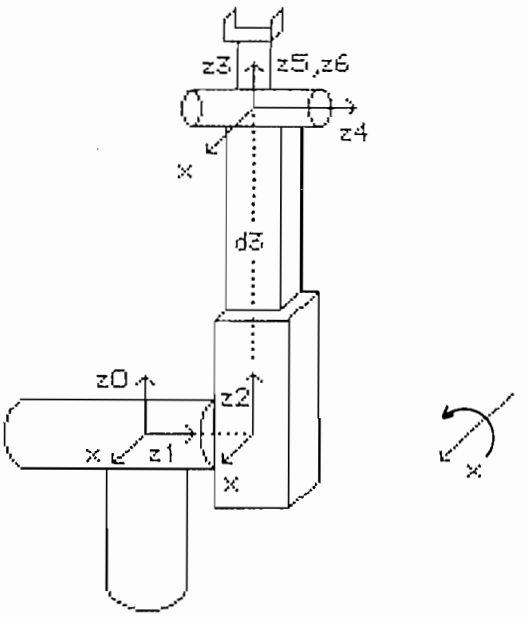


Figura 3.11 Manipulador de Stanford

Se usarán las siguientes notaciones para los funciones seno y coseno del ángulo ø involucradas en las matrices An:

$$\text{sen } \phi_i = S_i \tag{3.4}$$

$$\cos \phi_i = C_i \tag{3.5}$$

$$\text{sen}(\phi_i+\phi_j) = S_{ij} \tag{3.6}$$

$$\cos(\phi_i+\phi_j) = C_{ij} \tag{3.7}$$

En la figura 3.12 se muestra el esquema de pares cinemáticos para este manipulador.

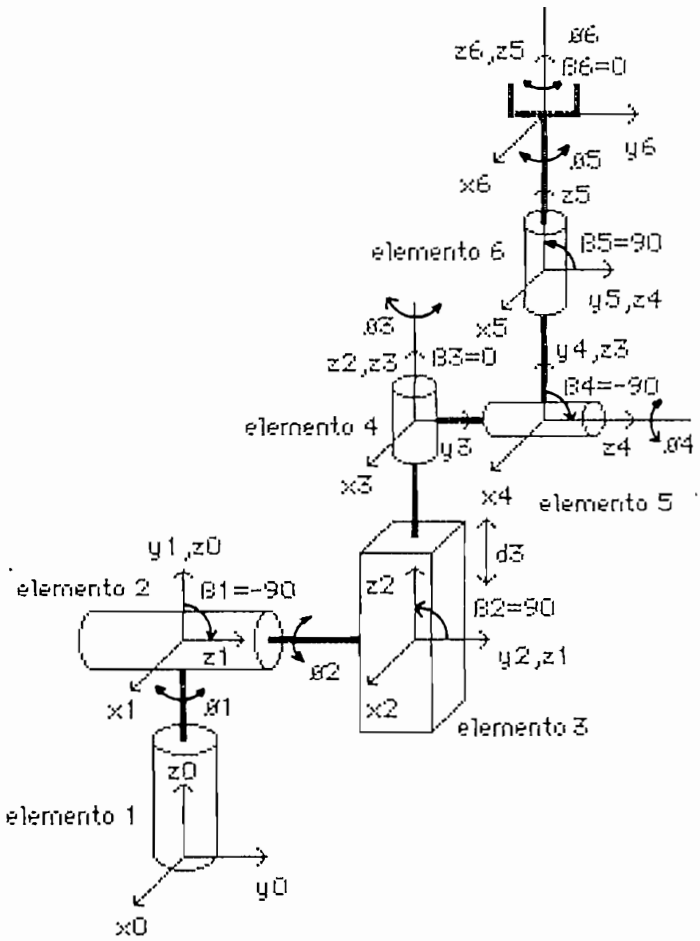


Figura 3.12 Pares cinemáticos y sistemas de coordenadas para el manipulador de Stanford.

Siguiendo los criterios del numeral anterior se asignan los ejes para cada uno de los pares cinemáticos, no obstante, se pueden tomar diferentes sistemas de coordenadas que se ajusten a las condiciones

fijadas para obtener las matrices $\underline{A}n$ y estén de acuerdo a la posición inicial asignada al manipulador; debido a esto, tanto las matrices $\underline{A}n$ como la matriz $\underline{T}6$ seran también diferentes.

Los ejes de la figura 3.12 se obtuvieron de la siguiente forma: primero se asigna un sistema de coordenadas (x_0, y_0, z_0) en la base del manipulador, con la única condición que z_0 tenga la misma dirección que el eje del par cinemático 1; los otros ejes (x_0, y_0) se escogen arbitrariamente. Para el eje z_1, se sabe que debe tener la misma dirección del eje del par cinemático 2; los ejes de los elementos 1 y 2 se cortan, el eje x_1 se define por el producto vectorial de los anteriores, como se puede ver en la figura 3.12, el sentido de este eje queda a elección. El ángulo β_1, de la manera como se lo definió en el numeral anterior, resulta ser de -90 grados. Igual procedimiento se sigue para los demás elementos. En lo que respecta a la mano del manipulador, el sistema de coordenadas (x_6, y_6, z_6) coincide con el sistema de coordenadas (x_5, y_5, z_5).

Para éste manipulador se cumple que: $d_4 = d_5 = d_6 = 0$ (elementos que constituyen la mano) y d_1 y d_2 son datos constructivos, siendo d_3 la variable correspondiente al par cinemático 3. Los parámetros de éste manipulador se recogen en la tabla 1.

ELEMENTO	VARIABLE	ß	a	d	ø	cosß	senß
1	$ø_1$	-90	0	0	0	0	-1
2	$ø_2$	90	0	d_2	0	0	1
3	d_3	0	0	d_3	0	1	0
4	$ø_4$	-90	0	0	0	0	-1
5	$ø_5$	90	0	0	0	0	1
6	$ø_6$	0	0	0	0	1	0

Tabla 1 Parámetros del manipulador de Stanford.

Reemplazando los parámetros de los elementos 1, 2, 4, 5, 6 en la ecuación (3.2) y los del elemento 3 en (3.3), se obtienen las matrices $\underline{A}1$, $\underline{A}2$, $\underline{A}4$, $\underline{A}5$, $\underline{A}6$ y $\underline{A}3$, respectivamente; utilizando las notaciones (3.4) y

(3.5), las matrices de elemento son:

$$\underline{A}1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}2 = \begin{pmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}4 = \begin{pmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}5 = \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}6 = \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para realizar el producto de las matrices, se empieza por la matriz del elemento 6 y se continúa hasta llegar a la base del manipulador.

$$ {}^{5}\underline{T}6 = \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{4}\underline{T}6 = \underline{A}5\ {}^{5}\underline{T}6 = \begin{pmatrix} C_5C_6 & -C_5S_6 & S_5 & 0 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{3}\underline{T}6 = \underline{A}_4\ {}^{4}\underline{T}6 = \begin{pmatrix} C_4C_5C_6-S_4S_6 & -C_4C_5S_6-S_4C_6 & C_4S_5 & 0 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5S_6+C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{2}\underline{T}6 = \underline{A}3\ {}^{3}\underline{T}6 = \begin{pmatrix} C_4C_5C_6-S_4S_6 & -C_4C_5S_6-S_4C_6 & C_4S_5 & 0 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5S_6+C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{1}\underline{T}6 = \underline{A}2\ {}^{2}\underline{T}6 = \begin{pmatrix} C_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)-S_2S_5C_6 & -C_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)+S_2S_5S_6 \\ S_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)+C_2S_5C_6 & -S_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)-C_2S_5S_6 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5S_6+C_4C_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

$$\begin{bmatrix} C_2C_4S_5+S_2C_5 & S_2d_3 \\ S_2C_4S_5-C_2C_5 & -C_2d_3 \\ S_4S_5 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}6 = \underline{A}1\ {}^{1}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & d_x \\ n_y & o_y & a_y & d_y \\ n_z & o_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde después de realizar el producto se tiene:

$$n_x = C_1[C_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)-S_2S_5C_6]-S_1(S_4C_5C_6+C_4S_6)$$

$$n_y = S_1[C_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)-S_2S_5C_6]+C_1(S_4C_5C_6+C_4S_6)$$

$$n_z = -S_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)-C_2S_5C_6$$

$$o_x = C_1[-C_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)+S_2S_5S_6]-S_1(-S_4C_5S_6+C_4C_6)$$

$$o_y = S_1[-C_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)+S_2S_5S_6]+C_1(-S_4C_5S_6+C_4C_6)$$

$$o_z = S_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)+C_2S_5S_6$$

$$a_x = C_1(C_2C_4S_5+S_2C_5)-S_1S_4S_5$$

$$a_y = S_1(C_2C_4S_5+S_2C_5)+C_1S_4S_5$$

$$a_z = -S_2C_4S_5 + C_2C_5$$

$$d_x = C_1S_2d_3 - S_1d_2$$

$$d_y = S_1S_2d_3 + C_1d_2$$

$$d_z = C_2d_3$$

Otra configuración de manipulador del que se va ha encontrar la matriz $\underline{I}6$ es el manipulador de Elbow; que se presenta en la figura 3.13, con los ejes para los distintos elementos.

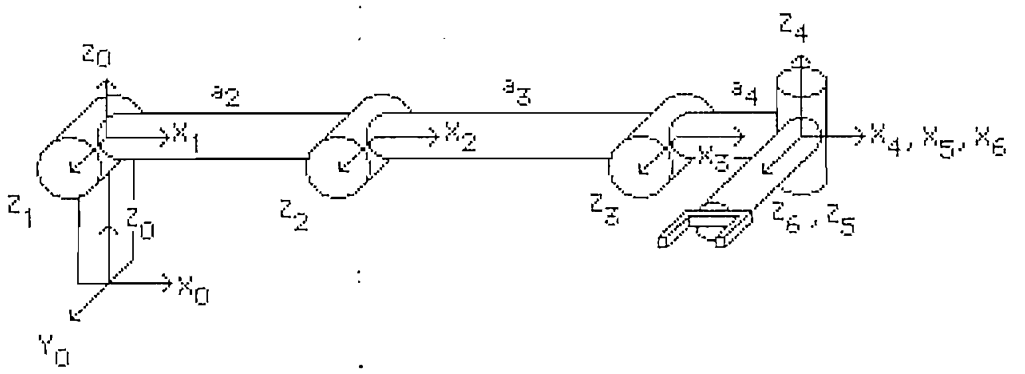


Figura 3.13 Manipulador de Elbow y sus sistemas de coordenadas para cada par cinemático.

La tabla 2 recoge los parámetros del manipulador de Elbow.

ELEMENTO	VARIABLE	ß	a	d	ø	cosß	senß
1	$ø_1$	90	0	0	0	0	1
2	$ø_2$	0	a_2	0	0	1	0
3	$ø_3$	0	a_3	0	0	1	0
4	$ø_4$	-90	a_4	0	0	0	-1
5	$ø_5$	90	0	0	0	0	1
6	$ø_6$	0	0	0	0	1	0

Tabla 2 Parámetros para el manipulador de Elbow.

Reemplazando los parámetros de la tabla 2 en la ecuación matricial (3.2), de cada elemento se obtiene una matriz $\underline{A}n$ respectiva.

$$\underline{A}1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}2 = \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}3 = \begin{pmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}4 = \begin{pmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & C_4a_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & S_4a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}5 = \begin{pmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}6 = \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para evaluar el producto de matrices $\underline{A}n$, se inicia como antes por el elemento 6. Se utilizaran las notaciones (3.6) y (3.7), además de los cambios de variables siguientes: para los ángulos ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4; $\phi_{23}=\phi_2+\phi_3$ y $\phi_{234}=\phi_{23}+\phi_4$.

$$^5\underline{T}6 = \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^{4}\underline{T}6 = \underline{A}5\,{}^{5}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C_5C_6 & -C_5S_6 & S_5 & 0 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}\underline{T}6 = \underline{A}4\,{}^{4}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6-S_4S_6 & -C_4C_5S_6-S_4C_6 & C_4S_5 & C_4a_4 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5S_6+C_4C_6 & S_4S_5 & S_4a_4 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\underline{T}6 = \underline{A}3\,{}^{3}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C_{34}C_5C_6-S_{34}S_6 & -C_{34}C_5S_6-S_{34}C_6 & C_{34}S_5 & C_{34}a_4+C_3a_3 \\ S_{34}C_5C_6+C_{34}S_6 & -S_{34}C_5S_6+C_{34}C_6 & S_{34}S_5 & S_{34}a_4+S_3a_3 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}\underline{T}6 = \underline{A}2\,{}^{2}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C_{234}C_5C_6-S_{234}S_6 & -C_{234}C_5S_6-S_{234}C_6 & C_{234}S_5 & C_{234}a_4+C_{23}a_3+C_2a_2 \\ S_{234}C_5C_6+C_{234}S_6 & -S_{234}C_5S_6+C_{234}C_6 & S_{234}S_5 & S_{234}a_4+S_{23}a_3+S_2a_2 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$\underline{T}6 = \underline{A}1 \; {}^{1}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & d_x \\ n_y & o_y & a_y & d_y \\ n_z & o_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$n_x = C_1(C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6) - S_1S_5S_6$$

$$n_y = S_1(C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6) + C_1S_5S_6$$

$$n_z = S_{234}C_5C_6 + C_{234}S_6$$

$$o_x = -C_1(C_{234}C_5S_6 + S_{234}C_6) + S_1S_5S_6$$

$$o_y = -S_1(C_{234}C_5S_6 + S_{234}C_6) - C_1S_5S_6$$

$$o_z = -S_{234}C_5S_6 + C_{234}C_6$$

$$a_x = C_{234}C_1S_5 + S_1C_5$$

$$a_y = C_{234}S_1S_5 - C_1C_5$$

$$a_z = S_{234}S_5$$

$$d_x = C_1(C_{234}a_4+C_{23}a_3+C_2a_2)$$

$$d_y = S_1(C_{234}a_4+C_{23}a_3+C_2a_2)$$

$$d_z = S_{234}a_4+S_{23}a_3+S_2a_2$$

3.6 DETERMINACION DE LA REGION ACCESIBLE PARA UN MANIPULADOR.

Después de conocer las propiedades fundamentales que caracterizan a las cadenas cinemáticas, es preciso analizar sus características geométricas.

En la figura 3.14, se muestra la región accesible o zona de trabajo de un robot plano de dos elementos, la mano no se considera; las conclusiones que se deduzcan pueden ser generalizadas al caso espacial añadiendo el elemento de soporte que puede girar al rededor de un eje vertical.

Las coordenadas del extremo del brazo (punto P) son:

$$x= L_1 \operatorname{sen}\phi_1 + L_2 \operatorname{sen}[180 - (\phi_1 + \phi_2)]$$

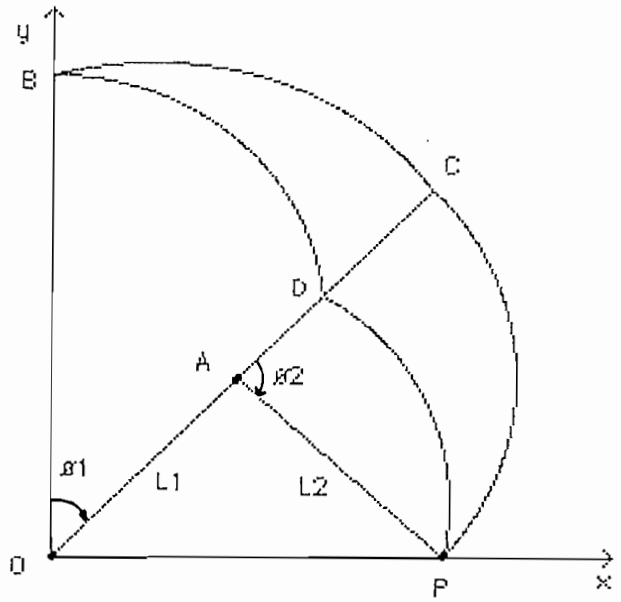


Figura 3.14 Región accesible para un manipulador de dos elementos.

$$y = L_1 \cos\phi_1 + L_2 \cos[180 - (\phi_1 + \phi_2)]$$

desarrollando el segundo miembro de ambas ecuaciones se llega a:

$$x = L_1 \operatorname{sen}\phi_1 + L_2 \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)$$

$$y = L_1 \cos\phi_1 + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

agrupando y elevando al cuadrado se tiene:

$$(x - L_1 \operatorname{sen}\phi_1)^2 = [L_2 \operatorname{sen}(\phi_1 + \phi_2)]^2$$

$$(y - L_1 \cos\phi_1)^2 = [L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)]^2$$

sumando ambas ecuacionas:

$$(x - L_1 \text{sen}\phi_1)^2 + (y - L_1 \cos\phi_1)^2 = L_2{}^2 \qquad (3.8)$$

aplicando la fórmula del coseno en la figura 3.14, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = L_1{}^2 + L_2{}^2 + 2L_1L_2\cos\phi_2 \qquad (3.9)$$

la ecuación (3.8) es función solo de ϕ_1 y representa una circunferencia con centro en el punto A y radio L_2; la ecuación (3.9) es función unicamente de ϕ_2 y representa una circunferencia. Si se supone que ϕ_1 y ϕ_2 pueden variar entre valores mínimos pocitivos (ϕ_{1m} y ϕ_{2m}) y valores máximos (ϕ_{1M} y ϕ_{1M}); entonces, en la figura 3.12 el tramo CP corresponde a ϕ_{1M} y ϕ_2 variando de mínimo a máximo; BC corresponde a ϕ_{2m} y ϕ_1 entre minimo y máximo; BD con ϕ_{1M} y ϕ_2 entre mínimo y máximo; DP con ϕ_{2M} y ϕ_1 entre mínimo y máximo. Con todos estos datos

se puede encontrar la región accesible para un robot de dos elementos, figura 3.13. En éste caso se ha considerado que $L_1 = L_2$ y, $ø_{1m} = 30$ grados, $ø_{1M} = 90$ grados, $ø_{2m} = 30$ grados y $ø_{2M} = 90$ grados; el área accesible es la superficie rayada de la figura 3.13.

La región de trabajo estará constituida por el volumen generado por el área accesible. Generalmente el área accesible o zona de trabajo es un dato que proporciona el fabricante del robot.

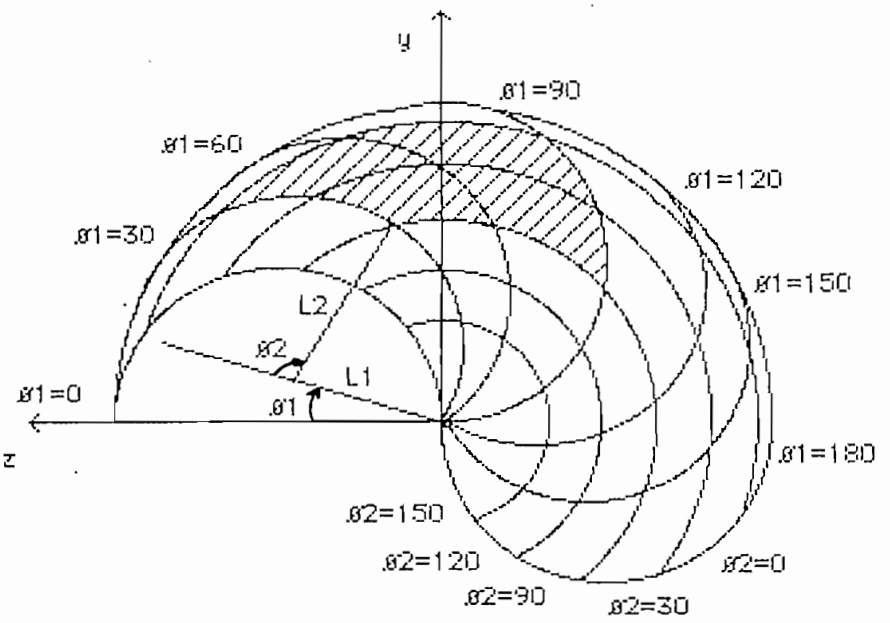


Figura 3.13 Región accesible para un robot.

Otro problema que se pesenta es el de obtener las longitudes

óptimas de los elementos para cubrir un área de trabajo dada, es decir, la síntesis de un brazo manipulador. Para un manipulador de dos elementos de las ecuaciones (3.8) y (3.9) se despejan los ángulos ϕ_1 y ϕ_2:

$$\phi_1 = \arccos \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \arccos \frac{(x^2+y^2)+(L_1^2-L_2^2)}{2L_1(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\phi_2 = \arccos \frac{(x^2+y^2)-(L_1^2+L_2^2)}{2L_1L_2}$$

estas ecuaciones se obtuvieron considerando que el punto fijo del robot se encuentra en el origen (x_0, y_0) del sistema de referencia; pero si éste punto pasa a ocupar otra posición cualquiera (x_1, y_1), las ecuaciones se transforman en:

$$\phi_1 = \arccos \frac{(y_1-y_0)}{[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]^{1/2}} -$$

$$- \arccos \frac{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+L_1^2-L_2^2}{2L_1[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]^{1/2}}$$

$$\phi_2 = \arccos \frac{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2-L_1{}^2-L_2{}^2}{2L_1L_2}$$

Para obtener la sintesis de un brazo manipulador de dos elementos, el extremo puede ocupar n posiciones (x_i, y_i) se procede de la siguiente manera:

1) Obtener los valores de x_M, y_M, x_m, y_m (valores máximos y mínimos) para los n puntos.

2) Definir una posición (x_0, y_0) para el punto fijo del robot.

3) Obtener el máximo valor de $[(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2]^{1/2} = d_i$ y hacer $L_1 = L_2 = 1/2\ d_i$.

4) Calcular los valores de ϕ_1 y ϕ_2, para todos los puntos y, encontrar ϕ_{1M}, ϕ_{1m}, ϕ_{2M}, ϕ_{2m}.

Si la posición fija (x_0, y_0) es invariante, el proceso termina aquí; caso contrario, hay que realizar un proceso iterativo de busqueda de una posición óptima para (x_0, y_0).

CAPITULO IV : APLICACIONES

4.1 OBTENCION DE LAS MATRICES $\underline{A}$ Y $\underline{T}6$

4.2 APLICACIONES DE LA DESCRIPCION CINEMATICA

4.3 NOCION DE TRAYECTORIAS

4.4 MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES

4.5 RESULTADOS

4.6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 OBTENCION DE MATRICES $\underline{A}$ Y $\underline{T6}$.

Como ya se mencionó en el numeral 3.4 del capítulo anterior, la matriz de transformación $\underline{T6}$ define la posición y orientación de la mano de un manipulador, respecto de un sistema de coordenadas global ubicado en la base del mismo; la matriz $\underline{T6}$ se obtiene al realizar el producto de las matrices de transformación $\underline{A}n$ o matrices de elemento. Para encontrar las matrices $\underline{A}n$, existen cuatro reglas fundamentales:

1- El eje z_{n-1} se localiza en la dirección del movimiento relativo permitido en el par cinemático.

2- El eje x_n es perpendicular al eje z_n y al eje z_{n-1}.

3- El eje y_n está definido por el producto vectorial entre los vectores unitarios $\underline{z}_n$ y $\underline{x}_n$ en la dirección de los ejes z_n y x_n, respectivamente; es decir:

$$\underline{y}_n = \underline{z}_n * \underline{x}_n$$

4- El origen del sistema de referencia del elemento n se encuentra en la intersección de la normal común entre los ejes de los pares n y n+1 y el eje del par n+1. En el caso de que los ejes se corten, el origen se localiza en el punto de intersección.

Cumpliendo con estas reglas, la posición del sistema de coordenadas de referencia global se escoge en cualquier punto de la base del manipulador, teniendo en cuenta que, el eje z_0 debe coincidir con la dirección del primer par cinemático.

Una vez que se definieron los ejes de coordenadas para todos los elementos, su representación depende de cuatro valores que identifican los pares cinemáticos, y son:

1- ϕ_n, es el ángulo del par cinemático o ángulo entre elementos, medido entre los ejes x_{n-1} y x_n, al rededor del eje z_{n-1} y desde x_{n-1} a x_n.

2- d_n, es la distancia entre el origen del sistema de coordenadas de referencia del elemento $n-1$ y el punto de intersección del eje z_{n-1} con el eje z_n, medida en la dirección del eje z_{n-1}.

3- a_n, es la longitud del elemento n, medida desde la intersección del eje z_{n-1} con el eje x_n hasta el origen del sistema de coordenadas de referencia del elemento n. Se puede difinir, también, como la distancia mínima entre los ejes z_{n-1} y z_n.

4- β_n, llamado ángulo de torsión del elemento, medido entre los ejes z_{n-1} y z_n, al rededor del eje x_n y desde z_{n-1} a z_n.

Siempre que se tenga una juntura revolutiva o par de rotación, el parámetro variable correspondiente al grado de libertad es el ángulo ϕ_n y, en una juntura prismática, es la distancia d_n. La posición inicial de cada una de las junturas del manipulador estará dada por los valores iniciales del parámetro variable de la juntura (dependiendo de la juntura), junto con los otros tres valores que son datos constructivos.

Con ayuda de los conceptos anteriores se va ha implementar un programa en computador digital, que permita calcular la matriz $\underline{T}6$; tanto para el manipulador de Stanford como para el de Elbow, con las siguientes características:

1- Un primer bloque de instrucciones, que forman el programa principal, donde se escoje el manipulador con el que se va ha trabajar y, después de escogido éste, muestre un menú con las diferentes opciones de trabajo.

2- Un segundo bloque, con una subrutina llamada "POSINICIAL:" para ingresar los datos de la posición inicial de las seis junturas del manipulador escogido y, llamar a la subrutina que calcula las matrices $\underline{A}n$ y $\underline{T}6$, para ésta posición inicial.

3- Un tercer bloque de instrucciones, con una subrutina llamada "CALCULOT6:", que calcule, secuencialmente, las matrices $\underline{A}n$ y, posteriormente, la matriz $\underline{T}6$.

A continuación se presentan los diagramas de flujo de los distintos bloques antes mencionados.

