TB

629.832
J95
pt.1
A342
T-03.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

TESIS DE GRADO

"ANÁLISIS Y APLICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES UTILIZANDO MATLAB"

TESIS PREVIA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA EN ELECTRÓNICA Y CONTROL

INÉS DEL CARMEN JURADO MORENO

JULIO, 1998

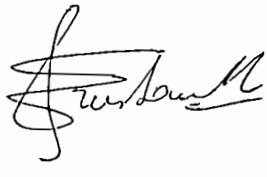
Dedicatoria

Este trabajo de tesis está dedicado a mi madre por su amor incondicional y su comprensión, por haber tenido siempre una sonrisa en los momentos más difíciles. Mi gratitud a todas aquellas personas que me han apoyado para culminar mi profesión.

Agradecimiento

El más sincero agradecimiento al Ing. Patricio Burbano R., por su ayuda y asesoramiento en este trabajo de tesis.

Certifico que el presente trabajo de tesis ha sido realizado en su totalidad por la Srta. Inés Jurado Moreno.



Ing. Patricio Burbano R.

Director de Tesis

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. Introducción 1

1.2. Análisis de sistemas lineales 3

1.2.1. Análisis de sistemas lineales en el dominio del tiempo 4

1.2.2. Análisis de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia 4

1.3. Aplicaciones de sistemas lineales 5

2. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO 6

2.1. Operaciones con señales arbitrarias 9

2.2. Análisis mediante ecuaciones diferenciales 13

2.2.1. Mediante la solución de la ecuación diferencial por tramos. 14

2.2.2. Mediante la aplicación de linealidad e invarianza. 15

2.2.3. Mediante método numérico. 16

2.2.4. Numéricamente. Mediante el comando ode. 19

2.3. Análisis mediante ecuaciones en diferencias 20

2.3.1. Mediante método analítico 21

2.3.2. Mediante método recursivo. 21

2.3.3. Mediante método numérico. 22

2.4. Análisis mediante la integral de convolución 24

2.4.1. Solución analítica 25

2.4.2. Solución numérica 25

2.5. Análisis mediante la sumatoria de convolución 27

2.5.1. Solución analítica 27

2.5.2. Solución numérica 29

2.6. Análisis en el espacio de estado para sistemas contínuos 30

2.6.1. Solución analítica 31

2.6.2. Solución numérica 32

2.7. Análisis en el espacio de estado para sistemas discretos 33

2.7.1. Solución analítica 35

2.7.2. Solución numérica 35

3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA 37
3.1. Análisis mediante la transformada de Laplace 37
3.1.1. Mediante el método analítico 38
3.1.2. Mediante el método numérico 40
3.2. Análisis mediante la transformada z 41
3.2.1. Mediante el método analítico 42
3.2.2. Lugar geométrico de las raíces 43
3.2.3. Mediante el método numérico 44
3.3. Análisis mediante series de Fourier 45
3.3.1. Mediante el método analítico 46
3.3.2. Mediante el método numérico 47
3.4. Análisis mediante la transformada de Fourier 50
3.4.1. Mediante el método analítico 51
3.4.2. Mediante el método numérico 58
3.5. Análisis mediante la transformada discreta de Fourier 60
3.6. Análisis mediante la transformada rápida de Fourier 61
3.6.1. Método numérico 63

4. APLICACIONES DE SISTEMAS LINEALES 65
4.1. Operación de señales en el tiempo 65
4.2. Modelos de sistemas 67
4.2.1. Sistemas en serie 67
4.2.1.a. Sistemas en serie sin realimentación 67
4.2.1.b. Sistemas en serie con realimentación 68
4.2.2. Sistemas en paralelo 68
4.2.2.a. Sistemas en paralelo sin realimentación 68
4.2.2.b. Sistemas en paralelo con realimentación 69
4.2.3. Análisis numérico de modelos de sistemas 69
4.3. Características estructurales del sistema 74
4.3.1. Estabilidad de sistemas contínuos 74
4.3.2. Controlalbilidad de sistemas contínuos 75
4.3.3. Observabilidad de sistemas contínuos 75

4.3.4. Transformación de semejanza 76
4.3.5. Análisis numérico 76
4.4. Sistemas de datos muestreados 79
4.5. Análisis de Fourier 81
4.6. Filtrado de señales 82
4.6.1. Filtros pasa bajos 82
4.6.2. Filtros pasa altos 83
4.6.3. Filtros pasa banda 84
4.6.4. Análisis numérico 84
4.7. Modulación de señales 86
4.7.1. Modulación en amplitud 86
4.7.2. Modulación en fase 89
4.7.3. Modulación en frecuencia 92
4.7.4. Análisis numérico 92
4.8. Simulink 96
4.9. Análisis variando un parámetro 98
4.9.1. Dominio del tiempo 98
4.9.2. Dominio de la frecuencia 99
4.9.3. Análisis numérico. 100
4.10. Procesamiento en tiempo real 101

5. IMPLEMENTACIÓN DEL TOOLBOX DE SISTEMAS LINEALES 102
5.1. Requerimientos del sistema 102
5.2. Programa principal 102
5.3. Ingreso de datos 105
5.4. Opciones en tiempo, frecuencia y aplicaciones 108
5.5. Gráficos. 110

6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES 116
6.1. Resultados 116
6.1.1. Dominio del tiempo. 116
6.1.2 Dominio de la frecuencia 121
6.1.3 . Aplicaciones 128
6.2. Conclusiones 146

ANEXOS.

Anexo A.1: Manual de usuario del toolbox de sistemas lineales(Texto adjunto)

Anexo A.2: Listado de los programas (Texto adjunto)

CAPITULO I: INTRODUCCIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

1.2. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES

1.2.1. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

1.2.2. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1.3 APLICACIONES DE SISTEMAS LINEALES

1.1 INTRODUCCIÓN.

La ciencia y la técnica evolucionan constantemente, gracias a ello también se ha tenido un avance creciente de la tecnología computacional, disponiéndose de paquetes eficientes para el procesamiento digital de señales, que es una técnica de amplia aplicación en Ingeniería Eléctrica en la actualidad.

El paquete MATLAB con Simulink 4.0 para WINDOWS tiene una gran capacidad para cálculos numéricos, programación estructurada de alto nivel con arquitectura abierta con posibilidad de desarrollar modelos en base a macros para aplicaciones específicas (toolboxes), capacidad de enlace dinámico para acceder a dispositivos analógico-digitales, métodos avanzados de gráficos y visualización; adecuado para ser utilizado en un trabajo de aplicación de Sistemas Lineales.

En este trabajo se desarrolla un Toolbox a manera de un menú de procedimientos interactivos de fácil utilización, para evitar de esta manera la necesidad de la utilización secuencial y manual de varios comandos para un propósito específico, ya sea de ingreso de datos, de análisis o de despliegue gráfico que tomarían excesivo tiempo y dedicación sino se automatiza a nivel de un menú o de un toolbox.

Los objetivos planteados en este trabajo de tesis son :

- Desarrollar una librería o toolbox mediante la elaboración de programas o rutinas utilizando archivos con extensión *.m, llamados macros, para análisis de sistemas lineales en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

- Desarrollar una librería para las aplicaciones básicas a modulación, filtrado, datos muestreados, análisis de Fourier, modelación y simulación de sistemas.

- Realizar un toolbox para el procesamiento en tiempo real con adquisición de datos.

- Utilizar el paquete SIMULINK para el procesamiento de señales mediante una estructura de bloques.

Este trabajo de tesis se limita a realizar un resumen del análisis en tiempo y en frecuencia, de sus aplicaciones y a la realización de un menú de macros bien concreto sobre los diferentes métodos de obtención de respuestas sobre los diferentes modelos, métodos de análisis en frecuencia y las respectivas aplicaciones.

A continuación se realiza una breve descripción del contenido de este trabajo de tesis :

En el capítulo I se realiza una introducción sobre el análisis de sistemas lineales y sus aplicaciones. El análisis de sistemas lineales se lo realiza en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, tanto para sistemas continuos como discretos. Las aplicaciones de sistemas lineales se orientan al procesamiento de señales simuladas y en tiempo real, como una lógica extensión práctica y demostrativa de las herramientas ilustradas en la parte básica estudiadas en los capítulos II y III.

En el capítulo II se realiza el análisis de sistemas lineales en el dominio del tiempo, análisis que se lo realiza mediante : una ecuación diferencial o de diferencias de orden n, convolución y en el espacio de estado. Se implementan las rutinas pertinentes.

En el capítulo siguiente se realiza el análisis de sistemas lineales en el dominio de la frecuencia, mediante : función de transferencia utilizando la transformada de Laplace, y la transformada Z ;y, mediante series y transformada de Fourier. Se implementan las rutinas pertinentes.

El capítulo IV contiene las aplicaciones de sistemas lineales en donde se realiza la modulación de señales, el filtrado de las mismas, discretización de sistemas, modelación y simulación de sistemas, análisis de Fourier ;y, análisis de sistemas en tiempo real mediante la adquisición de datos.

El capítulo V contiene la implementación del toolbox de sistemas lineales en donde se detalla la estructura del programa llamado "SISLIN" que significa SIStemas LINeales que contiene una solución numérica y gráfica para los capítulos anteriores tanto en tiempo como en frecuencia, con sus respectivas aplicaciones, tanto en simulación como en tiempo real.

El capítulo VI se refiere a resultados y conclusiones.

1.2 ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES

En esta tesis se estudian los sistemas lineales en los cuales se aplica superposición, sistemas invariantes en el tiempo, que se describen por ecuaciones con coeficientes constantes ; de parámetros concentrados que se modelan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, determinísticos, que no manejan variables aleatorias ; y, univariables, es decir de una entrada y una salida.

Los sistemas lineales e invariantes se clasifican en sistemas contínuos y discretos. Cada sistema se lo puede analizar en tiempo y frecuencia.

Los sistemas contínuos son aquellos en los cuales a cada instante de tiempo contínuo le corresponde un valor de salida excepto en las discontinuidades. Para sistemas contínuos el análisis puede realizarse en base a modelos matemáticos a función de transferencia, variables de estado y ecuaciones diferenciales.

Los sistemas de tiempo discreto son aquellos en los cuales a cada valor entero n de tiempo le corresponde un valor de salida el cual existe solo a intervalos discretos de tiempo. Los modelos matemáticos para sistemas discretos se describen a función de transferencia, variables de estado o ecuaciones en diferencias.

1.2.1 ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

El análisis se va a realizar en base a las propiedades de linealidad (superposición) e invarianza (desplazamiento) de este tipo de sistemas. Se van a analizar sistemas contínuos y discretos. Las señales de entrada que se utilizan son impulso, paso y señales arbitrarias en base a señales: escalón, rampa, sinusoidal y exponencial.

Se trata de obtener la respuesta del sistema lineal e invariante a una entrada arbitraria utilizando superposición e invarianza. Se realiza el análisis de respuesta transitoria y en régimen permanente.

En régimen transitorio se determina la duración del transitorio, esto es el tiempo de establecimiento y se determina la estabilidad relativa, es decir la oscilación del sistema que se cuantifica mediante el máximo sobreimpulso.

En régimen permanente se obtiene el error a una señal de entrada escalón o error de posición.

1.2.2 ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

En el dominio de la frecuencia compleja $s=\sigma+jw$ de la transformada de Laplace se realiza el análisis mediante la función de transferencia. Se determina la respuesta en el tiempo, se hace un análisis de estabilidad en el plano complejo s y se determina el lugar geométrico de las raíces para sistemas realimentados, esto para sistemas contínuos.

Para sistemas discretos se realiza un análisis similar utilizando la función de transferencia discreta mediante la transformada Z.

En el dominio de la frecuencia real w de la transformada de Fourier se realiza el análisis de :

- La composición de una función periódica en base a sus armónicas.
- Análisis del espectro de frecuencia.
- Análisis de la respuesta de frecuencia.
- Obtención práctica de los espectros de frecuencia mediante la transformada rápida de Fourier en base a una señal muestreada.

1.3 APLICACIONES DE SISTEMAS LINEALES

Las aplicaciones de sistemas lineales están orientadas a tiempo y frecuencia. Se utilizan rutinas para procesamiento de señales y programas demostrativos del comportamiento dinámico en tiempo y en frecuencia.

- Análisis de respuesta temporal en base a la variación de un parámetro.
- Análisis de la respuesta en frecuencia en base a la variación de un parámetro.
- Lugar geométrico de las raíces.
- Manejo de la transformada de Fourier para análisis de datos.
- Discretización de sistemas.
- Cambio de modelos.
- Diagramas de bloque.
- Utilización del simulink.
- Modulación de señales.
- Filtrado de señales
- Procesamiento en tiempo real.

En el capítulo respectivo se trata este tema con profundidad.

CAPITULO II: ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

2.1. OPERACIONES CON SEÑALES ARBITRARIAS

2.2. ANÁLISIS MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES

- 2.2.1. Mediante la solución de la ecuación diferencial por tramos.
- 2.2.2. Mediante la aplicación de linealidad e invarianza.
- 2.2.3. Mediante método numérico.
- 2.2.4. Numéricamente. Mediante el comando ODE.

2.3. ANÁLISIS MEDIANTE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

- 2.3.1. Mediante método analítico
- 2.3.2. Mediante método recursivo.
- 2.3.3. Mediante método numérico.

2.4. ANÁLISIS MEDIANTE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

- 2.4.1. Solución analítica
- 2.4.2. Solución numérica

2.5. ANÁLISIS MEDIANTE LA SUMATORIA DE CONVOLUCIÓN

- 2.5.1. Solución analítica
- 2.5.2. Solución numérica

2.6. ANÁLISIS EN EL ESPACIO DE ESTADO PARA SISTEMAS CONTÍNUOS

- 2.6.1. Solución analítica
- 2.6.2. Solución numérica

2.7. ANÁLISIS EN EL ESPACIO DE ESTADO PARA SISTEMAS DISCRETOS

- 2.7.1. Solución analítica
- 2.7.2. Solución numérica

2. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

Los sistemas lineales invariantes dinámicos evolucionan en el tiempo, ya que sus variables son funciones del tiempo. Los modelos analíticos de los sistemas contínuos se expresan mediante ecuaciones diferenciales, la integral de convolución y en el espacio de estado.

Para sistemas discretos los modelos se expresan mediante ecuaciones en diferencias, la sumatoria de convolución y el espacio de estado.

En el dominio del tiempo, primeramente hay que calcular la salida del sistema a una señal de entrada que puede ser una señal impulso, paso o una señal arbitraria. El cálculo de la salida se realiza en forma analítica, numérica y como un despliegue gráfico de la respuesta.

Más adelante se plantea el fundamento teórico para el método analítico, se realiza el cálculo computacional utilizando rutinas en MATLAB, para esto se aplica una solución numérica y se presentan los resultados mediante un despliegue gráfico adecuado.

En síntesis en este capítulo se determina la respuesta de un sistema lineal invariante, dinámico contínuo y discreto, expresado mediante un modelo analítico por diferentes métodos, siempre en forma numérica con su respectivo despliegue gráfico.

El otro aspecto que se aborda es el de análisis de la respuesta en régimen transitorio y permanente. En el régimen transitorio se determina la rapidez de respuesta, es decir, la duración del transitorio; esta característica de respuesta se cuantifica mediante el tiempo de establecimiento ts considerando una banda de $\pm$ 2% del valor final. La rapidez también puede cuantificarse mediante el tiempo de subida tr considerando una banda entre el 10 % y el 90 % del valor final.

La otra característica de la respuesta transitoria se refiere a su estabilidad relativa, es decir a la cantidad de oscilación que exhibe la respuesta lo que se cuantifica como el máximo sobreimpulso Mp, como se muestra en la figura 2.1.

En estado estable se puede determinar el error con respecto a la entrada. Tanto para las características en régimen permanente como en régimen transitorio se utiliza una señal de entrada escalón unitario u, en cuyo caso se cuantifica la precisión en estado estable mediante el error de posición Ep.

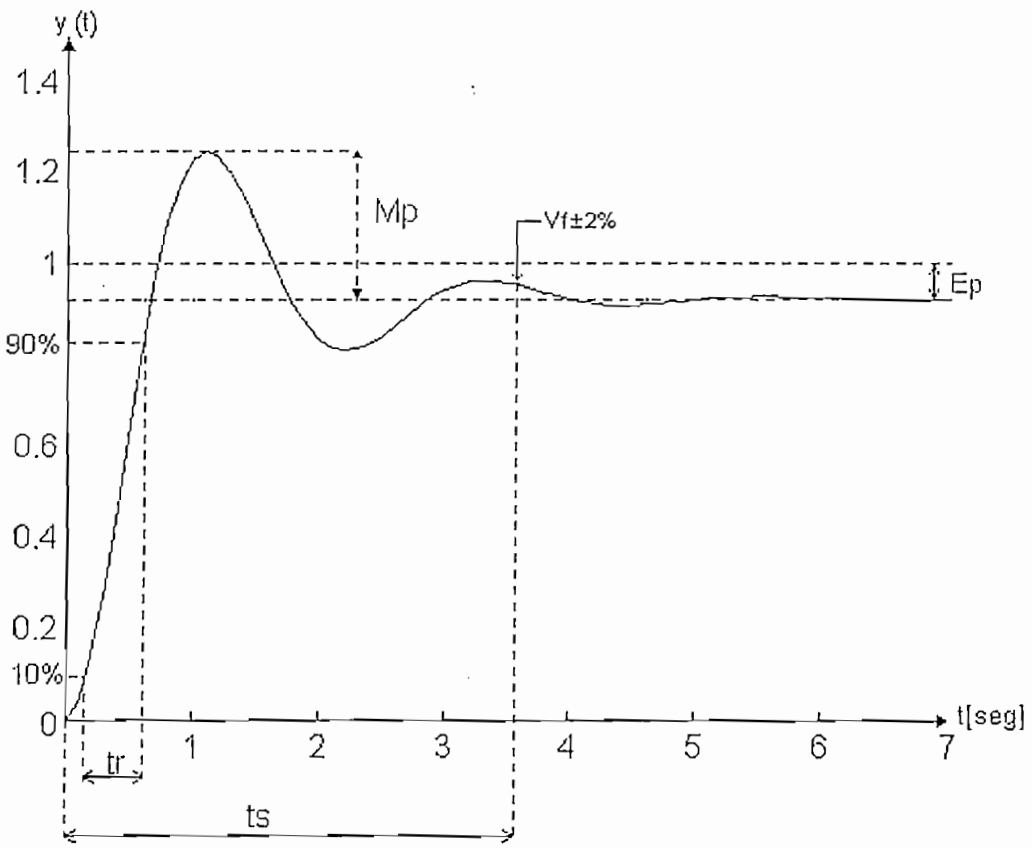


Fig. 2.1. Características de respuesta

Los parámetros mencionados que determinan la calidad del comportamiento dinámico del sistema se expresan analíticamente como :

$$Mp\% = \frac{Vmax - Vf}{Vf - Vo} * 100$$

$$Ep\% = (u - Vf) * 100$$

Vo = valor inicial

Vf = valor final

Vmax = valor máximo

ts = tiempo en que la señal adquiere y se mantiene dentro de la banda del 2% de su valor final.

tr = tiempo en que crece la señal desde el 10% hasta el 90% de su valor final.

En cuanto a la estabilidad del sistema, el análisis se lo realiza observando si la respuesta es oscilatoria amortiguada o exponencial decreciente.

Para los sistemas discretos, estos pueden aparecer en forma de datos muetreados o de tiempo discreto, en los cuales la variable toma valores solamente a intervalos discretos de tiempo. Entre intervalos no existe ningún valor, como se observa en la figura 2.2.

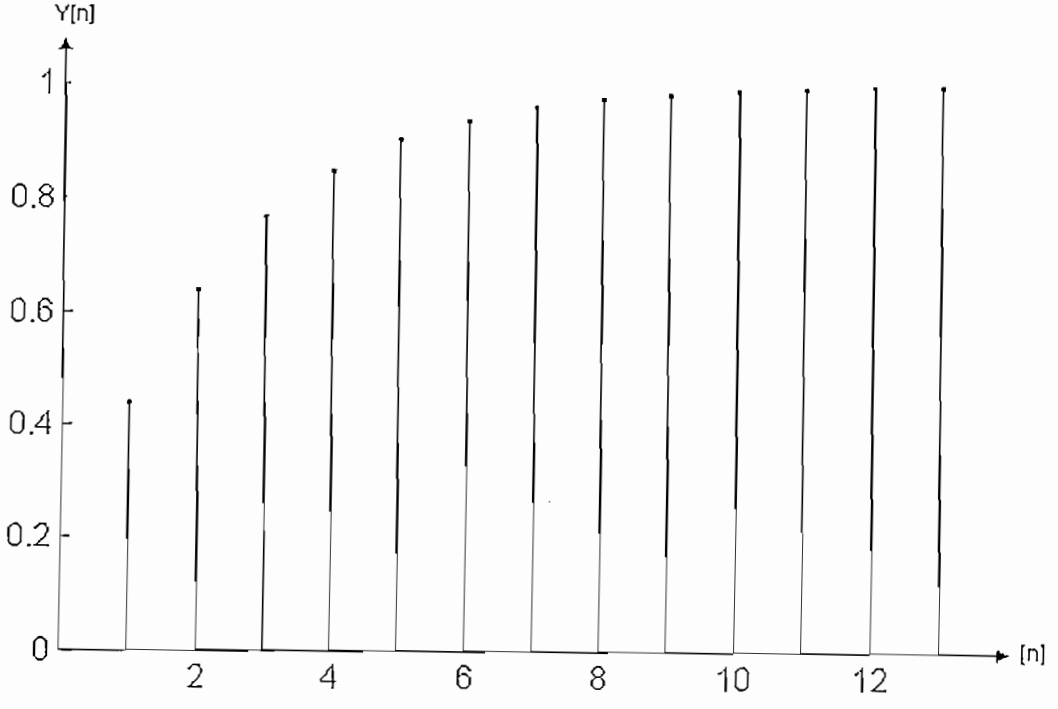


Fig. 2.2. Señal de tiempo discreto

Cuando se manejan señales discretas se consideran señales cuantificadas de tiempo discreto. Utilizando dispositivos de retención de orden cero, como el zero

order hold (ZOH), para la reconstrucción de la señal, la señal se representa según el gráfico de la figura 2.3.

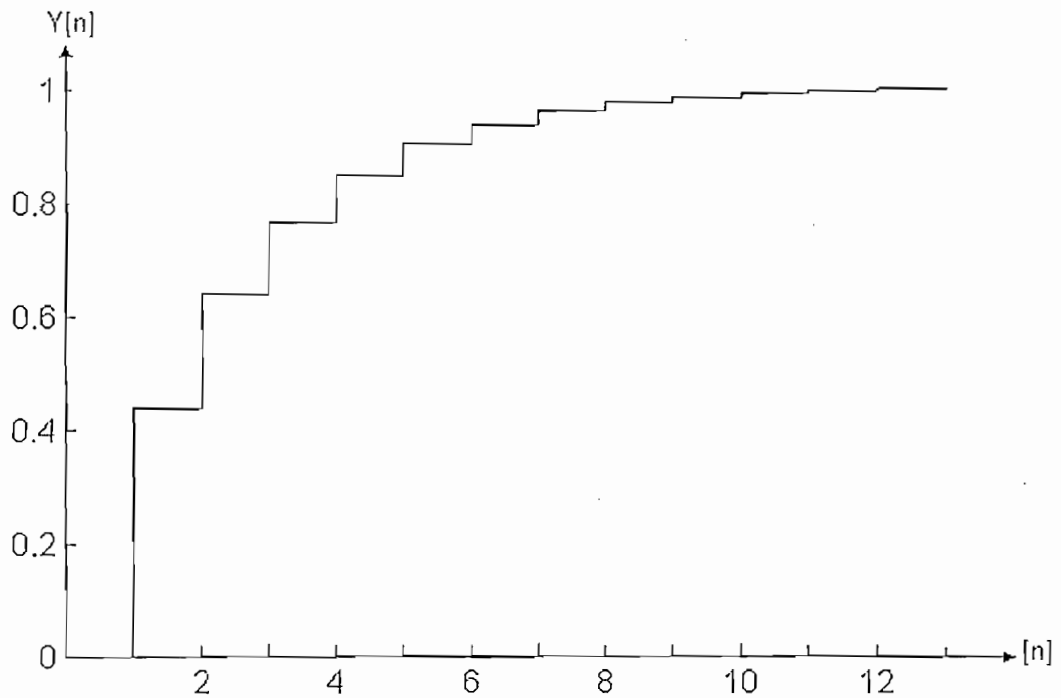


Fig. 2.3. Señal discreta de tiempo discreto

En este trabajo, en general se utiliza la representación de una señal digital (señal discreta de tiempo discreto), salvo cuando específicamente se refiera a muestreos.

2.1 OPERACIÓN CON SEÑALES ARBITRARIAS.

Las señales arbitrarias se utilizan generalmente como señales de excitación, las operaciones más importantes que se realizan con estas señales son: desplazamiento, transposición y escalamiento.

Para realizar operaciones con señales arbitrarias se ha desarrollado la rutina **entrada.m**, en la que se toman en cuenta los siguientes aspectos :

- Límites de la función de entrada. Rutina limita.m

- Ingreso y gráfico de la señal de entrada. Rutina arbit.m
- Manipulación de la señal de entrada. Rutina manipula.m

limita.m

Define el intervalo de tiempo en el que se va a generar la función arbitraria, los valores pueden ser positivos o negativos.

arbit.m

Aquí se genera la función arbitraria en base a la suma de señales: escalón, rampa, sinusoidal y exponencial.

Para generar la señal escalón se utiliza el comando stepfun(t,to), que da un vector en el tiempo t que contiene ceros y unos, en donde t>to. Para la función rampa se utiliza (t-to).*stepfun(t,to). En la función sinusoidal se utiliza sin(t). En la función exponencial decreciente exp(-t). Cada función se define a partir de un tiempo inicial, con su respectiva ganancia.

Una vez generada la función arbitraria se grafica dicha señal.

manipula.m

Una vez generada la señal arbitraria, se pueden realizar operaciones de :

- Desplazamiento. Rutina desplaz.m
- Transposición . Rutina transpon.m
- Escalamiento. Rutina escalar.m
    - Escalamiento en tiempo. Rutina escalart.m
    - Escalamiento en amplitud. Rutina escalara.m

Cada rutina se encarga de desplazar, transponer o escalar la señal arbitraria y mostrar el gráfico correspondiente a la señal arbitraria y a la resultante en la misma figura, según sea el caso.

Ejemplo :

En la figura 2.4 se tiene una señal arbitraria descrita por la ecuación :

$x(t) = u(t-1) + u(t-2) - 2\,t\,u(t-3) + 2\,t\,u(t-4)$

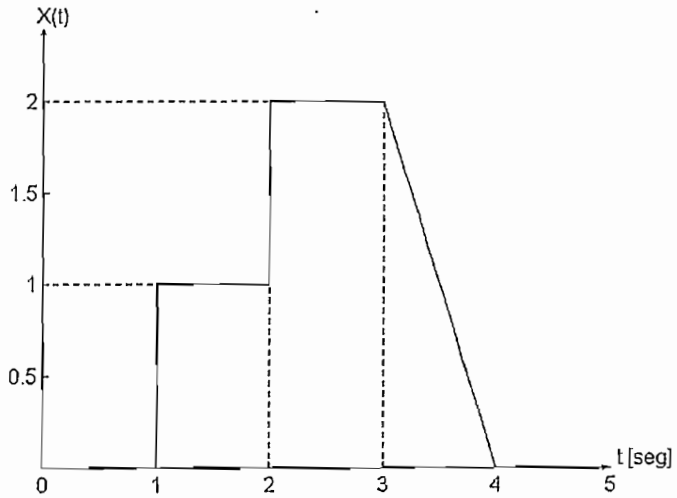


Fig. 2.4. Señal arbitraria

Realizar :

a) $y(t) = x(t+1)$. Desplazamiento

b) $y(t) = x(-t)$. Transposición

c) $y(t) = x(t/2)$. Escalamiento

d) Obtener $y(t) = x(0.5\,t + 1)$

Solución :

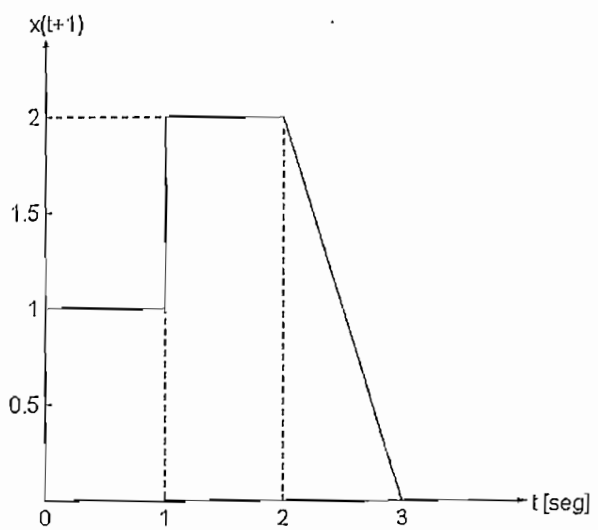


Fig. 2.4.a Desplazamiento de x(t)

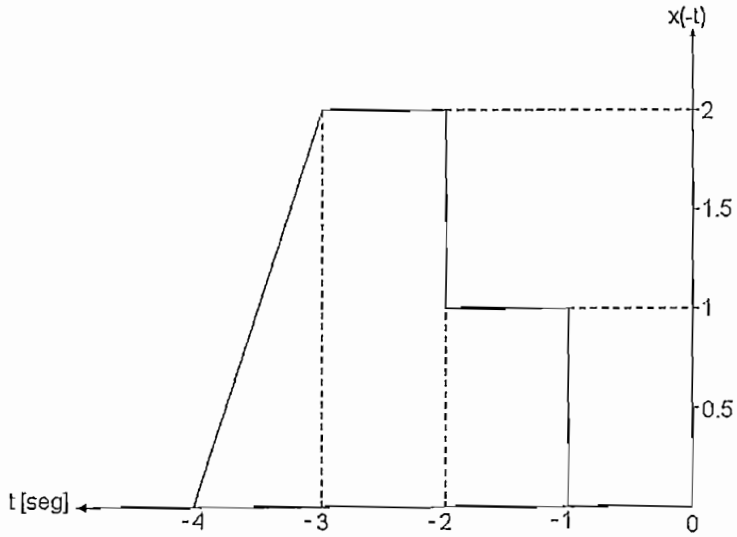


Fig. 2.4.b Transposición de x(t)

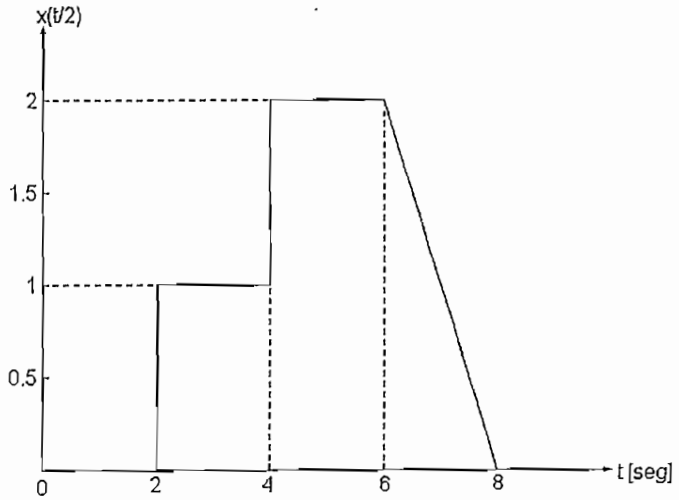


Fig. 2.4.c. Escalamiento en tiempo de x(t)

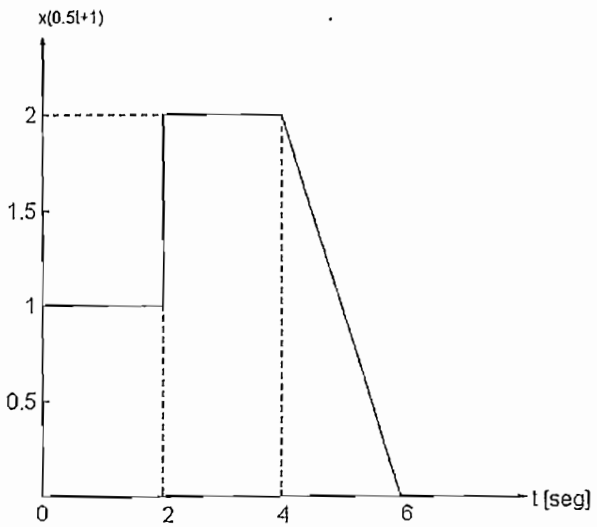


Fig. 2.4.d. y(t) = x(0.5 t+1)

2.2 ANÁLISIS MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones descriptivas de un sistema dinámico, para este caso un sistema lineal.

Las ecuaciones diferenciales que describen el funcionamiento dinámico de un sistema físico, se obtienen utilizando leyes físicas que gobiernan el proceso. Esto es aplicable a sistemas mecánicos, eléctricos, de fluidos y termodinámicos, o en general a cualquier tipo de sistema dinámico.

Mediante ecuación diferencial se modela el sistema con una sola ecuación diferencial de orden n, que relaciona las variables de entrada, de salida y sus derivadas. Para sistemas físicamente realizables $n \geq m$, en donde n es el número de elementos activos, como se aprecia en la figura 2.5

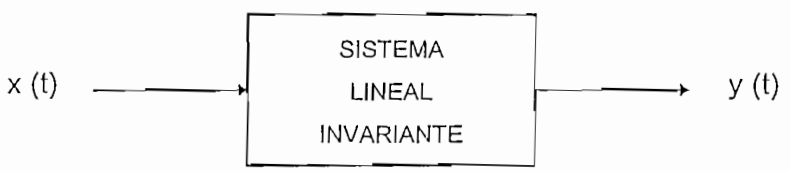


Fig. 2.5. Esquema de un sistema.

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y =$$
$$b_0 \cdot x^{(m)} + b_1 \cdot x^{(m-1)} + b_2 \cdot x^{(m-2)} + \cdots + b_{m-1} \cdot x' + b_m \cdot x$$

También se puede representar mediante un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden o en general cualquier conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas, aunque en la práctica se utiliza el modelo de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que se conocen como variables de estado.

Analíticamente existen dos estrategias para calcular la respuesta de un sistema descrito mediante ecuación diferencial, analizados a continuación.

2.2.1 Mediante la solución de la ecuación diferencial por tramos.

Para aplicar este método se parte de un sistema causal y en reposo, se determina la solución homogénea y particular para cada tramo de la señal en el que existe un cambio en la excitación o entrada, mediante el igualamiento de singularidades se obtienen las respectivas condiciones iniciales.

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la ecuación : $y''+3\cdot y'+2\cdot y = x''+2\cdot x'+x$, cuya señal de entrada se muestra en la figura 2.6.

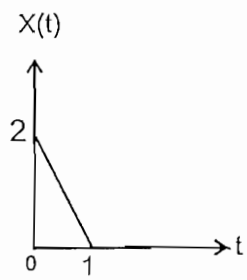


Fig. 2.6. Señal de entrada

Solución homogénea : $Yh(t) = A.e^{-t} + B.e^{-2.t}$

Solución particular : $Y_p(t) = C_1.t + C_2$

$Y_p(t) = - t + 0.5$

$$Y(t) = A.e^{-t} + B.e^{-2.t} - t + 0.5$$

Si se realiza el igualamiento de singularidades, se obtienen las condiciones iniciales con su respectiva solución, de la siguiente manera :

a) Si $t < 0$ $\quad Y'(0) = 0$

$Y(0) = 0$

$Y(t) = 0$

b) Si $0 \leq t < 1$ $\quad Y'(0) = - 4$

$Y(0) = 2$

Resolviendo la ecuación se tiene :

$Y_1(t) = + 1.5\ e^{-2.t} - t + 0.5$

c) Para $t \geq 1$ $\quad Y'(1) = 1 - 3\ e^{-2}$

$Y(1) = 1.5\ e^{-2} - 0.5$

Resolviendo la ecuación se tiene :

$Y_2(t) = (1.5 - 0.5\ e^{2})\ e^{-2.t}$

2.2.2 Mediante la aplicación de linealidad e invarianza.

Esta es una estrategia mas simple que la anterior, aplicable al caso de tener señáles de excitación que se pueden representar en base a señales escalón y rampa u otras señales, en las cuales se puede aplicar superposición obteniendo las respectivas respuestas individuales y desplazando en el tiempo dichas respuestas si fuere necesario.

A continuación se resuelve el ejercicio anterior utilizando este método :

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la ecuación : $y''+3\cdot y'+2\cdot y = x''+2\cdot x'+x$

cuya señal de entrada se muestra en la figura 2.5.

X(t) se expresa como :

$X(t) = 2\ u(t) - 2\ t\ u(t) + 2\ (t-1)\ u(t-1)$

Se calcula la respuesta a una rampa unitaria, sin desplazamiento en donde :

$Xr(t) = t\ u(t)$

Solución homogénea : $\quad Y_r r(t) = A.e^{-t} + B.e^{-2.t}$

Solución particular : $\quad Ypr(t) = C_1.t + C_2$

$y_e(t) \quad Y(t) = -0.5 \ldots + 0.5$

La solución de la ecuación diferencial es :

a) $t < 0$ $\quad y(t) = 0$

b) $0 \leq t < 1$ $\quad y(t) = 2\ y_e(t) - 2\ y_r(t)$

$y(t) = 1.5\ e^{-2.t} - t + 0.5$

c) $t \geq 1$ $\quad y(t) = 2\ y_e(t) - 2\ y_r(t) + 2\ y_r(t-1)$

$y(t) = (1.5 - 0.5\ e^{2})\ e^{-2.t}$

2.2.3 Mediante el método numérico

$$Yr(t) = A.e^{-t} + B.e^{-2.t} + t / 2 + 1/4$$

Realizando el igualamiento de condiciones iniciales :

$$Y'(0) = 1$$
$$Y(0) = 0$$
$$Yr(t) = - 0.25\ e^{-2.t} + 0.5\ t + 0.25$$

La solución para un escalón unitario está dada por :

$$y_e(t) = Yr'(t) = 0.5\ e^{-2.t} + 0.5$$

La solución de la ecuación diferencial es :

a) $t < 0$ $\qquad y(t) = 0$

b) $0 \leq t < 1$ $\qquad y(t) = 2\ y_e(t) - 2\ y_r(t)$

$$y(t) = 1.5\ e^{-2.t} - t + 0.5$$

c) $t \geq 1$ $\qquad y(t) = 2\ y_e(t) - 2\ y_r(t) + 2\ y_r(t-1)$

$$y(t) = (1.5 - 0.5\ e^{2})\ e^{-2.t}$$

2.2.3 Mediante el método numérico

Para la solución de la ecuación diferencial se utiliza la rutina **diferel.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas de la ecuación. Los macros son :

- Ingreso de datos . Rutina ingreso1.m
- Respuesta a una función impulso. Rutina impulso1.m
- Respuesta a una función paso. Rutina paso1.m
- Respuesta a una señal arbitraria. Rutina arbit1.m
- Solución con el método de Runge-Kutta. Rutina ode1.m
- Análisis de respuesta en el tiempo. Rutina resp1.m

ingreso1.m

En esta rutina se ingresan los coeficientes de la ecuación diferencial como numerador y denominador, de la siguiente manera :

$$y''+3\cdot y'+2\cdot y = x''+2\cdot x'+x$$

Los coeficientes de Y : den = [1 3 2]
Los coeficientes de X : num = [1 2 1]
Las condiciones iniciales : CI = [-4 2]

Los coeficientes de la ecuación diferencial que describen el sistema corresponden a la función de transferencia, en donde den es el denominador y num es el numerador de la función, que es correspondiente a las ecuaciones del espacio de estado descrito por las matrices a, b, c, d ; que se encuentran en la forma canónica controlable. Para esta correspondencia entre la función de transferencia y variables de estado se utiliza el comando [a,b,c,d] = tf2ss(num,den);

impulso1.m

Se calcula la respuesta del sistema a una función impulso, en un intervalo de tiempo definido por el usuario.

Para el cálculo de la respuesta, cuando no existen condiciones iniciales se utiliza el comando impulse(a,b,c,d,iu,t), en donde, iu=1 porque es un sistema univariable. Cuando existen condiciones iniciales se utiliza el comando initial(a,b,c,d,xo,t), en donde, xo son las condiciones iniciales para el sistema. t es el tiempo especificado para la respuesta.

Finalmente se grafica la respuesta a una función impulso en el tiempo.

paso1.m

Se calcula la respuesta del sistema a una función escalón, en un intervalo de tiempo definido por el usuario.

