ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA HOMOLOGÍA PERSISTENTE DE UNA FILTRACIÓN DE COMPLEJOS DE CLIQUE

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

LEONARDO DANIEL MONTOYA PÉREZ
leodanielmontoya@gmail.com

Director: DAVID EMMANUEL PAZMIÑO PULLAS, MMATH
david.pazmino@epn.edu.ec

QUITO, MAYO 2018

DECLARACIÓN

Yo LEONARDO DANIEL MONTOYA PÉREZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Leonardo Daniel Montoya Pérez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por LEONARDO DANIEL MONTOYA PÉREZ, bajo mi supervisión.

David Emmanuel Pazmiño Pullas, MMath
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mis amigos, quienes aguantando mis ocurrencias, siempre fueron un enclave donde sobreponerme a los bajones de la vida.

A David Pazmiño, quien estuvo presto a desarrollar el tema presentado y ha sido de gran influencia en mi formación profesional.

DEDICATORIA

A mis padres, que me han apoyado a lo largo de mi carrera y mis locuras.

Índice general

1. Introducción **3**

2. Homotopía **5**

3. Homología **21**

4. Homología persistente de complejos de Clique **32**

4.1. Grafos 32

4.2. Homología persistente 36

5. Reducciones de Grafos que Preservan Homología Persistente **44**

Índice de figuras

2.1. Homotopía entre $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ y $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. 11

2.2. Proceso para hallar la función p. 11

2.3. Homotopía entre α y $\alpha \cdot e_{x_1}$. 13

3.1. Complejo simplicial 1 22

3.2. Elementos de $C_2(X)$. 23

3.3. Elementos de $C_1(X)$. 23

3.4. Complejo simplicial 2. 25

3.5. Ejemplo de función simplicial. 28

3.6. Ejemplo de función no simplicial. 28

4.1. Complejo de clique asociado a un grafo no dirigido. 33

4.2. Complejo de clique asociado a un digrafo. 35

4.3. Potencias de grafo no dirigido. 36

4.4. Potencias de digrafo. 37

4.5. Complejos de clique asociados a potencias de un grafo no dirigido. . 40

4.6. Complejos de clique asociados a potencias de un digrafo. 42

5.1. Grafo no dirigido y su complejo de clique asociado. 45

5.2. Subgrafo de la figura 5.1. 46

5.3. Complejos de clique de los grafos reducidos. 54

5.4. Complejos de clique de los digrafos reducidos. 55

5.5. Potencias del grafo G (sin reducciones). 56

5.6. Potencias del grafo G, tras eliminar "beat points" 57

Índice de cuadros

4.1. Homología persistente de un grafo no dirigido. 41
4.2. Homología persistente de un digrafo 43

5.1. Homología persistente de un grafo no dirigido 55
5.2. Homología persistente de un digrafo 56

Resumen

En este trabajo se presentan las nociones básicas de homotopía de espacios topológicos y homología simplicial, así como la relación entre estas dos. Posteriormente se presenta la definción de complejo de clique y su relación con las potencias de un grafo para introducir el concepto de homología persistente de una filtración. Seguidamente, se introduce el concepto de *beat-point* y se prueba su incidencia con la homotopía de un complejo. Finalmente, se definen transformaciones que permiten preservar la homología persistente de una filtración de complejos de clique, a la vez que se reducen puntos de las potencias del grafo y por ende se facilitan los cálculos de homología.

Abstract

In this paper the basic notions of homotopy for topological spaces and simplicial homology are presented, as well as the relationship between them. Later, the definition of clique complex is given and its relationship with the power of a graph is presented to introduce the concept of persistent homology for a graph filtration. Afterwards, the concept of beat-point is introduced and its effect on the homotopy of the complex is proven. Finally, transformations which preserve the persistent homology of a clique complex filtration, while reducing the points of the graph powers and thus the calculations of its homology, are defined.

Capítulo 1

Introducción

En la tarea de analizar datos, los métodos tradicionales dependen casi completamente de los resultados de la teoría de probabilidades. En casos de datos ”díficles de tratar", los métodos estadísticos pueden obtener solo una parte de la información disponible en la muestra y se limitan a dar características estándar (media, moda, varianza, etc) que pueden ser compartidas por varios cuerpos de datos sin relación entre sí, lo que limita grandemente la capacidad de inferencia y la posibilidad de obtener resultados significativos para una investigación.

En la década de 1990, Patrizio Frosini y sus colaboradores introducen la noción de funciones tamaño, que resultarían la primera descripción del concepto de 0-homología persistente [5]. Ya para el 2000, Edelsbrunner, Letscher y Zomorodian, independientemente, la formalizan y presentan un algoritmo para su cálculo [3].

Posteriormente, se notó el potencial de la homología persistente para el estudio de formas y su aplicación al análisis de imágenes. En 2005, Gunnar Carlsson presenta una representación visual de la misma, en la forma de un código de barras [2]. En 2008, Robert Ghrist describe detalladamente el concepto de homología persistente para cuerpos de datos y el potencial que esta tiene para el análisis de datos dispersos poco aptos para los métodos tradicionales, dando origen al análisis topológico de datos [6].

El análisis topológico de datos ha sido implementado por paquetes de software estadísticos [13],[4]. No obstante, el problema de la complejidad computacional que conlleva el cálculo de la homología persistente se muestra difícil de enfrentar.

En este contexto, dado que la complejidad computacional del cálculo de homologías para un grafo depende de su número de vértices, se plantea un algoritmo de reducción de estos nodos sin afectar a su homología. Para esto es necesario la

comprensión de las operaciones que preservan propiedades topológicas en espacios finitos, así como el estudio de la homología persistente de filtraciones de un grafo dado.

En el presente trabajo, en el Capítulo 2, se presentan nociones básicas de homotopía de espacios topológicos. A continuación, en el Capítulo 3, se introduce la homología simplicial y las propiedades homológicas preservadas por homotopía. El Capítulo 4 incluye las definiciones concernientes a teoría de grafos, sus potencias y sus complejos de clique asociados, así como la definición de homología persistente para una filtración de complejos de clique. Posteriormente, en el Capítulo 5 se presentan reducciones de puntos en un grafo que preservan tanto la homotopía como la homología persistente para la filtración dada por los complejos de clique de sus potencias. Finalmente, se presenta un algoritmo de reducción para grafos de modo que su homología persistente no se altere.

Capítulo 2

Homotopía

En topología, uno de los problemas más comunes y complicados de resolver es determinar si dos espacios topológicos son homeomorfos o no. Una estrategia, simple en concepto pero compleja en ejecución, consiste en encontrar alguna propiedad topológica que se cumpla en solamente uno de los espacios, de darse el caso, los espacios no pueden ser homeomorfos. Sin embargo, hallar tales propiedades puede llegar a ser muy complicado, ya que, a menudo pares de espacios topológicos comparten muchas de las propiedades topológicas más comunes tales como compacidad, conexidad, conexidad por caminos, entre otras.

Dadas las circunstancias es necesario hallar propiedades topológicas más específicas que permitan diferenciar espacios entre sí. La idea dada por la topología algebraica consiste en hallar invariantes algebraicos a partir de los cuales sea posible distinguir entre espacios. Tales propiedades son entre otras: el grupo fundamental, grupos de homotopía y grupos de homología. Este trabajo se centrará en estos últimos.

Espacios homeomorfos entre sí tienen grupos fundamentales isomorfos. Así, para diferenciar entre espacios será suficiente diferenciar entre sus grupos fundamentales, tarea que resulta sencilla en casos específicos como, por ejemplo, cuando uno de los dos grupos es trivial. La definición de grupo fundamental descansa sobre los conceptos de homotopía y concatenación de caminos. Por tanto, para definir el grupo fundamental y la forma de usarlo, será necesario presentar dichos conceptos.

DEFINICIÓN 2.1 (Homotopía) *Sean X e Y dos espacios topológicos, sean $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ dos funciones. Se dice que f es* **homotópica** *a g si existe una función*

continua $F : X \times I \to Y$ tal que:

$$F|_{X\times\{0\}} = f \quad y \quad F|_{X\times\{1\}} = g$$

Donde $I = [0,1]$. A la función F se la llama una **homotopía** *entre f y g, y dada su existencia escribimos $f \simeq g$.*

Notemos aquí que, para cada $t \in I$, podemos definir $F(x,t) = f_t(x)$ que es una función de X en Y. Por tanto, podemos pensar en F como una familia de funciones parametrizada por t que gradualmente transforman la función f en la función g.

Un efecto interesante se da en el caso especial en el que f y g son caminos.

DEFINICIÓN 2.2 (Camino) *Sean $I = [0,1]$ y X un espacio topológico. Una función continua $\alpha : I \to X$ se dice un* ***camino*** *de $\alpha(0)$ a $\alpha(1)$. A $\alpha(0)$ se le llama punto incial y a $\alpha(1)$ punto final.*

Entonces la homotopia entre caminos se define como.