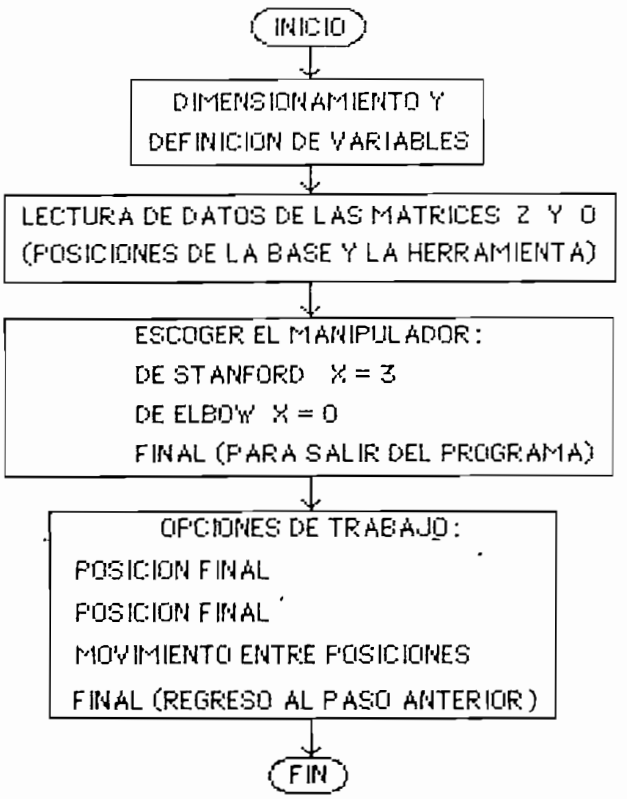


Figura 4.1 Diagrama de bloques del programa principal

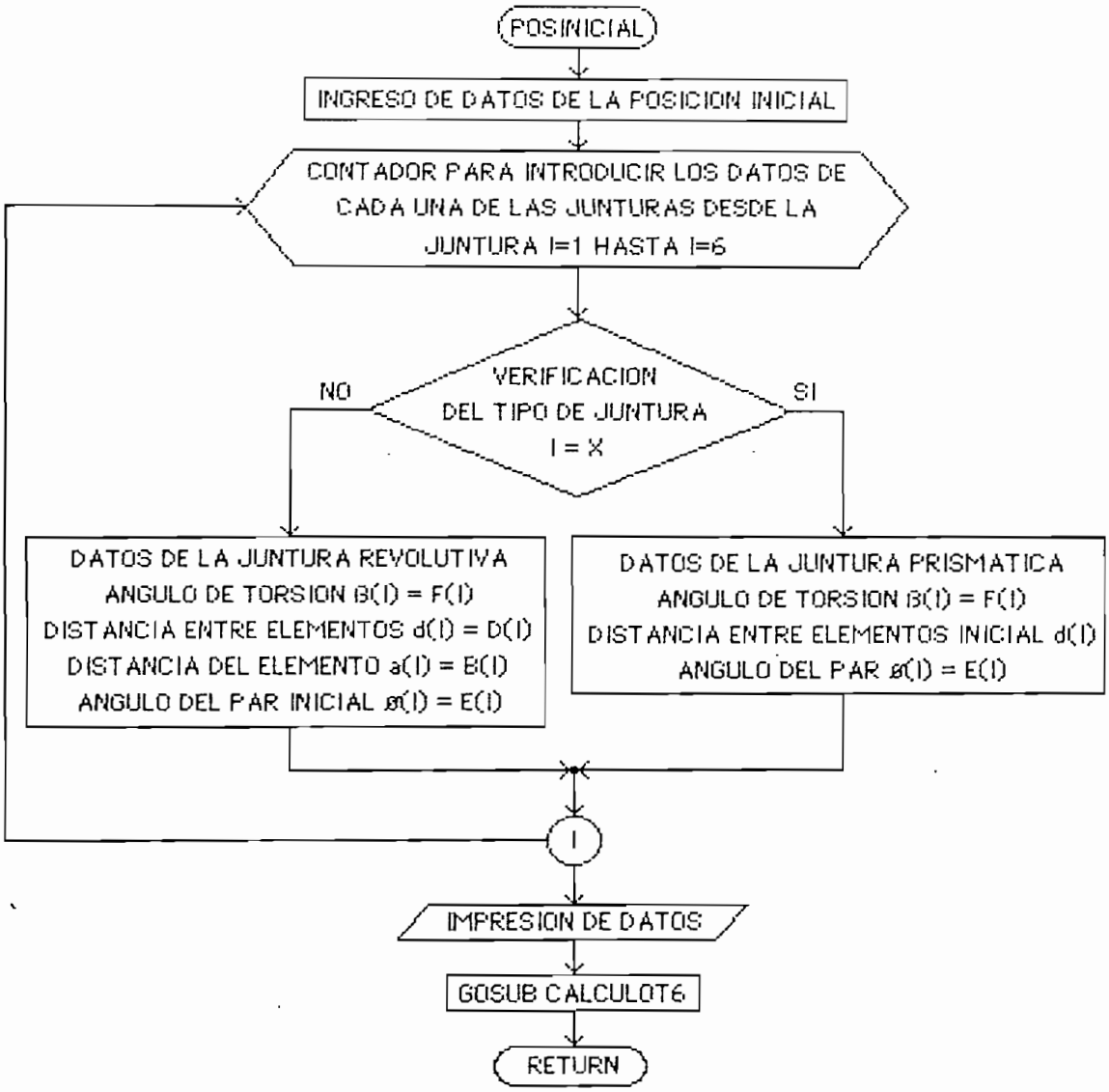


Figura 4.2 Diagrama de bloques del subprograma POSINICIAL

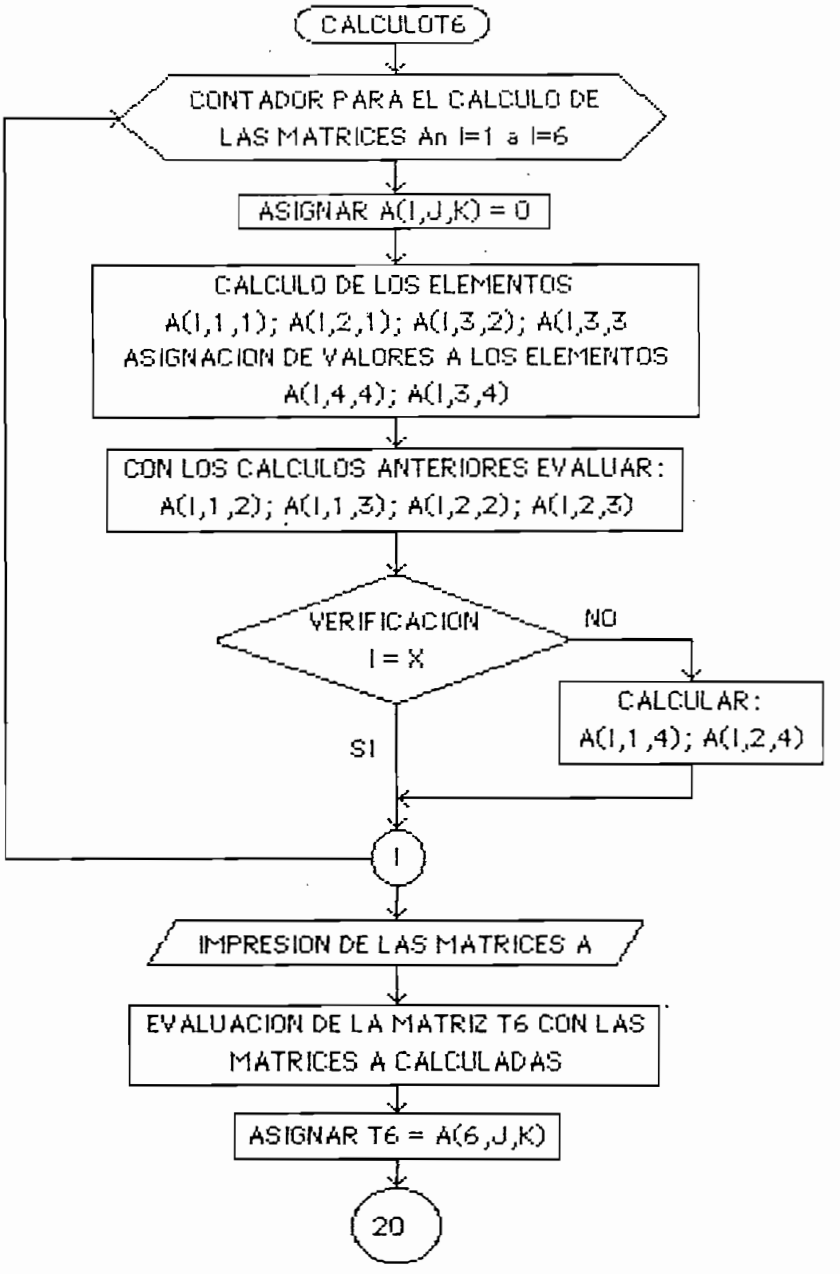


Figura 4.3 Diagrama de bloques del subprograma CALCULOT6

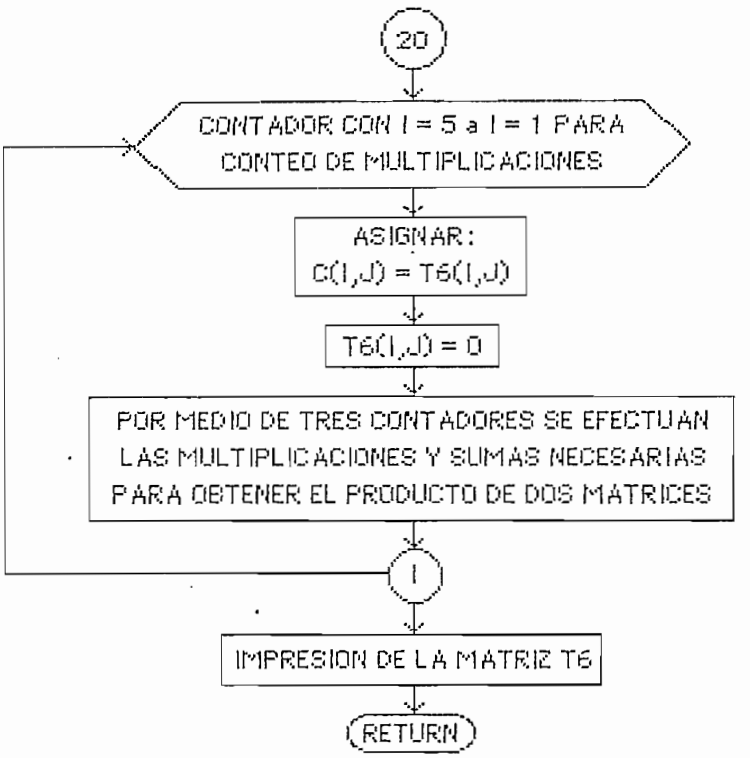


Figura 4.4 Continuación del diagrama de bloques para la subrutina "CALCULOT6"

LISTADO DE VARIABLES

VARIABLE	SIGNIFICADO
X	puede tomar los valores numéricos 3 o 0, dependiendo del manipulador escogido (Stanford o Elbow) y, representa el número de la juntura

que es prismática.

F(I) vector que contiene los valores de los ángulos de torsión de las seis junturas del manipulador, β_n.

D(I) vector con los valores de la distancia entre elementos de cada una de las seis junturas, d_n.

B(I) vector de dimensión 6 con los valores de la distancia del elemento, a_n.

E(I) vector .de dimensión 6 con los ángulos de los pares cinemáticos, ϕ_n.

A(I,J,K) conjunto de seis matrices 4x4, donde se guardan cada una de las seis matrices $\underline{A}n$ calculadas.

C(J,K) variable auxiliar de dimensión 4x4, usada para guardar los productos parciales que se obtienen antes de llegar a la matriz $\underline{T}6$.

T6(J,K) matriz 4x4 donde se almacena la matriz $\underline{T}6$ calculada.

4.2 APLICACIONES DE LA DESCRIPCION CINEMATICA.

Conociendo un punto determinado hacia el cual debe moverse o hacia el cual va ha llegar la mano del manipulador, entonces, éste punto se relaciona por medio de una matriz $\underline{T}6$ con el sistema de coordenadas en la base del manipulador. Para encontrar la matriz $\underline{T}6$ en la nueva posición es necesario conocer los valores que toman las variables de juntura, lo que se obtiene resolviendo la matriz $\underline{T}6$.

Encontrar la solución de la matriz $\underline{T}6$ es un problema dificil y, puede ser enfocado desde algunos puntos de vista, uno de los cuales, se presenta a continuación para el manipulador de Stanford: la matriz $\underline{T}6$, como se vió en el capítulo anterior, es igual a:

$$\underline{T}6 = \underline{A}1\ \underline{A}2\ \underline{A}3\ \underline{A}4\ \underline{A}5\ \underline{A}6$$

la solución se la obtiene de manera secuencial, aislando cada variable al premultiplicar a la matriz $\underline{T}6$ por cada una de las matrices $\underline{A}n$

invertidas; obteniéndose cinco ecuaciones matriciales:

$$\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{1}\underline{T}6 \qquad (4.1)$$

$$\underline{A}2^{-1}\,\underline{A}2^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{2}\underline{T}6 \qquad (4.2)$$

$$\underline{A}3^{-1}\,\underline{A}2^{-1}\,\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{3}\underline{T}6 \qquad (4.3)$$

$$\underline{A}4^{-1}\,\underline{A}3^{-1}\,\underline{A}2^{-1}\,\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{4}\underline{T}6 \qquad (4.4)$$

$$\underline{A}5^{-1}\,\underline{A}4^{-1}\,\underline{A}3^{-1}\,\underline{A}2^{-1}\,\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{5}\underline{T}6 \qquad (4.5)$$

los elementos de las matrices del lado izquierdo, de las ecuaciones anteriores, son función de los elementos de la matriz $\underline{T}6$ y de las primeras n-1 variables de juntura. Los elementos de las matrices del lado derecho son iguales a cero, constantes o función de la n-ésima a la sexta variables dé juntura. En las ecuaciones matriciales, al igualar elemento con elemento se obtienen doce ecuaciones de cada una, es decir, una ecuación para cada una de las componentes de los cuatro vectores $\underline{n}$, $\underline{o}$, $\underline{a}$ y $\underline{d}$.

Desarrollando la ecuación (4.1), se tiene:

$$\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = \underline{A}2\,\underline{A}3\,\underline{A}4\,\underline{A}5\,\underline{A}6 \qquad (4.6)$$

el lado izquierdo de la ecuación (4.6) es igual a:

$$\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C1 & S1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & d_x \\ n_y & o_y & a_y & d_y \\ n_z & o_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

del producto anterior se definen las siguientes tres relaciones:

$$f11 = C1\,x + S1\,y$$

$$f12 = -z$$

$$f13 = -S1\,x + C1\,y$$

y reemplazando en $\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6$, se tiene:

$$\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = \begin{bmatrix} f11(n) & f11(o) & f11(a) & f11(d) \\ f12(n) & f12(o) & f12(a) & f12(d) \\ f13(n) & f13(o) & f13(a) & f13(d) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

el lado derecho de la ecuación (4.6) se obtuvo en el capítulo anterior y es:

$${}^{1}\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)-S_2S_5C_6 & -C_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)+S_2S_5C_6 \\ S_2(C_4C_5C_6-S_4S_6)+C_2S_5C_6 & -S_2(C_4C_5S_6+S_4C_6)-C_2S_5S_6 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5C_6+C_4C_6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_2C_4S_5+S_2C_5 & S_2d_3 \\ S_2C_4S_5-C_2C_5 & -C_2d_3 \\ S_4S_5 & d_2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

todos los elementos de esta matriz son función de ϕ_2, d_3, ϕ_4, ϕ_5 y ϕ_6, exepto el elemento 3,4; igualandolo con el mismo elemento de la ecuación (4.7), se obtiene:

$$f13(d) = d_2$$

$$-S_1\, d_x + C_1\, d_y = d_2 \qquad (4.8)$$

haciendo las siguientes substituciones trigonométricas:

$$d_x = r\cos\beta$$

$$d_y = r\,\mathrm{sen}\beta$$

donde:

$$r = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$$

$$\beta = tg^{-1}(d_y/d_x)$$

substituyendo en la ecuación (4.8), se tiene:

$$\text{sen}\beta\,\cos\phi_1 - \cos\beta\,\text{sen}\phi_1 = d_2/r$$

$$\text{sen}(\beta-\phi_1) = d_2/r \qquad (4.9)$$

d_2 y r toman siempre valores pocitivos, entonces: $0 < d_2/r \leq 1$ y también: $0 < (\beta-\phi_1) < \pi$ el coseno se puede obtener utilizando la ecuación (4.9), como:

$$\cos(\beta-\phi_1) = \pm[1-(d_2/r)^2]^{1/2} \qquad (4.10)$$

donde el signo negativo corresponde a la configuración de hombro izquierdo y, el pocitivo a la configuración de hombro derecho.

Dividiendo la ecuación (4.9) para (4.10), se tiene:

$$\text{tg}(\beta-\phi_1) = \frac{d_2}{(r^2 + d_2^2)^{1/2}}$$

y despejando ϕ_1 se llega a:

$$\phi_1 = tg^{-1}\frac{d_y}{d_x} - tg^{-1}\frac{d_2}{(r^2 + d_2^2)^{1/2}} \qquad (4.11)$$

hay que tomar en cuenta que, cuando el denominador es negativo, al resultado obtenido de aplicar la función arcotangente es necesario sumarle 180 grados.

Teniendo determinado el ángulo ϕ_1, está definido el lado izquierdo de la ecuación (4.1), entonces, se buscan en el lado derecho de la ecuación otros elementos que sean función de otra de las variables de juntura y sea posible despejarla. Los elementos 1,4 y 2,4 son función de $S_2\, d_3$ y $C_2\, d_3$ teniendose:

$$S_2\, d_3 = C_1\, d_x + S_1\, d_y \qquad (4.12)$$

$$-C_2\, d_3 = -d_z \qquad (4.13)$$

como d_3 es la distancia variable de la juntura prismática, siempre será pocitiva y, al dividir las ecuaciones (4.12) y (4.13) se obtendrá una respuesta única:

$$\phi_2 = tg^{-1} \frac{C_1 d_x + S_1 d_y}{d_z} \qquad (4.14)$$

si $d_z < 0$, $\phi_2 = \phi_2 + 180$

Desarrollando la ecuación (4.2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} f21(n) & f21(o) & f21(a) & f21(d) \\ f22(n) & f22(o) & f22(a) & f22(d)-d_2 \\ f23(n) & f23(o) & f23(a) & f23(d) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^2\underline{T}6$$

donde:

$$f21 = C_2(C_1 x + S_1 y) - S_2 z$$

$$f22 = -S_1 x + C_1 y$$

$$f23 = S_2(C_1 x + S_1 y) + C_2 z$$

la matriz ${}^2\underline{T}6$ se obtuvo en el capítulo pasado para este manipulador y es:

$${}^2\underline{T}6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6-S_4S_6 & -C_4C_5S_6-S_4C_6 & C_4S_5 & 0 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5S_6+C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

igualando los elementos 3,4 se encuentra una expresión para d_3:

$$d_3 = S_2(C_1\, d_x + S_1\, d_y) + C_2\, d_z \qquad (4.15)$$

Desarrollando la ecuación (4.3), de igual manera que antes, se tiene:

$$\begin{bmatrix} f31(n) & f31(o) & f31(a) & f31(d) \\ f32(n) & f32(o) & f32(a) & f32(d)-d_2 \\ f33(n) & f33(o) & f33(a) & f33(d)-d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_4C_5C_6-S_4S_6 & -C_4C_5S_6-S_4C_6 & C_4S_5 & 0 \\ S_4C_5C_6+C_4S_6 & -S_4C_5S_6+C_4C_6 & S_4S_5 & 0 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de esta última ecuación matricial se verifica que f21=f31, f22=f32, f23=f33, por tanto, no es posible encontrar una relación que permita despejar la variable ϕ_4. Desarrollando la ecuación (4.4), se tiene:

$$\begin{bmatrix} f41(n) & f41(o) & f41(a) & 0 \\ f42(n) & f42(o) & f42(a) & 0 \\ f43(n) & f43(o) & f43(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5C_6 & -C_5S_6 & S_5 & 0 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

donde:

$$f41 = C_4[C_2(C_1\, x + S_1\, y) - S_2\, z] + S_4(-S_1\, x + C_1\, y)$$

$$f42 = -S_2(C_1\,x + S_1\,y) - C_2\,z$$

$$f43 = -S_4[C_2(C_1\,x + S_1\,y) - S_2\,z] + C_4(-S_1\,x + C_1\,y)$$

igualando los elementos 3,3, se llega a:

$$-S_4[C_2(C_1\,a_x + S_1\,a_y) - S_2\,a_z] + C_4(-S_1\,a_x + C_1\,a_y) = 0$$

$$S_4[C_2(C_1\,a_x + S_1\,a_y) - S_2\,a_z] = C_4(-S_1\,a_x + C_1\,a_y)$$

$$\frac{S_4}{C_4} = tg\phi_4 = \frac{-S_1\,a_x + C_1\,a_y}{C_2(C_1\,a_x + S_1\,a_y) - S_2\,a_z}$$

$$\phi_4 = tg^{-1}\,\frac{-S_1\,a_x + C_1\,a_y}{C_2(C_1\,a_x + S_1\,a_y) - S_2\,a_z} \qquad (4.17)$$

si el denominador es negativo, $\phi_4 = \phi_4 + 180$. Cuando tanto el numerador como el denominador de la ecuación (4.17) son iguales a cero, ocurre la degeneración del manipulador, es decir, los ejes de las junturas 4 y 6 están alineados perdiendose un grado de libertad. Igualando los elementos 1,3 y 2,3 de la ecuación matricial (4.16), se obtiene otra solución para el ángulo ϕ_4:

$$C_4 S_5 = C_2(C_1\, a_x + S_1\, a_y) - S_2\, a_z$$

$$S_4 S_5 = -S_1\, a_x + C_1 a_y$$

dividiendo las dos ecuaciones y despejando ϕ_4, se tiene para $S_5 > 0$:

$$\phi_4 = tg^{-1} \frac{-S_1\, a_x + C_1\, a_y}{C_2(C_1\, a_x + S_1\, a_y) - S_2\, a_z} \qquad (4.18)$$

y si $S_5 < 0$, entonces $\phi_4 = \phi_4 + 180$. Cuando $S_5 = 0$ entonces $\phi_5 = 0$, ocurre la degeneración del manipulador y hay libertad para escoger el valor del angulo ϕ_4.

De la ecuación (4.16), se puede obtener por inspección expresiones para S_5, C_5, S_6 y C_6; en estos casos en que tanto el coseno como el seno están ya definidos, se obtiene una solución única para la variable de juntura. Igualando los elementos 1,3 y 2,3:

$$S_5 = C_4[C_2(C_1\, a_x + S_1\, a_y) - S_2\, a_z] + S_4(-S_1\, a_x + C_1\, a_y)$$

$$C_5 = S_2(C_1\, a_x + S_1\, a_y) + C_2\, a_z$$

dividiendo y despejando ϕ_5, se tiene:

$$\phi_5 = tg^{-1}\,(S_5/C_5) \qquad (4.19)$$

si $C_5<0$, entonces, $\phi_5 = \phi_5 + 180$; y con S_5 y C_5 dados por las ecuaciones anteriores. Es posible obtener ecuaciones para S_6 y C_6 pero, la ecuación para S_6 es función de las componentes del vector $\underline{n}$, que normalmente no se lo conoce, ya que, viene a ser una información redundante (es igual al producto vectorial de los vectores $\underline{o}$ y $\underline{a}$); los datos disponibles son los vectores $\underline{o}$ y $\underline{a}$. Desarrollando la ecuación (4.5):

$$\begin{pmatrix} f51(n) & f51(o) & 0 & 0 \\ f52(n) & f52(o) & 0 & 0 \\ F53(n) & f53(o) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde:

$$f51 = C_5[C_4[C_2(C_1\, x + S_1\, y) - S_2\, z] + S_4(-S_1\, x + C_1\, y)] +$$

$$+S_5[-S_2(C_1\, x + S_1\, y) - C_2\, z]$$

$$f52 = -S_4[C_2(C_1\,x + S_1\,y) - S_2\,z] + C_4(-S_1\,x + C_1\,y)$$

$$f53 = S_5[C_4[C_2(C_1\,x + S_1\,y) - S_2\,z] + S_4(-S_1\,x + C_1\,y)] +$$

$$+ C_5[S_2(C_1\,x + S_1\,y) + C_2\,z]$$

igualando los términos 1,2 y 2,2:

$$S_6 = -C_5[C_4[C_2(C_1\,o_x + S_1\,o_y) - S_2\,o_z] + S_4(-S_1\,o_x + C_1\,o_y)] +$$

$$+ S_5[S_2(C_1\,o_x + S_1\,o_y) + C_2\,o_z]$$

$$C_6 = -S_4[C_2(C_1\,o_x + S_1\,o_y) - S_2\,o_z] + C_4\,(-S_1\,o_x + C_1\,o_y)$$

dividiendo y despejando se encuentra el ángulo ϕ_6:

$$\phi_6 = tg^{-1}\,(S_6/C_6) \qquad (4.20)$$

si $C_6 < 0$, entonces, $\phi_6 = \phi_6 + 180$.

Siempre que el valor del ángulo ϕ_4 esté indefinido, debido a la degeneración del manipulador, se debe asignar un valor a ϕ_4 y, con éste

nuevo dato, recalcular ϕ_5 y ϕ_6 con las ecuaciones anteriores.

Las ecuaciones (4.11), (4.14), (4.15), (4.17), (4.19) y (4.20) son las soluciones de la matriz $\underline{I}6$ del manipulador de Stanford y, como puede verse, son función de los vectores unitarios $\underline{o}$, $\underline{a}$ y $\underline{d}$ que definirán la nueva posición a la que se desea llevar al manipulador.