Para el cálculo de la respuesta a la función paso, cuando no existen condiciones iniciales se utiliza el comando step(a,b,c,d,iu,t), en donde, iu=1 porque es un sistema univariable. Cuando existen condiciones iniciales se utiliza el comando lsim(a,b,c,d,u,t,xo), donde u es el vector de entrada para la función paso y debe tener la misma longitud del vector t. xo son las condiciones iniciales.

Se grafica la respuesta en el tiempo para una función paso como entrada del sistema.

arbit1.m

Se calcula la respuesta del sistema a una función arbitraria ingresada por el usuario, como se indica en el numeral 2.1.

Para el cálculo de la respuesta a una señal arbitraria, cuando no existen condiciones iniciales se utiliza el comando lsim(a,b,c,d,u,t), en donde u es la función arbitraria que se generó en un tiempo correspondiente t . Cuando existen condiciones iniciales se utiliza el comando lsim(a,b,c,d,u,t,xo), en donde xo son las condiciones iniciales.

Posteriormente se realiza el gráfico tanto de la función arbitraria que se ingresó como de la respuesta a dicha función.

ode1.m

Esta solución se analiza en el literal 2.2.4

resp1.m

En esta rutina se realiza el análisis de respuesta en el tiempo, cuando se tiene como señal de entrada la función paso.

Para obtener el valor de la función en estado estable, se evalúa la función de transferencia en s=0, esto se lo realiza utilizando el comando polyval(f,s), en donde f es la función de transferencia obtenida como numerador y denominador.

Se encuentra la respuesta a una función paso con el comando step. Para determinar el máximo sobreimpulso, se requiere conocer el valor máximo de la función que se determina con el comando [Y,k]= max(y), en donde Y es el valor máximo del vector de respuesta y, k es el número de columna en donde se produce el valor máximo. El tiempo pico corresponde al valor del máximo de la función. Para el tiempo de establecimiento se calcula con el valor final Vf ± 2%.

2.2.4 Numéricamente. Mediante el comando ODE

Se disponen de los comandos ODE23 y ODE45 para la integración numérica mediante el método de Runge-Kutta de segundo y tercer orden o de cuarto y quinto orden respectivamente. Este método es particularmente interesante porque permite especificar la precisión con la que se desea calcular la respuesta y tiene la potencialidad de proyectarlo a sistemas más complejos, por ejemplo sistemas no lineales. Requiere que se descomponga en un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas, que en nuestro caso corresponderá al espacio de estado.

Para la solución de la ecuación diferencial se utiliza la rutina **ode1.m**, que utiliza principalmente el comando [t,x] = ode23('lotka1',t0,tf,y0), en donde y0 son las condiciones iniciales de integración, y la función se integra en un intervalo de tiempo entre to y tf. Si no se ingresan condiciones iniciales, se asume que y0=0.

Lotka1.m es una función en donde el usuario puede definir las ecuaciones a variables de estado para x y la entrada del sistema; también se utiliza la función *lotka2.m* en donde el usuario puede definir la salida y del sistema en función de x1, x2 y la entrada del sistema.

Se grafica la salida del sistema obtenida con el método de Runge-Kutta.

2.3 ANÁLISIS MEDIANTE ECUACIONES EN DIFERENCIAS.

Un sistema discreto puede representarse de la siguiente manera :

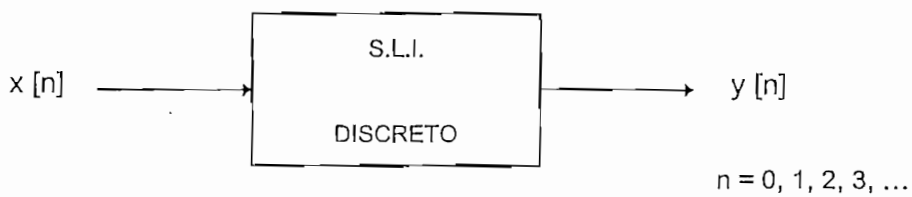


Figura 2.7 . Esquema de un sistema discreto

La ecuación en diferencias relaciona retardos de la entrada y la salida, matemáticamente se expresa como :

$$y[n]+a_1\cdot y[n-1]+a_2\cdot y[n-2]+\cdots+a_m\cdot y[n-m]$$
$$=b_0\cdot x[n]+b_1\cdot x[n-1]+b_2\cdot x[n-2]+\cdots+a_r\cdot x[n-r]$$

$$y[n]+\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot y[n-i]=b_0\cdot x[n]+\sum_{j=1}^{r} b_j\cdot x[n-j]$$

Para sistemas físicamente realizables se tiene r ≤ m. El sistema se puede representar mediante un conjunto de n ecuaciones en diferencias de primer orden o en general cualquier conjunto de ecuaciones en diferencias simultáneas, aunque en la práctica se utiliza el modelo de un conjunto de ecuaciones en diferencias de primer orden que se conocen como variables de estado de un sistema discreto.

Existen dos estrategias para calcular la respuesta de un sistema descrito

ecuación en diferencias, analizados a continuación.

2.3.1 Mediante el método analítico.

Se obtiene la solución homogénea y particular del sistema, para luego determinarse las condiciones iniciales y encontrar la solución total del sistema.

Ejemplo : Sea el sistema descrito por las ecuaciones :

$$y[n] + 5 \cdot y[n-1] + 6 \cdot y[n-2] = 3 \cdot x[n] + 2 \cdot x[n-1]$$

$$x[n] = \mu[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Solución homogénea : $y_h[n] = A1.(-3)^n + A2.(-2)^n$

Solución particular : $y_p[n] = Co = 5/12$

Se obtienen las condiciones iniciales :

y[0] = 3

y[1] =-10

Resolviendo el sistema se tiene :

$$y[n] = \frac{63}{12} \cdot (-3)^n - \frac{8}{3} \cdot (-2)^n + \frac{5}{12}$$

2.3.2 Mediante el método recursivo

Es un método de cálculo iterativo de valores, como se indica :

$$y[n] = -5 \cdot y[n-1] - 6 \cdot y[n-2] + 3 \cdot x[n] + 2 \cdot x[n-1]$$

$$x[n] = \mu[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Para : $n = 0$ $y[0] = 3$

$n = 1$ $y[0] = -10$

n = 2 *y[0] = 37*

n = 3 *y[0] = -120* . . . . .

2.3.3 Mediante el método numérico

Para la solución de la ecuación en diferencias se utiliza la rutina **diferen.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas de la ecuación. Los macros son :

- Ingreso de datos . Rutina ingreso2.m
- Respuesta a una función impulso. Rutina impulso2.m
- Respuesta a una función paso. Rutina paso2.m
- Respuesta a una señal arbitraria. Rutina arbit2.m
- Análisis de respuesta en el tiempo. Rutina resp2.m

ingreso2.m

En esta rutina se ingresan los coeficientes de la ecuación en diferencias como numerador y denominador, de la siguiente manera :

$$y[n]+5\cdot y[n-1]+6\cdot y[n-2]=3\cdot x[n]+2\cdot x[n-1]$$

$$x[n]=\mu[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

Los coeficientes de Y : den = [1 5 6]

Los coeficientes de X : num = [3 2]

Los coeficientes de la ecuación en diferencias que describen el sistema corresponden a la función de transferencia, en donde den es el denominador y num es el numerador de la función, que es correspondiente a las ecuaciones del espacio de estado discreto descrito por las matrices a, b, c, d ; que se encuentran en la forma canónica controlable. Para esta correspondencia entre la función de transferencia y variables de estado se utiliza el comando [a,b,c,d] = tf2ss(num,den);

impulso2.m

Se calcula la respuesta del sistema a una función impulso, en un intervalo de tiempo definido por el usuario. Para el cálculo de la respuesta se utiliza el comando dimpulse(a,b,c,d) Finalmente se grafica la respuesta a una función impulso en el tiempo.

paso2.m

Se calcula la respuesta del sistema a una función escalón, en un intervalo de tiempo definido por el usuario.

Para el cálculo de la respuesta a la función paso, se utiliza el comando dstep(a,b,c,d).

Se grafica la respuesta en el tiempo para una función paso como entrada del sistema.

arbit2.m

Se calcula la respuesta del sistema a una función arbitraria ingresada por el usuario, como se indica en el numeral 2.1 pero para señales discretas.

Para el cálculo de la respuesta a una señal arbitraria, se utiliza el comando dlsim(a,b,c,d,rt), en donde rt es la señal arbitraria que se generó en un tiempo correspondiente t .

Posteriormente se realiza el gráfico tanto de la función arbitraria que se ingresó como de la respuesta a dicha función.

resp2.m

En esta rutina se realiza el análisis de respuesta en el tiempo, cuando se tiene como señal de entrada la función paso. El criterio para esta rutina es

el mismo que el utilizado en la rutina resp1.m.

Para obtener el valor de la función en estado estable, se evalúa la función de transferencia en z=1, esto se lo realiza utilizando el comando polyval(f,z), en donde f es la función de transferencia obtenida como numerador y denominador.

Se encuentra la respuesta a una función paso con el comando dstep. Para determinar el máximo sobreimpulso, se requiere conocer el valor máximo de la función que se determina con el comando [Y,k]= max(y), en donde Y es el valor máximo del vector de respuesta y, k es el número de columna en donde se produce el valor máximo. El tiempo pico corresponde al valor del máximo de la función. Para el tiempo de establecimiento se calcula con el valor final Vf ± 2%.

2.4 ANÁLSIS MEDIANTE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

Para sistemas contínuos se define la integral de convolución de dos funciones definidas como x(t) y h(t).

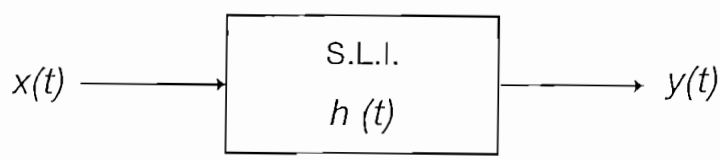


Figura 2.8 Esquema de un sistema de convolución.

x(t) es la señal de entrada al sistema, h(t) es la respuesta impulsiva que va a convolucionar con x(t).

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau) \cdot d\tau$$

La convolución de estos sistemas, se lo puede realizar de forma analítica y de forma numérica.

2.4.1 Solución analítica.

Se resuelve la integral de convolución planteada para y (t), como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la ecuación : $y''+3\cdot y'+2\cdot y = t$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) = t \cdot \mu(t)$$

A partir de la ecuación diferencial se tiene :

$$h(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \cdot \mu(t)$$

$$y(t) = \left(t \cdot \mu(t)\right) * \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) \cdot \mu(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau) \cdot d\tau$$

$$y(t) = e^{-t} - \frac{1}{4}.e^{-2.t} + \frac{1}{2}.t - \frac{3}{4}. \qquad \forall . t > 0$$

2.4.2. Solución numérica.

Por facilidad se analiza en el dominio de la frecuencia, y posteriormente se lo pasa al dominio del tiempo para obtener la respuesta gráfica.

Para la solución numérica se maneja la rutina **iconvol.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas. Los macros son :

- Ingreso de la función h(t). Rutina funhc.m
- Ingreso de la función x(t). Rutina funxc.m

- Gráfico de convolución y(t). Rutina rescdc.m

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la ecuación : $y''+3\cdot y'+2\cdot y = t$

$x(t) = t.u(t)$

$Y(s)=H(s).X(s)$

funhc.m

En esta rutina se ingresa la función h(t), como una función predeterminada que puede ser: una función paso, rampa, exponencial, sinusoidal, cosenoidal, exponencial seno, exponencial coseno. Además permite el ingreso de una función cualquiera h(t), definida por la función de transferencia como numerador y denominador. La función h(t) está definida en un intervalo de tiempo ingresado por el usuario.

Para el ejemplo $H(s) = (s^2+3s+2)^{-1}$

funxc.m

Se implementa exactamente igual a la rutina funhc.m. Para el ejemplo x(t) es la función rampa t.u(t)

Para el ejemplo $X(s) = s^{-2}$

rescdc.m

Calcula la respuesta de convolución del sistema en un intervalo de tiempo definido por el usuario.

Al tener las funciones de transferencia de x(t) y h(t), en el dominio 's' la convolución es directa multiplicando las funciones de transferencia correspondientes con el comando conv. Posteriormente se obtiene la

respuesta impulsiva de la convolución en s con el comando impulse(num,den,t) obteniéndose así y(t) que es la respuesta del sistema.

Se grafica la respuesta en el tiempo, observándose también las señales que se han convolucionado.

2.5 ANÁLISIS MEDIANTE LA SUMATORIA DE CONVOLUCIÓN.

La convolución de sistemas discretos se representa de la siguiente manera :

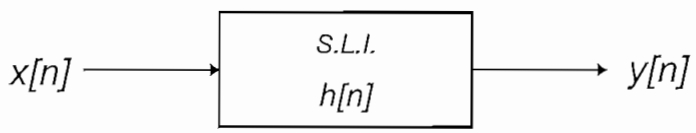


Figura 2.9 . Esquema de un sistema de convolución discreto

x[n] es la entrada del sistema, señal que se convoluciona con h[n] para obtener la
salida del sistema y[n].

La convolución de un sistema discreto se define como :

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

Para desarrollar la convolución de sistemas discretos, se lo puede realizar de la siguiente manera.

2.5.1 Solución analítica

Se lo realiza utilizando la ecuación A . Para ilustrar de mejor manera se va a realizar un ejemplo.

Ejemplo. Convolucionar las señales x(n) y h(n) mostradas en las figuras 2.10 y 2.11 respectivamente.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] \qquad \textbf{(A)}$$

y[n] = 2 δ[n] + 5 δ[n-1] + 6 δ[n-2] +2 δ[n-3]

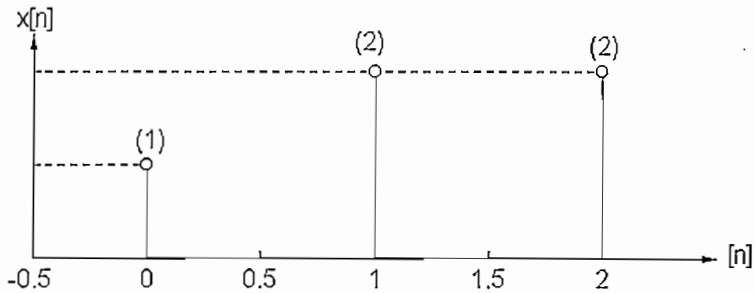


Figura 2.10. Señal de entrada x(n)

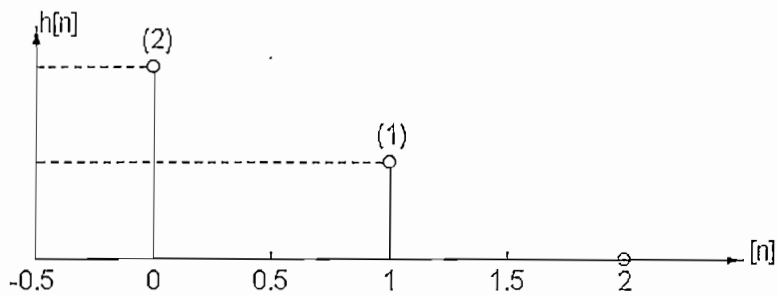


Figura 2.11. Señal h(n)

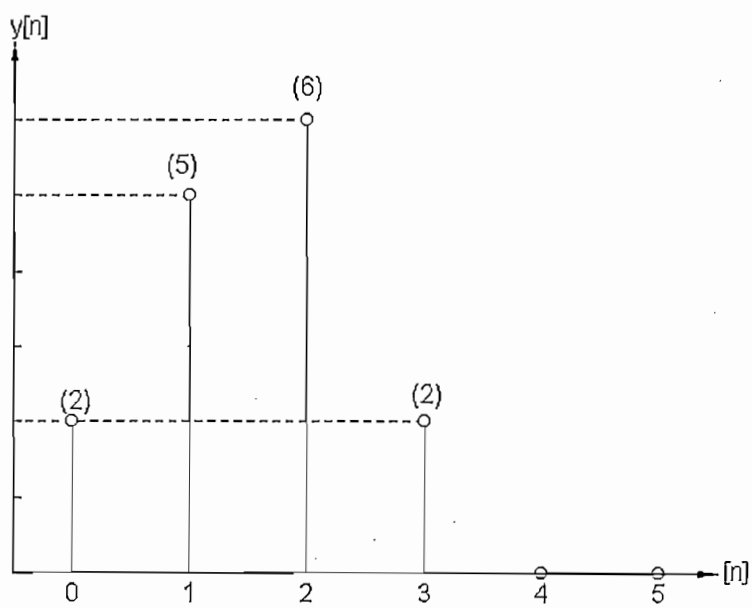


Figura 2.12. Convolución de x(n)*h(n)

$$y[n] = 2\,\delta[n] + 5\,\delta[n-1] + 6\,\delta[n-2] + 2\,\delta[n-3]$$

2.5.2 Solución numérica

Para realizar la convolución de sistemas discretos se utiliza la rutina **sconvol.m**, que utiliza los siguientes macros:

- Ingreso de los límites extremos de x[n] y h[n]. Rutina limitc.m
- Ingreso de la función h[n]. Rutina funh.m
- Ingreso de la función x[n]. Rutina funx.m
- Gráfico de convolución de x[n]*h[n]. Rutina rescd.m

Ejemplo. Convolucionar las señales x(t) y h(t) mostradas en las figuras 2.10 y 2.11 respectivamente. Los vectores que se generan son :

n = [0 1 2]

x[n] = [1 2 2]

h[n] = [2 1 0]

limitc.m

En esta rutina se ingresan los límites extremos tanto de la función x como h, para
generar un vector n. n debe tener la misma dimensión que los vectores x y h.

funh.m

En esta rutina se ingresa el vector de la función h[n], correspondiente al vector n.

funx.m

En esta rutina se ingresa el vector de la función x[n], correspondiente al vector n.

rescd.m

En esta rutina se implementa un algoritmo que convolucione las señales de x y h, utilizando la fórmula $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$.

Se grafican las señales x[n] y h[n] como funciones discretas.

Se grafica y[n], que es la respuesta de convolución, también puede observarse como vector.

2.6 ANALISIS MEDIANTE EL ESPACIO DE ESTADO PARA SISTEMAS CONTINUOS.

Utilizando la notación vectorial-matricial, se puede expresar una ecuación diferencial de enésimo orden por una ecuación diferencial vectorial-matricial de primer orden. Sea el sistema de enésimo orden siguiente :

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = u$$

Se puede considerar como un conjunto de n variables de estado, así :

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y^1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = y^{(n-1)}$$

Entonces se puede escribir como :

$$\underline{x}' = A.\underline{x} + B.u$$
$$\underline{y} = C.\underline{x} + D.u$$

Donde :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

De esta manera se hace una equivalencia entre un sistema descrito mediante ecuaciones diferenciales y mediante variables de estado.

Puede calcularse la respuesta de un sistema descrito mediante variables de estado de la siguiente manera:

2.6.1 Solución analítica.

La solución del sistema se la realiza como:

$$x(t) = e^{A.t}x(0) + \int_0^t e^{A.(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

$$y(t) = C.x + D.u$$

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la ecuación : $y''+3\cdot y'+2\cdot y = x$ cuya señal de entrada es una señal escalón unitaria $u = 1$

El sistema descrito mediante variables de estado es :

$$x_1' = x_2$$

$x_2' = -2x_1 - 3x_2 + u$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

La solución del sistema es:

$$e^{A.t} = \begin{bmatrix} 2.e^{-t} - e^{-2.t} & e^{-t} - e^{-2.t} \\ -2.e^{-t} + 2^{-2.t} & -e^{-t} + 2.e^{-2.t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{A.t}x(0) + \int_0^t e^{A.(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

$$y(t) = C.x + D.u$$

Para x(0)=0

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5.e^{-2.t} \\ e^{-t} - e^{-2.t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5.e^{-2.t}$$

2.6.2 Solución numérica.

La respuesta del sistema descrito mediante variables de estado a una señal de entrada, se calcula mediante la rutina **econtin.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas de la ecuación. Los macros son :

- Ingreso de datos . Rutina ingreso5.m
- Respuesta a una función impulso. Rutina impulso1.m

- Respuesta a una función paso. Rutina paso1.m
- Respuesta a una señal arbitraria. Rutina arbit1.m
- Análisis de respuesta en el tiempo. Rutina resp1.m

ingreso5.m

En esta rutina se ingresan las matrices de estado que describen al sistema : a, b, c, d.

impulso1.m

Se utiliza la misma rutina que para el análisis mediante ecuaciones diferenciales descrita en el numeral 2.2.3, pues se ha demostrado que los dos
sistemas son equivalentes.

paso1.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 2.2.3

arbit1.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 2.2.3

resp1.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 2.2.3

2.7 ANÁLISIS MEDIANTE EL ESPACIO DE ESTADO PARA SISTEMAS DISCRETOS.

Utilizando la notación vectorial-matricial, se puede expresar una ecuación lineal en diferencias de enésimo orden por una ecuación en diferencias vectorial-matricial discreta de primer orden. Sea el sistema de enésimo orden siguiente :

$$y[n]+a_1 \cdot y[n-1]+a_2 \cdot y[n-2]+\cdots+a_m \cdot y[n-m]=u$$

La ecuación en diferencias se puede considerar como un conjunto de n variables de estado, de la siguiente manera :

$$x_1 = y[n-m]$$
$$x_2 = y[n-m+1]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = y[n-1]$$

Entonces se puede escribir como :

$$\underline{x}[n+1]=Ad.\underline{x[n]}+Bd.u[n]$$
$$\underline{y[n]}=Cd.\underline{x[n]}+Dd.u[n]$$

Donde :

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ad=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad Bd=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cd=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

De esta manera se hace una equivalencia entre un sistema descrito mediante ecuaciones de diferencias y mediante variables de estado.

Puede calcularse la respuesta de un sistema descrito mediante variables de estado de la siguiente manera:

2.7.1 Solución analítica.

La solución del sistema se obtiene en forma recursiva partiendo del estado inicial, utilizando el modelo:

$$\underline{x}[n+1] = Ad.\underline{x}[n] + Bd.u[n]$$
$$\underline{y}[n] = Cd.\underline{x}[n]$$

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la ecuación :

$$y[n] + 5 \cdot y[n-1] + 6 \cdot y[n-2] = 3 \cdot x[n] + 2 \cdot x[n-1]$$

$$x[n] = \mu[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

El sistema descrito mediante variables de estado es :

$x_1[n+1] = x_2[n]$
$x_2[n+1] = -6x_1[n] - 5x_2[n] + u[n]$

$$\underline{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$

$$Ad = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \qquad Bd = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Cd = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad Dd = 0$$

La solución del sistema está dada por el numeral 2.3.2.

2.7.2. Mediante método numérico.

La respuesta del sistema descrito mediante variables de estado a una señal de entrada, se calcula mediante la rutina **ediscret.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas de la ecuación. Los macros son :

- Ingreso de datos . Rutina ingreso6.m
- Respuesta a una función impulso. Rutina impulso2.m
- Respuesta a una función paso. Rutina paso2.m
- Respuesta a una señal arbitraria. Rutina arbit2.m
- Análisis de respuesta en el tiempo. Rutina resp2.m

ingreso6.m

En esta rutina se ingresan las matrices de estado discreto, que describen al sistema : a, b, c, d.

impulso2.m

Se utiliza la misma rutina que para el análisis mediante ecuaciones en diferencias descrita en el numeral 2.3.3, pues se ha demostrado que los dos sistemas son equivalentes.

Paso2.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 2.3.3

arbit2.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 2.3.3

resp2.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 2.3.3.

CAPITULO III: ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

3.1. ANÁLISIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.1.1. Mediante la solución analítica.

3.1.2. Mediante el método numérico

3.2. ANÁLISIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA Z

3.2.1. Mediante el método analítico

3.2.2. Lugar geométrico de las raíces

3.2.3. Mediante el método numérico

3.3. ANÁLISIS MEDIANTE SERIES DE FOURIER

3.3.1. Mediante el método analítico

3.3.2. Mediante el método numérico

3.4. ANÁLISIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.4.1. Mediante el método analítico

3.4.2. Mediante el método numérico

3.5. ANÁLISIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

3.6. ANÁLISIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

3.6.1. Método numérico

3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Los sistemas se analizan utilizando la función de transferencia y la respuesta de frecuencia para sistemas contínuos y discretos.

Para sistemas continuos el análisis se realiza mediante: transformada de Laplace, transformada de Fourier, transformada rápida de Fourier. Se representa el lugar geométrico de las raíces, análisis en el plano 's', análisis de estabilidad absoluta y relativa, diagramas de respuesta de frecuencia y el espectro de frecuencia.

Para sistemas discretos el análisis se realiza mediante: transformada Z, series de Fourier, transformada discreta de Fourier. Se representa el lugar geométrico de las raíces, análisis en el plano 'z', análisis de estabilidad absoluta y relativa y el espectro de frecuencia.

En este capitulo se determina la respuesta en el tiempo, la respuesta de frecuencia de un sistema lineal invariante, dinámico contínuo y discreto, expresado mediante un modelo analítico por diferentes métodos, siempre en forma numérica con su respectivo despliegue gráfico.

3.1. ANALASIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

La transformada de Laplace es una de las herramientas más utilizadas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, convirtiendo la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en s más fácil de resolver. La solución final en el tiempo se obtiene con la transformada inversa de Laplace.

Para sistemas físicamente realizables, el grado del numerador de la función de transferencia debe ser menor o igual que el grado del denominador de la

función. Un sistema en el dominio de "s", puede ser representado como se observa en la figura 3.1.

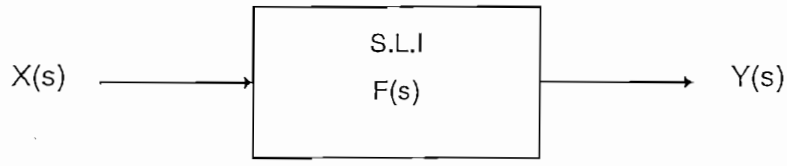


Fig. 3.1. Esquema de un sistema en el dominio de 'S'.

En donde : $Y(s) = F(s).\ X(s)$

$F(s)$ representa a la función de transferencia del sistema, en lazo abierto.

Analíticamente se estudian las siguientes estrategias para resolver un sistema en el dominio de "s" utilizando la transformada de Laplace:

3.1.1 Mediante la solución analítica.

Para obtener la respuesta en el dominio del tiempo, se obtiene Y(s) que es la respuesta del sistema en el dominio de "s". La respuesta en el tiempo se calcula con la transformada inversa de Laplace, como :

$$y(t) = L^{-1}(Y(s))$$

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la función de transferencia:

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 3.s + 2}$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

Entonces: $Y(s) = F(s).X(s).$

$X(s) = 1$

Se tiene como señal de entrada una función impulso Aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene:

$$y(t) = 2.e^{-t}.u(t) - 2.e^{-2t}.u(t)$$

La estabilidad relativa de un sistema de control de red cerrada están directamente relacionados con la localización en el plano s de las raíces del sistema, es útil determinar el lugar geométrico de las raíces en el plano s a medida que varía un parámetro.

A continuación se indica la figura 3.2 , que es el gráfico del lugar geométrico de las raíces, que proporciona una información gráfica.

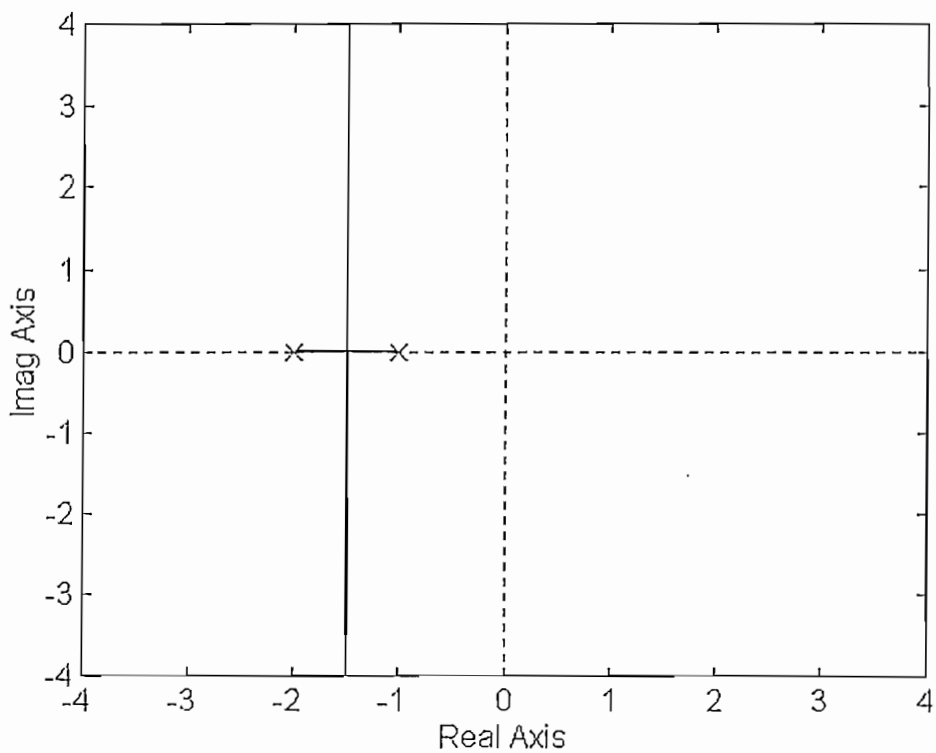


Fig. 3.2. L.G.R. del sistema realimentado.

Para determinar estabilidad absoluta del sistema, todas las raíces deben situarse en la parte del semiplano izquierdo, caso contrario el sistema es inestable.

Para este ejemplo se tiene que el sistema tiene una estabilidad absoluta, como se aprecia en la figura 3.2.

3.1.2 Mediante el método numérico

Para el análisis mediante la transformada de Laplace se utiliza la rutina **tlaplace.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas. Los macros son :

- Ingreso de datos . Rutina ingresf1.m
- Respuesta a una función impulso. Rutina impulso1.m
- Respuesta a una función paso. Rutina paso1.m
- Respuesta a una señal arbitraria. Rutina arbit1.m
- Lugar geométrico de la raíces. Rutina lgrtl.m
- Análisis en el plano S. Rutina respf1.m

ingresf1.m

En esta rutina se ingresan el numerador y denominador de la función de transferencia del sistema en lazo abierto, de la siguiente manera :

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 3.s + 2}$$

Ingreso del numerador : num= 2

Ingreso del denominador : den=[1 3 2]

Los coeficientes de la función de transferencia que describen el sistema corresponden a las ecuaciones del espacio de estado descrito por las matrices a, b, c, d ; que se encuentran en la forma canónica controlable. Para esta correspondencia entre la función de transferencia y variables de estado se utiliza el comando [a,b,c,d] = tf2ss(num,den);

impulso1.m

Para observar la respuesta impulsiva en el tiempo se utiliza la misma rutina que para la solución de ecuaciones diferenciales, descrita en el numeral 2.2.3 del capítulo 2.

paso1.m

Se utiliza la misma rutina del numeral 2.2.3.

arbit1.m

Se utiliza la misma rutina del numeral 2.2.3.

lgrtl.m

Grafica el lugar geométrico de las raíces para sistemas contínuos, para esto se utiliza el comando rlocus(num,den). Se tiene la opción de colocar el cursor sobre el lugar geométrico de las raíces, esto se hace utilizando el comando [gain,pol]=rlocfind(num,den), en donde gain es la ganancia del punto en donde se ubicó el cursor y pol es el valor del polo ubicado.

respf1.m

Se realiza el análisis en frecuencia compleja 's', para ello se determina el valor de los polos, ceros y la ganancia de la función de transferencia con el comando [ceros,polos,ganancia]=tf2zp(num,den).

Se determina la estabilidad absoluta del sistema, analizando si todas las raices se sitúan en la parte del semiplano izquierdo, caso contrario el sistema es inestable.

Se realiza un gráfico marcando los polos y ceros de la función. La estabilidad relativa se puede apreciar del lugar geométrico de las raíces.

3.2. ANALISIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA Z.

El método de la transformada Z permite transformar sistemas lineales invariantesde tiempo discreto expresado en ecuación de diferencias a

ecuaciones algebraicas. Un sistema discreto, en el dominio de z puede representarse como se indica en la figura 3.3.

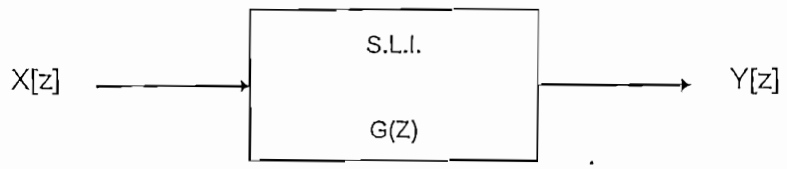


Fig 3.3. Esquema de un sistema discreto

La transformada Z relaciona retardos de la entrada y la salida, matemáticamente se expresa como :

$$Y(z) = G(z).X(z)$$

Para sistemas físicamente realizables en la función G(z) el grado del numerador debe ser menor o igual que el grado del denominador.

El cálculo de la respuesta de un sistema descrito mediante la función de transferencia en z, puede realizarse como se indica a continuación.

3.2.1 Mediante el método analítico.

Se obtiene la respuesta de tiempo discreto Y[n] a partir de Y(z), de la siguiente manera:

$$Y[n] = Z^{-1}\,[Y(z)]$$

Ejemplo : Sea el sistema descrito por la función de transferencia :

$$G(z) = \frac{2.z - 1}{z^2 + 1.2.z - 0.4}$$

A partir de la función de transferencia en z, aplicando la transformada inversa de z se obtiene la ecuación en diferencias, analizada en el numeral 2.3 del capítulo 2.

$$y[n]+1.2.y[n-1]-0.4\cdot y[n-2]=2\cdot x[n-1]-x[n-2]$$

Esta ecuación puede resolverse en el dominio del tiempo como se analizó en el capítulo 2.

3.2.2. Lugar geométrico de las raíces.

Con este método se analiza el L.G.R. para sistemas discretos, en el plano z con proyección en el círculo de radio unitario.

La función de transferencia G(z), descrita en el plano z es de un sistema en lazo abierto, para realizar el gráfico del lugar geométrico de las raíces se debe utilizar la función de transferencia del sitema en lazo cerrado. En la figura 3.4 se indica el gráfico correspondiente al L.G.R. del sistema descrito por G(z).

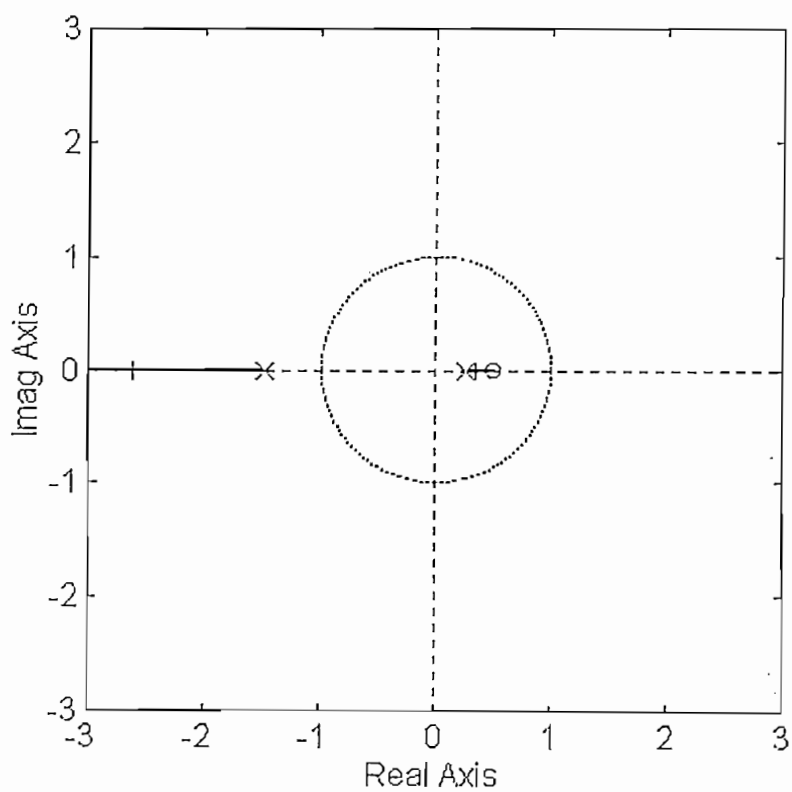


Fig. 3.4. L.G.R en el plano z

Para determinar estabilidad relativa, los polos del sistema en el plano z, deben estar dentro del círculo de radio unitario. El sistema analizado es inestable como se muestra en la figura 3.3.

3.2.3. Mediante el método numérico

Para la solución del sistema se utiliza la rutina **tz.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas de la ecuación. Los macros son :

- Ingreso de datos . Rutina ingresf2.m
- Respuesta a una función impulso. Rutina impulso2.m
- Respuesta a una función paso. Rutina paso2.m
- Respuesta a una señal arbitraria. Rutina arbit2.m
- Lugar geométrico de las raíces. Tutina lgrtz.m
- Análisis en el plano Z. Rutina respf2.m

ingresf2.m

Esta rutina permite el ingreso de la función de transferencia en función de z, el ingreso se lo realiza como numerador y denominador, de la siguiente manera :

Ingreso del numerador : num = [2 -1]
Ingreso del denominador : den = [1 1.2 -0.4]

Los coeficientes que describen el sistema corresponden a la función de transferencia, en donde den es el denominador y num es el numerador de la función, que es correspondiente a las ecuaciones del espacio de estado discreto descrito por las matrices a, b, c, d ; que se encuentran en la forma canónica controlable. Para esta correspondencia entre la función de transferencia y variables de estado se utiliza el comando [a,b,c,d] = tf2ss(num,den);

impulso2.m

Calcula la respuesta del sistema a una función impulso, rutina descrita en el numeral 2.3.3 del capítulo 2.

paso2.m

Calcula la respuesta del sistema a una función escalón, rutina descrita en el numeral 2.3.3.

arbit2.m

Calcula la respuesta del sistema a una función arbitraria, rutina descrita en el numeral 2.3.3.

lgrtz.m

Grafica el lugar geométrico de las raíces para la función de transferencia, proyectándose el círculo de radio unitario. Del lugar geométrico de las raíces se puede apreciar la estabilidad relativa

respf2.m

En esta rutina se realiza el análisis en el plano z, para ello se determina el valor de los polos, ceros y la ganancia de la función de transferencia con el comando [ceros,polos,ganancia]=tf2zp(num,den).

Se determina la estabilidad absoluta del sistema, los polos del sistema deben estar dentro del círculo de radio unitario, caso contrario el sistema es inestable. Se realiza un gráfico marcando los polos y ceros de la función.

3.3 ANÁLSIS MEDIANTE SERIES DE FOURIER.

Una función periódica en el tiempo puede ser representada mediante la serie de Fourier. La serie de Fourier que representa a una función puede ser exponencial o trigonométrica.

La serie trigonométrica tiene como señales periódicas básicas a las señales sinusoidal y cosenoidal, y la serie exponencial cuya función periódica básica es la exponencial compleja periódica. Estas dos señales son periódicas con una frecuencia fundamental w_o y período fundamental $T_o = 2\pi / w_o$, las dos representaciones son equivalentes entre sí. Las funciones periódicas se expresan de la siguiente manera :

Serie trigonométrica.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n . \cos(n . w_0 . t) + b_n . sin(n . w_0 . t)]$$

Serie exponencial.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n . e^{j.n.wo.t}$$

Para realizar el análisis en frecuencia mediante series de Fourier, se lo puede hacer de la siguiente manera :

3.3.1 Mediante el método analítico.

A partir de los coeficientes de la serie de Fourier, se calcula la función f(t) para n valores (armónicas) y se grafica la función. Para obtener el espectro de frecuencia discreto se grafica c_n en función de n.

Ejemplo : Considere una señal periódica f(t), con frecuencia fundamental 2π que se expresa de la siguiente manera :

$$a_n = \frac{4 . T_r . sin(2 . n . \pi . T_r / T_o)}{2 . \pi . n . T_r}$$

$$b_n = 0$$

Donde :

T_o es el período de la función.

T_r es el rango en el que la función toma un valor, desde - T_r hasta +T_r.