DEFINICIÓN 2.3 (Homotopía de caminos) *Sean X un espacio topológico, $\alpha : I \to X$ y $\beta : I \to X$ dos caminos en X entre los puntos $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Se dice que α y β son* **homotópicos** *si existe una función continua $H : I \times I \to X$ tal que:*

$$H|_{I\times\{0\}} = \alpha, \quad H|_{I\times\{1\}} = \beta$$

y para cada $t \in I$

$$H(0,t) = x_0 \quad y \quad H(1,t) = x_1.$$

A H se la llama una **homotopía de caminos** *y escribimos $\alpha \simeq_H \beta$ para dos caminos homotópicos o $\alpha \simeq \beta$ en caso de no existir confusión sobre la homotopia de caminos entre ambos.*

Si consideramos, igual que antes, para cada $t \in I$ la función $H(x,t) = \alpha_t(x)$, vemos que la segunda condición sencillamente expresa que $\alpha_t : I \to X$ es un camino de x_0 a x_1. En efecto, dada la condición para cada $t \in I$ tenemos $\alpha_t(0) = H(0,t) = x_0$ y $\alpha_t(1) = H(1,t) = x_1$.

Si tomamos al parámetro t como el tiempo, podemos pensar en H como una deformación continua que desplaza un camino hacia el otro.

Hasta aquí, hemos definido la homotopía de funciones y caminos. Sin embargo, para definir y usar el grupo fundamental debemos enfocarnos en una característica

sumamente útil de la homotopía entre caminos.

LEMA 2.4 *La homotopía de caminos es una relación de equivalencia.*

Demostración. Verifiquemos las propiedades de relación de equivalencia.

Definimos la función $F(x,t) = \alpha(x)$, para todo $t \in I$, la que es una homotopía de caminos entre α y sí mismo. Esto prueba la reflexividad.

Sean α y β dos caminos en X homotópicamente equivalentes y H una homotopía entre ambos. Definimos $H_1(x,t) = H(x, 1-t)$, para todo $x \in X$, y verificamos que es la homotopía entre β y α. En efecto, tenemos que para todo $x \in I$

$$H_1(x,0) = H(x,1) = \beta(x), \quad H_1(x,1) = H(x,0) = \alpha(x),$$

en otras palabras

$$H_1|_{I\times\{0\}} = \beta(x), \quad H_1|_{I\times\{1\}} = \alpha(x),$$

y por otro lado para cada $t \in I$ tenemos

$$H_1(0,t) = H(0,1-t) = x_0 \quad \text{y} \quad H_1(1,t) = H(1,1-t) = x_1.$$

Así, H_1 es una homotopía y esto prueba la simetría.

Sean α, β y γ caminos entre $x_0 \in X$ y $x_1 \in X$, tales que $\alpha \simeq_{H_1} \beta$ y $\beta \simeq_{H_2} \gamma$ donde H_1 y H_2 son las homotopías respectivas. Definimos

$$G(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x,2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Probaremos que esta es una homotopía entre α y γ. Notemos que para todo $x \in I$,

$$G(x,0) = H_1(x,0) = \alpha(x) \quad \text{y} \quad G(x,1) = H_2(x,1) = \gamma(x)$$

es decir,

$$G|_{I\times\{0\}} = \alpha(x) \quad \text{y} \quad G|_{I\times\{1\}} = \gamma(x).$$

Por otro lado, para todo $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$G(0,t) = H_1(0,2t) = x_0 \quad \text{y} \quad G(1,t) = H_1(1,2t) = x_1,$$

además, para todo $t \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$G(0,t) = H_2(0, 2t-1) = x_0 \quad \text{y} \quad G(1,t) = H_2(1, 2t-1) = x_1.$$

Así, G es una homotopía y esto prueba la transitividad. $\square$

OBSERVACIÓN 2.5 *La demostración de este lema puede ser alterada menormente para llegar a demostrar que la homotopía entre funciones es también una relación de equivalencia.*

Ahora presentamos el concepto de concatenación de caminos que nos permitirá definir el grupo fundamental.

DEFINICIÓN 2.6 (Concatenación de caminos) *Sean X un espacio topológico, α y β dos caminos en X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. La* **concatenación** *de α y β es el camino $\alpha \cdot \beta$ definido por*

$$(\alpha \cdot \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que forma un camino entre $\alpha(0)$ y $\beta(1)$.

La concatenación de caminos es entonces crear un camino colocando un camino a continuación del otro, cuando sea posible hacerlo, es decir, cuando el punto final del primer camino es punto inicial del segundo, en tal caso diremos que los caminos son **concatenables**.

OBSERVACIÓN 2.7 *Si tenemos tres caminos α, β, γ sobre X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$ y $\beta(1) = \gamma(0)$ podemos formar el camino $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ definido por*

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(s) = \begin{cases} (\alpha \cdot \beta)(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Sin embargo, es posible también realizar el camino $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ definido por

$$(\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma))(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ (\beta \cdot \gamma)(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es decir, el camino $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ recorre $[0, \frac{1}{4}]$ con el camino α, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ con el camino β y $[\frac{1}{2}, 1]$ con el camino γ, mientras $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ recorre $[0, \frac{1}{2}]$ con el camino α, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ con el camino β y $[\frac{3}{4}, 1]$ con el camino γ. De donde es claro que $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Esto

significa que la concatenación de caminos no es asociativa. No obstante, la noción de homotopía presenta una alternativa a esta situación como veremos más adelante.

Recordemos ahora que, al tener una relación de equivalencia, podemos definir las clases de equivalencia respecto de esta relación. Así, para un camino α sobre X, la **clase de homotopía de caminos de** α se define como el conjunto

$$[\alpha] = \{\beta : I \to X \text{ continua tal que } \beta \simeq \alpha\}.$$

Veremos que la concatenación de caminos induce una operación sobre las clases de homotopía de caminos que cumple propiedades de grupoide, es decir, es asociativa, existen el elemento neutro e inversos por izquierda y derecha.

TEOREMA 2.8 *Sean α y β caminos concatenables sobre X, la operación*

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

está bien definida.

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$, $\beta_1, \beta_2 \in [\beta]$ y F, G homotopías entre α_1 y α_2 y β_1 y β_2, respectivamente. Definimos la función

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s-1,t) & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta función es una homotopía entre $\alpha_1 \cdot \beta_1$ y $\alpha_2 \cdot \beta_2$. En efecto, tenemos que para todo $s \in [0, \frac{1}{2}]$

$$H(s,0) = F(2s,0) = \alpha_1(2s) \quad \text{y} \quad H(s,1) = F(2s,1) = \alpha_2(2s),$$

mientras que para todo $s \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$H(s,0) = G(2s-1,0) = \beta_1(2s-1) \quad \text{y} \quad H(s,1) = G(2s-1,1) = \beta_2(2s-1),$$

lo que significa que

$$H|_{I \times \{0\}} = \alpha_1 \cdot \beta_1 \quad \text{y} \quad H|_{I \times \{1\}} = \alpha_2 \cdot \beta_2.$$

Por otro lado, tenemos que para todo $t \in I$,

$$H(0,t) = F(0,t) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) \quad \text{y} \quad H(1,t) = \beta_1(1) = \beta_2(2).$$

□

Si tomamos las clases de homotopías de caminos junto con la operación de concatenación, podemos formar un grupoide por cuánto las propiedades de grupo se mantienen, excepto por el hecho de que la concatenación está definida solo para pares de caminos concatenables.

TEOREMA 2.9 *Para α, β y γ caminos concatenables sobre X. Se cumplen las siguientes propiedades:*

- **Asociatividad:** $[\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) = ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma]$. *Lo que da sentido a la operación* $[\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\gamma]$.
- **Neutro por izquierda y derecha:** *Dado $x \in X$ notamos por $e_x : I \to X$ el camino constante definido por $e_x(s) = x$, para todo $s \in I$. Si α es un camino en X de x_0 a x_1 tenemos:*

$$[\alpha] \cdot [e_{x_1}] = [\alpha] \quad y \quad [e_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha].$$

- **Inverso:** *Para un camino α sobre X de x_0 a x_1, el camino $\overline{\alpha}$, definido por $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$, es un camino de x_1 a x_0 y cumple que:*

$$[\alpha] \cdot [\overline{\alpha}] = e_{x_0} \quad y \quad [\overline{\alpha}] \cdot [\alpha] = e_{x_1}.$$

Demostración. Para la asociatividad tenemos que probar

$$[\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) = [\alpha] \cdot ([\beta \cdot \gamma]) = [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] = ([\alpha \cdot \beta]) \cdot [\gamma] = ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma]$$

que es equivalente a probar que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \simeq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Como hemos visto, estos caminos no son iguales por cuanto recorren el intervalo $[0,1]$ de manera diferente. Es así, que la homotopía requerida deberá transformar la forma de recorrer este intervalo como se muestra en la Figura 2.1.

De esta manera, una homotopía puede ser definida de la siguente manera: "Colapsar el cuadrado I^2 a través de una función p que colapse cada uno de los trapecios sobre su base y luego recorrer el camino $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$".