Siguiendo el mismo método, se obtendrá una solución para la matriz $\underline{I}6$ del manipulador de Elbow. Desarrollando la ecuación (4.1), con la matriz ${}^1\underline{I}6$ obtenida para este manipulador en el capítulo anterior, se tiene:

$$\underline{A}1^{-1}\ \underline{I}6 = {}^1\underline{I}6$$

$$\begin{bmatrix} f11(n) & f11(o) & f11(a) & f11(d) \\ f12(n) & f12(o) & f12(a) & f12(d) \\ f13(n) & f13(o) & f13(a) & f13(d) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{234}C_5C_6-S_{234}S_6 & -C_{234}C_5S_6-S_{234}C_6 & C_{234}S_5 & C_{234}a_4+C_{23}a_3+C_2a_2 \\ S_{234}C_5C_6+C_{234}S_6 & -S_{234}C_5S_6+C_{234}C_6 & S_{234}S_5 & S_{234}a_4+S_{23}a_3+S_2a_2 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

donde:

$$f11 = C_1\, x + S_1\, y$$

$$f12 = z$$

$$f13 = S_1\, x - C_1\, y$$

conociéndose que, C_{234} representa a $\cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$ y S_{234} a $\text{sen}(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$. Igualando los elementos 3,4 de la ecuación matricial anterior, se obtiene una expresión para ϕ_1:

$$f13(d) = 0$$

$$S_1\, d_x - C_1\, d_y = 0$$

$$S_1/C_1 = \text{tg}\, \phi_1 = d_y/d_x$$

$$\phi_1 = \text{tg}^{-1}(d_y/d_x) \qquad (4.22)$$

y si $d_x < 0$: $\phi_1 = \phi_1 + 180$

Como no es posible obtener más información de la ecuación matricial (4.21), se desarrollará, entonces, la ecuación (4.2):

$$\underline{A}2^{-1}\,\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{2}\underline{T}6$$

$$\begin{bmatrix} f21(n) & f21(o) & f21(a) & f21(d)-a_2 \\ f22(n) & f22(o) & f22(a) & f22(d) \\ f23(n) & f23(o) & f23(a) & f23(d) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{34}C_5C_6-S_{34}S_6 & -C_{34}C_5S_6-S_{34}C_6 & C_{34}S_5 & C_{34}a_4+C_3a_3 \\ S_{34}C_5C_6+C_{34}S_6 & -S_{34}C_5S_6+C_{34}C_6 & S_{34}S_6 & S_{34}a_4+S_3a_3 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$f21 = C_2(C_1\,x + S_1\,y) + S_2\,z$$

$$f22 = -S_2(C_1\,x + S_1\,y) + C_2\,z$$

$$f23 = S_1\,x - C_1\,y$$

después de observar la ecuación matricial planteada, se concluye que no es posible obtener información que lleve a encontrar una expresión para evaluar $ø_2$; si se desarrolla la ecuación (4.3) los resultados serán similares, la razón es que, las junturas 2, 3, 4 del manipulador son paralelas, como muestra la figura 3.13. Desarrollando ahora la ecuación (4,4) se tiene:

$$\underline{A}4^{-1}\,\underline{A}3^{-1}\,\underline{A}2^{-1}\,\underline{A}1^{-1}\,\underline{T}6 = {}^{4}\underline{T}6$$

$$\begin{pmatrix} f41(n) & f41(o) & f41(a) & 0 \\ f42(n) & f42(o) & f42(a) & 0 \\ f43(n) & f43(o) & f43(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_5C_6 & -C_5S_6 & S_5 & 0 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 & 0 \\ S_5 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

donde:

$$f41 = C_{234}(C_1\,x + S_1\,y) + S_{234}\,z$$

$$f42 = -(S_1\,x - C_1\,y)$$

$$f43 = -S_{234}(C_1\,x + S_1\,y) + C_{234}\,z$$

igualando los elementos 3,3:

$$f43(a) = 0$$

$$-S_{234}(C_1\,a_x + S_1\,a_y) + C_{234}\,a_z = 0$$

despejando ϕ_{234} se tiene:

$$\phi_{234} = tg^{-1}\,\frac{a_z}{C_1\,a_x + S_1\,a_y} \quad (4.24)$$

y si el denominador anterior es menor que cero: $\phi_{234} = \phi_{234} + 180$.

Volviendo a la ecuación (4.21) e igualando los elementos 1,4 y 2,4 , se encuentra:

$$f11(d) = C_{234}\, a_4 + C_{23}\, a_3 + C_2\, a_2$$

$$C_1\, d_x + S_1\, d_y = C_{234}\, a_4 + C_{23}\, a_3 + C_2\, a_2 \qquad (4.25)$$

$$f12(d) = S_{234}\, a_4 + S_{23}\, a_3 + S_2\, a_2$$

$$d_z = S_{234}\, a_4 + S_{23}\, a_3 + S_2\, a_2 \qquad (4.26)$$

utilizando las siguientes igualdades:

$$d_x' = C_1\, d_x + S_1\, d_y - C_{234}\, a_4$$

$$d_y' = d_z - S_{234}\, a_4$$

y substituyendo en las ecuaciones (4.25) y (4.26), respectivamente, se tiene:

$$d_x' = C_{23}\, a_3 + C_2\, a_2 \qquad (4.27)$$

$$d_y' = S_{23}\, a_3 + S_2\, a_2 \qquad (4.28)$$

elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas:

$$(d_x')^2 + (d_y')^2 = C_{23}^2 a_3^2 + C_2^2 a_2^2 + S_{23}^2 a_3^2 + S_2^2 a_2^2 +$$

$$+ 2C_{23}C_2 a_2 a_3 + 2S_{23}S_2 a_2 a_3$$

$$(d_x')^2 + (d_y')^2 = a_3^2 + a_2^2 + 2C_3 a_2 a_3$$

despejando C_3 :

$$C_3 = \frac{(d_x')^2 + (d_y')^2 - a_3^2 - a_2^2}{2a_3 a_2}$$

S_3 se encuentra mediante una relación tigonométrica conocida:

$$S_3 = \pm (1 - C_3^2)^{1/2}$$

donde el doble signo corresponde a dos configuraciones del manipulador, que son: Elbow-up signo pocitivo y Elbow-down signo negativo. Despejando ϕ_3 se tiene:

$$\phi_3 = tg^{-1} (S_3/C_3) \qquad (4.29)$$

las expresiones para S_2 y C_2 se las obtiene resolviendo en forma simultanea las ecuaciones (4.27) y (4.28), asi:

$$d_x' = C_2(C_3a_3 + a_2) - S_2S_3a_3$$

$$d_y' = C_2S_3a_3 + S_2(C_3a_3 + a_2)$$

$$S_2 = \frac{(C_3a_3 + a_2)d_y' - S_3a_3d_x'}{(C_3a_3 + a_2)^2 + S_3{}^2a_3{}^2}$$

$$C_2 = \frac{(C_3a_3 + a_2)d_x' + S_3a_3d_x'}{(C_3a_3 + a_2)^2 + S_3{}^2a_3{}^2}$$

dividiendo S_2 para C_2 y despejando ϕ_2, se tiene:

$$\phi_2 = tg^{-1} \frac{(C_3a_3 + a_2)d_y' - S_3a_3d_x'}{(C_3a_3 + a_2)d_x' + S_3a_3d_y'} \qquad (4.30)$$

con $\phi_2 = \phi_2 + 180$ si el denominador es negativo. Conocidos ϕ_2 y ϕ_3, se puede despejar ϕ_4, llegandose a:

$$\phi_4 = \phi_{234} - \phi_2 - \phi_3 \qquad (4.31)$$

volviendo a la ecuación (4.23), igualando los elementos 1,3 y 2,3, se encuentra una expresión para $ø_5$:

$$f41(a) = S_5$$

$$f42(a) = -C_5$$

reemplazando las expresiónes f41 y f42:

$$S_5 = C_{234}(C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{234} a_z$$

$$C_5 = S_1 a_x - C_1 a_y$$

dividiendo y despejando $ø_5$, se tiene:

$$ø_5 = tg^{-1} \frac{C_{234}(C_1 a_x + S_1 a_y) + S_{234} a_z}{S_1 a_x - C_1 a_y} \qquad (4.32)$$

con $ø_5 = ø_5 + 180$ cuando el denominador es negativo. Para encontrar una expresión que permita el cálculo de $ø_6$, se desarrolla la ecuación (4.5):

$$\underline{A}5^{-1}\ \underline{A}4^{-1}\ \underline{A}3^{-1}\ \underline{A}2^{-1}\ \underline{A}1^{-1}\ \underline{T}6 = {}^5\underline{T}6$$

$$\begin{bmatrix} f51(n) & f51(o) & 0 & 0 \\ f52(n) & f52(o) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$f51 = C_5[C_{234}(C_1\,x + S_1\,y) + S_{234}\,z] - S_5(S_1\,x - C_1\,y)$$

$$f52 = -S_{234}(C_1\,x + S_1\,y) + C_{234}\,z$$

obteniéndose por inspección:

$$S_6 = -C_5[C_{234}(C_1 o_x + S_1 o_y) + S_{234} o_z] - S_5(S_1 o_x - C_1 o_y)$$

$$C_6 = -S_{234}(C_1 o_x + S_1 o_y) + C_{234} o_z$$

dividiendo y despejando ϕ_6 se llega a:

$$\phi_6 = tg^{-1}(S_6/C_6) \qquad (4.33)$$

si $C_6 < 0$, entonces, $\phi_6 = \phi_6 + 180$.

Las ecuaciones (4.22), (4.30). (4.29), (4.31), (4.32) y (4.33) constituyen las soluciones de la matriz $\underline{T}6$ del manipulador de Elbow, y son función de los vectores $\underline{a}$, $\underline{o}$ y $\underline{d}$ que ingresan como datos de una posición final.

A continuación en las figuras 4.5 a 4.12 se presentan los diagramas de flujo que permitiran encontrar las soluciones de la matriz $\underline{T}6$, primero para el manipulador de Stanford y luego para el de Elbow.

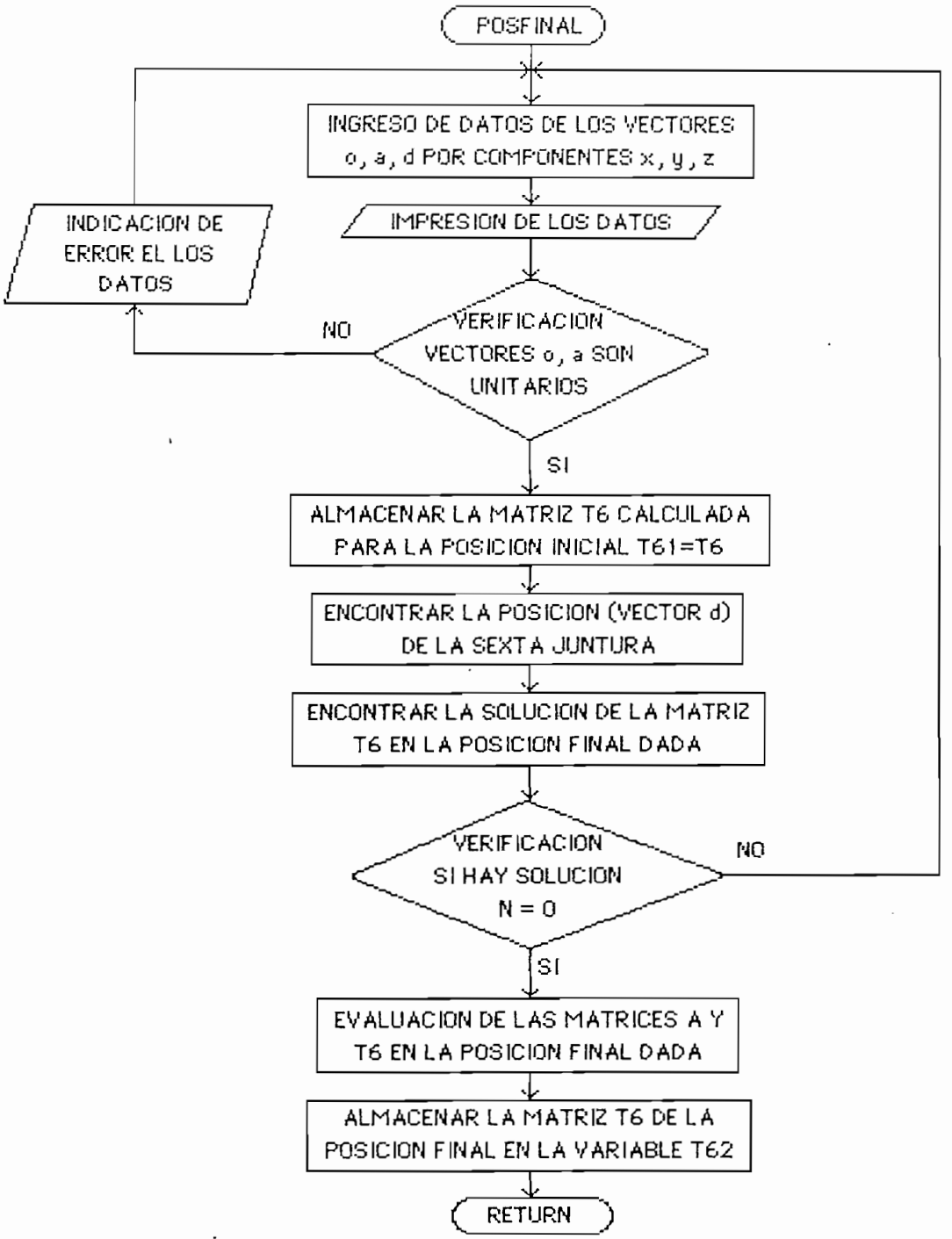


Figura 4.5 Diagrama de flujo del subprograma "POSFINAL"

