ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

LA FÓRMULA DE ITÔ EN LA RESOLUCIÓN DE PROCESOS DE DIFUSIÓN CON APLICACIONES EN FÍSICA

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

JAIRO RAFAEL ROJAS BONILLA
jairinrojasb@gmail.com

Director: DR. LUIS ALCIDES HORNA HUARACA
luis.horna@epn.edu.ec

QUITO, OCTUBRE 2016

DECLARACIÓN

Yo, JAIRO RAFAEL ROJAS BONILLA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Jairo Rafael Rojas Bonilla

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por JAIRO RAFAEL ROJAS BONILLA, bajo mi supervisión.

Dr. Luis Alcides Horna Huaraca
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Dios, quien me sostiene y me da fuerzas para seguir adelante, por su infinito amor.

Al Dr. Luis Horna, por su invaluable guía durante la elaboración de este trabajo, por su paciencia y por sus sabios consejos.

A mis profesores, por quienes he podido conocer este mundo maravilloso de la matemática, por su entrega y por infundir una gran inspiración a lo largo de los años.

A mi familia, que ha sido mi apoyo incondicional, por su confianza y su amor.

DEDICATORIA

A JEHOVÁ

Índice general

Resumen xii

Abstract xiii

1. El Fenómeno Físico **1**

1.1. Movimiento Oscilatorio 1

1.1.1. Oscilador Lineal 2

1.1.2. Oscilador de Duffing 4

1.2. El Fenómeno Físico 4

1.3. Oscilador amortiguado Aleatorio 6

1.3.1. Propiedades probabilísticas 7

2. Movimiento Browniano **9**

2.1. Procesos estocásticos 9

2.2. Martingalas 10

2.2.1. Definición y propiedades 11

2.2.2. Desigualdades para martingalas 14

2.3. Movimiento Browniano o proceso de Wiener 16

2.3.1. Definición y propiedades de distribución 17

2.3.2. El movimiento Browniano como una martingala 22

2.3.3. Diferenciabilidad y variación acotada 24

2.3.4. Procesos continuos obtenidos a través del movimiento Browniano 26

3. Cálculo estocástico **32**

3.1. Integración estocástica 32
3.2. Fórmula de Itô 38
3.2.1. Caso unidimensional 38
3.2.2. Caso multidimensional 42
3.3. Ecuación diferencial estocástica 44
3.4. Procesos de difusión 47
3.5. Métodos numéricos 48

4. Fórmula e Itô y los procesos de difusión **54**
4.1. Momentos 55
4.2. Ecuación de Fokker-Planck 56
4.3. Aplicación 58
4.3.1. Cálculos de momentos 1 59
4.3.2. Cálculos de momentos 2 65
4.3.3. Cálculo de la ecuación de Fokker-Planck 1 70
4.3.4. Cálculo de la ecuación de Fokker-Planck 2 71

5. Conclusiones y recomendaciones **75**
5.1. Conclusiones 75
5.2. Recomendaciones 77

A. Conceptos y definiciones probabilísticas **78**
A.1. Trayectorias 78
A.2. Integral de Stratonovich 79
A.3. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias 80

B. Códigos **81**

Bibliografía **89**

Índice de figuras

2.1. Código para el juego de apuesta. 14

2.2. Simulación de una trayectoria de una martingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0{,}5$ para $N = 100$ pasos. 15

2.3. Simulación de una trayectoria de una supermatingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0{,}3$ para $N = 100$ pasos. 15

2.4. Simulación de una trayectoria de una submartingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0{,}8$ para $N = 100$ pasos. 16

2.5. Código para simular una trayectoria de un movimiento Browniano . 19

2.6. Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional. 20

2.7. Código para simular una trayectoria de un movimiento Browniano en dos y en tres dimensiones. 20

2.8. Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano en dos dimensiones. 21

2.9. Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano en tres dimensiones. 21

2.11. Probabilidad de que el supremo de $e^{B(t)}$ con $t \in [0, 10]$ exceda a $x \in [2, 20]$ y su cota superior $\frac{E[B(\tau)^+]}{\ln x}$, para $\tau = 10$. 24

2.10. Código para el ejemplo 2. 24

2.12. Simulación de una trayectoria de un puente Browniano que inicia en cero y termina en uno, es decir, $X(0) = 0$, $X(1) = 1$. 27

2.13. Simulación de una trayectoria de movimiento Browniano con tendencia con $\mu = 0{,}5$ y $\sigma = 5$. 28

2.14. Simulación de una trayectoria de movimiento Browniano con tendencia con $\mu = 5$ y $\sigma = 0{,}5$. 29

2.15. Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano geométrico con $\gamma = 5$ y $\delta = 1$. 30

2.16. Código para simular una trayectoria de los procesos continuos obtenidos a partir de un movimiento Browniano. 31

3.1. Código para ejemplo 10, el método numérico de Euler-Maruyama. . 51

3.2. Solución aproximada calculada en 4 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1]. 52

3.3. Solución aproximada calculada en 20 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1]. 52

3.4. Solución aproximada calculada en 100 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1]. 53

3.5. Solución aproximada calculada en 500 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1]. 53

4.1. Solución simulada del proceso X para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador lineal. 61

4.2. Solución simulada del proceso $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador lineal. 62

4.3. Diagrama de fase X vs $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador lineal. 62

4.4. Media obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal. 63

4.5. Varianza obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal. 63

4.6. Asimetría obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[15, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal. 64

4.7. Curtosis obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal. 64

4.8. Solución simulada del proceso X para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) =$ 1 en [0,30], oscilador de Duffing. 67

4.9. Solución simulada del proceso $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) =$ 1 en $[0, 30]$, oscilador de Duffing. 68

4.10. Diagrama de fase X vs $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador de Duffing. 68

4.11. Media obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, con $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$ y $\sigma = 1$, oscilador de Duffing. 69

4.12. Varianza obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, con $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$ y$\sigma = 1$, oscilador de Duffing. 69

4.13. Densidad de transición de una partícula Browniana con movimiento oscilatorio con respuesta subcrítica con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 1$ en $[-5, 5] \times [-5, 5]$. 72

4.14. Densidad de transición de una partícula Browniana con movimiento oscilatorio dado por un oscilador de Duffing con $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$ y $\sigma = 1$, en $[-2, 2] \times [-2, 2]$. 74

B.1. Código para el cálculo de momentos 1. 81

B.2. Código para el cálculo de momentos 1 (continuación). 82

B.3. Código para el cálculo de momentos 1 (continuación). 83

B.4. Código para el cálculo de momentos 2. 83

B.5. Código para el cálculo de momentos 2 (continuación). 84

B.6. Código para el cálculo de momentos 2 (continuación). 85

B.7. Código para la densidad de transición 1. 85

B.8. Código para la densidad de transición 2. 85

Índice de tablas

4.1. Propiedades probabilísticas estacionarias del proceso X_s. 61

Resumen

En este proyecto de titulación se muestra, cómo por medio de la aplicación de la fórmula de Itô, es posible determinar propiedades probabilísticas de un proceso estocástico. Se trabaja con una partícula que presenta un movimiento oscilatorio y que se encuentra, bajo la acción de una fuerza aleatoria relacionada con un movimiento Browniano. Las propiedades que son determinadas son la media, la varianza, el coeficiente de asimetría, el coeficiente de curtosis, y la densidad de transición. Permitiendo, además, ver los efectos obtenidos al introducir términos aleatorios en un sistema determinista.

Palabras clave: Proceso estocástico, movimiento Browniano, fórmula de Itô.

Abstract

In this project titling shown how by applying Itô's formula, it is possible to determine probabilistic properties of a stochastic process. It works with a particle having an oscillatory movement and which is under the action of a random force related to Brownian motion. The properties that are determined are the mean, variance, skewness, kurtosis coefficient, and density transition. Allowing also see the effects obtained by introducing random terms in a deterministic system.

Keywords: Stochastic process, Brownian motion, Itô's formula.

Capítulo 1

El Fenómeno Físico

1.1. Movimiento Oscilatorio

Iniciamos considerando una partícula de masa m invariante en el tiempo, donde $x = x(t)$ representa su desplazamiento a lo largo del tiempo, con la notación $v = \dot{x}$ y $a = \dot{v} = \ddot{x}$ para la velocidad y la aceleración, respectivamente. Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene,

$$F = \frac{d}{dt}p = m\dot{v} = m\ddot{x}, \tag{1.1}$$

en donde $p = mv$ es la cantidad de movimiento lineal que describe la partícula. Para una fuerza actuante y determinadas condiciones del medio, en donde se encuentra la partícula, a partir de ecuación (1.1) es posible determinar una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la forma:

$$\ddot{x} = -h(x, \dot{x}), \tag{1.2}$$

junto con condiciones iniciales adecuadas, en donde h es un funcional de x y de $\dot{x}$ que puede ser lineal o no lineal.

Este tipo de ecuación puede ser utilizada para modelar diferentes clases de fenómenos, ver [6], siendo el movimiento oscilatorio el que capta la atención de este trabajo. Para ilustrar y con el fin de estudiar este fenómeno se presenta una breve descripción de un oscilador lineal y de un oscilador no lineal, el oscilador de Duffing. A estas ecuaciones se les introducirá la acción de una fuerza aleatoria relacionada

con el movimiento Browniano. Luego, a partir de las nuevas ecuaciones diferenciales con términos estocásticos con determinados valores de los parámetros, que serán elegidos de tal manera que se presenten diferentes dinámicas, se mostrará cómo por medio de la aplicación de la fórmula de Itô es posible obtener determinadas propiedades probabilísticas. Estas propiedades caracterizarán al fenómeno, permitiendo así, conocer la distribución que el proceso estocástico solución presenta, para esto se verificarán ciertas condiciones que las ecuaciones deben cumplir, dichas condiciones serán estudiadas a lo largo de los dos siguientes capítulos. Gracias a esto se podrá estudiar la formulación, utilización y alcance de la fórmula de Itô, que nos provee herramientas útiles como lo es en este caso, el iniciar el problema con una ecuación diferencial estocástica y transformar el problema en uno determinista. Las propiedades obtenidas a partir de la aplicación de la fórmula de Itô serán comparadas por propiedades similares obtenidas por medio de la técnica de Monte Carlo, con el objetivo de mostrar la gran utilidad de la aplicación de los resultados teóricos obtenidos a partir de la aplicación de la fórmula de Itô, recurso teórico que está disponible en los textos utilizados en la elaboración de este trabajo [4, 8, 11–13, 16].

Tomando el cambio de variable $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, se obtiene, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que se presenta a continuación.

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -h(x_1, x_2) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

1.1.1. Oscilador Lineal

Considerando que la partícula se encuentra unida a un resorte con constante de elasticidad o de recuperación k y es restringida a moverse en una sola dirección dentro de un fluido viscoso, y ya que existe una interacción entre partículas, como la considerada, y con las del fluido, se presentan fuerzas que actúan dentro de este sistema. Una fuerza F_1 consecuencia de la ley de Hooke y una fuerza F_2 resultante de la acción del medio, y que están dadas por:

$$F_1 = -kx, \tag{1.4}$$

y

$$F_2 = -\gamma \dot{x}, \tag{1.5}$$

en donde γ es una constante que depende del medio. Entonces, a partir de las ecuaciones (1.1) y (1.2) junto con (1.4) y (1.5) se obtiene la ecuación diferencial dada por:

$$\ddot{x} + 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0, \tag{1.6}$$

utilizando la siguiente notación: $w_o^2 = \frac{k}{m}$ y $2\alpha = \frac{\gamma}{m}$ para representar la frecuencia propia del oscilador sin amortiguamiento y la constante de amortiguamiento, respectivamente. F_0 representa a una fuerza externa adicional que provoca que el movimiento del oscilador además de amortiguado llegue a ser forzado.

Existen tres tipos de respuestas conforme a los valores de los coeficientes α y ω_0, y se detallan a continuación: (1) si $\alpha > \omega_0$ el sistema presenta un amortiguamiento supercrítico en donde el amortiguamiento domina a la frecuencia provocando que no exista oscilación; (2) si $\alpha = \omega_0$ el sistema presenta un amortiguamiento crítico del que se puede decir que es el punto de cambio entre oscilaciones y no oscilaciones; (3) si $\alpha < \omega_0$ el sistema presenta un amortiguamiento subcrítico en donde hay oscilaciones cuya frecuencia disminuye con el tiempo, ver [6].

Un modelo similar al dado por la ecuación (1.6) se hace presente en el estudio de un circuito RLC compuesto de un resistor, un conductor y un inductor, cuya solución buscada es la carga eléctrica x, ver [6]. Nótese además que en este caso $h(x, \dot{x}) = 2\alpha \dot{x} + \omega_0^2 x$, con $F_0 = 0$.

1.1.2. Oscilador de Duffing

Para el oscilador de Duffing, la fuerza F_1 es obtenida por medio de un potencial[1] de la forma $V(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$, un potencial de doble pozo, mientras que la fuerza F_2 es resultante de la acción del medio viscoso con forma similar a la vista en (1.5). Con la correspondiente ecuación diferencial de segundo orden,

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F_0, \tag{1.7}$$

en donde δ depende del fluido, y cuya dinámica puede ser forzada por medio de la acción de una fuerza F_0 cuando ésta no es nula.

Este oscilador se presenta en un sistema mecánico conformado por una viga de acero con su parte superior fija colocada verticalmente que es forzada por una fuerza periódica, cuyo extremo inferior oscila entre dos imanes ubicados en el piso, uno a cada lado de la viga, hasta detenerse por la acción del amortiguamiento. Un hecho importante de este oscilador se da cuando la magnitud de la fuerza de forzamiento es suficientemente grande, lo que provoca un comportamiento caótico, sin embargo, para una explicación más detallada el lector puede revisar [1, 18]. Además, que en este caso se verifica que $h(x, \dot{x}) = \delta\dot{x} + ax + bx^3$ con $F_0 = 0$.

1.2. El Fenómeno Físico

En esta sección se presenta una descripción del fenómeno físico que da lugar al modelo matemático de la difusión. Para este fin, se puede considerar el movimiento microscópico interior de un sistema conformado por partículas suspendidas en un fluido viscoso en el que se hacen las siguientes consideraciones, ver [10],

1. Las moléculas del fluido son más ligeras que las partículas suspendidas.
2. Las moléculas del fluido colisionan con las partículas suspendidas y estas colisiones se mantienen a lo largo del tiempo.

[1] Si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son conservativas, se puede definir la energía potencial V, y gracias a la descomposición de Helmholtz si se conoce la energía potencial, entonces, la fuerza se puede escribir a partir del gradiente (∇) del potencial por la relación:

$$F = -\nabla V.$$

Además, un ejemplo de fuerzas conservativas lo son la gravitatoria y la elástica.

3. El movimiento que describen las partículas suspendidas es continuo y errático que no cesa a lo largo del tiempo.

4. El movimiento se verá incrementado si la temperatura del fluido lo hace.

Para una de estas partículas, cuya posición inicial es x_0 al instante t_0, se nota lo siguiente:

1. La variable $X(t)$ representará su desplazamiento a partir de su posición inicial x_0.

2. La expresión $\sigma(x,t)$ mide el efecto que ejerce la temperatura sobre una determinada posición x al instante t.

3. La velocidad que presenta el fluido en una posición x al instante t, está gobernado por $\mu(x,t)$, que puede ser visto como el efecto del medio viscoso sobre la partícula.

Dentro de un intervalo de tiempo $[t, t+\triangle]$, por las consideraciones anteriores, el desplazamiento realizado por la partícula es obtenido a por medio del siguiente esquema: (1) el desplazamiento resultante debido a las colisiones, está dado por,

$$\sigma(x,t)[B(t+\triangle) - B(t)].$$

en donde B representa una variable aleatoria, en este caso un movimiento Browniano, (2) el desplazamiento resultante de la partícula producto de la acción del fluido, está dado por,

$$\mu(x,t)\triangle.$$

Por tanto, el desplazamiento total a partir de la posición inicial x_0 al instante t_0, dentro de este intervalo es,

$$X(t+\triangle) - x \approx \mu(x,t)\triangle + \sigma(x,t)[B(t+\triangle) - B(t)]. \tag{1.8}$$

Gracias a esta última ecuación a partir de una posición inicial x_0, en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño, el desplazamiento medio y el segundo

momento del desplazamiento[2], están dados por,

$$E[(X(t+\triangle)-X(t))|X(t)=x_0] \approx \mu(x,t)\cdot\triangle, \tag{1.9}$$

$$E[(X(t+\triangle)-X(t))^2|X(t)=x_0] \approx \sigma^2(x,t)\cdot\triangle, \tag{1.10}$$

respectivamente. Estas cantidades son proporcionales al tamaño del intervalo de tiempo $\triangle$; con $\mu(x,t)$ y $\sigma(x,t)$ como sus constantes de proporcionalidad. La correspondiente ecuación diferencial estocástica se la encuentra vía medios heurísticos a partir de la relación (1.8) reemplazando $\triangle$ por dt, $\triangle B = B(t+\triangle)-B(t)$ por $dB(t)$ y $X(t+\triangle)-X(t)$ por $dX(t)$, esto es,

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dB(t). \tag{1.11}$$

1.3. Oscilador amortiguado Aleatorio

A partir de la ecuación (1.2), a la que se le introduce una perturbación aleatoria por medio de un ruido blanco W, se obtiene la ecuación equivalente con un término aleatorio, dada por:

$$\ddot{X} + h(x,\dot{X}) = W, \tag{1.12}$$

la cual será relacionada con los osciladores vistos antes, y que toma un significado más riguroso por medio de su representación como un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô de primer orden,[3] lo que se logra por medio del cambio de variable tal y como se hizo antes obteniendo, así que el nuevo sistema tenga presente en su formulación un ruido blanco; se estudiarán algunas propiedades probabilísticas que presenta la ecuación (1.12) que son consecuencia de la acción del término aleatorio que ha sido introducido.

[2]Es importante notar que para obtener las expresiones del desplazamiento medio y el segundo momento del desplazamiento se han utilizado propiedades del movimiento Browniano, como lo son que su media es cero y que su segundo momento en un tiempo τ es exactamente este tiempo, propiedades que serán estudiadas con mayor detalle en el siguiente capítulo; y, que se ha despreciado al término $\triangle^2$.

[3]En este punto cabe recalcar que en determinados casos una representación por medio de ecuaciones diferenciales de Stratonovich es la representación adecuada, sin embargo, el poder trabajar con ambas clases de ecuaciones es posible debido al teorema de conversión de una ecuación diferencial estocástica de Stratonovich a otra ecuación diferencial estocástica de Itô, ver el apéndice [A].

1.3.1. Propiedades probabilísticas

Dentro de esta sección se revisa de una forma breve las propiedades probabilísticas a ser estudiadas, para lo cual se inicia suponiendo que X es una variable aleatoria definida sobre un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $F(x)$ su función de distribución con función densidad $f(x)$.

DEFINICIÓN 1.1 (Momentos de orden s)**.** *EL momento de orden s de X está definido por ([8], p. 49):*

$$E[X^s] = \mu_s = \int_{\mathbb{R}} x^s dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x^s f(x) dx. \tag{1.13}$$

DEFINICIÓN 1.2 (Momento central de orden s)**.** *EL momento central de orden s de X está definido por ([8], p. 49):*

$$E[(X - \mu_1)^s] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^s dF(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^s f(x) dx. \tag{1.14}$$

Observaciones: (1) Si X es integrable a μ_1 se la conoce como la media o esperanza de X y representa el promedio ponderado de los posibles valores que la variable aleatoria tome. (2) La varianza de X dada por $\sigma^2 = E[(X - \mu_1)^2] = Var(X)$, es una medida del grado de dispersión de los valores que la variable ha tomado. (3) El coeficiente de asimetría de X, dado por $\gamma_1 = \frac{E[(X-\mu_1)^3]}{\sigma^3}$, es una medida de la simetría de la distribución de probabilidad de la variable respecto a su media, existen tres tipos de asimetría: asimetría negativa ($\gamma_1 < 0$), cuando la cola de la distribución es más larga a la izquierda es decir, hay más valores separados de la media a la izquierda; simetría, cuando hay el mismo número de valores tanto a la izquierda como a la derecha de la media ($\gamma_1 = 0$); asimetría positiva ($\gamma_1 > 0$), cuando la cola de la distribución es más larga a la derecha es decir, hay más valores separados de la media a la derecha. El calcular este coeficiente permite conocer cómo se encuentran distribuidos los valores de la variable alrededor de su media. (4) El coeficiente de curtosis de X, dado por $\gamma_2 = \frac{E[(X-mu_1)^4]}{\sigma^4}$, es una medida de la concentración de los datos alrededor de la media, es común medir este coeficiente por medio de la expresión $g_2 = \gamma_2 - 3$ para establecer una comparación respecto a una variable con distribución normal, para la cual el valor de su coeficiente de curtosis es de 3. Se presentan tres casos: distribución mesocúrtica ($\gamma_2 = 3$ y $g_2 = 0$) la distribución es similar a una distribución normal; distribución leptocúrtica ($\gamma_2 > 3$ y $g_2 > 0$) la distribución presenta una forma más puntiaguda, hay una mayor concentración de datos alrededor de su media; distribución platicúrtica ($\gamma_2 < 3$ y $g_2 < 0$) la distribución presenta una forma menos puntiaguda, hay una menor concentración de datos alrededor de su

media. Es decir, el coeficiente de curtosis nos permite conocer el grado de dispersión de los valores de la variable respecto a su media. Ver [17].

Capítulo 2

Movimiento Browniano

En este capítulo se realizará una breve revisión sobre los procesos estocásticos, dentro de la cual se expondrá su definición y tipos de procesos estocásticos; un estudio sobre martingalas y algunas desigualdades relacionadas, para luego realizar un estudio sobre el movimiento Browniano enfocado en sus propiedades de distribución y de diferenciación.

2.1. Procesos estocásticos

DEFINICIÓN 2.1 (Proceso Estocástico)**.** *Si $\boldsymbol{X}(t)$ es una variable aleatoria a valores en $\mathbb{R}^d$ sobre el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ para cada $t \in I$, esto es, $\boldsymbol{X}(t) \in \mathcal{F}$ para cada $t \in I$, entonces $\boldsymbol{X}$ se dice un proceso estocástico ([8], p. 104).*

A $\mathbf{X}$ se la considera una función $\mathbf{X}\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ donde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio probabilístico con $I \subset \mathbb{R}$ y definido por $(t, \omega) \mapsto \mathbf{X}(t, \omega)$, además, se utilizará la notación $\mathbf{X}(t)$ para $\mathbf{X}(t, \cdot)$. Un proceso estocástico puede ser visto como la colección de variables aleatorias indexadas por t y notado por $\{\mathbf{X}(t) : t \in I\}$ en donde cada $\mathbf{X}(t)$ es $\mathcal{F}$-medible para cada $t \in I$, visto de esta forma cabe recalcar que si el conjunto de índices I es finito o numerable a X se lo dice un proceso estocástico a tiempo discreto, y si I es no numerable se dirá en cambio que el proceso estocástico es a tiempo continuo. Por ejemplo, $I = [0, t]$, para $t > 0$. Además, se debe tomar en cuenta que si $d > 1$ a $\mathbf{X}$ también se lo conoce como vector estocástico, mientras que en el caso $d = 1$ se dirá que es un proceso estocástico unidimensional y se notará por X, ver [8].

DEFINICIÓN 2.2 (Proceso de Markov)**.** *Un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$ a valores en $\mathbb{R}^d$ se*

dice de Markov si satisface lo siguiente ([13], p. 4):

$$P[\boldsymbol{X}(t) \in A \mid \mathcal{F}_s] = P[\boldsymbol{X}(t) \in A \mid \boldsymbol{X}(s)] \tag{2.1}$$

para todo $t, s \in I$, con $s \leq t$, y $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto medible.

DEFINICIÓN 2.3 (Proceso con Incrementos Independientes, Proceso con Incrementos Independientes Estacionarios)**.** *Un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$ a valores en $\mathbb{R}^d$ se dice que tiene incrementos independientes si las variables aleatorias $\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}(v)$ y $\boldsymbol{X}(u) - \boldsymbol{X}(s)$, $s < u \leq v < t$, son independientes ([8], p. 122).*
Si $\boldsymbol{X}$ tiene incrementos independientes y la distribución de $\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}(s)$, $s \leq t$, dependen solo del tiempo de transición $t - s$ en lugar de los valores de los tiempos s y t, entonces $\boldsymbol{X}$ se dice que tiene incrementos independientes estacionarios ([8], p. 122).

DEFINICIÓN 2.4 (Proceso Gaussiano)**.** *Un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$ se dice que es Gaussiano si todas las distribuciones finito dimensionales son Gaussianas ([8], p. 124).*

En un proceso de Markov, para hacer futuras predicciones del fenómeno que el proceso $\mathbf{X}$ represente, no se necesita toda la información o historia que se ha obtenido hasta el instante s, sino solamente la información al instante s. Este tipo de proceso es de gran importancia en el estudio de los procesos de difusión. Para un lector interesado en profundizar en la teoría de procesos estocásticos se recomienda revisar los libros [4, 8, 11].