Aplicando la ecuación de la serie de Fourier descrita para una ecuación trigonométrica, se tiene la siguiente función:

$$f(t) = \frac{2.T_r}{T_o} + \frac{4.T_r}{T_o} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{.sin(2.n.T_r / T_o)}{2.n.T_r / T_o} \cdot \cos \frac{2.\pi.n}{T_o} \cdot t$$

3.3.2. Mediante el método numérico.

Para la solución de numérica se utiliza la rutina **sfourier.m**, que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas. Los macros son :

- Ingreso de funciones predeterminadas. Rutina funcpf3.m
- Ingreso de la serie de Fourier. Rutina iserief3.m
- Espectro de frecuencia. Rutina espef3.m
- Función formada por armónicas. Rutina farmonf3.m

funcpf3.m

Se ponen a disposición del usuario funciones predeterminadas como : función pulso simétrico, triangular, diente de sierra, sinusoidal y coseoidal; en donde se observa directamente el valor de los coeficientes de Fourier, pudiéndose variar el período y el intervalo de la función. Se puede observar el espectro de frecuencia y la función formada por n armónicas.

Ejemplo : La función del ejemplo anterior, se expresa mediante series de Fourier, en donde :

$$a_n = \frac{2.sin(2.\pi.n/3)}{\pi.n}$$

$$b_n = 0$$

Donde: *To=3*

Tr=1

iserief3.m

En esta rutina se realiza el ingreso de la serie de Fourier, y se utilizan otras subrutinas :

- Serie trigonométrica. Rutina trigonf3.m
- Serie exponencial. Rutina exponf3.m

trigonf3.m

Permite el ingreso de los coeficientes de Fourier para la serie trigonométrica. Para ello se edita la subrutina anf3.m, en donde el usuario ingresa los coeficientes an y bn en función de la variable n.

exponf3.m

Permite el ingreso de los coeficientes de Fourier para la serie exponencial. Para ello se edita la subrutina cnf3.m, en donde el usuario ingresa el coeficiente cn en función de la variable n.

espef3.m

Permite graficar el espectro de frecuencia de la función, hasta un valor máximo ingresado por el usuario. El valor límite es de 50, por el tiempo que se requiere para graficar como un sistema discreto y así se puede apreciar de mejor manera el gráfico.

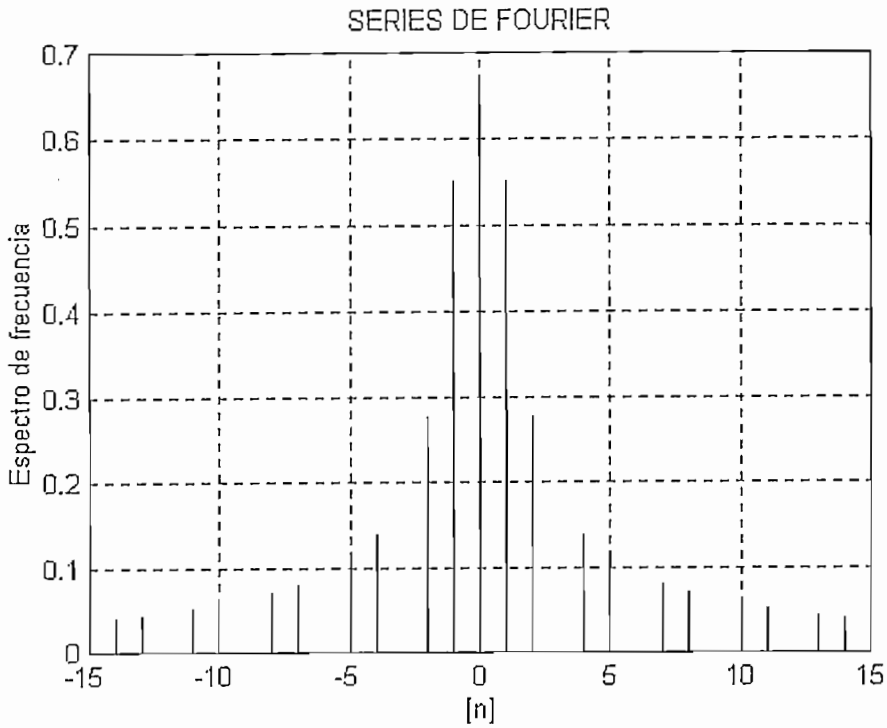


Fig. 3.5. Espectro de frecuencia discreto de f(t)

Farmonf3.m

Se grafica la función f(t), formada por n armónicas que define el usuario. Se debe definir el período de la función y el intervalo en el que se define la función periódica.

El cálculo de la función f(t) se realiza mediante un algoritmo que se implementa en base a la siguiente ecuación:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n . \cos(n . w_0 . t) + b_n . sin(n . w_0 . t)]$$

Se grafica la función f(t) obtenida.

El período de la función To es 3.

Se define un intervalo en el que se observa la función.

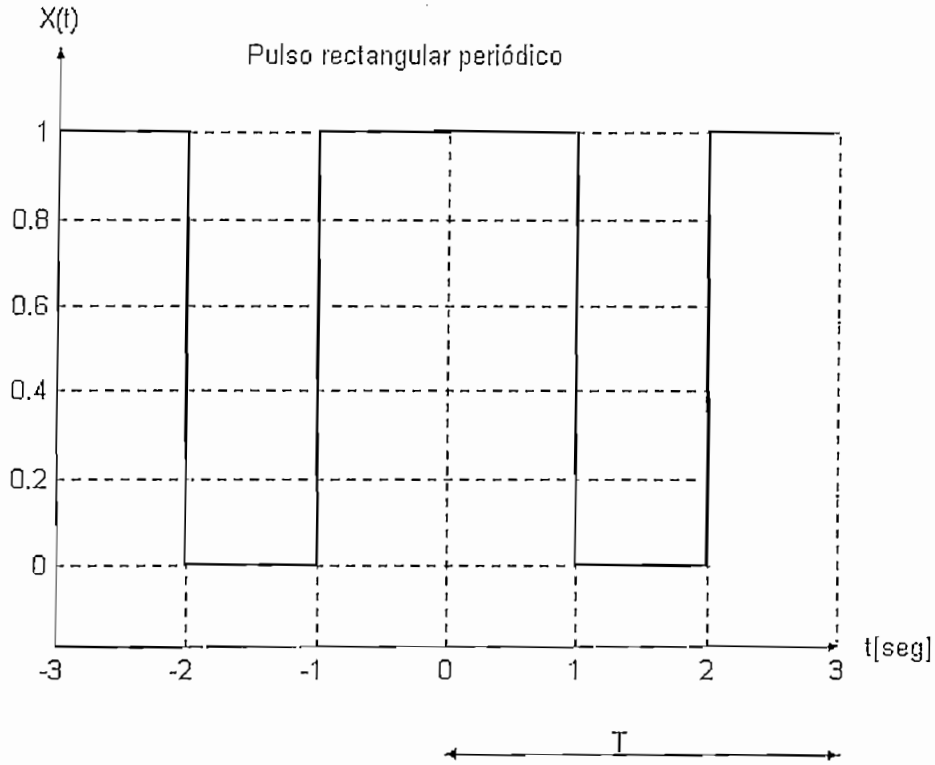


Fig. 3.6. Función x(t) periódica

3.4. ANÁLSIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La transformada de Fourier en tiempo contínuo se utiliza para representar a una señal no periódica. Para aplicaciones reales de sistemas contínuos se puede considerar como la forma límite de una función cuando el período se hace arbitrariamente grande.

La transformada de Fourier se define como:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j.w.t} .dt$$

$$X(w) = F(X(t))$$

En donde el módulo de X(w) es el espectro de frecuencia contínuo del sistema.

En este capítulo además del espectro de frecuencia, se analiza la respuesta de frecuencia del sistema mediante diagramas de Bode, diagrama polar y diagrama de Nichols; análisis que se detalla en el método analítico.

El análisis en el dominio de frecuencia mediante la transformada de Fourier, se lo puede realizar mediante la siguiente manera:

3.4.1. Mediante el método analítico.

Como se indicó anteriormente el espectro de frecuencia de una función F(jw), es el módulo de la función en el dominio de la frecuencia w.

Es importante el análisis de respuesta en el dominio de la frecuencia, para esto se debe tener la función de transferencia en el dominio de la frecuencia w. Para ilustrar de mejor manera el análisis se realiza el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

- Se tiene un pulso rectangular expresado analíticamente como:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ldots\ldots\ldots -3 < t < 3 \\ 0 \ldots\ldots\ldots otro.valor \end{cases}$$

Aplicando la ecuación 3.40, se tiene:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j.w.t} .dt$$

$$F(w) = \int_{-3}^{3} e^{-j.w.t} .dt = 6.\frac{sin(3.w)}{3w}$$

Graficando el **espectro de frecuencia contínuo** se tiene:

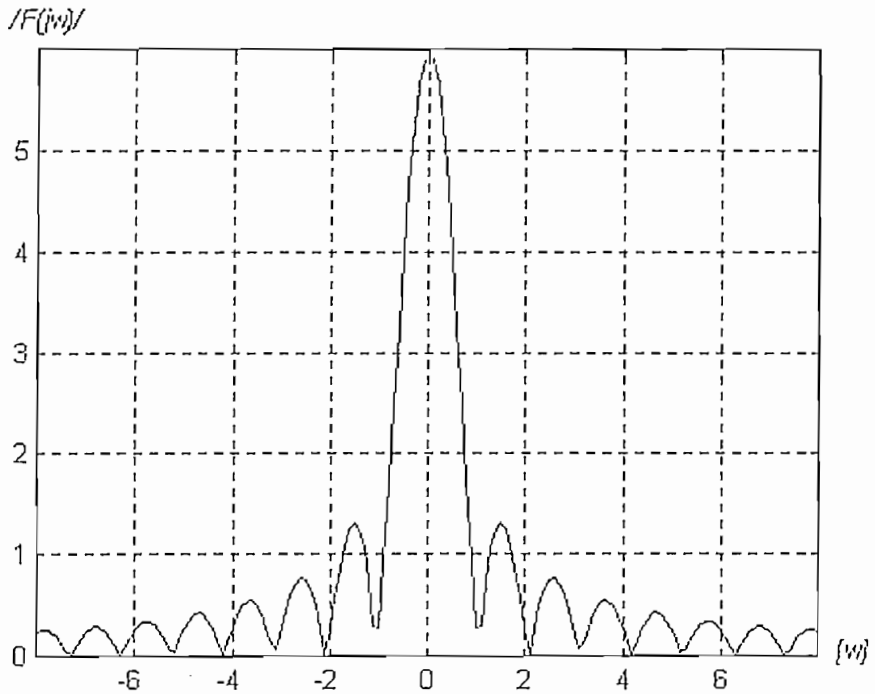


Fig. 3.7. Espectro de frecuencia de F(jw)

- Se tiene la función de transferencia del sistema:

$$F(s) = \frac{10}{s^3 + 6.s^2 + 5.s} = \frac{10}{s.(s+1).(s+5)}$$

Para analizar la respuesta de frecuencia se grafican los diagramas de Bode correspondientes a F(jw).

Diagrama de Bode en lazo abierto, con este diagrama se determina el margen de fase y margen de ganancia para estudiar la estabilidad del sistema.

El margen de ganancia de la función, es el recíproco de la magnitud de |F(jw)| a la frecuencia en la que el ángulo de fase es -180°. La frecuencia de cruce de fase w_f se define como la frecuencia en la que el ángulo de fase de la función de transferencia de lazo abierto es igual a -180°. El margen de ganancia MG se obtiene como:

$$MG = \frac{1}{\left|F\left(jw_f\right)\right|}$$

El margen de fase es la cantidad de retraso de fase que se requiere añadir al cruce de ganancia, para llevar el sistema al borde de la inestabilidad. La frecuencia de cruce de ganancia w_g es aquella a la cual |F(jw)|, la magnitud de la función de transferencia de lazo abierto es unitaria.

El margen de fase se obtiene como:

$$MF = 180 + \underline{\left| F(j.w_g) \right|}$$

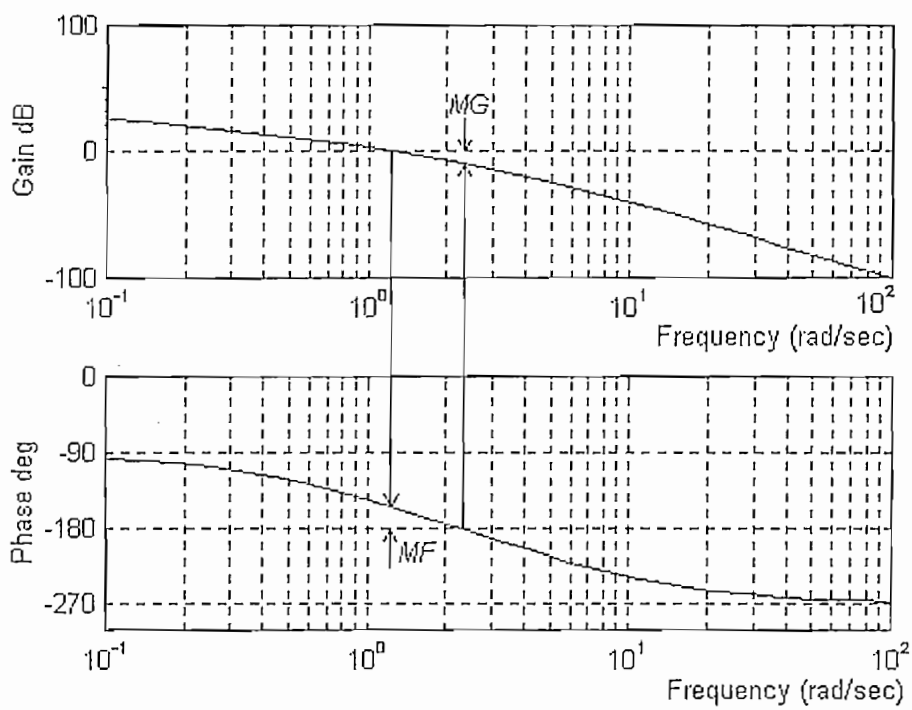


Fig. 3.8. Diagrama de Bode en lazo abierto de F(jw).

Para el ejercicio planteado se tiene :

MF = 25.3898°

MG = 9.5429 dB.

Diagrama de Bode en lazo cerrado, es la respuesta de frecuencia en red cerrada con la que puede determinarse el funcionamiento transitorio de un sistema. En lazo cerrado se determina el máximo de resonancia del sistema, que está dado por el máximo valor de la función en lazo cerrado. En la figura 3.9 se grafica el diagrama de bode en lazo cerrado para F(jw).

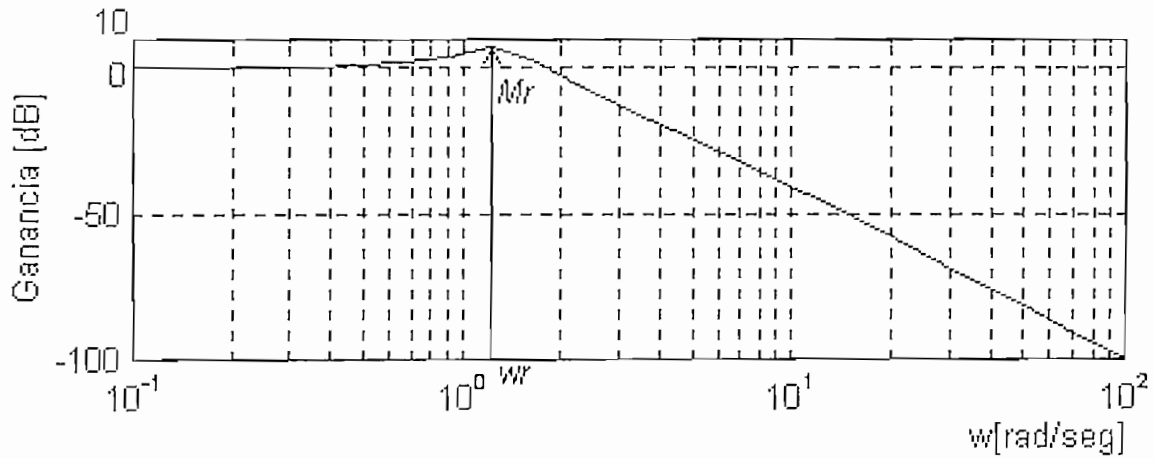


Fig. 3.9. Diagrama de Bode en lazo cerrado de F(jw).

Para el ejercicio planteado se tiene :

Mr = 7.1295[dB]

wr = 1.2328 [rad/seg]

Para tener un análisis completo de la respuesta de frecuencia, se requiere realizar el análisis en frecuencia mediante diagrama polar.

Diagrama polar, es la respuesta de frecuencia para sistemas lineales contínuos en el tiempo, también se le denomina diagramas de Nyquist. Es un diagrama del módulo de la función G(jw) del sistema en función del ángulo de fase de G(jw) en coordenadas polares al variar el valor de w desde cero hasta infinito.

Para el análisis de estabilidad de sistemas de control de diagramas polares, se utiliza el criterio de estabilidad de Nyquist en base al diagrama polar.

Si la trayectoria de Nyquist en el plano s encierra Z ceros y P polos de 1+G(s).H(s) y no atraviesa ni polos ni ceros de 1+G(s).H(s) cuando un punto representativo s se desplaza en sentido horario a lo largo de la trayectoria de Nyquist, entonces la trayectoria correspondiente en el plano G(s).H(s) rodea al punto -1+0j, N=Z-P veces en sentido horario. Los valores negativos de N implican rodeos anti horarios.

Al determinar el criterio de estabilidad se Nyquist se pueden presentar tres posibilidades:

1. No hay rodeo del punto -1+0j. Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de G(s)H(s) en el semiplano derecho del plano s; caso contrario el sistema es inestable.

2. Hay un rodeo en sentido antihorario o rodeos del punto -1+0j. En este caso el sistema es estable si la cantidad de rodeos antihorarios es la misma que la cantidad de polos de G(s)H(s) en el semiplano derecho del plano s; en caso contrario, el sistema es inestable.

3. Hay un rodeo o rodeos del punto -1+0j en sentido horario. En este caso, el sistema es inestable.

Ejemplo: Se tiene la función de transferencia del sistema:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5.s + 6} = \frac{2}{(s+2).(s+3)}$$

En la figura 3.10 se grafica el diagrama polar de G(s), en donde se observa que el punto -1+0j no está rodeado por el contorno del diagrama, este sistema es estable. La función no tiene ningún polo en el semiplano derecho.

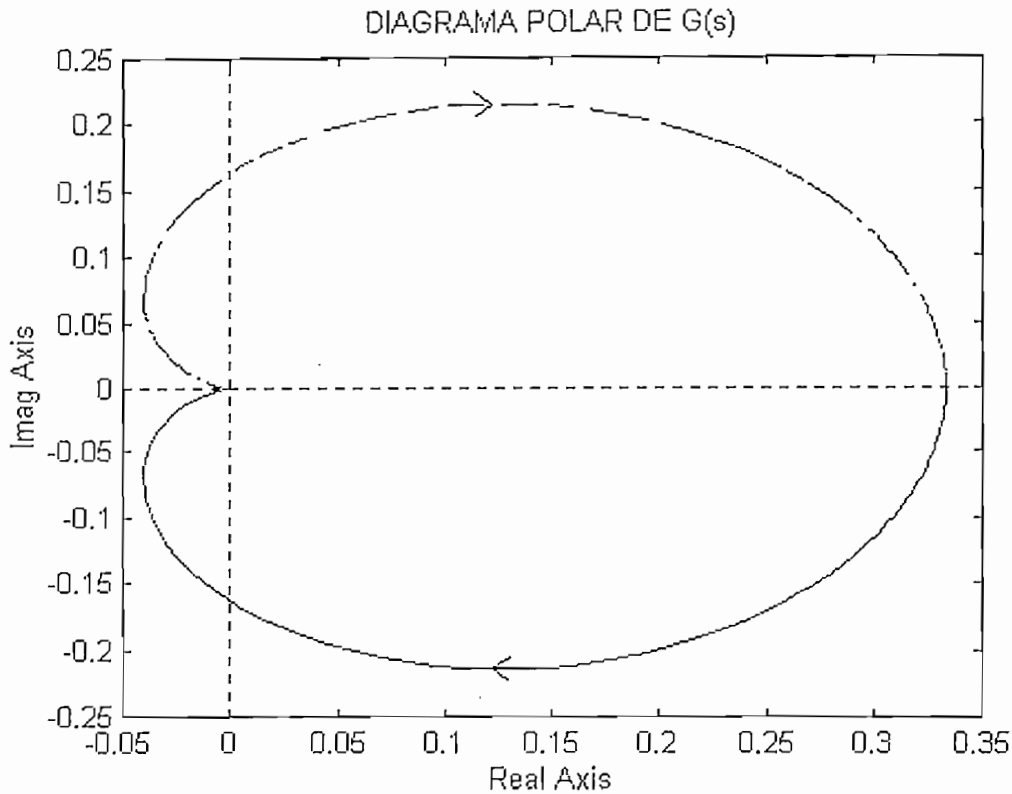


Fig. 3.10. Diagrama polar de F(jw).

El **diagrama de Nichols** grafica la magnitud versus la fase de la función de transferencia. Se superpone a los lugares de módulo y fase constante de la llamada carta de Nichols que permiten determinar la respuesta de frecuencia de lazo cerrado como se muestra en la figura 3.11

Para hallar la respuesta de frecuencia de lazo cerrado, se construye el diagrama del logaritmo de la magnitud G(jw) en función de la fase.

A continuación se plantea la función G(s) evaluada en jw, para realizar el análisis con este método.

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 6.s^2 + 5.s} = \frac{10}{s.(s+1).(s+5)}$$

$$G(jw) = \frac{10}{(jw)^3 + 6.(jw)^2 + 5.(jw)}$$

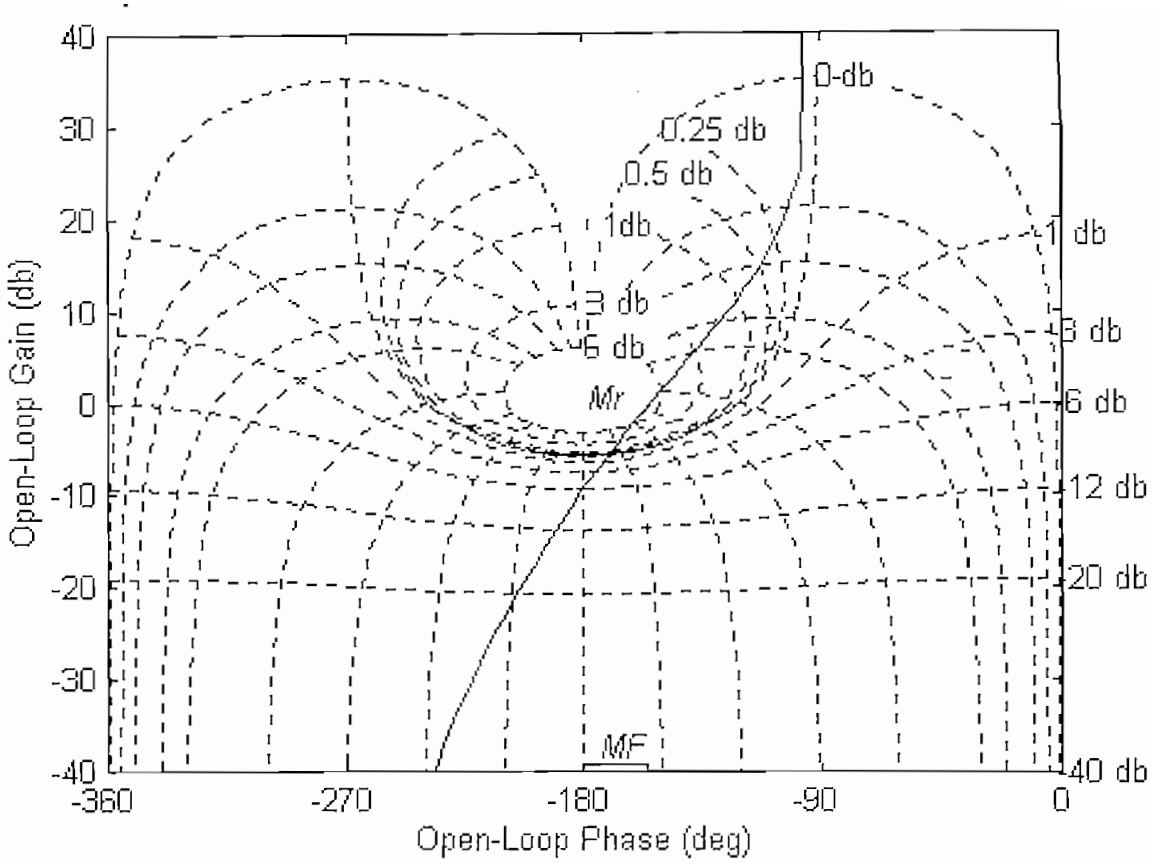


Fig. 3.11. Diagrama de Nichols de G(jw).

Análisis en lazo abierto.- La curva de la función corta a la la curva de 0dB (escala lado izquierdo), por lo tanto se puede realizar un cálculo gráfico del margen de fase. La curva de la función corta a la curva de -180 grados, por lo tanto su margen de ganancia se calcula graficamente (escala lado derecho).

$$MF = 26°$$

$$MG = 6\ dB$$

Análisis en lazo cerrado.- Para analizar las características del sistema en lazo cerrado, en la figura 3.11. se observa que la curva de la función que se aproxima tangencialmente a curva de 7dB que es el valor pico de resonancia.

$$Mr = 7\ [dB]$$

3.4.2. Mediante el método numérico.

Para la solución de numérica se utiliza la rutina **tfourier.m,** que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas. Los macros son :

- Ingreso de funciones predeterminadas. Rutina funcpf4.m
- Ingreso de la transformada de Fourier. Rutina inftf4.m
- Espectro de frecuencia. Rutina espef4.m
- Respuesta de frecuencia. Rutina respf4.m

funcpf4.m

Se ponen a disposición del usuario funciones predeterminadas como : función pulso simétrica, exponencial, y triangular simétrica; en donde se observa directamente el valor de la transformada de Fourier f(w,T), pudiéndose variar el período y el intervalo de la función en w para visualizar el espectro de frecuencia. En la misma pantalla se observa el gráfico de la función y su espectro de frecuencia.

Inftf4.m

En esta rutina se realiza el ingreso de la transformada de Fourier, para ello se edita la subrutina tff3.m, en donde el usuario ingresa F(jw) como función de w.

Ejemplo : La función pulso simétrica se expresa mediante la transformada de Fourier f(jw), en donde :

$$F(jw)=T*\sin(0.5wT) / 0.5wT$$

$$T=6$$

espef4.m

Permite graficar el espectro de frecuencia contínuo de la función, hasta un valor máximo de w[rad/seg] ingresado por el usuario. El valor límite de w es 50[rad/seg], aunque el usuario ingrese límites superiores.

respf4.m

Para el análisis en frecuencia, se utiliza la rutina **respf4** , que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas. Los macros son:

- Ingreso de la función de tranferencia. Rutina ftf4.m
- Diagramas de Bode. Lazo abierto. Rutina bodef4.m
- Diagramas de Bode. Lazo cerrado. Rutina resonf4.m
- Diagrama polar. Rutina polarf4.m
- Diagrama de Nichols. Rutina nicolf4.m

tff4.m

En esta rutina se ingresan el numerador y denominador de la función de transferencia del sistema en lazo abierto, G(s).

bodef4.m

Esta rutina calcula la respuesta de frecuencia en lazo abierto, se utiliza el comando bode(num,den) para obtener el diagrama de Bode. Con la función [gm,pm]=margin(num,den); se obtiene el margen de fase en gm y el margen de ganancia en pm.

Resonf4.m

Esta rutina calcula la respuesta de frecuencia en lazo cerrado, para esto se determina la función en lazo cerrado, a partir de ello se determina el valor máximo de la magnitud de la función que se define como máximo de resonancia, la frecuencia correspondiente a este valor es la conocida frecuencia de resonancia. Se calcula la frecuencia de corte, cuando la curva de ganancia interseca a -3dB del valor del módulo de baja frecuencia (ancho de banda).

polarf4.m

Se grafica el diagrama polar, a partir de la función nyquist(num,den); analizado anteriormente.

Nicolf4.m

Esta rutina grafica el diagrama de Nichols, utilizando la función nichols(num,den).

3.5. ANÁLSIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.

La transformada discreta de Fourier (DFT), se utiliza para representar a una señal de duración finita.

Sea x[n] una señal de duración finita, definida como:

x[n] = 0 fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$

La DFT de *x[n]* se define como:

$$\bar{x}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-j.k.(2\pi/N).n} \qquad k=0,1.....,N-1$$

La señal de duración finita está especificada por un conjunto finito de valores diferentes de cero, o bien por el conjunto finito de valores de $\bar{x}(k)$, en su DFT. La DFT de señales reales, es simétrica conjugada.

La DFT es difícil de implementar en su forma básica, por esta razón se implementa de un modo eficiente, para esto se utiliza la transformada rápida de Fourier (FFT). Con las transformadas DFT y FFT, se obtienen los mismos resultados; la transformada rápida de Fourier , bien podría estar definida como la transformada discreta rápida de Fourier.

Se logra una mayor eficiencia a partir de la selección apropiada de N, como es cuando N es potencia de 2.

3.6. ANÁLSIS MEDIANTE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.

La transformada discreta de Fourier se define como :

$$\bar{x}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n].e^{-j.k.(2\pi/N).n} \qquad k=0,1.....,N-1$$

La transformada FFT se define igual que la transformada discreta de Fourier. Se tiene que: $W_N = e^{-j.(2.\pi/N)}$ y N tiene el valor de la longitud de $\bar{x}$, que es igual a una potencia de 2. Con esta nueva definición se tiene:

$$\bar{x}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n].W_N^{-k.n} \qquad k=0,1.....,N-1$$

Con la ecuación anterior, se define la función $\bar{X}(k)$ en el dominio de la frecuencia W.

A continuación, se indica el método mediante el cual se realiza un análisis en frecuencia con la transformada rápida de Fourier.

Se plantea la solución de la transformada de rápida de Fourier, en donde fft(f), se calcula mediante la ecuación de x(k), en donde f representa la función x.

Se tiene f(t), que es una función definida en el tiempo, en donde t representa la longitud del vector N. Para ilustrar de mejor manera, se plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Se define f(t) de la siguiente manera:

f (t) = sin(2*pi*f*t)

Donde f=25 Hz.

En la figura 3.12, se grafica la señal f(t).

Para obtener la transformada rápida de Fourier analíticamente, es muy compleja la solución; debido a esto se optan por otros métodos como algoritmos computacionales.

La transformada rápida de Fourier, permite obtener el espectro de frecuencia de la función f(t), que se grafica en la figura 3.13

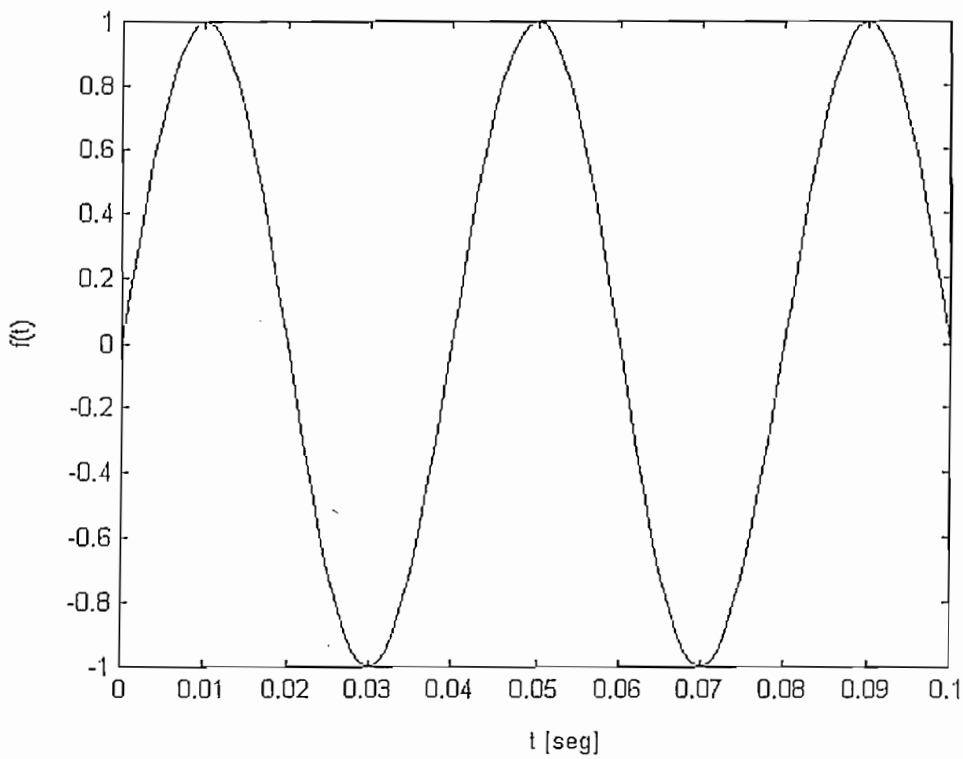


Fig. 3.12 Señal f(t)

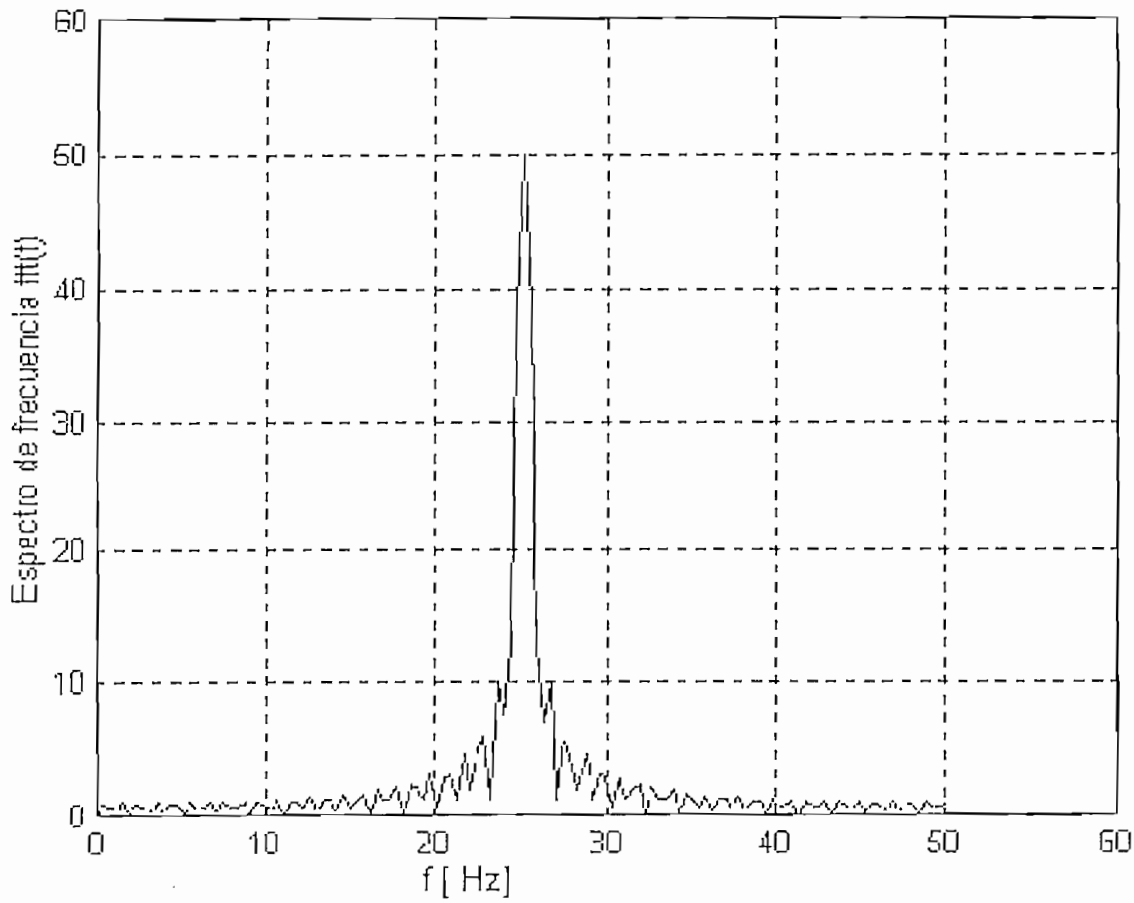


Fig. 3.13 Transformada rápida de Fourier de f(t).

3.6.1. Método numérico

Para la solución numérica se utiliza la rutina **rfourier.m,** que utiliza otros macros para encontrar respuestas gráficas. Los macros son :

- Ingreso de funciones predeterminadas. Rutina funcpf5.m
- Ingreso de funciones. Rutina ifftf5.m
- Espectro de frecuencia. Rutina espef5.m

funcpf5.m

Se ponen a disposición del usuario funciones predeterminadas como : función pulso, exponencial y triangular; en donde se observa directamente el valor de la transformada de Fourier f(w,T), pudiéndose variar el período. El intervalo de la función en t es automático, puesto que su longitud debe ser un múltiplo de 2. En pantalla se observa el gráfico de la función y su espectro de frecuencia.

ifftf5.m

En esta rutina se realiza el ingreso de la función en el dominio del tiempo para calcular transformada de Fourier, para ello se edita la subrutina fftf5.m, en donde el usuario ingresa f(t) como función de t y define dicho intervalo de tiempo.

Ejemplo : Se define f(t) como:

f(t) = sin (2*pi*25*t)

f = 25 Hz

espef5.m

Esta rutina grafica la función f(t). Posteriormente grafica el espectro de frecuencia contínuo de f utilizando el comando fft(f,N), que calcula la transformada discreta de Fourier de f, evaluada en N puntos. N es potencia de 2. Para graficar el espectro de potencia se debe calcular el valor absoluto de la transformada rápida de Fourier.

CAPITULO IV: APLICACIONES DE SISTEMAS LINEALES

4.1. OPERACIÓN DE SEÑALES EN EL TIEMPO

4.2. MODELOS DE SISTEMAS

4.2.1. Sistemas en serie

4.2.1.a. Sistemas en serie sin realimentación

4.2.1.b. Sistemas en serie con realimentación

4.2.2. Sistemas en paralelo

4.2.2.a. Sistemas en paralelo sin realimentación

4.2.2.b. Sistemas en paralelo con realimentación

4.2.3. Análisis numérico de modelos de sistemas

4.3. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DEL SISTEMA

4.3.1. Estabilidad de sistemas contínuos

4.3.2. Controlalbilidad de sistemas contínuos

4.3.3. Observabilidad de sistemas contínuos

4.3.4. Transformación de semejanza

4.3.5. Análisis numérico

4.4. SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS

4.5. ANÁLISIS DE FOURIER

4.6. FILTRADO DE SEÑALES

4.6.1. Filtros pasa bajos

4.6.2. Filtros pasa altos

4.6.3. Filtros pasa banda

4.6.4. Análisis numérico

4.7. MODULACIÓN DE SEÑALES

4.7.1. Modulación en amplitud

4.7.2. Modulación en fase

4.7.3. Modulación en frecuencia

4.7.4. Análisis numérico

4.8. SIMULINK

4.9. ANÁLISIS VARIANDO UN PARÁMETRO

4.9.1. Dominio del tiempo

4.9.2. Dominio de la frecuencia

4.9.3. Análisis numérico.

4.10. PROCESAMIENTO EN TIEMPO REAL

4. APLICACIONES DE SISTEMAS LINEALES

Una gran mayoría de procesos físicos pueden ser modelados mediante sistemas lineales invariantes en el tiempo. Los sistemas se analizan en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Las aplicaciones de sistemas lineales, están orientadas a tiempo y frecuencia. Se utilizan rutinas para el procesamiento de señales y programas demostrativos del comportamiento dinámico en tiempo y en frecuencia.

Para el desarrollo de las **aplicaciones** se utiliza la rutina ***menu3.m***. A continuación se indican los macros que se utilizan para encontrar respuestas gráficas de las aplicaciones que se plantean a continuación:

- Operación de señales en el tiempo. Rutina operap.m
- Modelos de sistemas. Rutina modeloap.m
- Características estructurales del sistema. Rutina caracap.m
- Sistemas de datos muestreados. Rutina datamap
- Filtrado de señales. Rutina filtroap.m
- Modulación de señales. Rutina modulaap.m
- Simulink. Rutina simulap
- Análisis variando un parámetro. Rutina variarap
- Proceamiento en tiempo real. Rutina timerap.m

4.1. OPERACIÓN DE SEÑALES EN EL TIEMPO.

Las señales arbitrarias se utilizan generalmente como señales de excitación, como se indicó en el numeral 2.1, en donde se realizan operaciones sobre la señal arbitraria estrictamente. Ahora se va a realizar operaciones consecutivas sobre la misma señal arbitraria.