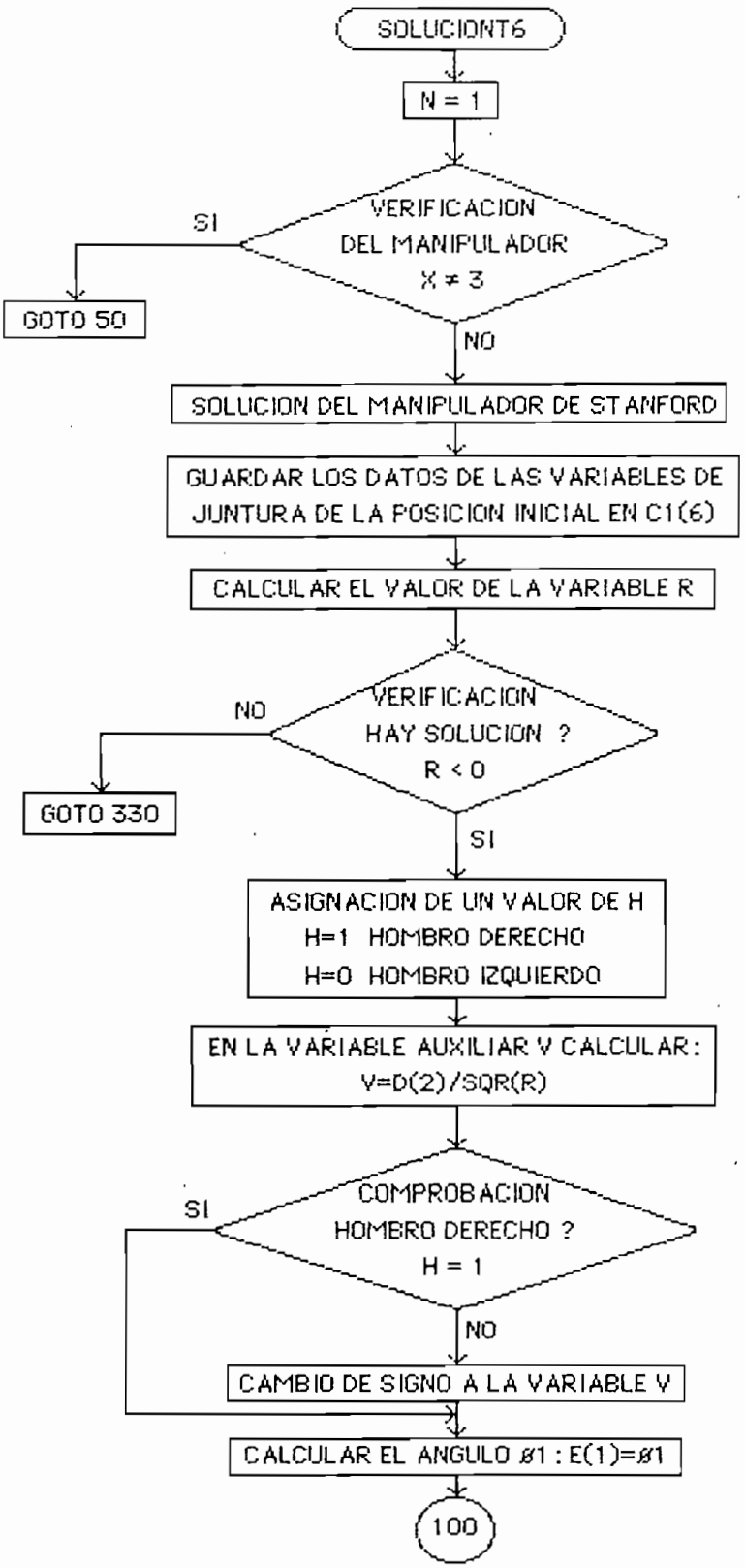


Figura 4.6 Diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

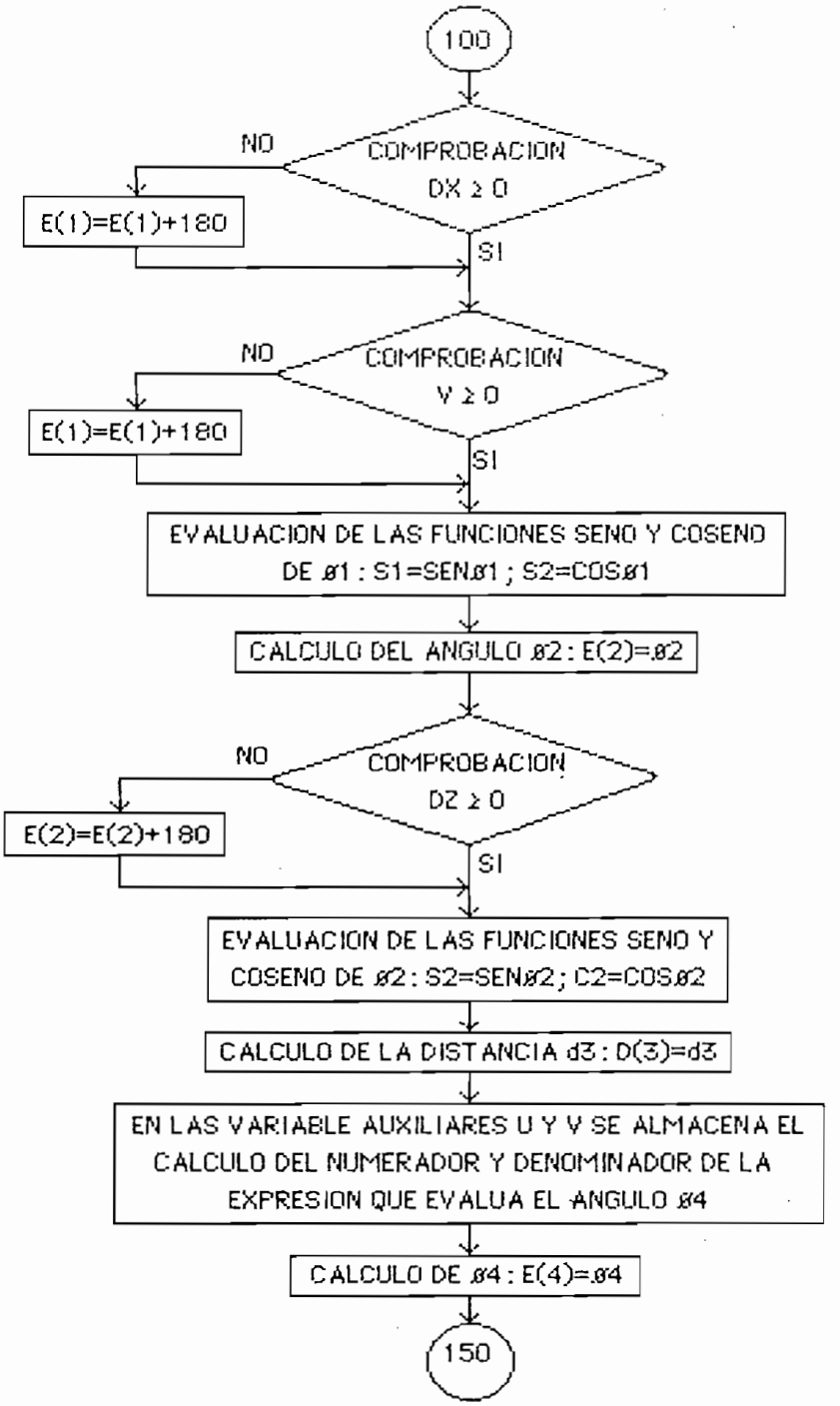


Figura 4.7 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

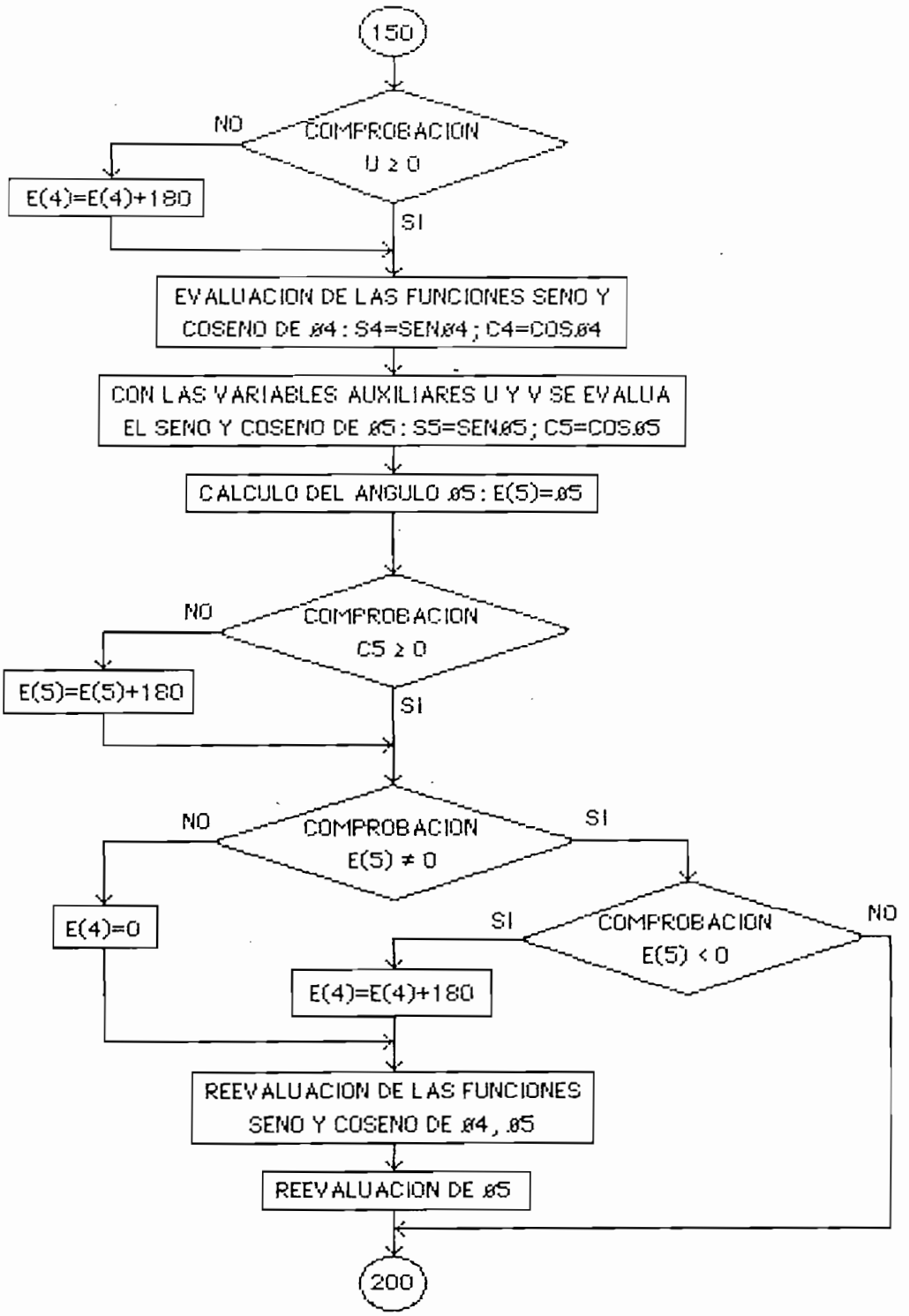


Figura 4.8 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

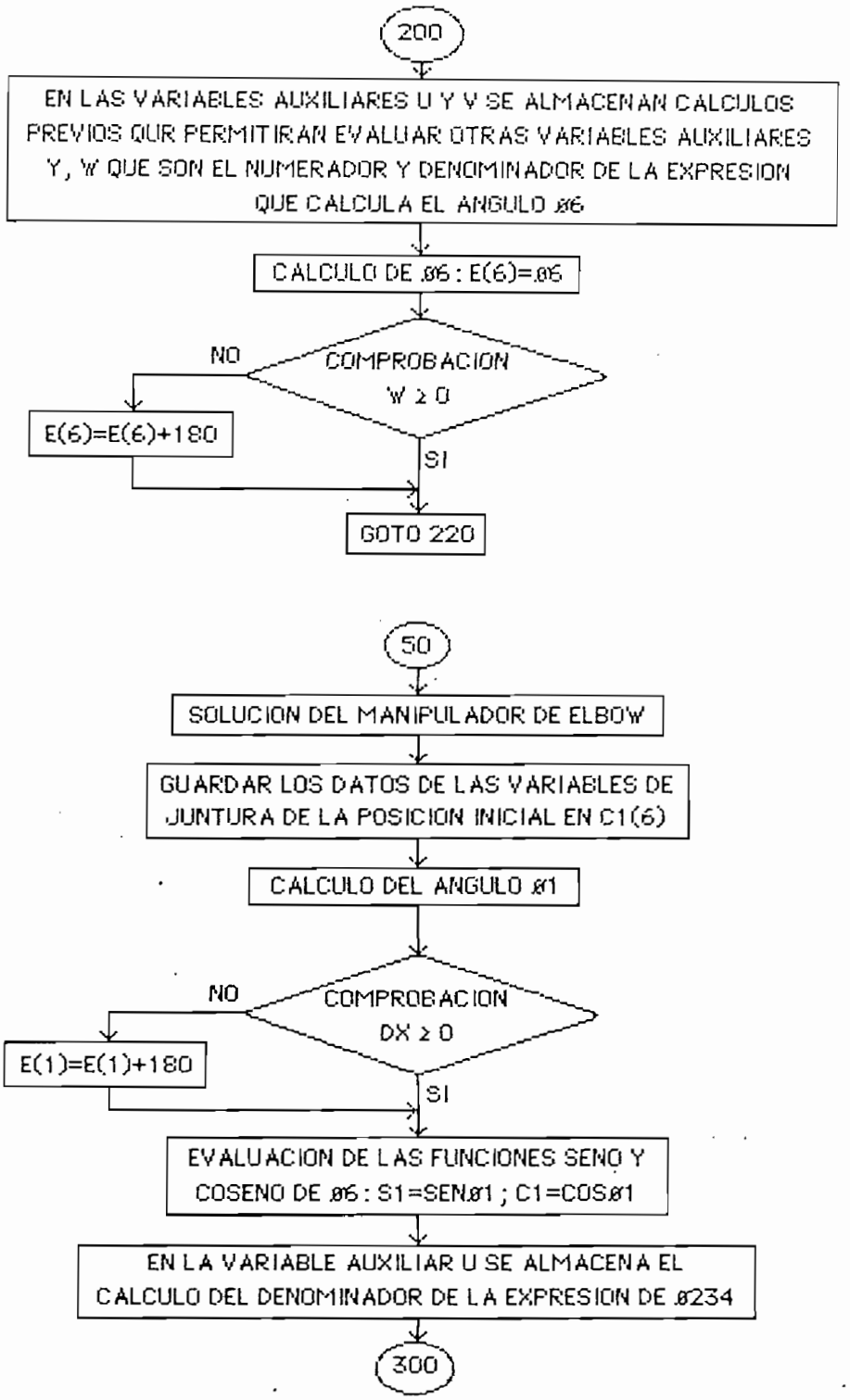


FIGURA 4.9 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

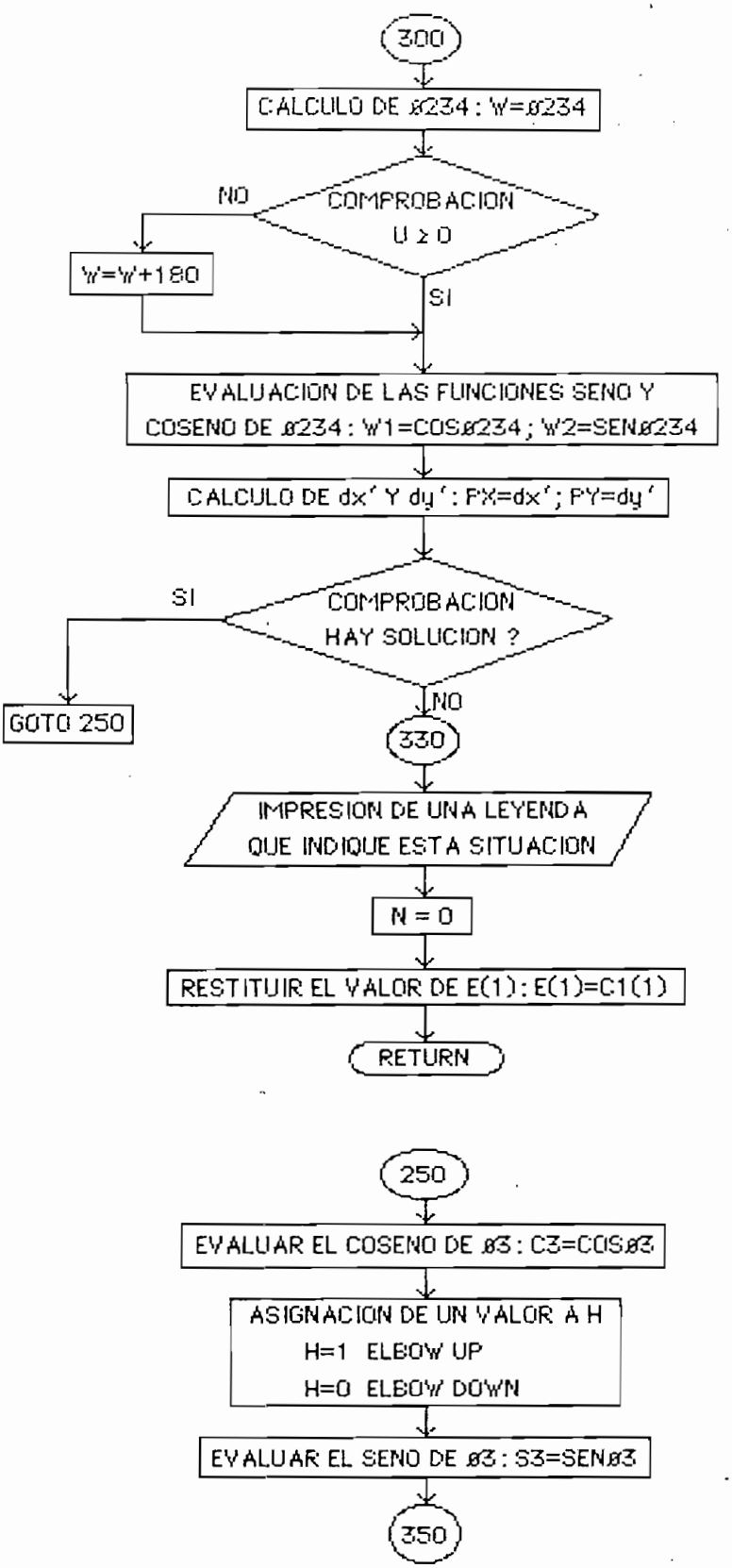


Figura 4.10 Diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

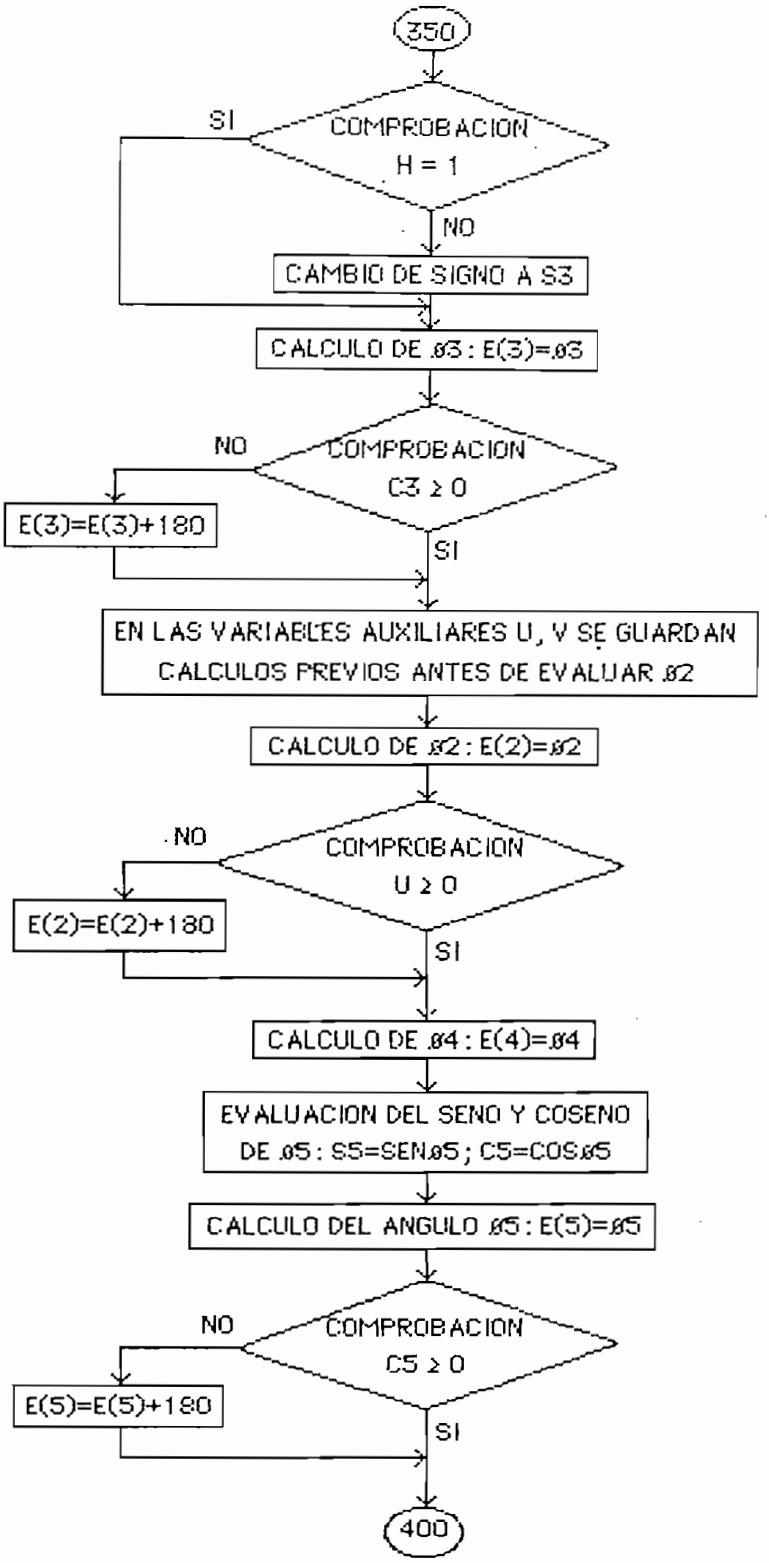


Figura 4.11 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

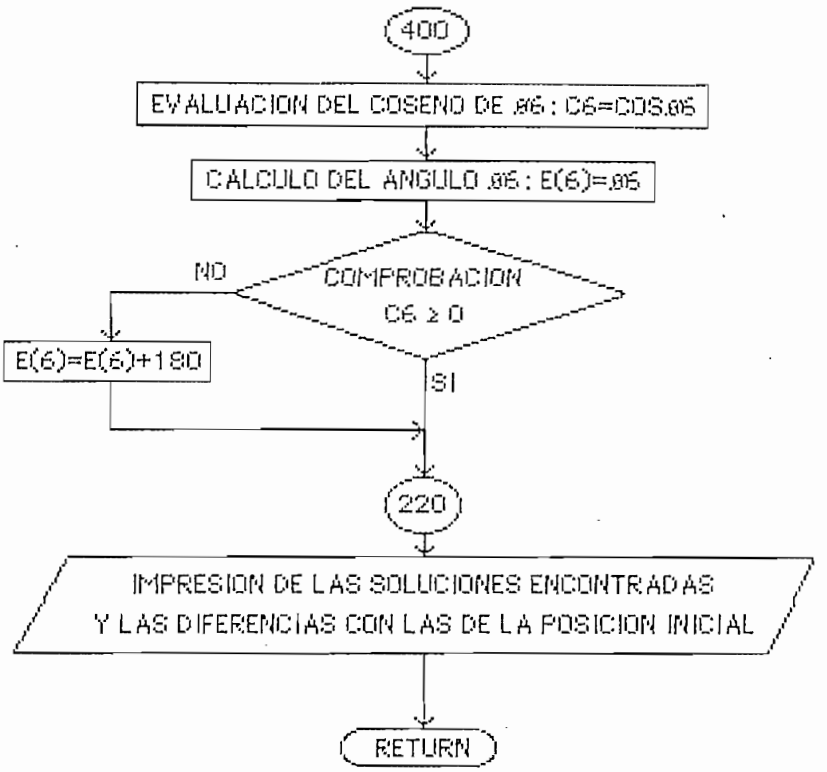


Figura 4.12 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONT6"

LISTADO DE VARIABLES

VARIABLE	SIGNIFICADO
OX, OY, OZ	componentes x, y, z, respectivamente, del vector o que ingresan como datos de la posición final.
AX, AY, AZ	componentes x, y, z, respectivamente, del vector

a que ingresan como datos de la posición final.

DX, DY, DZ — componentes x, y, z, respectivamente, del vector d que ingresa como datos de la posición final.

R — variable auxiliar donde se almacena un cálculo previo que servirá para conocer si existe una solución y para evaluar ϕ_1.

V — variable auxiliar cuyo signo depende del tipo de configuración utilizada antes de evaluar ϕ_1; también se usará para calcular ϕ_4, ϕ_5, ϕ_6.

H — variable en la que se asigna el valor 0 o 1 dependiendo de la configuración escogida.

S1,S2,S4,S5,S6 — variables con los valores calculados del seno de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4, ϕ_5, ϕ_6.

C1,C2,C4,C5,C6 — variables con los valores calculados del seno de

$ø_1$, $ø_2$, $ø_4$, $ø_5$, $ø_6$.

Y : variable auxiliar antes del cálculo de ø6.

U : variable auxiliar usada antes de evaluar $ø_4$, $ø_5$, $ø_6$, $ø_{234}$.

W : variable auxiliar usada antes de evaluar $ø_6$ y donde se guarda el valor calculado del ángulo $ø_{234}$.

W1, W2 : guardan los valores del coseno y seno calculados de $ø_{234}$, respectivamente.

PX, PY : guardan los valores calculados de las variables d_x' y d_y', respectivamente.

C1(6) : vector donde se almacenan los valores de las variables de juntura de la posición inicial.

4.3 NOCION DE TRAYECTORIAS.

El movimiento del manipulador consiste en el desplazamiento de la mano de sujeción o de la herramienta, desde una posición hasta otra. En éste desplazamiento, las posiciones extremas son conocidas, pero, en principio, las posiciones intermedias no lo son.

Como muestra la figura 2.4, el sistema de coordenadas en la base del manipulador está expresado, respecto a otro sistema de referencia global, por la matriz $\underline{Z}$; la razón es que, si se toma como referencia global el sistema en la base del manipulador, éste no podría alcanzar el origen debido a limitaciones físicas. Generalmente los ejes del sistema global se escogen paralelos a los del manipulador, por tanto, la matriz $\underline{Z}$ será sólo de traslación. Por otro lado, el sistema de coordenadas de la mano se encuentra desplazado una distancia, respecto al origen del sistema de coordenadas del par cinemático seis en la dirección del eje z; entonces, existirá una matriz $\underline{E}$ que relaciona estos dos sistemas y será sólo de traslación.

La posición y orientación de la mano del manipulador, respecto al sistema global será descrita por: $\underline{Z}\,\underline{T}6\,\underline{E}$

y la de un objeto (según la figura 4.13) por: B H

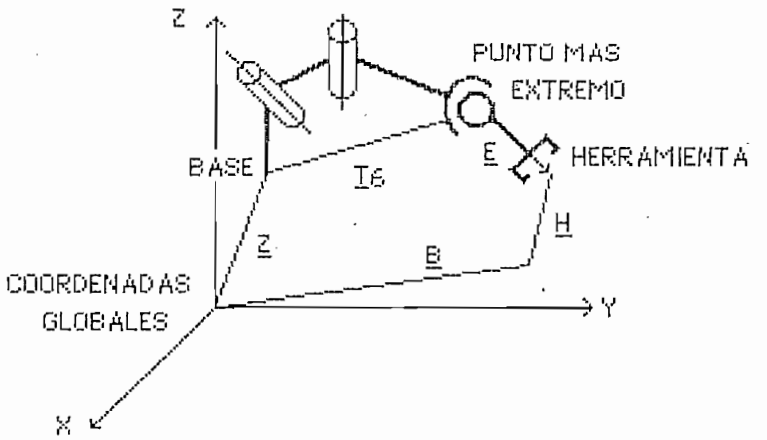


Figura 4.13 Descripción de la posición y orientación.

igualando las dos últimas descripciones se tiene:

$$Z\ T6\ E = B\ E$$

donde:

Z matriz que representa la posición del manipulador respecto al sistema de coordenadas global.

T6 matriz que representa la orientación y posición del punto más extremo del manipulador (juntura seis), respecto de su base.

$\underline{E}$ matriz que representa a la mano o herramienta, respecto al punto extremo del manipulador.

$\underline{B}$ representa la posición del sistema de coordenadas de un objeto, con respecto al sistema de coordenadas global.

$\underline{H}$ representa a la mano o herramienta del manipulador, respecto al sistema de coordenadas de un objeto.

La matriz $\underline{B}$, en el caso más general, será variable en el tiempo $\underline{B}(t)$ y, para mayor comodidad, se denominará como $\underline{S}(t)$ al producto:

$$\underline{Z}^{-1}\,\underline{B}(t) = \underline{S}(t)$$

entonces, la posición del manipulador se expresará como:

$$\underline{T6}\,\underline{E} = \underline{S}(t)\,\underline{H}$$

Para realizar una tarea que consista en llevar al manipulador desde un punto inicial 1 hasta un punto final f, a través de los puntos 2,3,4,...,(f-1), las ecuaciones que definen las posiciones son:

$$\underline{T6}^{1}\,\underline{E}_{1} = \underline{S}_{1}\,\underline{H}_{1}$$

$$\underline{T6}^{2}\,\underline{E}_{2} = \underline{S}_{2}\,\underline{H}_{2}$$

$$\underline{T6}^{f-1}\,\underline{E}_{f-1} = \underline{S}_{f-1}\,\underline{H}_{f-1}$$

$$\underline{T6}^{f}\,\underline{E}_{f} = \underline{S}_{f}\,\underline{H}_{f}$$

Dos posiciones consecutivas, cualesquiera, se definen por:

$$\underline{T6}^{i} = \underline{S}_{i}\,\underline{H}_{i}\,\underline{E}_{i}^{-1}$$

$$\underline{T6}^{i+1} = \underline{S}_{i+1}\,\underline{H}_{i+1}\,\underline{E}_{i+1}^{-1}$$

las matrices $\underline{S}$ y $\underline{E}$ están definidas sólo en las posiciones extremas i e i+1, entonces, en los puntos intermedios puede elegirse cualquier combinación de ellas. Un tipo de movimiento entre puntos es el llamado cartesiano, el cual, inicia el movimiento en el punto i, poniendo a la mano de sujeción en la orientación que se desea tenga cuando esté en el

punto i+1, para luego realizar una traslación entre los dos puntos. Para conseguir ésto, se redefine la posición i en términos de las matrices $\underline{E}_{i+1}$ y $\underline{S}_{i+1}$. En la posición i se tiene:

$$\underline{T6}^{i}\,\underline{E}_{i} = \underline{S}(0)_{i}\,\underline{H}_{i}^{\,i} \qquad (4.34)$$

donde $\underline{S}$ se evalua en el instante t=0 (al inicio del movimiento) y el superíndice i de la matriz $\underline{H}_{i}$, indica que ha sido definida con respecto a $\underline{E}_{i}$ y $\underline{S}_{i}$. También, se puede escribir una segunda expresión con la misma matriz $\underline{T6}^{i}$ pero en términos de las matrices $\underline{E}_{i+1}$ y $\underline{S}_{i+1}$, como muestra la figura 4.14:

$$\underline{T6}^{i}\,\underline{E}_{i+1} = \underline{S}(0)_{i+1}\,\underline{H}_{i}^{\,i+1} \qquad (4.35)$$

donde $\underline{S}(0)_{i+1}$ es la matriz del movimiento entre los puntos i+1 e i+2, en el instante t=0. Despejando de la ecuación (4.35) $\underline{H}_{i}^{\,i+1}$, se llega a:

$$\underline{H}_{i}^{\,i+1} = \underline{S}(0)_{i+1}^{\,-1}\,\underline{T6}^{i}\,\underline{E}_{i+1} \qquad (4.36)$$

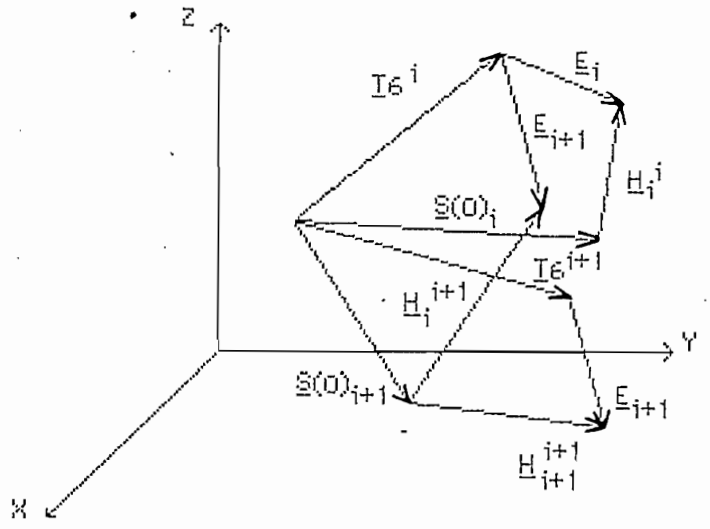


Figura 4.14 Relación entre las posiciones i e i+1.

y de (4.34) se despeja $\underline{T}6^{i}$, obteniendose:

$$\underline{T}6^{i} = \underline{S}(0)_{i}\, \underline{H}_{i}^{\,i}\, \underline{E}_{i}^{\,-1}$$

substituyendo esta última ecuación en (4.36), se encuentra que:

$$\underline{H}_{i}^{\,i+1} = \underline{S}(0)_{i+1}^{\,-1}\, \underline{S}(0)_{i}\, \underline{H}_{i}^{\,i}\, \underline{E}_{i}^{\,-1}\, \underline{E}_{i+1}$$

y reemplazando en la ecuación (4.34):

$$\underline{H}_{i}^{\,i+1} = \underline{S}(0)_{i+1}^{\,-1}\, \underline{T}6^{i}\, \underline{E}_{i+1}$$

Entonces, el movimiento entre dos puntos i e i+1 es el paso desde unas posiciones definidas por:

$$\underline{T}6^{i} = \underline{S}(t)_{i+1}\ \underline{H}_{i}{}^{i+1}\ \underline{E}_{i+1}{}^{-1}$$

hasta otras dadas por:

$$\underline{T}6^{i+1} = \underline{S}(t)_{i+1}\ \underline{H}_{i+1}{}^{i+1}\ E_{i+1}{}^{-1} \qquad (4.37)$$

El problema del movimiento entre dos posiciones consiste en pasar de $\underline{H}_{i}{}^{i+1}$ a $\underline{H}_{i+1}{}^{i+1}$ en forma controlada; en el movimiento cartesiano se consigue esto mediante una transformación que representa el movimiento en términos de dos rotaciones y una traslación. La primera rotación sirve para alinear a la herramienta en la orientación final deseada; la segunda rotación controla la posición de la herramienta sobre un eje fijo en el espacio (corresponde a una rotación de la última juntura del manipulador). La traslación se realiza a lo largo de una línea recta que une las dos posiciones.

Definiendo una transformación $\underline{D}(r)$, que cumpla:

$$\underline{H}_{i+1}{}^{i+1} = \underline{H}_i{}^{i+1}\,\underline{D}(1) \qquad (4.38)$$

donde r=t/T, siendo T el tiempo total empleado para pasar de la posición i (r=0) hasta i+1 (r=1), y t el tiempo en que se inicia el movimiento; la ecuación (4.37) puede escribirse como:

$$\underline{T}6^{i+1} = \underline{S}(t)_{i+1}\,\underline{H}_i{}^{i+1}\,\underline{D}(r)\,\underline{E}_{i+1}{}^{-1}$$

es necesario que $\underline{D}(0)$ (antes del movimiento) sea la matriz identidad; al final del movimiento (r=1) se puede despejar $\underline{D}(1)$ de (4.38):

$$\underline{D}(1) = (\underline{H}_i{}^{i+1})^{-1}\,\underline{H}_{i+1}{}^{i+1}$$

Para simplificar la notación, se hace que $\underline{H}_i{}^{i+1} = \underline{u}$ y $\underline{H}_{i+1}{}^{i+1} = \underline{v}$ y, los vectores como $\underline{n}^u$, $\underline{o}^u$, $\underline{a}^u$, $\underline{d}^u$ y $\underline{n}^v$, $\underline{o}^v$, $\underline{a}^v$, $\underline{d}^v$, resulta:

$$\underline{H}_i{}^{i+1} = \underline{u} = \begin{pmatrix} n_x{}^u & o_x{}^u & a_x{}^u & d_x{}^u \\ n_y{}^u & o_y{}^u & a_y{}^u & d_y{}^u \\ n_z{}^u & o_z{}^u & a_z{}^u & d_z{}^u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz $\underline{v}$ será:

$$\underline{H}_{i+1}^{\,i+1} = \underline{v} = \begin{bmatrix} n_x^{\,v} & o_x^{\,v} & a_x^{\,v} & d_x^{\,v} \\ n_y^{\,v} & o_y^{\,v} & a_y^{\,v} & d_y^{\,v} \\ n_z^{\,v} & o_z^{\,v} & a_z^{\,v} & d_z^{\,v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x^{\,u} & n_y^{\,u} & n_z^{\,u} & -\underline{d}^{u} \cdot \underline{n}^{u} \\ o_x^{\,u} & o_y^{\,u} & o_z^{\,u} & -\underline{d}^{u} \cdot \underline{o}^{u} \\ a_x^{\,u} & a_y^{\,u} & a_z^{\,u} & -\underline{d}^{u} \cdot \underline{a}^{u} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

multiplicando las dos últimas matrices, se obtiene $\underline{D}(1)$:

$$\underline{D}(1) = \begin{bmatrix} \underline{n}^{u} \cdot \underline{n}^{v} & \underline{n}^{u} \cdot \underline{o}^{v} & \underline{n}^{u} \cdot \underline{a}^{v} & \underline{n}^{u} \cdot (\underline{d}^{v} - \underline{d}^{u}) \\ \underline{o}^{u} \cdot \underline{n}^{v} & \underline{o}^{u} \cdot \underline{o}^{v} & \underline{o}^{u} \cdot \underline{a}^{v} & \underline{o}^{u} \cdot (\underline{d}^{v} - \underline{d}^{u}) \\ \underline{a}^{u} \cdot \underline{n}^{v} & \underline{a}^{u} \cdot \underline{o}^{v} & \underline{a}^{u} \cdot \underline{a}^{v} & \underline{a}^{u} \cdot (\underline{d}^{v} - \underline{d}^{u}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.39)$$

Los vectores unitarios $\underline{n}$, $\underline{o}$ y $\underline{a}$ en la mano del manipulador se definen de la forma mostrada en la figura 4.15.

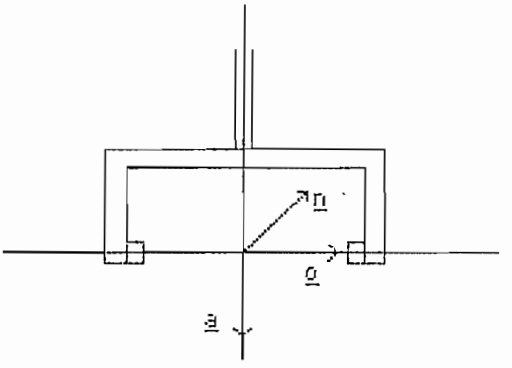


Figura 4.15 Vectores unitarios $\underline{n}$, $\underline{o}$ y $\underline{a}$ en la mano del manipulador.