2.2. Martingalas

DEFINICIÓN 2.5 (Filtración y Espacio Filtrado)**.** *Una colección de sub σ-álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $0 \leq s \leq t$, es llamada una filtración en $(\Omega, \mathcal{F})$. Un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dotado de una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se dice un espacio probabilístico filtrado y es notado por $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Un proceso estocástico $\boldsymbol{X}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, o $\mathcal{F}_t$-adaptado, o simplemente adaptado si $\boldsymbol{X}(t) \in \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$ ([8], p. 107).*

Si para todo $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s\geq t} \mathcal{F}_s$, la filtración se dice continua a la derecha; $\mathcal{F}_0$ es la σ-álgebra que contiene a los eventos de medida nula y uno. Un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice completo si su medida de probabilidad es completa o equivalentemente, si $A \subset F$, $F \in \mathcal{F}$ con $P(F) = 0$, implica que $A \in \mathcal{F}$. Se considerará

que se trabaja con un espacio probabilístico completo.

DEFINICIÓN 2.6 (Filtración Natural)**.** *Sea* $\{\boldsymbol{X}(t), t \geq 0\}$ *un proceso estocástico definido sobre el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. La filtración natural*

$$\mathcal{F}_t^{\boldsymbol{X}} = \sigma(\boldsymbol{X}(s), 0 \leq s \leq t) = \sigma(\bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma(\boldsymbol{X}(s))) \tag{2.2}$$

de X *es la más pequeña filtración con respecto a la cual* $\boldsymbol{X}$ *es adaptado ([8], p. 107).*

Un proceso estocástico siempre es adaptado a su respectiva filtración natural, además al menos que se diga lo contrario en adelante se entenderá que se trabaja con la filtración natural respecto del proceso con el cual se trabaja. Una filtración puede entenderse como la información o historia que se ha generado o se ha obtenido del proceso estocástico a lo largo del tiempo, y, que se va guardando en cada $\mathcal{F}_t$ para cada instante $t \geq 0$, con esta información se puede establecer ciertas condiciones o propiedades que el proceso verifica, siendo, una de las más importantes el poder decir cuando el proceso alcanza un cierto valor o una cierta barrera, para entender esto último de una mejor manera se define a continuación el concepto de tiempo de parada.

DEFINICIÓN 2.7 (Tiempo de Parada)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ *un espacio probabilístico filtrado y* $T : \Omega \to [0, \infty]$ *una variable aleatoria definida sobre este espacio. Si* $\{\omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *para todo* $t \geq 0$*, entonces* T *se dice un* $\mathcal{F}_t$*-tiempo de parada o tiempo de parada ([8], p. 114).*

2.2.1. Definición y propiedades

DEFINICIÓN 2.8 (Martingala)**.** *Sea* X *un proceso estocástico a valores reales definido sobre el espacio probabilístico filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$*, se dice que* X *es una* $\mathcal{F}_t$*-martingala si verifica las siguientes condiciones ([8], p. 169):*

$$E[\mid X(t) \mid] < \infty, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{2.3}$$

$$X \text{ es } \mathcal{F}_t \text{ adaptado.} \tag{2.4}$$

$$E[X(t) \mid \mathcal{F}_s] = X(s), \text{ c. s. para todo } s \leq t. \tag{2.5}$$

Si en la ecuación (2.5) se intercambia el símbolo $=$ por $\leq$ o por $\geq$ se dice que X es

una $\mathcal{F}_t$-supermatingala o $\mathcal{F}_t$-submartingala, respectivamente. Y si $X \in L_2$ entonces se dirá que es una $\mathcal{F}_t$-martingala cuadrado integrable, de manera similar para los casos de una supermatingala y para una submartingala, ver [8].

Una martingala puede ser vista como el modelo de un juego de apuestas, en donde a la variable aleatoria $E[X(t) \mid \mathcal{F}_s]$ se la considera como la ganancia media que se espera obtener en la apuesta t dadas las apuestas hechas hasta el instante s y a $X(s)$ como la cantidad que el Jugador tiene al finalizar la apuesta s, siendo los casos de una submartingala, una martingala y una supermatingala la representación de un juego favorable, indiferente y desfavorable para un jugador respectivamente, ver [8].

Se presenta un ejemplo típico en cuanto al concepto de martingalas el cual tiene que ver con una caminata aleatoria, la cual es considerada el equivalente discreto al Movimiento Browniano unidimensional, con la adaptación a un juego de apuestas, para un lector interesado se recomienda revisar [4, 13].

EJEMPLO 1. Se considera un juego de apuestas en donde el 'Jugador' inicialmente tiene una cantidad de x unidades monetarias, el juego consiste en lo siguiente: En cada apuesta se debe apostar una unidad y se tiene dos posibilidades ganar una unidad o perderla, se supondrá que en todo momento puede realizarse la apuesta. Este juego está relacionado con martingalas.

En este ejemplo además se mostrará la conexión del juego de apuestas con la caminata aleatoria[1], en donde una partícula con posición inicial x, puede moverse un espacio hacia su izquierda o derecha, en cada tiempo t. En efecto, sean Y_i *v.a.i.i.d.* que solamente pueden tomar dos valores $+1$ o -1 con probabilidad $P[Y_i = +1] = p$ y $P[Y_i = -1] = 1 - p$, para $0 < p < 1$. Se define la variable X_n por:

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \tag{2.6}$$

con $X_0 = x \in \mathbb{R}$, la cual se puede interpretar como la cantidad de unidades que tiene el 'Jugador' en la apuesta n. Nótese que X_n es un proceso de Markov, ya que la cantidad de unidades que se espera obtener al fin de la apuesta $n + 1$ depende únicamente de la cantidad de unidades que se tenga al finalizar la apuesta n. La

[1]Para un lector interesado en este tema puede remitirse a [13]. En este caso se tomarán tanto al tamaño de los pasos como los intervalos de tiempo unitarios, lo que no necesariamente es así.

probabilidad de transición está dada por:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = \begin{cases} p & \text{si} \quad j = k+1 \\ 1-p & \text{si} \quad j = k-1 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \ldots$
Se verifica que $E[X_n] = x + n(2p-1)$, ya que $E[Y_1] = 2p - 1$. Se mostrará que bajo ciertas condiciones se tiene que X_n es una martingala, submartingala o supermatingala. A continuación, se demuestra que se verifican las condiciones (2.3) y (2.4) de la definición de martingala:

- $E[\mid X_n \mid] \leq \mid x \mid + \sum_{i=1}^{n} E[\mid Y_i \mid] = \mid x \mid + nE[\mid Y_1 \mid] < \infty$.
- Por su definición X_n es $\mathcal{F}_n$-medible, con $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

Ahora, para la tercera propiedad de la definición de martingala se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1} \mid X_n] \\ &= E[X_n + Y_{n+1} \mid X_n] \\ &= X_n + E[Y_{n+1}] \\ &= X_n + 2p - 1 \end{aligned}$$

Gracias a que X_n es un proceso de Markov, la linealidad de la esperanza condicional y por la hipótesis sobre las Y_i. En lo anterior, si se toma $p = 1/2$ se obtiene una martingala ya que en este caso $2p - 1 = 0$ y, además, se verifica que $E[X_n] = E[X_0]$, gracias a propiedades de la esperanza condicional; de igual manera si se toma $p < 1/2$, se verifica que $2p - 1 < 0$ obteniendo una supermatingala con $E[X_n] \leq E[X_0]$; y, cuando se toma $p > 1/2$ se obtiene $2p - 1 > 0$, dando como resultado una submartingala donde $E[X_n] \geq E[X_0]$.
Para la simulación de estas tres situaciones se ha implementado en MATLAB una función que se detalla a continuación:

- Se introducen el valor inicial X_0, el número de apuestas N (pasos) y la probabilidad p.
- Se inicializa el vector X que almacenará la caminata aleatoria, por medio del comando $X = X0 * ones(N+1, 1)$, y se crea un vector t que guarda el número de apuesta.

- Dentro de un lazo *for* para $i = 1, 2, \ldots N$, en cada apuesta se genera un número aleatorio con distribución uniforme en $[0, 1]$, por medio del comando $unifrnd(0, 1)$ de MATLAB y se lo compara con el valor de la probabilidad p, si es mayor se ha ganado ($z = 1$), caso contrario se ha perdido ($z = -1$). Se actualiza el término $X(i + 1) = X(i) + z$, en donde se almacena la caminata aleatoria.

- Se realiza un gráfico t vs X.

```
function [X] = Simu_cam_ale(X0,N,p)
X=X0*ones(N+1,1); t=0:1:N;
for i=1:N
    num_ale=unifrnd(0,1);
    if num_ale<p
        z=-1;
    else
        z=1;
    end
    X(i+1)=X(i)+z;
end
plot(t,X)
```

Figura 2.1: Código para el juego de apuesta.

En las figuras 2.2, 2.3 y 2.4, se simulan una trayectoria de una martingala (un juego indiferente), una supermatingala (un juego desfavorable) y una submartingala (un juego favorable). En cada caso se ha iniciado con el valor inicial $X_0 = 10$ unidades, considerando $N = 100$ pasos (apuestas), con probabilidades $p = 0{,}5$, $p = 0{,}3$ y $p = 0{,}8$, respectivamente, acordes a los posibles escenarios a los que el 'Jugador' puede encontrar, en donde se ha asumido que se concede un préstamo cada vez que se necesite.

2.2.2. Desigualdades para martingalas

PROPOSICIÓN 2.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Si X es una $\mathcal{F}_t-$martingala y $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función convexa tal que $E[|\varphi(X(t))|] < \infty$, $t \geq 0$, entonces ([8], p. 176)*

$$E[\varphi(X(t))|\mathcal{F}_s] \geq \varphi(X(s)),\ s \leq t. \tag{2.7}$$

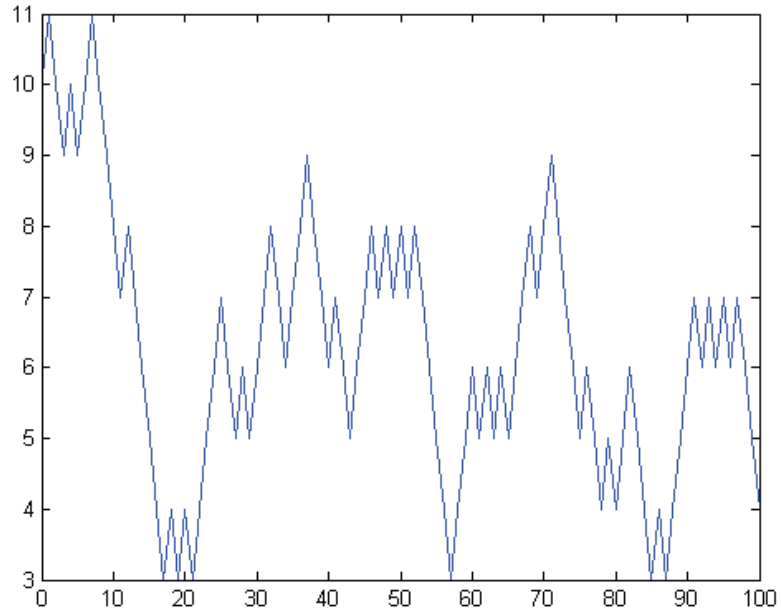

Figura 2.2: Simulación de una trayectoria de una martingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0{,}5$ para $N = 100$ pasos.

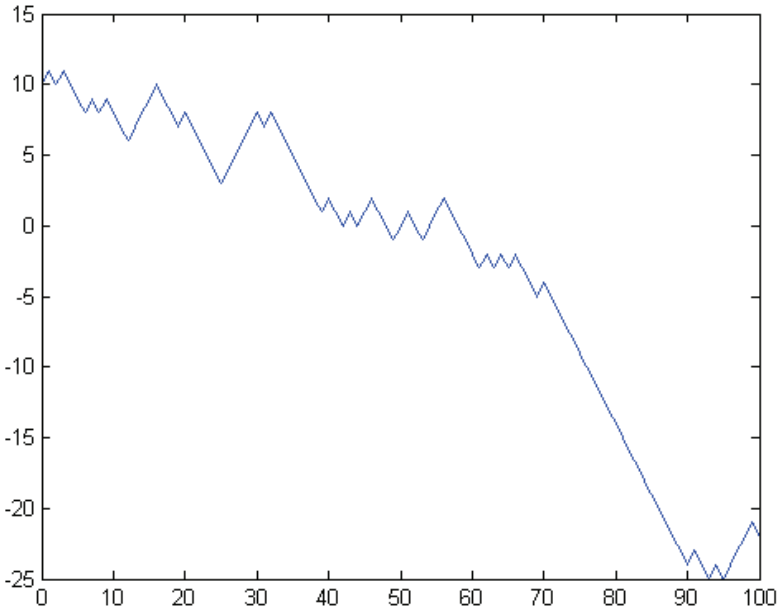

Figura 2.3: Simulación de una trayectoria de una supermatingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0{,}3$ para $N = 100$ pasos.

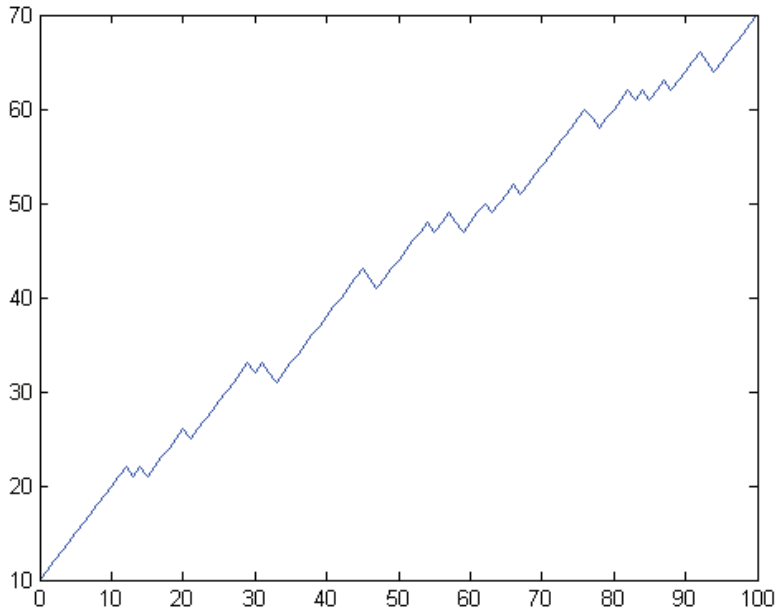

Figura 2.4: Simulación de una trayectoria de una submartingala a partir de una caminata aleatoria con valor inicial $X_0 = 10$ y probabilidad $p = 0{,}8$ para $N = 100$ pasos.

PROPOSICIÓN 2.2. *Si X es una $\mathcal{F}_t-$submartingala continua a la derecha, $0 < \tau$, y $F \subset [0, \tau]$ un conjunto finito, entonces para cada $x > 0$ se tiene ([8], p. 177)*

$$P(\sup_{0\leq t\leq \tau}\{X(t)\} \geq x) \geq E[X(\tau)^+]/x, \tag{2.8}$$

$$P(\inf_{0\leq t\leq \tau}\{X(t)\} \leq -x) \geq (E[X(\tau)^+] - E[X(0)])/x. \tag{2.9}$$

2.3. Movimiento Browniano o proceso de Wiener

En una investigación sobre la reproducción de plantas, el biólogo inglés, Robert Brown (1828), reportó el movimiento de partículas de polen suspendidas en un fluido en donde dos de estas partículas se mueven de una manera irregular e independiente a pesar de su cercanía, abriendo así el camino a futuras investigaciones que se centrarán en estudiar este extraño fenómeno, sin embargo, cabe recalcar que, aunque Brown no fue el descubridor del movimiento, más bien el primero en reportarlo, es común referirse al fenómeno físico como un movimiento Browniano.

En el año de 1905, el mismo en el cual Albert Einstein había descubierto la teoría especial de la relatividad y propuesto la noción del fotón. Dentro de la búsqueda de hechos que garanticen la existencia de átomos, Einstein estudió el movimiento de partículas microscópicas suspendidas en un medio viscoso abiertas a ser observadas, basándose en la mecánica estadística y la teoría cinético molecular lo que según sus palabras se dieron de manera independiente a los avances realizados hasta ese entonces respecto al movimiento Browniano del que no había escuchado hablar antes. A pesar de esto último, los resultados de Einstein lograron dar una representación física al movimiento Browniano relacionándolo con la ecuación de difusión por medio de su densidad de probabilidad de transición de una posición a otra, determinando, además el coeficiente de difusión al tratar a las partículas suspendidas como moléculas de un gas.

En 1923 Norbert Wiener, matemático estadounidense, demostró la existencia y unicidad de un proceso estocástico que verificaba las condiciones físicas establecidas para un movimiento Browniano razón por la cual para remitirse al proceso estocástico se utiliza el término proceso de Wiener, sin embargo, es común mencionar tanto al fenómeno físico como al proceso por movimiento Browniano, [10].

2.3.1. Definición y propiedades de distribución

DEFINICIÓN 2.9 (Movimiento Browniano o Proceso de Wiener)**.** *Sea* $\{B(t) : t \geq 0\}$ *un proceso estocástico a valores en* $\mathbb{R}$ *definido sobre el espacio probabilístico* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, se dice que es un movimiento Browniano o Proceso de Wiener unidimensional si satisface las siguientes condiciones:*

1. $B(0) = 0$ *c. s.*
2. *Sean* $0 \leq s < t$*, el incremento* $B(t+s) - B(s)$ *tiene distribución Gaussiana con media* 0 *y varianza* $\sigma^2 t$*, para alguna constante de varianza* $\sigma > 0$*.*
3. *Tiene incrementos independientes.*
4. *Tiene trayectorias continuas c. s.*

Es importante notar, que si en la definición se toma $\sigma = 1$, entonces, se dice que $B(t)$ es un movimiento Browniano estándar. A partir de este punto, al menos que se especifique lo contrario, se considerará $\sigma = 1$ y se representará por B al

movimiento Browniano. Dado que a $B(t)$ se lo puede interpretar como la posición de una partícula al instante t, en la definición del movimiento Browniano se puede tomar $B(0) = x \in \mathbb{R}$ siendo en este caso representado por $\{B^x(t) : t \geq 0\}$ donde $B^x(t) = x + B(t)$, y se lo dirá un movimiento Browniano que inicia en x, ver [13]. Respecto a su distribución puede verse que, para un incremento,

$$B(t+s) - B(s) \sim \mathcal{N}(0,t) \tag{2.10}$$

esto es, un movimiento Browniano tiene incrementos independientes estacionarios. Adicionalmente, si en la expresión anterior se toma $s = 0$, se verifica que $B(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$, es decir, es una variable Gaussiana y por tanto se verifica que su densidad de transición[2] para ir de una posición y a una posición x al instante t está dada por:

$$f(t,x;y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \tag{2.11}$$

y si en la ecuación (2.11) el movimiento inicia en la posición $y = 0$, para cada instante $t > 0$ se tiene la función de densidad de la variable Gaussiana:

$$f_t(x) = f(t,x;0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{2.12}$$

En la figura 2.6 se puede apreciar una simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional en un intervalo de tiempo $[0,1]$, para la cual, se ha implementado en MATLAB un código, del que puede notarse lo siguiente:

- Discretiza el intervalo de tiempo $[0,1]$ en $N = 500$ nodos, con tamaño $dt = T/(N-1)$.
- Inicializa al movimiento Browniano en cero esto es, $B(1) = 0$, del vector B=[], que almacena al movimiento.
- Dentro de un lazo for actualiza, el valor de la trayectoria $B(i+1) = B(i) + sqrt(dt) * randn$, en cada nodo i, para el cual se genera un número aleatorio por medio del comando de MATLAB, $randn$, que al multiplicarlo por $sqrt(dt)$, produce un número aleatorio con distribución normal de media cero y varianza

[2]Para una lectura más detallada se recomienda al lector ir al libro [9].

dt, lo que además asegura que se han de generar incrementos independientes[3].

- Realiza un gráfico t vs B, en el cual, MATLAB ha de unir los puntos $(t(i), B(i))$, para $i = 0, 1, \ldots, N$, por interpolación lineal.

```
%Valores para los parámetros
    T=1; N=500;
% Simulación de la trayectoria
    B = []; t = []; dt = T/(N-1);
    t = [0:dt:T]; % Vector de tiempos [0,T]
    B(1) = 0; % B_{0}=0
    for i = 1:N-1
        B(i+1) = B(i) + sqrt(dt)*randn; %B(i)=B(t(i))
    end
    figure
    plot(t,B)
    xlabel('t')
```

Figura 2.5: Código para simular una trayectoria de un movimiento Browniano

DEFINICIÓN 2.10 (Movimiento Browniano multidimensional)**.** *Sean $B^i(t), i = 1, \ldots, d$ movimientos Brownianos unidimensionales independientes, se dice que $\boldsymbol{B}(t) = (B^1(t), \ldots, B^d(t))$ es un movimiento Browniano multidimensional.*

En la figura 2.8 se simula una trayectoria de un movimiento Browniano en dos dimensiones conformado por dos movimientos Brownianos unidimensionales independientes, y de igual manera en la figura 2.9 se presenta una simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano en tres dimensiones, conformado en este caso por tres movimientos Brownianos unidimensionales independientes, todos ellos sobre el intervalo de tiempo $[0, 1]$. Para la simulación se ha modificado el código de la figura 2.5 presentado para la simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano con el objetivo de obtener a la vez la simulación de tres movimientos Brownianos unidimensionales. El cual puede verse a continuación:

[3]El comando *randn* genera números aleatorios independientes con distribución normal de media cero y varianza uno.

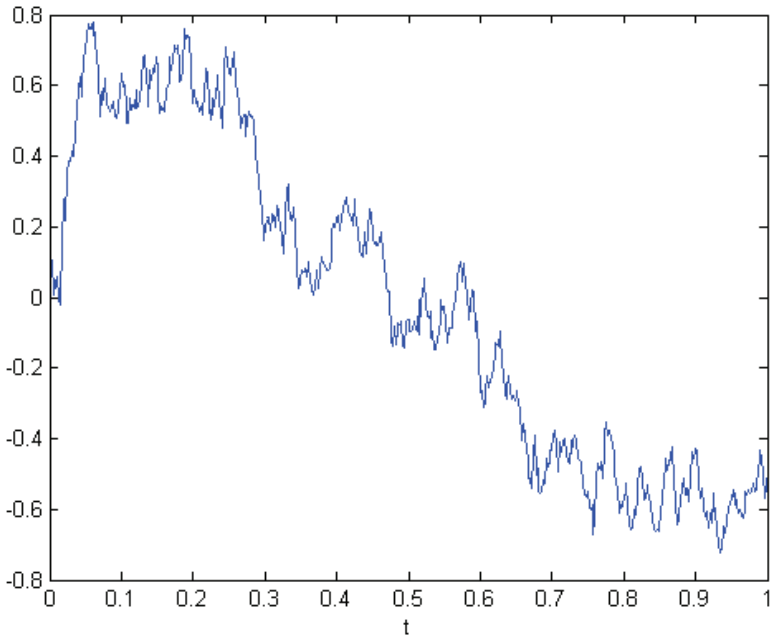

Figura 2.6: Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional.

```
T=1; N=500; dt = T/(N-1); d=3;   % dimension
B=zeros(N,d); % B(0)=(0)
for j=1:d
    for i=1:N-1
        B(i+1,j)=B(i,j)+sqrt(dt)*randn;
    end
end
figure
plot(B(:,1),B(:,2))
figure
plot3(B(:,1),B(:,2),B(:,3))
```

Figura 2.7: Código para simular una trayectoria de un movimiento Browniano en dos y en tres dimensiones.

Para un movimiento Browniano pueden demostrarse los siguientes resultados: (1) su covarianza está dada por $cov(s,t) = s \wedge t$ para todo $s, t \geq 0$, (2) es un proceso Gaussiano y (3) es un proceso de Markov. La demostración de estos hechos puede ser encontrada en los libros [4, 9, 13].

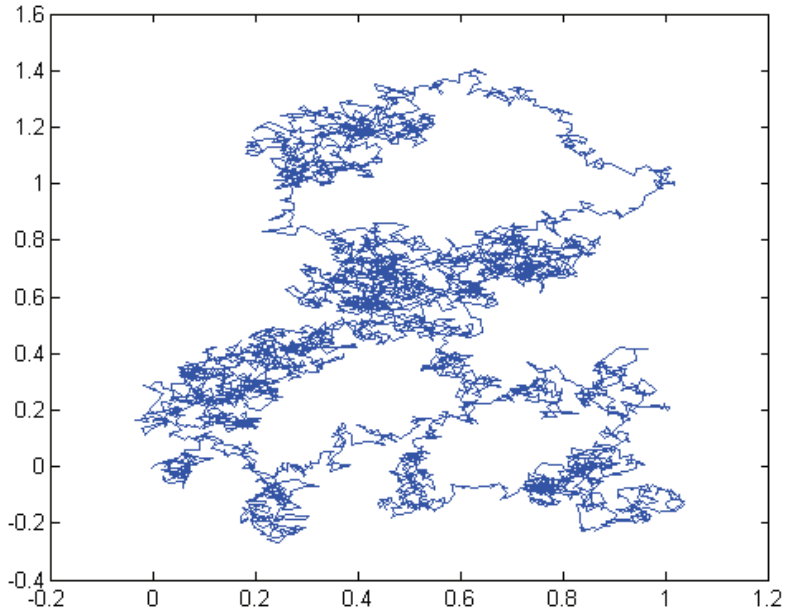

Figura 2.8: Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano en dos dimensiones.