Para realizar operaciones consecutivas con señales arbitrarias se ha desarrollado la rutina ***operap.m***, en la que se toman en cuenta los siguientes aspectos :

- Límites de la función de entrada. Rutina limitap.m
- Ingreso y gráfico de la señal de entrada. Rutina arbitap.m
- Operaciones con la señal de entrada. Rutina manipap.m

limitap.m

Define el intervalo de tiempo en el que se va a generar la función arbitraria, los valores pueden ser positivos o negativos.

arbitap.m

Aquí se genera la función arbitraria en base a la suma de señales: escalón, rampa, sinusoidal y exponencial. Una vez generada la función arbitraria se grafica dicha señal.

manipap.m

Una vez generada la señal arbitraria, se pueden realizar operaciones de :

- Desplazamiento. Rutina desplaap.m
- Transposición . Rutina transpap.m
- Escalamiento. Rutina escalaap.m
    - Escalamiento en tiempo. Rutina escalapt.m
    - Escalamiento en amplitud. Rutina escalapa.m

Cada rutina se encarga de desplazar, transponer o escalar la señal arbitraria sobre la última señal sobre la cual se realizó alguna operación. Se muestra el gráfico correspondiente a la señal arbitraria (la última señal manipulada) y a la resultante en la misma figura, según sea el caso.

En el capítulo 2, numeral 2.1 se analizan operaciones sobre señales arbitrarias. Figura 2.4.

4.2. MODELOS DE SISTEMAS.

Los sistemas lineales en el tiempo, se representan mediante modelos contínuos y discretos como se analizó en el capítulo 2. En este capítulo se realiza una equivalencia entre **modelos contínuos y discretos**, al permitir el cambio de uno a otro modelo. Los sistemas lineales se expresan generalmente como modelo a función de transferencia y variables de estado, que son los que se utilizan.

Los sistemas lineales pueden representarse mediante modelos matemáticos,que relacionan la salida del sistema con su entrada. Para el análisis de sistemas lineales, se analiza la interconexión de sistemas en **serie** o cascada y en **paralelo**, con y sin realimentación.

4.2.1. Sistemas en serie .

Los sistemas en serie o en cascada, transforman una señal de entrada, procesándola en orden por el Sistema 1, Sistema 2, ..., Sistema n, hasta obtener la salida del sistema.

Los sistemas en serie, se analizan sin realimentación y con realimentación H.

4.2.1.a. Sistemas en serie sin realimentación.

Son sistemas comunes y muy simples, como se representan en la figura 4.1.

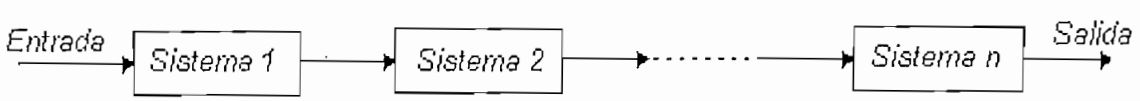


Fig. 4.1. Esquema de un sistema serie .

4.2.1.b. Sistemas en serie con realimentación.

Son n sistemas en serie, con realimentación negativa H, como se representa en la figura 4.2.

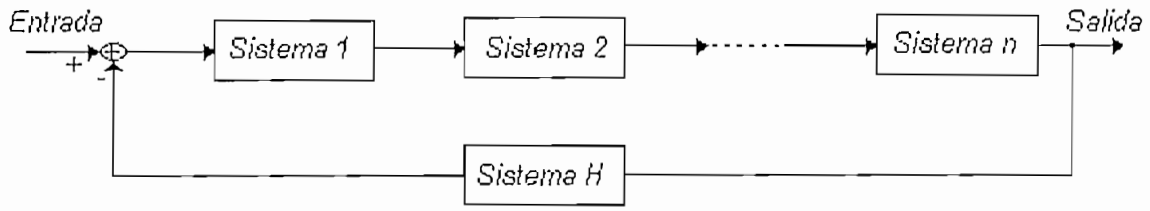


Fig. 4.2. Esquema de un sistema serie, con realimentación H..

4.2.2. Sistemas en paralelo.

Los sistemas en paralelo, reciben la misma señal de entrada; de manera que la salida de la interconexión en paralelo es la suma de las salidas de los n sistemas.

Los sistemas en paralelo, se analizan sin realimentación y con realimentación H.

4.2.1.a. Sistemas en paralelo sin realimentación.

En la figura 4.3, se representan n sistemas en paralelo.

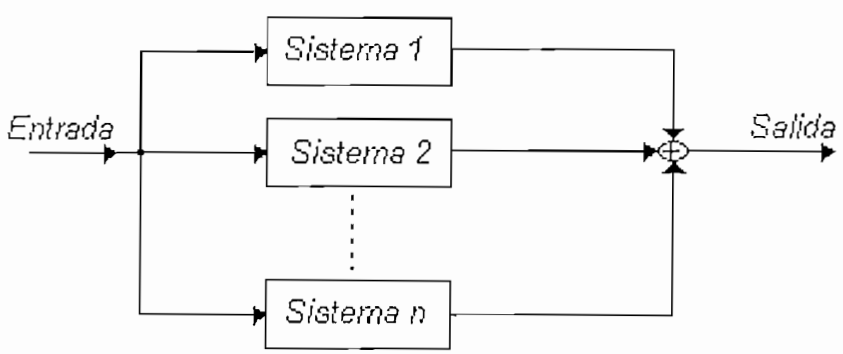


Fig. 4.3. Esquema de un sistema en paralelo .

4.2.1.b. Sistemas en paralelo con realimentación.

Son n sistemas en paralelo, con realimentación negativa H, como se representa en la figura 4.4.

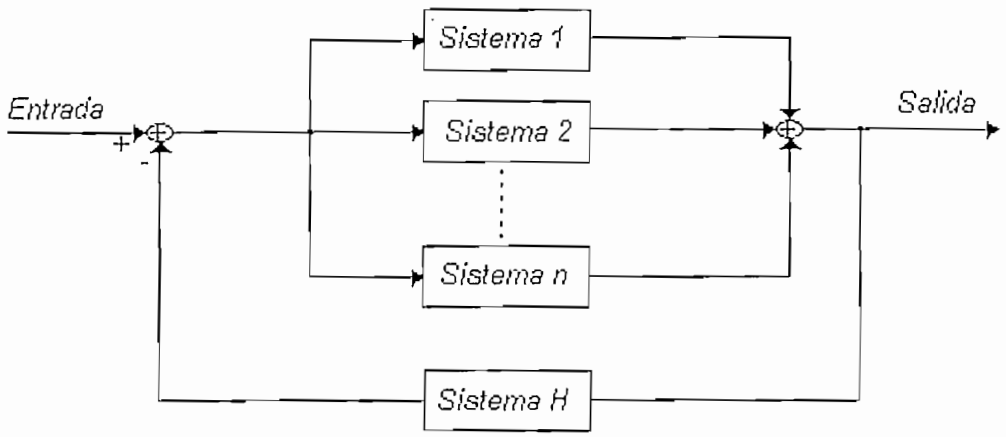


Fig. 4.4. Esquema de interconexión en paralelo, con realimentación H.

4.2.3. Análisis numérico de modelos de sistemas.

Para realizar la implementación de modelos de sistemas se utiliza la rutina ***modeloap.m***, en la que se toman en cuenta los siguientes aspectos :

- Ingreso de modelos. Rutina inmodap.m
  - Modelo contínuo.Rutina inmodcap.m
  - Modelo discreto. Rutina inmoddp.m
- Cambio de modelos. Rutina cammodap.m
  - De contínuo a discreto. Rutina camcdap.m
  - De discreto a contínuo. Rutina camdcap.m
- Composición de modelos. Rutina commodap.m
  - Modelos en serie. Rutina serieap.m
    - Sin realimentación. Rutina nserieap.m
    - Con realimentación. Rutina rserieap.m
  - Modelos en paralelo. Rutina cascadap.m
    - Sin realimentación. Rutina ncascap.m
    - Con realimentación. Rutina rcascap.m

inmodap.m

Permite ingresar a un submenú, para ingresar un modelo contínuo o discreto. Utiliza las subrutinas inmodcap.m y inmoddp.m, descritas a contiuación.

inmodcap.m

Se ingresa el modelo a función de transferencia o variables de estado de un sistema contínuo. Indica en la pantalla la equivalencia entre modelos a variables de estado y función de transferencia.

inmoddp.m

Se ingresa el modelo a función de transferencia o variables de estado de un sistema discreto. Indica en la pantalla la equivalencia entre modelos a variables de estado y función de transferencia.

camodap.m

Permite ingresar a un submenú, para realizar el cambio de modelos. Si se ingreso un modelo contínuo, se cambia de modelo contínuo a discreto. Si se ingreso un modelo discreto, se cambia de modelo discreto a contínuo. Se utilizan las subrutinas camcdap y camdcap, descritas a contiuación.

camcdap.m

Permite el cambio de modelo contínuo a modelo discreto, utilizando el método "zoh" (zero order hold). Se muestra en la pantalla los modelos discretos a variables de estado y función de transferencia, se utilizan los comandos:

```
[numd,dend] = c2dm(numc,denc,ts,'zoh');
[ad,bd,cd,dd] = c2dm(ac,bc,cc,dc,ts,'zoh')
```

numc,denc describen el modelo a función de transferencia del sistema contínuo en función de su numerador y dènominador.

ac,bc,cc,dc describen el modelo a variables de estado del sistema contínuo.

ts es el tiempo de discretización .

zoh es el método de discretización del sistema.

numd,dend representan el modelo discreto a función de transferencia obtenido.

ad,bd,cd,dd representan el modelo discreto a variables de estado obtenido.

camdcap.m

Permite el cambio de modelo discreto a modelo contínuo, utilizando el método "zoh" zero order hold. Se muestra en la pantalla los modelos contínuos a variables de estado y función de transferencia, se utilizan los comandos:

[numc,denc] = d2cm(numd,dend,ts,'zoh');

[ac,bc,cc,dc] = d2cm(ad,bd,cd,dd,ts,'zoh');

numd,dend describen el modelo a función de transferencia del sistema discreto en función de su numerador y denominador.

ad,bd,cd,dd describen el modelo a variables de estado del sistema discreto.

ts es el tiempo de conversión.

zoh es el método de conversión para el sistema.

numc,denc representan el modelo contínuo a función de transferencia obtenido.

ad,bd,cd,dd representan el modelo contínuo a variables de estado obtenido.

commodap.m

Permite realizar la interconexión de sistemas en serie y en paralelo, utilizando las siguientes subrutinas:

serieap.m

Permite ingresar a un submenú, para realizar la interconexión de sistemas en serie sin o con realimentación negativa. Utiliza las subrutinas nserieap.m y rserieap.m, descritas a continuación.

nserieap.m

Se realiza la interconexión de n sistemas en serie, como se observa en la figura 4.1, obteniéndose el sistema total. Se utiliza el comando [num,den]=series(num1,den1,num2,den2); en un lazo iterativo que calcula la interconexión en serie para n sistemas.

num1, den1 es el modelo a función de transferencia del sistema1.
num2, den2 es el modelo a función de transferencia del sistema2.
num, den es el modelo a función de transferencia del sistema serie resultante obtenido.

rserieap.m

Se realiza la interconexión de n sistemas en serie con realimentación negativa, como se observa en la figura 4.2, obteniéndose el sistema total. Se utiliza el comando [num,den]=series(num1,den1,num2,den2); en un lazo iterativo que calcula la interconexión en serie para n sistemas. Se utiliza

el comando [numt,dent]=feedback(num,den,numh,denh,-1) para obtener el sistema total realimentado

num, den es el modelo a función de transferencia de la interconexión de n sistemas en serie.
numh, denh es el modelo a función de transferencia del sistema H que realimenta negativamente al sistema en serie.

numt, dent es el modelo a función de transferencia del sistema serie resultante obtenido.

cascadap.m

Permite ingresar a un submenú, para realizar la interconexión de sistemas en paralelo sin o con realimentación negativa. Utiliza las subrutinas ncascap.m y rcascap.m, descritas a continuación.

ncascap.m

Se realiza la interconexión de n sistemas en paralelo, como se observa en la figura 4.3, obteniéndose el sistema total. Se utiliza el comando [num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2); en un lazo iterativo que calcula la interconexión en paralelo para n sistemas.

num1, den1 es el modelo a función de transferencia del sistema1.
num2, den2 es el modelo a función de transferencia del sistema2.

num, den es el modelo a función de transferencia del sistema paralelo resultante obtenido.

rcascap.m

Se realiza la interconexión de n sistemas en paralelo con realimentación negativa, como se observa en la figura 4.4, obteniéndose el sistema total. Se utiliza el comando [num,den]=paralell(num1,den1,num2,den2); en un lazo iterativo que calcula la interconexión en paralelo para n sistemas. Se utiliza el comando [numt,dent]=feedback(num,den,numh,denh,-1) para obtener el sistema total realimentado

num, den es el modelo a función de transferencia de la interconexión de n sistemas en paralelo.
numh, denh es el modelo a función de transferencia del sistema H que realimenta negativamente al sistema en paralelo.
numt, dent es el modelo a función de transferencia del sistema paralelo resultante obtenido.

4.3. CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES DEL SISTEMA.

Los sistemas físicos son generalmente representados mediante variables de estado y funciones de transferencia, sistemas que son equivalentes entre sí como se demostró en el capítulo I. Las características estructurales del sistema, son: estabilidad, controlabilidad y observabilidad del sistema. Las condiciones de controlabilidad y observabilidad, pueden gobernar la solución completa en un problema de diseño para un sistema de control; la solución a este problema no puede existir si el sistema considerado no es controlable.

4.3.1. Estabilidad de sistemas contínuos.

La estabilidad de sistemas lineales se analizó en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia en los capítulos I y II, ahora se trata de realizar un análisis más específico tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

4.3.2. Controlabilidad de sistemas contínuos

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo to, si por medio de un vector de control no restringido, es posible transferir el sistema desde cualquier estado inicial $x(t_o)$ a cualquier otro estado, en un tiempo finito.

Se considera el sistema de tiempo contínuo:

$$x' = A.x + B.u$$

Dónde:

x es el vector de estado (vector n dimensional)

u es la señal de control (escalar)

A es la matriz nxn

B es la matriz de nx1.

A partir de x ', se dice que: el sistema es controlable de estado completo si y solo si los vectores B, AB, ..., $A^{n-1}B$ son linealmente independientes, o la matriz de nxn y rango n:

$$Co = [\, B \vdots AB \vdots \ \ldots \ \vdots A^{n-1}B \,]$$

Co es la matriz de controlabilidad. Si los n vectores columna de Co son linealmente independientes ($|Co| \neq 0$), el sistema es controlable.

4.3.3. Observabilidad de sistemas contínuos

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_o , si con el sistema en el espacio de estado $x(t_o)$, es posible determinar este estado a través de la observación de la salida durante un intervalo finito de tiempo.

Se considera el sistema de tiempo contínuo:

$$x' = A.x$$

$$y = C.x$$

Dónde:

x es el vector de estado (vector n dimensional)

y es el vector de salida (vector m dimensional)

A es la matriz nxn

C es la matriz de mxn.

El sistema descrito es completamente observable si y solo si, la matriz Ob de nxnm, es de rango n o tiene n vectores columna linealmente independientes ($|Ob| \neq 0$). Ob se denomina matriz de controlabilidad.

$$Ob = [\, C^* \vdots A^*C^* \vdots \ldots \vdots (A^*)^{n-1} C^* \,]$$

4.3.4. Tranformación de semejanza.

Una matriz A_{nxn}, se puede transformar a una matriz similar que tiene los mismos valores propios. Una transformación de semejanza se realiza al pasar desde una matriz A cualquiera a una matriz A diagonal formada por sus valores propios. Entonces:

$$D = T^{-1}. A. T$$

A es una matriz nxn

D es la matriz similar de A (Matriz diagonal)

T es la matriz de transformación de semejanza.

4.3.5. Análisis numérico de las características estructurales del sistema

Para realizar la implementación de características estructurales del sistema, se utiliza la rutina ***caracap.m***, en la que se toman en cuenta los siguientes aspectos :

- Ingreso del sistema. Rutina inmodcap.m
- Análisis de estabilidad. Rutina estabap.m
    - Análisis de respuesta en el tiempo. Rutina resp1ap.m
    - Lugar geométrico de las raíces. Rutina lgrtl.m

- Análisis en el plano "s". Rutina respf1.m
- Diagramas de Bode. Lazo abierto. Rutina bodef4.m
- Diagramas de Bode. Lazo cerrado. Rutina resonf4.m
- Diagrama polar. Rutina polarf4.m
- Diagrama de Nichols. Rutina nicolf4.m

- Controlabilidad. Rutina contrbap.m
- Observabilidad. Rutina obserap.m
- Transformación de semejanza. Rutina tsemejap.m

inmodcap.m

Esta rutina permite el ingreso del sistema, descrito mediante variables de estado o mediante función de transferencia.

Estabap.m

Permite ingresar a un submenú, para realizar el análisis de estabilidad. Utiliza las subrutinas resp1ap.m, lgrtl.m, respf1.m, bodef4.m, resonf4.m, polarf4.m y nicolf4.m

resp1ap.m

Rutina formada por resp1.m del numeral 2.2.3, que contiene adicionalmente la respuesta gráfica a una función paso.

Lgrtl.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.1.2.

respf1.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.1.2.

bodef4.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.4.2.

resonf4.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.4.2.

polarf4.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.4.2.

nicolf4.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.4.2.

contrbap.m

Se determina la controlabilidad del sistema, para esto se utiliza el comando Co=ctrb(ab,bb), en donde Co es la matriz de controlabilidad. Se utiliza el comando det(Co), para determinar si el sistema es controlable o no lo es.

obserap.m

Se determina la controlabilidad del sistema, para esto se utiliza el comando Ob=obsv(ab,cb);en donde Ob es la matriz de controlabilidad. Se utiliza el comando det(Ob), para determinar si el sistema es controlable o no lo es.

tsemejap.m

Con esta rutina se realiza una transformación de semejanza a una matriz diagonal. Se observa también la matriz de transformación de semejanza. Se utiliza el comando [ab,bb,cb,db,T]=canon(ac,bc,cc,dc,'modal'), en dónde se utiliza el método modal.

4.4. SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS.

Una señal de tiempo contínuo se puede representar, y reconstruir completamente, partiendo del conocimiento de sus valores instantáneos, o muestreos, igualmente espaciados en el tiempo. En aplicaciones prácticas, se muestrea una señal de tiempo contínuo, para realizar el procesamiento digital de dicha señal.

Un sistema lineal invariante de tiempo contínuo, se representa mediante su función de transferencia o variables de estado. Este sistema se discretiza, obteniéndose así un sistema discreto o de muestreo del sistema. En los capítulos I y II, se realizó un análisis de sistemas discretos.

Para este análsis se implementa la rutina ***datamap.m,*** en la que se toman en cuenta los siguientes aspectos:

- Ingreso del sistema. Rutina idatamap.m
- Respuesta del sistema. Rutina rdatamap.m
    - Análisis de respuesta en el tiempo. Rutina resp2ap.m
    - Lugar geométrico de las raíces. Rutina lgrtz.m
    - Análisis en el plano "z". Rutina respf2.m
    - Características estructurales del sistema. Rutina cdatamap.m
        - Controlabilidad. Rutina contrbap.m
        - Observabilidad. Rutina obserap.m
        - Transformación de semejanza. Rutina tsemejap.m

idatamap.m

Esta rutina permite el ingreso del sistema contínuo, descrito mediante variables de estado o mediante función de transferencia.

rdatamap.m

Permite ingresar a un submenú, para realizar el análisis de la respuesta del sistema. Utiliza las subrutinas resp2ap.m, lgrtz.m, respf2.m.

resp2ap.m

Rutina formada por resp1.m del numeral 2.3.3, que contiene adicionalmente la respuesta gráfica a una función paso.

lgrtz.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.2.3.

respf2.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.2.3.

cdatamap.m

Permite ingresar a un submenú, para determinar las características estructurales del sistema. Utiliza las subrutinas: contrbap.m, obserap.m y tsemejap.m

contrbap.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 4.3.5.

obserap.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 4.3.5.

tsemejap.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 4.3.5.

4.5. ANALISIS DE FOURIER.

En el capítulo II, se realizó el análisis mediante las series de Fourier, la transformada de Fourier, la transfromada discreta y la transfromada rápida de Fourier. Esta aplicación, se concreta a una respuesta gráfica del espectro de potencia de una señal f(t).

Para el anásliis de Fourier se implementa la rutina ***fourirap.m*** , que toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Ingreso de la señal y gráfico. Rutina ifourap.m
- Espectro de potencia sin ruído. Rutina espotnap.m
- Gráfico de la señal con ruido. Rutina ruidfap.m
- Espectro de potencia con ruído. Rutina espotrap.m

ifourap.m

Esta rutina permite la edición del archivo ifunap.m, utilizando el comando !edit ifunap .m; para que el usuario ingrese una función f(t) cualquiera y el vector t de tiempo de la función f(t). Se ejecuta el archivo anterior solo escribiendo ifunap y se calculan los valores de f(t) y t.
Para el cálculo de los valores de f(t) se utiliza eval f, previamente definiendo a la variable f como una variable global.

Se grafica la función f(t) que ingresó el usuario.

espotnap.m

Se calcula el espectro de potencia de la señal utilizando los comandos secuenciales:

```
y=fft(f)

Pyy=y.*conj(y)
```

fft(ft), calcula la transformada rápida de Fourier de la función f , previamente ingresada.

Pyy es el espectro de potencia de f.

Se grafica el espectro de potencia sin ruído obtenido.

ruidfap.m

A la señal f que ingresó el usuario, se le añade ruído utilizando el comando f=f+2*(rand(t)-0.5). Se grafica la señal f(t) con ruído.

espotrap.m

Se calcula el espectro de potencia de la señal que se graficó con ruído, de manera similar a la rutina espotnap.

Se grafica el espectro de potencia con ruído de la señal ingresada.

4.6. FILTRADO DE SEÑALES.

Se analizan los filtros selectivos en frecuencia que permiten el paso de señales sin distorsión en una o en un conjunto de bandas de frecuencia, y atenúan o eliminan totalmente señales en el resto de las bandas de frecuencia.

4.6.1. Filtros pasa bajos

Los filtros pasa bajos, permiten el paso de señales que tienen una frecuencia menor que Wc , que es la frecuencia de filtrado. Las señales de mayor frecuencia son eliminadas, como se observa en la figura 4.5.

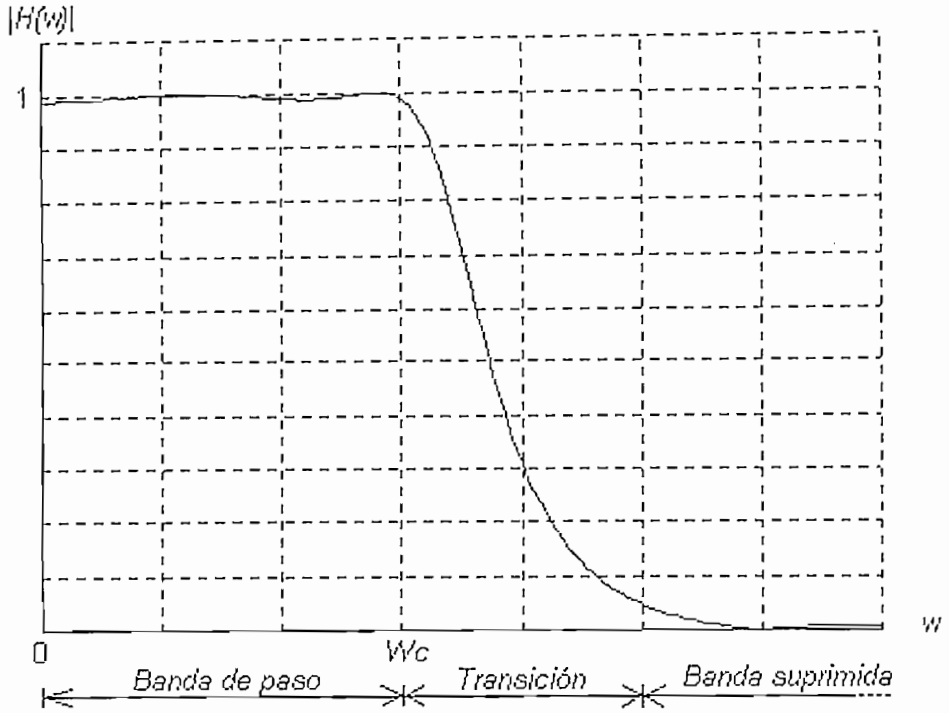


Fig. 4.5. Filtro pasa bajos.

4.6.2 Filtros pasa altos

Los filtros pasa altos, permiten el paso de señales que tienen una frecuencia mayor que Wc , que es la frecuencia de filtrado. Las señales de menor frecuencia son eliminadas, como se observa en la figura 4.6.

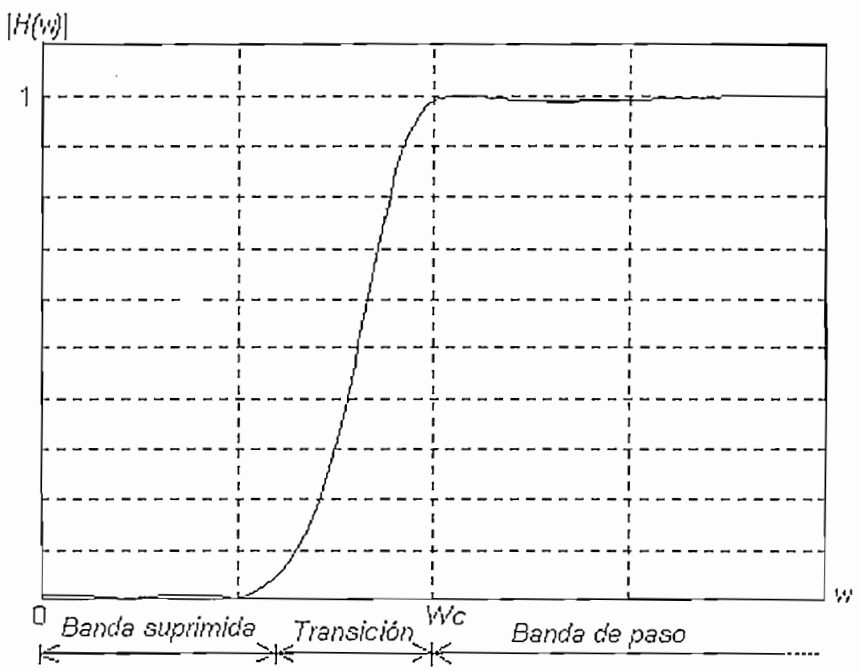


Fig. 4.6. Filtro pasa altos

4.6.3. Filtros pasa banda

Los filtros pasa banda, permiten el paso de señales en un rango de frecuencia desde w1 hasta w2 como se indica en la figura 4.7. Las señales que no están en este rango de frecuencia son eliminadas al pasar por el filtro.

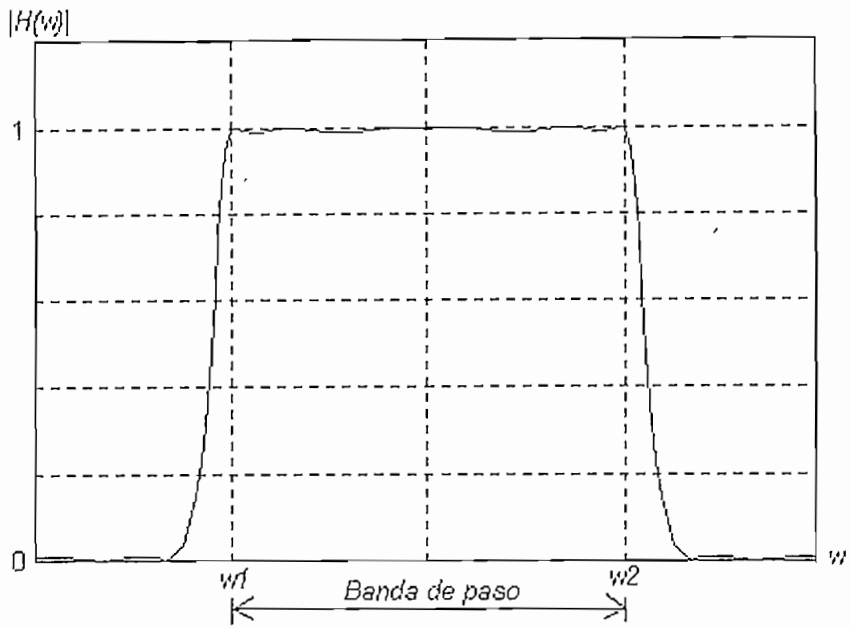


Fig. 4.7. Filtro pasa banda

4.6.4. Análsis numérico

Para el análsiis de filtrado de señales se implementa la rutina ***filtroap.m*** , que toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Ingreso de la señal. Rutina infilap.m
- Filtro pasa bajos. Rutina pbajoap.m
- Filtro pasa altos . Rutina paltoap.m
- Filtro pasa banda. Rutina pbandaap.m
- Espectro de frecuencia. Rutina espefap

infilap.m

Esta rutina permite la edición del archivo ifilap.m, utilizando el comando !edit ifilap.m; para que el usuario ingrese una función f(t) cualquiera y el

vector t de tiempo en el que se evalúa la función. Se ejecuta el archivo ifilap y se calculan los valores de f y t.

Se grafica la función f(t) que ingresó el usuario.

pbajoap.m

Rutina para filtrar la señal f(t) con un filtro pasa bajos. Se ingresa la frecuencia de eliminación Wc, definida en la figura 4.5 .Para diseñar el filtro se utiliza el comando [b,a]=ellip(4,0.1,40,wc*0.02).

El comando ellip, utiliza el desarrollo del filtro digital de Cauer o filtro elíptico, con una frecuencia de corte Wc, los coeficientes del filtro retornan a las variables a y b.

Se filtra la señal con el filtro pasa bajos de frecuencia de corte Wc, se utiliza el comando sf=filter(b,a,f); donde f es la señal que se ingresó para filtrar. Sf es la señal filtrada.

Se grafica la señal filtrada. Se puede graficar su espectro de frecuencia, con la última opción de la rutina espefap.

paltoap.m

Rutina para filtrar la señal f(t) con un filtro pasa altos. Se ingresa la frecuencia de eliminación Wc, definida en la figura 4.6. Se utiliza el comando [b,a]=ellip(4,0.1,40,wn1*0.02,'high');

Se filtra la señal con el filtro pasa altos de frecuencia de corte Wc, se utiliza el comando sf=filter(b,a,f); donde f es la señal que se ingresó para filtrar. Sf es la señal filtrada.

Se grafica la señal filtrada. Se puede graficar su espectro de frecuencia, con la última opción de la rutina espefap.

pbandaap.m

Rutina para filtrar la señal f(t) con un filtro pasa banda. Se ingresa el rango de frecuencia de paso del filtro. W1 es la frecuencia inferior, w2 es la frecuencia superior, definidas en la figura 4.7. Se utiliza el comando [b,a]=ellip(4,0.1,40,[w1 w2]*0.02);

La señal se filtra utilizando el comando sf=filter(b,a,f); donde f es la señal que se ingresó para filtrar. Sf es la señal filtrada.

Se grafica la señal filtrada. Se puede graficar su espectro de frecuencia, con la última opción de la rutina espefap.

espefap.m

Se calcula el espectro de frecuencia, utilizando la transformada rápida de Fourier descrita en numerales anteriores.

El espectro de frecuencia que se grafica puede ser de la señal original, o de cualquiera de las señales filtradas. Se grafica la señal y posteriormente se elige la opción de espectro de frecuencia.

4.7. MODULACION DE SEÑALES.

Un sistema de modulación es aquel en el que se emplea una señal para controlar algún parámetro de otra señal. Hay varios tipos de modulación, entre los más importantes tenemos: modulación en amplitud, modulación en fase y modulación en frecuencia.

4.7.1. Modulación en amplitud.

Muchos sistemas se basan en el concepto de modulación de amplitud, en el que la amplitud de una exponencial compleja o una señal senoidal c(t) se multiplica o *modula* por la señal que contiene la información x(t). La señal x(t) es

comunmente denominada como la señal moduladora y la señal c(t) como la señal portadora.

$$y(t)=x(t).c(t)$$

Donde: c(t) es la señal portadora que se define de la siguiente manera:

$c(t)=e^{j(wc.t+\theta c)}$ Portadora exponencial

$c(t) = \cos(w_c.t+\theta_c)$ Portadora senoidal

En los dos casos W_c se conoce como *frecuencia de la portadora.* Por conveniencia $\theta_c=0$.

El espectro de la salida modulada y(t) es sólo el de la entrada, desplazado en frecuencia por una cantidad igual a la frecuencia de la portadora w_c. La banda de frecuencia X(w) está limitada por la frecuencia w_M (por lo que el ancho de banda es 2. w_M). W_M es la frecuencia de la señal x(t) denominada señal moduladora.

$$Y(w)=X(w-w_c)$$

Ejemplo: Se tiene la señal x(t) definida como: $x(t)=\cos(2.\pi.fm.t)$. fm=3 Hz.

En la figura 4.9 se grafica la señal moduladora x(t), con su espectro de frecuencia.

La señal x(t) se modula con una señal senoidal $x_c(t)=\sin(2.\pi.fc.t)$, donde fc debe ser mayor que 2.fm, para este ejemplo fc=11.5

En la figura 4.9 se grafica la señal la señal modulada y en la figura 4.10 se grafica su espectro de frecuencia.

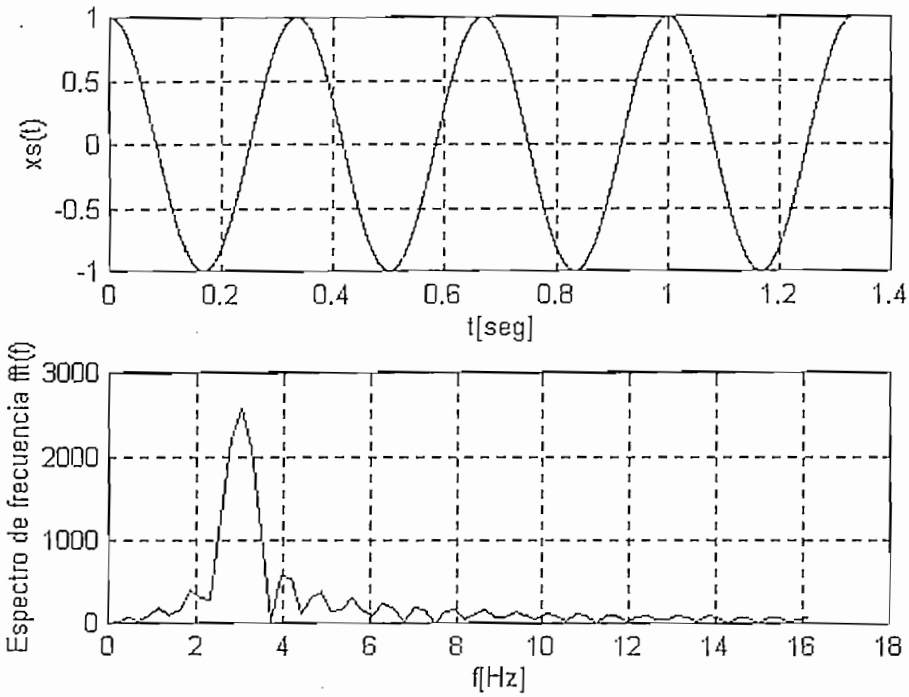


Fig.4.8. Señal modulante y su espectro de frecuencia

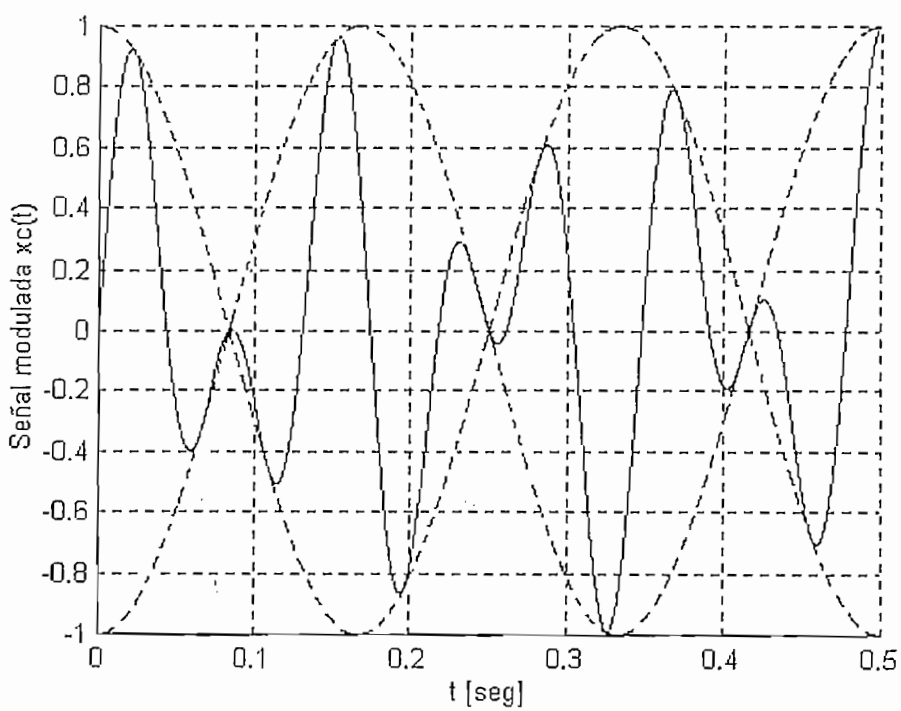


Fig.4.9. Señal modulada en amplitud.

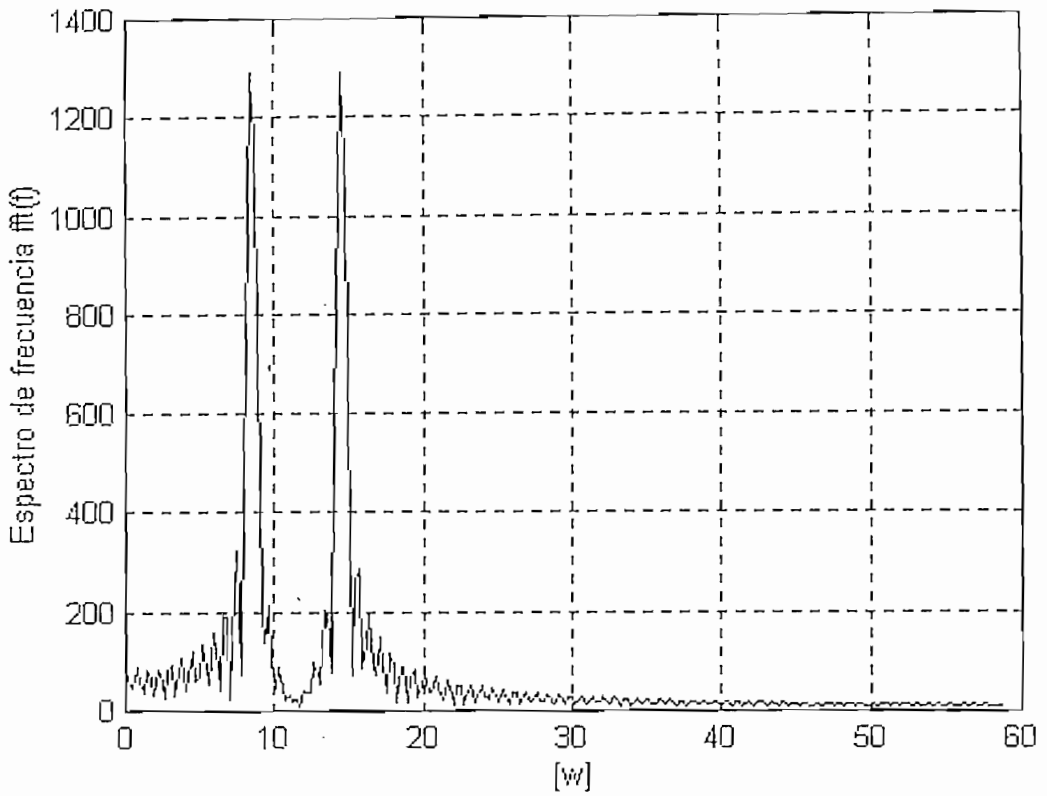


Fig.4.10. Espectro de frecuencia de la señal modulada en amplitud.

4.7.2. Modulación en fase.

La señal moduladora se utiliza para controlar fase de una portadora senoidal, la señal modulada tiene un pico de amplitud constante y el transmisor puede operar a la potencia pico.