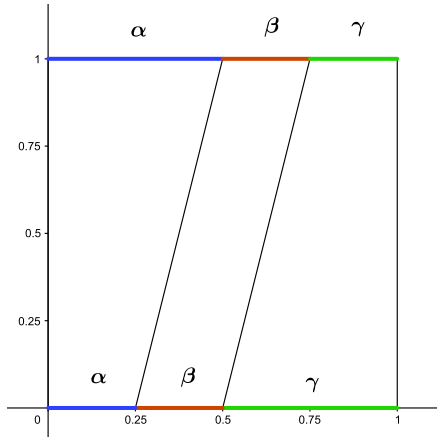


Figura 2.1: Homotopía entre $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ y $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Encontramos la función p como se muestra en la Figura 2.2. Tomamos puntos arbitrarios en cada uno de los trapecios que nombramos A, B y C y buscamos la recta que permita dirigirlos a la base de su trapecio.

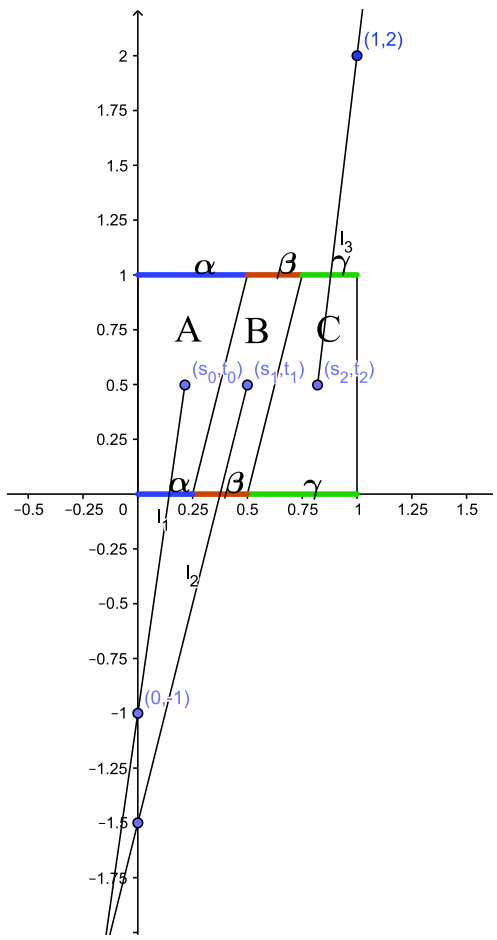


Figura 2.2: Proceso para hallar la función p.

Encontrando las ecuaciones de las rectas:

$$l_1 : t+1 = \frac{t_0+1}{s_0}s; \quad l_2 : t - t_0 = 4(s - s_0); \quad l_3 : t - 2 = \frac{2-t_2}{1-s_2}(s-1).$$

Luego, las imágenes de estos puntos deberán ser:

$$l_1|_{t=0} : s = \frac{s_0}{t_0+1}; \quad l_2|_{t=0} : s = s_0 - \frac{t_0}{4}; \quad l_3|_{t=0} : s = \frac{2s_2 - t_2}{2-t_2}.$$

Adicionalmente, es fácil hallar las rectas que son fronteras de los cuadriláteros como: $t = 4s - 1$ y $t = 4s - 2$. Con lo que tenemos que la función p está definida como

$$p(s,t) = \begin{cases} \frac{s}{t+1} & s \in [0, \frac{t+1}{4}], \\ s - \frac{t}{4} & s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}], \\ \frac{2s-t}{2-t} & s \in [\frac{t+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Luego recorremos el camino $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, es decir, hacemos

$$((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)(p(s,t)) = \begin{cases} \alpha(4p(s,t)) & p(s,t) \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4p(s,t) - 1) & p(s,t) \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}], \\ \gamma(2p(s,t) - 1) & p(s,t) \in [\frac{2}{4}, 1], \end{cases}$$

lo que define la función

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4s}{t+1}) & s \in [0, \frac{t+1}{4}], \\ \beta(4s - t - 1) & s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}], \\ \gamma(\frac{4s-t-2}{2-t}) & s \in [\frac{t+2}{4}, 1]. \end{cases}$$

Mostramos que F es una homotopía entre $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ y $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Tenemos que

$$F|_{I \times \{0\}} = F(s,0) = \begin{cases} \alpha(4s) & s \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta(4s - 1) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}], = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma, \\ \gamma(2s - 1) & s \in [\frac{2}{4}, 1] \end{cases}$$

por otro lado,

$$F|_{I\times\{1\}} = F(s,1) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2(2s-1)) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \gamma(2(2s-1)-1) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma),$$

lo que cumple las dos primeras condiciones, luego para cada $t \in I$

$$F(0,t) = \alpha\left(\frac{0}{t+1}\right) = \alpha(0) \quad \text{y} \quad F(1,t) = \gamma\left(\frac{4-t-2}{2-t}\right) = \gamma(1).$$

Para el neutro por derecha debemos probar que $\alpha \simeq \alpha \cdot e_{x_1}$. Siguiendo el mismo razonamiento de la demostración anterior debemos definir una función que colapse el cuadrado I^2 de la forma deseada y luego seguir el camino α. El proceso se muestra en la figura 2.3

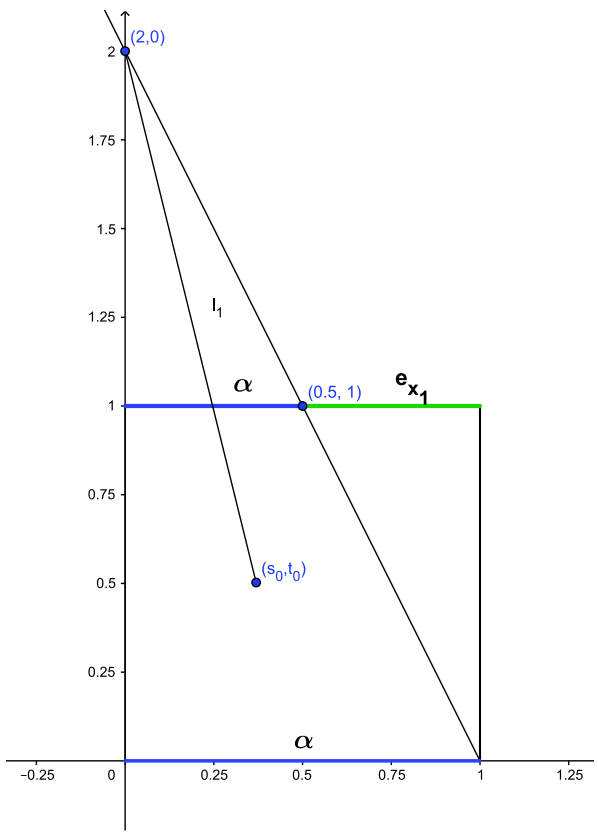


Figura 2.3: Homotopía entre α y $\alpha \cdot e_{x_1}$.

encontrando de la misma manera

$$l_1 : t - 2 = \frac{t_0 - 2}{s_0} s \Rightarrow l_1|_{t=0} : s = \frac{2s_0}{2 - t_0}$$

y la ecuación de la recta frontera $t = -2s + 2$, definimos la función p por

$$p(s,t) = \begin{cases} \frac{2s}{2-t} & s \in [0, \frac{2-t}{2}], \\ 1 & s \in [\frac{2-t}{2}, 1], \end{cases}$$

lo que determina la función

$$G(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2s}{2-t}) & s \in [0, \frac{2-t}{2}], \\ x_1 & s \in [\frac{2-t}{2}, 1]. \end{cases}$$

A continuación se demuestra que es una homotopía entre α y $\alpha \cdot e_{x_1}$. Tenemos

$$G|_{I \times \{0\}} = G(s,0) = \begin{cases} \alpha(s) & s \in [0,1], \\ x_1 & s \in [1,1] \end{cases} = \alpha,$$

y

$$G|_{I \times \{1\}} = G(s,1) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_1 & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \alpha \cdot e_{x_1},$$

Así se cumplen las dos primeras condiciones. Por otro lado, para cada $t \in I$

$$G(0,t) = \alpha(\frac{0}{2-t}) = \alpha(0) \quad \text{y} \quad G(1,t) = x_1.$$

La demostración del neutro por izquierda es similar.

Para el inverso debemos probar que $\alpha \cdot \overline{\alpha} \simeq e_{x_0}$. Para esto razonamos de la siguiente manera: para cada $t \in I$ definimos el camino θ_t que une el punto x_0 con el punto $\alpha(t)$ siguendo al misma ruta que α. Considerando t como un parámetro, tenemos una familia de caminos $\theta_t \cdot \overline{\theta_t}$ que recorren secciones del camino α y luego regresan al punto inicial. Por tanto, una homotopía está dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2ts) & s \in [1, \frac{1}{2}], \\ \alpha(2t(1-s)) & s \in [\frac{1}{2,1}]. \end{cases}$$

Que se puede verificar directamente es una homotopía entre $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ y e_{x_0}. $\square$

Un tipo especial de caminos a considerar son los llamados lazos, que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 2.10 (Lazo) *Sea X un espacio topológico. Un* **lazo** *es un camino α sobre X que cumple $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$. A x_0 se le llama punto base del lazo.*

Al usar solo lazos con un mismo punto base, todos los caminos considerados son concatenables, es decir, las clases de homotopía de lazos forman un grupo que llamaremos el grupo fundamental.