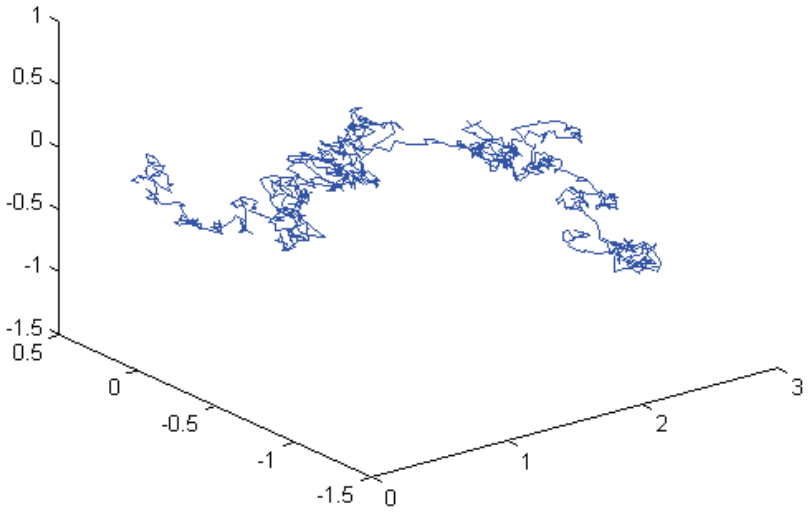

Figura 2.9: Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano en tres dimensiones.

2.3.2. El movimiento Browniano como una martingala

PROPOSICIÓN 2.3. *EL movimiento Browniano es una L_2-martingala.*

Demostración. Se considera su filtración natural, es decir, $\mathcal{F}_t = \sigma(B(s) : 0 \leq s \leq t)$ y junto a las propiedades del movimiento Browniano y la desigualdad de Cauchy se verifican las condiciones (2.3) y (2.4) de la definición de martingala. Además, para un $s \leq t$,

$$\begin{aligned} E[B(t)|\mathcal{F}_s] &= E[B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s] + E[B(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B(t) - B(s)] + B(s) = B(s) \end{aligned}$$

dado que $B(t) - B(s)$ es independiente de $B(v)$ para todo $v \leq s$, y por las propiedades de la esperanza condicional. Ya que $(E[B^2(t)])^{1/2} = t^{1/2}$, se sigue el resultado de ser una L_2-martingala. □

Ciertos procesos obtenidos a partir de un movimiento Browniano también son martingalas, como por ejemplo los procesos $\{B^2(t) - t : t \geq 0\}$, $\{U(t) = \frac{1}{b}B(b^2t) : t \geq 0\}$ para un $b > 0$ y $\{V(t) = B(t+s) - B(s) : t \geq 0\}$ con un $s \geq 0$ dado. Una demostración de este hecho se la puede encontrar en [13]. El porqué es importante resaltar este hecho se debe a que el primer de estos procesos es utilizado para determinar cuándo un proceso estocástico X es un movimiento Browniano, mientras que los otros dos son utilizados para obtener un resultado respecto a la no diferenciabilidad del movimiento Browniano, ver [9,13]. A continuación, un ejemplo que permite ver cómo se relaciona al movimiento Browniano con el concepto de submartingala.

EJEMPLO 2. Para un movimiento Browniano B, se verifican:

1. $e^{B(t)}$ es una submartingala,
2. La probabilidad de que el mayor valor de $e^{B(t)}$ en $[0, \tau]$ exceda un valor $x > 1$, tiene como cota superior a $\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\frac{1}{\ln x}$.

En efecto, (1) nótese que si se considera la función $\varphi(x) = e^x$, al ser convexa y dado que $E[|\varphi(B(t))|] = E[e^{B(t)}] = M_{B(t)}(1) = e^{t/2} < \infty$ gracias a la función generadora de momentos [4] de $B(t)$, aplicando la proposición 2.1, se tiene que,

[4]Para el movimiento Browniano $B(t)$, su función generadora de momentos está dada por: $M_{B(t)}(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$.

$$E[\varphi(B(t))|\mathcal{F}_s] = E[e^{B(t)}|\mathcal{F}_s] \geq \varphi(B(s)) = e^{B(s)},$$

de lo cual se sigue que $e^{B(t)}$ es una $\mathcal{F}_t$-submartingala, en donde $\mathcal{F}_t$ es la filtración natural respecto al movimiento Browniano.
(2) Nótese que $\{\omega : e^{B(t,\omega)} \geq x\} = \{\omega : B(t,\omega) \geq \ln x\}$ para cada $x > 1$, entonces, por la proposición 2.2:

$$P(\sup_{0\leq t\leq\tau}\{e^{B(t)}\} \geq x) = P(\sup_{0\leq t\leq\tau}\{B(t)\} \geq \ln x) \leq E[B(\tau)^+]/\ln x.$$

Por ser un movimiento Browniano $B(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$, para cada $t \in [0,\tau]$, entonces, se tiene que,

$$P(B(t) \geq \ln x) = 1 - P(B(t) < \ln x) = 1 - \Phi(\ln x/\sqrt{2t}),$$

Además,

$$E[B(\tau)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_0^\infty y e^{-\frac{y^2}{2\tau}}dy,$$

si se utiliza el cambio de variable $u = e^{-y^2/2\tau}$, se obtiene el resultado:

$$E[B(\tau)^+] = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}},$$

gracias a estos cálculos se obtiene

$$1 - \Phi(\ln x/\sqrt{2t}) \leq \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\frac{1}{\ln x}. \tag{2.13}$$

Adicionalmente, en la figura 2.11 puede observarse lo establecido en (2), con $x \in [2,20]$ y $t \in [0,10]$, es decir, $\tau = 10$, para esto hemos utilizado el siguiente código en donde el comando $erf(x)$ calcula el valor de la distribución de una variable aleatoria normal estándar en x.

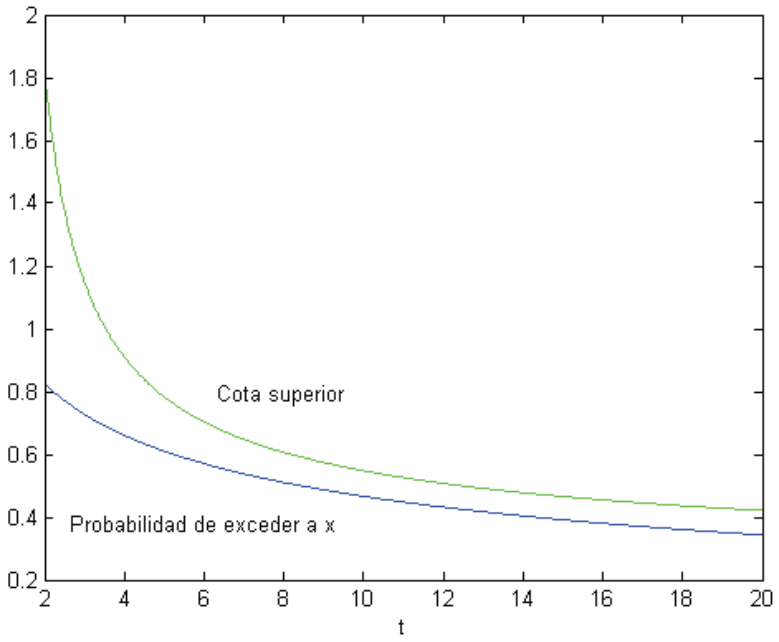

Figura 2.11: Probabilidad de que el supremo de $e^{B(t)}$ con $t \in [0,10]$ exceda a $x \in [2,20]$ y su cota superior $\frac{E[B(\tau)^+]}{\ln x}$, para $\tau = 10$.

```
x0=2; x1=20; tao=10; paso=1000; dx=(x1-x0)/paso; x=x0:dx:x1; A=[];
for i=1:paso+1
    A(i)=1-erf(log(x(i))/sqrt(2*tao));
end
B=sqrt(tao/(2*pi))*log(x).^-1;
plot(x,A,'b',x,B,'g');
xlabel('t')
```

Figura 2.10: Código para el ejemplo 2.

2.3.3. Diferenciabilidad y variación acotada

Una de las propiedades más relevantes respecto al movimiento Browniano es la no diferenciabilidad de sus trayectorias, ya que como se verá en el siguiente capítulo esto influirá en cuanto a la distinción entre integración en el sentido de Riemann-Stieltjes y otra clase de integración. Para llegar a este resultado es importante citar el siguiente teorema:

TEOREMA 2.4 (Teorema de caracterización de Paul-Levy)**.** *Un proceso estocástico* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *es un movimiento Browniano si y solo si ([13], p. 246)*

1. *Tiene trayectorias continuas c.s.*
2. $X(0) = 0$ *c.s.*
3. *Los procesos* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *y* $\{X^2(t) - t : t \geq 0\}$ *son martingalas.*

LEMA 2.5. *Para todo* $t \geq 0$*, el movimiento Browniano c.s. no es diferenciable en* t*.*

Una demostración de este hecho se puede encontrar en [13], en dicha demostración que los procesos $\{U_t = \frac{1}{b}B_{b^2t} : t \geq 0\}$ para un $b > 0$, y $\{V_t = B_{t+s} - B_s : t \geq 0\}$ son movimientos Brownianos, lo que se concluye por el teorema 2.4, es de importancia, ya que primero se demuestra la no diferenciabilidad de U en 0, para luego demostrar que esto implica la no diferenciabilidad de V en todo $t \geq 0$; adicionalmente, y de una manera gráfica puede remitirse a la figura 2.6 en donde se puede ver que sus trayectorias presentan picos o vértices en casi todos sus puntos.

A continuación, se revisan dos resultados importantes en el estudio del movimiento Browniano, el primero de ellos permitirá entre sus aplicaciones demostrar el segundo de estos resultados y facilitar cálculos en la integración estocástica, como se verá en el siguiente capítulo, entre otros; mientras que el segundo resultado será de gran interés al momento de definir una integral cuando ésta tenga a un movimiento Browniano como integrador.

LEMA 2.6. *Sea un* $T > 0$*, se considera a* $p_n = (0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \ldots t_{m_n}^{(n)} = T)$ *una sucesión de particiones del intervalo* $[0, T]$ *tal que:*

$$\triangle p_n = \sup_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \to 0, \tag{2.14}$$

cuando $n \to \infty$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)}))^2 = T, \tag{2.15}$$

en el sentido m. s., conocida como la variación cuadrática del movimiento Browniano.

Si se trabaja con una sucesión de particiones p_n tal que cada uno de sus elementos es un refinamiento se obtiene un resultado similar en el sentido *c.s.*, una

demostración de este hecho y del anterior se la puede encontrar en [8]. Tomando esto en cuenta se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.7. *El movimiento Browniano no es de variación acotada c.s..*

Demostración. Se supondrá la variación total del movimiento Browniano v_B finita, sea $p_n = (0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \ldots t_{m_n}^{(n)} = T)$ una sucesión de particiones uniformes de $[0, T]$ para algún $T \geq 0$, con la notación $\triangle B_k = B(t_k^{(n)}) - B(t_{k-1}^{(n)})$, se tiene,

$$\sum_{k=1}^{m_n} (\triangle B_k)^2 \leq \max_n | \triangle B_k | \sum_{k=1}^{m_n} | \triangle B_k | \leq \max_n | \triangle B_k | v_B \to 0,$$

por la continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano[5]. Lo que contradice que su variación cuadrática sea T, por tanto, el movimiento Browniano no es de variación acotada. □

Es importante notar que, debido a su no diferenciabilidad no se puede hablar de la derivada de un movimiento Browniano, sin embargo, se hablará del ruido blanco Gaussiano W, el cual es formalmente definido como la derivada del movimiento Browniano, y que está dado por la relación,

$$W(t) = \frac{dB(t)}{dt} = \dot{B}(t). \tag{2.16}$$

2.3.4. Procesos continuos obtenidos a través del movimiento Browniano

Se considera un movimiento Browniano unidimensional $\{B(t) : t \geq 0\}$, a continuación, algunos procesos estocásticos a tiempo continúo obtenidos a través de este proceso.

Puente Browniano. Es un proceso X definido por la siguiente ecuación:

$$X(t) = a + B(t) - t(B(1) - b + a), \tag{2.17}$$

[5]En el apéndice [A], se encuentra el criterio de Kolmogorov, el cual, aplicado al movimiento Browniano, establece que casi todas las trayectorias del movimiento Browniano son uniformemente continuas.

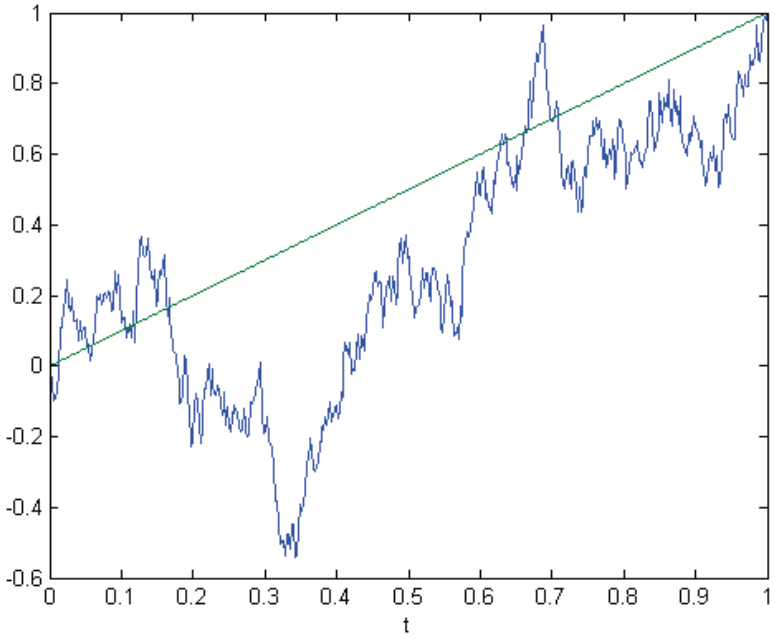

Figura 2.12: Simulación de una trayectoria de un puente Browniano que inicia en cero y termina en uno, es decir, $X(0) = 0$, $X(1) = 1$.

para $0 \leq t \leq 1$, en donde $X(0) = a$ y $X(1) = b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, con media:

$$E[X(t)] = a + t(b - a) \tag{2.18}$$

y covarianza:

$$cov(s, t) = s \wedge t - st. \tag{2.19}$$

En la figura 2.12 se simula una trayectoria del Puente Browniano en donde se ha tomado $a = 0$ y $b = 1$.

Movimiento Browniano con tendencia. Es un proceso Y definido por la siguiente ecuación:

$$Y(t) = \mu t + \sigma B(t), \tag{2.20}$$

para $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, con media:

$$E[Y(t)] = E[\mu t + \sigma B(t)] = \mu t \tag{2.21}$$

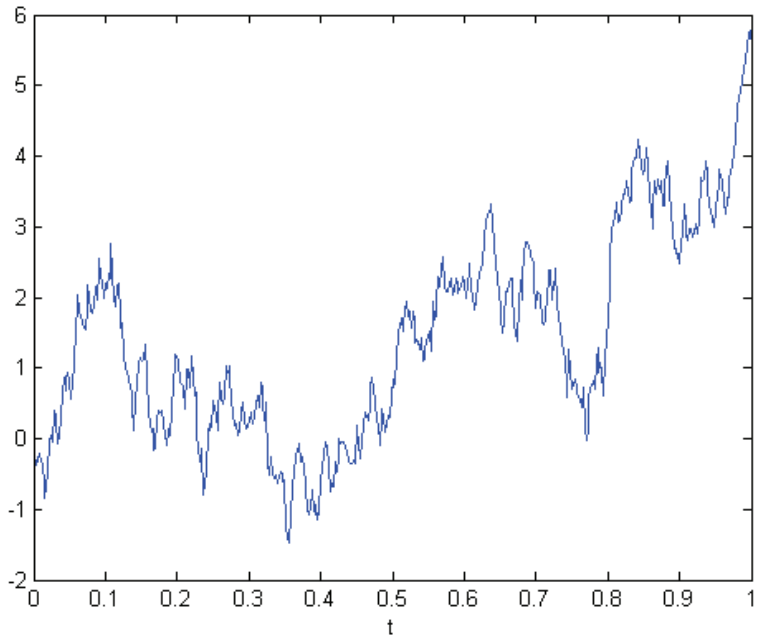

Figura 2.13: Simulación de una trayectoria de movimiento Browniano con tendencia con $\mu = 0{,}5$ y $\sigma = 5$.

y covarianza:

$$\begin{aligned} cov(s,t) &= E[(Y(t) - E[Y(t)])(Y(s) - E[Y(s)])] \\ &= \sigma^2 E[B(t)B(s)] = \sigma^2(s \wedge t). \end{aligned}$$

En la figura 2.13 se simula una trayectoria de un movimiento Browniano con tendencia en donde se ha tomado $\mu = 0{,}5$ y $\sigma = 5$, mientras que en la figura 2.14 se presenta una simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano con tendencia en donde se ha tomado $\mu = 5$ y $\sigma = 0{,}5$.

Movimiento Browniano Geométrico Es un proceso Z definido por la siguiente ecuación:

$$Z(t) = e^{\gamma t + \delta B(t)}, \tag{2.22}$$

para $t \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, con media:

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[e^{\gamma t + \delta B(t)}] \\ &= e^{\gamma t} E[e^{\delta B(t)}] e^{\gamma t + \frac{\delta^2 t}{2}} \end{aligned}$$

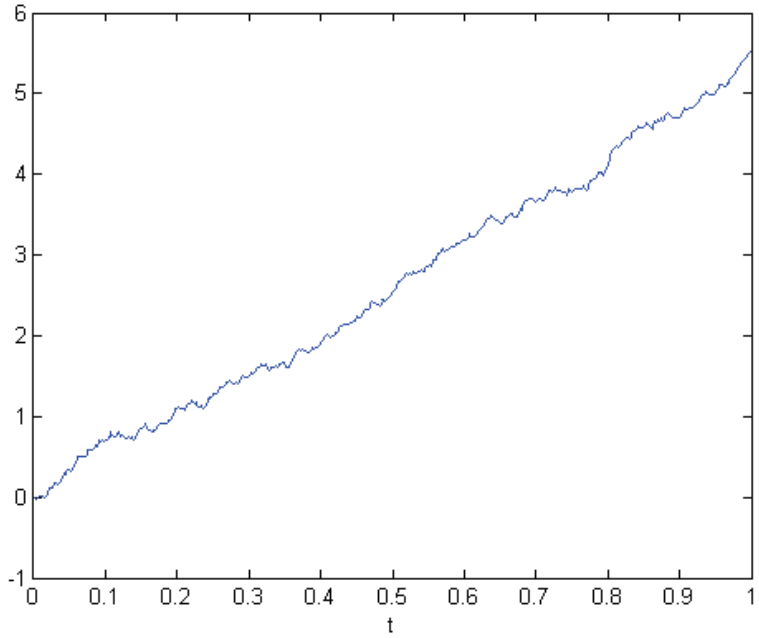

Figura 2.14: Simulación de una trayectoria de movimiento Browniano con tendencia con $\mu = 5$ y $\sigma = 0{,}5$.

y covarianza:

$$\begin{aligned} cov(s,t) &= e^{\gamma(t+s)}E[e^{\delta(B(t)+B(s))}] - e^{(\gamma+\frac{\delta^2}{2})(t+s)} \\ &= e^{(\gamma+\frac{\delta^2}{2})(t+s)}(e^{-\frac{\delta^2}{2}(t+s)}E[e^{\delta(B(t)-B(s))+2\delta B(s)}] - 1) \\ &= e^{(\gamma+\frac{\delta^2}{2})(t+s)}(e^{-\frac{\delta^2}{2}(t+s)}E[e^{\delta(B(t)-B(s))}]E[e^{2\delta B(t)}] - 1) \\ &= e^{(\gamma+\frac{\delta^2}{2})(t+s)}(e^{-\frac{\delta^2}{2}(t+s)}E[e^{\delta(t-s)+2\delta s}] - 1) \\ &= e^{(\gamma+\frac{\delta^2}{2})(t+s)}(e^{2\delta s} - 1). \end{aligned}$$

En la figura 2.15 se presenta una simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano geométrico con coeficientes $\gamma = 5$ y $\delta = 1$. Como puede verse en la figura 2.12 es natural el nombre conferido como puente, ya que al final y al inicio se alcanzan los valores establecidos para a y b, mientras que para las figuras 2.13, 2.14, la irregularidad dada por el movimiento Browniano aumenta y reduce, respectivamente, debido al tamaño de sus coeficientes μ y σ, lo que permite ver en una

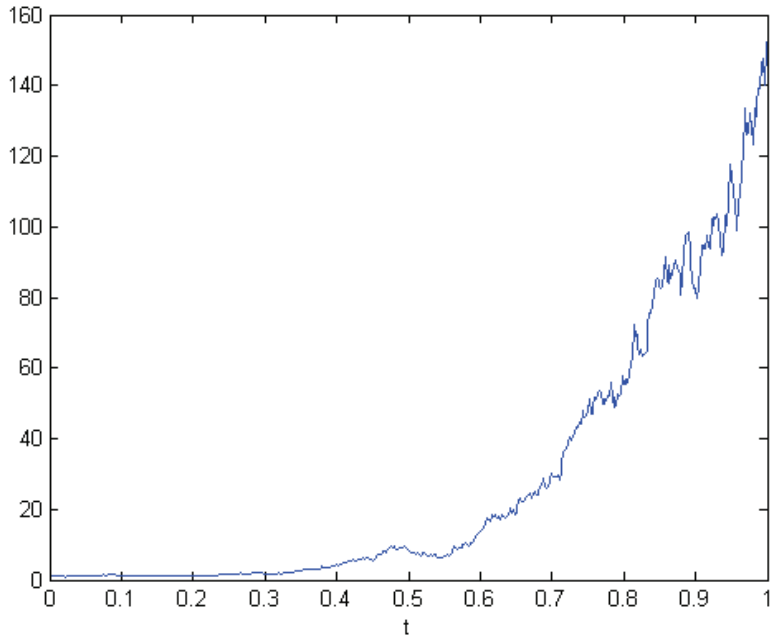

Figura 2.15: Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano geométrico con $\gamma = 5$ y $\delta = 1$.

primera instancia el efecto de introducir aleatoriedad a un término determinista, y, en la figura 2.15 se observa como el proceso toma una forma exponencial debido a su formulación y a la elección de sus coeficientes, este proceso es ampliamente conocido en aplicaciones en economía, para lo cual se recomienda ver [16], en donde se da un estudio detallado del mismo. Para la simulación el siguiente código se ha implementado tomando un intervalo de tiempo $[0, 1]$, con $N = 500$ pasos.

```
% Se simula una trayectoria de un movimiento Browniano
T=1; N=500; B = []; dt = T/(N-1); t = 0:dt:T; B(1) = 0; % B_{0}=0
for i = 1:N-1
B(i+1) = B(i) + sqrt(dt)*randn;
end
% Puente Browniano
a=0; b=1; P=a+B-t*(B(N)-b+a); C=(b-a)*t+a; % para verificar
figure (1); plot(t,P,t,C); xlabel('t')
% Con deriva
mu=0.5; sigma=5; mu1=5; sigma1=0.5;
D=mu*t+sigma*B; D1=mu1*t+sigma1*B;
figure(2); plot(t,D); xlabel('t')
figure(3); plot(t,D1); xlabel('t')
% Geométrico
gamma=5; delta=1; G=exp(gamma*t+delta*B);
figure(4); plot(t,G); xlabel('t')
```

Figura 2.16: Código para simular una trayectoria de los procesos continuos obtenidos a partir de un movimiento Browniano.

Capítulo 3

Cálculo estocástico

En este capítulo se realiza un estudio de la integral estocástica, de su construcción y propiedades, enfocado en la integral de Itô, para luego, realizar un estudio de la fórmula de Itô unidimensional y multidimensional, acompañada de ejemplos que permitan comprenderla mejor; un tipo de ecuación diferencial estocástica es estudiada, la misma que en su formulación contiene a una integral de Itô, está ecuación será en determinados casos ser resuelta explícitamente gracias a la aplicación de la fórmula de Itô. Se revisará un teorema sobre la existencia y unicidad de soluciones para esta ecuación; para finalmente, describir de forma breve a los procesos difusión y presentar un método numérico para obtener soluciones aproximadas de una ecuación diferencial estocástica.

3.1. Integración estocástica

La integración en el caso estocástico debe ser tratada de una forma especial, debido a que se consideran funciones de naturaleza aleatoria, si se la define en el sentido de Riemann-Stieltjes, se puede presentar complicaciones en cuanto a la convergencia, debido a que se pueden encontrar con procesos con trayectorias que no son de variación acotada como por ejemplo un movimiento Browniano, ver [8]. Por tanto, se debe definir una integral, la integral estocástica en cuya definición, como se verá más adelante, se consideran un tipo de integrandos e integradores relacionados con procesos semimartingalas y de trayectorias càglàd. Una vez establecida la integral estocástica, se centrará el estudio al caso en el cual el integrador sea un movimiento Browniano, obteniendo así, la integral de Itô, lo que nos permitirá estudiar un determinado tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales tienen significado

por medio de su respectiva ecuación integral. Entonces, se inicia definiendo la integral estocástica para procesos simples predecibles, para luego extender la definición a procesos más generales por medio de una aproximación hecha vía procesos simples, para esto se citan algunas definiciones y teoremas que permitan trabajar con integradores e integrandos como los enunciados.