Se tiene la señal portadora senoidal c(t), expresada de la siguiente manera:

$c(t) = A.\cos(w_c.t+\theta_c)$

Donde w_c es la frecuencia y θ_c es la fase de la portadora. Se utiliza la señal moduladora para variar para variar el ángulo $\theta(t)= (w_c.t+\theta_c)$..

La señal modulada y(t) se expresa como:

$y(t) = A.\cos[w_c.t+\theta_c(t)]$.

Donde θ_c es ahora una función del tiempo, expresada de la siguiente manera:

$\theta_c(t) = \theta_o + kp.\ X(t)$

Ejemplo: Se define x(t) de la siguiente manera: $x(t)=3.\sin(2.\pi.fm.t)$. fm=800 Hz.

En la figura 4.11 se grafica la señal moduladora x(t), con su espectro de frecuencia.

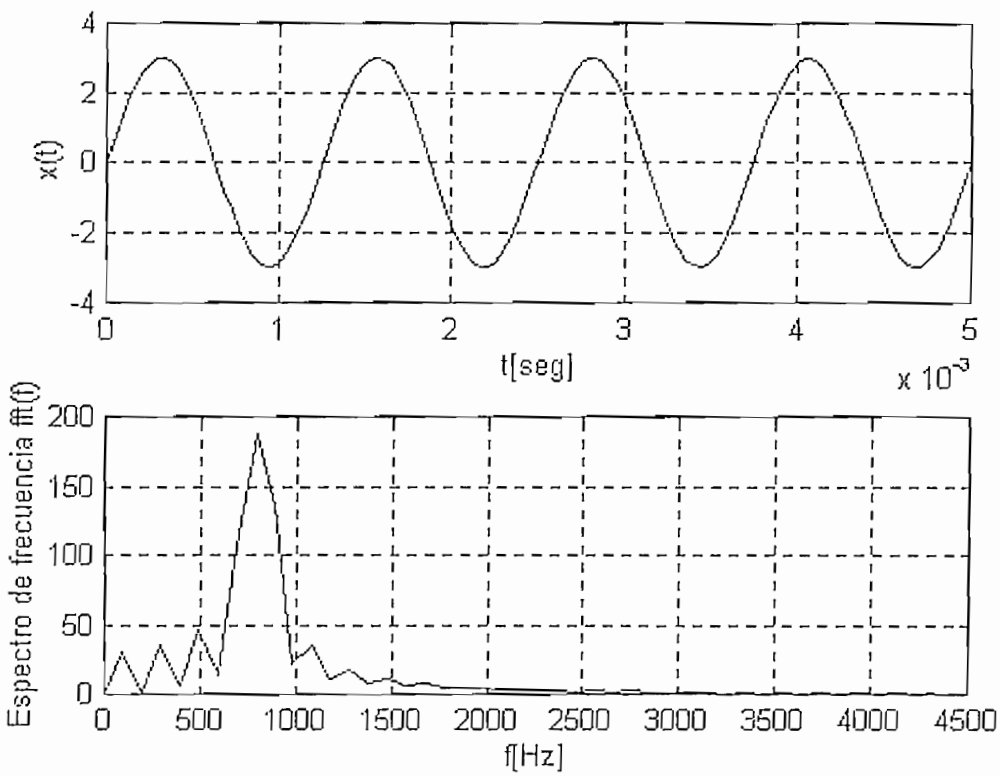


Fig.4.11. Señal modulante y su espectro de frecuencia

La señal x(t) se modula con una frecuencia fc de 2000 Hz. En la figura 4.12 se grafica la señal modulada en fase y en la figura 4.13 se grafica el espectro de frecuencia de la señal modulada.

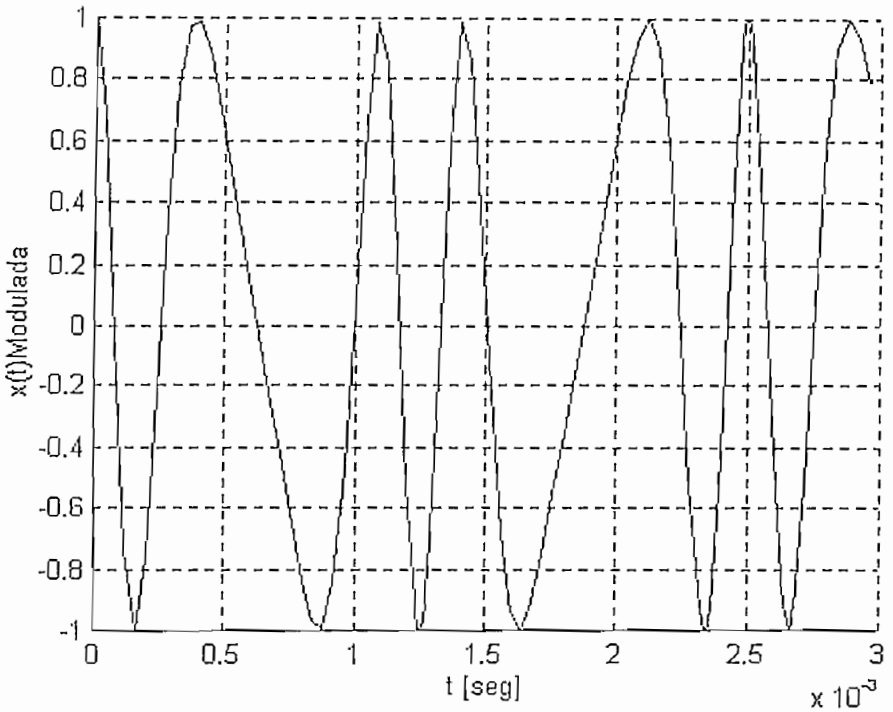


Fig.4.12. Señal modulada en fase

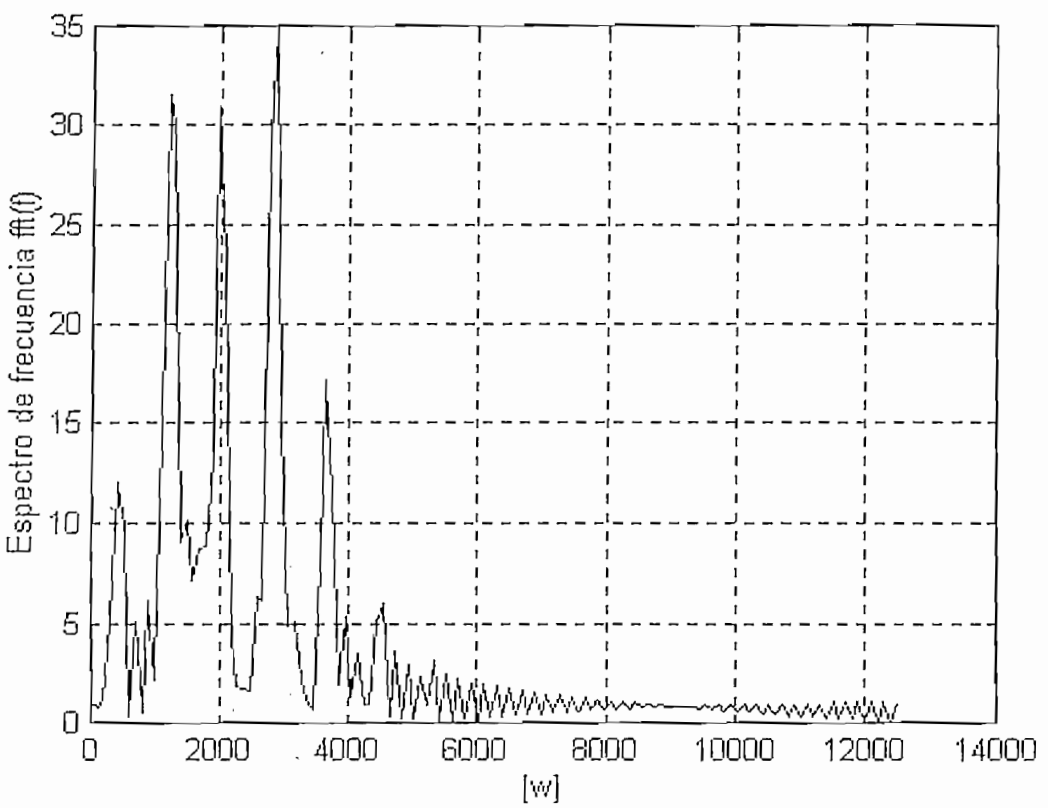


Fig.4.13. Espectro de frecuencia de la señal modulada en fase

4.7.3. Modulación en frecuencia.

Se varía linealmente la derivada del ángulo con la señal moduladora, esto es:

$y(t) = A.\cos [\ \theta(t)\ ]$

Donde: $d\theta(t) / dt = w_c + k_f.x(t)$

La modulación de fase con x(t) es idéntica a la modulación de frecuencia con la derivada de x(t), de igual manera la modulación en frecuencia con x(t) es idéntica a la modulación de fase con la integral de x(t).

4.7.4. Análisis numérico

Para el análisis de modulación de señales se implementa la rutina ***modulaap.m*** , que toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Modulación en amplitud. Rutina modultap.m
    - Ingreso de señales en el tiempo. Rutina istimcap.m
    - Gráfico de la señal modulada. Rutina tamplap.m
    - Espectro de frecuencia. Rutina espefapm.m
- Modulación en fase. Rutina modulfap.m
    - Ingreso de señales en el tiempo. Rutina isfrecap.m
    - Gráfico de la señal modulada. Rutina mamplap.m
    - Espectro de frecuencia. Rutina espefapf.m
- Modulación en frecuencia. Rutina modulffp.m
    - Ingreso de señales en el tiempo. Rutina isfrecfp.m
    - Gráfico de la señal modulada. Rutina mamplfp.m
    - Espectro de frecuencia. Rutina espefaff.m

modultap.m

Se elige la opción de modulación en amplitud con esta rutina. Se toman en cuenta los siguientes aspectos: Ingreso de señales en el tiempo, gráfico de

la señal modulada y gráfico del espectro de frecuencia de la señal modulada.

istimcap.m

Esta rutina permite la edición del archivo timap.m, utilizando el comando !edit timap.m; para que el usuario ingrese una función x(t) definida en fm (frecuencia de la modulante), e ingrese fc que es la frecuencia de la señal portadora senoidal con la que se va a modular.

En la rutina timap.m se calcula y(t), que es la señal modulada, se utiliza la convolución de señales en el tiempo, de la siguiente manera:

xc=sin(2*pi*fc*t) xc señal de la portadora.
y=xc.*x; y señal modulada en amplitud.
x es la señal ingresada por el usuario.

Se ejecuta el archivo timap y se calculan los valores de x(t),t, y(t). y(t)

Se grafica la función x(t) que ingresó el usuario y su espectro de frecuencia en la misma pantalla

tamplap.m

Esta rutina permite graficar la señal modulada y(t) en función del tiempo, se grafica hasta un valor limitado que ingresa el usuario. Si el valor es demasiado grande, para observar adecuadamente se limita este valor máximo. Se grafica también sobre y(t) la envolvente de la función.

espefapm.m

Esta rutina permite graficar el espectro de frecuencia de la función y(t), para esto se utiliza la transformada rápida de Fourier.

modulfap.m

Se elige la opción de modulación en fase con esta rutina. Se toman en cuenta los siguientes aspectos: Ingreso de señales en el tiempo, gráfico de la señal modulada y gráfico del espectro de frecuencia de la señal modulada.

isfrecap.m

Esta rutina permite la edición del archivo tff3ap.m, utilizando el comando !edit tff3ap.m; para que el usuario ingrese una función x(t) definida en fm (frecuencia de la modulante), e ingrese fc que es la frecuencia de la señal portadora senoidal con la que se va a modular.

En la rutina tff3ap.m se calcula y(t), que es la señal modulada, se utiliza el comando y=modulate(x,fc,fs,'pm',kp). Donde x es la señal ingresada por el usuario, fc es la frecuencia de la portadora, fs es un valor de frecuencia que define el número de puntos que se grafica por ciclo, pm elige la opción de modular en fase, kp es la constante de modulación en fase.

Se ejecuta el archivo tff3ap y se calculan los valores de x(t),t, y(t). Se grafica la función x(t) que ingresó el usuario y su espectro de frecuencia en la misma pantalla

mamplap.m

Esta rutina permite graficar la señal modulada y(t) en función del tiempo, se grafica hasta un valor limitado que ingresa el usuario.

espefapf.m

Esta rutina permite graficar el espectro de frecuencia de la función y(t), para esto se utiliza la transformada rápida de Fourier.

modulffp.m

Se elige la opción de modulación en frecuencia con esta rutina. Se toman en cuenta los siguientes aspectos: Ingreso de señales en el tiempo, gráfico de la señal modulada y gráfico del espectro de frecuencia de la señal modulada.

isfrecfp.m

Esta rutina permite la edición del archivo tff3fp.m, utilizando el comando !edit tff3fp.m; para que el usuario ingrese una función x(t) definida en fm (frecuencia de la modulante), e ingrese fc que es la frecuencia de la señal portadora senoidal con la que se va a modular.

En la rutina tff3fp.m se calcula y(t), que es la señal modulada, se utiliza el comando y=modulate(x,fc,fs,'fm',kf). Donde x es la señal ingresada por el usuario, fc es la frecuencia de la portadora, fs es un valor de frecuencia que define el número de puntos que se grafica por ciclo, fm elige la opción de modular en frecuencia, kf es la constante de modulación en frecuencia.

Se ejecuta el archivo tff3fp y se calculan los valores de x(t),t, y(t). Se grafica la función x(t) que ingresó el usuario y su espectro de frecuencia en la misma pantalla

mamplfp.m

Esta rutina permite graficar la señal modulada y(t) en función del tiempo, se grafica hasta un valor limitado que ingresa el usuario.

espefaff.m

Esta rutina permite graficar el espectro de frecuencia de la función y(t), para esto se utiliza la transformada rápida de Fourier.

4.8. SIMULINK

Es un programa para simulación de sistemas dinámicos. Es una extensión del Matlab.

Simulink tiene dos funciones fundamentalmente: definición de modelos y análisis de modelos. Para facilidad de la definición de modelos, Simulink añade una nueva clase de ventanas llamadas ventanas de diagramas de bloque, en donde se crean los modelos y se editan principalmente por comandos manejados por el mouse.

La simulación de modelos creados en Simulink, se los realiza iniciando la simulación en Simulink, o bien se lo puede realizar en Matlab. A continuación se ilustra de mejor manera ella utilización del Simulink con un ejemplo.

Ejemplo: Sea la función de transferencia del sistema definida por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Para el sistema S1, cuya función de transferencia es G(s) se tiene la siguiente representación :

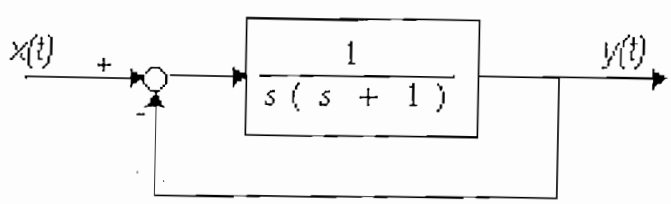


Fig.4.14. Diagrama de bloques del sistema S1.

Donde x(t) que es la señal de entrada al sistema s1, se define como una función paso o escalón. G(s) se define como la función 1/(s+1) y un integrador 1/s.

Este diagrama se represneta en Simulink, como se muestra en la figura 4.15.

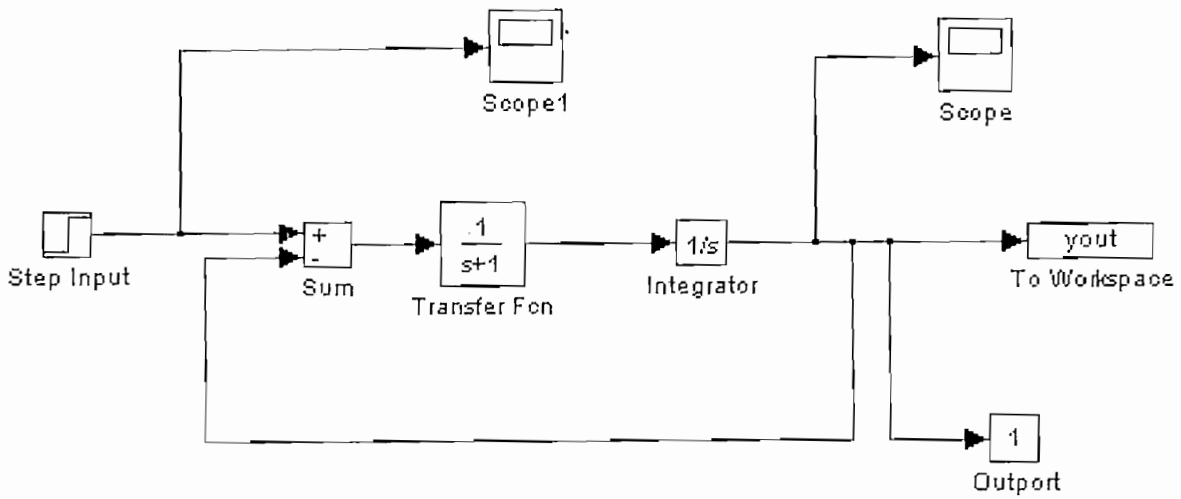


Fig.4.15. Diagrama de bloques en Simulink del sistema S1.

La salida del sistema es yout para simulink y se define como outport1 para la interface con Matlab.

Scope1 y Scope 2 son dos pantallas de graficación, que realizan un despliegue gráfico durante la simulación del sistema en Simulink.

Para el análisis de sistemas en Simulink, se implementa la rutina ***simulap.m*** , que toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Modelación en simulink. Rutina modsimap.m
- Modelación en matlab-diagramas en Simulink. Rutina matsimap.m

modsimap.m

Utiliza la subrutina link1.m, al ejecutar este archivo ingresa a la ventana de diagrama de bloques de Simulink con un ejemplo predeterminado, en el que el usuario puede modificar los parámetros que requiera.

Al iniciar la simulación, puede observar la señal del sistema x(t) y la respuesta del sistema realimentado, como se observa en la figura 4.15.

matsimap.m

En este archivo se definen las escalas para el gráfico de la respuesta del sistema y(t), en función del tiempo. Se evalúa la función sim1.m, que realiza la interface entre Simulink y Matlab. En la subrutina sim1.m se utiliza el comando

[t,x,y]=linsim('link1',ts);
linsim grafica la trayectoria de salida y(t) en función del tiempo.
Se grafica la salida y(t), en función del tiempo.

4.9. ANÁLSIS VARIANDO UN PARÁMETRO.

En los capítulos I y II se realizó un extenso análisis de sistemas lineales tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, obteniéndose las respuestas en los dos dominios.

Un sistema se representa matemáticamente mediante su función de transferencia, en base a esto se define G(s) de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{b_2.s + b_1}{a_3.s^2 + a_2.s + a_1}$$

Utilizando la representación de G(s), se va a manipular el coeficiente a_2, para observar las variaciones que produce tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.

4.9.1. Análsis en el dominio del tiempo variando un parámetro.

Al variar el coeficiente a_2, se varía el valor de ξ que es el coeficiente de amortiguamiento de la función de transferencia, al variar este parámetro cambia la respuesta del sistema, varía el valor del máximo sobreimpulso, tiempo de

establecimiento, tiempo pico, tiempo de respuesta del sistema como se analizó en el capítulo I. Se define como señal de entrada a la función paso o escalón.

Se puede variar el coeficiente a_2 con la barra de desplazamiento, al igual que la escala del tiempo como se indica en la figura 4.16. y se observa como varía la respuesta del sistema.

4.9.2. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA VARIANDO UN PARÁMETRO.

Al variar el coeficiente a_2, se varía el valor de ξ que es el coeficiente de amortiguamiento de la función de transferencia. Se varía el máximo valor de magnitud de la función de la siguiente manera:

$$|G(jw)| = \frac{1}{2.\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$G(jw)=G(s)_{\text{evaluada en jw.}}$$

Se puede variar el coeficiente a_2 con la barra de desplazamiento, y se observa su valor en el cuadro inferior como se aprecia en la figura 4.17. Al variar el coeficiente, se observa como varía la respuesta de frecuencia tanto para la magnitud como para la fase del mismo.

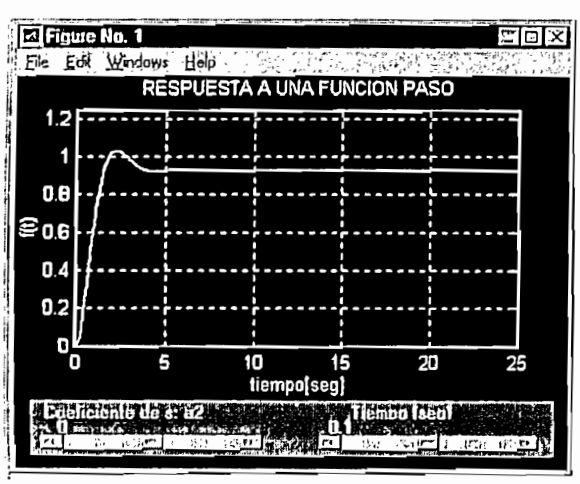


Fig. 4.16. Variación de parámetros en el tiempo.

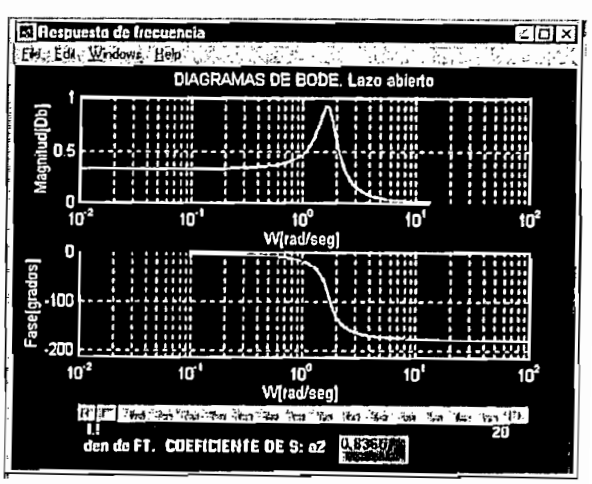


Fig. 4.17. Variación de parámetros en frecuencia.

4.9.3. Análisis numérico.

Para el análisis de variación de parámetros en el dominio del tiempo y de la frecuencia, se implementa la rutina ***variarap.m*** , que toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Ingreso de la función de transferencia. Rutina ftf4.m
- Análisis en el tiempo. Rutina pasoap.m
- Análsis en frecuencia. Rutina bodeap.m

ftf4.m

Se utiliza la misma rutina que en el numeral 3.4.2.

pasoap.m

Se definen los valores de los ejes y se define la barra de desplazamiento utilizando el comando uicontrol, en el anexo1 (Manual de usuario) se puede ver con detalle el desarrollo de esta rutina. Escencialmente es la respuesta en el dominio del tiempo a una función paso.

bodeap.m

Se definen las pantallas para los dos gráficos de magnitud y fase, los valores de los ejes, el cuadro con el valor de frecuencia y se define la barra de desplazamiento utilizando el comando uicontrol, en el anexo1 (Manual de usuario) se puede ver con detalle el desarrollo de esta rutina. Escencialmente es la respuesta de frecuencia del sistema definido por la función de transferencia.

El comando uicontrol, crea una interface de control, para las figuras realizadas. Ver anexo A (Manual de usuario).

4.10. PROCESAMIENTO EN TIEMPO REAL.

En aplicaciones prácticas, se muestrea una señal de tiempo contínuo, para realizar el procesamiento digital de dicha señal. La adquisición de datos se la realiza con el programa ejecutable sislab.exe, realizado en Labview y el rpocesamiento digital de las señales adquiridas se realiza en el paquete Matlab con el toolbox sislin.

Para el procesamiento en tiempo real se implementa la rutina ***timerap.m*** , que toma en cuenta los siguientes aspectos:

- Adquisición de datos y gráficos. Rutina adki.m
  - Señal arbitraria. Rutina adkisap.m

    Programa sislab.exe
  - Sistema realimentado. Rutina adkisap1.m

    Programa sislab1.exe
- Análisis de Fourier. Rutina four1ap.m
- Respuesta del sistema. Rutina rarbit.m
- Filtrado de señales. Rutina filterap.m

adki.m

Se realiza la adquisición de datos de un sistema realimentado S1 y/o de una señal arbitraria.

La rutina adki.m contiene otras subrutinas, que se detallan en los anexos. Referirse al anexo A página A-21 y anexo B página B-161, en donde se observa el programa para adquisición de datos.

Las subrutinas four1ap.m, rarbit.m y filterap.m, contienen subrutinas implementadas en los capítulos correspondientes que ya se analizaron (Análisis de Fourier, respuesta a una señal arbitraria y filtrado de señales) .

CAPITULO V: IMPLEMENTACION DEL TOOLBOX DE SISTEMAS LINEALES

5.1. Requerimientos del sistema

5.2. Programa principal

5.3. Ingreso de datos.

5.3.1. Análisis en el dominio del tiempo

5.3.2. Análisis en el dominio de la frecuencia

5.3.3. Aplicaciones de sistemas lineales

5.4. Opciones en tiempo, frecuencia y aplicaciones

5.4.1. Opciones del menú de análisis en el dominio del tiempo

5.4.2. Opciones del menú de análisis en el dominio de la frecuencia

5.4.3. Opciones del menú de aplicaciones de sistemas lineales

5.5. Gráficos.

5. IMPLEMENTACIÓN DEL TOOLBOX

El *Toolbox para Análisis de Sistemas Lineales* fue escrito en el lenguaje del programa computacional *Matlab con Simulink Versión 4.2*. Por lo tanto su ambiente de trabajo es de Windows. Consiste de un grupo de archivos con extensión ***. m**, los cuales se los debe invocar desde el Matlab.

5.1. REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA

- Sistema Operativo Microsoft Windows 3.1, Microsoft Windows 95 o Windows NT 4.0.
- Computador personal basado en procesador Intel 486, Pentium, Pentium Pro, o Pentium II.
- Unidad de disco flexible de 3 ½ pulgadas.
- MegaBytes de memoria RAM mínimo, 16 MegaBytes (o más) recomendable.
- Matlab para Windows Versión 4.2 y Simulink Versión 1.3
- Adaptador gráfico de 8 bits y monitor VGA mínimo, Adaptador gráfico y monitor SVGA recomendable.
- Copiar SISLIN en el toolbox del Matlab: c:\MATLAB\TOOLBOX\Sislin
- Modificar el path del Matlab, para que conste el toolbox implementado SISLIN.
- Se requiere la tarjeta LAB-PC1200 para realizar la adquisición de datos.

5.2. PROGRAMA PRINCIPAL

Invocando el archivo ***menup.m*** se inicia la ejecución del programa que permite el fácil manejo de los archivos ***. m**. La estructura general del programa se puede observar en la figura 5.1.

La pantalla principal del programa se observa en la figura 5.2. Desde esta pantalla se invocan los menúes para trabajar en el dominio del tiempo; en el

dominio de la frecuencia o para trabajar con la aplicaciones. Estas pantallas se pueden observar en las figuras 5.3, 5.4, y 5.5 respectivamente.

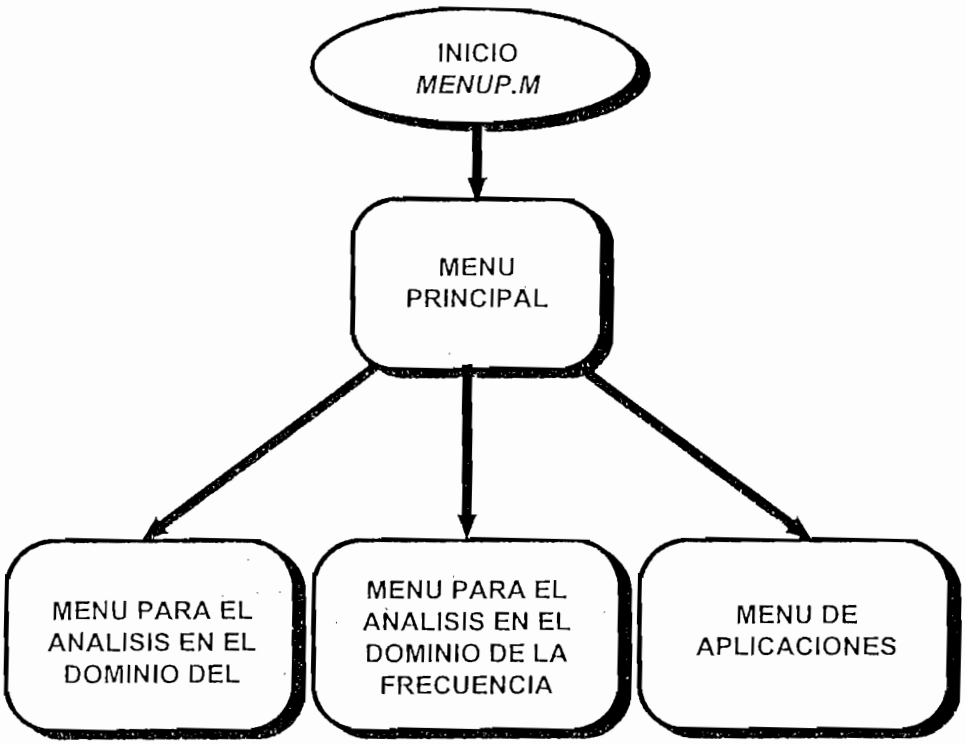


Figura 5.1. Estructura del programa.

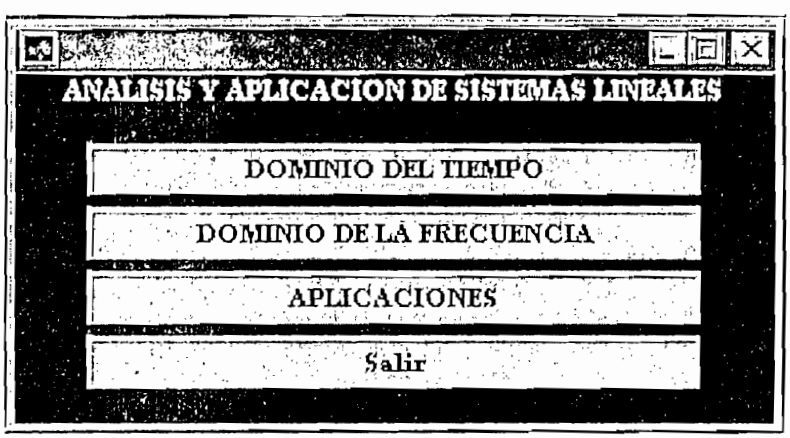


Figura 5.2. Menú Principal

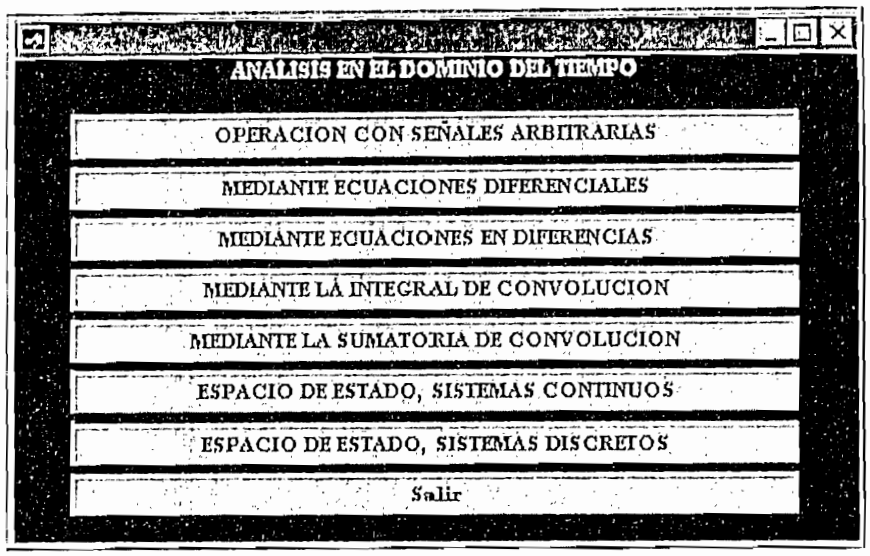


Figura 5.3. Menú para acceder al análisis en el dominio del tiempo.

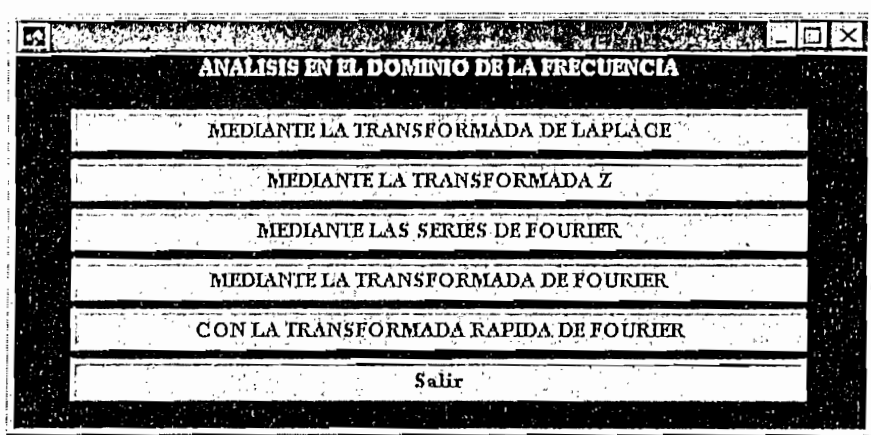


Figura 5.4. Menú para acceder al análisis en el dominio de la frecuencia.

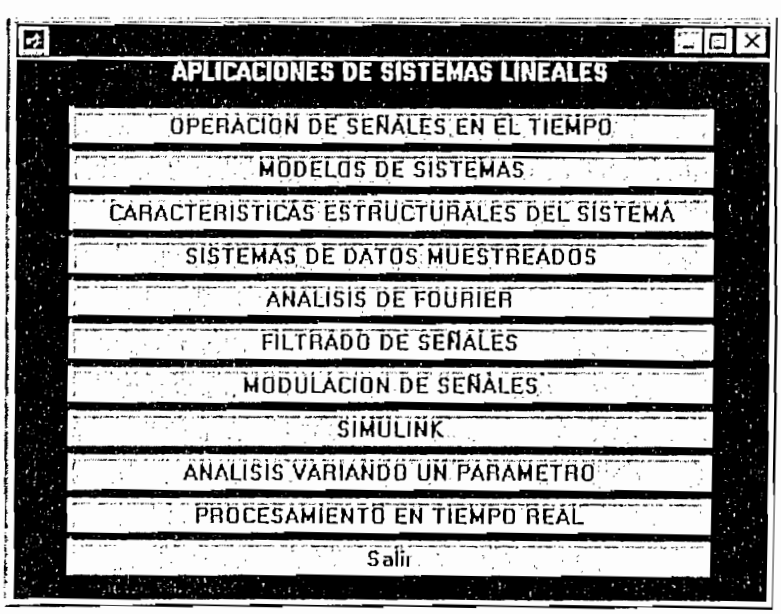


Figura 5.5. Menú para acceder a las aplicaciones.

5.3. INGRESO DE DATOS

Las rutinas de ingreso de datos del programa difieren dependiendo de análisis que se requiera. A continuación se lista los datos necesarios para cada una de las opciones de análisis del programa.

5.3.1. Análisis en el dominio del tiempo

Operaciones con señales arbitrarias

- El intervalo de tiempo total en el que está definida la función.
- Los subintervalos y la forma de la función en cada uno de ellos.
- Las unidades de desplazamiento y el sentido del mismo.
- Las unidades de escalamiento y el tipo de escalamiento.

Mediante ecuaciones diferenciales

- Los coeficientes de la ecuación.
- El intervalo de graficación de las respuesta.
- Ingreso de la función arbitraria.

Mediante ecuaciones en diferencias

- Los coeficientes de la ecuación.
- El número de muestreos a graficar.
- Ingreso de la función arbitraria.

Mediante la integral de convolución

- Ingreso de la función h (t).
- Ingreso de la función x (t).

Mediante la sumatoria de convolución

- Ingreso de los límites extremos de las funciones.
- Ingreso de la función h [n].
- Ingreso de la función x [n].

Mediante el espacio de estado continuo

- Ingreso de las matrices A, B, C y D.
- Ingreso de la función arbitraria.

Mediante el espacio de estado discreto

- Ingreso de las matrices Ad, Bd, Cd y Dd.
- Ingreso de la función arbitraria.

5.3.2. Análisis en el dominio de la frecuencia

Mediante la Transformada de Laplace

- Ingreso de los coeficientes de los polinomios del numerador.
- Ingreso de los coeficientes de los polinomios del denominador.
- Ingreso de la función arbitraria.

Mediante la Transformada Z

- Ingreso de los coeficientes de los polinomios del numerador.
- Ingreso de los coeficientes de los polinomios del denominador.
- Ingreso de la función arbitraria.

Mediante Series de Fourier

- Ingreso de parámetros de funciones predeterminadas.
- Escoger la manera de ingresar la serie. En forma trigonométrica o exponencial.
- Ingreso de la serie a través del archivo *anf3.m.*
- Ingreso del máximo *n* a graficar el espectro.
- En la función formada por armónicas, período de la función, límites inferior y superior, y número de *n* términos de la serie.

Mediante la Transformada de Fourier

- Ingreso de parámetros de funciones predeterminadas.
- Ingreso de la función de transferencia a través del archivo tff3.m.

- Ingreso del máximo *w* para graficar el espectro de frecuencia.
- Ingreso del numerador y del denominador de la función de transferencia arbitraria para el análisis de la respuesta en frecuencia.

Mediante la Transformada Rápida de Fourier

- Ingreso de parámetros de funciones predeterminadas.
- Ingreso de la función arbitraria a través del archivo *fftf5.m.*

5.3.3. Aplicaciones de sistemas lineales

Operaciones con señales arbitrarias

- El intervalo de tiempo total en el que está definida la función.
- Los subintervalos y la forma de la función en cada uno de ellos.
- Las unidades de desplazamiento y el sentido del mismo.
- Las unidades de escalamiento y el tipo de escalamiento.

Modelos de sistemas

- Ingreso de los modelos continuos y discretos. Por función de transferencia o por variables de estado.
- Ingreso del tiempo de discretización para el cambio de continuo a discreto.
- Ingreso del tiempo de conversión para el cambio de discreto a continuo.
- Ingreso de las funciones de transferencia de los subsistemas en serie o paralelo y de su realimentación para composición de sistemas.

Característica estructurales del sistema

- Ingreso de los modelos continuos y discretos. Por función de transferencia o por variables de estado.

Sistema de datos muestreados

- Ingreso del modelo continuo. Por función de transferencia o por variables de estado.

Análisis de Fourier

- Ingreso de la función arbitraria a través del archivo *ifunap.m.*

Filtrado de señales

- Ingreso de la función arbitraria a través del archivo *ifilap.m.*
- Ingreso de los parámetros de los filtros.

Modulación de señales

- Escoger el tipo de modulación. A.M., F.M. o P.M.
- Ingreso de las señales en el tiempo a través de los archivos auxiliares. Para A.M. el archivo *timap.m*, para F.M. el archivo *tff3fp.m* y para P.M. el archivo *tff3ap.m.*

Simulink

- Ingreso del modelo a simular. Por defecto el modelo es *link1.m.*

Análisis variando un parámetro

- Ingreso de los polinomios del numerador
- Ingreso de los polinomios del denominador.

Procesamiento en tiempo real

- Adquisición de datos con un programas sislab.exe realizado en Labview
- Ingreso de la función de transferencia para un sistema arbitrario
- Ingreso de los parámetros de los filtros.

5.4. OPCIONES EN TIEMPO, FRECUENCIA Y APLICACIONES

5.4.1. Opciones del menú de análisis en el dominio del tiempo

Este menú permite accesar a los diferentes tipos de análisis que se pueden realizar en el dominio del tiempo. Una estructura de este menú de opciones se observa en la figura 5.6.