DEFINICIÓN 2.11 (Grupo Fundamental) *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto de las clases de homotopía de lazos con punto base x_0, junto con la operación de concatenación es llamado el* **grupo fundamental de X relativo al punto** x_0. *Es notado por $\pi_1(X, x_0)$.*

Ahora consideremos dos espacios topológicos X e Y, y una función continua entre ellos, $f : X \to Y$, tal que $f(x_0) = y_0$. Si α es un lazo con x_0 como punto base, tenemos que la composición $f \circ \alpha$ es un lazo con punto base y_0. Esto significa que f induce un morfismo entre los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

DEFINICIÓN 2.12 (Homomorfismo inducido) *Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $y_0 = f(x_0)$. Definimos el* **homomorfismo inducido por** *f relativo al punto x_0, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ por*

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

OBSERVACIÓN 2.13 *Si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, $Id_X : X \to X$ es una función continua y por tanto induce el morfismo*

$$(Id_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, Id_X(x_0)) \; = \; (Id_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

definido por

$$(Id_X)_*([\alpha]) = [Id_X \circ \alpha] = [\alpha],$$

lo que significa que

$$(Id_X)_* \; = \; Id_{\pi_1(X, x_0)}.$$

OBSERVACIÓN 2.14 *Si $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ son funciones continuas entre espacios topológicos tal que $h(x_0) = y_0$ y $k(y_0) = z_0$. Entonces para*

$[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ *se tiene que*

$$(k \circ h)_*[\alpha] = [(k \circ h) \circ \alpha] = [k \circ (h \circ \alpha)] = k_*[h \circ \alpha] = (k_* \circ h_*)([\alpha]).$$

Por lo tanto,

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

El grupo fundamental es una primera herramienta para la distinción entre espacios topológicos. Otra herramienta para diferenciar espacios puede venir directamente del concepto de homotopía.

DEFINICIÓN 2.15 (Equivalencia Homotópica) *Sean X e Y dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice una* **equivalencia homotópica** *si existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ y $g \circ f \simeq Id_X$. En este caso los dos espacios se dicen* **homotópicamente equivalentes** *o que tienen el mismo* **tipo de homotopía**.

Una consecuencia de esta definición es que si f es una equivalencia homotópica con inversa g tenemos que

$$f \circ g \simeq Id_Y \Rightarrow (f \circ g)_* = (Id_Y)_* \Rightarrow f_* \circ g_* = Id_{\pi_1(Y, y_0)}$$

y por otro lado

$$g \circ f \simeq Id_X \Rightarrow (g \circ f)_* = (Id_X)_* \Rightarrow g_* \circ f_* = Id_{\pi_1(X, x_0)},$$

de donde f_* es un isomorfismo de grupos con inverso g_* y por lo tanto,

$$\pi_1(X, x_0) \quad \textbf{es isomorfo a} \quad \pi_1(Y, y_0).$$

El término homotópicamente equivalentes al igual que la primera implicación en el resultado anterior se desprenden del teorema siguiente, para cuya demostración será útil enunciar un lema.

LEMA 2.16 *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $r : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ funciones continuas tales que $f \simeq r$ y $g \simeq h$. Entonces $g \circ f \simeq h \circ r$.*

Demostración. Sean H_1 una homotopía entre f y r y H_2 una homotopía entre g y h. Definimos la función $H : X \times I \to Z$ por $H(x, t) = H_2(H_1(x, t), t)$ para todo $x \in X$

y para todo $t \in I$. H es una homotopía entre $g \circ f$ y $h \circ r$, en efecto:

$$H(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f(x),0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

es decir,

$$H|_{X \times 0} = g \circ f.$$

Por otro lado,

$$H(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(r(x),1) = h(r(x)) = (h \circ r)(x),$$

es decir,

$$H|_{X \times 1} = h \circ r.$$

□

Así, podemos enunciar el siguiente teorema

TEOREMA 2.17 *La equivalencia homotópica es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean X, Y, Z espacios topológicos tales que $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$. Es decir, existen $f_1 : X \to Y$, $f_2 : Y \to X$, $g_1 : Y \to Z$ y $g_2 : Z \to Y$, cuyas composiciones son homotópicas a las identidades respectivas.

Para la reflexividad basta notar que la identidad definida sobre el mismo espacio topológico es una equivalencia entre el espacio y sí mismo.

Para la simetría basta con notar que si f_1 es una equivalencia homotópica entre X e Y, entonces f_2 es una equivalencia homotópica entre Y y X.

Para la transitividad probamos que $(g_1 \circ f_1) : X \to Z$ es una equivalencia homotópica con inversa $(f_2 \circ g_2) : Z \to X$, para lo cuál hacemos uso repetitivo del lema 2.16. Como $f_1 \circ f_2 \simeq Id_Y$ tenemos

$$g_1 \circ (f_1 \circ f_2) \simeq g_1 \circ Id_Y = g_1,$$

con lo que tenemos,

$$(g_1 \circ f_1) \circ (f_2 \circ g_2) = g_1 \circ (f_1 \circ f_2) \circ g_2 \simeq g_1 \circ g_2 \simeq Id_Z$$

y por otro lado, como $g_2 \circ g_1 \simeq Id_Y$ tenemos

$$f_2 \circ (g_2 \circ g_1) \simeq f_2 \circ Id_Y = f_2$$

por tanto,

$$(f_2 \circ g_2) \circ (g_1 \circ f_1) = f_2 \circ (g_2 \circ g_1) \circ f_1 \simeq f_2 \circ f_1 \simeq Id_X.$$

$\square$

Un caso particular de esto se da cuando uno de los espacios es un subconjunto del otro. Esto induce el concepto de retracto por deformación que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 2.18 (Retracción) *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = Id_A$ se dice que es una* ***retracción*** *de X en A; y A se dice que es un* ***retracto*** *de X.*

Para $A \subset X$, notaremos a la inyección por $i : A \to X$. Nótese que, dada una retracción $r : X \to A$ se tiene que $r \circ i = Id_A$. Mientras que claramente $i \circ r \neq Id_X$.

Nótese además, que si A es un retracto de X para cada $a \in A$ tenemos los morfismos

$$i_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a) \quad \text{y} \quad r_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$$

que cumplen

$$r \circ i = Id_A \Rightarrow (r \circ i)_* = (Id_A)_* \Rightarrow r_* \circ i_* = Id_{\pi_1(A,a)}.$$

De donde, tenemos que i_* es inyectivo y r_* es sobreyectivo. En consecuencia

$$\pi_1(A, a) \leq \pi_1(X, a). \tag{2.1}$$

DEFINICIÓN 2.19 (Retracto por deformación) *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un retracto de X. Si $i \circ r \simeq Id_X$ entonces A se dice* **retracto por deformación** *de X y r se dice una* ***retracción por deformación****.*

Nótese que si A es retracto por deformación de X, tenemos que

$$i \circ r \simeq Id_X \Rightarrow (i \circ r)_* = (Id_X)_* \Rightarrow i_* \circ r_* = Id_{\pi_1(X,a)},$$

lo que junto con 2.1 siginifica que

$$\pi_1(A, a) \simeq \pi_1(X, a).$$

Es así que, un retracto por deformación de un espacio topológico, es un subconjunto de éste, el cuál tiene el mismo tipo de homotopía. Esta característica resulta de suma utilidad por cuanto permite identificar a un espacio topológico por medio de un subconjunto del mismo. Esto es particularmente útil cuando el espacio puede ser identificado con un solo punto del mismo.

DEFINICIÓN 2.20 (Espacio contractible) *Sea X un espacio topológico. Si existe $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ es retracto por deformación de X, decimos que X es* **contractible**.

Para terminar esta sección mostramos algunos resultados sencillos y una definición.

TEOREMA 2.21 *Sean X un espacio topológico, $x_0, x_1 \in X$ y α un camino entre x_0 y x_1. El morfismo $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ definido por*

$$\hat{\alpha}([\beta]) = [\overline{\alpha}] \cdot [\beta] \cdot [\alpha],$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Para ver que $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo, sean $[\beta], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, vemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}([\beta]) \cdot \hat{\alpha}([\gamma]) &= ([\overline{\alpha}] \cdot [\beta] \cdot [\alpha]) \cdot ([\overline{\alpha}] \cdot [\gamma] \cdot [\alpha]) \\
&= [\overline{\alpha}] \cdot [\beta] \cdot ([\alpha] \cdot [\overline{\alpha}]) \cdot [\gamma] \cdot [\alpha] \\
&= [\overline{\alpha}] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) \cdot [\alpha] \\
&= \hat{\alpha}([\beta] \cdot [\gamma]).
\end{aligned}$$

Para probar que $\hat{\alpha}$ es isomorfismo, definimos el morfismo $\hat{\overline{\alpha}} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, para el cuál se puede alterar levemente la demostración recién hecha para demostrar que es homomorfismo. Con esto vemos que, para todo $[\gamma] \in \pi_1(X, x_1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{\alpha}}(\hat{\alpha}([\gamma])) &= [\alpha] \cdot ([\overline{\alpha}] \cdot [\gamma] \cdot [\alpha]) \cdot [\overline{\alpha}] \\
&= ([\alpha] \cdot [\overline{\alpha}]) \cdot [\gamma] \cdot ([\alpha] \cdot [\overline{\alpha}]) \\
&= [\gamma].
\end{aligned}$$

De manera similar se puede probar que para todo $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, se cumple

$$\hat{\alpha}(\hat{\overline{\alpha}}([\beta])) = [\beta],$$

□

COROLARIO 2.22 *Sean X un espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$. Si X es conexo por caminos entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1).$$

En este trabajo, a menos que se exprese lo contrario, usaremos siempre espacios topológicos conexos por caminos.