DEFINICIÓN 3.1. *Un proceso $\boldsymbol{X}$ se dice càdlàg si sus trayectorias son continuas a la derecha c. s. con límite a la izquierda. $\boldsymbol{X}$ se dice càglàd si sus trayectorias son continuas a la izquierda c. s. con límite a la derecha ([8], p. 113).*

LEMA 3.1. *Si un proceso X es una martingala local con trayectorias continuas, entonces X es una semimartingala ([8], p. 220).*

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espacio de probabilístico filtrado, se nota por $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{L}$ a la clase de procesos simples predecibles, $\mathcal{F}_t$-adaptados con trayectorias càdlàg, y $\mathcal{F}_t$-adaptados con trayectorias càglàd, respectivamente. Estos espacios son espacios vectoriales ([8], p. 217).

DEFINICIÓN 3.2. *[Procesos simple predecible] Sean $0 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_{n+1} < \infty$ una sucesión finita de $\mathcal{F}_t$-tiempos de parada y H_i variables aleatorias tales que $H_i \in \mathcal{F}_t$ y $|H_i| < \infty$ c.s. $i = 0, 1, \ldots, n$ ([8], p. 217)*
Un proceso $\{H(t) : t \geq 0\}$ se dice simple predecible si:

$$H(t) = H_0 1_0(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{(T_i, T_{i+1}]}(t). \tag{3.1}$$

([8], p. 217).

DEFINICIÓN 3.3. *Si $H \in \mathcal{S}$, $X \in \mathcal{D}$, y $0 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_{n+1} < \infty$ son tiempos de parada, la integral estocástica de H con respecto a X sobre $[0, t]$ es*

$$J_X(H)(t) = H_0 X(0) + \sum_{i=1}^{n} H_i[X(t \wedge T_{i+1}) - X(t \wedge T_i)],\ t \geq 0. \tag{3.2}$$

([8], p. 221)

Al igual que una integral en el sentido de Riemann-Stieltjes, la integral estocástica J_X de H con respecto a X sobre $[0, t]$, verifica las propiedades de linealidad y de poder subdividir el sub intervalo de integración, ver [8], p.223. Para la aproximación se establece dentro del espacio $\mathcal{S}$ un tipo de convergencia dado a continuación.

DEFINICIÓN 3.4. *Una sucesión de procesos $H^n \in \mathcal{S}$ se dice que converge al proceso*

H uniformemente sobre compactos en probabilidad, y se nota por $H^n \xrightarrow{ucp} H$, si para cada $t \geq 0$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |H^n(s) - H(s)| \xrightarrow{pr} 0, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.3}$$

([8], p. 223)

En este punto se hace notar que si $f \in \mathcal{S}$ al ser $\mathcal{F}_t$-adaptado y tener trayectorias càglàd por intervalos implica que $f \in \mathcal{L}$, más aún $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Además, para la integral mostrada en la definición 3.3, se utilizarán las notaciones $\int_0^t H(s)dX(s)$, $\int_0^t HdX$, y $H \cdot X(t)$ en lugar de $J_X(H)(t)$.

LEMA 3.2. *El espacio $\mathcal{S}$ de procesos simples predecibles es denso en el espacio $\mathcal{L}$ de procesos càglàd adaptados bajo la convergencia ucp ([8], p. 224).*

LEMA 3.3. *Si X es una semimartingala, el mapeo $J_X \colon \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ es continuo bajo la ucp convergencia tanto en $\mathcal{S}$ como en $\mathcal{D}$ ([8], p. 224).*

DEFINICIÓN 3.5. *El mapeo continuo lineal $J_X \colon \mathcal{L} \to \mathcal{D}$ la extensión de $J_X \colon \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ es llamado la integral estocástica de $H \in \mathcal{L}$ con respecto al proceso semimartingala X ([8], p. 224).*

Luego, lo anterior nos permite establecer que todo proceso $H \in \mathcal{L}$ es aproximado por una sucesión de procesos simples $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}$ en el sentido ucp. Para una demostración rigurosa de este esquema presentado se recomienda revisar el libro [12]. De la misma manera en que la integral estocástica de H con respecto a X sobre $[0, t]$, está integral de $H \in \mathcal{L}$ con respecto al proceso semimartingala X verifica la propiedad de linealidad. Adicionalmente, se citan otras de las propiedades de la integral estocástica.

TEOREMA 3.4. *[Preservación] Si X es una semimartingala, el proceso $Y = H \cdot X$ es una semimartingala ([8], p. 225).*
Si $H \in \mathcal{L}$ y si X es una martingala local cuadrado integrable localmente, entonces $H \cdot X$ es una martingala local cuadrado integrable localmente ([8], p. 225).

Establecida la integral estocástica se particulariza su estudio a la integral cuyo integrador es un movimiento Browniano, conocida como la integral de Itô, para lo cual se hace las siguientes consideraciones.

PROPOSICIÓN 3.5. *El Movimiento Browniano es a la vez un proceso Càglàd y Càdlàg*

Demostración. Este resultado se obtiene debido a que sus trayectorias con continuas *c. s.*. □

PROPOSICIÓN 3.6. *El movimiento Browniano es una semimartingala.*

Demostración. El Movimiento Browniano es una semimartingala ya que es una martingala y tiene trayectorias continuas *c. s.* □

Por tanto, X puede representar a un movimiento Browniano, y en este caso la integral estocástica es conocida como la integral de Itô, para un lector interesado en ver una construcción de la integral de Itô que a diferencia del esquema presentado en esta sección considera desde un inicio como integrador a un movimiento Browniano se recomienda revisar [16].

EJEMPLO 3. Se verifica que $\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{B(t)^2-t}{2}$, para $t \geq 0$.

La solución presentada está basada en la mostrada en [8]. En efecto, sea $p_n = (0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = t)$ una sucesión de particiones del intervalo $[0, t]$, tal que $\triangle(p_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se define la sucesión aleatoria:

$$J_{B,n}(B) = \sum_{i=1}^{m_n} B(t_i^{(n)})[B(t_{i+1}^{(n)}) - B(t_i^{(n)})]. \tag{3.4}$$

Nótese que en este caso se está utilizando como sucesión de procesos simples predecibles a $H^n(t) = \sum_{i=1}^{m_n} B(t_i^{(n)})1_{(t_i,t_{i+1}]}$, utilizando la igualdad:

$$a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b-a)^2,$$

y tomando $a = B(t_i^{(n)})$ y $b = B(t_{i+1}^{(n)})$, se tiene:

$$\begin{aligned} J_{b,n}(B) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_n}[B(t_{i+1}^{(n)})^2 - B(t_i^{(n)})^2] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_n}[B(t_{i+1}^{(n)}) - B(t_i^{(n)})]^2 \\ &= \frac{B(t)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_n}[B(t_{i+1}^{(n)}) - B(t_i^{(n)})]^2, \end{aligned}$$

que converge a $\frac{B(t)^2}{2} - \frac{t}{2}$, cuando $n \to \infty$, en $m.\,s.$, ya que el primer término del lado derecho es una serie telescópica y el segundo término se da por la variación cuadrática del Movimiento Browniano, lema 2.7., además, la convergencia implica la convergencia en probabilidad, y la convergencia en ucp debido a que la sucesión de procesos simples converge a B. Podemos observar que en la integral estocástica se pueden obtener términos que no aparecen en el caso determinista.

A continuación, se definen los procesos de covariación y variación cuadrática, para lo cual se hace el siguiente supuesto, se consideran dos procesos X, Y semimartingalas tales que $X(0-) = Y(0-) = 0$, junto con dos propiedades la primera una identidad de gran utilidad en la resolución de ecuaciones estocástica y la segunda en cambio permite determinar propiedades de segundo orden de la integral estocástica, en el caso de la integral de Itô se la conoce por la isometría de Itô.

DEFINICIÓN 3.6. *[Proceso de covariación cuadrática] El proceso de covariación cuadrática o corchete de X e Y es*

$$[X,Y](t) = X(t)Y(t) - \int_0^t X(s-)dY(s) - \int_0^t Y(s-)dX(s). \tag{3.5}$$

([8], p. 228).

DEFINICIÓN 3.7. *[Proceso de variación cuadrática] El proceso de variación cuadrática de X, notado por $[X,X]$ o por $[X]$, está definido por*

$$[X,X](t) = X(t)^2 - 2\int_0^t X(s-)dX(s). \tag{3.6}$$

([8], p. 229).

LEMA 3.7. *[Identidad de polarización]*

$$[X,Y] = \frac{1}{2}([X+Y,X+Y] - [X,X] - [Y,Y]). \tag{3.7}$$

([8], p. 229).

EJEMPLO 4. Si se considera un movimiento Browniano unidimensional B y $Y(t) = t$, para $t \geq 0$, se verifica que $[B,B](t) = t$, $[B,Y](t) = [Y,B](t) = [Y,Y] = 0$. Y para constantes a y b, $[aY + bB, aY + bB](t) = b^2 t$.

En efecto para un $t \geq 0$ y de la definición del proceso de variación cuadrática

$$[B,B](t) = B(t)^2 - 2\int_0^t B(s)dB(s) = t,$$

$$[Y,Y](t) = Y(t)^2 - 2\int_0^t Y(s)dY(s) = t^2 - 2\int_0^t sds = 0,$$

mientras que a partir del proceso de covariación cuadrática

$$\begin{aligned}[B,Y](t) &= B(t)Y(t) - \int_0^t B(s)dY(s) - \int_0^t Y(s)dB(s) \\ &= tB(t) - \int_0^t B(s)ds - \int_0^t sdB(s) = 0,\end{aligned}$$

esto último se justificará más adelante, además, nótese que $[Y,B](t) = 0$. Gracias a lo obtenido anteriormente se verifica que $[bB,bB](t) = b^2t$ y $[aY,aY](t) = 0$, lo que junto a la identidad de polarización implica que $[aY+bB,aY+bB](t) = b^2t$ para constantes a y b.

LEMA 3.8. *Si M es una martingala cuadrado integrable con $M(0) = 0$ y H es un proceso adaptado con trayectorias càglàd tal que $E[\int_0^t H(s)^2 d[M,M](s)] < \infty$ para cada $t \geq 0$, entonces ([8], p. 236)*

$$E\left[\left(\int_0^t H(s)dM(s)\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H(s)^2 d[M,M](s)\right]. \tag{3.8}$$

EJEMPLO 5. Para la integral del ejemplo 3, se verifica que $E[(\int_0^t B(s)dB(s))^2] = \frac{t^2}{2}$, para $t \geq 0$.

En efecto, en el capítulo anterior se demostró que el movimiento Browniano es una martingala cuadrado integrable, por definición $B(0) = 0$, y por la proposición 3.5, es posible aplicar el lema anterior, entonces para un $t \geq 0$,

$$E[(\int_0^t B(s)dB(s))^2] = E[\int_0^t B^2(s)d[B,B](s)] = \int_0^t E[B^2(s)]ds = \frac{t^2}{2} \tag{3.9}$$

3.2. Fórmula de Itô

La fórmula de Itô, como lo expresa Mircea, extiende la fórmula de cambio de variable del cálculo clásico a las integrales estocásticas con integrandos càglàd, adaptados e integradores semimartingalas ([8], p. 237). Su aplicación tiene una gran importancia cuando se estudia una determinada ecuación diferencial estocástica ya sea proporcionando una solución a la misma, permitiendo determinar la ley de probabilidad que esta sigue o proporcionando ecuaciones para determinar sus momentos, entre otras. En esta sección se enuncia y se demuestra la fórmula de Itô para el caso unidimensional para cuando se trabaja con una semimartingala continua para lo cual se citarán, sin demostración tres lemas que serán vitales en este propósito para luego revisar esta fórmula en d dimensiones, proporcionando en ambos casos ejemplos que permitan entender mejor estos resultados. Es importante notar que se puede utilizar esta fórmula para semimartingalas más generales, sin embargo, para los objetivos de este trabajo, será suficiente estudiar el caso continuo.

3.2.1. Caso unidimensional

LEMA 3.9. *Si X es una semimartingala, Y un proceso en $\mathcal{D}$ o $\mathcal{L}$, y p_n una sucesión de particiones que tienden a la identidad*[1]*, entonces*

$$\begin{aligned}\int_{0+}^{\cdot} Y_{p_n}(s)dX(s) &= \sum_i Y(T_i^{(n)})(X(T_{i+1}^{(n)} \wedge \cdot) - X(T_i^{(n)} \wedge \cdot)) \\ &\xrightarrow{ucp} \int_{0+}^{\cdot} Y(s-)dX(s),\ n \to \infty,\end{aligned}$$

donde $Y(0-) = Y(0)$, y $Y_{p_n}(t) = Y(0)1_{\{0\}} + \sum_i Y(T_i^{(n)})1_{(T_{i-1}^{(n)}, T_i^{(n)}]}$. ([12], p. 66).

LEMA 3.10. *Si X, Y son martingalas y $Z \in \mathcal{D}$, entonces*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m_n} Z(t_{k-1}^{(n)})(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)}))(Y(t_k^{(n)}) - Y(t_{k-1}^{(n)})) \\ &\qquad \xrightarrow{ucp} \int_0^t Z(s-)d[X,X](s),\ \text{cuando } n \to \infty,\end{aligned}$$

[1] Ver [8], p. 226.

en donde $p_n = (0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = t)$ *es una sucesión de particiones de* $[0, t]$ *tal que* $\triangle(p_n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *([8], p. 236).*

LEMA 3.11. *El proceso* $[X, X]$ *en la ecuación (3.6) puede ser obtenido para cada* $t > 0$ *y* $s \in [0, t]$ *de*

$$X(0)^2 + \sum_{k=1}^{m_n} (X(t_k^{(n)} \wedge s) - X(t_{k-1}^{(n)} \wedge s))^2 \xrightarrow{ucp} [X, X](s),$$

en donde $p_n = (0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = t)$ *es una sucesión de particiones de* $[0, t]$ *tal que* $\triangle(p_n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *([8], p. 229).*

Las demostraciones de estos lemas se las pueden encontrar la primera en ([12], teorema 21 p. 66), y las dos siguientes en [8].

TEOREMA 3.12 (Fórmula de Itô)**.** *Si* X *es una semimartingala continua y* $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, *entonces:*

1. $g(X)$ *es una semimartingala continua,*
2. *la forma diferencial e integral de la fórmula de Itô son:*

$$dg(X(t)) = g'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}g''(X(t))d[X, X](t), \tag{3.10}$$

y

$$g(X(t)) - g(X(0)) = \int_0^t g'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X(s))d[X, X](s). \tag{3.11}$$

([8], p. 239).

La demostración presentada a continuación está basada en el libro ([8], p. 239), sin embargo, también puede encontrarse una versión más fuerte cuando se consideran semimartingalas en general.

Demostración. La demostración se la realizará en tres partes: (1) $g(X)$ es una semimartingala. tanto $g'(X)$ como $g''(X)$ son transformaciones con pérdida de memoria del proceso adaptado X, por tanto, son procesos adaptados. De la misma manera ya que X es continua, junto con la hipótesis $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ tanto $g'(X)$ como $g''(X)$ tienen trayectorias càdlàg, luego, al ser X y $[X, X]$ semimartingalas (por la

propiedad de preservación de la integral estocástica) tanto $\int_0^t g'(X(s))dX(s)$ como $\int_0^t g''(X(s))d[X,X](s)$ son semimartingalas (por la propiedad de preservación de la integral estocástica), entonces, si la ecuación (3.11) se verifica $g(X)$ es una semimartingala, al ser la suma de dos semimartingalas.

(2) Se aplica la fórmula de Taylor a $g(X)$. Se asume sin pérdida de generalidad que $X(0) = 0$, caso contrario se pude trabajar con $X(t) - X(0)$, y además al ser continua $X(s-) = X(s)$, dado que X puede no tomar valores en un intervalo acotado se procede a parar a X la primera vez abandone el intervalo $(-a, a)$, $0 < a < \infty$, haciendo luego que $a \to \infty$, gracias a lo cual se puede considerar que X es acotada[2] y entonces aplicando la fórmula de Taylor a $g(X)$ hasta el segundo término

$$g(X) - g(0) = [X(t) - X(0)]g'(X) + \frac{1}{2}[X(t) - X(0)]^2 g''(X) + r(X(t), X(t) - X(0)), \tag{3.12}$$

en donde $|r(x,h)| \leq h^2\alpha(h)$, con $\alpha\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función decreciente tal que $\lim_{u\downarrow 0} \alpha(u) = 0$

(3) Se fija un $t > 0$ y se considera la sucesión de particiones $p_n = (0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = t)$ del intervalo $[0,t]$ tal que $\triangle(p_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si se consideran las notaciones:

$$S_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{m_n} g'(X(t_{k-1}^{(n)}))(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})),$$

$$S_2^{(n)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_n} g''(X(t_{k-1}^{(n)}))(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)}))^2,$$

$$S_3^{(n)} = \sum_{k=1}^{m_n} r(X(t_{k-1}^{(n)}), X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})),$$

la ecuación (3.12) se re escribe por:

$$g(X) - g(0) = \sum_{k=1}^{m_n} (g(X(t_k^{(n)})) - g(X(t_{k-1}^{(n)}))) = S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + S_3^{(n)}, \tag{3.13}$$

[2]Se hace esta diferencia debido a que existen procesos estocásticos que no son de variación acotada, como por ejemplo un movimiento Browniano.

es decir, se aplicó la fórmula de Taylor en cada intervalo de p_n. Gracias al lema 3.9 y al 3.10 las sumas $S_1^{(n)}$ y $S_2^{(n)}$ convergen en sentido ucp a las integrales $\int_0^t g'(X(s))dX(s)$ y $\int_0^t g''(X(s))d[X,X](s)$, respectivamente. Para la suma $S_3^{(n)}$, nótese que:

$$\begin{aligned} |S_3^{(n)}| &= |\sum_{k=1}^{m_n} r(X(t_{k-1}^{(n)}), X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)}))| \\ &\leq \max_{1\leq k\leq m_n} \alpha(|X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})|) \sum_{k=1}^{m_n} (X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)}))^2 \end{aligned}$$

para cada n, gracias al lema 3.11, siendo la convergencia también en probabilidad. Con $\alpha(|X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})|) \to 0$, cuando $n \to \infty$ por $\lim_{u\downarrow 0} \alpha(u) = 0$ y al ser la función $s \mapsto X(s,\omega)$ continua sobre $[0,t]$ para casi todo ω, y por tanto uniformemente continua en este intervalo, es decir, $\max_{1\leq k\leq m_n} |X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})| \to 0$ *c. s.* cuando $n \to \infty$, de lo cual $S_3^{(n)} \to 0$. Por lo cual, ya que la convergencia ucp implica convergencia en probabilidad, en conjunto se ha obtenido para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + S_3^{(n)} - \int_0^t g'(X(s))dX(s) - \frac{1}{2}\int_0^t g''(X(s))d[X,X](s)| > \epsilon) = 0$$

es decir,

$$g(X(t)) - g(X(0)) = \int_0^t g'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X(s))d[X,X](s). \tag{3.14}$$

□

EJEMPLO 6. Gracias a la aplicación de la fórmula de Itô es posible obtener el resultado mostrado en el ejemplo 3 para la integral $\int_0^t B(s)dB(s)$, para $t \geq 0$.

En efecto, se considera un movimiento Browniano B y la función g dada por $g(x) = x^2$, nótese que $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $g'(x) = 2x$ y $g''(x) = 2$. Entonces, por la fórmula de Itô en su forma integral se obtiene:

$$\begin{aligned} g(B(t)) - g(B(0)) &= B^2(t) \\ &= \int_0^t g'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B(s))d[B,B](s) \end{aligned}$$

$$= \quad 2\int_0^t B(s)dB(s) + \int_0^t ds,$$

es decir,

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}(B^2(t) - t). \tag{3.15}$$

Observación: Si se toma la función g dada por $g(x) = x^n$, para un $n \geq 2$, se obtiene un resultado más general:

$$B^n(t) = n\int_0^t B^{n-1}(s)dB(s) + \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t B^{n-2}(s)ds. \tag{3.16}$$

Además, a partir de la forma diferencial de la fórmula de Itô puede encontrarse una ecuación diferencial tal que una semimartingala X sea su solución, gracias al ejemplo 3 la ecuación $dX(t) = 2B(t)dB(t) + dt$ tiene como solución a $X(t) = B^2(t)$, suponiendo que $X(0) = 0$. Nótese, además, que el caso determinista equivalente es $d(x^2) = 2xdx$, lo que pone de manifiesto que en el caso del cálculo estocástico se siguen reglas diferentes.

3.2.2. Caso multidimensional

TEOREMA 3.13 (Fórmula de Itô multidimensional)**.** *Si las coordenadas de $\boldsymbol{X}$ son semimartingalas continuas y $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tiene derivada parcial de segundo orden continua, entonces:*

1. *$g(\boldsymbol{X})$ es una semimartingala continua,*
2. *la fórmula diferencial e integral de la fórmula de Itô son:*

$$dg(\boldsymbol{X}(t)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{X}(t))dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{X}(t))d[X_i, X_j](t),$$

y

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{X}(t)) - g(\boldsymbol{X}(0)) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{X}(s))dX_i(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{X}(s))d[X_i, X_j](s). \end{aligned}$$

([8], p. 247).

EJEMPLO 7. Para dos semimartingalas X, Y, se verifica la fórmula:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d[X,Y](t), \tag{3.17}$$

para $t \geq 0$, que puede entenderse como el equivalente de la diferencial del producto de dos funciones en el caso determinista.

En efecto sea $\mathbf{X} = (X, Y)$ un vector de semimartingalas, y sea la función g definida por $g(x,y) = xy$, en donde: $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = x$, $\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial x} = 1$ y $\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = 0$, funciones continuas, entonces por la forma de Itô en su forma diferencial:

$$dg(\mathbf{X}(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{X}(t))dX(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{X}(t))dY(t) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\mathbf{X}(t))d[X,Y](t),$$

de donde se sigue el resultado.

Observación: Si en el ejemplo anterior se toma $X(t) = B(t)$ y $Y(t) = t$, se obtiene:

$$d(tB(t)) = tdB(t) + B(t)dt, \tag{3.18}$$

de lo cual, integrando, para un $t \geq 0$,

$$tB(t) = \int_0^t sdB(s) + \int_0^t B(s)ds, \tag{3.19}$$

lo que verifica el resultado final del ejemplo 4.

EJEMPLO 8. Es posible encontrar una ecuación diferencial cuya solución sea $X(t) = B_1(t)sen(B_2(t))$, con B_1, B_2, para $t \geq 0$ movimientos Brownianos unidimensionales independientes.

En efecto, se considera el vector $\mathbf{Z} = (B_1, B_2)$ y la función g definida por $g(x,y) = xsen(y)$. En este caso[3] se tiene: $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = sen(y)$, $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = xcos(y)$ y $\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = -xsen(y)$. Gracias a la fórmula de Itô en su forma diferencial se obtiene que $X(t) =$

[3]Solo se presentan las derivadas cuyos términos en la fórmula de Itô no es nulo, ya sea porque se anulan o porque su proceso de covariación cuadrática es cero.

$B_1(t)sen(B_2(t))$ satisface la ecuación diferencial:

$$dX(t) = -\frac{1}{2}X(t)dt + senB_2(t)dB_1(t) + B_1(t)cosB_2(t)dB_2(t). \tag{3.20}$$

3.3. Ecuación diferencial estocástica

Se busca resolver una ecuación de la forma:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))dt + \mathbf{b}(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{B}(t), \text{ para un } t \geq 0, \tag{3.21}$$

cuyo significado está dado por medio de su respectiva ecuación integral estocástica, dada para $t \geq 0$,

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))ds + \int_0^t \mathbf{b}(s, \mathbf{X}(s))d\mathbf{B}(s). \tag{3.22}$$

en donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son matrices de dimensión $(d, 1)$ y (d, d'), respectivamente cuyas entradas son funciones Borel medibles, $\mathbf{B}$ es un movimiento Browniano d' dimensional y $\mathbf{X}$ un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}^d$, en este caso la solución se la conoce como proceso de difusión y las matrices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ como coeficiente de deriva o tendencia y de difusión, respectivamente, nótese además que la primera integral es una integral de Riemann-Stieltjes mientras que la segunda es un integral de Itô. [8]. Se considera a $\mathbf{X}(0)$ determinista y a $\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}}$ la filtración natural obtenida por el movimiento Browniano, con estas consideraciones se define una solución fuerte.

DEFINICIÓN 3.8. *Un proceso estocástico $\boldsymbol{X}(t)$ es llamado solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica (3.21), si satisface:*

1. *Es adaptado a $\mathcal{F}_t^{\boldsymbol{B}}$,*
2. *Es función de las trayectorias de $\boldsymbol{B}$ y de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$,*
3. *Las integrales en (4.2) están definidas para $t \geq 0$.*

([8], p.255).

El siguiente teorema permite establecer condiciones suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial estocástica (3.21), además, permitirá, establecer más adelante una propiedad de los procesos

de difusión. También se incluye un ejemplo que permite ver de una manera formal, cómo una determinada ecuación diferencial estocástica del tipo (3.21) tiene solución y cómo gracias a la fórmula de Itô, es posible determinarla.