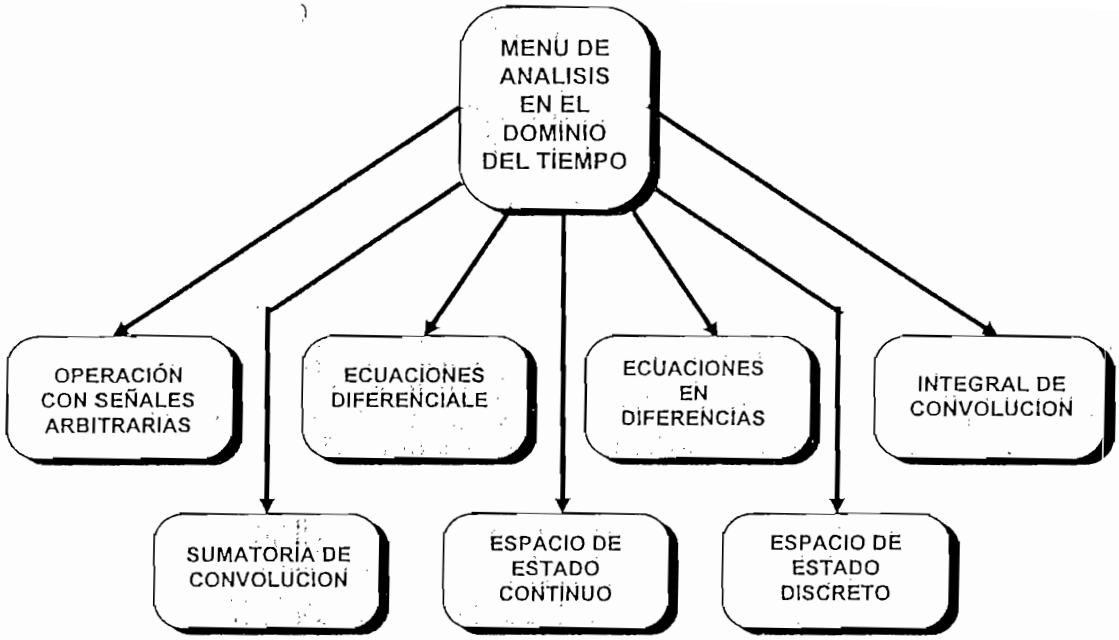


Figura 5.6. Estructura del menú de análisis en el dominio del tiempo.

5.4.2. Opciones del menú de análisis en el dominio de la frecuencia

Este menú al igual que en el numeral anterior permite tener un acceso muy sencillo a las diferentes opciones de análisis en el dominio de la frecuencia. La figura 5.7 muestra un esquema general de la estructura de este menú de opciones.

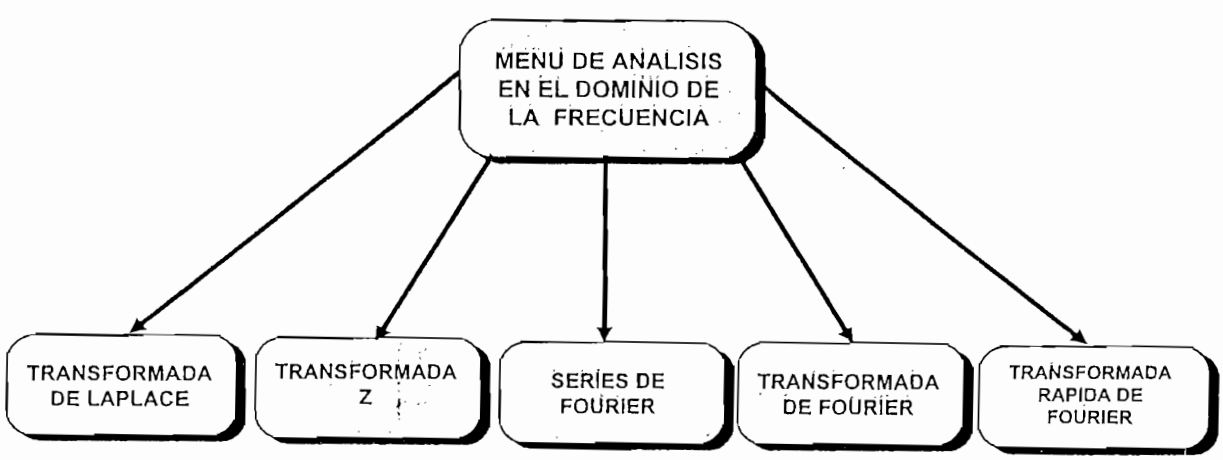


Figura 5.7. Estructura del menú de análisis en el dominio de la frecuencia.

5.4.3. Opciones del menú de aplicaciones de sistemas lineales

En el menú de las aplicaciones de los sistemas lineales se utilizan rutinas para el análisis, tanto en el dominio del tiempo, como en el dominio de la frecuencia. Estas son aplicadas para la resolución de los temas más característicos relacionados con los sistemas lineales. La figura 5.8 muestra un esquema general de la estructura de este menú de opciones.

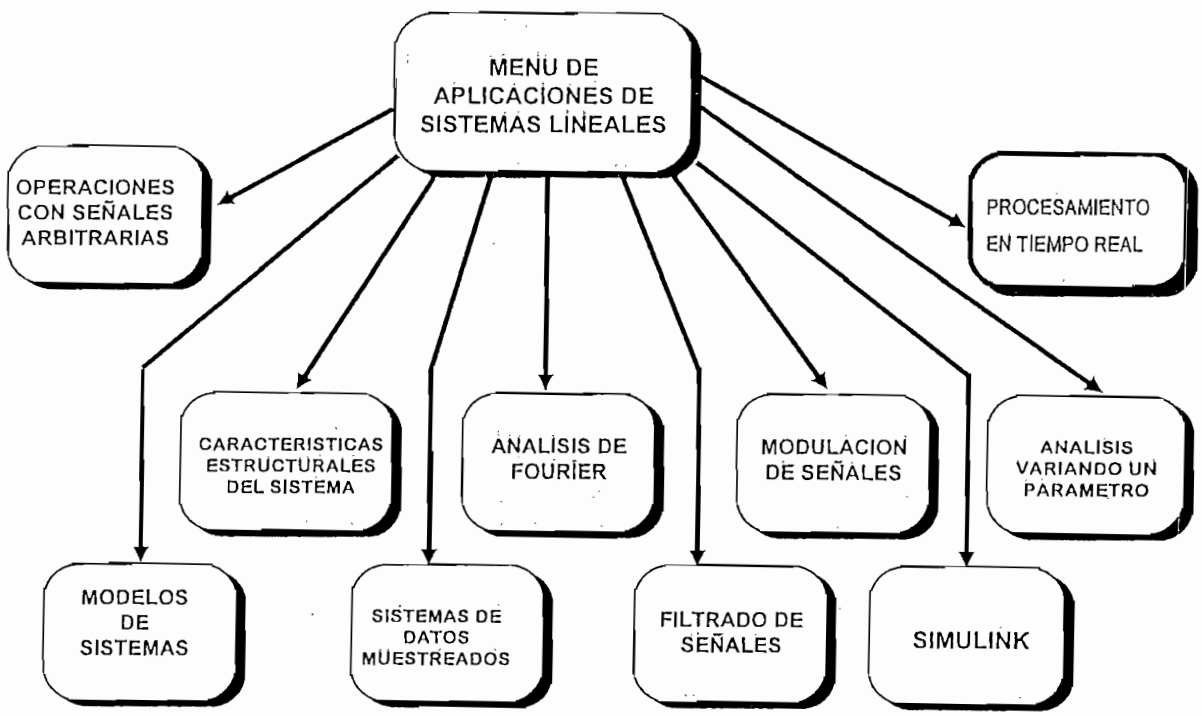


Figura 5.8 Estructura del menú de aplicaciones de los sistemas lineales

5.5. GRAFICOS

En este numeral se describen las diferentes respuestas gráficas que entregan cada una de las diferentes opciones de análisis y de las aplicaciones del programa.

5.5.1 Análisis en el dominio del tiempo

Operaciones con señales arbitrarias

- Gráfico de la señal de entrada definida por el usuario.
- Gráfico de la entrada de definida y del resultado de la manipulación de la misma.

Mediante ecuaciones diferenciales

- Gráfico de la respuesta del sistema a una función impulso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función paso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función arbitraria.
- Gráfico de la respuesta del sistema utilizando por el método de Runge - Kutta.

Mediante ecuaciones en diferencias

- Gráfico de la respuesta del sistema a una función impulso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función paso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función arbitraria.

Mediante la integral de convolución

- Gráficos de las funciones x (t), h (t) y de la convolución de ambas señales.

Mediante la sumatoria de convolución

- Gráficos de las funciones x [n], h [n] y de la convolución de ambas señales.

Mediante el espacio de estado continuo

- Gráfico de la respuesta del sistema a una función impulso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función paso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función arbitraria.

Mediante el espacio de estado discreto

- Gráfico de la respuesta del sistema a una función impulso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función paso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función arbitraria.

5.5.2 Análisis en el dominio de la frecuencia

Mediante la Transformada de Laplace

- Gráfico de la respuesta del sistema a una función impulso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función paso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función arbitraria.
- Gráfico del lugar geométrico de las raíces.
- Gráfico de los polos y ceros de la función de transferencia en el plano s.

Mediante la Transformada Z

- Gráfico de la respuesta del sistema a una función impulso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función paso.
- Gráfico de la respuesta del sistema a una función arbitraria.
- Gráfico del lugar geométrico de las raíces.
- Gráfico de los polos y ceros de la función de transferencia en el plano Z

Mediante Series de Fourier

- Gráfico del espectro de frecuencia de la función.
- Gráfico de la función compuesta por armónicas.

Mediante la Transformada de Fourier

- Gráfico del espectro de frecuencia continuo de la función.
- Dentro de la opción de respuesta de frecuencia :
    - Gráficos de diagramas de Bode en lazo abierto y en lazo cerrado.

- Gráficos del diagrama polar.
- Gráficos del diagrama de Nichols.

Mediante la Transformada Rápida de Fourier

- Gráfico de la función en el tiempo f(t).
- Gráfico del espectro de frecuencia utilizando la transformada rápida de Fourier fft(f).

5.5.3 Aplicaciones de sistemas lineales

Operaciones con señales arbitrarias

- Gráfico de la señal de entrada definida por el usuario.
- Gráfico de la entrada de definida y del resultado de la manipulación de la misma.

Modelos de sistemas

Esta rutina no entrega respuestas gráficas, sino solamente numéricas.

Característica estructurales del sistema

En la opción de análisis de estabilidad se tienen:

- Gráfico del lugar geométrico de las raíces.
- Gráfico de los polos y ceros de la función de transferencia en el plano Z.
- Gráficos de diagramas de Bode en lazo abierto y en lazo cerrado.
- Gráficos del diagrama polar.
- Gráficos del diagrama de Nichols.

Sistema de datos muestreados

En la opción de respuesta del sistema se tienen:

- Gráfico de la respuesta en el tiempo del sistema.
- Gráfico del lugar geométrico de las raíces.

- Gráfico de los polos y ceros de la función de transferencia en el plano Z.

Análisis de Fourier

- Gráfico de la función en el tiempo.
- Gráfico del espectro de potencia de la señal.
- Gráfico de la función en el tiempo más ruido.
- Gráfico del espectro de potencia de la señal más ruido.

Filtrado de señales

- Gráfico de la señal original sin filtrar.
- Gráfico de la señal filtrada en un filtro pasa bajos.
- Gráfico de la señal filtrada en un filtro pasa altos.
- Gráfico de la señal filtrada en un filtro pasa banda.
- Gráfico del espectro de frecuencia de la señal de entrada y de las señales filtradas.

Modulación de señales

- Gráfico de la señal modulante y de la señal modulada en F.M. y en P.M. . Y solamente de la señal modulada para A.M.
- Gráfico del espectro de frecuencia de la señal modulada para todos los casos.

Simulink

- Gráfica de la respuesta en el tiempo del sistema, con escala temporal variable usando una barra de desplazamiento incluida en el gráfico.

Análisis variando un parámetro

- Gráfica de la respuesta en el tiempo del sistema a una función paso de entrada, con escala temporal variable, y variabilidad del valor de un parámetro de la función de transferencia usando barras de desplazamiento incluidas en el gráfico.

- Gráfica de los diagramas de Bode en lazo abierto, con variabilidad del valor de un parámetro de la función de transferencia usando una barra de desplazamiento incluida en el gráfico.

Procesamiento en tiempo real

- Gráfica la señal muestreada en un intervalo de tiempo. (Adquisición de datos con un programa ejecutable realizado en LabView)
- Grafica el espectro de potencia de la señal
- Grafica las señales filtradas en filtros pasa bajos, pasa altos y pasa banda.
- Grafica el espectro de frecuencia de la señal filtrada
- Grafica la respuesta del sistema definido por G(s)

CAPITULO VI: RESULTADOS Y CONCLUSIONES

6.1. RESULTADOS

6.1.1. Dominio del tiempo.

6.1.2. Dominio de la frecuencia

6.1.3. Aplicaciones

6.2. CONCLUSIIONES

6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

En los capítulos anteriores se ha realizado un resumen del análisis de sistemas lineales invariantes en el dominio del tiempo, frecuencia y de sus aplicaciones, tanto para sistemas contínuos como discretos. Se ha desarrollado una librería de procedimientos interactivos, autónomos en el paquete computacional Matlab 4.2 con Simulink con una fácil utilización del ingreso de datos y la obtención de resultados con un adecuado despliegue gráfico.

6.1. RESULTADOS.

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis que se presentan en este capítulo son los más significativos en los diferentes temas planteados, puesto que realizar un detalle de todos los resultados sería demasiado extenso.

Es importante el ingreso de funciones arbitrarias utilizando un editor de texto, puesto que permite gran flexibilidad del programa en el desarrollo de múltiples ejemplos. Se pueden resolver ejercicios complejos, que analíticamente resultaría difícil y tedioso, utilizando el toolbox implementado.

A continuación se muestran los resultados obtenidos con el toolbox SISLIN realizado en Matlab 4.2 , que contiene rutinas para: análisis en el dominio del tiempo, análisis en el dominio de la frecuencia y aplicaciones.

6.1.1. Dominio del tiempo.

En el dominio del tiempo se han obtenido los siguientes resultados más significativos:

Ejemplo1. Se tiene la señal x(t) descrita por la ecuación:

$$x(t) = t.u(t+1) + u(t) - 2.t\,u(t) + t.u(t-1) - t.u(t-2) + t.u(t-3)$$

Se desea obtener : $y(t) = 1.5 * x(3-t)$

Una vez ingresada la señal arbitraria, se realizan las operaciones consecutivas sobre x(t) hasta obtener y(t). Utilizando la *APLICACIÓN DE OPERACIONES DE SEÑALES ARBITRARIAS EN EL TIEMPO.*

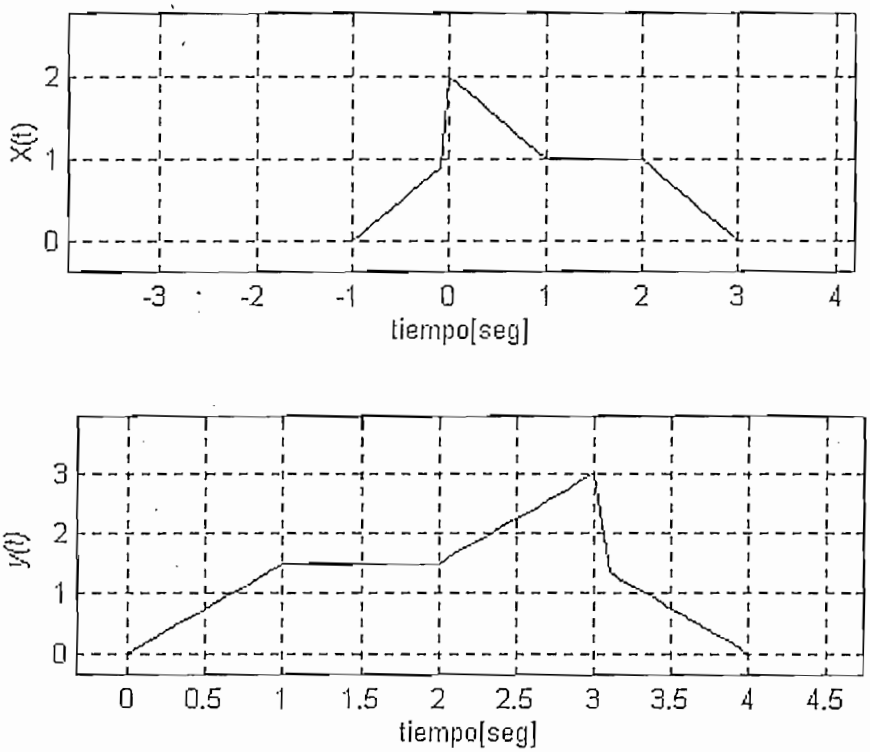


Figura 6.1. Señal arbitraria x(t). Señal resultante y(t)=1.5*x(3-t)

Ejemplo 2. Se define el sistema S1 descrito por la ecuación : $y''+3\cdot y'+2\cdot y = x''+2\cdot x'+x$.

Se desea obtener la respuesta en el tiempo a una señal de entrada escalón unitario, bajo condiciones iniciales nulas.

Para la solución de este ejemplo se utiliza la opción de *respuesta a una función paso y análisis de respuesta en el tiempo, correspondiente a ANÁLISIS EN EL DOMINIO TIEMPO MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES.*

Se ingresan los coeficientes de la ecuación diferencial.

Se calcula la respuesta a una función paso y se obtiene:

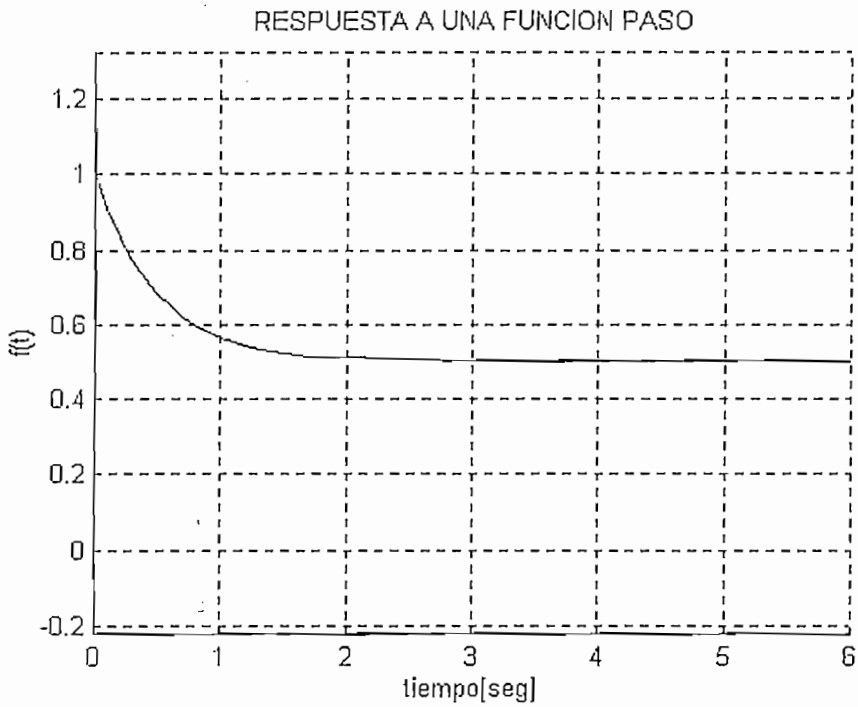


Figura 6.2. Respuesta del sistema S1 a una función paso.

El programa calcula automáticamente los parámetros de la respuesta en estado estable y estacionario. En la pantalla se observa:

ANALISIS DE LA RESPUESTA A UNA FUNCION PASO
VALOR FINAL DE LA FUNCION
vf = 0.5000
PORCENTAJE DE MAXIMO SOBREIMPULSO
Mp =100
TIEMPO PICO [seg]
tpico = 0
TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO DEL SISTEMA [seg]
ts = 1.9167

Ejemplo 3. Se define el sistema S1 descrito en el ejemplo 2.

Para la solución de este ejemplo se utiliza el MÉTODO DE RUNGE-KUTTA, *correspondiente a ANÁLISIS EN EL DOMINIO TIEMPO MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES.*

Las ecuaciones se ingresan en archivos de edición automáticamente, de la siguiente manera:

lotka1.m

```
u=1
xp(1)=x(2);
xp(2)=-2*x(1)-3*x(2)+u;
```

lotka2.m

```
u=1;
y=-x1-x2+u;
```

Se ingresa el tiempo de integración desde 0 a 6 seg. Se calcula la respuesta a una función paso y se obtiene:

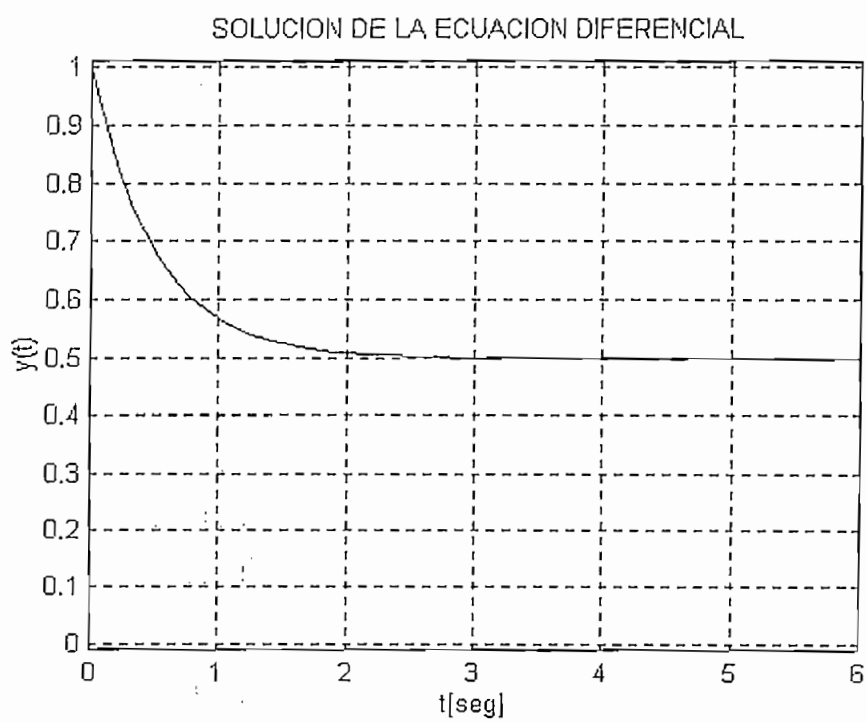


Figura 6.3. Respuesta del sistema S1 a una función paso.

La respuesta obtenida es la misma que en el numeral anterior.

Ejemplo 4. Se define el sistema discreto de la figura 6.4.a, de la siguiente manera:

n=[0 1 2 3 4 5 6]

h[n]=[1 1 0 0 1 1]

x[n]=[2 2 2 1 1 0]

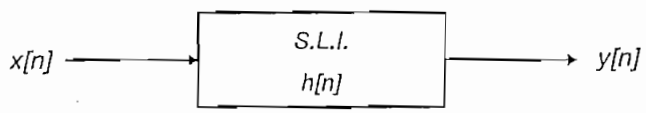


Fig.6.4.a. Sistema discreto de convolución

Se desea obtener y[n]. Se ingresan los vectores: n, x, h. Se obtiene la respuesta gráfica de x[n], h[n] , y[n] como se indica en las figuras 6.4.b, 6.4.c y 6.4.d respectivamente.

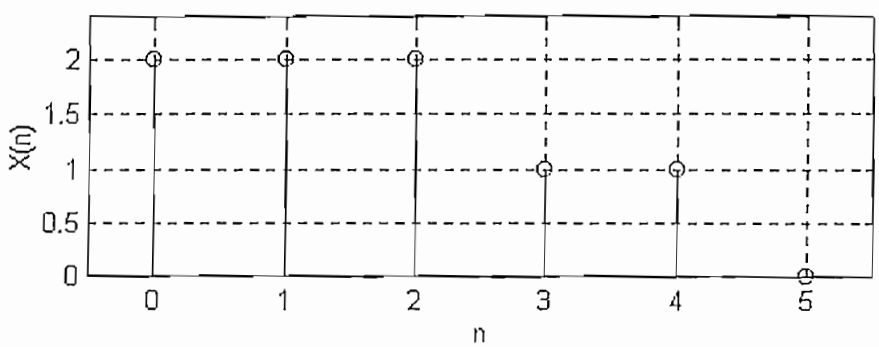


Figura 6.4.b. Señal de entrada x(n)

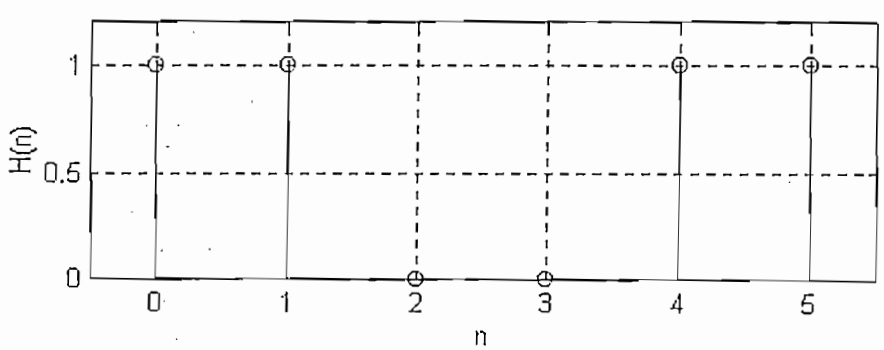


Figura 6.4.c. Señal h(n)

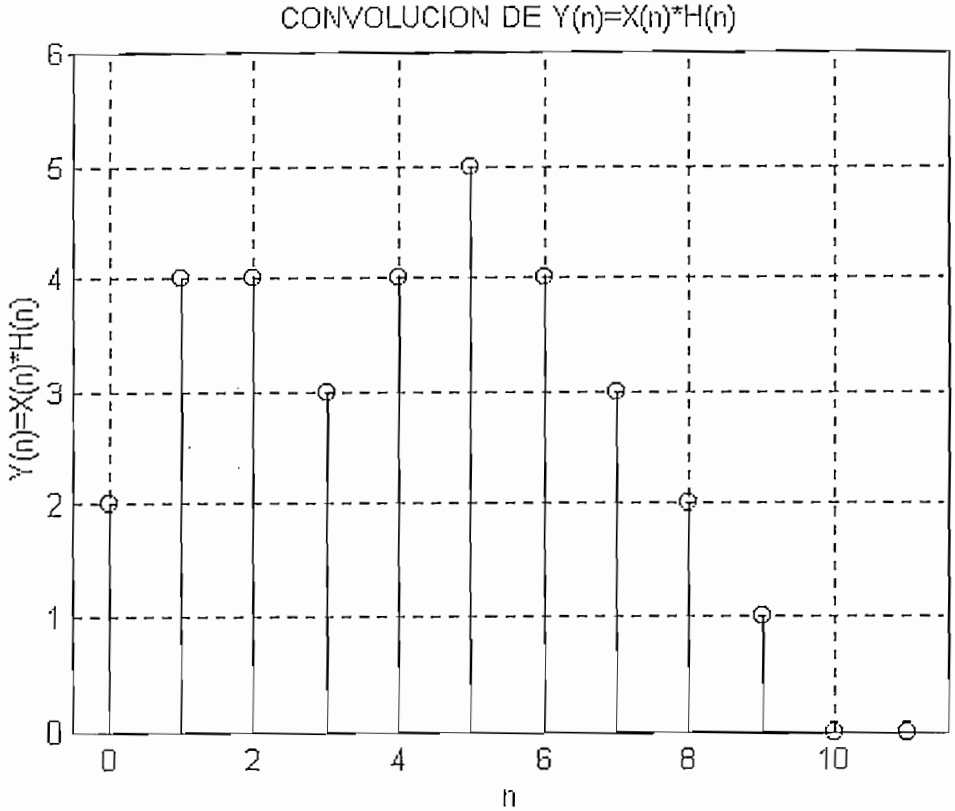


Figura 6.4.d. y[n]. Convolución de x(n)*h(n)

6.1.2. Dominio de la frecuencia

En el dominio de la frecuencia se han obtenido los siguientes resultados más significativos:

Ejemplo 5 : Se define la función de transferencia del sistema de la siguiente manera:

$$G(s)=\frac{2}{0.5.s^3+1.5.s^2+1.s}$$

Se grafica el lugar geométrico de las raíces para sistemas contínuos, para esto se utiliza *ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.*

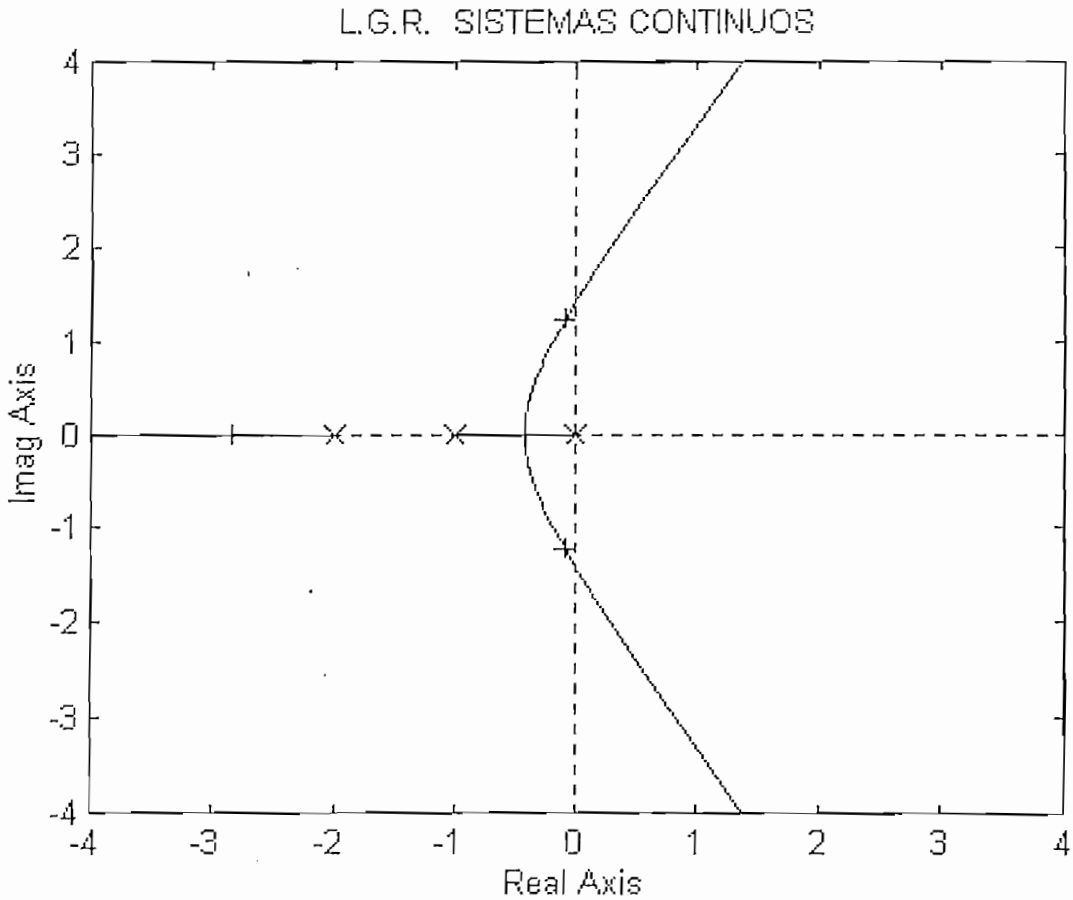


Fig. 6.5. L.G.R en el plano s

Se realiza el análisis en el dominio de "s", en la pantalla se visualiza el análisis de estabilidad:

ANALISIS EN FRECUENCIA COMPLEJA "S"
ganancia = 2
ceros = [ ]
polos = - 0.2 + 1.3 i
- 0.2 - 1.3 i

EL SISTEMA ES ESTABLE
LAS RAICES SE ENCUENTRAN EN EL SEMIPLANO IZQUIERDO.

En el análisis utilizando la transformada de Laplace, permite obtener respuestas gráficas en el tiempo como son: Respuesta a una función impulso, respuesta a una función paso y respuesta a una señal arbitraria.

Ejemplo 6. Se define la función de transferencia G(s) como:

$$G(s) = \frac{2}{0.5.s^3 + 1.5.s^2 + 1.s}$$

Para la solución de este ejemplo se utiliza la opción de *RESPUESTA DE FRECUENCIA* DEL *ANALISIS EN FRECUENCIA MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.*

Se ingresa la función de transferencia en función del numerador y denominador.

Una vez ingresada G(s), se calcula la respuesta de frecuencia utilizando: *Diagramas de Bode en lazo abierto y en lazo cerrado y el diagrama con la carta de Nichols.*

Diagramas de Bode en lazo abierto

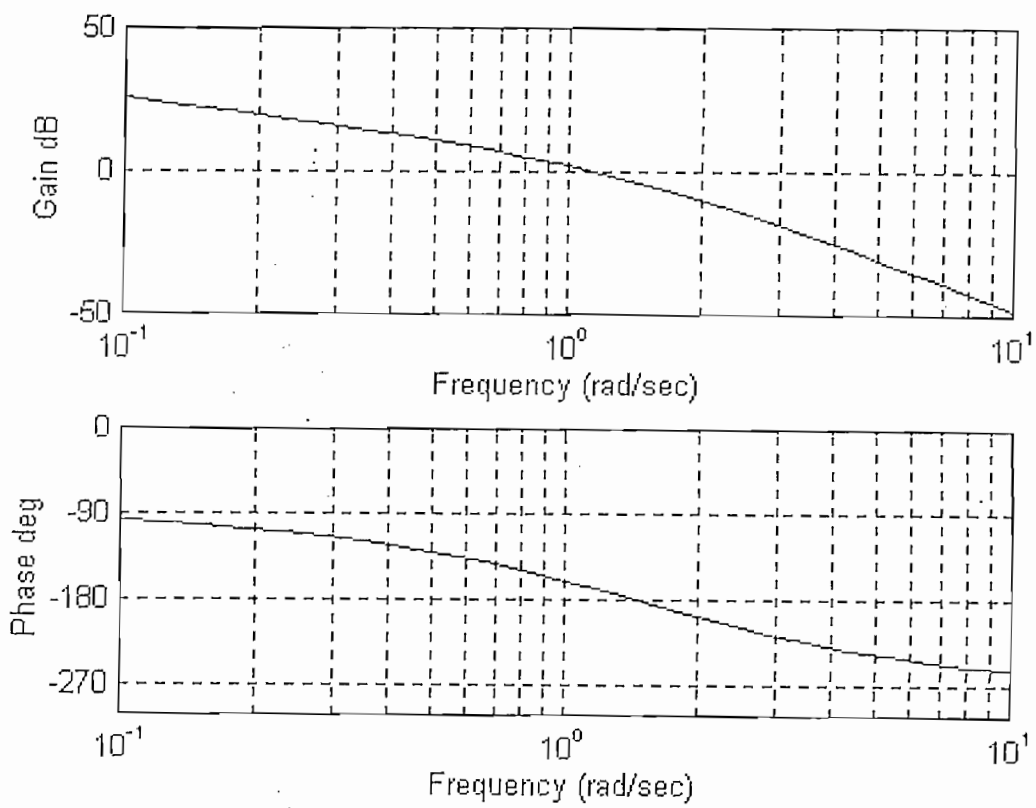


Figura 6.6.a. Diagrama de Bode en lazo abierto

El programa calcula automáticamente el margen de ganancia y el margen de fase. En la pantalla se observa:

- MARGEN DE GANANCIA [dB]:

  mg = 3.5218

- MARGEN DE FASE [grados]:

  mf = 11.4250

Diagramas de Bode en lazo cerrado

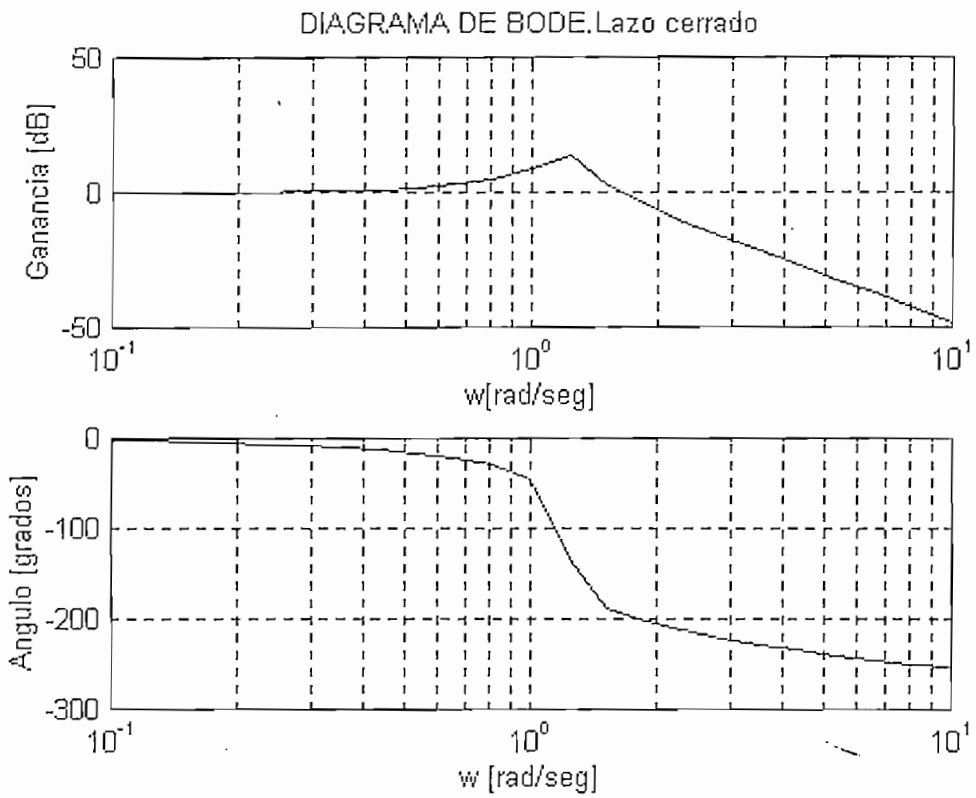


Figura 6.6.b. Diagrama de Bode en lazo cerrado

El programa calcula automáticamente el máximo de resonancia y la frecuencia de resonancia. En la pantalla se observa:

- MAXIMO DE RESONANCIA [dB]

  Mr = 13.7675

- FRECUENCIA DE RESONANCIA [rad/seg]

  wr = 1.2328

Diagrama de Nichols

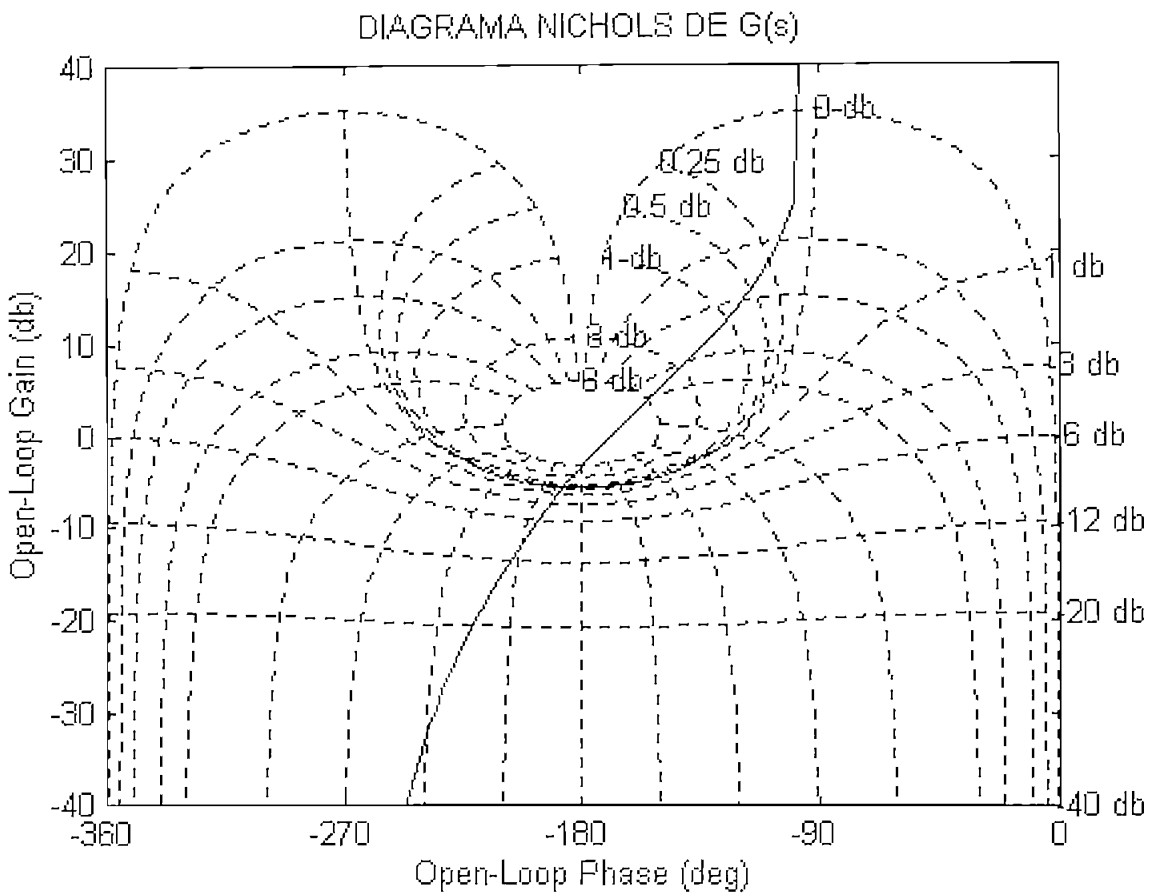


Figura 6.6.d. Diagrama de Nichols de G(s)

Ejemplo 7. Se define la función f(t), un pulso rectangular periódico, de amplitud 1, duración 4 segundos (T_r=2) y período 6.