DEFINICIÓN 2.23 (Espacio Simplemente Conexo) *Un espacio topológico X se dice* **simplemente conexo** *si es conexo por caminos y además, para todo $p \in X$*

$$\pi_1(X, p) \cong \{0\}.$$

LEMA 2.24 *Para todo espacio topológico X,*

X es contractible, implica, X es simplemente conexo.

Demostración. Es una consecuencia directa de las definiciones 10 y 11. □

Capítulo 3

Homología

Otro invariante algebraico para distinguir espacios, que veremos se preserva vía equivalencias homotópicas, es conocido como la homología, la cual es un herramienta muy útil para clasificar a los espacios topológicos por su forma. Usaremos siempre homología simplicial, por cuanto trabajaremos sobre complejos simpliciales.

DEFINICIÓN 3.1 (Complejo Simplicial Abstracto) *Un* **complejo simplicial abstracto** *es una familia $\mathcal{S}$ de conjuntos finitos, no vacíos, tal que, para todo $B \subset A$*

$$A \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; B \in S.$$

Cada $A \in \mathcal{S}$ se dice un $d-$símplice de $\mathcal{S}$ donde $d = |A| - 1$.

De este modo, podemos ver que un complejo simplicial es una familia cerrada por inclusión y por intersecciones no vacías. Una noción muy similar a esta se define a continuación.

DEFINICIÓN 3.2 (d-símplice) *Un* **d-símplice** *σ es la envolvente convexa de $d+1$ puntos en $\mathbb{R}^n$ afinmente independientes para algún $n \in \mathbb{N}$, donde $0 \leq d \leq n$. A d se le llama la dimensión de σ y se nota dim σ.*

Si $v_0, v_1, ..., v_p \in R^n$ notaremos $\sigma = [v_0, v_1, ..., v_p]$ al p-símplice formado por estos puntos.

DEFINICIÓN 3.3 (Complejo Simplicial Geométrico) *Un* **complejo simplicial geométrico** *es una colección de símplices $X = \{\sigma^i\}_{i \in I}$, donde I es un conjunto de índices, tal que*

- *cada σ^k es un símplice;*
- *si $\sigma^j, \sigma^k \in X$ entonces $\sigma^j \cap \sigma^k \in X$ o $\sigma^j \cap \sigma^k = \emptyset$;*
- *si $\sigma^j \subset \sigma^k \in X$ y entonces $\sigma^j \in X$ y dim $\sigma^j \leq$ dim σ^k.*

Para un complejo simplicial X, llamamos al conjunto de todos los símplices de dimensión p el p-esqueleto y lo denotaremos como X^p.

Dado un complejo simplicial abstracto, siempre es posible generar un complejo simplicial geométrico asociado a éste (considerando su $0-$esqueleto como un conjunto afínmente independiente), el cual es llamado su realización geométrica.

DEFINICIÓN 3.4 (p-cadena) *Sean X un complejo simplicial y A un anillo conmutativo. Una p-**cadena** sobre A, notada $C_p(X)$, es el A-módulo libre cuya base es el p-esqueleto de X.*

En este trabajo usaremos $p-$cadenas sobre $\mathbb{Z}_2$. Esto significa intuitivamente que $C_p(X)$ es el conjunto de combinaciones lineales formales de p-símplices con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Para $\sigma^1, \sigma^2 \in C_p(X)$, notamos la suma entre σ^1 y σ^2 por $\sigma^1 + \sigma^2$.

Tenemos entonces una estructura de módulo en cada "dimensión" para el complejo simplicial. Nuestro objetivo ahora será buscar un morfismo que nos permita relacionar estos módulos entre sí.

Consideremos el complejo simplicial de la Figura 3.1 formado por cinco puntos en el plano $\mathbb{R}^2$.

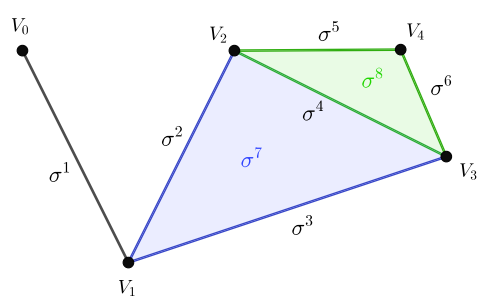


Figura 3.1: Complejo simplicial 1

Notemos que el complejo simplicial presentado está formado por: cinco 0-símplices: $V_0, \ldots, V_4$; seis 1-símplices: $\sigma^1, \ldots \sigma^6$ y dos 2-símplices: σ^7, σ^8. Las correspondientes p-cadenas serán $\langle V_0, \ldots, V_4 \rangle$; $\langle \sigma^1, \ldots, \sigma^6 \rangle$; $\langle \sigma^7, \sigma^8 \rangle$.

Buscamos un morfismo que relacione elementos de una p-cadena con los de una $(p-1)$-cadena. Primero visualicemos la $2-$cadena $C_2(X) = \langle \sigma^7, \sigma^8 \rangle$; recordando

que usameros coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, los elementos de esta cadena serán σ^8, σ^7 y $\sigma^7 + \sigma^8$ que se muestran en la Figura 3.2.

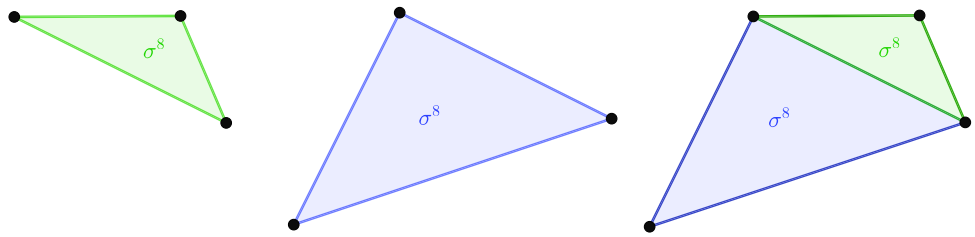


Figura 3.2: Elementos de $C_2(X)$.

De manera análoga, visualizamos la cadena $C_1(X) = \langle \sigma^1, ..., \sigma^6 \rangle$ con los elementos $\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^6$, $\sigma^3 + \sigma^4 + \sigma^5$ y $\sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4$, que se muestran en la Figura 3.3.

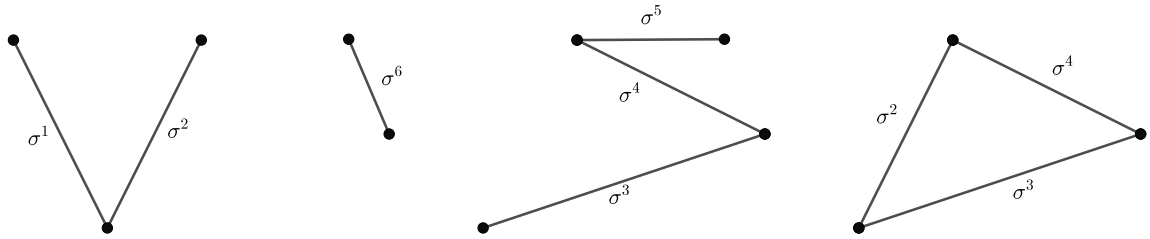


Figura 3.3: Elementos de $C_1(X)$.

Nótese que $\sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 \in C_1(X)$ es justamente el borde o frontera del tríangulo $\sigma^8 \in C_2(X)$. Por otro lado, si tomamos un segmento, por ejemplo $\sigma^2 \in C_1(X)$, su borde o frontera serán los vértices $V_1, V_2 \in C_0(X)$ o más concretamente el elemento $V_1 + V_2 \in C_0(X)$.

De esta manera podemos definir el morfismo bajo la noción de borde, que como su nombre indica relaciona a cada símplice con su borde.

Definición 3.5 (Morfismo de borde, Cara i-ésima) *Sea X un complejo simplicial, $\sigma = [V_0, ..., V_n] \in X$, definimos el* **morfismo de borde** $\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ *como* $\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} [V_0, .., \hat{V}_i, ..., V_n]$. *Donde el sombrero sobre V_i indica que es omitido del símplice. El símplice $[V_0, .., \hat{V}_i, ..., V_n]$ es llamado la* **cara i-ésima** *de $[V_0, ..., V_n]$.*

Se puede verificar por cálculo directo que el morfismo cumple con su noción gráfica, así cada triángulo será enviado a su borde y cada segmento a sus extremos.

El siguiente resultado es necesario para el concepto de homología.