TEOREMA 3.14 (Existencia y unicidad)**.** *Si se verifican los siguientes enunciados:*

1. *Los coeficientes de deriva y difusión no dependen explícitamente del tiempo, y:*

   1.a *Existe una constante* $c > 0$ *tal que*

   $$\| \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{y}) \| + \| \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}) \|_m \leq c \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|, \tag{3.23}$$

   $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.

   1.b *Existe un* $k > 0$ *tal que:*

   $$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \| \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \|_m^2 \leq k(1 + \| \boldsymbol{x} \|^2), \tag{3.24}$$

   $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

2. $\boldsymbol{X}(0)$ *es* $\mathcal{F}_0$*-medible,*

3. $\boldsymbol{B}$ *es un movimiento Browniano definido sobre el espacio probabilístico filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$*, tal que* $\boldsymbol{B}(0) = 0$.

Entonces existe una única solución $\boldsymbol{X}$ *adaptada y continua de la ecuación (4.2) cuya ley esta únicamente determinada por la ley de* $\boldsymbol{X}(0)$ *y de* $\boldsymbol{B}$*, ver ([8], p. 260).*

Una demostración de este teorema se puede encontrar en ([3], Teorema 10.6, p. 229), además, la condición 1.a puede ser debilitada por medio de la condición siguiente: para cada $\alpha > 0$, existe una constante $c_\alpha > 0$ tal que

$$\| \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y}) \| + \| \mathbf{b}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{y}) \|_m \leq c_{alpha} \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|, \tag{3.25}$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, que satisfacen la condición $\| \mathbf{x} \|, \| \mathbf{y} \| < \alpha$. Esta condición permite trabajar con coeficientes $\mathbf{a}$, de deriva o tendencia, más generales esto debido a que para una función diferenciable f, por el teorema del valor medio, si su derivada es acotada dentro de un intervalo I, verifica (3.25). Además, nótese que la condición $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x})$ verifica que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{2}(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{a}(\mathbf{x}) \|^2)$, [8].

EJEMPLO 9. Para $t \in [0, T]$, α, β y σ constantes, la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \alpha(\beta - X(t))dt + \sigma dB(t), \tag{3.26}$$

con $X(0) = x_0$, tiene solución única.

En efecto, la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (3.26) se obtendrá a partir del teorema 3.14, para lo cual se supone que $X(0)$ es $\mathcal{F}_0$-medible, para luego, proceder a resolver esta ecuación haciendo uso de la fórmula de Itô multidimensional. Entonces, si $T \geq 0$, a partir de la ecuación (3.26) los coeficientes a y b están definidas por $a(x) = \alpha(\beta - x)$ y $b(x) = \sigma$, respectivamente. Para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq c|x - y|, \tag{3.27}$$

con $c = |\alpha|$, y

$$x \cdot a(x) + |b(x)|^2 \leq k(1 + |x|^2), \tag{3.28}$$

con $k = 0{,}5(r + 1) + \sigma^2$, donde $r = \alpha^2\beta^2 \vee \alpha^2$. Gracias a las ecuaciones (3.27) y (3.28) y por el supuesto sobre $X(0)$ del teorema 3.14 se concluye que la ecuación (3.26) tiene solución fuerte única.

Para encontrar la solución de la ecuación (3.26) considere $Y(t) = e^{\alpha t}X(t)$, en donde $X(t)$ es la solución de la ecuación (3.26), sea $\mathbf{X} = (X, Z)$ donde $Z(t) = t$ y g la función definida por $g(x, t) = e^{\alpha t}x$, en donde: $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x} = e^{\alpha t}$, $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t}x$, $\dfrac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} = 0$, de lo cual

$$dY(t) = e^{\alpha t}dX(t) + \alpha Y(t)dt,$$

o equivalentemente:

$$e^{\alpha t}dX(t) = dY(t) - \alpha Y(t)dt. \tag{3.29}$$

Multiplicando la ecuación (3,26) por $e^{\alpha t}$,

$$e^{\alpha t}dX(t) = \alpha\beta e^{\alpha t}dt - \alpha Y(t)dt + \sigma e^{\alpha t}dB(t). \tag{3.30}$$

De las ecuaciones (3.29) y (3.30), se tiene:

$$dY(t) = \alpha\beta e^{\alpha t}dt + \sigma e^{\alpha t}dB(t).$$

Integrando sobre $[0, T]$, se obtiene,

$$Y(T) = Y(0) + \alpha\beta \int_0^T e^{\alpha t}dt + \sigma \int_0^T e^{\alpha t}dB(t),$$

o equivalentemente,

$$X(T) = X(0)e^{-\alpha T} + \beta(1 - e^{-\alpha T}) + \sigma e^{-\alpha T} \int_0^T e^{\alpha t}dB(t), \tag{3.31}$$

la solución buscada.

3.4. Procesos de difusión

El proceso **X** que verifica la ecuación (3.21) se denomina un proceso de difusión con coeficiente de deriva o tendencia **a** y de difusión $\mathbf{bb}^T$, respectivamente. A continuación, se describen brevemente las principales propiedades que estos procesos presentan.

1. Propiedad de Markov, gracias a que un movimiento Browniano verifica ser un procesos de Markov junto con la propiedad de preservación de la integral estocástica y la correspondiente ecuación integral a la ecuación (3.21) es posible verificar este punto, para una lectura más detalla y desde un punto de vista de variable condicionada, el lector puede remitirse a [11], además, si se consideran tiempos de parada $T \in \mathcal{F}_t$ el proceso $X(T + t)$, $t \geq 0$, depende solo de $X(T)$, su filtración y su valor inicial $X(0)$ es decir, también verifica la condición fuerte de Markov, para esto, ver [3].

2. Por el teorema de existencia 3.14, un proceso de difusión tiene trayectorias continuas.

3. Por la propiedad de preservación de la integral estocástica, un proceso de difusión es una semimartingala, y se puede escribir por:

   $$X(t) = X(0) + A(t) + M(t),$$

   con $A(0) = M(0) = 0$.

Donde $A(t) = \int_0^t \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))ds$ y $M(t) = \int_0^t \mathbf{b}(s, \mathbf{X}(s))d\mathbf{B}(s)$ son un proceso adaptado con trayectorias continuas de variación acotada sobre compactos y una martingala cuadrado integrable, respectivamente.

Una consecuencia importante es la siguiente: dada una función $g \in \mathcal{C}^2$ y considerando el proceso de difusión $\mathbf{X}$, por la fórmula de Itô, el proceso $g(\mathbf{X})$ también es un proceso de difusión.
Observación: Nótese que gracias al ejemplo 3, al ejemplo 6 y a la observación hecha luego de este, puede decirse que $B^2(t)$ es un proceso de difusión, el cual tiene trayectorias continuas, y es tal que se hace cero en el tiempo $t = 0$, con $A(t) = t$ y $M(t) = 2\int_0^t B(s)dB(s)$, una martingala cuadrado integrable, esto, gracias al ejemplo 5. Además, por la consecuencia mencionada, para la función $g(x) = x^n$, el proceso $B^n(t)$ también verifica ser un proceso de difusión.

3.5. Métodos numéricos

Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias no todas las ecuaciones diferenciales estocásticas cuentan con una expresión explícita de su solución, y de la misma manera a como se trabaja esta limitación en el caso determinista, se plantea encontrar una solución aproximada por medio de métodos de aproximación numérica. Para ilustrar esto se presenta el método de Euler-Maruyama.
Se discretiza el intervalo de tiempo $[0, t]$, para un $t > 0$. Para esto, sea $\triangle t^{(N)} = \frac{T}{N}$, con los nodos $t_k^{(N)} = k\triangle t^{(N)}$, para $k = 0, 1, \ldots, N$, una partición uniforme, con tamaño $\triangle(p_N) = T/N$.

Se nota por $X^{(N)}$ a la solución numérica de la ecuación (3.21), de la cual se puede decir que es un proceso estocástico que aproxima a la solución exacta, y es calculada en los tiempos $t_k^{(N)} = k\frac{T}{N}$, $k = 0, 1, \ldots, N$, ver [8].

Se debe tener en cuenta, que, al trabajar con una parte aleatoria, la convergencia del método puede ser visto desde un punto de vista fuerte, permitiendo de esta forma hablar de un orden de convergencia y de la consistencia fuerte del método. Sin embargo, un análisis detallado en cuanto a estos dos últimos puntos no se trata en este trabajo, dejando para un lector interesado en ahondar en estos temas, como referencia a [5], capítulo 8. Para medir la exactitud del método se define una medida para la diferencia entre X y $X^{(N)}$ esto es, el error cometido en la aproximación.

DEFINICIÓN 3.9. *Para una partición p_N del intervalo $[0,T]$, se define la función de error*

$$e_s(p_N,T) = E[|X(T) - X^{(N)}(T)|]. \tag{3.32}$$

([8], p. 276).

Se simplifica la notación tomando $X_k = X^{(N)}(t_k^{(N)})$, $B_k = B^{(N)}(t_k^{(N)})$ y $\triangle t^{(N)} = \triangle t$. Entonces, el método de Euler está dado por medio del siguiente esquema recursivo:

$$X_k = X_{k-1} + a(X_{k-1})\triangle t + b(X_{k-1})\triangle B_k, \tag{3.33}$$

en donde $\triangle B_k = B_k - B_{k-1}$, para $k = 1,\ldots,N$, junto con un valor inicial $X_0 = x \in \mathbb{R}$, conocido.
Este método se ha elegido debido a que es sencillo y permite establecer una buena introducción a métodos de aproximación numérica que consideran perturbaciones aleatorias, de este método puede decirse que su orden de convergencia fuerte es 0.5, esto, cuando los coeficientes de deriva o tendencia y de difusión satisfacen alguna condición de crecimiento y de Lipschitz, ver [5], capítulo 10. Como es natural existen métodos con mejor orden de convergencia los cuales son vistos en [5], capítulo 10. En cuanto a la formulación para el caso de un proceso X multidimensional con un movimiento Browniano unidimensional, es decir, $d = 1,2,\ldots$ y $d' = 1$ la j-ésima componente está dada por

$$X_k^j - X_{k-1}^j = a^j(X_{k-1}^j)\triangle t + b(X_{k-1}^j)\triangle B_k, \tag{3.34}$$

para $j = 1,\ldots,d$, en donde los coeficientes de deriva y de difusión son $a = (a^1,\ldots,a^d)$ y $b = (b^1,\ldots,b^d)$, ver [5], sección 10.2.

EJEMPLO 10. Se implementa el método de Euler a la ecuación

$$dX(t) = -X(t)dt + dB(t), \text{ con } X(0) = 5, \tag{3.35}$$

para $t \in [0,1]$, para aproximar su solución.

En efecto, gracias al ejemplo (9) con $\alpha = 1$, $\beta = 0$ y $\sigma = 1$ la ecuación (3.35) tiene solución y se la calcula por medio del método de Euler-Maruyama, con la notación adoptada y por las consideraciones hechas sobre la partición del intervalo $[0,1]$, se sigue el esquema,

$$X_k = X_{k-1} - X_{k-1}\triangle t + \triangle B_k, \tag{3.36}$$

con $X_0 = 5$, para $k = 1,\ldots,N$.

En las figuras 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5, se puede apreciar como la aproximación de la solución exacta va mejorando conforme se incrementa el número de pasos (nodos), la cual, ha sido calculada en el intervalo $[0, 1]$, y también puede apreciarse la comparación con la solución exacta, que fue encontrada en el ejemplo 9.

Notemos que el término integral obtenido en (3.31) puede presentar cierta dificultad al calcularlo, razón por la cual el utilizar este método permite no tener que hacerlo, además, si se revisa [2] puede encontrarse una caracterización de esta solución, dada por:

$$X(t) = X(0)e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\alpha t} B(e^{2\alpha t} - 1). \tag{3.37}$$

En donde a $Z = \sigma e^{-\alpha T} \int_0^T e^{\alpha t} dB(t)$, gracias a la definición de la integral estocástica y la isometría de Itô, se la considera como una variable normal con media $E[Z] = 0$ y varianza $Var(Z) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha T})$.

Se ha implementado un código en MATLAB que provee la solución obtenida por el método de numérico de Euler-Maruyama y a la vez la solución exacta obtenida en el ejemplo 9 y dada por la ecuación (3.37). Este código realiza las siguientes acciones:

1. Inicializa los valores de los coeficientes α, β y σ; discretiza el intervalo de tiempo $[0, 1]$ en N nodos, con tamaño uniforme $dt = T/(N - 1)$ y generan N números aleatorios con distribución normal de media cero y varianza uno, con el comando de MATLAB, $randn(N, 1)$.

2. Implementa el esquema de la ecuación (3.36) por medio de $X(i + 1) = X(i) + alfa * (beta - X(i)) * dt + sqrt(dt) * Z(i)$, para $i = 1, 2, \ldots, N - 1$, en donde el termino $\triangle B_k$ ha sido calculado por el comando $sqrt(dt) * Z(i)$. Con el valor inicial $X(1) = x0 = 5$,

3. Simula la solución exacta dada por la ecuación (3.31) y caracterizada por (3.37) por medio del comando $Y = x0 * e + beta * (1 - e) + (sigma/sqrt(2 * alfa)) * e. * W'$, en donde W es obtenido por la actualización de $W(i + 1) = W(i) + sqrt(exp(2 * alfa * t(i + 1)) - exp(2 * alfa * t(i))) * Z(i)$ con $W(1) = 0$ y $e = exp(-alfa * t)$.

4. Realiza un gráfico t vs X junto con t vs Y, incrementando el número de nodos.

```
% Condiciones iniciales y valores de parámetros
alfa=1; beta=0; sigma=1; x0=5; T=1; N=500; dt=T/(N-1); t=0:dt:T;
Z=randn(N,1);   % Genera números aleatorios N(0,1)
% El método de Euler-Maruyama
X=x0*ones(N,1); % Almacena la solución aproximada
for i=1:N-1
    X(i+1)=X(i)+alfa*(beta-X(i))*dt+sigma*sqrt(dt)*Z(i);
end
% Solución exacta
W=zeros(N,1);   % Almacena los valores para la parte integral
for i=1:N-1
    W(i+1)=W(i)+sqrt(exp(2*alfa*t(i+1))-exp(2*alfa*t(i)))*Z(i);
end
e=exp(-alfa*t);
Y=x0*e+beta*(1-e)+(sigma/sqrt(2*alfa))*e.*W';
% Para la aproximación aumentando nodos
X1=zeros(4,1); d1=T/3; t1=0:d1:T;
for j=1:4   X1(j)=X(125*j); end
X2=zeros(20,1); d2=T/19; t2=0:d2:T;
for j=1:20  X2(j)=X(25*j);  end
X3=zeros(100,1); d3=T/99; t3=0:d3:T;
for j=1:100 X3(j)=X(5*j);   end
figure(1); plot(t,Y,'g',t1,X1);
legend('Sol. Exacta','Sol. Aproximada','location','Best'); xlabel('t')
figure(2);plot(t,Y,'g',t2,X2);
legend('Sol. Exacta','Sol. Aproximada','location','Best'); xlabel('t')
figure(3); plot(t,Y,'g',t3,X3);
legend('Sol. Exacta','Sol. Aproximada','location','Best'); xlabel('t')
figure(4); plot(t,Y,'g',t,X);
legend('Sol. Exacta','Sol. Aproximada','location','Best'); xlabel('t')
```

Figura 3.1: Código para ejemplo 10, el método numérico de Euler-Maruyama.

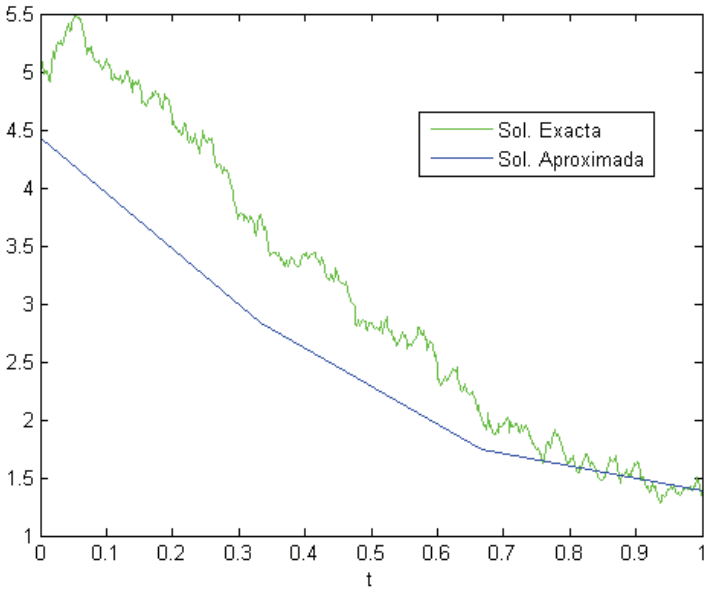

Figura 3.2: Solución aproximada calculada en 4 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1].

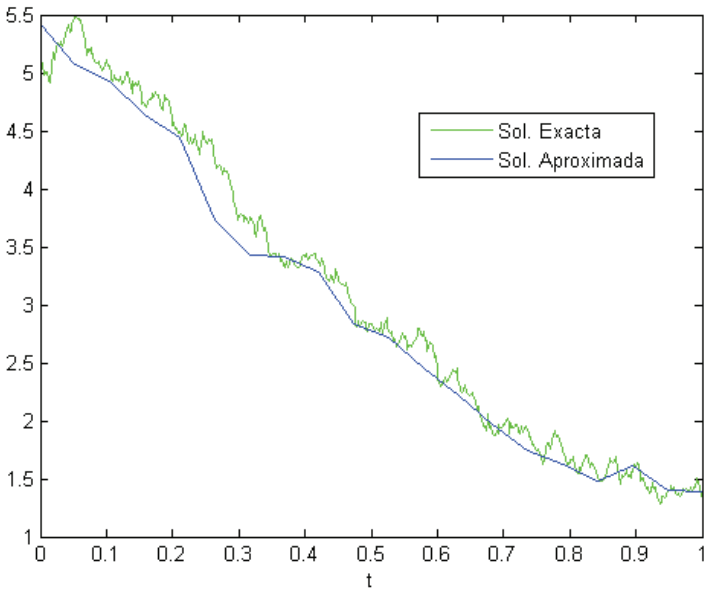

Figura 3.3: Solución aproximada calculada en 20 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1].

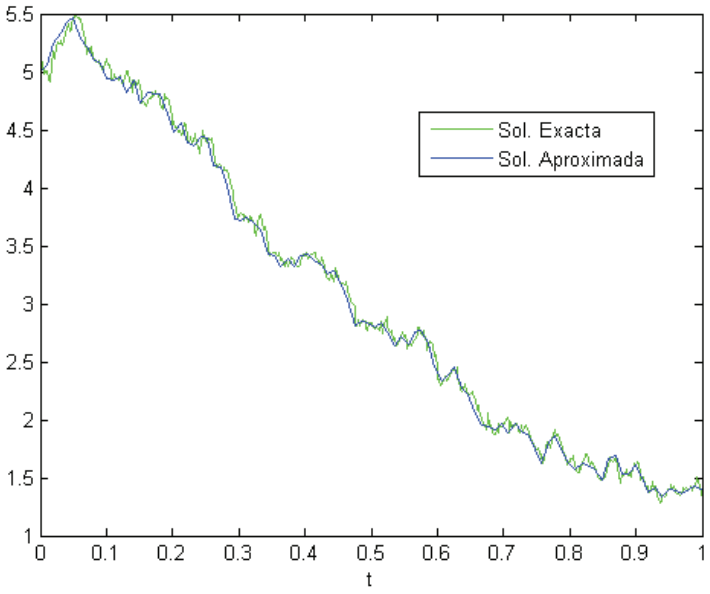

Figura 3.4: Solución aproximada calculada en 100 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1].

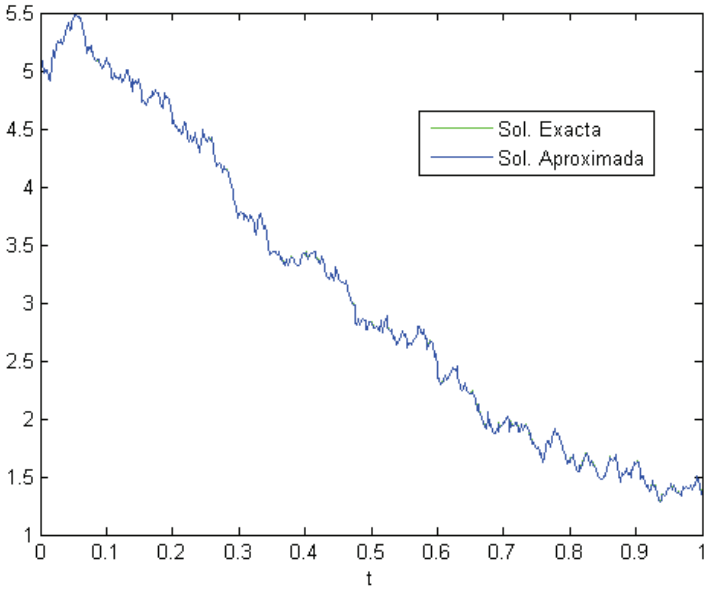

Figura 3.5: Solución aproximada calculada en 500 nodos para la ecuación $dX(t) = -X(t)dt + dB(t)$, en el intervalo [0,1].

Capítulo 4

Fórmula e Itô y los procesos de difusión

En este capítulo, se mostrará cómo la utilización de la fórmula de Itô, permite calcular propiedades probabilísticas de un proceso de difusión. Las propiedades que se estudiarán son la media, la varianza, el coeficiente de asimetría, el coeficiente de curtosis y la determinación de la ecuación de Fokker-Planck, por medio de la cual se podrá determinar la densidad de transición estacionaria f_s. Para este fin, se ha elegido trabajar con una partícula Browniana que presenta un movimiento oscilatorio, dentro de este movimiento se consideran dos tipos, uno de naturaleza lineal y otro de naturaleza no lineal. Es importante notar que se han de tomar valores de parámetros tales que se permitan ver dos tipos de oscilación que se presentan, y así mostrar de una forma práctica algunos de los alcances de esta teoría.

Sea $\mathbf{X}$ un proceso de difusión que satisface la ecuación

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t))dt + \mathbf{b}(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{B}(t), \text{ para un } t \geq 0, \tag{4.1}$$

cuyo significado está dado por medio de su respectiva ecuación integral estocástica, dada para $t \geq 0$,

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(s, \mathbf{X}(s))ds + \int_0^t \mathbf{b}(s, \mathbf{X}(s))d\mathbf{B}(s). \tag{4.2}$$

en donde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ son matrices de dimensión $(d, 1)$ y (d, d') respectivamente cuyas entradas son funciones Borel medibles, $\mathbf{B}$ es un movimiento Browniano d' dimensional, además, se supondrá que satisfacen las condiciones del teorema 3.2.

4.1. Momentos

Para determinar las propiedades de segundo orden se debe tener conocimiento de sus momentos, lo cual se logrará por medio de la aplicación de la fórmula de Itô, para este fin se hacen las siguientes consideraciones basadas en las hechas por Mircea, ver [8]. Los coeficientes **a** y **b** de la ecuación (4.1) son polinomios de **X**. La función g, dada por $g(\mathbf{x}) = x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_d^{s_d} = \prod_{i=1}^{d} x_i^{s_i}$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en cada una de sus componentes, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Para el proceso $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$, el momento de orden $s = \sum_{i=1}^{d} s_i$, está dado por

$$\mu(s_1, s_2, \dots, s_d; t) = E[X_1(t)^{s_1}X_2(t)^{s_2}\dots X_d(t)^{s_d}] = E[\prod_{i=1}^{d} X_i(t)^{s_i}], \tag{4.3}$$

en donde si uno de los s_i es estrictamente negativo $\mu(s_1, s_2, \dots, s_d; t) = 0$, y si el proceso **X** es estacionario, notado por $\mathbf{X}_s$, entonces sus momentos son invariantes en el tiempo, siendo en este caso la derivada respecto al tiempo de $\mu(s_1, s_2, \dots, s_d; t)$ igual a cero. Entonces, de la aplicación de la fórmula de Itô en su forma diferencial a la función g, se tiene que

$$dg(\mathbf{X}(t)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial X_i}(\mathbf{X}(t))dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}(\mathbf{X}(t))d[X_i, X_j](t). \tag{4.4}$$

Gracias a que la representación de cada coordenada de la ecuación (4.1) es de la forma $dX_i(t) = a_i(\mathbf{X})dt + \sum_{k=1}^{d'} b_{ik}(\mathbf{X})dB_k(t)$, y que $d[B_k, B_l](t) = \delta_{kl}dt$, para $k, l = 1, 2, \dots, d'$, y dado que, por la propiedad de preservación de la integral estocástica, el término $\frac{\partial g}{\partial X_i}b_{ik}dB_k$ es una martingala local, que inicia en cero. Se concluye que $E[\sum_{k=1}^{d'} \frac{\partial g}{X_i}b_{ik}dB_k] = 0$; al aplicar el operador esperanza en la ecuación (4.4) se obtiene la ecuación diferencial ordinaria para los momentos de orden s del proceso **X**, dada por,

$$\dot{\mu}(s_1, s_2, \dots, s_d; t) = \sum_{i=1}^{d} E\left[\frac{\partial g}{\partial X_i}a_i\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d'} E\left[b_{ik}b_{jk}\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right], \tag{4.5}$$

donde g, a_i y b_{ik} son calculadas en $\mathbf{X}(t)$.