En el movimiento cartesiano, la traslación se define en la línea que une los puntos inicial y final, estándo representada por la transformación $\underline{T}(r)$; la primera rotación sirve para hacer girar el vector de aproximación $\underline{a}^u$ hacia la dirección en que la herramienta se acerca a su objetivo, es decir, desde el punto inicial hacia el vector de aproximación en el punto final; ésta rotación se realiza al rededor de un vector $\underline{k}^u$, que se obtiene de la rotación del eje y, del punto inicial, un ángulo ø al rededor del eje z; entonces, el vector $\underline{k}^u$ es:

$$\underline{k}^u = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\phi \\ \cos\phi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esta primera rotación se representa por $\underline{R}a(r)$ y se la define mediante la transformación general de rotación, deducida en el

apartado 2.5 anterior, con $\underline{p} = \underline{k}^u$. En la segunda rotación, se hace girar al vector $\underline{o}^u$, que representa la orientación de la herramienta, hacia la orientación del vector $\underline{o}^v$ y, se la nota con $\underline{R}o(r)$. Entonces la matriz $\underline{D}(r)$ estará dada por:

$$\underline{D}(r) = \underline{T}(r)\ \underline{R}a(r)\ \underline{R}o(r) \qquad (4.40)$$

donde las matrices $\underline{T}(r)$, $\underline{R}a(r)$ y $\underline{R}o(r)$ tienen la siguiente forma:

$$\underline{T}(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rx \\ 0 & 1 & 0 & ry \\ 0 & 0 & 1 & rz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}a(r) = \begin{bmatrix} (S\phi)^2\ V(r\beta) + C(r\beta) & -S\phi\ C\phi\ V(r\beta) & C\phi\ S(r\beta) & 0 \\ -S\phi\ C\phi\ V(r\beta) & (C\phi)^2\ V(r\beta) + C(r\beta) & S\phi\ S(r\beta) & 0 \\ -C\phi\ S(r\phi) & -S\phi\ S(r\beta) & C(r\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.41)

donde:

$V(r\beta) = \text{vers}(r\beta) = 1 - \cos(r\beta)$

$C(r\beta) = \cos(r\beta)$

$S(r\beta) = \text{sen}(r\beta)$

$C\phi = \cos\phi$

$S\phi = \text{sen}\phi$

$$\underline{R}o(r) = \begin{pmatrix} C(r\partial) & -S(r\partial) & 0 & 0 \\ S(r\partial) & C(r\partial) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{R}o(r)$ representa una rotación ∂ al rededor del vector de aproximación de la herramienta. Multiplicando las tres matrices se obtiene $\underline{D}(r)$:

$$\underline{D}(r) = \begin{pmatrix} C(r\partial)[(S\phi)^2 V(r\beta) + C(r\beta)] + S(r\partial)[-S\phi\, C\phi\, V(r\beta)] \\ C(r\partial)[-S\phi\, C\phi\, V(r\beta)] + S(r\partial)[(C\phi)^2 V(r\beta) + C(r\beta)] \\ C(r\partial)[-C\phi\, S(r\beta)] + S(r\partial)[-S\phi\, S(r\beta)] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -S(r\partial)[(S\phi)^2 V(r\beta) + C(r\beta)] + C(r\partial)[-S\phi\, C\phi\, V(r\beta)] \\ -S(r\partial)[-S\phi\, C\phi\, V(r\beta)] + C(r\partial)[(C\phi)^2 V(r\beta) + C(r\beta)] \\ -S(r\partial)[-C\phi\, S(r\beta)] + C(r\partial)[-S\phi\, S(r\beta)] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\phi\, S(r\beta) & rx \\ S\phi\, S(r\beta) & ry \\ C(r\beta) & rz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando $r=1$, se pueden encontrar x, y, z, β, ϕ y ∂ de la siguiente manera: si se posmultiplica los dos lados de la ecuación (4.40) por $\underline{R}o(r)^{-1}\ \underline{R}a(r)^{-1}$; e igualando los elementos de la cuarta columna en los dos lados de la ecuación matricial, se encuentran los valores de x, y, z de la transformación $\underline{T}(1)$:

$$\underline{D}(1)\,\underline{Ro}(1)^{-1}\,\underline{Ra}(1)^{-1} = \underline{T}(1)$$

obteniéndose:

$$x = \underline{n}^U.\,(\underline{d}^V - \underline{d}^U) \qquad (4.42)$$

$$y = \underline{o}^U.\,(\underline{d}^V - \underline{d}^U) \qquad (4.43)$$

$$z = \underline{a}^U.\,(\underline{d}^V - \underline{d}^U) \qquad (4.44)$$

no es necesario realizar el producto $\underline{D}(1)\,\underline{Ro}(1)^{-1}\,\underline{Ra}(1)^{-1}$ ya que, por la estructura que tienen las matrices $\underline{Ro}(1)$ y $\underline{Ra}(1)$ la cuarta columna de la matriz que resulta de realizar el producto es igual a la cuarta columna da la matriz $\underline{D}(1)$ dada por la ecuación (4.39).

Posmultiplicando ambos lados de la ecuación (4.40) por $\underline{Ro}(1)^{-1}$ y premultiplicando por $\underline{T}(1)^{-1}$, se tiene:

$$\underline{T}(1)^{-1}\,\underline{D}(1)\,\underline{Ro}(1)^{-1} = \underline{Ra}(1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{D}(1) \begin{bmatrix} C\partial & S\partial & 0 & 0 \\ -S\partial & C\partial & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{Ra}(1)$$

y realizando el producto se llega a:

$$\begin{bmatrix} C\partial(\underline{n}^U \cdot \underline{n}^V) - S\partial(\underline{n}^U \cdot \underline{o}^V) & S\partial(\underline{n}^U \cdot \underline{n}^V) + C\partial(\underline{n}^U \cdot \underline{o}^V) \\ C\partial(\underline{o}^U \cdot \underline{n}^V) - S\partial(\underline{o}^U \cdot \underline{o}^V) & S\partial(\underline{o}^U \cdot \underline{n}^V) + C\partial(\underline{o}^U \cdot \underline{o}^V) \\ C\partial(\underline{a}^U \cdot \underline{n}^V) - S\partial(\underline{a}^U \cdot \underline{o}^V) & S\partial(\underline{a}^U \cdot \underline{n}^V) + C\partial(\underline{a}^U \cdot \underline{o}^V) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{n}^U \cdot \underline{a}^V & \underline{n}^U \cdot (\underline{d}^V - \underline{d}^U) - x \\ \underline{o}^U \cdot \underline{a}^V & \underline{o}^U \cdot (\underline{d}^V - \underline{d}^U) - y \\ \underline{a}^U \cdot \underline{a}^V & \underline{a}^U \cdot (\underline{d}^V - \underline{d}^U) - z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{R}a(1)$$

igualando los elementos de la tercera columna en ambos lados de la ecuación matricial anterior (la matriz $\underline{R}a(1)$ viene dada por la ecuación (4.41) con $r = 1$), se tiene:

$$\underline{n}^U \cdot \underline{a}^V = C\phi \; S\beta \tag{4.45}$$

$$\underline{o}^U \cdot \underline{a}^V = S\phi \; S\beta \tag{4.46}$$

$$\underline{a}^U \cdot \underline{a}^V = C\beta \tag{4.47}$$

de las dos primeras ecuaciones se puede despejar el ángulo ϕ:

$$\frac{S\phi}{C\phi} = tg\phi = \frac{\underline{o}^U \cdot \underline{a}^V}{\underline{n}^U \cdot \underline{a}^V}$$

$$\phi = tg^{-1} \frac{\underline{o}^U \cdot \underline{a}^V}{\underline{n}^U \cdot \underline{a}^V} \tag{4.48}$$

con $-\pi \leq \phi \leq \pi$

elevando al cuadrado las ecuaciones (4.47) y (4.48), sumandolas entre sí y, dividiendo el resultado para la ecuación (4.49), se encuentra que:

$$\frac{S\beta}{C\beta} = tg\beta = \frac{[(\underline{n}^U \cdot \underline{a}^V)^2 + (\underline{o}^U \cdot \underline{a}^U)^2]^{1/2}}{\underline{a}^U \cdot \underline{a}^V}$$

y despejando ß, se llega a:

$$\beta = tg^{-1} \frac{[(\underline{n}^U \cdot \underline{a}^V)^2 + (\underline{o}^U \cdot \underline{a}^V)^2]^{1/2}}{\underline{a}^U \cdot \underline{a}^V} \qquad (4.49)$$

con $0 \leq \beta < \pi$

De la última ecuación matricial encontrada, no es posible obtener una relación para despejar el ángulo ∂, entonces, a la ecuación (4.40) se le premultiplica por $\underline{T}(r)^{-1}$ y después por $\underline{R}a(1)^{-1}$, obteniéndose:

$$\underline{R}a(1)^{-1}\ \underline{T}(1)^{-1}\ \underline{D}(1) = \underline{R}o(1)$$

$$\begin{bmatrix} (S\phi)^2\ V\beta + C\beta & -S\phi\ C\phi\ V\beta & -C\phi\ S\beta & 0 \\ -S\phi\ C\phi\ V\beta & (C\phi)^2\ V\beta + C\beta & -S\phi\ S\beta & 0 \\ C\phi\ S\beta & S\phi\ S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{D}(1) =$$

$$= \begin{bmatrix} C\partial & -S\partial & 0 & 0 \\ S\partial & C\partial & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se puede ver que si se igualan los elementos 2,1 y 2,2, en ambos lados, es posible encontrar una solución para ∂, entonces:

$$(\underline{n}^U \cdot \underline{n}^V)[-S\phi\, C\phi\, V\beta] + (\underline{o}^U \cdot \underline{n}^V)[(C\phi)^2\, V\beta + C\beta] + (\underline{a}^U \cdot \underline{n}^V)(-S\phi\, S\beta) = S\partial$$

$$(\underline{n}^U \cdot \underline{o}^V)[-S\phi\, C\phi\, V\beta] + (\underline{o}^U \cdot \underline{o}^V)[(C\phi)^2\, V\beta + C\beta] + (\underline{a}^U \cdot \underline{o}^V)(-S\phi\, S\beta) = C\partial$$

dividiendo las dos ecuaciones y despejando ∂, se tiene:

$$\partial = tg^{-1}(S\partial / C\partial) \qquad (4.50)$$

con $-\pi \leq \partial \leq \pi$

Las ecuaciones (4.42), (4.47), (4.44), (4.48), (4.49) y (4.50) *permiten* encontrar una matriz $\underline{D}(r)$ cuando r toma valores entre 0 y 1, es decir, entre posiciones intermedias entre la posición inicial y la final.

A continuación en las figuras 4.16 a 4.20 se presentan los diagramas de flujo del programa que permitirá realizar el movimiento entre posiciones.

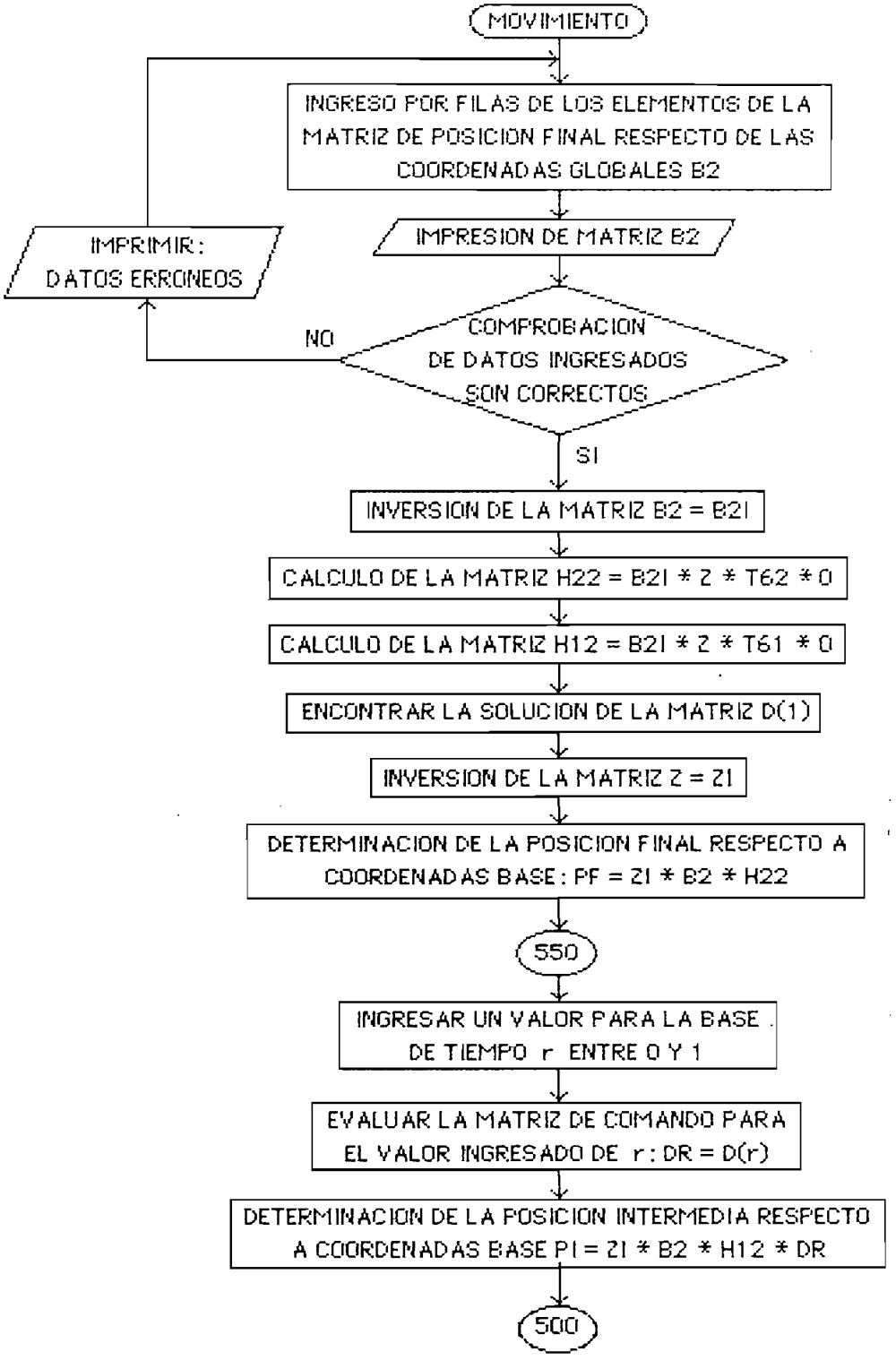


Figura 4.16 Diagrama de flujo del subprograma "MOVIMIENTO"

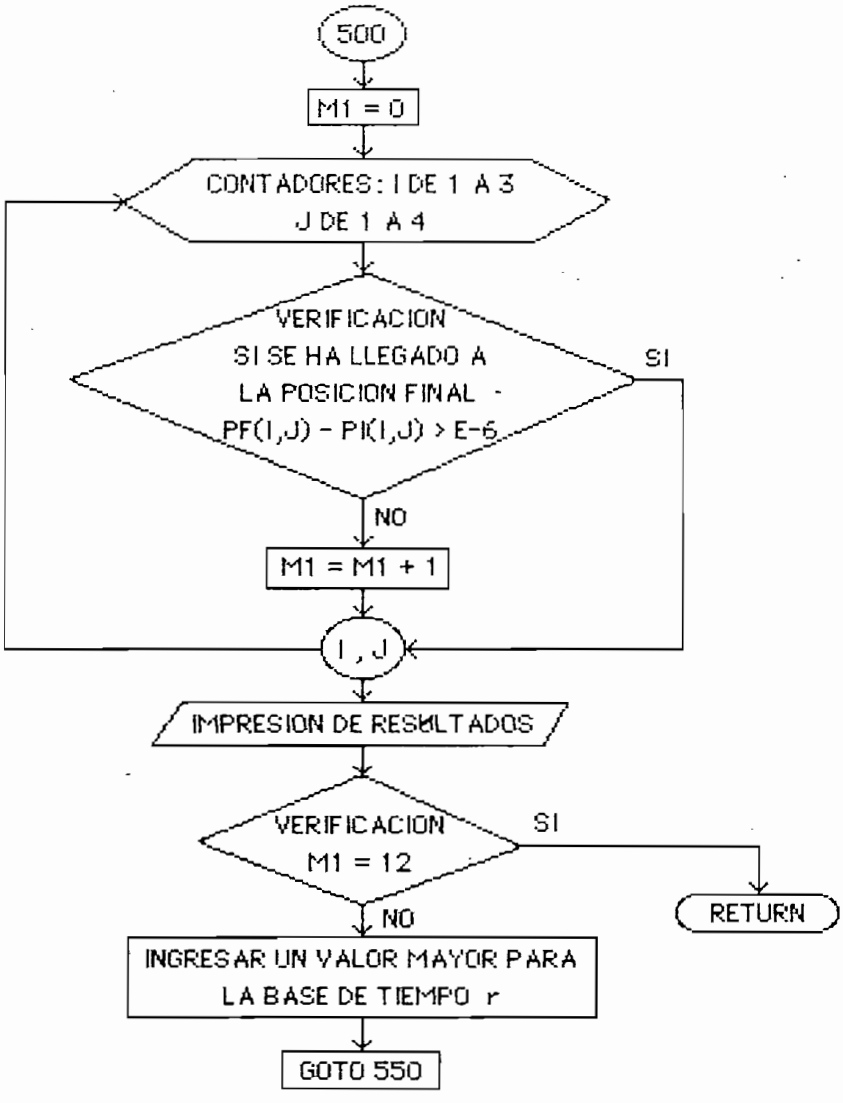


Figura 4.17 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "MOVIMIENTO"

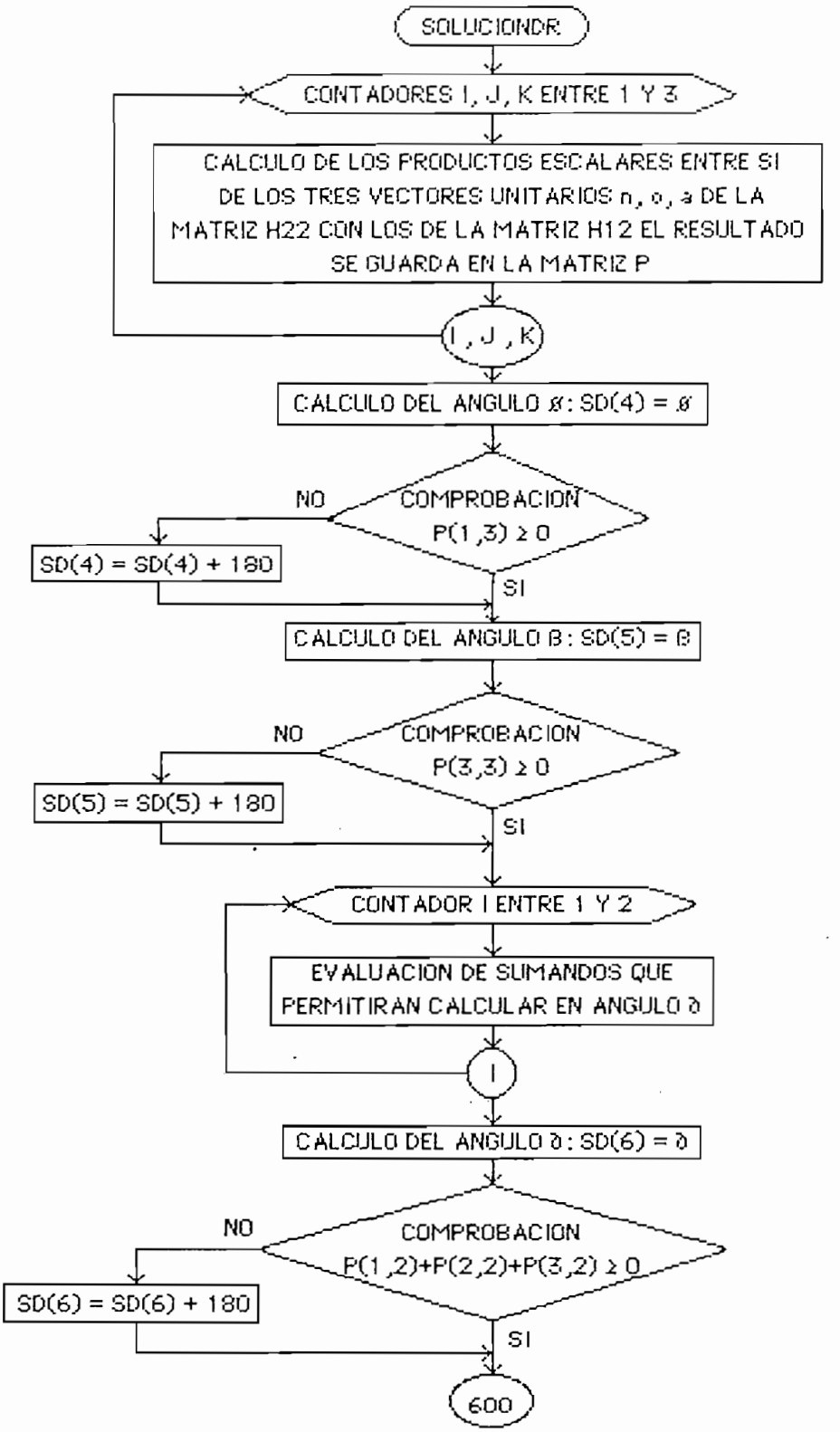


Figura 4.18 Diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONDR"

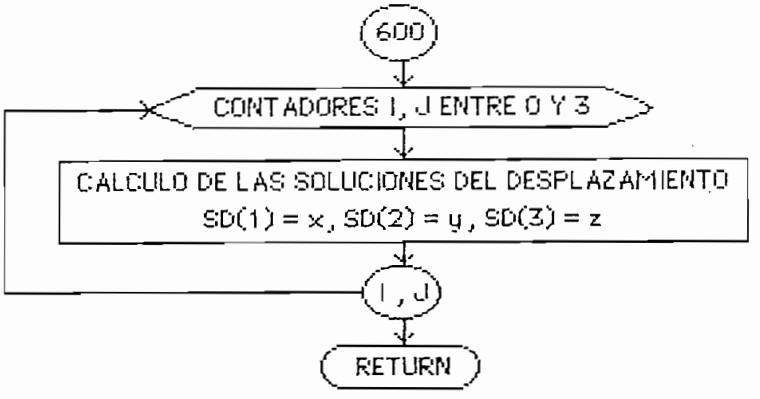


Figura 4.19 Continuación del diagrama de flujo del subprograma "SOLUCIONDR"

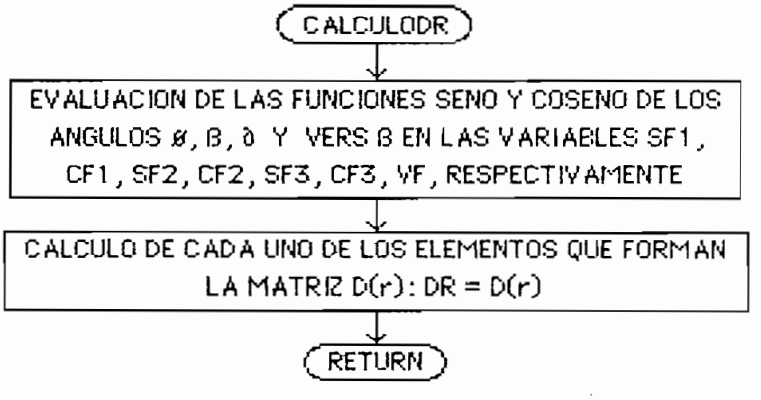


Figura 4.20 Diagrama de flujo del subprograma "CALCULODR"

LISTADO DE VARIABLES

VARIABLE	SIGNIFICADO
B2(I,J)	matriz 4x4 que representa la posición final respecto de las coordenadas globales.
N	variable auxiliar usada durante la verificación de los datos ingresados para la matriz B2.
B2I	matriz 4x4 donde se guarda la matriz inversa calculada de la matriz B2.
M(I,J)	matriz 4x4 usada como variable auxiliar donde se almacenan resultados parciales de productos entre matrices.
FI(I,J)	matriz 4x4 donde se guarda la matriz calculada que representa a la posición final.
C(I,J)	matriz 4x4 usada como variable auxiliar donde

se almacenan resultados de productos parciales entre matrices.

H22(I,J) matriz 4x4 donde se guarda la matriz $\underline{H}_{i+1}{}^{i+1}$ calculada por el programa.

H12(I,J) matriz 4x4 donde se guarda la matriz $\underline{H}_{i}{}^{i+1}$ calculada.

T variable donde ingresa el valor de la base de tiempo r.

PI(I,J) matrix 4x4 que guarda la posición intermedia calculada.

SD(I,J) vector de dimensión seis que guarda las soluciones encontradas de la matriz $\underline{D}(1)$.

SF1,SF2,SF3 variables con los cálculos de las funciones seno de los ángulos ß, ∂, ø.

CF1,CF2,CF3 variables con los cálculos de las funciones coseno de los ángulos ß, ∂, ø.

DR(I,J) matriz 4x4 donde se guarda la matriz $\underline{D}(r)$ calculada.

En los diagramas de flujo se realizaron subrutinas para encontrar la solución de la matriz $\underline{D}(1)$ ("SOLUCIONDR") y el calculo de la matriz $\underline{D}(r)$ ("CALCULODR") pero, en la implementación del programa no se les considera como tales, por no ser necesario.

4.4 MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES.

Después que se definieron las posiciones inicial y final, toca ahora analizar como se realiza el movimiento entre posición y posición.