TEOREMA 3.6 *Sea X un complejo simplicial y $\sigma \in X$. Se tiene que*

$$(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma) = 0.$$

En consecuencia, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$Im(\partial_p) \subseteq Ker(\partial_{p-1}) \forall p.$$

Demostración. Notemos que lo que hace el morfismo de frontera, cuando se lo aplica a un símplice, es sumar los símplices resulatntes de quitar un vértice a la vez de este símplice. Por lo tanto, cuando calculamos $\partial_p(\sigma)$ lo que tendremos es una suma de símplices en los cuales un vértice ha sido removido; al aplicar $\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma))$ tendremos una suma de símplices en los que se les han removido dos vértices. Esto se expresa como

$$\begin{aligned}\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) &= \partial_{p-i}(\sum_{i=0}^{n}[V_0, .., \hat{V}_i, ..., V_n]) \\ &= \sum_{j<i}[V_0, ..., \hat{V}_j, ..., \hat{V}_i, ..., V_n] + \sum_{j>i}[V_0, ..., \hat{V}_i, ..., \hat{V}_j, ..., V_n].\end{aligned}$$

Se puede verificar, por inspección directa, que cada símplice aparece dos veces, ya que trabajamos sobre $\mathbb{Z}_2$ tenemos que la suma se anula en su totalidad. □

Esta propiedad define el concepto de complejo de cadena, el cuál es una sucesión de $p-$cadenas, en orden decreciente de acuerdo a su dimensión, junto con los respectivos morfismos de borde, los cuáles cumplen que la compocisión de dos morfismos de borde consecutivos es igual al morfismo nulo.

DEFINICIÓN 3.7 (n-ésimo Grupo de Homología) *Sea X un complejo simplicial, el $n-$***ésimo grupo de homología***, notado $H_n(X)$ se define como*

$$H_n(X; \mathbb{Z}_2) = Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1}).$$

Puesto que en este trabajo se usan p-cadenas sobre $\mathbb{Z}_2$, en adelante escribiremos $H_n(X)$ en lugar de $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$.

Es así que, dado un complejo simplicial, la definición de $p-$cadena, junto con el morfismo de borde, nos permiten llegar al concepto de grupos de homología, que habíamos mencionado, es un invariante algebraico que nos permitirá distinguir espacios.

Al ser un cociente, de espacios cada grupo de homología está formado por clases de equivalencia.

DEFINICIÓN 3.8 (Clase de Homología) *Sea $x \in Ker(\partial_n)$, la* **clase de homología de** x *se define como*

$$x + Im(\partial_{n+1}) = \{x + y : y \in Im(\partial_{n+1})\},$$

si $z \in x + Im(\partial_{n+1})$ se dice que z es **homólogo** *a x.*

Los elementos de $Ker(\partial_n)$ son llamados ciclos y los elementos de $Im(\partial_{n+1})$ son llamados bordes. La homología es entonces ciclos cocientados por bordes e, intuitivamente, podemos ver a los ciclos como una suma de artistas que forman una figura cerrada.

Consideremos ahora el complejo simplicial de la Figura 3.4. Los elementos $\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3$, $\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5$, $\sigma^3 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5 \in C_1(X)$, forman figuras cerradas. Nótese que el primer elemento es la frontera del $2-$símplice σ^8.

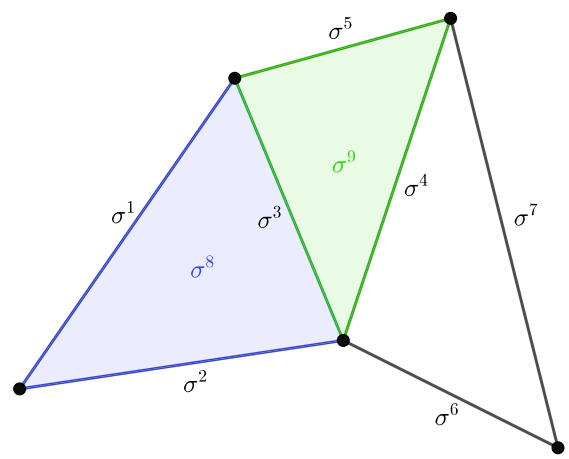


Figura 3.4: Complejo simplicial 2.

Tomando los elementos de $C_1(X)$ mencionados antes vemos que

$$\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5 = (\sigma^3 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5) + (\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3)$$

y, además, $\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 \in Im(\partial_2)$, por lo que

$$\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5 = (\sigma^3 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5) + y,$$

donde $y \in Im(\partial_2)$. Adicionalmente, de manera directa, se puede verificar que

$\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5$, $\sigma^3 + \sigma^6 + \sigma^7 + \sigma^5 \in Ker(\partial_1)$. Es decir, estos elementos son ciclos homólogos.

La homología, entonces, identifica ciclos que encierran el mismo agujero y es esto nos permite identificar los agujeros que tiene un complejo simplicial. Intuitivamente, podemos decir que la homología reconoce los agujeros de un complejo simplicial.

Dos resultados de homología que serán de utilidad son los siguientes.

TEOREMA 3.9 *Sea X un complejo simplicial conexo y no vacío, entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, para cualquier complejo simplicial X, $H_0(X)$ es una suma directa de copias de $\mathbb{Z}_2$, una por cada componente conexa.*

Demostración. Sea $a \in C_0(X)$, como X es conexo, para cada $u \in C_0(X)$ existe un camino de a a u que pasa por $n \in \mathbb{N}$ de vértices

$$a, v_1, v_2, \ldots, v_n, u \in C_0(X).$$

Ahora notemos que,

$$\begin{aligned}\langle a, v_1, v_2, \ldots, v_n, u\rangle &= \langle a, a + v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_n + u\rangle \\ &= \langle a, \partial_1([a, v_1]), \partial_1([v_1, v_2]), \ldots, \partial_1([v_n, u])\rangle \\ &= \langle a\rangle + \langle \partial_1([a, v_1]), \partial_1([v_1, v_2]), \ldots, \partial_1([v_n, u])\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, para cada camino entre a y u tenemos

$$\langle a\rangle + \langle \partial_1([a, v_1^i]), \partial_1([v_1^i, v_2^i]), \ldots, \partial_1([v_n^i, u])\rangle$$

donde i indexa el camino.

Si sumamos sobre i, obtendremos el espacio generado por las imágenes de todas las aristas que conectan a a y u

$$\langle a\rangle + \sum_i \langle \partial_1([a, v_1^i]), \partial_1([v_1^i, v_2^i]), \ldots, \partial_1([v_n^i, u])\rangle.$$

Ahora sumando sobre el vértice u, obtenemos el espacio generado por las imágenes de todas las aristas del grafo

$$\langle a\rangle + \sum_u \sum_i \langle \partial_1([a, v_1^i]), \partial_1([v_1^i, v_2^i]), \ldots, \partial_1([v_n^i, u])\rangle = \langle a\rangle + \partial_1(C_1(X)),$$

que a su vez, es el espacio generado por todos los vértices del grafo, es decir,

$$\begin{aligned}\langle a\rangle + \partial_1(C_1(X)) &= \langle a\rangle + \langle w_1, w_2, \ldots, w_m\rangle \\ \langle a\rangle + Im(\partial_1) &= \langle a, w_1, w_2, \ldots, w_m\rangle \\ &= C_0(X) = Ker(\partial_0).\end{aligned}$$

Luego calculando $H_0(X)$ tenemos

$$\begin{aligned}H_0(X) &= Ker(\partial_0)/Im(\partial_1) \\ &= (\langle a\rangle + \cancel{Im(\partial_1)})/\cancel{Im(\partial_1)} \\ &= \langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

□

TEOREMA 3.10 *Si X es un punto entonces $H_n(X) = 0$ para todo $n > 0$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Como X es un punto el complejo de cadena será

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{\partial_1} C_0(x) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

por lo que claramente ∂_p es el morfismo nulo para todo p, por tanto $H_n(X) = 0$ para todo $n > 0$ y si calculamos $H_0(X)$ tenemos

$$H_0(X) = Ker(\partial_0)/Im(\partial_1) = Ker(0)/Im(0) = \mathbb{Z}_2.$$

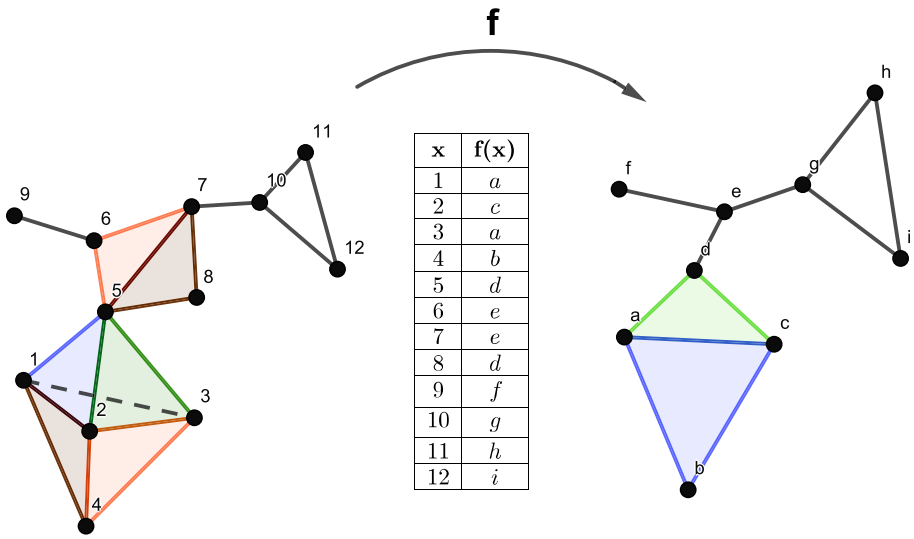
□

Ahora que se ha comprendido el concepto y la utilidad de los grupos de homología, podemos revisar propiedades algebraicas de los mismos, que nos serán de utilidad después. Estas propiedades vendrán ligadas a la existencia de funciones entre complejos simpliciales y las podremos desarrollar de manera análoga a lo hecho en la sección anterior con el grupo fundamental.