Mediante series de Fourier se expresa de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{2.T_r}{T_o} + \frac{4.T_r}{T_o}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{.sin(2.n.T_r / T_o)}{2.n.T_r / T_o}.\cos\frac{2.\pi.n}{T_o}.t$$

Donde:

$$a_n = \frac{2.sin(2.\pi.n/3)}{\pi.n}$$

$$b_n = 0$$

Donde: *To=6*

Tr=2

Para la solución de este ejemplo se utiliza la opción de *ANALISIS EN FRECUENCIA MEDIANTE SERIES DE FOURIER.*

Se ingresan los coeficientes de la serie de Fourier an y bn (o cn si es una serie exponencial), utilizando un editor para que se ingrese cualquier valor requerido por el usuario.

Una vez ingresados los coeficientes, se grafica el espectro de frecuencia discreto de la función, y la función formada por armónicas.

Espectro de frecuencia discreto

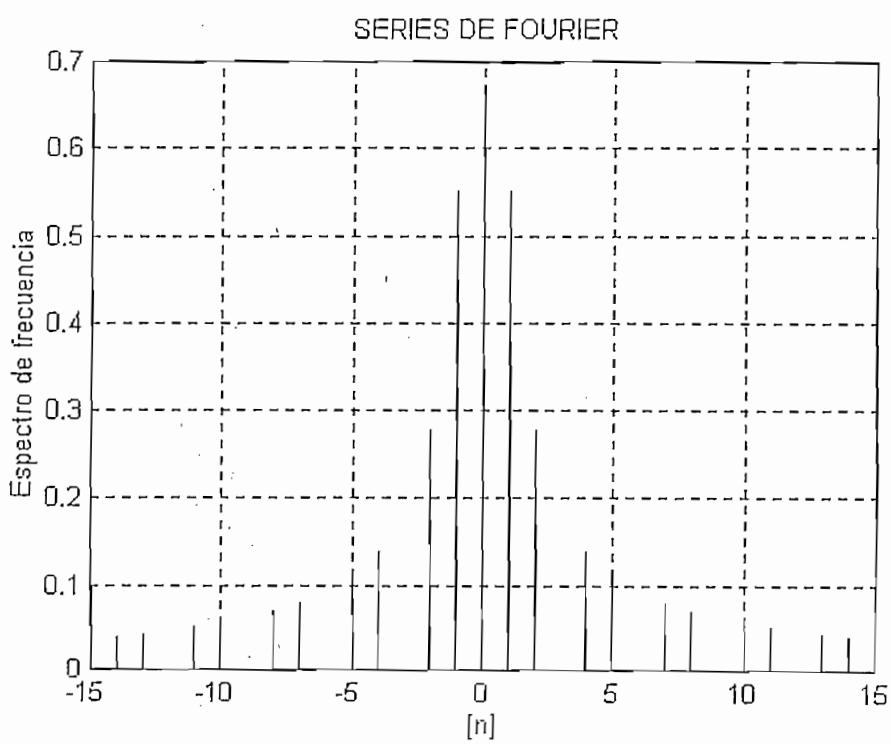
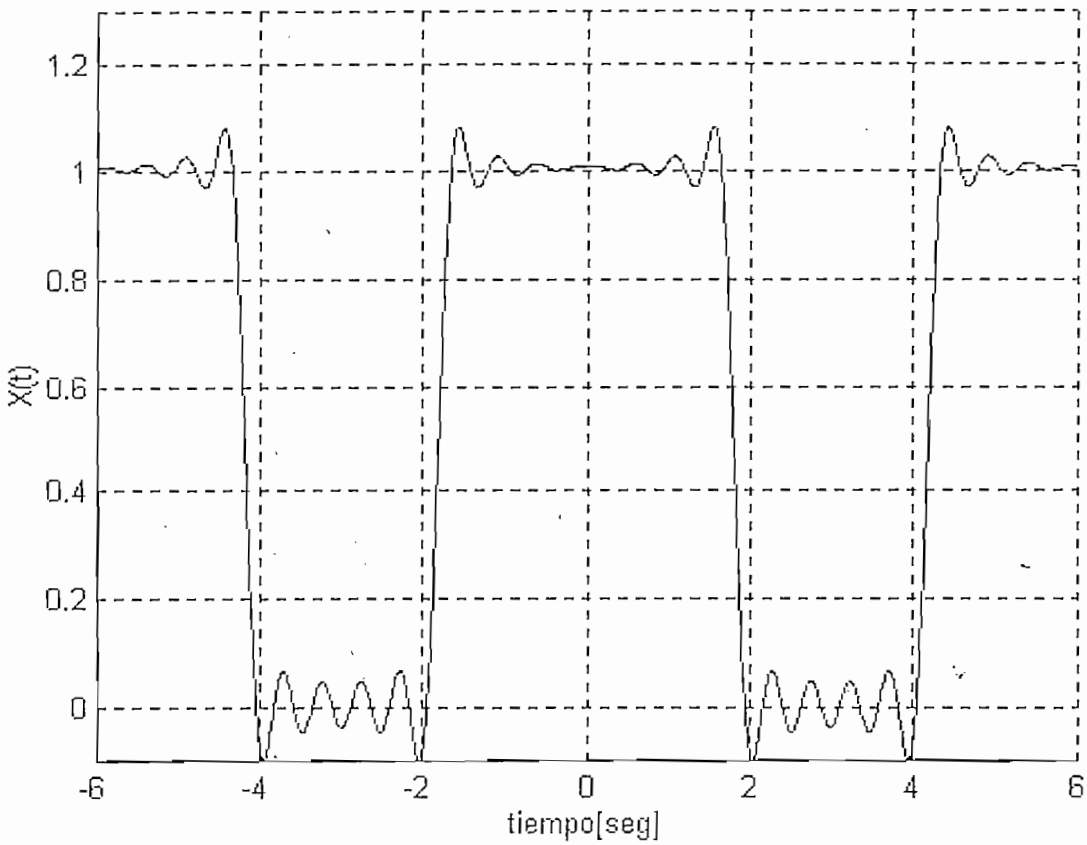


Fig. 6.7.a. Espectro de frecuencia discreto de f(t)

Función formada por armónicas



Ejemplo 6.7.b. Función f(t) formada por armónicas

Ejemplo 8. Se define f(t) de la siguiente manera:

$$f(t)=\begin{cases}1 & -0.5.T \le t \le 0.5.T \\ \\ 0 & otro.t\end{cases}$$

Donde *T = 1 seg.*

Para la solución de este ejemplo se utiliza la opción de *ANALISIS EN FRECUENCIA MEDIANTE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.*

Se ingresa la función f(t), utilizando un editor para que se ingrese cualquier valor requerido por el usuario.

Una vez ingresada la función, se grafica la función ingresada y el espectro de frecuencia contínuo de la función.

Espectro de frecuencia

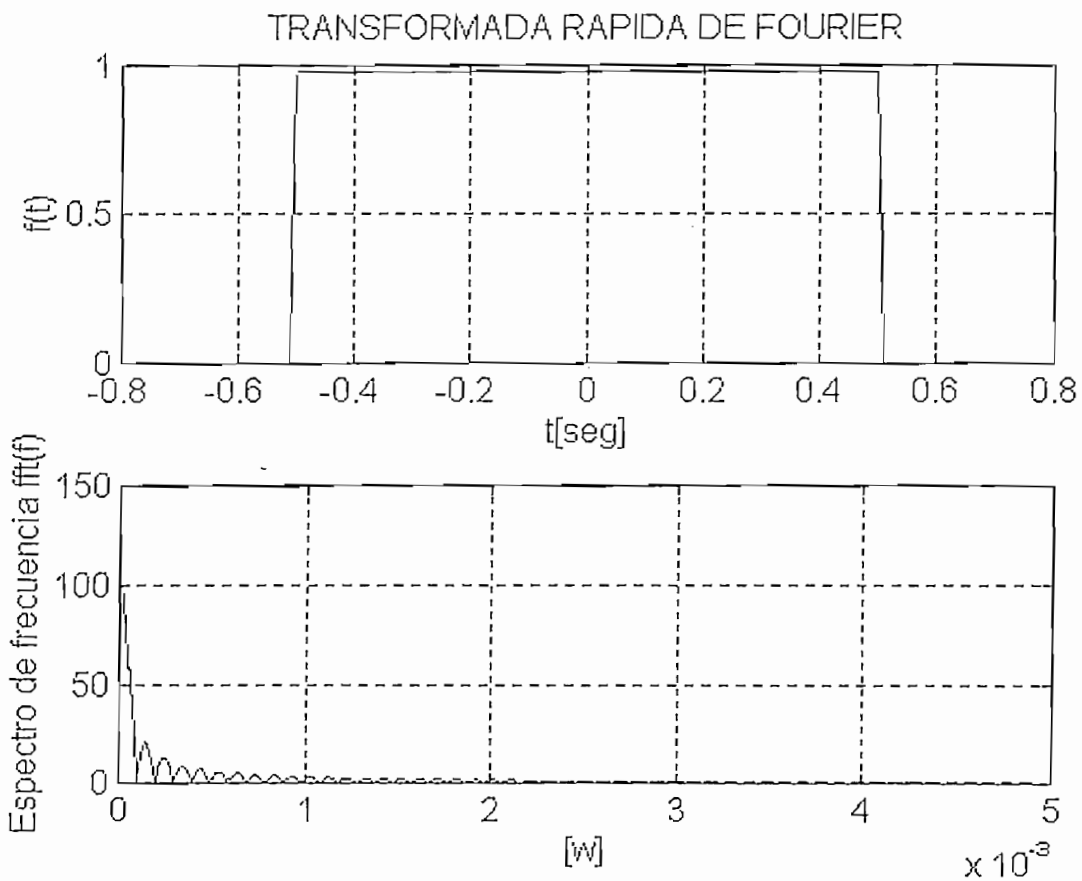


Figura 6.8. Función f(t) y su espectro de frecuencia obtenido con la transformada rápida de Fourier.

6.1.3. Aplicaciones

En aplicaciones se han obtenido los siguientes resultados más significativos:

Ejemplo 9. Se define f(t) de la siguiente manera :

$$f(t) = sin(2\pi \cdot 5 \cdot t) + sin(2\pi \cdot 15 \cdot t) + \\ + sin(2.\pi \cdot 25 \cdot t)$$

Para la solución de este ejemplo se utiliza la *APLICACIÓN DE FILTRADO DE SEÑALES.*

Se ingresa la función f(t) y el intervalo de tiempo t en el que se define la función, utilizando un editor para que se ingrese cualquier valor requerido por el usuario.

Después de graficar f(t) o alguna de las señales filtradas se puede graficar su espectro de frecuencia.

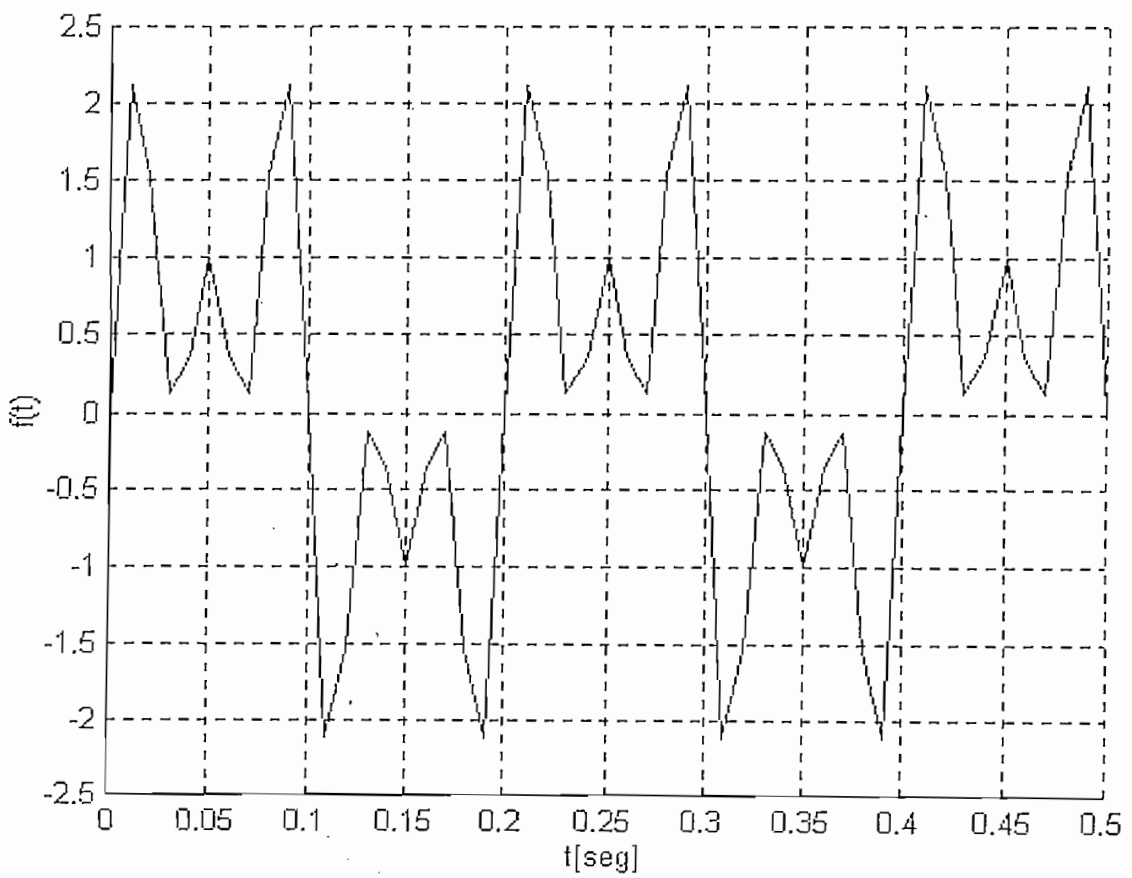


Figura 6.9.a. Gráfico de la señal f(t)

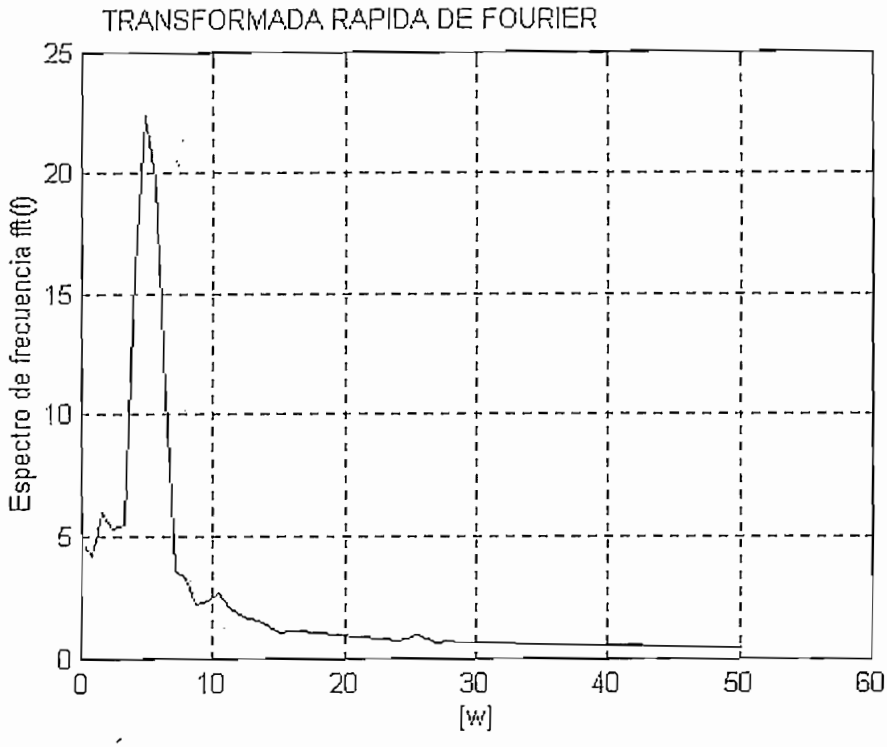


Figura 6.9.d. Gráfico del espectro de frecuencia de f(t) filtrada a 10 Hz

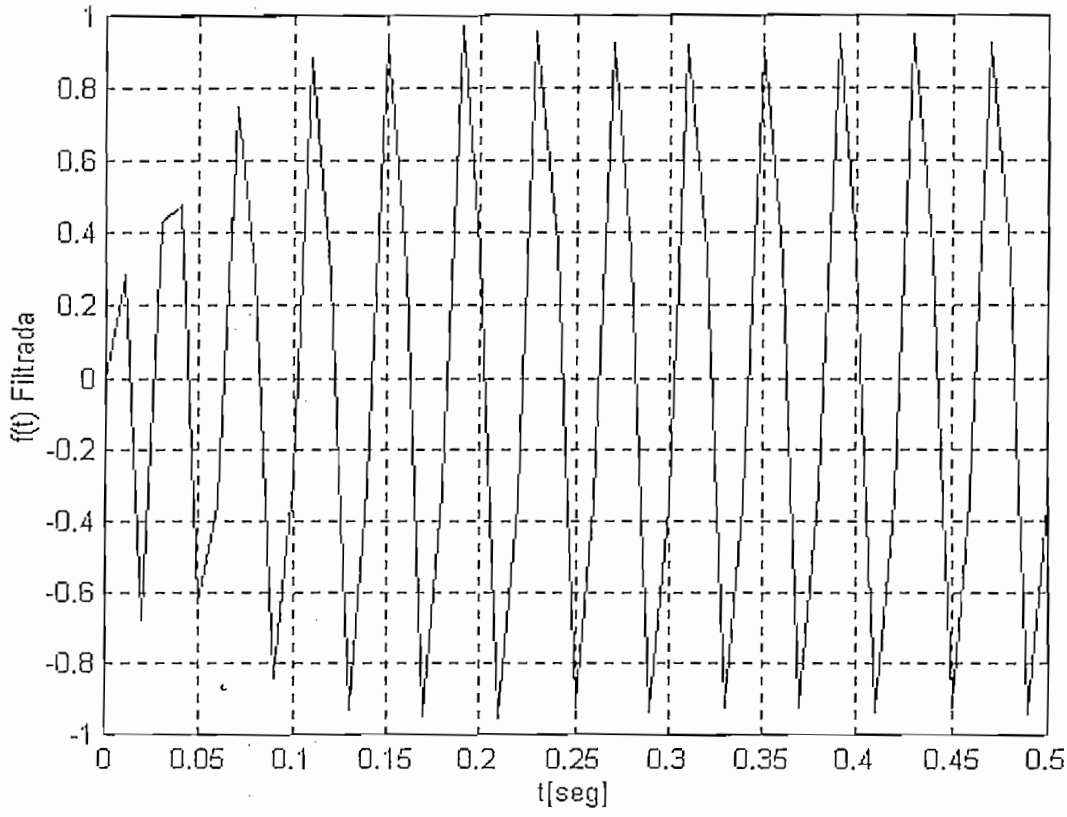


Figura 6.9.e.Señal filtrada en pasa altos, frecuencia de eliminación de 20 Hz.

Figura 6.9.f. Gráfico del espectro de frecuencia de f(t) filtrada a 20 Hz

Ejemplo 10. Se tiene la señal x(t) definida como: x(t)=cos(2.π.fm.t). fm=3 Hz.

Para la solución de este ejemplo se utiliza la *APLICACIÓN DE MODULACIÓN DE SEÑALES.*

Se ingresa la función f(t) y el intervalo de tiempo t en el que se define la función, utilizando un editor para que se ingrese cualquier valor requerido por el usuario.

Después de graficar f(t) o alguna de las señales moduladas se puede graficar su espectro de frecuencia.

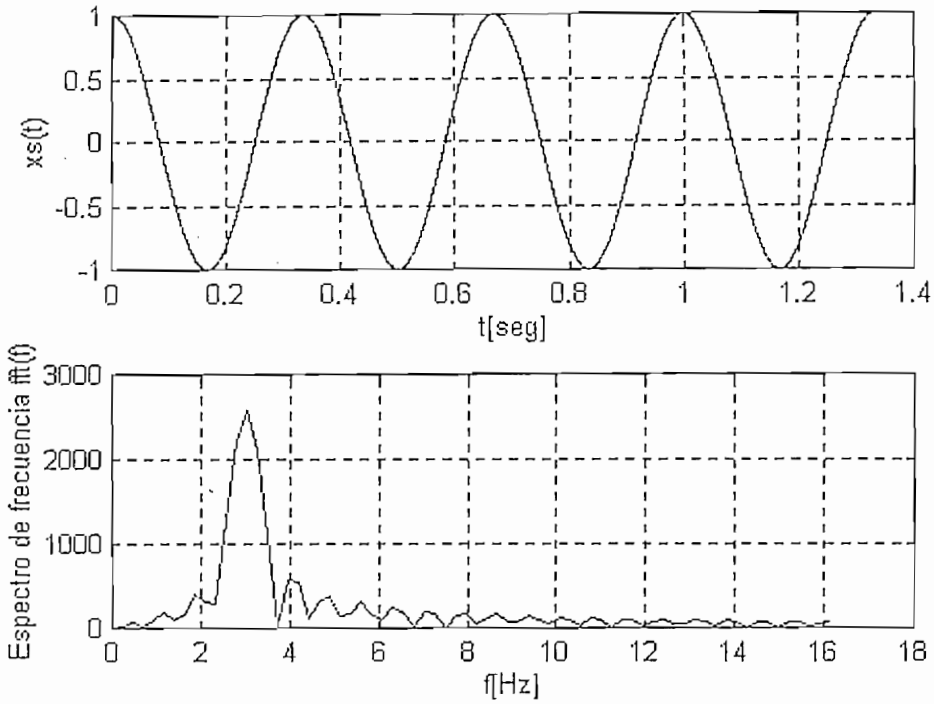


Fig.6.10.a. Señal modulante y su espectro de frecuencia

A continuación se grafican los resultados obtenidos con modulación de señales en amplitud. La señal x(t), se modula a una frecuencia de la señal portadora de 11.5 Hz.

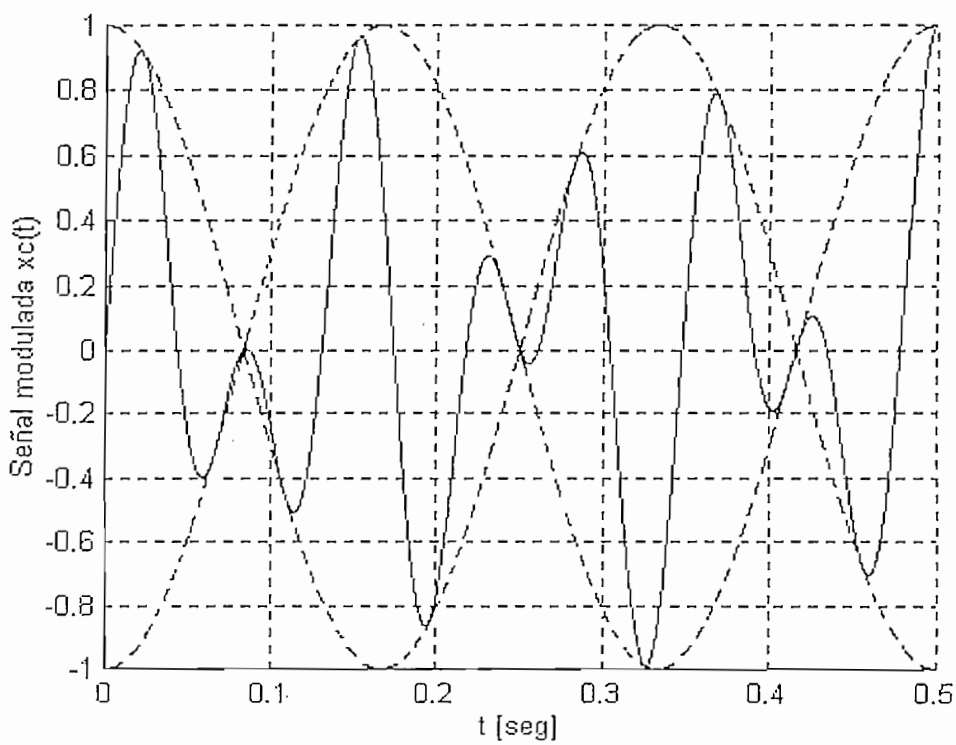


Fig.6.10.b. Señal modulada en amplitud.

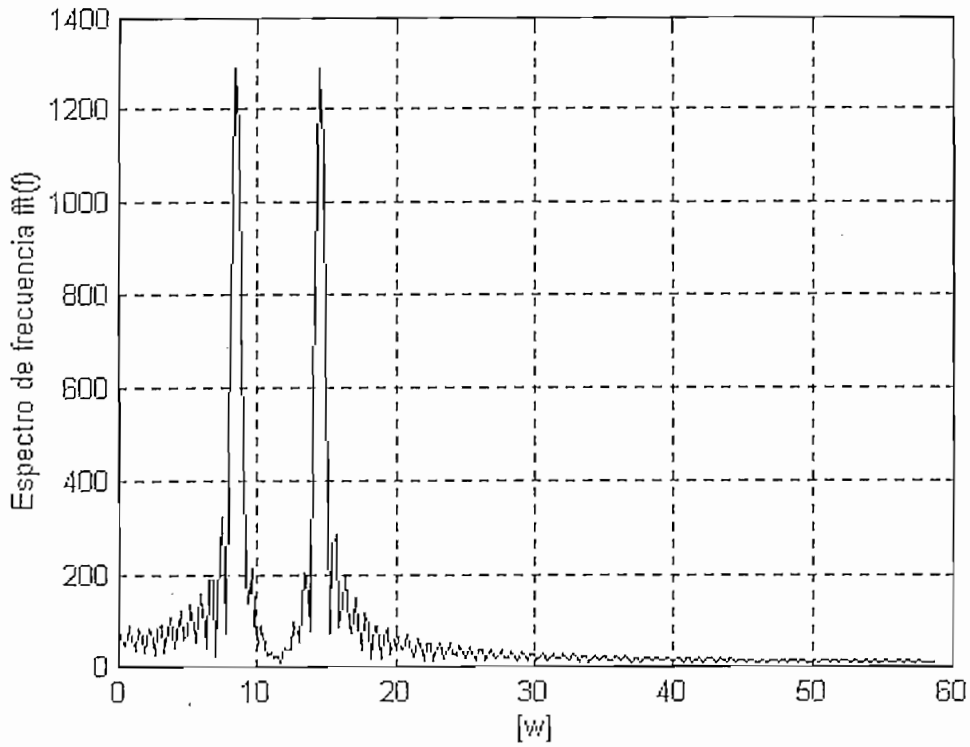


Fig.6.10.c. Espectro de frecuencia de la señal modulada en amplitud.

Ejemplo 11. Se define la función de transferencia del sistema como :

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 7.s^2 + 14.s + 8}$$

Para la solución de este ejemplo se utiliza la *APLICACIÓN DE ANÁLISIS VARIANDO UN PARÁMETRO..*

Se ingresa la función de transferencia del sistema G(s). Se grafica la respuesta en el tiempo a una función paso. Para la respuesta de frecuencia se grafican los diagramas de Bode en lazo abierto.

El valor de a_2 en G(s) es 14. La barra de desplazamiento tiene como límite superior 2 veces el valor de a2 que es 28.

A continuación se muestra en las figuras 6.11.a, 6.11.b, 6.11.c y 6.11.d, como variando el parámetro a_2, varía la forma de la respuesta en el tiempo del sistema.

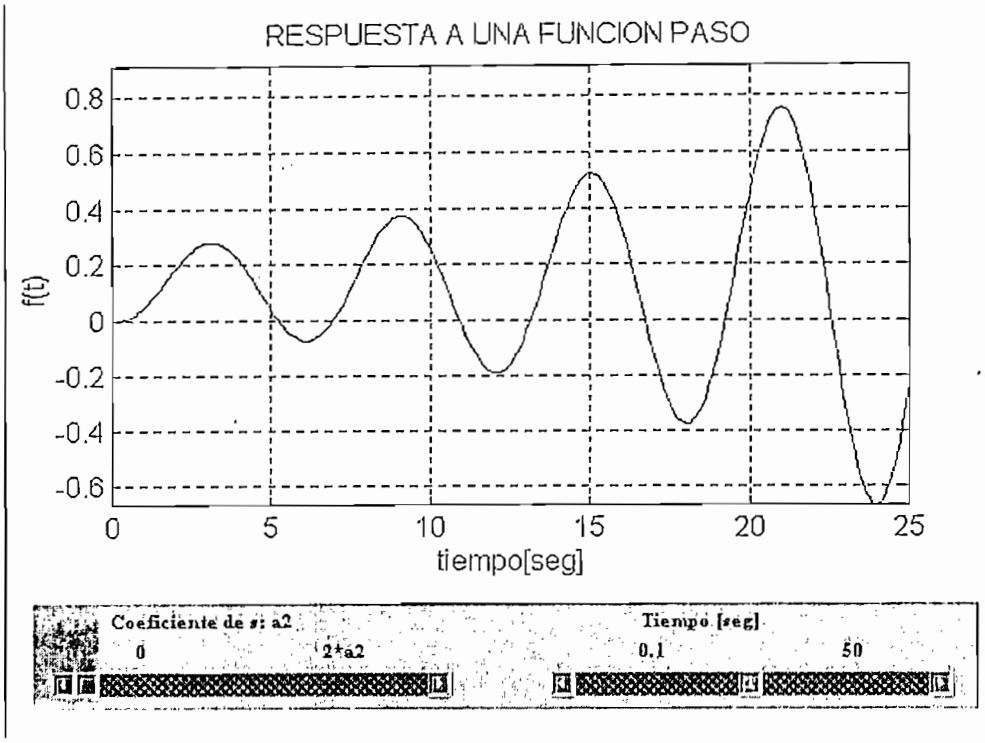


Figura 6.11.a Respuesta en el tiempo para el valor mínimo de a_2

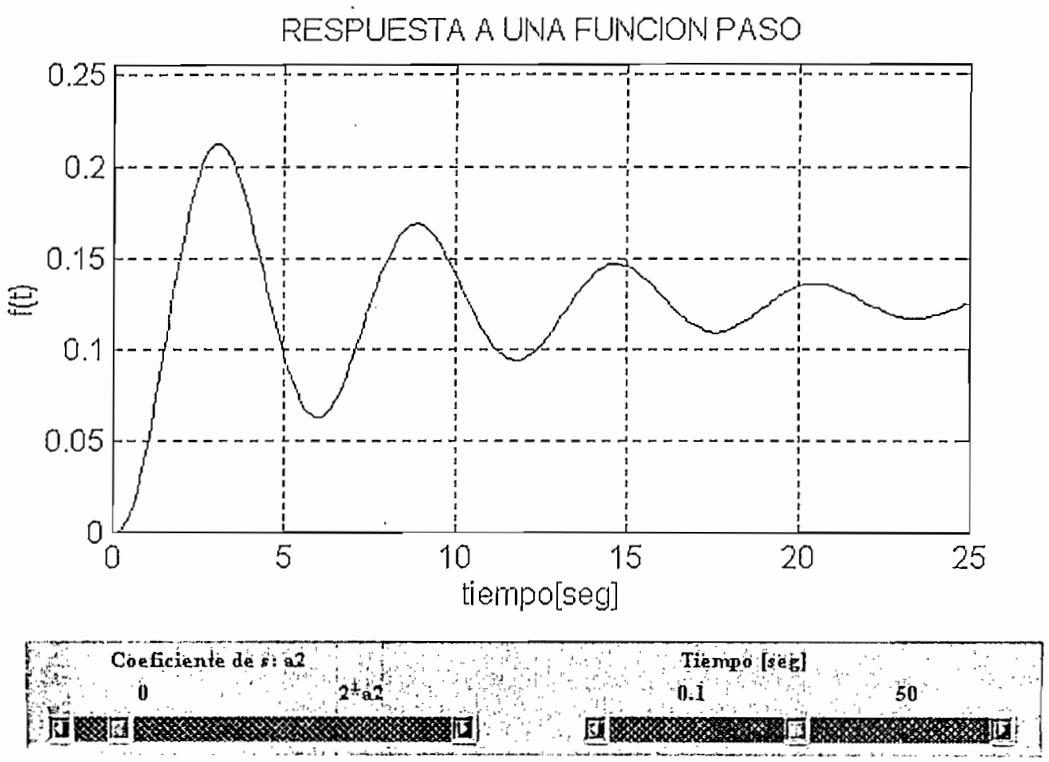


Figura 6.11.b Respuesta en el tiempo para un valor intermedio de a_2

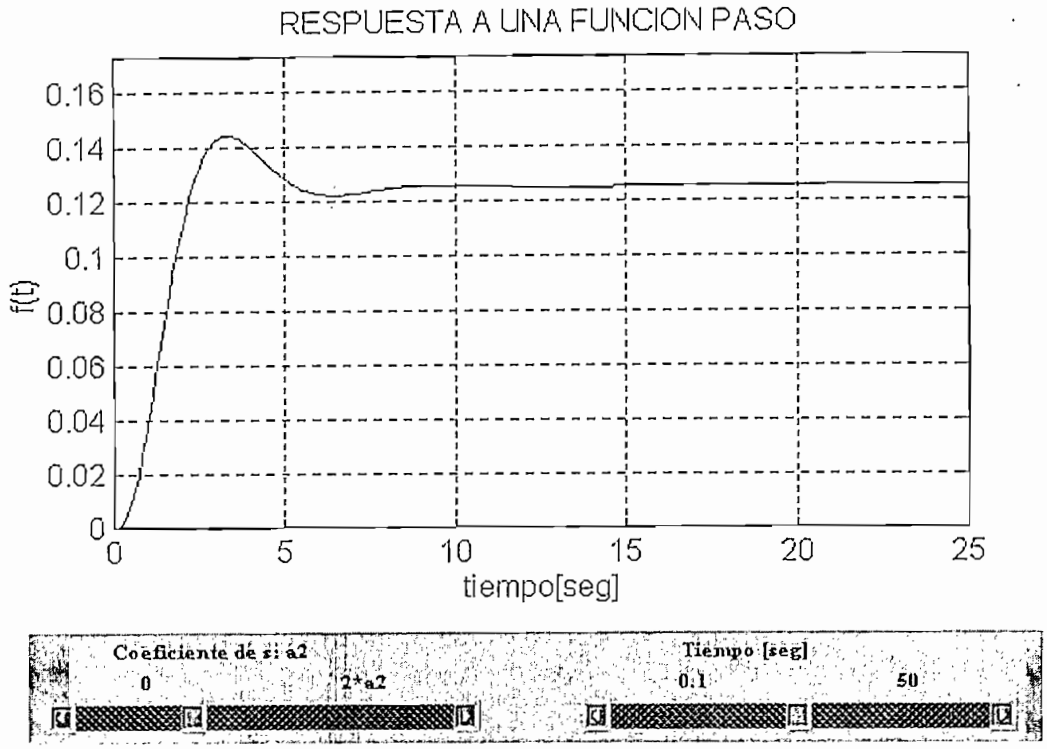


Figura 6.11.c Respuesta en el tiempo para un valor intermedio de a_2

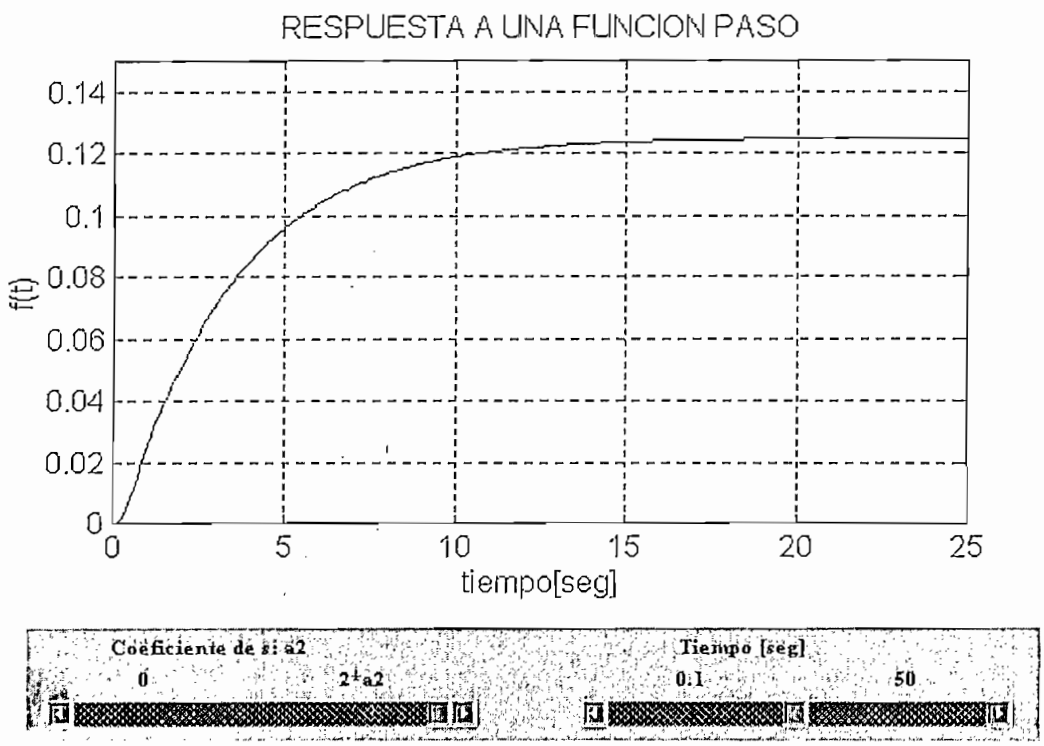


Figura 6.11.d Respuesta en el tiempo para el valor máximo de a_2

A continuación se muestra en las figuras 6.12.a, 6.12.b, 6.12.c y 6.12.d, como variando el parámetro a_2, varía la forma de la respuesta en frecuencia del sistema.

Se observa como varía la respuesta del sistema al variar el parámetro a2, que es un coeficiente del denominador de la función de transferencia en lazo abierto del sistema.