Nótese que el condicionar a los coeficientes **a** y **b**, es de gran importancia, debido a que los términos que contienen al operador esperanza en la ecuación anterior, pueden no representar a un momento. Para la ecuación (4.5) la condición inicial depende del valor inicial del proceso de difusión esto es, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}_0$.

4.2. Ecuación de Fokker-Planck

El conocer la densidad de una variable aleatoria hace posible tener un conocimiento más adecuado de la distribución que ésta sigue, además de la determinación de sus momentos, condicionado a que éstos existan. Dentro de la teoría de los procesos de difusión, se ha encontrado que es posible determinar una ecuación diferencial parcial cuya solución es precisamente la densidad de una variable condicionada obtenida a partir de un proceso de difusión condicionado a un valor inicial en un tiempo inicial. Para esto y basándonos en la expuesto en [8]: sea $\mathbf{X}$ un proceso cuya posición está dada por la ecuación (4.1) se procede a continuación a determinar su respectiva ecuación en derivadas parciales conocida como ecuación de Fokker-Planck o ecuación de Kolmogorov hacia adelante.

Si al tiempo t_0 el proceso toma el valor $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0$, entonces, se busca una ecuación en derivadas parciales cuya solución sea la densidad de la variable $\mathbf{X}|(\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0)$, representada por $f(\mathbf{x}; t|\mathbf{x}_0; t_0)$ también conocida como densidad de transición de $\mathbf{X}$, a la cual se la notará simplemente por $f(\mathbf{x}; t)$ en caso de no existir confusión. Con relación a la ecuación (4.1) la densidad de transición de $\mathbf{X}$ verifica las siguientes condiciones,

(a) $\lim_{|x_i|\to\infty} [a_i(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}; t|\mathbf{x}_0; to)] = 0, i = 1, 2, \ldots.$

(b) $\lim_{|x_i|\to\infty} [(\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)^T)_{i,i} f(\mathbf{x}; t|\mathbf{x}_0; to)] = 0, i, j = 1, 2, \ldots.$

(c) $\lim_{|x_i|\to\infty} \frac{\partial[(\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\mathbf{b}(\mathbf{x},t)^T)_{i,i} f(\mathbf{x};t|\mathbf{x}_0;to)]}{\partial x_i} = 0, i, j = 1, 2, \ldots.$

Al ser $\mathbf{X}$ un proceso de Markov, debe notarse que su densidad está completamente determinada por $f(\mathbf{x}; t|\mathbf{x}_0; t_0)$ y por la densidad de $\mathbf{X}(t_0)$. No se presenta una demostración completa de cómo gracias a la aplicación de la fórmula de Itô, es posible determinar a la ecuación de Fokker-Planck, sin embargo, en el siguiente esquema puede ver como se lo consigue.

(1) Se aplica la fórmula de Itô multidimensional, a una función g arbitraria, que tiene derivada parcial de segundo orden continua, (2) con consideraciones similares a las realizadas en la determinación de la ecuación diferencial para los momentos de un proceso de difusión, hecha en la sección anterior, es posible obtener la siguiente

ecuación,

$$\frac{\partial E[g]}{\partial t} = \sum_{i=1}^{d} E\left[\frac{\partial g}{\partial X_i} a_i\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d'} E\left[b_{ik}b_{jk}\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right], \tag{4.6}$$

donde g, a_i y b_{ik} son calculadas en $\mathbf{X}(t)$. (3) Gracias a la definición del operador esperanza se obtiene lo siguiente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^d} gf\,d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial g}{\partial X_i}a_i f\,d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d'}\int_{\mathbb{R}^d} b_{ik}b_{jk}f\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}d\mathbf{x}, \tag{4.7}$$

(4) el utilizar integración por partes, junto con las condiciones $a - c$, permiten obtener los siguientes resultados,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial g}{\partial X_i}a_i d\mathbf{x} = -\int_{\mathbb{R}^d} g\frac{\partial a_i f}{\partial X_i}d\mathbf{x} \tag{4.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} b_{ik}b_{jk}f\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} g\frac{\partial^2 b_{ik}b_{jk}f}{\partial X_i \partial X_j}d\mathbf{x}, \tag{4.9}$$

(5) de las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9), se obtuvo la ecuación

$$\int_{\mathbb{R}^d} g\frac{\partial f}{\partial t}d\mathbf{x} = -\sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} g\frac{\partial a_i f}{\partial X_i}d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d'}\int_{\mathbb{R}^d} g\frac{\partial^2 b_{ik}b_{jk}f}{\partial X_i \partial X_j}d\mathbf{x}, \tag{4.10}$$

por tanto, al ser g arbitraria, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial a_i f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d'}\frac{\partial^2 b_{ik}b_{jk}f}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{4.11}$$

cuya solución está dada por $f(\mathbf{x}; t|\mathbf{x}_0; t_0)$, con la condición inicial $f(\mathbf{x}_0; t_0|\mathbf{x}_0; t_0) = fo$.

Al ser una ecuación en derivadas parciales no siempre su solución será posible encontrarla por métodos algebraicos, razón por la cual, una opción posible es determinar su solución por medio de un método numérico, por ejemplo, el método de diferencias finitas o el método de elementos finitos. Otra alternativa para determinar su solución es utilizar la simulación de Monte Carlo. A partir de la ecuación de Fokker-Planck es posible, gracias a la transformada de Fourier, establecer su conexión con la función característica φ del proceso $\mathbf{X}$, ver [8].

Si se considera que el proceso $\mathbf{X}$ llega a ser estacionario cuando $t \to \infty$, la ecua-

ción de Fokker-Planck del proceso estacionario $\mathbf{X}_s$ cuya solución es la densidad estacionaria f_s, es dada por

$$-\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial a_i f_s}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d'}\frac{\partial^2 b_{ik}b_{jk}f_s}{\partial x_i \partial x_j}=0. \tag{4.12}$$

4.3. Aplicación

Consideremos una partícula Browniana de masa m esto es, la partícula presenta un movimiento Browniano, se analizarán dos casos.

(a) Cuando la partícula se encuentra unida a un resorte con constante k y es restringida a moverse en una dirección, en cuyo caso verifica la ecuación,

$$\ddot{X}(t)+2\alpha\dot{X}(t)+\omega_0^2 X(t)=W(t), \tag{4.13}$$

si se considera el cambio de variable $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, la ecuación (4.13) es equivalente, a la ecuación diferencial estocástica en dos dimensiones,

$$d\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_2(t) \\ -(\omega_0^2 X_1(t)+2\alpha X_2(t))\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\pi\sigma}\end{pmatrix}dB(t). \tag{4.14}$$

(b) Cuando el movimiento de la partícula se ve afectado por la presencia de un potencial V dado por $V(x)=\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{4}x^4$, en cuyo caso verifica la ecuación,

$$\ddot{X}(t)+\delta\dot{X}(t)+aX(t)+bX(t)^3=W(t), \tag{4.15}$$

de manera similar a lo realizado en el ítem anterior, la ecuación (4.15) es equivalente a,

$$d\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_2(t) \\ -(aX_1(t)+bX_1(t)^3+\delta X_2(t))\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\pi\sigma}\end{pmatrix}dB(t). \tag{4.16}$$

donde W representa a un ruido blanco Gaussiano, con media $E[W(t)]=0$ y función de correlación dada por $E[W(t)W(s)]=\pi\sigma$, en donde σ es una constante positiva. Para futuros cálculos se nota que las derivadas de interés para g, con $p+q=r$, están dadas por $\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1}=px_1^{p-1}x_2^q$, $\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}=qx_1^p x_2^{q-1}$ y $\frac{\partial^2 g(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}=q(q-1)x_1^p x_2^{q-2}$.

4.3.1. Cálculos de momentos 1

Se calculan la media, varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis correspondiente al oscilador lineal aleatorio modelado por (4.13) con valor inicial $X(0) = x_0$, $\dot{X}(0) = \dot{x}_0$. Gracias a la ecuación (4.14) se obtiene que $a_1(\mathbf{x}) = x_2$, $a_2(\mathbf{x}) = -(\omega_0^2 x_1 + 2\alpha x_2)$ y $b_{22}(\mathbf{x}) = \pi\sigma$, lo que verifica el teorema de existencia y unicidad de soluciones para una ecuación diferencial estocástica, y, por tanto, la ecuación diferencial para los momentos de orden $s = p + q$ del proceso de difusión $\mathbf{Z} = (X_1, X_2) = (X, \dot{X})$, está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(p,q;t) &= p\mu(p-1,q+1;t) - q\omega_0^2\mu(p+1,q-1;t) - 2q\alpha\mu(p,q;t) \\ &\quad + \frac{\pi\sigma q(q-1)}{2}\mu(p,q-2;t). \end{aligned}$$

A partir de esta ecuación, se determinan sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para los momentos $s = 1$, $s = 2$, $s = 3$ y $s = 4$. En particular se obtienen los momentos $\mu(1,0;t)$, $\mu(2,0;t)$, $\mu(3,0;t)$ y $\mu(4,0;t)$ del proceso X_1, y, por tanto, la varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis del proceso X_1. A continuación los sistemas de ecuaciones diferenciales obtenidos. Para $s = p + q = 1$,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(1,0;t) &= \mu(0,1;t) \\ \dot{\mu}(0,1;t) &= -\omega_0^2\mu(1,0;t) - 2\alpha\mu(0,1;t) \end{aligned} . \tag{4.17}$$

Para $s = p + q = 2$,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(2,0;t) &= 2\mu(1,1;t) \\ \dot{\mu}(1,1;t) &= -\omega_0^2\mu(2,0;t) - 2\alpha\mu(1,1;t) + \mu(0,2;t) \\ \dot{\mu}(0,2;t) &= -2\omega_0^2\mu(1,1;t) - 4\alpha\mu(0,2;t) + \pi\sigma \end{aligned} . \tag{4.18}$$

Para $s = p + q = 3$,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(3,0;t) &= 3\mu(2,1;t) \\ \dot{\mu}(2,1;t) &= -\omega_0^2\mu(3,0;t) - 2\alpha\mu(2,1;t) + 2\mu(1,2;t) \\ \dot{\mu}(1,2;t) &= -2\omega_0^2\mu(2,1;t) - 4\alpha\mu(1,2;t) + \mu(0,3;t) + \pi\sigma\mu(1,0;t) \\ \dot{\mu}(0,3;t) &= -3\omega_0^2\mu(1,2;t) - 6\alpha\mu(0,3;t) + 3\pi\sigma\mu(0,1;t) \end{aligned} . \tag{4.19}$$

Para $s = p + q = 4$,

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}(4,0;t) &= 4\mu(3,1;t) \\
\dot{\mu}(3,1;t) &= -\omega_0^2\mu(4,0;t) - 2\alpha\mu(3,1;t) + 3\mu(2,2;t) \\
\dot{\mu}(2,2;t) &= -2\omega_0^2\mu(3,1;t) - 4\alpha\mu(2,2;t) + 2\mu(1,3;t) + \pi\sigma\mu(2,0;t)\ . \\
\dot{\mu}(1,3;t) &= -3\omega_0^2\mu(2,2;t) - 6\alpha\mu(1,3;t) + \mu(0,4;t) + 3\pi\sigma\mu(1,1;t) \\
\dot{\mu}(0,4;t) &= -4\omega_0^2\mu(1,3;t) - 8\alpha\mu(0,4;t) + 6\pi\sigma\mu(0,2;t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Para ilustrar los cálculos tomemos los valores $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$; con $\sigma = 0{,}1$, dentro del intervalo de tiempo $[0, 30]$ con $X(0) = \dot{X}(0) = 1$, correspondiente a una partícula Browniana que presenta un movimiento oscilatorio con respuesta subcrítica. Para luego resolver los sistemas de ecuaciones para lo cual se ha utilizado en esquema de Euler explícito, para lo que se ha particionado el intervalo de tiempo en $N = 3000$ nodos, ver apéndice [B]. Una vez determinados los momentos se han calculado la varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis; respecto a la existencia de la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (4.17), (4.18), (4.19) y (4.20), ver el apéndice [A].

Adicionalmente, al resultado obtenido por medio de la fórmula de Itô, se obtuvo los resultados por medio de la simulación de Monte Carlo[1], para lo cual se ha simulado la solución por el método de Euler-Maruyama de la ecuación (4.14) unas $M = 25000$ veces, para luego calcular las propiedades buscadas utilizando los comandos de MATLAB ya establecidos para estos términos. El código utilizado puede ser revisado en el apéndice [B]. En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 pueden apreciarse una de las soluciones simuladas, presentando la posición, la velocidad y el diagrama de fase del proceso de difusión $\mathbf{Z} = (X, \dot{X}) = (X_1, X_2)$, respectivamente, cada una acompañada con su equivalente sin aleatoriedad. En las figuras 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 pueden apreciarse las gráficas de la media, varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis, en verde por medio de la fórmula de Itô y en azul por medio de la simulación de Monte Carlo. Como puede apreciarse los resultados son aceptables y pueden ser mejorados conforme se simule mayor cantidad de soluciones, sin embargo, es suficiente notar que en ambos casos el comportamiento de cada término calculado tiende a tomar un valor constante cuando el tiempo se ve incrementado. Si se considera además que el proceso $\mathbf{Z}$ llega a ser estacionario cuando $t \to \infty$, entonces, tomando $\dot{\mu}(p, q; t) = 0$, se obtienen los momentos estacionarios del proceso

[1]Para un lector interesado en ahondar en este tema, se recomienda revisar los libros [14, 15]

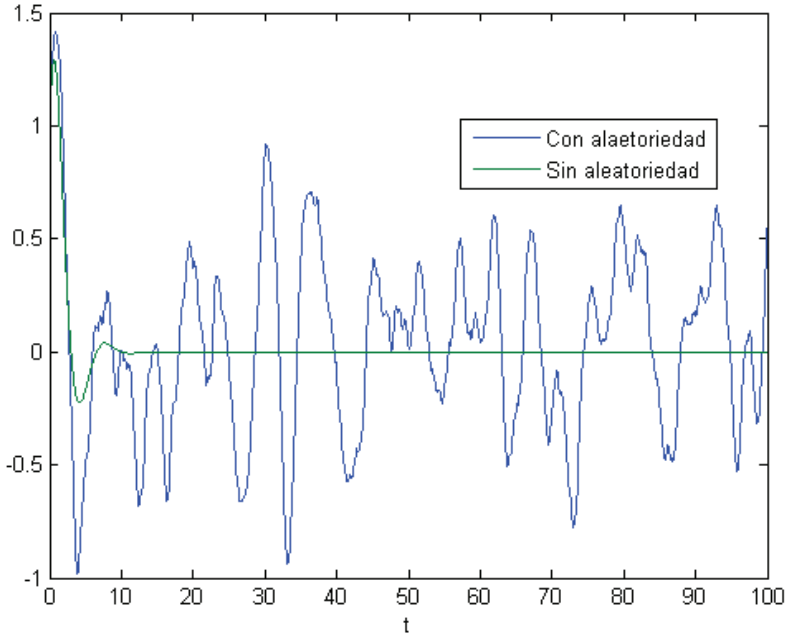

Figura 4.1: Solución simulada del proceso X para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador lineal.

estacionario X_s, los cuales están resumidos en la tabla 4.1

Media	0
Varianza	$\pi\sigma/4\alpha\omega_0^2$
Asimetría	0
Curtosis	3

Tabla 4.1: Propiedades probabilísticas estacionarias del proceso X_s.

La varianza estacionaria en este caso toma el valor de $\pi/20$, lo cual también puede ser apreciado en la figura 4.5. El calcular estas propiedades nos permite establecer que el comportamiento que presenta el proceso X para esta partícula Browniana, es similar al de una variable Gaussiana cuando el valor de t ha aumentado, en efecto, de la tabla 4.1, se observa que para cualquier valor de los parámetros α y ω_0^2, la media tiende a ser cero y el coeficiente de asimetría se anula, es decir, se presenta una simetría, y que, por el valor de la curtosis, este proceso presenta una distribución similar a la distribución normal. Por tanto, sobre la distribución que sigue el proceso X, para valores altos del tiempo t, es el de una variable Gaussiana $\mathcal{N}(0; \pi/20)$.

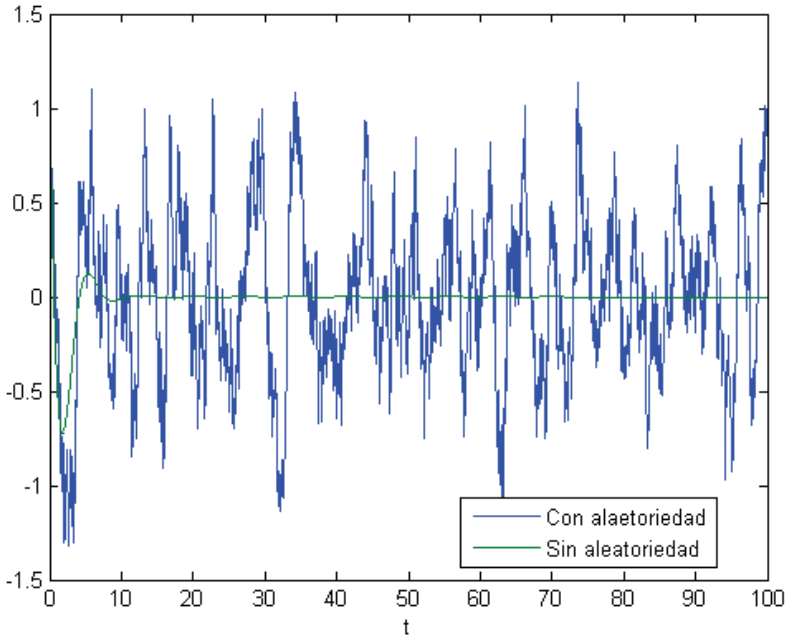

Figura 4.2: Solución simulada del proceso $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador lineal.

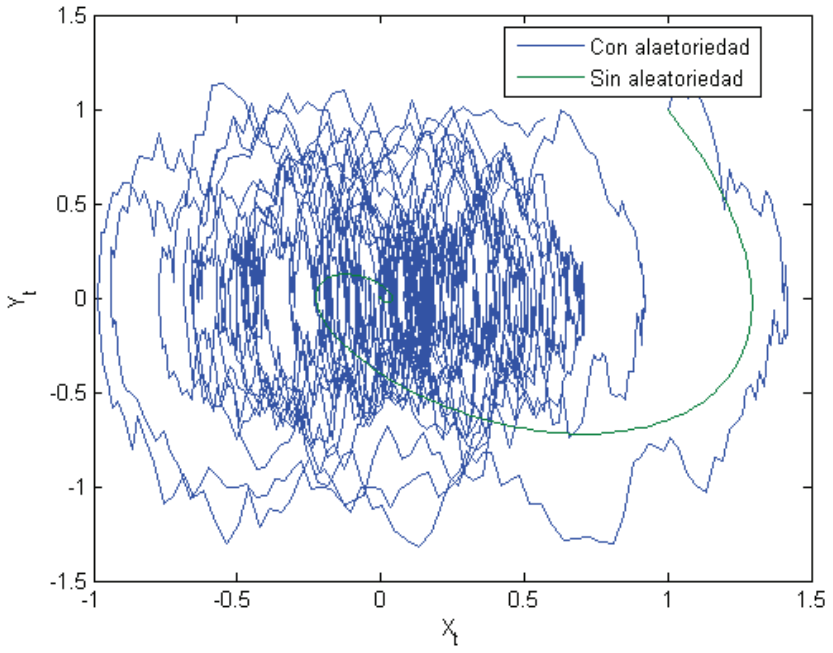

Figura 4.3: Diagrama de fase X vs $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador lineal.

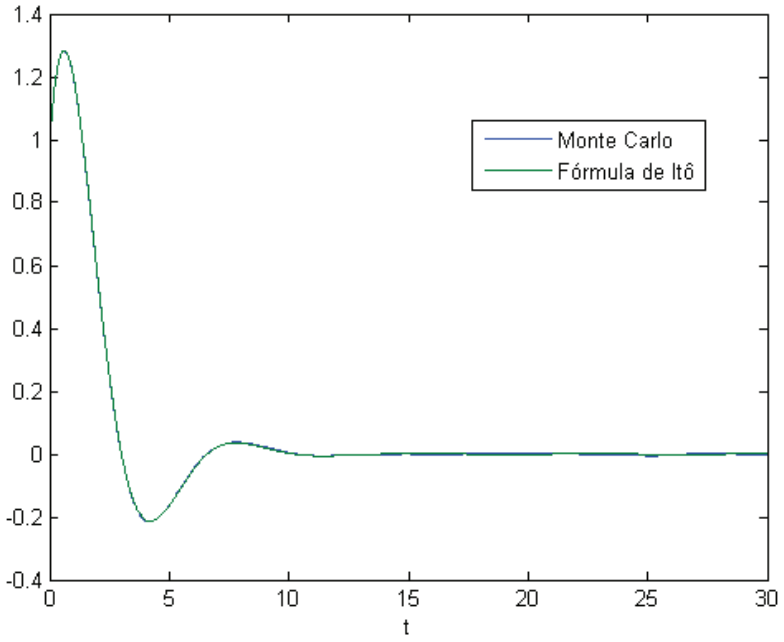

Figura 4.4: Media obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal.

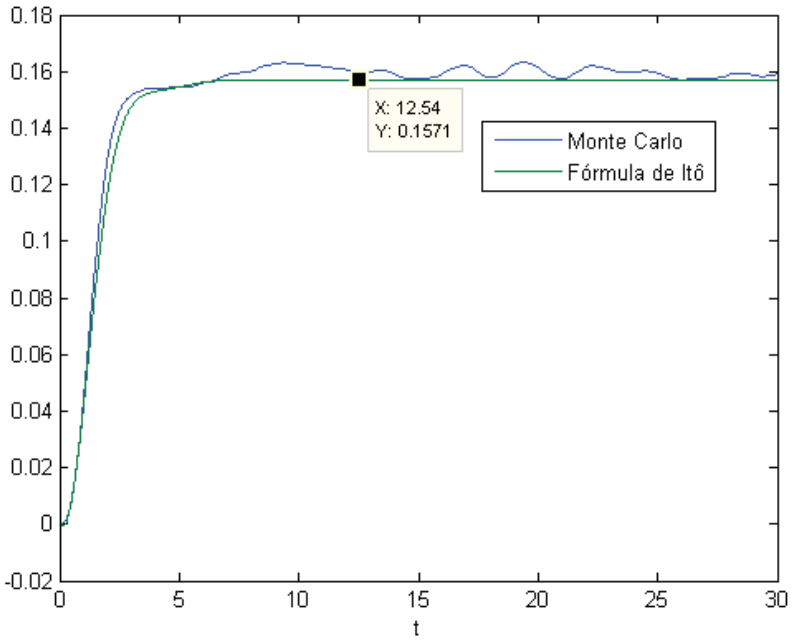

Figura 4.5: Varianza obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal.

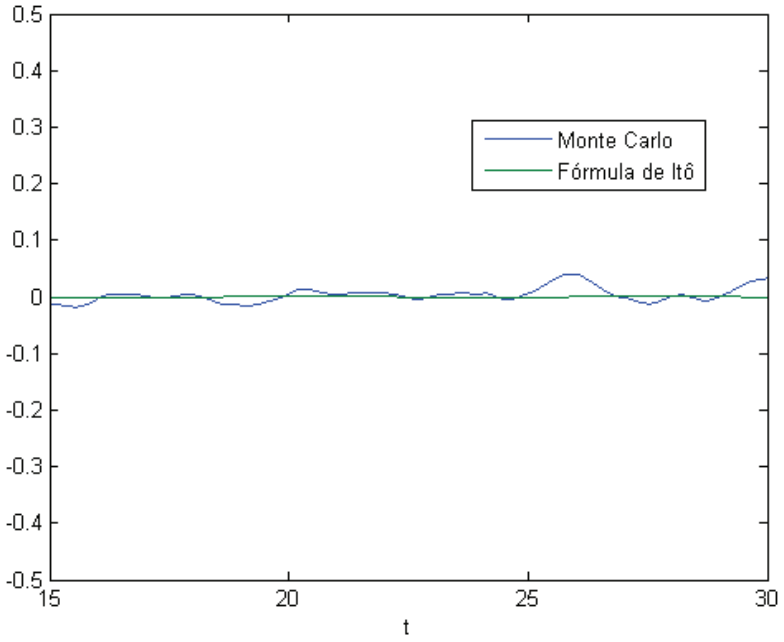

Figura 4.6: Asimetría obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[15, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal.