DEFINICIÓN 3.11 (Función Simplicial) *Sean X y Y complejos simpliciales. Una función continua $f : X \to Y$ se dice una **función simplicial** si envía símplices en símplices.*

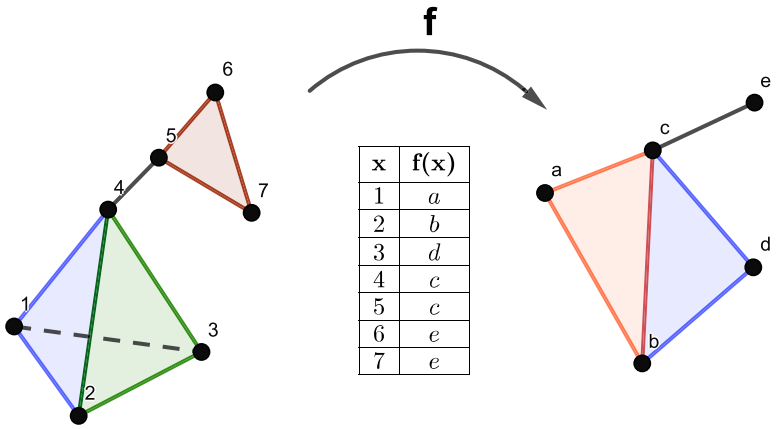
Una función simplicial entonces tendrá que enviar un símplice en otro igual o

en uno que sea homeomorfo a una de sus caras (un triángulo en un triángulo, un triángulo en una arista, etc). Esto determina que una función simplicial queda completamente definida por las imágenes de los vértices del complejo de salida. No obstante, enviar cada vértice en otro no siempre define una función simplicial: en la Figura 3.5 se muestra una función simplicial, nótese que cada símplice tiene por imagen otro símplice en el complejo de llegada; en la Figura 3.6 se muestra una función que envía cada vértice en otro, pero no es función simplicial por cuanto el símplice [1,3,4] no tiene por imagen un símplice.



x	f(x)
1	a
2	c
3	a
4	b
5	d
6	e
7	e
8	d
9	f
10	g
11	h
12	i

Figura 3.5: Ejemplo de función simplicial.



x	f(x)
1	a
2	b
3	d
4	c
5	c
6	e
7	e

Figura 3.6: Ejemplo de función no simplicial.

Para facilitar la notación de una función simplicial escribiremos

$$f([a_0, \ldots, a_n]) = [f(a_0), \ldots, f(a_n)],$$

dónde si dos vértices tienen una misma imagen, esta es tomada en cuenta solo una vez en el símplice de llegada. Por ejemplo, tomándo la función simplicial de la Figura 3.5 la imagen del símplice $[1,2,3,4]$ será

$$f([1,2,3,4]) = [f(1), f(2), f(3), f(4)] = [a,c,a,b] = [a,c,b].$$

Una función simplicial induce un morfismo entre las $p-$cadenas de cada complejo simplicial de la siguiente manera: para $f : X \to Y$ definimos $f_\# : C_p(X) \to C_p(Y)$ sobre los elementos de X^p por

$$f_\#([a_0,\ldots,a_p]) = \begin{cases} f([a_0,\ldots,a_p]) & \text{si dim } f([a_0,\ldots,a_p]) = p, \\ 0 & \text{si dim } f([a_0,\ldots,a_p]) < p, \end{cases}$$

extendiendo el morfismo por linealidad lo definimos sobre todo $C_p(X)$.

Si $\sigma \in C_p(X)$, notaremos por σ_i a su i-ésima cara. Notemos que $\partial_p(f_\#(\sigma))$ es igual a: $\sum_{i=0}^{p} f(\sigma_i)$, si $f(\sigma) \in C_p(Y)$; mientras que será $\partial_p(0) = 0$ si $f(\sigma) \in C_k(Y)$ con $k < p$. Es decir,

$$\partial_p(f_\#(\sigma)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} f(\sigma_i) & \text{si } f(\sigma) \in C_p(Y), \\ 0 & \text{si } f(\sigma) \in C_k(Y) \text{ con } k < p. \end{cases}$$

Por definición, cada cara de un símplice es también un símplice, por tanto la definición de $f_\#$ nos dice también a donde se enviará cada cara de un símplice. En efecto, si $\sigma = [a_0,\ldots,a_p] \in C_p(X)$ y $f(\sigma) \in C_p(Y)$, tendremos que para cualquier i, $f_\#(\sigma_i) = f(\sigma_i)$; por otro lado si $f(\sigma) \in C_{p-1}(Y)$ entonces $f_\#(\sigma_i)$ será $f(\sigma)$ si $f(\sigma) = f(\sigma_i)$ y 0 si no; mientras que si $f(\sigma) \in C_k(Y)$ con $k < p-1$ necesariamente $f(\sigma_i) = 0$, esto se puede resumir como

$$f_\#(\sigma_i) = \begin{cases} f(\sigma_i) & \text{si } f(\sigma) \in C_p(Y), \\ f(\sigma) & \text{si } f(\sigma) \in C_{p-1}(Y) \text{ y } \exists j \neq i \text{ tq } f(a_i) = f(a_j), \\ 0 & \text{si } f(\sigma) \in C_{p-1}(Y) \text{ y } \forall j,\ f(a_i) \neq f(a_j), \\ 0 & \text{si } f(\sigma) \in C_k(Y) \text{ con } k < p-1, \end{cases}$$

con esto podemos calcular $f_\#(\partial_p(\sigma))$ como

$$f_\#(\partial_p(\sigma)) = f_\#(\sum_{i=0}^{p} \sigma_i) = \sum_{i=0}^{p} f_\#(\sigma_i).$$

Para calcular la última sumatoria, debemos mirar cada uno de los casos expuestos anteriormente: Si $f(\sigma) \in C_p(Y)$, las imágenes bajo f y $f_\#$ coinciden para todo i, así que, tenemos la misma sumatoria que antes; si $f(\sigma) \in C_{p-1}(Y)$ tendremos una suma con varios términos nulos y los términos no nulos serán todos $f(\sigma)$, además tendremos un número par de estos términos por cuanto para cada i en el cual el término es no nulo, existe un j que también tendrá un término no nulo, luego debido a los coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ tenemos que la suma se anulará; si $f(\sigma) \in C_k(Y)$ con $k < p-1$ tendremos una suma nula. Lo que hemos dicho se expresa como

$$\sum_{i=0}^{p} f_\#(\sigma_i) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} f(\sigma_i) & \text{si } f(\sigma) \in C_p(Y), \\ n(f(\sigma_i) + f(\sigma_j)) = n(f(\sigma) + f(\sigma)) = 0 & \text{si } f(\sigma) \in C_{p-1}(Y), \\ 0 & \text{si } f(\sigma) \in C_k(Y) \text{ con } k < p-1, \end{cases}$$

que es el mismo resultado que $\partial_p(f_\#(\sigma))$. Esto prueba el lema siguiente.

LEMA 3.12 *Sea $f_\#$ el morfismo definido antes y ∂_p el morfismo de borde. Se tiene que para todo p*

$$\partial_p \circ f_\# = f_\# \circ \partial_p.$$

La propiedad de la conmutatividad de $f_\#$ y ∂_p define lo que llamamos un **diagrama conmutativo** representado como sigue

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{p+2}"] & C_{p+1}(X) \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "f_\#"] & C_p(X) \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "f_\#"] & C_{p-1}(X) \arrow[r, "\partial_{p-1}"] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{p+2}"] & C_{p+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{p+1}"] & C_p(Y) \arrow[r, "\partial_p"] & C_{p-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{p-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Este diagrama muestra una serie de morfismos entre cada par de $p-$cadenas de los complejos simpliciales X e Y, esta propiedad se puede expresar diciendo que $f_\#$

es un **morfismo de cadenas**. Nótese que $f_\#$ envía ciclos en ciclos y bordes en bordes, lo que implica que preserva clases de homología y por lo tanto, induce un morfismo entre los grupos de homología $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$ definido sencillamente como

$$f_*(\sigma + Im(\partial_{p+1})) = f_\#(\sigma) + Im(\partial_{p+1}).$$

Esto prueba el siguiente

LEMA 3.13 *Un morfismo de cadenas entre complejos de cadenas define un morfismo entre los grupos de homología de los dos complejos.*

Dos propiedades de importancia, que se desprenden del lema anterior son

- Para una composición de funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, se tiene

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

- $Id_* = Id$ donde Id representa el morfismo identidad de un grupo o espacio.