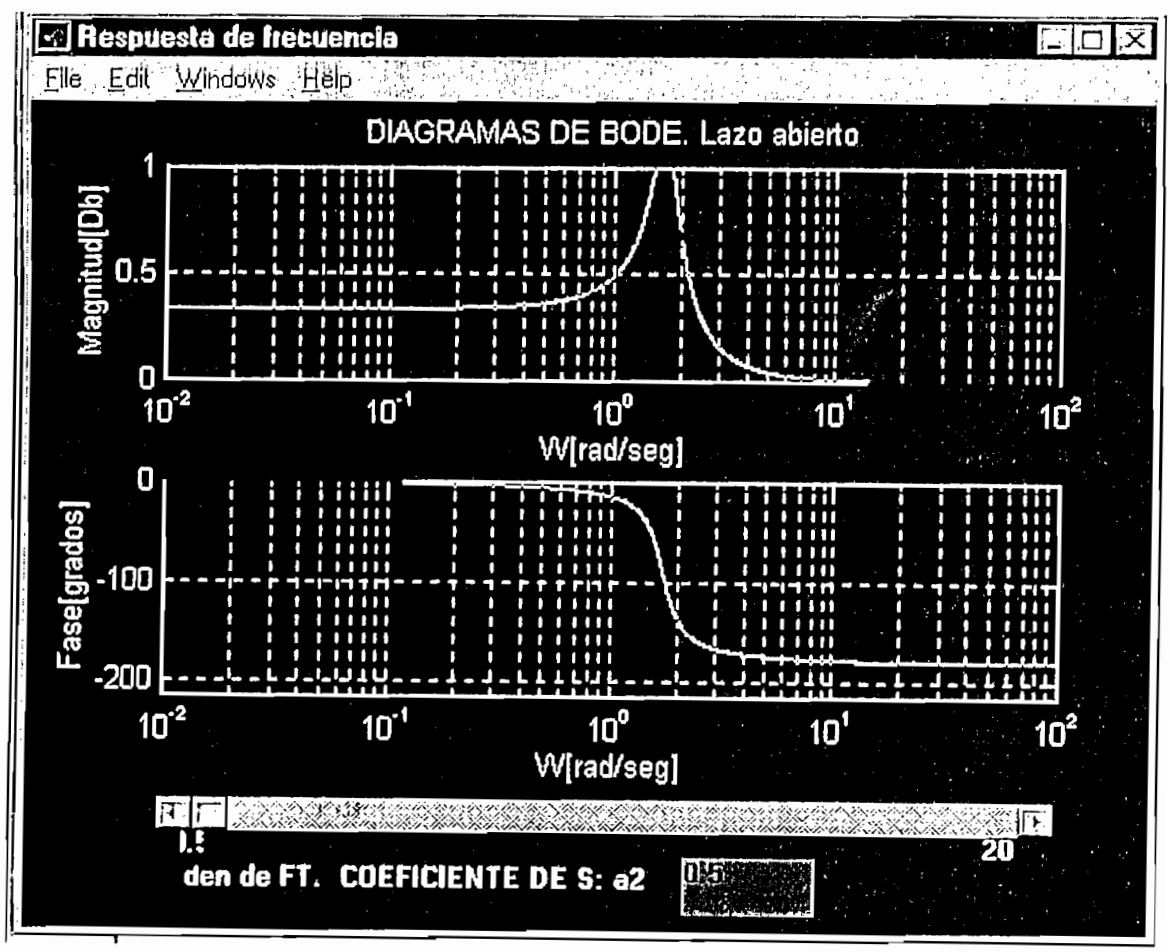


Figura 6.12.a Respuesta en el tiempo para el valor pequeño de a_2

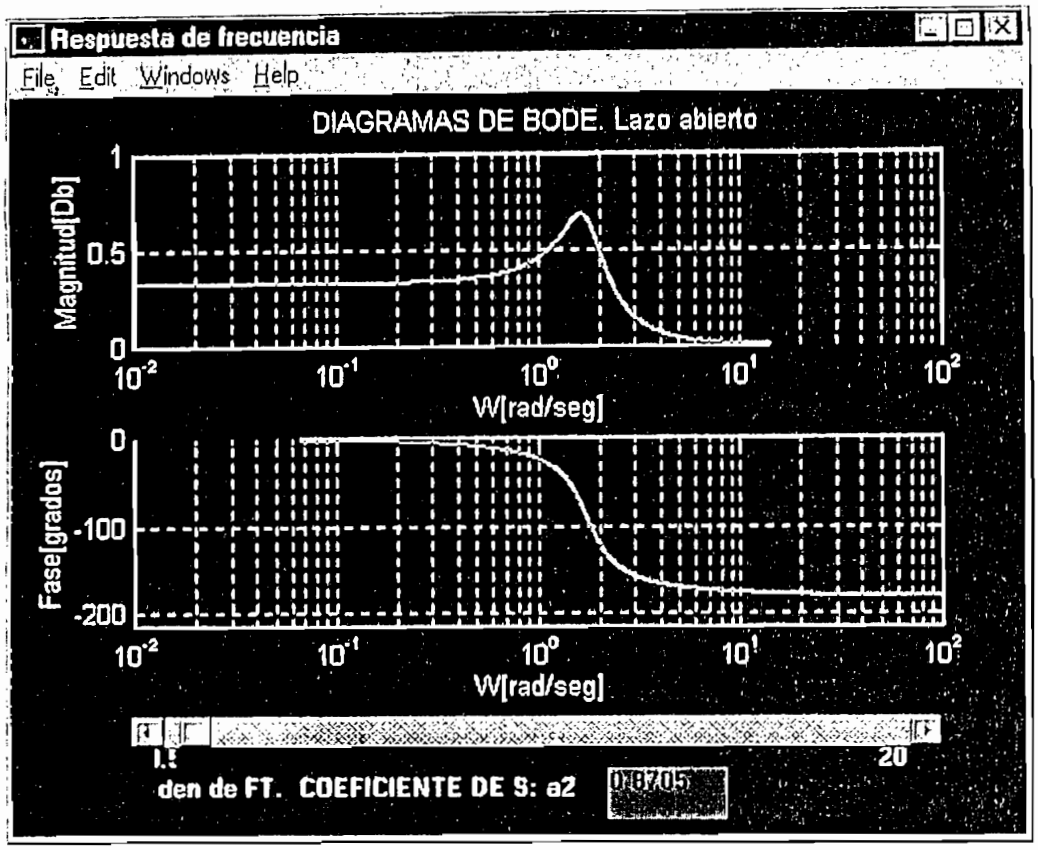


Figura 6.12.b Respuesta en el tiempo para el valor intermedio de a_2

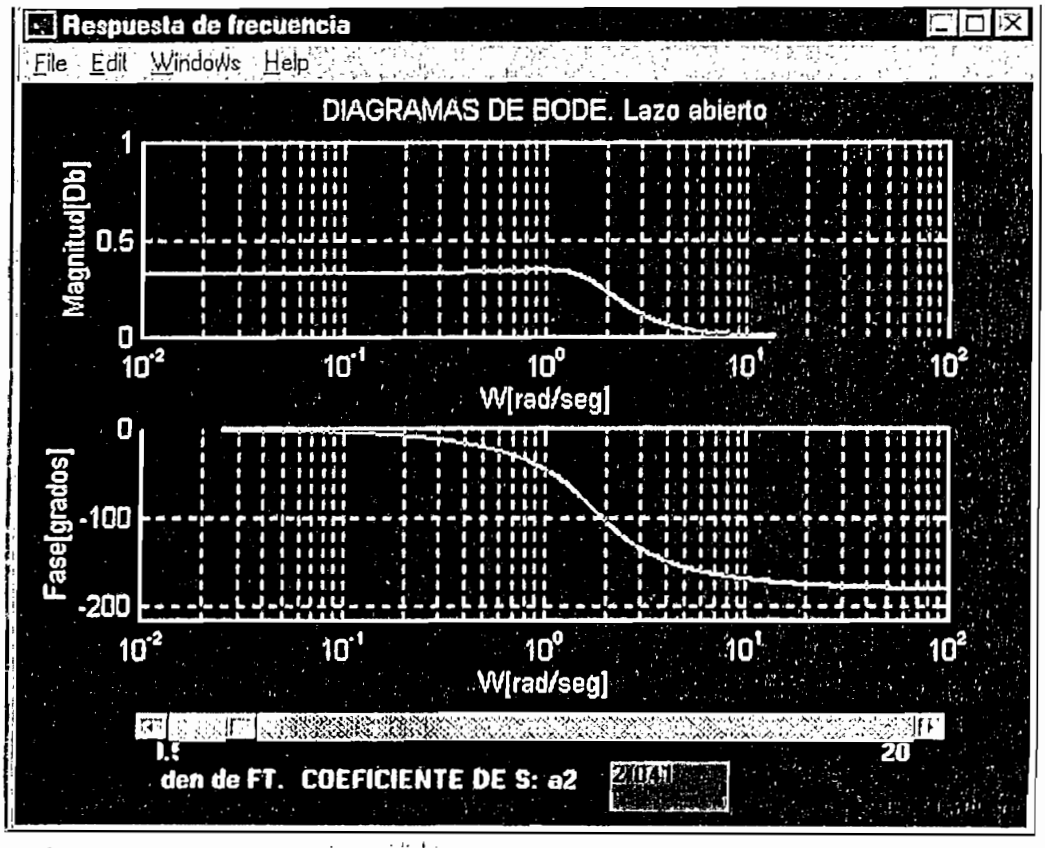


Figura 6.12.c Respuesta en el tiempo para el valor intermedio de a_2

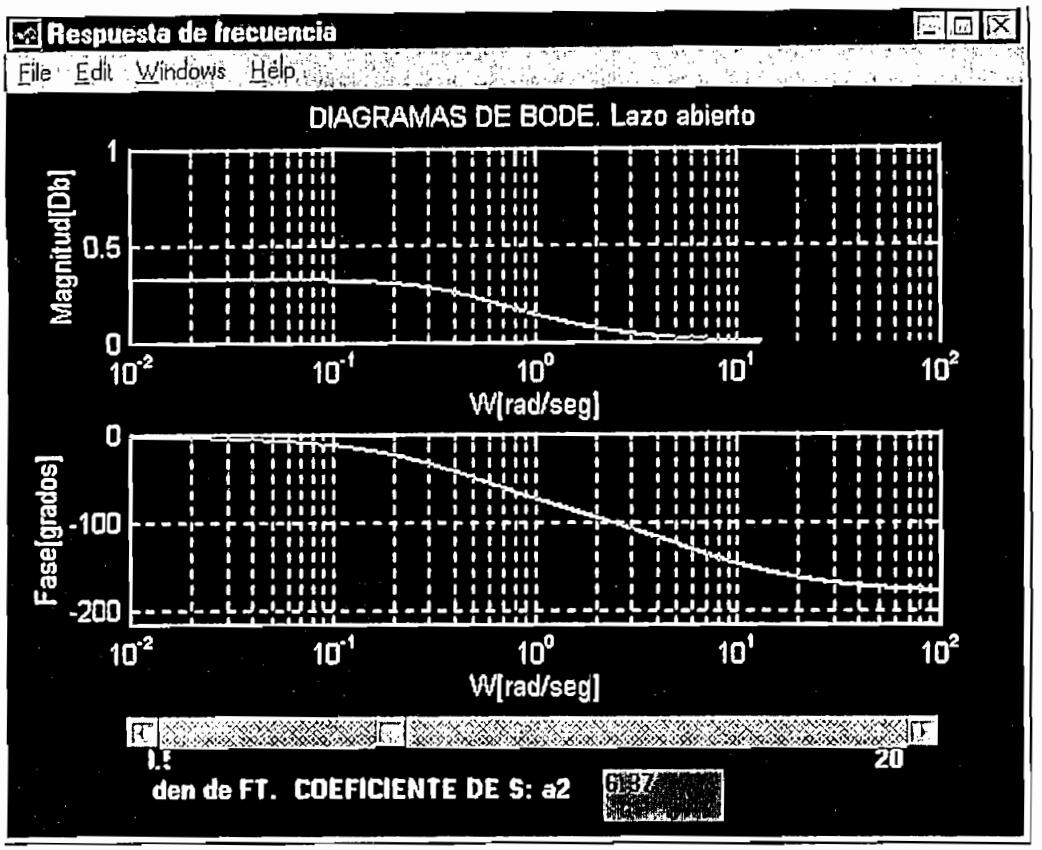


Figura 6.12.d Respuesta en el tiempo para el valor grande de a_2

Ejemplo12. Se desea realizar la adquisición de datos del sistema físico S1 realimentado, representado en las figuras 6.13.a y 6.13.b.

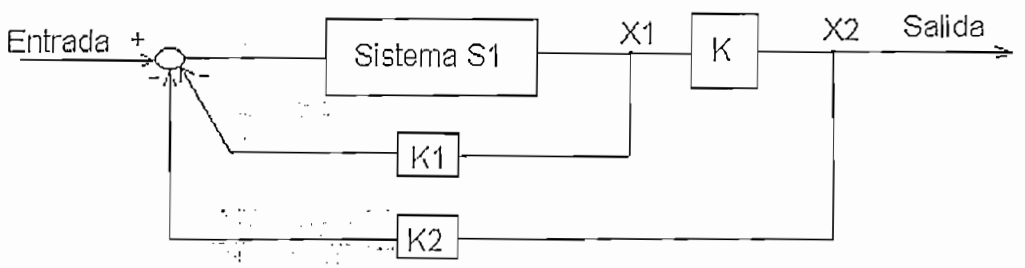


Figura 6.13.a. Diagrama de bloques del sistema S1 realimentado

S1y K son parte del sistema físico representado en la figura 6.13.b. y las ganancias K1, K2 y la entrada del sistema a través de una salida de la tarjeta son variables controladas a través del programa.

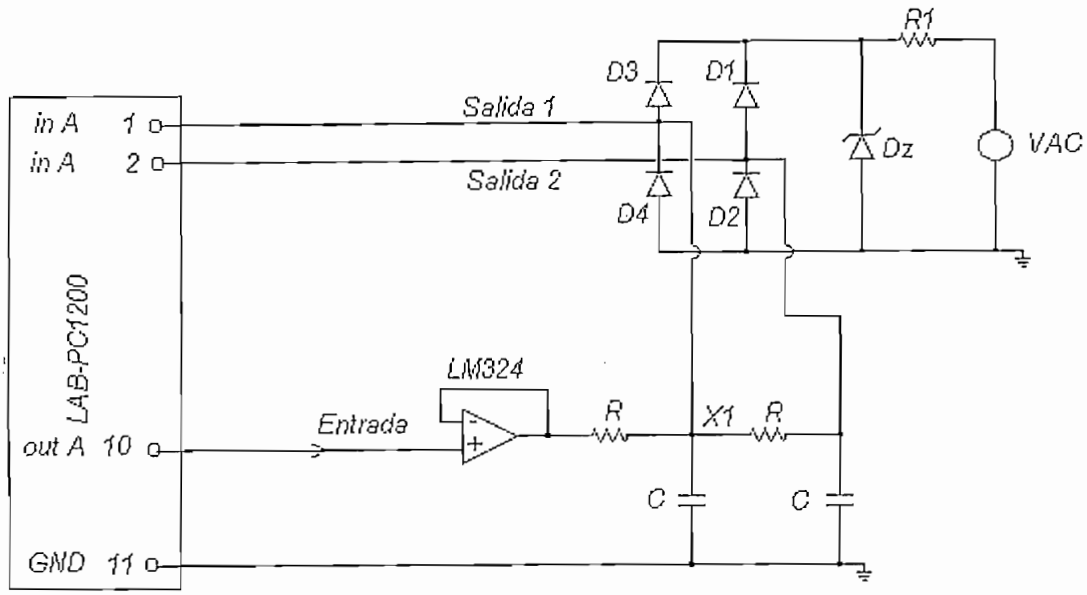


Figura 6.13.b. Sistema S1 realimentado

Donde:

VAC =10 Vac

R1 = 330 Ω

R = 10 kΩ

C =100 μF

Dz = 10V

Si se han realizado las conexiones de hardware indicadas en la figura 6.13.b, se elige la opción del menú de tiempo real en aplicaciones, se realiza la adquisición de datos para un sistema realimentado. Para adquirir datos se obtiene la pantalla de la figura 6.1.3.c, en donde se pueden variar los parámetros K1, K2, y la entrada del sistema. Este programa realiza un intercambio dinámico dè datos con el programa Matlab, para realizar el procesamiento digital de las señales obtenidas en función del tiempo.

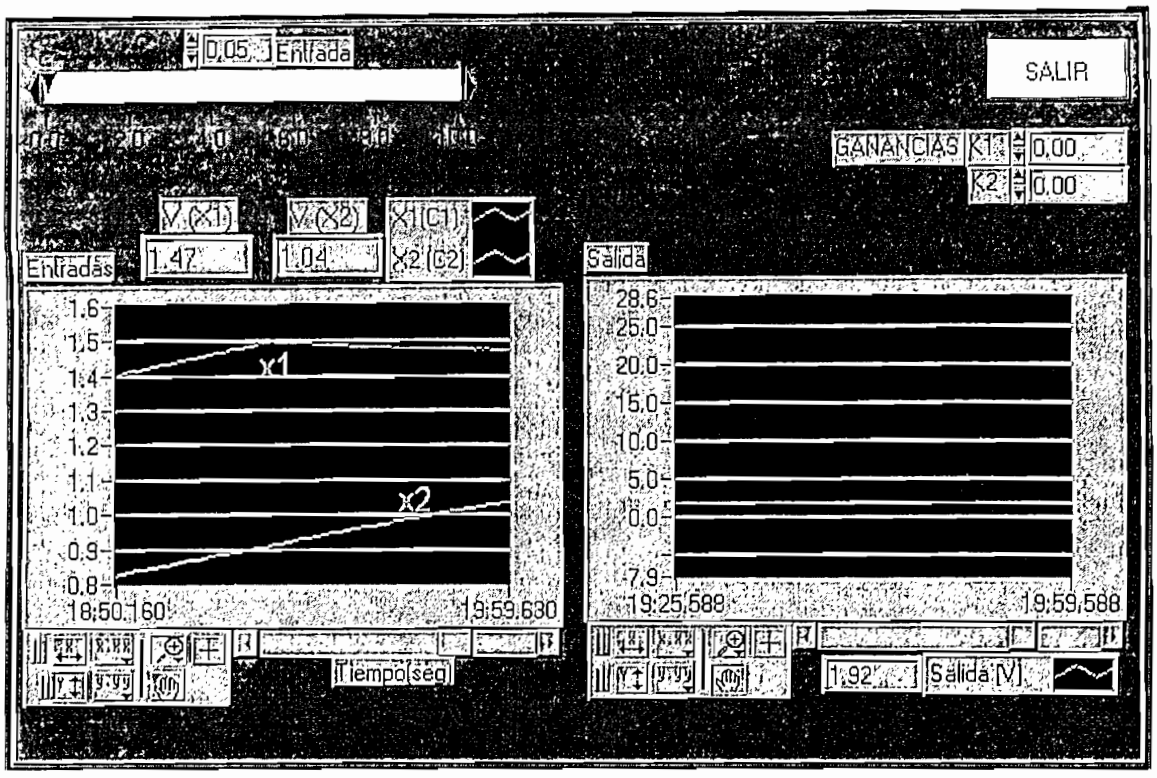


Figura 6.13.c. Adquisición de datos del sistema realimentado

Los datos muestreados que se obtienen en el programa sislin son los siguientes:

X1 es el voltaje en el capacitor C1.

X2 es el voltaje en el capacitor C2.

X es el voltaje de entrada para el sistema S1.

t es el vector tiempo en el que se realizó la adquisición de datos.

Los voltajes en el capacitor 1 y 2, se observan como V(x1) y V(x2) en la figura 6.3.c., cuando la señal de entrada es una función escalón los capacitores almacenan voltaje (periodo de carga) para este ejemplo.

Los vectores de datos pueden ser procesados digitalmente en el programa Matlab, con las subrutinas de simulación utilizadas en el programa sislin.

A continuación se realizan algunas aplicaciones en tiempo real, con los datos muestreados utilizando el programa sislab.exe.

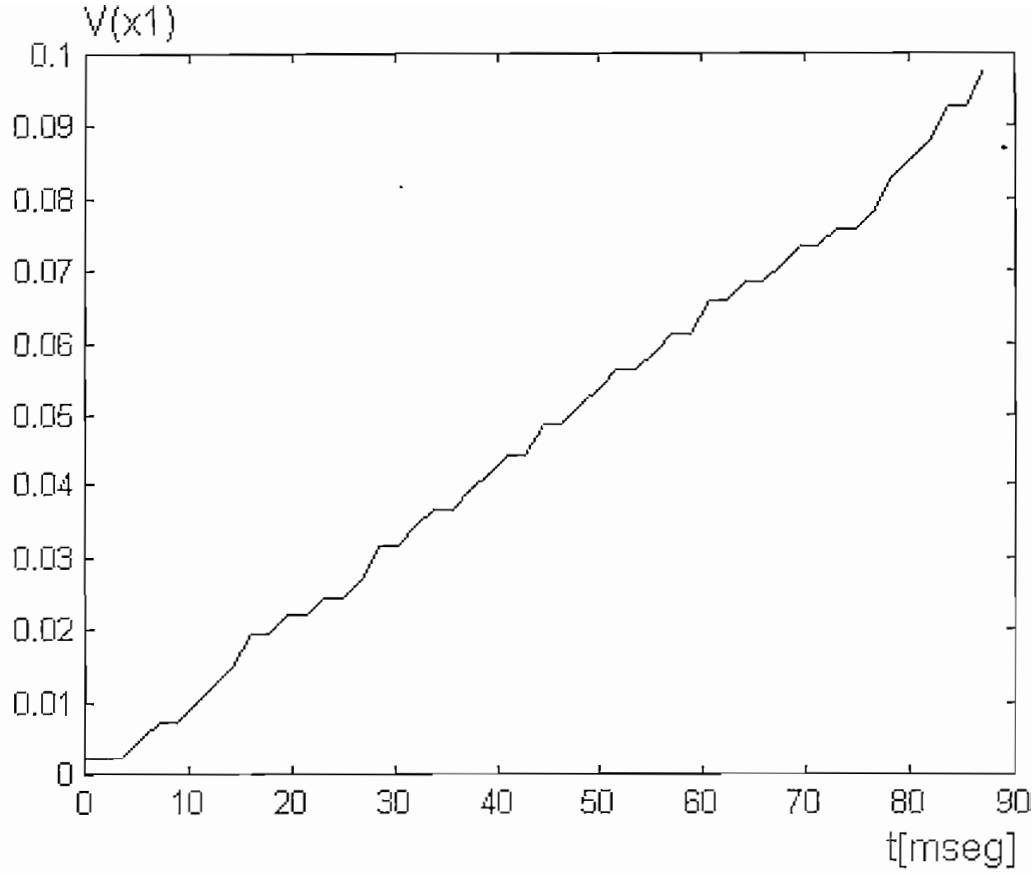


Figura 6.13.d. Voltaje V(x1)

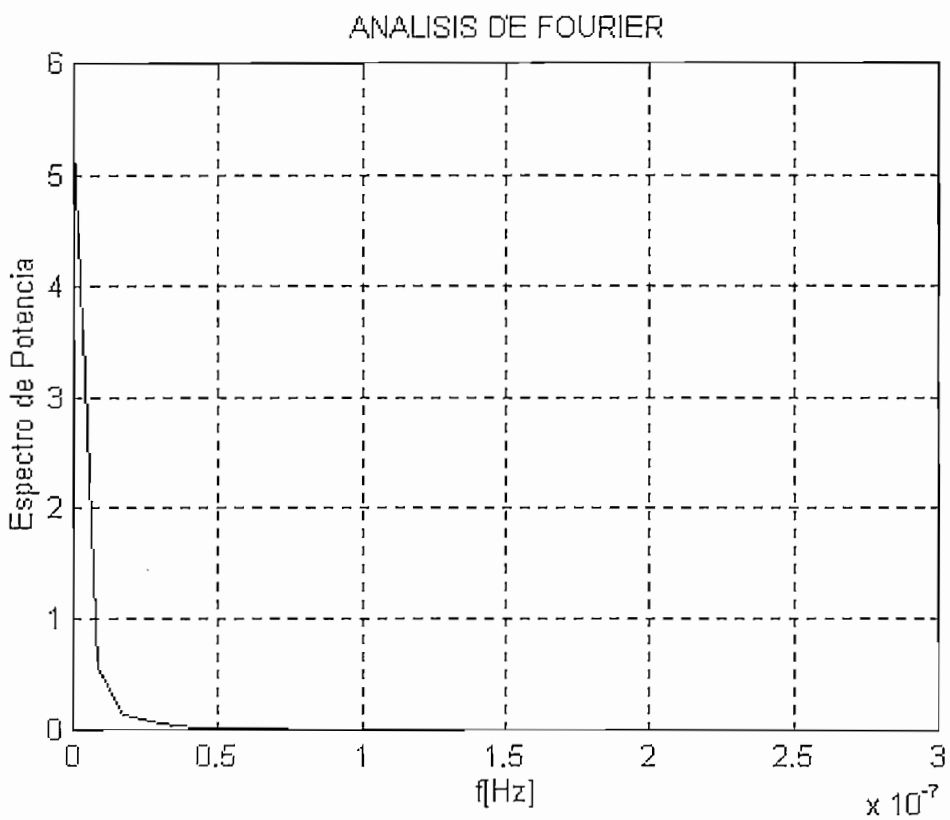


Figura 6.13.e. Espectro de potencia de V(x1)

La señal de voltaje del capacitor C1, se filtra utilizando un filtro pasabajos para una frecuencia de corte de 3 Hz.

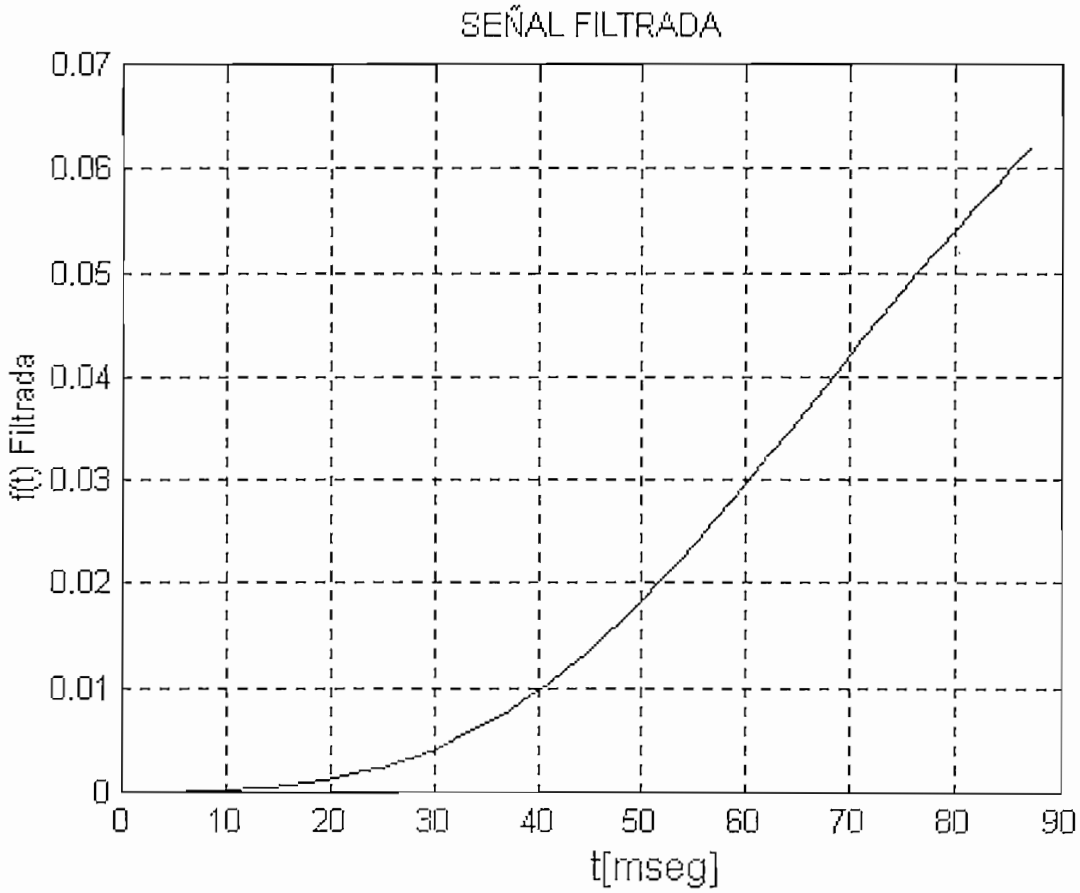


Figura 6.13.f. Señal V(x1) filtrada con un filtro pasa-bajos a 3Hz

Como se observa existe un notable cambio al compara las figuras 6.13.d y 6.13.f, se ha eliminado la interferencia existente en la señal original V(x1).

Para observar de mejor manera los gráficos se ha reducido la escala en el tiempo.

En la figura 6.13.g se observa la señal escalón de entrada al sistema S1.

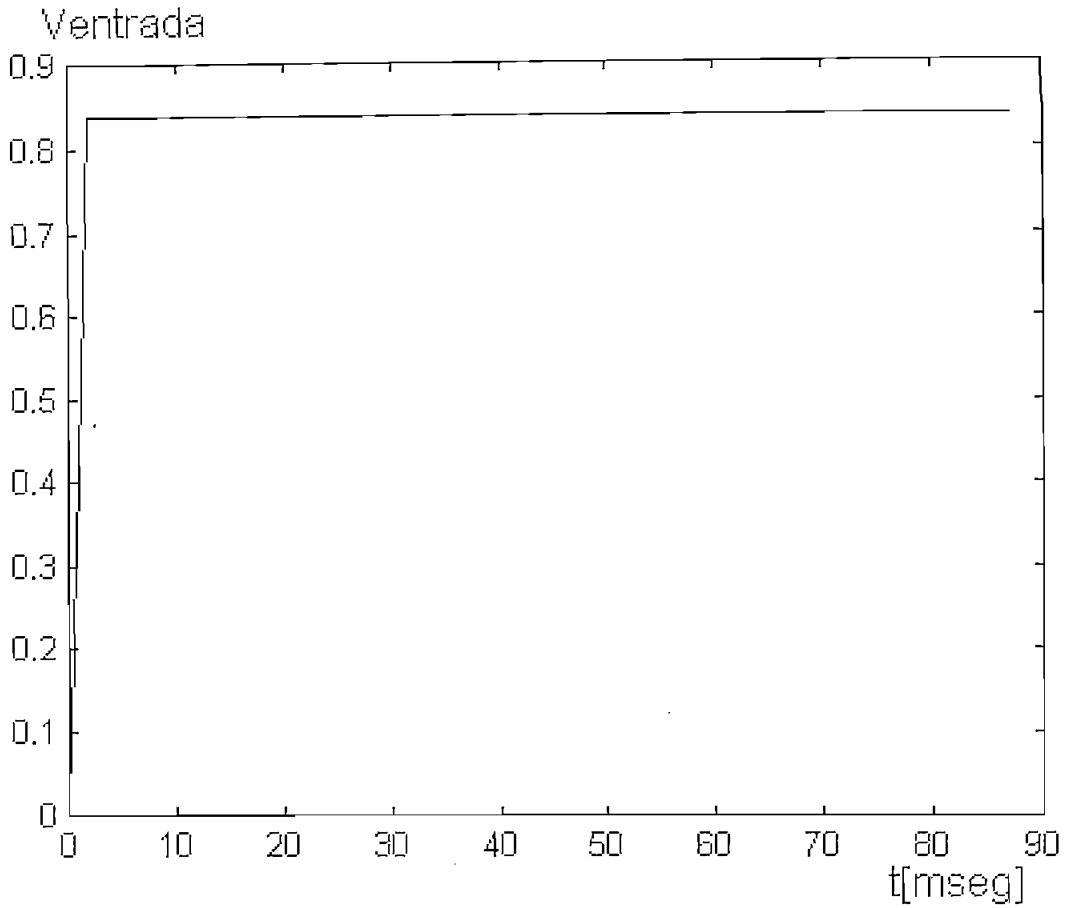


Figura 6.13.g. Señal de entrada al sistema S1

Utilizando la subrutina rarbitap.m, se calcula la respuesta de un sistema definido por el usuario como G(s), a una señal arbitraria que para este ejemplo se elige la señal paso como la señal de entrada

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2.s + 3}$$

En la figura 6.13.h se grafica la respuesta del sistema G(s) a la función paso de la figura 6.13.g.

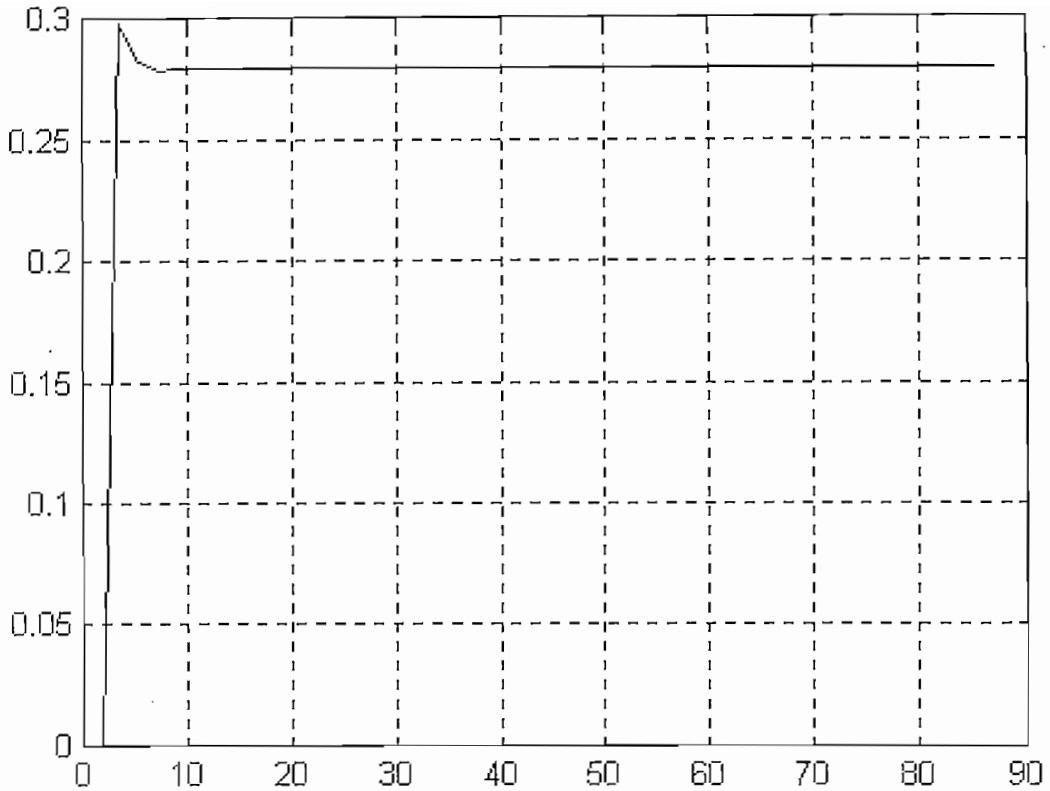


Figura 6.13.h. Respuesta del sistema G(s) a la señal escalón.

Es importante recordar que se puede realizar adquisición de datos de cualquier señal arbitraria.

6.2. CONCLUSIONES

El presente trabajo demuestra ser de mucha utilidad didáctica en el estudio de los Sistemas Lineales y sus aplicaciones. Esto se debe a dos razones fundamentales :

- El despliegue gráfico de las respuestas.
- Lo sencillo de su utilización.

En primer lugar, el tener un despliegue gráfico de las respuestas, permite observar de una forma clara el comportamiento de los sistemas analizados por los diferentes métodos matemáticos.

En el segundo lugar, el hecho de que el programa de menúes automatice la mayoría de los procedimientos para realizar el ingreso de los datos y los diferentes tipos de análisis, hacen que no sea necesario que el usuario del toolbox, tenga un conocimiento del manejo del paquete Matlab.

En este trabajo de tesis se ha realizado un estudio general a nivel de sistemas lineales y de sus aplicaciones básicas, el tema es demasiado extenso, debido a ello se han realizado rutinas de propósito específico.

Los métodos de solución para un mismo ejercicio pueden ser múltiples, debido a la gran variedad de comandos que pueden utilizarse.

Es importante poder ingresar cualquier función arbitraria, utilizando una pantalla de edición, puesto que permite gran flexibilidad del programa y una fácil utilización del mismo.

Las utilización de variables de estado y funciones de transferencia es muy importante en la implementación de los macros, puesto que cualquier sistema puede describirse matemáticamente mediante las dos representaciones, tanto para sistemas contínuos como discretos.

Se pueden generar funciones arbitrarias en base a funciones paso, escalón, sinusoidal y exponencial, estas señales pueden ser manipuladas en tiempo como se indicó en el ejemplo 1 del numeral 6.1.1. Una aplicación importante es la utilización de señales arbitrarias como entrada para sistemas contínuos o discretos, y se encuentra la respuesta gráfica en el tiempo.

El análisis realizado en el tiempo para sistemas contínuos y discretos, calcula automáticamente los valores de máximo sobreimpulso, tiempo pico, valor final, tiempo de establecimiento para sistemas de orden n. El orden del sistema no se limita, es una de las ventajas de este programa.

En el análisis en el dominio de la frecuencia hay varias alternativas para sistemas contínuos y discretos, se pueden obtener respuestas en el tiempo. Se grafica el lugar geométrico de las raíces y se realiza un análisis de estabilidad, basado en la ubicación de polos y ceros del sistema.

Es importante el análisis de series de Fourier, mediante la edición de archivos ya que utilizando el comando edit se permite al usuario ingresar cualquier función expresada como serie de Fourier, para calcular el espectro de frecuencia de la función y construir la función formada por n armónicas. Se realizan ejemplos demostrativos de funciones predeterminadas.

La transformada de Fourier, también permite el ingreso de cualquier función F(jw) para calcular el espectro contínuo de frecuencia. Se realizan ejemplos demostrativos de funciones predeterminadas.

En el dominio de la frecuencia, es importante analizar los diagramas de Bode, diagrama polar y carta de Nichols que se lo hace para sistemas de orden n. Es importante poder realizar este tipo de análisis, desde los sistemas hasta los sistemas más complejos.

La transformada discreta de Fourier utiliza el mismo cálculo matemático que la transformada rápida de Fourier, la diferencia entre las dos transformadas es el número de puntos que se utiliza en su cálculo. El algoritmo de la transformada rápida de Fourier se calcula para N valores, en donde N es un múltiplo de 2. Al utilizar transformada rápida de Fourier se obtiene el espectro de frecuencia de la función, que permite visualizar el valor de frecuencia de la función.

La transformada rápida de Fourier ha sido utilizada con gran eficiencia en la aplicación filtrado, con ella se obtiene el espectro de frecuencia de la señal que se va a filtrar y de la señal filtrada.

La modulación en amplitud de señales en el tiempo, es una aplicación de convolución de sistemas contínuos, ya que la modulación en amplitud es la multiplicación de dos señales en el tiempo. La frecuencia de la señal modulante debe ser menor que la frecuencia de la señal portadora o carrier, en general $fm<2.fc$. De igual manera se utiliza en la aplicación de modulación de señales.

Es muy útil la interconexión de n sistemas, el usuario solo debe ingresar las funciones de transferencia de cada sistema. Los sistemas pueden interconectarse en serie o en cascada, y pueden estar o no realimentados. Cada sistema puede ser de orden n.

Se determinan las características estructurales de un sistema, solo ingresando el modelo matemático mediante variables de estado o función de transferencia.

Con la aplicación de sistemas de datos muestreados, se pueden discretizar los sistemas para manejar secuencias discretas en el tiempo.

Es importante destacar la variación de un parámetro en el dominio del tiempo y de la frecuencia, ya que al variar un coeficiente del denominador de la función de transferencia se observa como va cambiando la respuesta del sistema tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia.

El paquete computacional Labview posee características para realizar aplicaciones en tiempo real, gracias a ello se realiza la adquisición de datos utilizando la tarjeta LAB-PC1200 y a través del mismo programa se realiza un intercambio dinámico de datos con el paquete Matlab. Los vectores de datos que son enviados hacia Matlab utilizan subrutinas realizadas en el programa Labview, para transmitir archivos demasiado grandes el tiempo de transmisión es demasiado grande.

El programa Labview permite realizar archivos ejecutables, que se invocan desde cualquier programa como Matlab.

En la aplicación en tiempo real, se puede ingresar cualquier señal arbitraria para procesarla digitalemente. El sistema físico S1, puede ser reemplazado por cualquier otro sistema que el usuario desee analizar.

Como se ha indicado, el trabajo de tesis no se limita ha obtener resultados solo gráficos; se obtienen también análisis matemáticos para sistemas ingresados libremente por el usuario, que resultarían sumamente difíciles obtenerlos analíticamente y se realiza un análisis en tiempo real.

BIBLIOGRAFÍA

- CLARE D. MCGILLEM / GEORGE R. COOPER., "*Continuos and Discrete Signal and System Analysis*". Ed. Holt, Rinehart and Winston. 1974 U.S.A.

- DONOSO MENESES RODOLFO, *"Procesamiento Digital de Señales Utilizando el Paquete Matlab"*. Escuela Politécnica Nacional. Quito, 1995.

- DORF RICHARD C, *"Sistema Automáticos de Control"*. México 1977.

- KUO BENJAMIN C. *"Sistemas Automáticos de Control"*. Ed. Continental S.A. México 1986.

- NAOMI EHRICH LEONARD - WILLIAM LEVINE. "Using Matlab to Analize and Design Control system". The Benjamin / Cummings Publishing Company, Inc. 1995.

- NATIONAL INSTRUMENTS, "LabVIEW. Data acquisition". 1996.

- NATIONAL INSTRUMENTS, "LabVIEW. Graphical Programing for Instrumentation". 1996

- OGATA KATSUHIKO, *"Ingeniería de Control Moderna"*. Ed. Prentice Hall.1974

- OPPENHEIM ALAN V., *Señales y Sistemas"*. De. Prentice Hall.México 1983.

- ROSERO PATRICIO. *"Folleto de Sistemas Lineales"*. Escuela Politécnica Nacional. Quito 1996.

- THE MATH WORKS INC, *"Manual de Matlab versión 4.2"*.

- THE MATH WORKS INC., *"SIMULINK. Dynamic System Simulation Software"*.