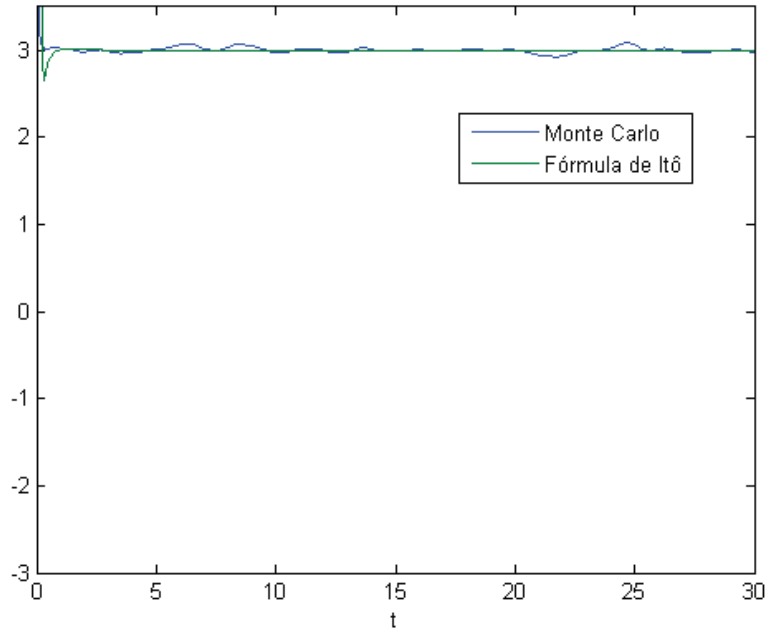

Figura 4.7: Curtosis obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$ con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 0{,}1$, oscilador lineal.

4.3.2. Cálculos de momentos 2

Se calculan la media y la varianza del oscilador no lineal (4.15) con $X(0) = x_0$, $\dot{X}(0) = \dot{x}_0$. Gracias a la ecuación (4.16) se obtiene que $a_1(\mathbf{x}) = x_2$, $a_2(\mathbf{x}) = -(ax_1 + bx_1^3 + \delta x_2)$ y $b_{22}(\mathbf{x}) = \pi\sigma$, que verifican el teorema de existencia y unidad, entonces, la ecuación para los momentos del proceso de difusión $\mathbf{Z} = (X_1, X_2)$, está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(p,q;t) &= p\mu(p-1,q+1;t) - qa\mu(p+1,q-1;t) - qb\mu(p+3,q-1;t) \\ &\quad -q\delta\mu(p,q;t) + \frac{\pi\sigma q(q-1)}{2}\mu(p,q-2;t).\end{aligned}$$

A partir de esta ecuación se determina el sistema de ecuaciones diferenciales para los momentos de orden $s = 1$ y $s = 2$, dado por,

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(1,0;t) &= \mu(0,1;t) \\ \dot{\mu}(0,1;t) &= -a\mu(1,0;t) - b\mu(3,0;t) - \delta\mu(0,1;t) \\ \dot{\mu}(2,0;t) &= 2\mu(1,1;t) \\ \dot{\mu}(1,1;t) &= \mu(0,2;t) - a\mu(2,0;t) - b\mu(4,0;t) - \delta\mu(1,1;t) \\ \dot{\mu}(0,2;t) &= -2a\mu(1,1;t) - b\mu(3,1;t) - 2\delta\mu(0,2;t) + \pi\sigma\end{aligned} \quad . \tag{4.21}$$

como puede verse se han obtenido términos de momentos de orden más alto, lo que no permite encontrar de primera mano dichos momentos; para conseguir una solución a este sistema existen algunas herramientas, como lo es linealizar la respectiva ecuación diferencial estocástica, perturbar los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica, o el método de la clausura, el cual es establecido de tres maneras diferentes: (1) clausura de momento central, consiste en hacer cero los momentos centrales de un orden superior a un valor $r > 0$, conocido como nivel de clausura, (2) la clausura Gaussiana, que establece que los momentos mayores a 3, tienen valores a los que se esperarían de una variable Gaussiana, y (3) la clausura acumulada, para la cual los momentos mayores a un nivel de clausura r son cero, ver [8], p. 195. El trato que se le da al sistema (4.21) es similar al dado en [8], en donde gracias a los criterios de clausura de momento central y Gaussiana, con nivel de clausura $r = 2$, y a las relaciones

$$E[(X - \mu(1,0;t))^3] = \mu(3,0;t) - 3\mu(1,0;t)\mu(2,0;t) + 2\mu(1,0;t)^3,$$

$$\begin{aligned} E[(X-\mu(1,0;t))^4] &= \mu(4,0;t) - 4\mu(1,0;t)\mu(3,0;t) \\ &\quad +6\mu(1,0;t)^2\mu(2,0;t) - 3\mu(1,0;t)^4. \end{aligned}$$

$$E[(X-\mu(1,0;t))^4] = 3(\mu(2,0;t) - \mu(1,0;t)^2)^2.$$

se obtienen las siguientes ecuaciones, para los momentos de orden superior,

$$\mu(3,0;t) = 3\mu(1,0;t)\mu(2,0;t) - 2\mu(1,0;t)^3, \tag{4.22}$$

$$\mu(4,0;t) = 3\mu(2,0;t)^2 - 2\mu(1,0;t)^4, \tag{4.23}$$

$$\mu(3,1;t) = -2\mu(1,0;t)^3\mu(0,1;t) + 3\mu(2,0;t)\mu(1,1;t). \tag{4.24}$$

Entonces, a partir del sistema de ecuaciones (4.21) y de las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, del cual se calcularán la media y la varianza.

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(1,0;t) &= \mu(0,1;t) \\ \dot{\mu}(0,1;t) &= -a\mu(1,0;t) - b(3\mu(1,0;t)\mu(2,0;t) - 2\mu(1,0;t)^3) - \delta\mu(0,1;t) \\ \dot{\mu}(2,0;t) &= 2\mu(1,1;t) \\ \dot{\mu}(1,1;t) &= \mu(0,2;t) - a\mu(2,0;t) - b(3\mu(2,0;t)^2 - 2\mu(1,0;t)^4) - \delta\mu(1,1;t) \\ \dot{\mu}(0,2;t) &= -2a\mu(1,1;t) - b(-2\mu(1,0;t)^3\mu(0,1;t) + 3\mu(2,0;t)\mu(1,1;t)) \\ &\quad -2\delta\mu(0,2;t) + \pi\sigma \end{aligned} \tag{4.25}$$

Se han tomado $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$; con $\sigma = 1$, dentro del intervalo de tiempo $[0, 30]$, con valor inicial $X(0) = \dot{X}(0) = 1$. Y se ha procedido a resolver el sistema (4.25) utilizando un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden, para lo cual se ha particionado el intervalo de tiempo en $N = 4000$ nodos, ver apéndice [B]; una vez conseguidos los momentos, la varianza ha sido calculada.

Adicionalmente, al resultado que se ha obtenido por medio de la fórmula de Itô,

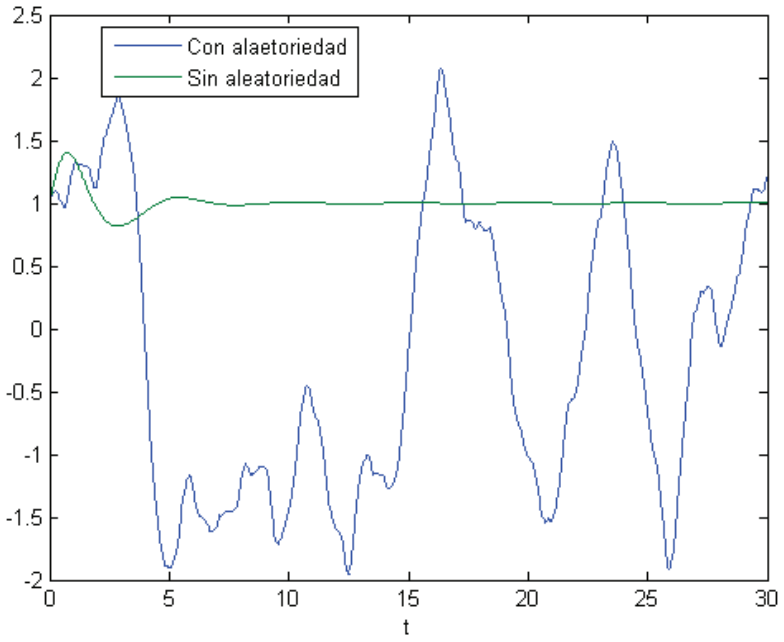

Figura 4.8: Solución simulada del proceso X para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0,30]$, oscilador de Duffing.

se obtuvo los resultados por medio de la simulación de Monte Carlo, para lo cual se ha simulado la solución por el método de Euler-Maruyama de la ecuación (4.16) unas $M = 10000$ veces, para luego calcular las propiedades buscadas utilizando los comandos de MATLAB ya establecidos para estos términos. El código utilizado puede ser revisado en el apéndice [B]. En las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 puede apreciarse una de las soluciones simuladas, presentando la posición, la velocidad y el diagrama de fase del proceso de difusión $Z = (X, \dot{X}) = (X1, X2)$, respectivamente, cada una acompañada con su equivalente sin aleatoriedad. En las figuras 4.11, 4.12 puede apreciarse las gráficas de la media y de la varianza obtenidas para una partícula Browniana que presenta un movimiento gobernado por un oscilador de Duffing, en verde por medio de la fórmula de Itô y en azul por medio de la simulación de Monte Carlo. Como puede apreciarse los resultados son aceptables y pueden ser mejorados conforme se simule mayor cantidad de soluciones, sin embargo, es suficiente notar que en ambos casos el comportamiento de cada termino calculado tiende a tomar un valor constante cuando el tiempo se ve incrementado.

Si se considera, además que el proceso **Z** llega a ser estacionario cuando $t \to \infty$, entonces, tomando $\dot{\mu}(p, q; t) = 0$, se obtienen los momentos estacionarios del pro-

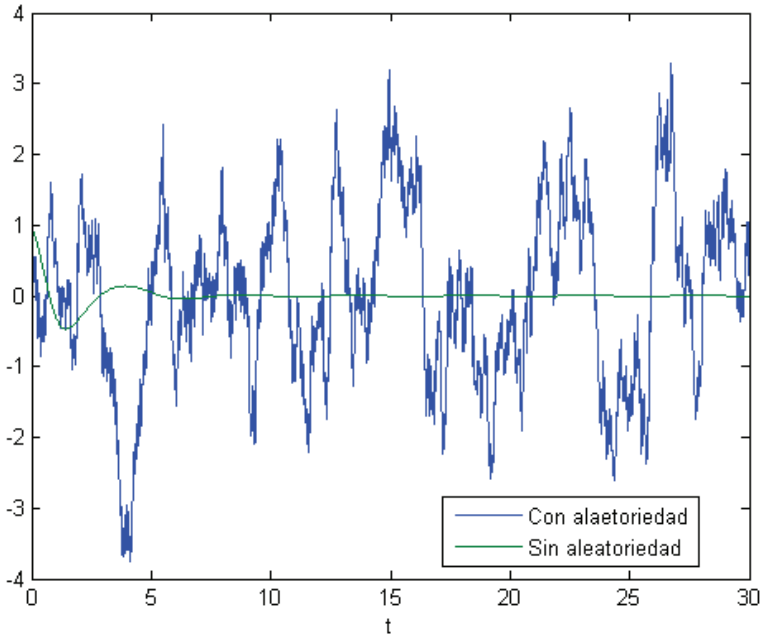

Figura 4.9: Solución simulada del proceso $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador de Duffing.

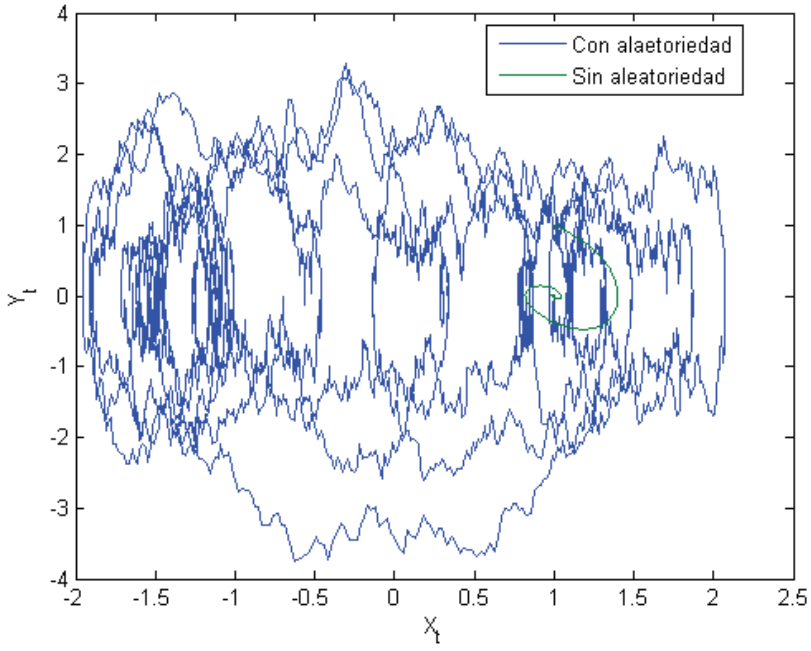

Figura 4.10: Diagrama de fase X vs $\dot{X}$ para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, oscilador de Duffing.

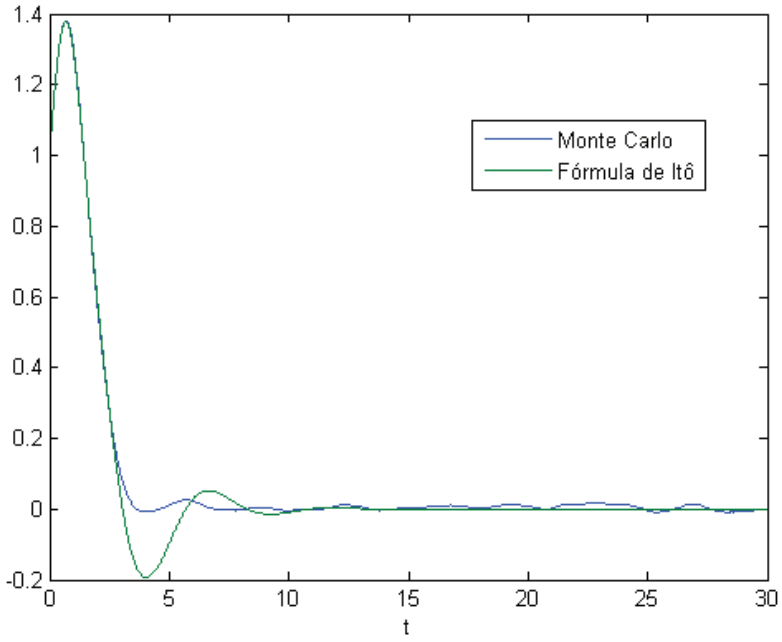

Figura 4.11: Media obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, con $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$ y $\sigma = 1$, oscilador de Duffing.

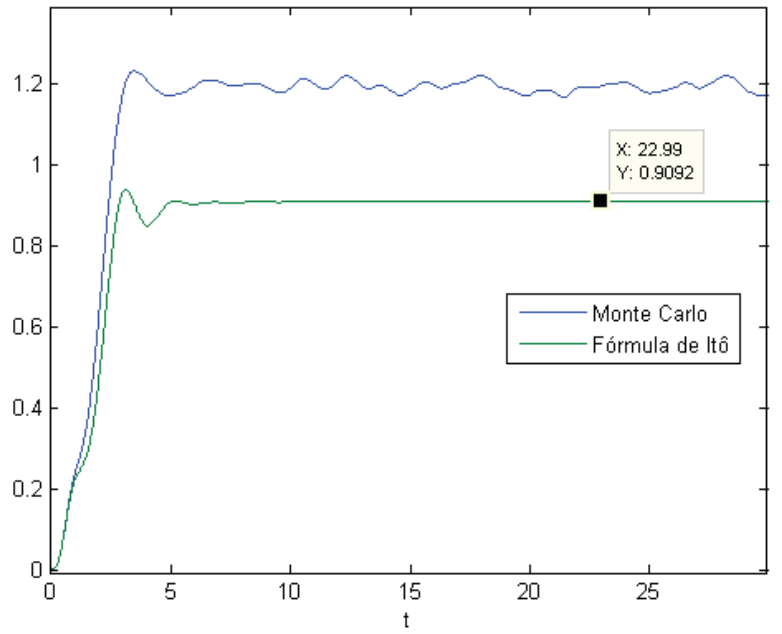

Figura 4.12: Varianza obtenida para valores iniciales $X(0) = \dot{X}(0) = 1$ en $[0, 30]$, con $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$ y$\sigma = 1$, oscilador de Duffing.

ceso estacionario X_s, para lo cual que $\mu(1,0) = 0$ es de vital importancia, para determinar que la varianza estacionaria está dada por $\frac{a}{6b}\left[\pm\sqrt{1+\frac{6b\pi\sigma}{a^2\delta}}-1\right]$, siendo en este caso aproximadamente igual a 0,9092, lo que también puede apreciarse en la figura 4.12, además es importante notar que la varianza que se obtiene por medio de la simulación de Monte Carlo difiere del valor encontrado por la aplicación de la fórmula de Itô, debido a que en este caso se ha utilizado el método de clausura, sin embargo, como puede verse se presenta un comportamiento similar al esperado realmente.

Respecto a la distribución del proceso X, está presenta un comportamiento similar al de una variable Gaussiana $\mathcal{N}(0;0{,}9092)$, con el valor obtenido por medio de la fórmula de Itô, gracias a la utilización de los criterios de clausura.

4.3.3. Cálculo de la ecuación de Fokker-Planck 1

Se calcula la densidad estacionaria de transición de proceso X que verifica la ecuación (4.13), para lo cual se considera al proceso de difusión $\mathbf{Z} = (X, \dot{X}) = (X_1, X_2)$ solución de la ecuación diferencial estocástica dada por (4.14), entonces, por (4.11),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial[x_2 f]}{\partial x_1} + \frac{\partial[(\omega^2 x_1 + 2\alpha x_2) f]}{\partial x_2} + \frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \tag{4.26}$$

si se considera que el proceso llega a ser estacionario cuando $t \to \infty$, entonces, f_s la densidad de transición estacionaria, verifica la ecuación

$$-\frac{\partial[x_2 f_s]}{\partial x_1} + \frac{\partial[(\omega^2 x_1 + 2\alpha x_2) f_s]}{\partial x_2} + \frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_2^2} = 0. \tag{4.27}$$

Es posible determinar una solución por medios algebraicos, para esto se considera la energía total del oscilador que está dada por $H(X_1, X_2) = u(X_1) + \frac{\dot{X}_2}{2}$, en donde u representa al potencial, que actúa en el oscilador, cuya derivada es $u'(x) = \omega^2 x$. Entonces, se obtiene que,

$$H(X_1, X_2) = \frac{\omega^2 X_1^2 + X_2^2}{2}$$

con sus derivadas parciales dadas por,

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1} = \omega^2 X_1 \text{ y } H_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2} = X_2,$$

gracias a lo cual la ecuación (4.27) se re escribe por

$$-\frac{\partial[H_2 f_s]}{\partial x_1}+\frac{\partial[(H_1+2\alpha H_2)f_s]}{\partial x_2}+\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_2^2}=0. \tag{4.28}$$

Para obtener la solución se debe suponer que existe una función g tal que $f_s(\mathbf{x}) = g(H(\mathbf{x}))$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Al tomar sus derivadas se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial H_2 f_s}{\partial x_1} = g'(H)H_1H_2,$$

$$\frac{\partial(H_1+2\alpha H_2)f_s}{\partial x_2} = g'(H)H_1H_2 + 2\alpha g(H) + 2\alpha g'(H)(H_2)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_2^2} = g''(H)(H_2)^2 + g'(H)H_{22} = g''(H)(H_2)^2 + g'(H).$$

si, además, se supone que f_s es una función de H, gracias a lo anterior y a la ecuación (4.28), se tiene,

$$2\alpha\frac{\partial[H_2 g(H)]}{\partial x_2}+\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 g(H)}{\partial x_2^2}=0, \tag{4.29}$$

La solución, es decir f_s se obtiene tomando en cuenta que la ecuación anterior no depende de x_1, lo cual por las consideraciones a y c hechas en la sección 4.2, da como resultado $2\alpha g(H) + \frac{\pi\sigma}{2}g' = 0$. Finalmente, al integrar se obtiene la densidad de transición estacionaria f_s,

$$f(\mathbf{x}; t|\mathbf{x}_0; t_0) = ce^{-\frac{4\alpha}{\pi\sigma}[\omega^2 x_1^2 + x_2^2]}. \tag{4.30}$$

en donde c es una constante que depende de las condiciones iniciales. En la figura 4.13 puede verse la densidad de transición, para el proceso X que modela la dinámica de la partícula Browniana que presenta un movimiento oscilatorio lineal y aleatorio, para lo cual se han tomado $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 1$, en $[-5, 5] \times [-5, 5]$ correspondiente a una respuesta subcrítica, su implementación puede verse en el apéndice [B].

4.3.4. Cálculo de la ecuación de Fokker-Planck 2

Se calcula la densidad estacionaria de transición de proceso X que verifica la ecuación (4.15) para lo cual se considera al proceso de difusión $\mathbf{Z} = (X, \dot{X}) = (X_1, X_2)$ solución de la ecuación diferencial estocástica dada por (4.16), entonces,

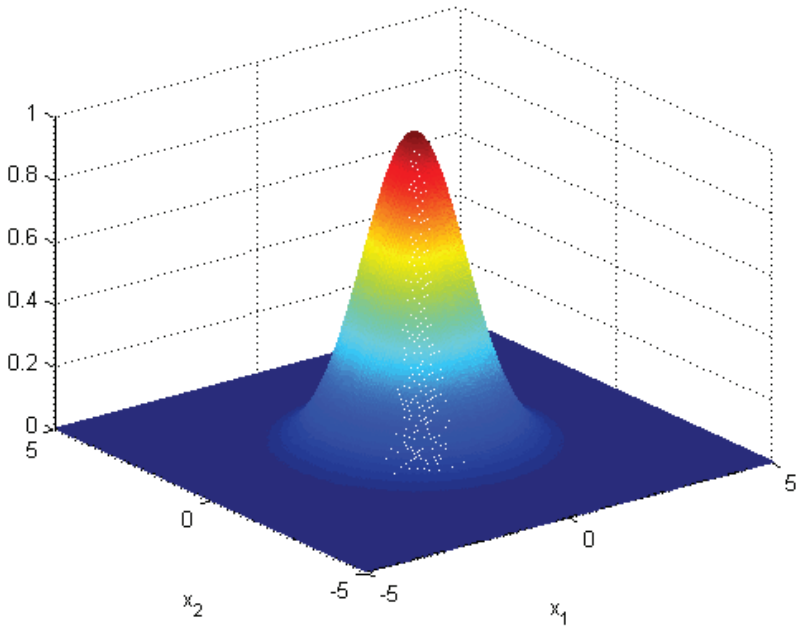

Figura 4.13: Densidad de transición de una partícula Browniana con movimiento oscilatorio con respuesta subcrítica con $\alpha = 0{,}5$, $\omega_0^2 = 1$ y $\sigma = 1$ en $[-5,5] \times [-5,5]$.

por (4.11),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial [x_2 f]}{\partial x_1} + \frac{\partial [(ax_1 + bx_1^3 + \delta x_2) f]}{\partial x_2} + \frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \tag{4.31}$$

si, además, se considera que el proceso llega a ser estacionario cuando $t \to \infty$, entonces, f_s la densidad de transición estacionaria, verifica la ecuación

$$-\frac{\partial [x_2 f_s]}{\partial x_1} + \frac{\partial [(ax_1 + bx_1^3 + \delta x_2) f_s]}{\partial x_2} + \frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_2^2} = 0. \tag{4.32}$$

De manera similar a como se hizo en la aplicación anterior, se determina su solución, notando en este caso que, la energía total del oscilador que está dada por

$$H(X_1, X_2) = \frac{aX_1^2}{2} + \frac{bX_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2},$$

en donde $u'(x) = ax_1 + bx_1^3$, con derivadas parciales dadas por,

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial x_1} = aX_1 + bX_1^3 \text{ y } H_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2} = X_2,$$

obteniendo así,

$$-\frac{\partial[H_2 f_s]}{\partial x_1}+\frac{\partial[(H_1+\delta H_2)f_s]}{\partial x_2}+\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_2^2}=0. \tag{4.33}$$

Realizando la suposición sobre g se obtiene lo siguiente respecto de sus derivadas:

$$\frac{\partial H_2 f_s}{\partial x_1}=g'(H)H_1H_2,$$

$$\frac{\partial(H_1+\delta H_2)f_s}{\partial x_2}=g'(H)H_1H_2+\delta g(H)+\delta g'(H)(H_2)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_2^2}=g''(H)(H_2)^2+g'(H)H_{22}=g''(H)(H_2)^2+g'(H).$$

Con la suposición respecto a que f_s es una función de H, gracias a lo anterior y a la ecuación (4.33), se tiene,

$$\delta\frac{\partial[H_2 g(H)]}{\partial x_2}+\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\partial^2 g(H)}{\partial x_2^2}=0, \tag{4.34}$$

de manera análoga al caso anterior se obtiene la solución la densidad de transición estacionaria f_s, la cual es,

$$f(\mathbf{x};t|\mathbf{x}_0;t_0)=ce^{-\frac{\delta}{\pi\sigma}[ax_1^2+0{,}5bx_1^4+x_2^2]}. \tag{4.35}$$

en donde c es una constante que depende de las condiciones iniciales. En la figura 4.14 puede verse la densidad de transición para el proceso X que modela la dinámica de la partícula Browniana que presenta un movimiento oscilatorio dado por el oscilador de Duffing, para lo cual se han tomado $a=-1$, $b=1$, $\delta=1$ y $\sigma=1$, en $[-2,2]\times[-2,2]$, su implementación puede verse en el apéndice [B].