Entre dos posiciones definidas por $\underline{S}_i \underline{H}_i \underline{E}_i^{-1}$ y $\underline{S}_{i+1} \underline{H}_{i+1} \underline{E}_{i+1}^{-1}$, se puede obtener la distancia entre puntos y también, como se vió en el numeral 4.2, la variación de parámetros entre las dos posiciones al resolver la matriz $\underline{I}6$. Conociendo las velocidades angular y lineal de la mano de sujeción y/o las velocidades de las junturas, se encuentra un

tiempo Ti para pasar de un punto i a otro i+1, calculado como el máximo de los tiempos evaluados con los datos de velocidad conocidos. Además, será preciso preveer un tiempo ta para que el manipulador acelere y desacelere al inicio y final de la trayectoria; durante el tiempo ta el manipulador acelerará hasta una velocidad máxima, entonces, en el peor de los casos se cumplirá que Ti > 2 ta. Tomando como base este tiempo Ti se pueden graficar el cambio en las variables de juntura en función del tiempo, como se muestra un ejemplo en la figura 4.21, obteniéndose una trayectoria; pero como no es necesario que el movimiento se detenga en los puntos intermedios, se hace una aproximación lineal de la trayectoria formando varios segmentos, figura 4.22. Con el fin de que la posición, aceleración y velocidad sean constantes durante la transición entre un segmento de trayectoria y otro, se define la posición como una función del tiempo f(t) en un intervalo -ta < t < ta, de tal forma que, la transición entre un segmento y el siguiente inicia un tiempo ta antes de comenzar el nuevo segmento, como se ve en la figura 4.23. Si se considera a la función f(t) como un polinomio, se tienen seis condiciones límite (posición , velocidad y aceleración en los dos finales de la transición) que definen un polinomio de quinto grado que, por simetria de la transición, se reduce a cuarto grado:

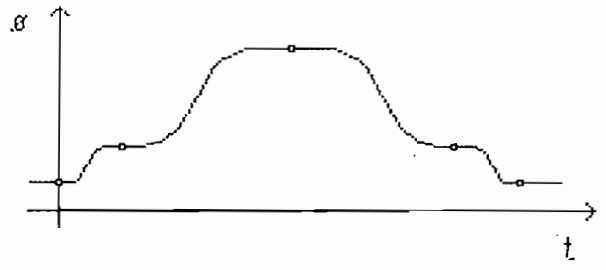


Figura 4.21 Trayectoria para una variable de juntura

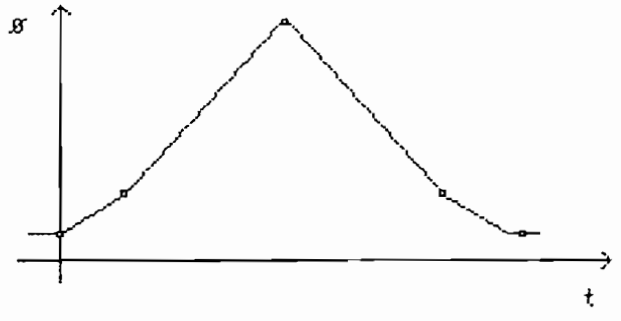


Figura 4.22 Aproximación lineal de la trayectoria

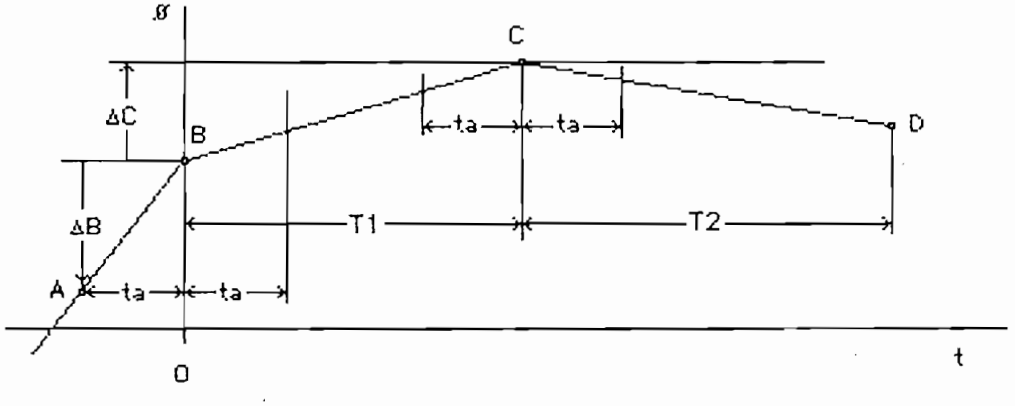


Figura 4.23 Modelo de trayectoria

$$q = a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

donde q representa la posición lineal o angular de la juntura. Derivando el polinomio y aplicando las condiciones límite, se obtienen funciones para la posición q, velocidad $\dot{q}$ y aceleración $\ddot{q}$ durante la transición.

$$q = \{[\Delta C(ta/T1) + \Delta B](2 - h)h^2 - 2\Delta B\}h + B + \Delta B \quad (4.51)$$

$$\dot{q} = \{[\Delta C(ta/T1) + \Delta B](3/2 - h)2h^2 - \Delta B\}(1/ta) \quad (4.52)$$

$$\ddot{q} = [\Delta C(ta/T1) + \Delta B](1 - h)(3h/ta^2) \quad (4.53)$$

donde:

$$\Delta C = C - B \quad (4.54)$$

$$\Delta B = A - B \quad (4.55)$$

$$h = (t + ta)/2ta \quad (4.56)$$

después de transcurrido un tiempo t=ta, las funciones son:

$$q = \Delta C\, h + B \quad (4.57)$$

$$\dot{q} = \Delta C/T1 \quad (4.58)$$

$$\ddot{q} = 0 \quad (4.59)$$

$$h = t/T1 \quad (4.60)$$

Las variables q representan las coordenadas de juntura (ángulos de juntura ϕ_i en caso de junturas revolutivas y distancias de juntura d_i en junturas prismáticas). Existen dos tipos de movimientos de un manipulador, llamados movimiento cartesiano y movimiento articular. El movimiento cartesiano se lo trató en el numeral 4.3.

El movimiento articular puede ser descrito al inicio de una transición (punto A de la figura 4.23), asumiendo que se tiene la suguiente información: J_A (las coordenadas de juntura al tiempo t=T1-ta), J_B (coordenadas de juntura en el punto B al tiempo t=0) y J_C (coordenadas de juntura del punto C, al final del segmento de trayectoria, evaluadas al tiempo t=T1). Antes de iniciar el movimiento, primero se evaluan las coordenadas de juntura en el punto D (posición final) o, se resuelve la matriz $\underline{T}6$ en esa posición. El tiempo para llegar al punto D se calcula, para cada juntura, de la siguiente forma:

$$t_i = |J_{Di} - J_{Ci}| / v_i$$

donde v_i es la velocidad máxima de la juntura i; el tiempo T2 (de la

figura 4.23) será:

$$T2 = \max(t_i , ta)$$

usando las ecuaciones (4.51) a (4.60) se evaluan las funciones que especifican la posición, velocidad y aceleración (con J_A, J_B, J_C, ΔJ_B, ΔJ_C en lugar de A, B, C, ΔB, ΔC) para este segmento de trayectoria.

La diferencia entre el movimiento cartesiano y el articular está en la forma como se realiza el movimiento; el cartesiano es un movimiento natural (a lo largo de líneas rectas y rotaciones sobre ejes fijos en el espacio) mientras que el articular es un movimiento lineal de las coordenadas de juntura.

El movimiento cartesiano tiene una desventaja respecto al articular, que es la necesidad de una continua evaluación de los puntos que definen los segmentos de trayectoria y su subsecuente transformación a coordenadas de juntura; mientras que en el articular sólo se realiza una interpolación, en coordenadas de juntura, entre los finales de los segmentos de trayectoria, ocupando unicamente el 1% de computación respecto al cartesiano.

4.5 RESULTADOS.

Con las bases teóricas expuestas en los capítulos II y III y los diagramas de flujo desarrollados para las aplicaciones descritas en el capítulo IV, se ha implementado un programa en computador digital con el objeto de demostrar la utilidad de los conceptos teórico matemáticos inherentes en el movimiento de un manipulador.

De la ejecución del programa se obtendrán los siguientes resultados:

1- Las matrices $\underline{A}$ (relacionan la posición y orientación entre junturas) y $\underline{T}6$ (relaciona la posición y orientación del extremo del manipulador respecto de su base) que representan la posición inicial.

2- Las soluciones de la matriz $\underline{T}6$ en una posición final dada.

3- Las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ que representan la posición final.

4- Desplazamiento entre una posición inicial y una final a lo

largo de una trajectoria arbitraria mediante la variación del parámetro de la base de tiempo.

Los resultados anteriores pueden obtenerse tanto para el manipulador de Stanford como para el de Elbow.

Al hacer correr el programa, en pantalla aparece una ventana (listado de opciones del programa de esta tesis) denominada "MANIPULADORES" donde se puede seleccionar la opción de trabajar ya sea con el manipulador "DE STANFORD" o el "DE ELBOW".

Una vez seleccionado cualquiera de los manipuladores, aparece una nueva ventana que muestra las opciones de trabajo en base a las cuales se pueden obtener los resultados enumerados en un párrafo anterior; estas opciones son: "POSICION INICIAL" , "POSICION FINAL" y "MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES". Cabe mencionar que los resultados de la solución de la matriz $\underline{T}6$ en la posición final se ejecutan y se muestran antes de calcular las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ en alguna posición final.

La opción "POSICION INICIAL" permite inicializar el programa

mediante el ingreso desde teclado de los datos de las junturas del manipulador escogido, para lo cual, aparecen en pantalla las correspondientes leyendas. Estos datos son de dos clases:

- DATOS CONSTRUCTIVOS; que se refieren a la estructura física de cada una de las junturas que forman el manipulador seleccionado y la posición relativa entre ellas en el espacio. En el programa los datos se introducen ascendentemente desde la juntura 1 hasta la 6. Si la juntura es revolutiva, los datos constructivos son: el ángulo de torsión (ángulo ß) en grados, la distancia entre elementos (distancia d) y la distancia del elemento (distancia a). Si la juntura es prismática, los datos son el ángulo de torsión (ángulo ß) en grados y el ángulo del par (ángulo ø) también en grados; no hace falta ingresar la distancia del elemento porque en este caso es igual a cero.

- DATOS DE POSICION INICIAL; se refieren a la posición de partida de las junturas del manipulador antes de realizar un movimiento (variables de juntura). Para una juntura revolutiva, el dato que se hace ingresar es el ángulo del

par inicial (ángulo ø inicial) en grados. Si la juntura es prismática, es la distancia entre elementos inicial (distancia d inicial).

Si no se especifica lo contrario, en la presente tesis se va ha trabajar con los datos constructivos de las junturas, que se muestran en la tabla 4.1 para el manipulador de Stanford y en la tabla 4.2 para el de Elbow (considerando estructuras dadas).

JUNTURA	TIPO	ß	d	a	ø
1	revolutiva	-90	0	0	-
2	revolutiva	90	1	0	-
3	prismática	0	-	0	0
4	revolutiva	-90	0	0	-
5	revolutiva	90	0	0	-
6	revolutiva	0	0	0	-

Tabla 4.1 Datos constructivos de la posición inicial de las junturas para el manipulador de Stanford.

JUNTURA	TIPO	ß	d	a	ø
1	revolutiva	90	0	0	-
2	revolutiva	0	0	2	-
3	revolutiva	0	0	3	-
4	revolutiva	-90	0	4	-
5	revolutiva	90	0	0	-
6	revolutiva	0	0	0	-

Tabla 4.2 Datos constructivos de posición inicial de las junturas para el manipulador de Elbow.

De los datos constructivos mostrados en las dos tablas anteriores los que se pueden variar son: para el de Stanford, la distancia entre elementos de la juntura 2; para el de Elbow, las distancias del elemento de las junturas 2, 3 y 4, puesto que, al encontrar las soluciones de la matriz $\underline{T}6$ se hizo esta consideración.

Una vez ingresados los datos, el programa los imprime para luego ejecutar la subrutina que calcula las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ con dichos datos, imprimiéndose también estas matrices.

Las matrices $\underline{A}$ calculadas, muestran la relación de orientación y posición que existe entre cada uno de los sistemas de coordenadas que identifican a las junturas y el sistema de la juntura inmediata anterior; y la matriz $\underline{T}6$, la relación entre el sistema de coordenadas de la sexta juntura del manipulador y el sistema de coordenadas en su base.

A continuación se presentan algunos ejemplos que permiten apreciar lo expuesto en los párrafos anteriores para los dos manipuladores.

EJEMPLO 1: Cálculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ para el manipulador de Stanford en la posición inicial de las junturas de la tabla 4.3.

JUNTURA	VARIABLE	DATO
1	θ_1	0
2	θ_2	0
3	d_3	1
4	θ_4	0
5	θ_5	0
6	θ_6	0

Tabla 4.3 Datos de posición inicial del manipulador de Stanford.

En la página 162 se muestran los datos iniciales, tanto constructivos como de posición para este manipulador. Los resultados obtenidos para las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ en esta posición se presentan en la página 163; en los vectores unitarios de la matriz $\underline{T}6$ calculada, se puede ver que el sistema de coordenadas de la sexta juntura del manipulador tiene la misma orientación que el sistema de coordenadas en su base; esta orientación es la misma que se consideró cuando se hizo el desarrollo de la figura 3.12.

EJEMPLO 2: Cálculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ para el mismo manipulador pero cambiando la posición inicial por la de la tabla 4.4.

JUNTURA	VARIABLE	DATO
1	ϕ_1	30
2	ϕ_2	90
3	d_3	5
4	ϕ_4	-30
5	ϕ_5	45
6	ϕ_6	60

Tabla 4.4 Datos de una segunda posición inicial para el manipulador de Stanford.

MANIPULADOR DE STANFORD

DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS (EJEMPLO No. 1)

JUNTURA REVOLUTIVA 1

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 2

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 1
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA PRISMATICA 3

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS INICIAL= 1
ANGULO DEL PAR= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 4

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 5

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 6

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

MATRICES A DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 1)

MATRIZ A 1

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 1)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

En las páginas 165 y 166 se presentan tanto los datos iniciales como las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ calculadas. Como era de esperarse, las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ son diferentes respecto de las del ejemplo anterior, ya que se cambió la posición inicial de cada una de las junturas y, consecuentemente, la posición del manipulador.

EJEMPLO 3: Cálculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ para el manipulador de Stanford manteniendo los datos de posición inicial de las junturas del ejemplo 1 pero modificando uno de los datos constructivos, la distancia entre elementos de la juntura 2 a un valor de 0,5.

Los resultados de este ejemplo se presentan en las páginas 167 y 168, donde se puede ver que al cambiar el dato constructivo (d_2) cambia también la posición inicial del manipulador y, consecuentemente, las matrices $\underline{A}2$ y $\underline{T}6$.

Para el cálculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ que representan a una posición final dada, después de seleccionada la opción "POSICION FINAL", la computadora pide el ingreso de los vectores unitarios $\underline{o}$ y $\underline{a}$ y el vector $\underline{d}$ de una posición final respecto del sistema de coordenadas en la base del manipulador. Los tres vectores ingresan sucesivamente

MANIPULADOR DE STANFORD

DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS (EJEMPLO No. 2)

JUNTURA REVOLUTIVA 1

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 30

JUNTURA REVOLUTIVA 2

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 1
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 90

JUNTURA PRISMATICA 3

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS INICIAL= 5
ANGULO DEL PAR= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 4

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL=-30

JUNTURA REVOLUTIVA 5

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 45

JUNTURA REVOLUTIVA 6

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 60

MATRICES A DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 2)

MATRIZ A 1

+0.86603	+0.00000	-0.50000	+0.00000
+0.50000	-0.00000	+0.86603	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+5.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+0.86603	-0.00000	+0.50000	+0.00000
-0.50000	-0.00000	+0.86603	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+0.70711	+0.00000	+0.70711	+0.00000
+0.70711	-0.00000	-0.70711	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+0.50000	-0.86603	+0.00000	+0.00000
+0.86603	+0.50000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 2)

-0.59280	+0.16073	+0.78915	+3.83013
+0.31965	+0.94635	+0.04737	+3.36602
-0.73920	+0.28033	-0.61237	-0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MANIPULADOR DE STANFORD

DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS (EJEMPLO No. 3)

JUNTURA REVOLUTIVA 1

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 2

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= .5
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA PRISMATICA 3

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS INICIAL= 1
ANGULO DEL PAR= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 4

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 5

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 6

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

MATRICES A DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 3)

MATRIZ A 1

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.50000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 3)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.50000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

por componentes x, y, z; en caso que los vectores o y a no correspondan a vectores unitarios, el programa imprime una leyenda indicando esta situación y nuevamente pide el ingreso de datos. Hay que anotar que la posición final está dada en la mano del manipulador, existiendo una matriz Z que relaciona éste punto con el sistema de coordenadas en la sexta juntura del manipulador, por tanto, se realizará la transformación para tener los datos de la posición final de la sexta juntura del manipulador.

Si los datos introducidos en el programa son correctos, se pasa a encontrar las soluciones de la matriz T6; en el caso del manipulador de Stanford, se determinarán cinco ángulos y una distancia correspondientes a: los ángulos del par (ángulos ø) de las junturas 1, 2, 4, 5, 6 y a la distancia entre elementos de la juntura 3; para el manipulador de Elbow, se determinarán los seis ángulos del par de las seis junturas. Las soluciones encontradas son los valores que deben tener las variables de juntura para que el manipulador se encuentre en esa posición final y servirán para calcular las matrices A y T6. Se evaluarán también las diferencias entre cada una de las variables de juntura en las dos posiciones inicial y final.

EJERCICIO 4: Cálculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ para el manipulador de Stanford en la posición final mostrada en la página 171 y los datos de posición inicial del ejemplo 1.

Como puede verse en los resultados para este ejemplo, se ha impreso un mensaje de error indicando que los vectores $\underline{o}$ y $\underline{a}$ deben ser modificados puesto que no satisfacen el requisito de ser unitarios, consecuentemente, deben ingresarse nuevamente los datos de la posición final.

EJERCICIO 5: Ingresando datos correctos para la posición final, mostrados en la página 172, se pueden calcular las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$.

En la página 172 se muestran las soluciones encontradas y las diferencias entre los valores calculados y los iniciales; en la página 173 se presentan las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ calculadas para esta posición final. La matriz $\underline{T}6$ de este ejemplo, está formada por vectores unitarios con la misma orientación dada en los vectores unitarios que ingresaron como datos de la posición final, lo cual, comprueba que el resultado es correcto o, en otras palabras, la matriz $\underline{T}6$ calculada relaciona efectivamente la posición final dada con la base del

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 4)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 1
oz= 0

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax= 1
ay= 1
az= 1

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

ERROR EN LOS DATOS DE LOS VECTORES o Y a

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 5)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 0
oz=-1

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax= 1
ay= 0
az= 0

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 5)

E(1)= +24.29519
E(2)= +41.40962
E(4)= -31.04324
E(5)= +52.92503
E(6)= -70.05649
d(3)= +4.000000

DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA
DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL

E(1)final - E(1)inicial= +24.295187
E(2)final - E(2)inicial= +41.409622
E(4)final - E(4)inicial= -31.043243
E(5)final - E(5)inicial= +52.925034
E(6)final - E(6)inicial= -70.056488
d(3)final - d(3)inicial= +3.000000

MATRICES A DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 5)

MATRIZ A 1

+0.91144	+0.00000	-0.41144	+0.00000
+0.41144	-0.00000	+0.91144	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+0.75000	+0.00000	+0.66144	+0.00000
+0.66144	-0.00000	-0.75000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+4.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+0.85678	-0.00000	+0.51568	+0.00000
-0.51568	-0.00000	+0.85678	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+0.60286	+0.00000	+0.79785	+0.00000
+0.79785	-0.00000	-0.60286	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+0.34109	+0.94003	+0.00000	+0.00000
-0.94003	+0.34109	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 5)

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+2.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

manipulador (el vector $\underline{d}$ no es el mismo que el de los datos ingresados de la posición final, ya que, sobre el se ha efectuado la transformación correspondiente para que identifique la posición final del origen del sistema de coordenadas de la sexta juntura).

EJEMPLO 6: Calculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ para la misma posición final del ejemplo anterior pero con los datos de posición inicial del ejemplo 2.

Los resultados para este ejemplo se presentan en las páginas 175 y 176; donde se puede ver que las soluciones de la matriz $\underline{T}6$ no han cambiado respecto de las del ejemplo anterior, debido a que, dependen unicamente de los datos de la posición final y no de la posición inicial; en donde si hay cambios es en el las diferencias calculadas de las variables de juntura (página 175). Las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ calculadas son también las mismas que las del ejemplo anterior, por tratarse de la misma posición final y tener las mismas soluciones.

EJEMPLO 7: Calculo de las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$ para el manipulador de Stanford en la posición final dada por los vectores mostrados en la página 178 y con los datos de posición inicial del ejemplo 1.

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 6)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 0
oz=-1

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax= 1
ay= 0
az= 0

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 6)

E(1)= +24.29519
E(2)= +41.40962
E(4)= -31.04324
E(5)= +52.92503
E(6)= -70.05649
d(3)= +4.000000

DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA
DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL

E(1)final - E(1)inicial= -5.704813
E(2)final - E(2)inicial= -48.590378
E(4)final - E(4)inicial= -1.043243
E(5)final - E(5)inicial= +7.925034
E(6)final - E(6)inicial=-130.056488
d(3)final - d(3)inicial= -1.000000

MATRICES A DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 6)

MATRIZ A 1

+0.91144	+0.00000	-0.41144	+0.00000
+0.41144	-0.00000	+0.91144	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+0.75000	+0.00000	+0.66144	+0.00000
+0.66144	-0.00000	-0.75000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+4.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+0.85678	-0.00000	+0.51568	+0.00000
-0.51568	-0.00000	+0.85678	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+0.60286	+0.00000	+0.79785	+0.00000
+0.79785	-0.00000	-0.60286	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+0.34109	+0.94003	+0.00000	+0.00000
-0.94003	+0.34109	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 6)

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+2.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

Los resultados para este ejemplo se presentan en la página 178, mostrando con una leyenda que no existen las soluciones de la matriz T6, es decir, que no es posible para el manipulador alcanzar ésta posición final debido a limitaciones físicas del mismo; pero, si se cambia uno de los datos constructivos (la distancia entre elementos de la juntura 2), como se hizo en el ejemplo 3, sí es posible que el manipulador alcanze esa posición final, como muestran los resultados obtenidos en las páginas 179 y 180 con la existencia de soluciones y el cálculo de las matrices.

Otra de las opciones con las que se va ha trabajar es la llamada "MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES"; el movimiento entre posiciones inicial y final se va ha realizar de la forma mostrada en la figura 4.24.

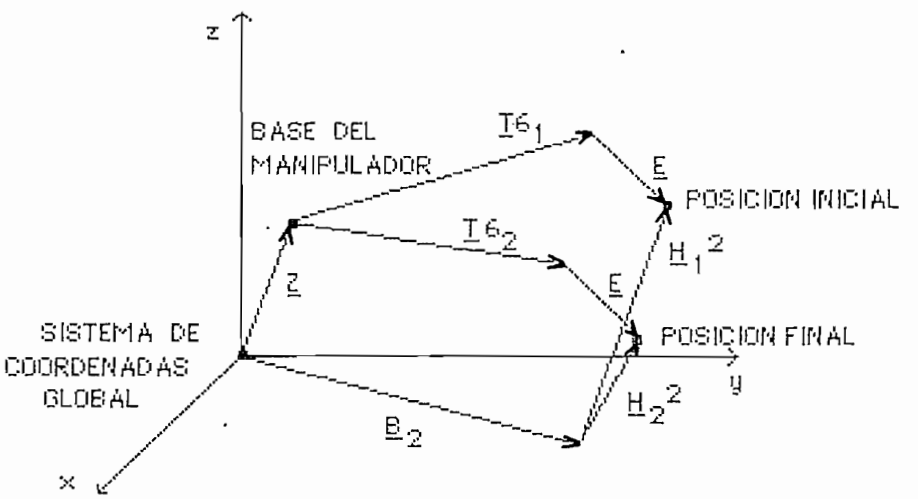


Figura 4.24 Movimiento entre posiciones

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 7)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox=-1
oy= 0
oz= 0

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax= 0
ay= 0
az= 1

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= .75
dy= 0
dz= 1

NO HAY SOLUCION PARA ESTA POSICION FINAL

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 7)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox=-1
oy= 0
oz= 0

COMPONENTES DEL VECTOR UNÌTARIO a

ax= 0
ay= 0
az= 1

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= .75
dy= 0
dz= 1

SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 7)

E(1)= -41.81031
E(2)= +90.00000
E(4)=+180.00000
E(5)= +90.00001
E(6)= -48.18968
d(3)= +0.559017

DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA
DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL

E(1)final - E(1)inicial= -41.810314
E(2)final - E(2)inicial= +90.000000
E(4)final - E(4)inicial=+180.000000
E(5)final - E(5)inicial= +90.000008
E(6)final - E(6)inicial= -48.189682
d(3)final - d(3)inicial= -0.440983

MATRICES A DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 7)

MATRIZ A 1

+0.74536	-0.00000	+0.66667	+0.00000
-0.66667	-0.00000	+0.74536	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.50000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.55902
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

-1.00000	-0.00000	+0.00000	+0.00000
-0.00000	+0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+0.66667	+0.74536	+0.00000	+0.00000
-0.74536	+0.66667	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 7)

+0.00000	-1.00000	+0.00000	+0.75000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	-0.00000
-0.00000	+0.00000	+1.00000	-0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

Hasta ahora de la figura anterior se han encontrado las matrices $\underline{T6}$ para las posiciones inicial y final ($\underline{T6}_1$ y $\underline{T6}_2$ respectivamente); los datos para las matrices $\underline{Z}$ (posición de la base del manipulador respecto de las coordenadas globales) y la matriz $\underline{E}$ (posición de la mano respecto de la sexta juntura del manipulador) se los asigna dentro del programa por ser constantes. En este caso en el que se considera sólo el movimiento del manipulador desde un punto inicial a un final donde existe un objeto, la matriz $\underline{E}$ no cambia, pero si es el caso de transportar un objeto esta matriz cambiará debido a la presencia del objeto en la mano del manipulador. Las matrices $\underline{Z}$ y $\underline{E}$ son:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz $\underline{B2}$ define la posición de un objeto respecto al sistema de coordenadas global y sus datos ingresan desde el teclado; el programa comprobará que éstos datos ingresados son correctos, es decir, que los vectores de orientación sean unitarios y que la matriz tenga la forma de una transformación homogenea.

Con los datos ingresados para la matriz $\underline{B2}$ se calcularán las

matrices $\underline{H}_2{}^2$ (posición final de la mano respecto del sistema de coordenadas localizado en el objeto) y $\underline{H}_1{}^2$ (posición inicial de la mano respecto del sistema de coordenadas localizado en el objeto), para luego con estas matrices, encontrar las soluciones de la matriz $\underline{D}(1)$ necesarias para la evaluación de la matriz de comando $\underline{D}(r)$. Con el valor dado para la base de tiempo r (entre 0 y 1) se evaluara la matriz de comando y, con esta matriz, se encontrará la posición intermedia del manipulador entre los puntos inicial y final, en camino hacia éste último. El programa procederá a comprobar si la posición intermedia es igual a la posición final deseada; si no es igual, pedirá el ingreso de un valor mayor para la base de tiempo; si es igual, el manipulador habrá llegado a su posición final. Tanto la posición final como la intermedia están dadas respecto al sistema de coordenadas global.

EJEMPLO 8: Movimiento entre las posiciones inicial y final de los ejemplos 1 y 5, respectivamente, y con la matriz de posición final respecto de las coordenadas globales (matriz $\underline{B}2$) mostrada en la parte superior de la página 183. Los valores para la base de tiempo son: 0; 0,3; 0,7; 1.

MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES

MATRIZ B2 (EJEMPLO No. 8)

+0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-1.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS
EN LA BASE DEL MANIPULADOR

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 0 (EJEMPLO No. 8)

MATRIZ DE COMANDO D(0)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .3 (EJEMPLO No. 8)

MATRIZ DE COMANDO D(.3)

+0.13938	-0.88004	+0.45399	+0.90000
+0.98769	+0.15643	-0.00000	+0.30000
-0.07102	+0.44840	+0.89101	+0.30000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+0.13938	-0.88004	+0.45399	+0.90000
+0.98769	+0.15643	-0.00000	+1.30000
-0.07102	+0.44840	+0.89101	+2.30000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .7 (EJEMPLO No. 8)

MATRIZ DE COMANDO D(.7)

-0.44840	+0.07102	+0.89101	+2.10000
-0.15643	-0.98769	-0.00000	+0.70000
+0.88004	-0.13938	+0.45399	+0.70000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.44840	+0.07102	+0.89101	+2.10000
-0.15643	-0.98769	-0.00000	+1.70000
+0.88004	-0.13938	+0.45399	+2.70000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 1 (EJEMPLO No. 8)

MATRIZ DE COMANDO D(1)

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+1.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

Los resultados para este ejercicio se presentan en las páginas 183 y 184. En las matrices de posición intermedia calculadas se puede apreciar que mientras va aumentandose el valor de la base de tiempo (r), tanto los vectores de orientación como el de desplazamiento toman valores cada vez más cercanos a los correspondientes de la posición final, es decir, el manipulador estaría pasando paulatinamente desde una posición inicial hasta otra final; que es lo que se deseaba hacer.

EJEMPLO 9: Movimiento entre las posiciones inicial y final de los ejemplos 2 y 5 y la matriz $\underline{B}_2$ mostrada en la parte superior de la página 186 (la misma del ejemplo anterior). La base de tiempo toma valores de 0; 0,5; 0,9; 1.

Los resultados para este ejemplo se presentan en las páginas 186 y 187 con características de aproximación entre posiciones similares a las del ejemplo anterior.

EJEMPLO 10: Movimiento entre la posición final del ejemplo anterior, pero ahora como posición inicial y, la posición inicial del ejemplo anterior, pero esta vez como posición final. La matriz $\underline{B}_2$ se muestra en

MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES

MATRIZ B2 (EJEMPLO No. 9)

+0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-1.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS
EN LA BASE DEL MANIPULADOR

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 0 (EJEMPLO No. 9)

MATRIZ DE COMANDO D(0)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.59280	+0.16073	+0.78915	+4.61928
+0.31965	+0.94635	+0.04737	+3.41339
-0.73920	+0.28033	-0.61237	-0.61237
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .5 (EJEMPLO No. 9)

MATRIZ DE COMANDO D(.5)

-0.53620	-0.78376	-0.31338	-1.08107
+0.80619	-0.58552	+0.08497	-0.29259
-0.25009	-0.20708	+0.94582	-1.77846
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+0.25009	+0.20708	+0.94582	+3.80964
+0.57970	-0.81445	+0.02504	+2.70670
+0.77551	+0.54203	-0.32373	+1.19381
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .9 (EJEMPLO No. 9)

MATRIZ DE COMANDO D(.9)

-0.62093	+0.56709	-0.54117	-1.94593
-0.73375	-0.66339	+0.14673	-0.52666
-0.27579	+0.48819	+0.82802	-3.20122
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+0.03251	-0.05754	+0.99781	+3.16193
-0.90592	-0.42341	+0.00510	+2.14134
+0.42219	-0.90411	-0.06589	+2.63876
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 1 (EJEMPLO No. 9)

MATRIZ DE COMANDO D(1)

-0.31965	+0.73920	-0.59280	-2.16215
-0.94635	-0.28033	+0.16073	-0.58518
-0.04737	+0.61237	+0.78915	-3.55692
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+3.00000
-1.00000	+0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	+0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

la página 190 y con los mismos valores para la base de tiempo del ejemplo anterior.

En las páginas 190 y 191 se presentan los resultados para este ejemplo, donde se puede apreciar que efectivamente se ha regresado a la posición de partida del ejemplo anterior. Cabe anotar que en el programa, por carecer de datos reales, no se consideran las limitaciones físicas a las variables de cada una de las junturas que en un manipulador real deben existir.

Finalmente se realizarán los mismos ejercicios anteriores pero con el manipulador de Elbow; con los siguientes cambios:

- para los ejemplos 11 y 12 los datos iniciales de las junturas son los de las tablas 4.5 y 4.6, respectivamente

- los datos constructivos que se van a variar ahora, son las tres distancias de elemento en las junturas 2, 3, 4 por los valores 5, 4, 4, respectivamente del ejemplo 13 similar al ejemplo 3 anterior

JUNTURA	VARIABLE	DATO
1	$\emptyset_1$	0
2	$\emptyset_2$	0
3	$\emptyset_3$	0
4	$\emptyset_4$	0
5	$\emptyset_5$	0
6	$\emptyset_6$	0

Tabla 4.5 Datos iniciales del ejemplo 11

JUNTURA	VARIABLE	DATO
1	$\emptyset_1$	90
2	$\emptyset_2$	90
3	$\emptyset_3$	90
4	$\emptyset_4$	0
5	$\emptyset_5$	90
6	$\emptyset_6$	90

Tabla 4.6 Datos iniciales del ejemplo 12

- la posición final del ejemplo 17 es distinta a la del ejemplo 7 anterior, como se muestra en la página 203.

Los resultados obtenidos se presentan en las páginas 192 a 211.

MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES

MATRIZ B2 (EJEMPLO No. 10)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS
EN LA BASE DEL MANIPULADOR

-0.59280	+0.16073	+0.78915	+4.61928
+0.31965	+0.94635	+0.04737	+3.41339
-0.73920	+0.28033	-0.61237	-0.61237
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 0 (EJEMPLO No. 10)

MATRIZ DE COMANDO D(0)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .3 (EJEMPLO No. 10)

MATRIZ DE COMANDO D(.3)

+0.84055	-0.54152	-0.01520	-0.42402
+0.53353	+0.82263	+0.19653	+1.08371
-0.09392	-0.17330	+0.98038	+0.48578
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.09392	-0.17330	+0.98038	+3.48578
-0.84055	+0.54152	+0.01520	+2.42402
-0.53353	-0.82263	-0.19653	+1.91629
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .7 (EJEMPLO No. 10)

MATRIZ DE COMANDO D(.7)

+0.23752	-0.97077	-0.03444	-0.98937
+0.87326	+0.19787	+0.44527	+2.52866
-0.42544	-0.13584	+0.89473	+1.13349
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.42544	-0.13584	+0.89473	+4.13349
-0.23752	+0.97077	+0.03444	+2.98937
-0.87326	-0.19787	-0.44527	+0.47134
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 1 (EJEMPLO No. 10)

MATRIZ DE COMANDO D(1)

-0.31965	-0.94635	-0.04737	-1.41339
+0.73920	-0.28033	+0.61237	+3.61237
-0.59280	+0.16073	+0.78915	+1.61928
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.59280	+0.16073	+0.78915	+4.61928
+0.31965	+0.94635	+0.04737	+3.41339
-0.73920	+0.28033	-0.61237	-0.61237
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MANIPULADOR DE ELBOW

DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS (EJEMPLO No. 11)

JUNTURA REVOLUTIVA 1

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 2

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 2
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 3

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 3
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 4

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 4
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 5

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 6

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

MATRICES A DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 11)

MATRIZ A 1

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+2.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+4.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 11)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+9.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MANIPULADOR DE ELBOW

DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS (EJEMPLO No. 12)

JUNTURA REVOLUTIVA 1

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 90

JUNTURA REVOLUTIVA 2

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 2
ANGULO DEL PAR INICIAL= 90

JUNTURA REVOLUTIVA 3

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 3
ANGULO DEL PAR INICIAL= 90

JUNTURA REVOLUTIVA 4

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 4
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 5

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 90

JUNTURA REVOLUTIVA 6

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 90

MATRICES A DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 12)

MATRIZ A 1

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

-0.00000	-1.00000	+0.00000	-0.00000
+1.00000	-0.00000	+0.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

-0.00000	-1.00000	+0.00000	-0.00000
+1.00000	-0.00000	+0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+4.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

-0.00000	-1.00000	+0.00000	+0.00000
+1.00000	-0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 12)

-0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	-1.00000	-7.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MANIPULADOR DE ELBOW

DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS (EJEMPLO No. 13)

JUNTURA REVOLUTIVA 1

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 2

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 5
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 3

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 4
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 4

ANGULO DE TORSION=-90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 4
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 5

ANGULO DE TORSION= 90
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

JUNTURA REVOLUTIVA 6

ANGULO DE TORSION= 0
DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS= 0
DISTANCIA DEL ELEMENTO= 0
ANGULO DEL PAR INICIAL= 0

MATRICES A DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 13)

MATRIZ A 1

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+5.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+4.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+4.00000
+0.00000	-0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION INICIAL (EJEMPLO No. 13)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+13.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 14)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 0
oz= 1

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax=-1
ay= 1
az= 0

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

ERROR EN LOS DATOS DE LOS VECTORES o Y a

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 15)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 1
oz= 0

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax= 0
ay= 0
az= 1

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 15)

E(1)= +33.69007
E(2)= -72.33098
E(3)= +70.52876
E(4)= +91.80221
E(5)= +90.00000
E(6)=+236.30992

DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA
DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL

E(1)final - E(1)inicial= +33.690067
E(2)final - E(2)inicial= -72.330978
E(3)final - E(3)inicial= +70.528763
E(4)final - E(4)inicial= +91.802208
E(5)final - E(5)inicial= +90.000000
E(6)final - E(6)inicial=+236.309921

MATRICES A DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 15)

MATRIZ A 1

+0.83205	+0.00000	+0.55470	+0.00000
+0.55470	-0.00000	-0.83205	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+0.30352	+0.95283	+0.00000	+0.60704
-0.95283	+0.30352	+0.00000	-1.90565
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+0.33333	-0.94281	+0.00000	+1.00000
+0.94281	+0.33333	+0.00000	+2.82843
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

-0.03145	+0.00000	-0.99951	-0.12580
+0.99951	+0.00000	-0.03145	+3.99802
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

-0.55470	+0.83205	+0.00000	+0.00000
-0.83205	-0.55470	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 15)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 16)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 1
oz= 0

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax= 0
ay= 0
az= 1

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 16)

E(1)= +33.69007
E(2)= -72.33098
E(3)= +70.52876
E(4)= +91.80221
E(5)= +90.00000
E(6)=+236.30992

DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA
DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL

E(1)final - E(1)inicial= -56.309933
E(2)final - E(2)inicial=-162.330963
E(3)final - E(3)inicial= -19.471237
E(4)final - E(4)inicial= +91.802208
E(5)final - E(5)inicial= +0.000000
E(6)final - E(6)inicial=+146.309921

MATRICES A DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 16)

MATRIZ A 1

+0.83205	+0.00000	+0.55470	+0.00000
+0.55470	-0.00000	-0.83205	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+0.30352	+0.95283	+0.00000	+0.60704
-0.95283	+0.30352	+0.00000	-1.90565
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+0.33333	-0.94281	+0.00000	+1.00000
+0.94281	+0.33333	+0.00000	+2.82843
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

-0.03145	+0.00000	-0.99951	-0.12580
+0.99951	+0.00000	-0.03145	+3.99802
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

-0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

-0.55470	+0.83205	+0.00000	+0.00000
-0.83205	-0.55470	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 16)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 17)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 0
oz= 1

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax=-1
ay= 0
az= 0

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

NO HAY SOLUCION PARA ESTA POSICION FINAL

VECTORES o, a, d DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 17)

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO o

ox= 0
oy= 0
oz= 1

COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO a

ax=-1
ay= 0
az= 0

COMPONENTES DEL VECTOR d

dx= 3
dy= 2
dz= 3

SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 17)

E(1)= +26.56505
E(2)= +16.80980
E(3)= +6.05175
E(4)=+157.13844
E(5)=+116.56506
E(6)=+180.00000

DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA
DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL

E(1)final - E(1)inicial= +26.565052
E(2)final - E(2)inicial= +16.809801
E(3)final - E(3)inicial= +6.051747
E(4)final - E(4)inicial=+157.138443
E(5)final - E(5)inicial=+116.565063
E(6)final - E(6)inicial=+180.000000

MATRICES A DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 17)

MATRIZ A 1

+0.89443	+0.00000	+0.44721	+0.00000
+0.44721	-0.00000	-0.89443	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 2

+0.95727	-0.28920	+0.00000	+4.78635
+0.28920	+0.95727	+0.00000	+1.44598
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 3

+0.99443	-0.10543	+0.00000	+3.97771
+0.10543	+0.99443	+0.00000	+0.42171
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 4

-0.92145	+0.00000	-0.38851	-3.68579
+0.38851	+0.00000	-0.92145	+1.55402
+0.00000	-1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 5

-0.44721	+0.00000	+0.89443	+0.00000
+0.89443	+0.00000	+0.44721	+0.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ A 6

-1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
-0.00000	-1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL (EJEMPLO No. 17)

-0.00000	+0.00000	-1.00000	+4.00000
-1.00000	-0.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES

MATRIZ B2 (EJEMPLO No. 18)

+0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-1.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS
EN LA BASE DEL MANIPULADOR

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 0 (EJEMPLO No. 18)

MATRIZ DE COMANDO D(0)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+9.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	-1.00000
+0.00000	+1.00000	-0.00000	-0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .3 (EJEMPLO No. 18)

MATRIZ DE COMANDO D(.3)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	-1.80000
-0.00000	+0.89101	+0.45399	+0.90000
-0.00000	-0.45399	+0.89101	-0.90000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+7.20000
+0.00000	+0.45399	-0.89101	-0.10000
-0.00000	+0.89101	+0.45399	+0.90000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .7 (EJEMPLO No. 18)

MATRIZ DE COMANDO D(.7)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	-4.20000
-0.00000	+0.45399	+0.89101	+2.10000
+0.00000	-0.89101	+0.45399	-2.10000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+4.80000
-0.00000	+0.89101	-0.45399	+1.10000
-0.00000	+0.45399	+0.89101	+2.10000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 1 (EJEMPLO No. 18)

MATRIZ DE COMANDO D(1)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	-6.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
+0.00000	-1.00000	-0.00000	-3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES

MATRIZ B2 (EJEMPLO No. 19)

+0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-1.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS
EN LA BASE DEL MANIPULADOR

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 0 (EJEMPLO No. 19)

MATRIZ DE COMANDO D(0)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	-1.00000	-8.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .5 (EJEMPLO No. 19)

MATRIZ DE COMANDO D(.5)

+0.50000	-0.50000	-0.70711	-0.50000
+0.70711	+0.70711	-0.00000	+1.50000
+0.50000	-0.50000	+0.70711	-5.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+0.70711	+0.70711	+0.00000	+1.50000
-0.50000	+0.50000	-0.70711	-3.00000
-0.50000	+0.50000	+0.70711	+2.50000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .9 (EJEMPLO No. 19)

MATRIZ DE COMANDO D(.9)

+0.02447	-0.15451	-0.98769	-0.90000
+0.98769	+0.15643	-0.00000	+2.70000
+0.15451	-0.97553	+0.15643	-9.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+0.98769	+0.15643	+0.00000	+2.70000
-0.15451	+0.97553	-0.15643	+1.00000
-0.02447	+0.15451	+0.98769	+2.90000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 1 (EJEMPLO No. 19)

MATRIZ DE COMANDO D(1)

-0.00000	+0.00000	-1.00000	-1.00000
+1.00000	-0.00000	-0.00000	+3.00000
-0.00000	-1.00000	-0.00000	-10.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	-0.00000	+0.00000	+3.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES

MATRIZ B2 (EJEMPLO No. 20)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS
EN LA BASE DEL MANIPULADOR

-0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
-0.00000	-0.00000	-1.00000	-8.00000
-1.00000	-0.00000	+0.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 0 (EJEMPLO No. 20)

MATRIZ DE COMANDO D(0)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+1.00000	+0.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+1.00000	+0.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+1.00000	+0.00000	+0.00000	+3.00000
-0.00000	+1.00000	+0.00000	+2.00000
-0.00000	-0.00000	+1.00000	+3.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .3 (EJEMPLO No. 20)

MATRIZ DE COMANDO D(.3)

+0.15643	-0.98769	-0.00000	-0.90000
+0.88004	+0.13938	-0.45399	-3.00000
+0.44840	+0.07102	+0.89101	-0.30000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

+0.15643	-0.98769	+0.00000	+2.10000
+0.88004	+0.13938	-0.45399	-1.00000
+0.44840	+0.07102	+0.89101	+2.70000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= .7 (EJEMPLO No. 20)

MATRIZ DE COMANDO D(.7)

-0.98769	+0.15643	-0.00000	-2.10000
-0.07102	-0.44840	-0.89101	-7.00000
-0.13938	-0.88004	+0.45399	-0.70000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.98769	+0.15643	-0.00000	+0.90000
-0.07102	-0.44840	-0.89101	-5.00000
-0.13938	-0.88004	+0.45399	+2.30000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

PARA LA BASE DE TIEMPO r= 1 (EJEMPLO No. 20)

MATRIZ DE COMANDO D(1)

+0.00000	+1.00000	-0.00000	-3.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	-10.00000
-1.00000	+0.00000	-0.00000	-1.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)

-0.00000	+1.00000	-0.00000	+0.00000
+0.00000	-0.00000	-1.00000	-8.00000
-1.00000	-0.00000	-0.00000	+2.00000
+0.00000	+0.00000	+0.00000	+1.00000

4.6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Con el estudio analítico realizado y los resultados obtenidos del programa, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

1- La versatilidad de las transformaciones homogeneas en el estudio de la cinemática, puesto que, en ellas es fácilmente visualizada la dirección de los vectores unitarios que definen un sistema de coordenadas en el espacio, respecto de otro sistema de coordenadas también en el espacio, además, de la distancia existente entre los origenes de ambos sistemas de coordenadas. Estas razones hacen de las transformaciones homogeneas un poderoso instrumento dentro del análisis de posiciones en el espacio y movimiento entre éstas.

2- El método utilizado para definir los sistemas de coordenadas en cada una de las junturas de los manipuladores estudiados y, posteriormente, determinar las matrices $\underline{A}$ y $\underline{T}6$, es un método general fácil de ser aplicado en otros manipuladores; tomando siempre en cuenta que la matriz $\underline{T}6$ a determinarse, para una configuración dada, depende de las direcciones escogidas para

los ejes x_n (en caso que haya que escogerlas) y de los datos constructivos.

3- La solución obtenida para la matriz $\underline{T}6$ es aplicable sólo a la configuración inicial considerada, para otra configuración inicial, será necesario repetir el análisis para determinar la nueva matriz $\underline{T}6$ y encontrar sus soluciones.

4- Se da el caso que para algunas posiciones finales dadas no existe solución para la matriz $\underline{T}6$, es decir, éstas posiciones finales no podrán ser alcanzadas por el manipulador real debido a los datos constructivos dados inicialmente. No se están considerando los límites de movimiento de cada una de las junturas, por carecer de esos datos.

5- Cuando la variable de juntura es un ángulo, se lo calcula usando la función arcotangente; porque con ella se tiene un rango de definición entre $-\pi$ y π dependiendo del signo del denominador del argumento, se puede detectar cuando el numerador o denominador del argumento es igual a cero para encontrar el valor correcto del ángulo y, lo más importante, la

exactitud de la función en todo su rango de definición respecto de otras funciones.

6- La descripción de la posición final del manipulador, se facilita cuando se la hace en la herramienta misma aunque, para después aplicar las ecuaciones de solución de la matriz T6 sea necesario hacer la transformación correspondiente.

7- El movimiento entre dos posiciones se lo efectúa mediante la definición de una transformación, llamada de comando, con la finalidad de, primero, colocar la mano en la posición que debe tener al llegar a la posición final y, segundo, realizar la traslación entre las dos posiciones.

8- La matriz de comando es función de una base de tiempo, que puede tomar valores numéricos entre 0 y 1. Cuando tenga el valor 0, la matriz de comando es igual a la matriz identidad, por tanto el movimiento no se ha iniciado; con la base de tiempo igual a 1, la matriz de comando tiene un valor tal que permite alcanzar la posición final deseada; con valores intermedios de la base de tiempo se determinan posiciones

entre la inicial y la final.

9- La implementación del programa y los resultados que se obtuvieron, han permitido realizar un análisis más profundo de la formulación matemática usada en el estudio de la cinemática de manipuladores, que podrán ser usados en trabajos futuros de control de movimiento de manipuladores.

Para la realización de trabajos futuros, vale mencionar las siguientes recomendaciones:

1- Emprender el estudio y análisis de la dinámica involucrada en el sistema mecánico del robot, su relación con la formulación matemática tratada en esta tesis.

2- Estudio de los elementos motrices y sensores empleados en robots, sus características y posibilidades de uso.

3- Continuar el estudio con los sistemas de control con microprocesador, su programación.

APENDICE A: MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

APENDICE A

MANUAL DE USO DE LOS PROGRAMAS

1- Encender el computador con el switch que se encuentra en la parte posterior izquierda.

2- Después de la indicación sonora, insertar el diskette "TESIS DE GRADO" y esperar hasta que en pantalla aparezca una ventana con nombre "TESIS DE GRADO" mostrando los cuatro archivos del diskette: "BASIC", "Sistem Folder", "Empty Folder" y "TESIS".

3- Con ayuda del "ratón", llevar el cursor hasta que se encuentre sobre la figura que representa al archivo "TESIS" y aplicar un doble click para abrirlo.

4- Esperar varios segundos hasta que en pantalla aparezca una ventana titulada "MANIPULADORES", que contiene tres opciones: "DE STANFORD", "DE ELBOW" y "FINAL"; con los dos primeros se seleccionará el manipulador con el que se va ha

trabajar y, el tercero, se usará para salir del programa.

5- Después de escogerse el manipulador, se cierra la ventana anterior y aparece otra titulada "MANIPULADOR DE STANFORD" o "MANIPULADOR DE ELBOW", dependiendo del escogido, que muestra cuatro opciones: "POSICION INICIAL", "POSICION FINAL", "MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES" y "FINAL".

6- Se elige la opción "POSICION INICIAL" para ingresar desde teclado los datos iniciales de las junturas del manipulador, para lo cual, en pantalla aparecen las leyendas necesarias; a continuación se calculan las matrices A y T6 de esta posición y el programa vuelve a mostrar la ventana anterior.

7- Al elegir la opción "POSICION FINAL", se ingresan desde el teclado los vectores o, a y d de una posición final, en pantalla aparecen las leyendas respectivas. Para ésta posición el programa encuentra la solución de la matriz T6, la diferencia entre las variables de juntura de las posiciones final e inicial y las matrices A y T6. Posteriormente el programa regresa nuevamente a la ventana anterior.

8- Escogiendo la opción "MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES", como su nombre los dice, este programa calculará una matriz de comando usada para pasar desde la posición inicial a la final a medida que se hace variar el dato de la base de tiempo.

9- Para regresar a la ventana donde se seleccionan los manipuladores, se escogerá la opción "FINAL".

10- Escogiendo la opción "FINAL" de la ventana "MANIPULADORES" el programa cierra el archivo "TESIS" y regresa a la ventana titulada "TESIS DE GRADO". Para retirar el diskette se escoge "Eject" del menú "FILE".

APENDICE B: LISTADOS DE LOS PROGRAMAS

```
      REM    ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

      REM    FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

      REM    DEPARTAMENTO DE ELECTRONICA Y CONTROL

      REM    TESIS DE GRADO

      REM    CINEMATICA DE MANIPULADORES DE ROBOT

      REM    CARLOS ERNESTO CASTRO VINUEZA

      DIM F(6),D(6),B(6),E(6),A(6,4,4),T6(4,4),C(4,4),O(4,4),Z(4,4),B2(4,4)
      DIM T61(4,4),ZI(4,4),T62(4,4),M(4,4),H12(4,4),C1(6),H22(4,4),P(3,3)
      DIM SD(6),DR(4,4),B2I(4,4),PI(4,4),PF(4,4)
      DEFINT I, K, J, L
      REM LECTURA DE DATOS DE LA MATRIZ O
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      READ O(I,J)
      NEXT J
      NEXT I
      DATA 1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,1
      REM LECTURA DE DATOS DE LA MATRIZ  Z
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      READ Z(I,J)
      NEXT J
      NEXT I
      DATA 1,0,0,5,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1
      PIP=ATN(1)*4
10  WINDOW 2,"MANIPULADORES",(50,100)-(280,210),1
      PRINT "SELECCIONE EL BOTON"
      BUTTON 1,1,"DE STANFORD",(5,25)-(200,40),2
      BUTTON 2,1,"DE ELBOW",(5,55)-(200,70),2
      BUTTON 3,1,"FINAL",(5,85)-(200,100),2
      WHILE DIALOG(0) <>1: WEND
      BOTON=DIALOG(1)
      WINDOW CLOSE 2
      ON BOTON GOTO 11, 12, 14
13  BUTTON 1,1,"POSICION INICIAL",(5,25)-(200,40), 2
      BUTTON 2,1,"POSICION FINAL",(5,55)-(200,70), 2
      BUTTON 3,1,"MOVIMIENTO ENTRE POSICIONES",(5,85)-(230,100), 2
      BUTTON 4,1,"FINAL",(5,115)-(200,130), 2
      WHILE DIALOG(0) <>1: WEND
      BOTON=DIALOG(1)
      WINDOW CLOSE 2
      ON BOTON GOSUB POSINICIAL, POSFINAL, MOVIMIENTO,10
      IF X=0 THEN 12
11  WINDOW 2,"MANIPULADOR DE STANFORD",(50,100)-(320,250),1
      REM X= NUMERO DE LA JUNTURA PRISMATICA
      X=3
      GOTO 13
12  WINDOW 2,"MANIPULADOR DE ELBOW",(50,100)-(320,250), 1
      X=0
      GOTO 13
14  SYSTEM
```

```
      POSINICIAL:
      REM SUBRUTINA PARA INGRESO DE DATOS INICIALES
      EJEM=EJEM+1
      PRINT
      INPUT"IMPRESION EN PAPEL  (SI O NO)  ";PRI$
      PRINT
      IF PRI$<>"SI" THEN 20
      LPRINT
      LPRINT
      IF X=0 THEN 21
      LPRINT SPC(36)"MANIPULADOR DE STANFORD"
      GOTO 22
21    LPRINT SPC(36)"MANIPULADOR DE ELBOW"
22    LPRINT
      LPRINT
20    PRINT SPC(7)"INGRESAR DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS"
      PRINT
      FOR I=1 TO 6
      IF X=I THEN 23
      REM JUNTURA REVOLUTIVA
      PRINT
      PRINT SPC(17);"JUNTURA REVOLUTIVA";I
      PRINT
      PRINT SPC(16)"ANGULO DE TORSION:  ";
      INPUT"'=";F(I)
      PRINT SPC(16)"DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS:  ";
      INPUT"d=";D(I)
      PRINT SPC(16)"DISTANCIA DEL ELEMENTO:  ";
      INPUT"a=";B(I)
      PRINT SPC(16)"ANGULO DEL PAR INICIAL:  ";
      INPUT"?=";E(I)
      PRINT
      F(I)=F(I)*PIP/180
      E(I)=E(I)*PIP/180
      GOTO 24
23    REM JUNTURA PRISMATICA
      PRINT SPC(17);"JUNTURA PRISMATICA";I
      PRINT
      PRINT SPC(16)"ANGULO DE TORSION:  ";
      INPUT"'=";F(I)
      PRINT SPC(16)"DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS INICIAL:  ";
      INPUT"d=";D(I)
      PRINT SPC(16)"ANGULO DEL PAR:  ";
      INPUT"?=";E(I)
      PRINT
      F(I)=F(I)*PIP/180
      E(I)=E(I)*PIP/180
24    NEXT I
      IF PRI$<>"SI" THEN 25
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(18)"DATOS DE LA POSICION INICIAL DE LAS JUNTURAS  (EJEMPLO No.  ";E
      LPRINT
      FOR I=1 TO 6
      IF X=I THEN 26
      LPRINT
      LPRINT SPC(40)"JUNTURA REVOLUTIVA  ";I
      LPRINT
```

```
      LPRINT SPC(35)"ANGULO DE TORSION=";F(I)*180/PIP
      LPRINT SPC(35)"DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS=";D(I)
      LPRINT SPC(35)"DISTANCIA DEL ELEMENTO=";B(I)
      LPRINT SPC(35)"ANGULO DEL PAR INICIAL=";E(I)*180/PIP
      LPRINT
      GOTO 27
26  LPRINT
      LPRINT SPC(40)"JUNTURA PRISMATICA  ";I
      LPRINT
      LPRINT SPC(35)"ANGULO DE TORSION=";F(I)*180/PIP
      LPRINT SPC(35)"DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS INICIAL=";D(I)
      LPRINT SPC(35)"ANGULO DEL PAR=";E(I)*180/PIP
      LPRINT
27  NEXT I
      PRINT
      INPUT"PONGA OTRA HOJA EN LA IMPRESORA (RETURN PARA CONTINUAR)";Q
25  POSI$="INICIAL"
      GOSUB CALCULOT6
      RETURN

      CALCULOT6:
      REM CALCULO DE LAS MATRICES An
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(10)"MATRICES  A  DE LA POSICION  ";POSI$"  (EJEMPLO No.  ";EJEM")"
      FOR I=1 TO 6
      A(I,1,1)=COS(E(I))
      A(I,2,1)=SIN(E(I))
      A(I,3,2)=SIN(F(I))
      A(I,3,3)=COS(F(I))
      A(I,4,4)=1
      A(I,3,4)=D(I)
      A(I,1,2)=-A(I,2,1)*A(I,3,3)
      A(I,1,3)=A(I,2,1)*A(I,3,2)
      A(I,2,2)=A(I,1,1)*A(I,3,3)
      A(I,2,3)=-A(I,1,1)*A(I,3,2)
      IF X=I THEN 30
      A(I,1,4)=B(I)*A(I,1,1)
      A(I,2,4)=B(I)*A(I,2,1)
30  PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(26)"MATRIZ  A";I
      PRINT
      FOR J=1 TO 4
      PRINT SPC(8)
      PRINT USING "+££.£££££        "; A(I,J,1), A(I,J,2), A(I,J,3), A(I,J,4)
      NEXT J
      PRINT
      NEXT I
      REM CALCULO DE LA MATRIZ T6
      FOR J=1 TO 4
      FOR K=1 TO 4
      T6(J,K)=A(6,J,K)
      NEXT K
      NEXT J
      FOR I=5 TO 1 STEP -1
      FOR J=1 TO 4
      FOR K=1 TO 4
```

```
C(J,K)=T6(J,K): T6(J,K)=0
NEXT K
NEXT J
FOR J=1 TO 4
FOR K=1 TO 4
FOR L=1 TO 4
T6(J,K)=T6(J,K)+A(I,J,L)*C(L,K)
NEXT L
NEXT K
NEXT J
NEXT I
PRINT
PRINT
PRINT SPC(10)"MATRIZ  T6  DE LA POSICION ";POSI$"  (EJEMPLO No.  ";EJEM")"
PRINT
FOR J=1 TO 4
PRINT SPC(8)
PRINT USING "+££.£££££        "; T6(J,1), T6(J,2), T6(J,3), T6(J,4)
NEXT J
PRINT
IF PRI$<>"SI" THEN 31
LPRINT SPC(23)"MATRICES  A  DE LA POSICION ";POSI$"  (EJEMPLO No.  ";EJEM")"
FOR I=1 TO 6
LPRINT
LPRINT
LPRINT SPC(44)"MATRIZ  A";I
LPRINT
FOR J=1 TO 4
LPRINT SPC(18)
LPRINT USING"+££.£££££        ";A(I,J,1),A(I,J,2),A(I,J,3),A(I,J,4)
NEXT J
NEXT I
LPRINT
LPRINT
LPRINT
LPRINT SPC(23)"MATRIZ  T6  DE LA POSICION ";POSI$"  (EJEMPLO No.  ";EJEM")"
LPRINT
FOR I=1 TO 4
LPRINT SPC(18)
LPRINT USING"+££.£££££        ";T6(I,1),T6(I,2),T6(I,3),T6(I,4)
NEXT I
31 PRINT
INPUT"RETURN PARA CONTINUAR";Q
RETURN


SOLUCIONT6:
PRINT
N=1
IF x<>3 THEN GOTO 40
REM SUBRUTINA CON LA SOLUCION DEL MANIPULADOR DE STANFORD
FOR I=1 TO 6
C1(I)=E(I)
NEXT I
C1(3)=D(3)
R=DX^2+DY^2-D(2)^2
IF R<0 THEN 41
REM CONFIGURACION DE HOMBRO IZQUIERDO H=0
REM CONFIGURACION DE HOMBRO DERECHO H=1
```

```
      H=1
      V=D(2)/SQR(R)
      IF H=1 THEN 42
      V=-V
42  E(1)=ATN(DY/DX)-ATN(V)
      IF DX)=0 THEN 43
      E(1)=E(1)+PIP
43  IF V)=0 THEN 44
      E(1)=E(1)+PIP
44  C1=COS(E(1))
      S1=SIN(E(1))
      E(2)=ATN((C1*DX+S1*DY)/DZ)
      IF DZ)=0 THEN 45
      E(2)=E(2)+PIP
45  C2=COS(E(2))
      S2=SIN(E(2))
      D(3)=S2*(C1*DX+S1*DY)+C2*DZ
      U=C2*(C1*AX+S1*AY)-S2*AZ
      V=-S1*AX+C1*AY
      E(4)=ATN(V/U)
      IF U)=0 THEN 46
      E(4)=E(4)+PIP
46  C4=COS(E(4))
      S4=SIN(E(4))
      C5=S2*(C1*AX+S1*AY)+C2*AZ
      S5=C4*U+S4*V
      E(5)=ATN(S5/C5)
      IF C5)=0 THEN 47
      E(5)=E(5)+PIP
47  IF E(5)<>0 THEN 48
      E(4)=0
      GOTO 49
48  IF E(5)<0 THEN 50
      GOTO 51
50  E(4)=E(4)+PIP
49  C4=COS(E(4))
      S4=SIN(E(4))
      C5=S2*(C1*AX+S1*AY)+C2*AZ
      S5=C4*U+S4*V
      E(5)=ATN(S5/C5)
51  V=C2*(C1*OX+S1*OY)-S2*OZ
      U=-S1*OX+C1*OY
      W=-S4*V+C4*U
      Y=-C5*(C4*V+S4*U)+S5*(S2*(C1*OX+S1*OY)+C2*OZ)
      E(6)=ATN(Y/W)
      IF W)=0 THEN 52
      E(6)=E(6)+PIP
      GOTO 52
40  REM SUBRUTINA CON LA SOLUCION DEL MANIPULADOR DE ELBOW
      FOR I=1 TO 6
      C1(I)=E(I)
      NEXT I
      E(1)=ATN(DY/DX)
      IF DX)=0 THEN 53
      E(1)=E(1)+PIP
53  C1=COS(E(1))
      S1=SIN(E(1))
      U=C1*AX+S1*AY
      W=ATN(AZ/U)
```

```
      IF U)=0 THEN 54
      W=W+PIP
54  W1=COS(W)
      W2=SIN(W)
      PX=C1*DX+S1*DY-B(4)*W1
      PY=DZ-B(4)*W2
      IF (PX^2+PY^2)<((B(2)+B(3))^2) THEN 55
41  PRINT
      PRINT SPC(15)"NO HAY SOLUCION PARA ESTA POSICION FINAL"
      PRINT
      IF PRI$<>"SI" THEN 56
      LPRINT
      LPRINT SPC(28)"NO HAY SOLUCION PARA ESTA POSICION FINAL"
      LPRINT
56  E(1)=C1(1)
      N=0
      RETURN
55  C3=(PX^2+PY^2-B(2)^2-B(3)^2)/(2*B(2)*B(3))
      REM CONFIGURACION ELBOW UP H=1
      REM CONFIGURACION ELBOW DOWN H=0
      H=1
      S3=SQR(1-C3^2)
      IF H=1 THEN 57
      S3=-S3
57  E(3)=ATN(S3/C3)
      IF C3=0 THEN 58
      E(3)=E(3)+PIP
58  V=C3*B(3)+B(2)
      U=V*PX+S3*B(3)*PY
      E(2)=ATN((V*PY-B(3)*S3*PX)/U)
      IF U)=0 THEN 59
      E(2)=E(2)+PIP
59  E(4)=W-E(2)-E(3)
      C5=S1*AX-C1*AY
      S5=W1*(C1*AX+S1*AY)+W2*AZ
      E(5)=ATN(S5/C5)
      IF C5)=0 THEN 60
      E(5)=E(5)+PIP
60  C6=-W2*(C1*OX+S1*OY)+W1*OZ
      E(6)=ATN((-C5*(W1*(C1*OX+S1*OY)+W2*OZ)+S5*(S1*OX-C1*OY))/C6)
      IF C6)=0 THEN 52
      E(6)=E(6)+PIP
52  PRINT
      PRINT SPC(4)"SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL  (EJEMPLO No.  ";EJ
      PRINT
      FOR I=1 TO 6
      IF I=X THEN 61
      PRINT SPC(24) "E(";I")=";
      PRINT USING"+£££.£££££";E(I)*180/PIP
61  NEXT I
      IF X=0 THEN 62
      PRINT SPC(24)"d(";X")=";
      PRINT USING"+£££.£££££";D(X)
62  PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(13)"DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA"
      PRINT SPC(17)"DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL"
      PRINT
      FOR I=1 TO 6
```

```
      IF I=X THEN 63
      PRINT SPC(15)"E(";I")final - E(";I")inicial =";
      PRINT USING"+£££.£££££££";(E(I)-C1(I))*180/PIP
63  NEXT I
      IF X=0 THEN 64
      PRINT SPC(15)"d(";X")final - d(";X")inicial =";
      PRINT USING"+£££.£££££££";(D(X)-C1(X))
      PRINT
64  IF PRI$()"SI" THEN 65
      LPRINT
      LPRINT SPC(16)"SOLUCION DE LA MATRIZ T6 DE LA POSICION FINAL  (EJEMPLO No.  ";E
      LPRINT
      FOR I=1 TO 6
      IF I=X THEN 66
      LPRINT SPC(36)"E(";I")=";
      LPRINT USING"+£££.£££££";E(I)*180/PIP
66  NEXT I
      IF X=0 THEN 67
      LPRINT SPC(36)"d(";X")=";
      LPRINT USING"+£££.£££££££";D(X)
67  LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(26)"DIFERENCIA ENTRE LAS VARIABLES DE JUNTURA"
      LPRINT SPC(30)"DE LAS POSICIONES INICIAL Y FINAL"
      LPRINT
      FOR I=1 TO 6
      IF I=X THEN 68
      LPRINT SPC(28)"E(";I")final - E(";i")inicial=";
      LPRINT USING"+£££.£££££££";(E(I)-C1(I))*180/PIP
68  NEXT I
      IF X=0 THEN 69
      LPRINT SPC(28)"d(";X")final - d(";X")inicial=";
      LPRINT USING"+£££.£££££££";(D(X)-C1(X))
69  PRINT
      INPUT"PONGA OTRA HOJA EN LA IMPRESORA (RETURN PARA CONTINUAR)";Q
65  PRINT
      INPUT "RETURN PARA CONTINUAR";Q
      RETURN


      POSFINAL:
70  REM INGRESO DE LOS VECTORES  o, a, d  DE LA POSICION FINAL
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(8)"DATOS DE  LOS VECTORES  o, a, d  DE LA POSICION FINAL"
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(7)"INGRESAR COMPONENTES  x,y,z  DEL VECTOR UNITARIO  o"
      PRINT
      PRINT SPC(20)
      INPUT"ox=  ";OX
      PRINT SPC(20)
      INPUT"oy=  ";OY
      PRINT SPC(20)
      INPUT"oz=  ";OZ
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(7)"INGRESAR COMPONENTES  x,y,z  DEL VECTOR UNITARIO  a"
```

```
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(20)
      INPUT"ax=  ";AX
      PRINT SPC(20)
      INPUT"ay=  ";AY
      PRINT SPC(20)
      INPUT"az=  ";AZ
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(12)"INGRESAR COMPONENTES  x,y,z  DEL VECTOR  d"
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(20)
      INPUT"dx=  ";DX
      PRINT SPC(20)
      INPUT"dy=  ";DY
      PRINT SPC(20)
      INPUT"dz=  ";DZ
      PRINT
      IF PRI$<>"SI" THEN 71
      PRINT
      INPUT"PONGA OTRA HOJA EN LA IMPRESORA (RETURN PARA CONTINUAR)";Q
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(22)"VECTORES  o, a, d  DE LA POSICION FINAL  (EJEMPLO No.  ";EJEM")
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(30)"COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO  o"
      LPRINT
      LPRINT SPC(42)"ox=";OX
      LPRINT SPC(42)"oy=";OY
      LPRINT SPC(42)"oz=";OZ
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(30)"COMPONENTES DEL VECTOR UNITARIO  a"
      LPRINT
      LPRINT SPC(42)"ax=";AX
      LPRINT SPC(42)"ay=";AY
      LPRINT SPC(42)"az=";AZ
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(35)"COMPONENTES DEL VECTOR  d"
      LPRINT
      LPRINT SPC(42)"dx=";DX
      LPRINT SPC(42)"dy=";DY
      LPRINT SPC(42)"dz=";DZ
      LPRINT
      REM COMPROBACION DE LOS DATOS INGRESADOS
71    N=AX^2+AY^2+AZ^2-1
      IF ABS(N)).000001 THEN 72
      N=OX^2+OY^2+OZ^2-1
      IF ABS(N)).000001 THEN 72
      N=OX*AX+OY*AY+OZ*AZ
      IF ABS(N)<.000001 THEN 73
72    PRINT
      PRINT SPC(11)"ERROR EN LOS DATOS DE LOS VECTORES  o  Y  a"
      PRINT
```

```
      IF PRI$<>"SI" THEN 70
      LPRINT
      LPRINT SPC(26)"ERROR EN LOS DATOS DE LOS VECTORES  o  Y  a"
      LPRINT
      GOTO 70
73  FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      T61(I,J)=T6(I,J)
      NEXT J
      NEXT I
      POSI$="FINAL"
      REM TRANSFORMACION DE LOS DATOS DE POSICION FINAL
      DX=DX+AX*(-O(3,4))
      DY=DY+AY*(-O(3,4))
      DZ=DZ+AZ*(-O(3,4))
      GOSUB SOLUCIONT6
      IF N=0 THEN 70
      GOSUB CALCULOT6
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      T62(I,J)=T6(I,J)
      NEXT J
      NEXT I
      RETURN


      MOVIMIENTO:
80  REM INGRESO DE LOS DATOS POR FILAS DE LA MATRIZ  B2
      PRINT
      PRINT SPC(9)"INGRESAR POR FILAS LA MATRIZ DE LA POSICION FINAL"
      PRINT SPC(12)"RESPECTO A LAS COORDENADAS GLOBALES   B2"
      PRINT
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      PRINT SPC(20)"B2(";I",";J")=  ";
      INPUT B2(I,J)
      NEXT J
      NEXT I
      IF PRI$<>"SI" THEN 81
      PRINT
      INPUT"PONGA OTRA HOJA EN LA IMPRESORA (RETURN PARA CONTINUAR)";Q
      LPRINT
      LPRINT SPC(18)"MATRIZ DE LA POSICION FINAL RESPECTO DE LAS COORDENADAS GLOBALES
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(36)"MATRIZ  B2  (EJEMPLO No.  ";EJEM")"
      LPRINT
      FOR I=1 TO 4
      LPRINT SPC(18)
      LPRINT USING"+££.£££££        ";B2(I,1),B2(I,2),B2(I,3),B2(I,4)
      NEXT I
      LPRINT
      LPRINT
      REM VERIFICACION DE LOS DATOS INGRESADOS DE LA MATRIZ   B2
81  N=B2(1,1)^2+B2(2,1)^2+B2(3,1)^2-1
      IF ABS(N))<.000001 THEN 82
      N=B2(1,2)^2+B2(2,2)^2+B2(3,2)^2-1
      IF ABS(N))<.000001 THEN 82
```

```
      N=B2(1,3)^2+B2(2,3)^2+B2(3,3)^2-1
      IF ABS(N)).000001 THEN 82
      N=B2(1,2)*B2(1,3)+B2(2,2)*B2(2,3)+B2(3,2)*B2(3,3)
      IF ABS(N)).000001 THEN 82
      N=B2(1,3)*B2(1,1)+B2(2,3)*B2(2,1)+B2(3,3)*B2(3,1)
      IF ABS(N)).000001 THEN 82
      N=B2(1,1)*B2(1,2)+B2(2,1)*B2(2,2)+B2(3,1)*B2(3,2)
      IF ABS(N)).000001 THEN 82
      IF (B2(4,1)+B2(4,2)+B2(4,3)+B2(4,4))=1 THEN 83
82    PRINT
      PRINT SPC(17)"DATOS ERRONEOS DE LA MATRIZ B2"
      IF PRI$<>"SI" THEN 80
      LPRINT
      LPRINT SPC(35)"DATOS ERRONEOS DE LA MATRIZ B2"
      LPRINT
      GOTO 80
83    REM INVERSION DE LA MATRIZ B2
      PRINT
      FOR I=1 TO 3
      B2I(I,4)=0
      FOR J=1 TO 3
      B2I(I,J)=B2(J,I)
      B2I(I,4)=-B2(J,I)*B2(J,4)+B2I(I,4)
      NEXT J
      B2I(4,I)=0
      NEXT I
      B2I(4,4)=1
      REM CALCULO DE LA MATRIZ H22
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      M(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      M(I,J)=M(I,J)+T62(I,K)*O(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      C(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      C(I,J)=C(I,J)+Z(I,K)*M(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      H22(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      H22(I,J)=H22(I,J)+B2I(I,K)*C(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      REM CALCULO DE LA MATRIZ H12
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      M(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      M(I,J)=M(I,J)+T61(I,K)*O(K,J)
```

```
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      C(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      C(I,J)=C(I,J)+Z(I,K)*M(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      H12(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      H12(I,J)=H12(I,J)+B2I(I,K)*C(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      REM CALCULO DE LA SOLUCION DE LA MATRIZ D(1)
      REM DETERMINACION DE LOS PRODUCTOS ESCALARES ENTRE LOS VECTORES
      REM UNITARIOS DE LAS MATRICEZ H22  Y  H12
      FOR K=1 TO 3
      FOR J=1 TO 3
      P(J,K)=0
      FOR I=1 TO 3
      P(J,K)=H12(I,J)*H22(I,K)+P(J,K)
      NEXT I
      NEXT J
      NEXT K
      REM CALCULO DE LAS SOLUCIONES
      SD(4)=ATN(P(2,3)/P(1,3))
      IF P(1,3))=0 THEN 90
      SD(4)=SD(4)+PIP
90    SD(5)=ATN(SQR(P(1,3)^2+P(2,3)^2)/P(3,3))
      IF P(3,3))=0 THEN 91
      SD(5)=SD(5)+PIP
91    FOR J=1 TO 2
      P(1,J)=P(1,J)*(-SIN(SD(4)))*COS(SD(4))*(1-COS(SD(5)))
      P(2,J)=P(2,J)*(COS(SD(4))^2*(1-COS(SD(5)))+COS(SD(5)))
      P(3,J)=P(3,J)*(-SIN(SD(4)))*SIN(SD(5))
      NEXT J
      SD(6)=ATN((P(1,1)+P(2,1)+P(3,1))/(P(1,2)+P(2,2)+P(3,2)))
      IF (P(1,2)+P(2,2)+P(3,2)))=0 THEN 92
      SD(6)=SD(6)+PIP
92    FOR J=1 TO 3
      SD(J)=0
      FOR I=1 TO 3
      SD(J)=SD(J)+H12(I,J)*(H22(I,4)-H12(I,4))
      NEXT I
      NEXT J
      REM INVERSION DE LA MATRIZ Z
      FOR I=1 TO 3
      ZI(I,4)=0
      FOR J=1 TO 3
      ZI(I,J)=Z(J,I)
      ZI(I,4)=-Z(J,I)*Z(J,4)+ZI(I,4)
      NEXT J
      ZI(4,I)=0
```

```
      NEXT I
      ZI(4,4)=1
      REM DETERMINACION DE LA POSICION FINAL
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      C(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      C(I,J)=C(I,J)+B2(I,K)*H22(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      PF(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      PF(I,J)=PF(I,J)+ZI(I,K)*C(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      IF PRI$<>"SI" THEN 89
      LPRINT
      LPRINT SPC(27)"POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS"
      LPRINT SPC(32)"EN LA BASE DEL MANIPULADOR"
      LPRINT
      FOR I=1 TO 4
      LPRINT SPC(18)
      LPRINT USING"+##.#####        ";PF(I,1),PF(I,2),PF(I,3),PF(I,4)
      NEXT I
89    PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(14)"INGRESAR UN VALOR DE  r  ENTRE  0  Y  1:  ";
      INPUT"r=  ";T
      PRINT
84    REM CALCULO DE LA MATRIZ D(r)
      PRINT
      SF1=SIN(T*SD(6))
      CF1=COS(T*SD(6))
      SF2=SIN(SD(4))
      CF2=COS(SD(4))
      SF3=SIN(T*SD(5))
      CF3=COS(T*SD(5))
      VF=1-CF3
      DR(1,1)=CF1*((SF2^2)*VF+CF3)-SF1*SF2*CF2*VF
      DR(2,1)=-CF1*SF2*CF2*VF+SF1*((CF2^2)*VF+CF3)
      DR(3,1)=-CF1*CF2*SF3-SF1*SF2*SF3
      DR(4,1)=0
      DR(1,2)=-SF1*((SF2^2)*VF+CF3)-CF1*SF2*CF2*VF
      DR(2,2)=SF1*SF2*CF2*VF+CF1*((CF2^2)*VF+CF3)
      DR(3,2)=SF1*CF2*SF3-CF1*SF2*SF3
      DR(4,2)=0
      DR(1,3)=CF2*SF3
      DR(2,3)=SF2*SF3
      DR(3,3)=CF3
      DR(4,3)=0
      DR(1,4)=T*SD(1)
      DR(2,4)=T*SD(2)
      DR(3,4)=T*SD(3)
      DR(4,4)=1
```

```
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(21) "MATRIZ DE COMANDO  D(";T")"
      PRINT
      FOR I=1 TO 4
      PRINT SPC(8)
      PRINT USING"+££.£££££        ";DR(I,1),DR(I,2),DR(I,3),DR(I,4)
      NEXT I
      IF PR1$<>"SI"THEN 85
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(25)"PARA LA BASE DE TIEMPO  r=";T"  (EJEMPLO No.  ";EJEM")"
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(37)"MATRIZ DE COMANDO  D(";T")"
      LPRINT
      FOR I=1 TO 4
      LPRINT SPC(18)
      LPRINT USING"+££.£££££        ";DR(I,1),DR(I,2),DR(I,3),DR(I,4)
      NEXT I
85  REM DETERMINACION DE LA POSICION INTERMEDIA (MATRIZ PI)
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      M(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      M(I,J)=M(I,J)+H12(I,K)*DR(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      C(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      C(I,J)=C(I,J)+B2(I,K)*M(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      FOR I=1 TO 4
      FOR J=1 TO 4
      PI(I,J)=0
      FOR K=1 TO 4
      PI(I,J)=PI(I,J)+ZI(I,K)*C(K,J)
      NEXT K
      NEXT J
      NEXT I
      REM VERIFICACION PARA SABER SI SE A LLEGADO A LA POSICION FINAL
      M1=0
      FOR I=1 TO 3
      FOR J=1 TO 4
      IF ABS(PF(I,J)-PI(I,J))).000005 THEN 86
      M1=M1+1
86  NEXT J
      NEXT I
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(14)"POSICION FINAL RESPECTO A LAS COORDENADAS"
      PRINT SPC(22)"EN LA BASE DEL MANIPULADOR"
      PRINT
```

```
      FOR I=1 TO 4
      PRINT SPC(8)
      PRINT USING "+££.£££££        ";PF(I,1),PF(I,2),PF(I,3),PF(I,4)
      NEXT I
      PRINT
      PRINT
      PRINT SPC(14)"POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)"
      PRINT
      FOR I=1 TO 4
      PRINT SPC(8)
      PRINT USING"+££.£££££        ";PI(I,1),PI(I,2),PI(I,3),PI(I,4)
      NEXT I
      PRINT
      IF PRI$()"SI" THEN 87
      LPRINT
      LPRINT
      LPRINT SPC(26)"POSICION INTERMEDIA (RESPECTO DE LA BASE)"
      LPRINT
      FOR I=1 TO 4
      LPRINT SPC(18)
      LPRINT USING"+££.£££££        ";PI(I,1),PI(I,2),PI(I,3),PI(I,4)
      NEXT I
87  IF M1=12 THEN 88
      PRINT
      PRINT SPC(14)"INGRESAR UN VALOR MAYOR DE r:  ";
      INPUT"r=  ";T
      PRINT
      GOTO 84
88  PRINT
      INPUT"RETURN PARA CONTINUAR";Q
      RETURN
```