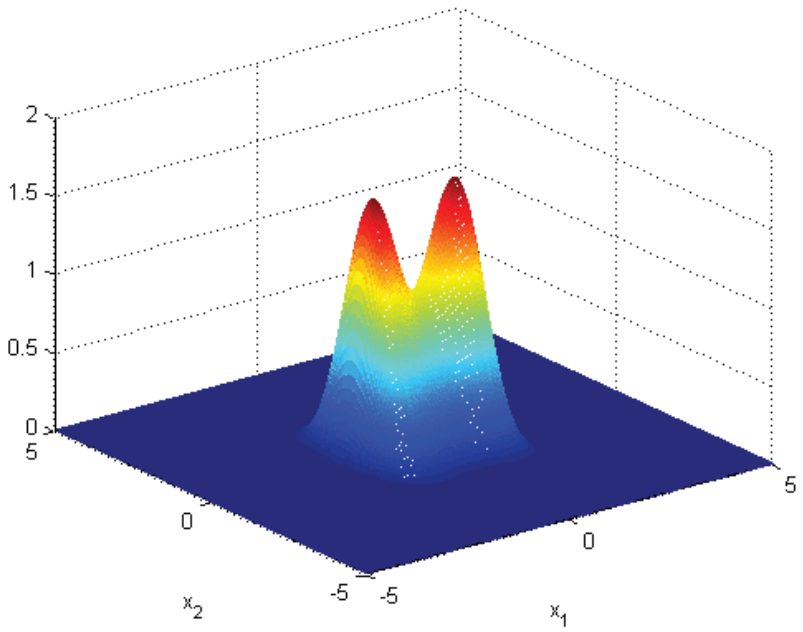

Figura 4.14: Densidad de transición de una partícula Browniana con movimiento oscilatorio dado por un oscilador de Duffing con $a = -1$, $b = 1$, $\delta = 1$ y $\sigma = 1$, en $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

1. El estudio del movimiento Browniano permite describir la dinámica de partículas sumergidas en un medio viscoso que a la vez se encuentran bajo el efecto de una fuerza aleatoria, producto de colisiones con partículas del mismo tipo y con moléculas del medio.

2. El no ser diferenciable es una característica importante del movimiento Browniano y repercute en la integración, además, permite obtener una función a valores reales que a pesar de ser continua no es diferenciable en ningún punto.

3. Se observó que un movimiento Browniano es un proceso de Markov y Gaussiano junto con la propiedad de ser una martingala cuadrado integrable.

4. La simulación de trayectorias de un movimiento Browniano se las ha podido realizar en MATLAB para lo cual se ha aprovechado que este programa permite generar números aleatorios con distribuciones específicas, poniendo así, de manifiesto la gran utilidad de este programa.

5. El simular trayectorias tanto de un movimiento Browniano como de procesos continuos obtenidos a través del mismo ha permitido al autor observar diferentes dinámicas, dentro de las cuales, el efecto de la aleatoriedad heredado por el movimiento Browniano ha sido claramente notorio, a pesar de que en algunos casos su acción ha sido disminuida.

6. El desarrollar un estudio enfocado a la construcción de la integral de Itô ha

permito determinar las diferencias, entre la integración estocástica y determinista, cómo lo han sido la noción de convergencia y los resultados obtenidos.

7. Algunas de las propiedades del movimiento Browniano, como ser un proceso de Markov, la continuidad y el ser martingala cuadrado integrable son heredadas a los procesos de difusión.

8. El utilizar la fórmula de Itô, permitió entender de una mejor forma algunas de las propiedades y particularidades del cálculo estocástico, tanto en el cálculo de diferenciales estocásticas, como en el de integrales estocásticas.

9. La utilización de la fórmula de Itô ha demostrado que en ciertos casos puede ser beneficioso al momento de calcular soluciones de un determinado tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas, ya que como se pudo observar cuando es posible, una solución explícita es determinada.

10. Es posible determinar propiedades probabilísticas tales como la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis de un proceso de difusión $\mathbf{X}$ por medio de la utilización de la fórmula de Itô, con la condición de que sus coeficientes de deriva y de difusión verifiquen las condiciones del teorema 3.2 y que sean polinomios de este proceso.

11. Una vez calculadas las propiedades enunciadas anteriormente, la simulación de Monte Carlo confirmó los resultados obtenidos, sin embargo, es importante notar que el utilizar está técnica provoca que se invierta un tiempo considerable en la búsqueda de un resultado aceptable.

12. Se pudo observar cómo la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis, calculados a partir de su respectivo sistema de ecuaciones, tomaron valores estacionarios a partir de ciertos valores de tiempo, además un hecho importante fue el observar cómo coincidió el valor de estas cantidades estacionarias al calcularlas haciendo nula la derivada del momento considerado dentro del sistema de ecuaciones.

13. La aplicación de la fórmula de Itô para determinar la media, varianza, asimetría y curtosis, llevó a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución fue obtenida por medio del método numérico, mientras que para la determinación de la densidad estacionaria se obtuvo una ecuación diferencial con derivadas parciales, cuya solución es dicha densidad, y que fue determinada por medios algebraicos. Lo cual a criterio del autor es un hecho de impor-

tancia debido a que en ambos se inició con una ecuación diferencial estocástica y se obtuvo una formulación determinista del problema.

14. Pudo establecerse que la distribución del proceso, que verificaba cada sistema oscilatorio, presentaba comportamiento similar al de una variable Gaussiana.

15. La densidad de transición estacionaria calculada, en ambos casos considerados en la aplicación, depende explícitamente de los valores de los parámetros de cada oscilador; también puede verse gráficamente que en ambos casos es suave y se anula fuera de un determinado dominio con la particularidad de que en el caso lineal tiene un máximo global y que en el no lineal presenta dos máximos globales, lo cual se debe al potencial que se utilizó para el oscilador de Duffing.

5.2. Recomendaciones

1. Estudiar diferentes métodos numéricos que permitan resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, cuyo orden de convergencia sea mayor al tratado en este trabajo.

2. Realizar un estudio sobre las propiedades probabilísticas consideradas, para una partícula Browniana cuyo movimiento se encuentra bajo el efecto de diversas dinámicas, por medio de la aplicación de la fórmula de Itô.

3. Realizar un estudio comparativo entre las propiedades obtenidas en el ítem anterior con las mismas propiedades obtenidas por medio de una simulación de Monte Carlo.

Apéndice A

Conceptos y definiciones probabilísticas

A.1. Trayectorias

TEOREMA A.1 (Criterio de Kolmogorov)**.** *Si* $\{X(t) : t \geq 0\}$ *es un proceso estocástico a valores reales e* $I \subset [0, \infty)$ *un intervalo cerrado, y existen tres constantes* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *tales que:*

$$E[\mid X(t+h) - X(t) \mid^{\alpha}] \leq \gamma h^{1+\beta}, \tag{A.1}$$

entonces $\lim_{h\to 0} \sup_{s,t\in I, |s-t|<h} \mid X(s,\omega) - X(t,\omega) \mid = 0$ *c.s. esto es, que casi toda trayectoria de X es uniformemente continua en I. (Mircea, p. 110).*

PROPOSICIÓN A.2. *Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas c. s.*

Demostración. A partir de la definición del movimiento Browniano y de su función generadora de momentos, se obtiene que $E[\mid B(t+s) - B(s) \mid^4] = 3t^2$, entonces, tomando $\alpha = 4$, $\beta = 1$, con $\gamma \geq 3$, por el teorema A.1, se concluye que las trayectorias del movimiento Browniano son uniformemente continuas en I y por tanto continuas en I *c.s.* □

DEFINICIÓN A.1. *Un proceso se dice que tiene trayectorias de variación finita sobre compactos si casi todas sus trayectorias son de variación acotada sobre cada intervalo compacto de* $[0, \infty)$.

LEMA A.3. ▪ *Si X es un proceso adaptado con trayectorias càdlàg de variación finita sobre compactos, entonces X es una semimartingala ([12], p. 55).*

- *Si X es una martingala cuadrado integrable con trayectorias càdlàg, entonces X es una semimartingala ([12], p. 55).*
- *Si X es una martingala local cuadrado integrable con trayectorias càdlàg, entonces X es una semimartingala ([12], p. 55).*
- *Si X es una martingala local con trayectorias continuas, entonces X es una semimartingala ([12], p. 55).*

DEFINICIÓN A.2. *Un proceso X adaptado, con trayectorias càdlàg es descomponible si existe una martingala cuadrado integrable localmente M y un proceso A con trayectorias càdlàg de variación finita sobre compactos tal que $M(0) = A(0) = 0$ y ([12], p. 55).*

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t). \tag{A.2}$$

En la fórmula de Itô, como en la integral estocástica el proceso de covariación cuadrática aparece en su formulación, como se ha visto, se trató el caso en que la semimartingala en consideración es continua, pero de una forma más general cuando se trabaja una semimartingala no necesariamente continua aparece el término $[X, X]^c$, además, cuando se desea trabajar con la integral estocástica de Stratonovich, este término es parte de la transformación de la integral de Itô a Stratonovich.

DEFINICIÓN A.3. *La parte continua trayectoria por trayectoria $[X, X]^c(t)$ de $[X, X](t)$ está definida por*

$$\begin{aligned} [X, X](t) &= [X, X]^c(t) + X(0)^2 + \sum_{0<s\leq t} (\triangle X(s))^2 \\ &= [X, X]^c(t) + \sum_{0\leq s\leq t} (\triangle X(s))^2 \end{aligned}$$

([12], p. 70).

A.2. Integral de Stratonovich

TEOREMA A.4. *La integral de Fisk-Stratonovich o integral de Stratonovich de Y con respecto a X, para un $t \geq 0$, está dada por,*

$$\int_0^t Y(s-) \circ dX(s) = \int_0^t Y(s-) dX(s) + \frac{1}{2}[Y, X]^c(t). \tag{A.3}$$

([12], p. 82).

Observación: Como un ejemplo de esta integral si $X = Y = B$, $\int B \circ dB = \frac{B^2}{2}$, para $t \geq 0$, esto, debido a que, al ser B una semimartingala continua $[B,B]^c(t) = [B,B](t) = t$, lo que compensa que en este caso no aparezca el término extra $-\frac{t}{2}$, lo que expone la diferencia en cuanto al calcular una integral de Itô, ver ejemplo 3. Además, a pesar de que la integral de Stratonovich es más amigable en cuanto a su cálculo, ya que es similar al resultado que se obtendría en el caso determinista, el trabajar con la integral de Itô, puede ser beneficioso, por ejemplo, en este caso se puede observar que la integral de Itô, es una martingala, mientras que la de Stratonovich, no. Además, si un proceso de difusión X satisface la ecuación

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dB(s), \tag{A.4}$$

entonces, su representación en el sentido de Stratonovich, está dada por,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \widetilde{a}(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s)) \circ dB(s), \tag{A.5}$$

en donde $\widetilde{a}(t,x) = a(t,x) - \frac{1}{2}b(t,x)\frac{\partial b(t,x)}{\partial x}$, asumiendo que b posee segunda y primera derivada parcial continua respecto a x y a t, respectivamente, ver [8], ejemplo 4.39., para la demostración, gracias a los supuestos y la aplicación de la fórmula de Itô a $U(s) = b(s, X(s))$ junto con el teorema A.4 hacen posible este resultado. Es importante notar que, si el ruido es aditivo esto es, b es independiente de X ambas representaciones son equivalentes y sus soluciones son las mismas *c. s.*

A.3. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias

TEOREMA A.5. *Se considera una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función continua y localmente Lipschitz respecto en $x \in \mathbb{R}^d$, con Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$. Entonces, dado $(t_0, x_0) \in \Omega$ es posible determinar a $I_\epsilon = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset \mathbb{R}$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$, dentro del cual el problema de Cauchy:* $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *tiene solución única, para todo $(t, x(t)) \in \Omega$ y todo $t \in I_\epsilon$.*

Apéndice B

Códigos

```
To=0; T=30; N=3000; dt=(T-To)/(N-1); t=To:dt:T; M=25000; % tiempo
alfa=0.5; omega=1; sigma=0.1; xo=1; yo=1;% parámetros
% Almacenan los momentos de orden u(p,q;t) para p,q=1,2,3,4
u10=xo*ones(1,N); u01=yo*ones(1,N);
u20=(xo^2)*ones(1,N); u11=xo*yo*ones(1,N); u02=(yo^2)*ones(1,N);
u30=(xo^3)*ones(1,N); u21=(yo*xo^2)*ones(1,N); u12=(xo*yo^2)*ones(1,N);
u03=(yo^3)*ones(1,N); u40=(xo^4)*ones(1,N); u31=(yo*xo^3)*ones(1,N);
u22=(xo^2)*(yo^2)*ones(1,N);
u13=(xo*yo^3)*ones(1,N); u04=(yo^4)*ones(1,N);
% Simulación de Monte Carlo
X1m=zeros(M,N); X1m(1,:)=xo;
Y1m=zeros(M,N); Y1m(1,:)=yo; c=[0 sqrt(pi*sigma)]';
% Cálculo de los momentos de orden p+q=1,2,3,4
x1=[xo yo]';x2=[xo^2 xo*yo yo^2]';x3=[xo^3 yo*xo^2 xo*yo^2 yo^3]';
x4=[xo^4 yo*xo^3 (xo^2)*yo^2 xo*yo^3 yo^4]';
A1=[0 1;-omega -2*alfa];
A2=[0 2 0;-omega -2*alfa 1;0 -2*omega -4*alfa];
c2=[0 0 pi*sigma]';
A3=[0 3 0 0;-omega -2*alfa 2 0;0 -2*omega -4*alfa 1;...
    0 0 -3*omega -6*alfa];
c31=[0 0 pi*sigma 0]'; c32=[0 0 0 3*pi*sigma]';
A4=[0 4 0 0 0;-omega -2*alfa 3 0 0;0 -2*omega -4*alfa 2 0;...
    0 0 -3*omega -6*alfa 1;0 0 0 -4*omega -8*alfa];
```

Figura B.1: Código para el cálculo de momentos 1.

```
c41=[0 0 pi*sigma 0 0]';
c42=[0 0 0 3*pi*sigma 0]';
c43=[0 0 0 0 6*pi*sigma]';
for i=1:N-1
    x1=x1+A1*x1*dt;
    u10(1,i+1)=x1(1); u01(1,i+1)=x1(2);
    x2=x2+dt*(A2*x2+c2);
    u20(1,i+1)=x2(1);
    u11(1,i+1)=x2(2);
    u02(1,i+1)=x2(3);
    x3=x3+dt*(A3*x3+c31*u10(1,i+1)+c32*u01(1,i+1));
    u30(1,i+1)=x3(1); u21(1,i+1)=x3(2);
    u12(1,i+1)=x3(3); u03(1,i+1)=x3(4);
    a=A4*x4+c41*u20(1,i+1)+c42*u11(1,i+1)+c43*u02(1,i+1);
    x4=x4+dt*a;
    u40(1,i+1)=x4(1); u31(1,i+1)=x4(2); u22(1,i+1)=x4(3);
    u13(1,i+1)=x4(4); u04(1,i+1)=x4(5);
end
vx=u20-u10.^2; % Cálculo de la varianza
sx=(u30-3*u10.*abs(vx)+2*u10.^3).*(abs(vx).^-1.5); % asimetría
kux=(u40-4*u10.*u30+6*abs(vx).*u10.^2+3*u10.^4).*(abs(vx).^-2); %cur
for k=1:M-1
    x1m=[xo yo]';
    for i=1:N-1
        x1m=x1m+A1*x1m*dt+sqrt(dt)*randn*c;
        X1m(k+1,i+1)=x1m(1); Y1m(k+1,i+1)=x1m(2);
    end
end
m=mean(X1m);
v=var(X1m);
s=skewness(X1m);
c=kurtosis(X1m);
figure(1)
plot(t,m,t,u10)
legend('Monte Carlo','Fórmula de Itô','location','Best')
xlabel('t')
```

Figura B.2: Código para el cálculo de momentos 1 (continuación).

```
figure(2)
plot(t,v,t,vx)
legend('Monte Carlo','Fórmula de Itô','location','Best')
xlabel('t')
figure(3)
plot(t,s,t,sx)
axis ([ 0.5*(T-To) T -.5 .5 ])
legend('Monte Carlo','Fórmula de Itô','location','Best')
xlabel('t')
figure(4)
plot(t,c,t,kux)
axis ([ To T -3 3.5 ])
legend('Monte Carlo','Fórmula de Itô','location','Best')
xlabel('t')
```

Figura B.3: Código para el cálculo de momentos 1 (continuación).

```
To=0; T=30; N=4000; dt=(T-To)/(N-1); t=To:dt:T; M=10000; % tiempo
a=-1; b=1; delta=1; sigma=1; xo=1; yo=1; % parámetros
% Almacenan los momentos de orden u(p,q;t) para p,q=1,2,3,4
u10=xo*ones(1,N); u01=yo*ones(1,N);
u20=(xo^2)*ones(1,N); u11=xo*yo*ones(1,N); u02=(yo^2)*ones(1,N);
% Simulación de Monte Carlo
Xm=zeros(M,N); Xm(1,:)=xo;
Ym=zeros(M,N); Ym(1,:)=yo;
Am=[0 1;-a -delta]; c=[0 1]'; d=[0 sqrt(pi*sigma)]';
% Cálculo de los momentos de orden p+q=1,2
x1=[xo yo xo^2 xo*yo yo^2]';
for i=1:N-1
    x=x1;
    A=[x(2);-a*x(1)-b*(3*x(1)*x(3)-2*x(1)^3)-delta*x(2);...
2*x(4);x(5)-a*x(3)-b*(3*x(3)^2-2*x(1)^4)-delta*x(4);...
-2*a*x(4)-2*b*(-2*x(2)*x(1)^3+3*x(3)*x(4))-2*delta*x(5)+pi*sigma];
    B1=A;
        x=x1+0.5*dt*B1;
```

Figura B.4: Código para el cálculo de momentos 2.

```
    A=[x(2);-a*x(1)-b*(3*x(1)*x(3)-2*x(1)^3)-delta*x(2);...
2*x(4);x(5)-a*x(3)-b*(3*x(3)^2-2*x(1)^4)-delta*x(4);...
-2*a*x(4)-2*b*(-2*x(2)*x(1)^3+3*x(3)*x(4))-2*delta*x(5)+pi*sigma];
    B2=A;
    x=x1+0.5*dt*B2;
    A=[x(2);-a*x(1)-b*(3*x(1)*x(3)-2*x(1)^3)-delta*x(2);...
    2*x(4);x(5)-a*x(3)-b*(3*x(3)^2-2*x(1)^4)-delta*x(4);...
-2*a*x(4)-2*b*(-2*x(2)*x(1)^3+3*x(3)*x(4))-2*delta*x(5)+pi*sigma];
    B3=A;
    x=x1+dt*B3;
    A=[x(2);-a*x(1)-b*(3*x(1)*x(3)-2*x(1)^3)-delta*x(2);...
2*x(4);x(5)-a*x(3)-b*(3*x(3)^2-2*x(1)^4)-delta*x(4);...
-2*a*x(4)-2*b*(-2*x(2)*x(1)^3+3*x(3)*x(4))-2*delta*x(5)+pi*sigma];
    B4=A;
    x1=x1+dt*(B1+2*B2+2*B3+B4)/6;
    u10(i+1)=x1(1);
    u01(i+1)=x1(2);
    u20(i+1)=x1(3);
    u11(i+1)=x1(4);
    u02(i+1)=x1(5);
end
vx=u20-u10.^2; %Cálculo de la varianza
for k=1:M-1
    xm=[xo yo]';
    for i=1:N-1
        xm=xm+Am*xm*dt-b*(xm(1)^3)*c*dt+sqrt(dt)*randn*d;
        Xm(k+1,i+1)=xm(1); Ym(k+1,i+1)=xm(2);
    end
end
m=mean(Xm);
v=var(Xm);
figure(1)
plot(t,m,t,u10)
legend('Monte Carlo','Fórmula de Itô','location','Best')
xlabel('t')
```

Figura B.5: Código para el cálculo de momentos 2 (continuación).

```
figure(2)
plot(t,v,t,vx)
legend('Monte Carlo','Fórmula de Itô','location','Best')
xlabel('t')
```

Figura B.6: Código para el cálculo de momentos 2 (continuación).

```
Xi=-5; Xf=5; N=300; dx=(Xf-Xi)/N;
Yi=-5; Yf=5; M=400; dy=(Yf-Yi)/M;
[X,Y] = meshgrid(Xi:dx:Xf,Yi:dy:Yf);
alfa=0.5; omega=1; sigma=1;
x=exp(-(alfa/sigma^2)*(omega*X.^2+Y.^2));
figure(1)
mesh(X,Y,x)
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
```

Figura B.7: Código para la densidad de transición 1.

```
Xi=-5; Xf=5; N=300; dx=(Xf-Xi)/N;
Yi=-5; Yf=5; M=400; dy=(Yf-Yi)/M;
[X,Y] = meshgrid(Xi:dx:Xf,Yi:dy:Yf);
alfa=-1; beta=1; delta=1; sigma=1;
x=exp(-(delta/sigma^2)*(alfa*X.^2+0.5*beta*X.^4+Y.^2));
figure(1)
mesh(X,Y,x)
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
```

Figura B.8: Código para la densidad de transición 2.

Notaciones y abreviaturas

$\dot{x}$, x'	Primera derivada de x respecto a la variable independiente
$\ddot{x}$, x''	Segunda derivada de x respecto a la variable independiente
$E[X\|\mathcal{F}]$	Esperanza condicional de X respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	σ-álgebra de conjuntos de Ω
P	Medida de probabilidad $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$
$\mathbb{R}^d$	Conjunto de los números reales en d dimensiones
$P[\mathbf{X}(t) \in A\|\mathcal{F}_t]$	Probabilidad de que la variable aleatoria pertenezca a $A \subset \mathbb{R}^d$ dada la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$
$P[\mathbf{X}(t) \in A\|\mathbf{X}_s]$	Probabilidad de que la variable aleatoria pertenezca a $A \subset \mathbb{R}^d$ dada la variable aleatoria $\mathbf{X}_s$
$\sigma(\mathbf{X}(s), 0 \leq s \leq t)$	σ-álgebra generada por la variable aleatoria $\mathbf{X}$
$c.\,s.$	Casi seguramente
$v.\,a.$	Variable aleatoria.
$v.a.i.i.d.$	Variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.
$E[X]$	Esperanza de la variable X
$E[\|X\|]$	Esperanza del valor absoluto de la variable X
B	Un movimiento Browniano unidimensional
$m.\,s.$	Convergencia en media cuadrática
L_2	Espacio de funciones cuadrado integrables
Φ	Función de distribución de la variable aleatoria normal estándar
$\ln x$	Logaritmo natural de x
$\triangle p_n$	Tamaño de la partición
v_X	Variación total de un proceso X
$cov(s,t)$	Covarianza de un proceso $\mathbf{X}$, donde $cov(s,t) = E[(\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)])(\mathbf{X}(s) - E[\mathbf{X}(s)])^T]$

$\frac{\partial g}{\partial x_i}$	Primera derivada parcial de g respecto a x_i
$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$	Segunda derivada parcial de g respecto a x_i y a x_j
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$	Producto escalar entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$
$\parallel \mathbf{z} \parallel = (\sum_{i=1}^{d} z_i^2)^{1/2}$	La norma Euclidiana en $\mathbb{R}^d$
$\parallel \mathbf{b} \parallel_m = (\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d'} b_{ij}^2)^{1/2}$	La norma matricial en $\mathbb{R}^{d \times d'}$
$a \wedge b$	El mínimo entre a y b
$a \vee b$	El máximo entre a y b

Bibliografía

[1] K. Alligood, T. Sauer, y J. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York, New York, 1996.

[2] E. Bibbona, G. Panfilo, y P. Tavella. *The Ornstein-Uhlenbeck process as a model of a low-pass filtered white noise*. U.S.A., 2008.

[3] K. Chung y R. Williams. *Introduction to Stochastic Integrtion*. Birkhäuser, New York, 1990.

[4] F. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, Londres, 2005.

[5] P. Kloeden y E. Platen. *Numerical Solution to Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] M. Lakshmanan y S. Rajasekar. *Nonlinear Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2003.

[7] D. Lemons. *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2002.

[8] G. Mircea. *Stochastic Calculus: Applications in Science and Engineering*. Birkhäuser, Boston, 2002.

[9] P. Möters y Y. Peres. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2008.

[10] E. Nelson. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Pricenton University Press, U.S.A., 2001.

[11] D. Nualart. *Cálculo Estocástico*. Technical report, Universidad de Barcelona.

[12] P. Protter. *Stochastic Integrtion and Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[13] L. Rincón. *Introducción a los Procesos Estocásticos*. Technical report, Facultad de Ciencias UNAM, México DF, 2012.

[14] S. Ross. *Simulation*. Academic Press, University of Southern California, 2013.

[15] R. Rubstein. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley and Sons, Inc., 1981.

[16] J. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Aplications*. Springer, New York, 2001.

[17] M. Suárez y F. Tapia. *Interaprendizaje de Estadística Básica*. Universidad Técnica del Norte, Ibarra, 2012.

[18] D. Wagg y S. Neild. *Nonlinear Vibration with Control*. Springer, Bristol, 2010.