Para el propósito de este trabajo, será necesario usar un resultado conocido de la teoría de homología, cuya demostración a detalle se puede revisar en [8].

TEOREMA 3.14 *Si dos funciones $f, g : X \to Y$ son homotópicas, definen los mismos morfismos entre grupos de homología $f_*, g_* : H_p(X) \to H_p(Y)$.*

Un resultado inmediato de este teorema es

COROLARIO 3.15 *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica, los morfismos inducidos $f_* : H_p(X) \to H_p(Y)$ son isomorfismos para todo p.*

En particular si f es una retracción por deformación, ésta inducirá isomorfismos entre los grupos de homología, esto, comunmente, se expresa diciendo que **la equivalencia homotópica preserva homología.**

Capítulo 4

Homología persistente de complejos de Clique

En el presente capítulo se presentará la base del estudio realizado en filtraciones de complejos de clique, que son complejos simpliciales asociados a grafos. Para lo cual será necesario una breve revisión de teoría de grafos, y se continuará con las definiciones de homología persistente.

4.1. Grafos

DEFINICIÓN 4.1 (Grafo, Vértice, Arista, Vecino, Clique) *Un* **grafo** *(no dirigido) G, es una pareja de conjuntos $G = \{V, E\}$. Donde V es llamado conjunto de* **vértices** *y E es llamado conjunto de* **aristas***; ambos considerados finitos y no vacíos. Tal que cada $e \in E$ está asociado con dos vértices $v, w \in V$ y escribimos $e = \{v, w\}$, e se dice incidente en v y w, y v y w se dicen vértices adyacentes o* **vecinos***. Un* **clique** *en G es un conjunto de vértices de G adyacentes dos a dos.*

Para facilitar notación, en caso de que haya lugar a confusión, notaremos $V(G)$ y $E(G)$ a los conjuntos de vértices y aristas de G respectivamente.

DEFINICIÓN 4.2 (Camino, Ciclo) *Un* **camino** *es un grafo cuyos vértices pueden ser ordenados tal que un vértice v aparece después de un vértice u si y solo si u y v son adyacentes. Un camino puede ser expresado como esta ordenación de vértices. Si un camino comienza con el vértice a y termina con el vértice b, después de pasar por $k-1$ vértices, se dice que es un camino de a a b de k pasos o de longitud k. Un* **ciclo** *es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.*

DEFINICIÓN 4.3 (Grafo Conexo) *Un grafo G se dice* **conexo** *si para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe un camino de u a v.*

Intiuitivamente un grafo es un conjunto de puntos unidos por aristas. Esta estructura sugiere la forma de un complejo simplicial, si se define una manera de "rellenar" algunos de los espacios huecos entre las aristas.

DEFINICIÓN 4.4 (Complejo de clique) *Sea G un grafo, se define el* **complejo de clique** *asociado a G, como el complejo simplicial resultante de considerar a cada clique de k vértices como un $(k-1)-$símplice.*

Tenemos entonces que todo grafo tiene asociado un complejo simplicial del cual es posible analizar su homología u homotopía. En la Figura 4.1, se muestra un ejemplo de complejo de clique para un grafo no dirigido.

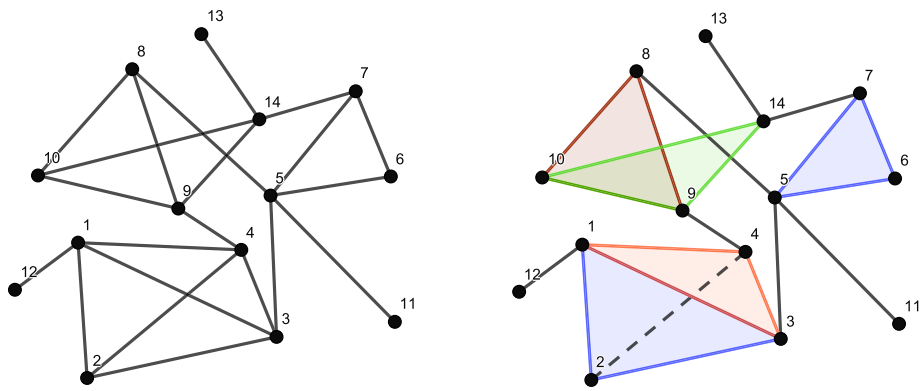


Figura 4.1: Complejo de clique asociado a un grafo no dirigido.

En el presente trabajo, consideraremos además grafos dirigidos y sus correspondientes complejos de clique asociados, que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 4.5 (Digrafo, Vértice, Arco, Digrafo Simple) *Un* **digrafo** *(o grafo dirigido) G, es una pareja de conjuntos $G = \{V, E\}$. Donde V es llamado conjunto de* **vértices** *y E es llamado conjunto de* **arcos***; ambos considerados finitos y no vacíos, tal que cada $e \in E$ está asociado con dos vértices $v, w \in V$ y escribimos $e = (v, w)$, dónde (v, w) indica un par ordenado, e se dice un arco de v a w y es incidente en v y w, y v y w se dicen vértices adyacentes. Un digrafo se dice* **simple** *si cada par ordenado de vértices corresponde exactamente a una arista.*

Dado un grafo (dirigido o no dirigido) G, un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$, se dice un subgrafo de G y notamos $H \subseteq G$.

En un digrafo, comúnmente, se llama flechas a los arcos por cuanto así se repre-

senta la dirección de las mismas en el grafo.

DEFINICIÓN 4.6 (Vecinos de salida y entrada) *Dado un grafo G y $x \in V(G)$ un vértice y se dice:*

- **vecino de salida** *de x si existe una flecha de x a y.*
- **vecino de entrada** *de x si existe una flecha de y a x.*

El conjunto de todos los vecinos de salida y de entrada serán notados $V_+(x)$ y $V_-(x)$, respectivamente.

DEFINICIÓN 4.7 (Camino, Ciclo) *Un* **camino***, es un digrafo simple cuyos vértices pueden ser ordenados tal que un vértice v aparece después de un vértice u si y solo si existe una arista e de u a v. Un camino puede ser expresado como esta ordenación de vértices, si un camino comienza con el vértice a y termina con el vértice b, después de pasar por $k-1$ vértices, se dice que es un camino de a a b de k pasos o de longitud k. Un* **ciclo** *es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.*

Para dos vértices a y b de un grafo (dirigido o no dirigido), la longitud del camino más corto entre a y b es llamada **distancia** entre a y b.

Para definir un clique en un grafo dirigido será necesario considerar las direcciones de las aristas.

DEFINICIÓN 4.8 (Clique Dirigido) *Sea G un digrafo, un* **clique dirigido** *es un subgrafo de G tal que sus vértices admiten un orden total dictado por las flechas del grafo. El complejo de clique asociado a G es el complejo simplicial formado al considerar a cada clique dirigido de k vértices como un $(k-1)-$símplice.*

El orden de un clique dirigido está dado por sus flechas, en la Figura 4.2 los vértices A, B y C pueden ser ordenadas como $C \leq B \leq A$, mientras que los vértices B, D y C no pueden ser ordenados por lo que no forman un clique.

Notaremos al complejo de clique asociado a un grafo G -sea dirigido o no dirigido- por $Q(G)$.

Tenemos entonces que para cada grafo, sea dirigido o no dirigido, existe un complejo de clique asociado. Así, si tenemos varios grafos podemos analizar varios complejos de clique y es sencillo pensar en que si estos grafos están relacionados entre sí, sus complejos de clique asociados también lo estarán.

Una manera de formar una secuencia de grafos relacionados entre sí es usar el

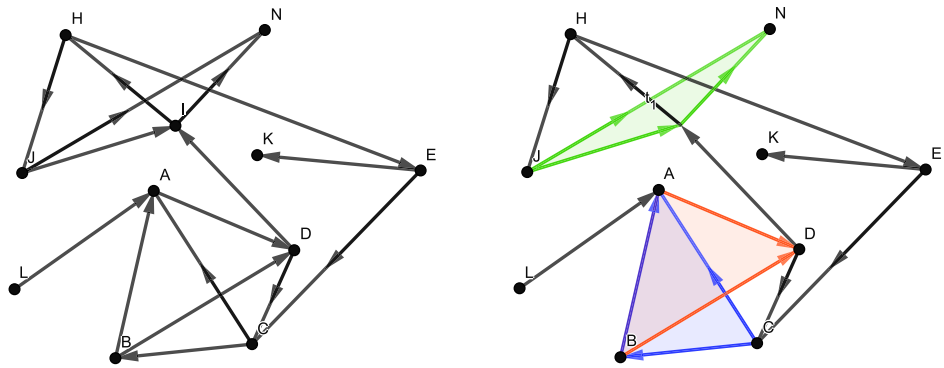


Figura 4.2: Complejo de clique asociado a un digrafo.

concepto de potencia que se define a continuación [12].

DEFINICIÓN 4.9 (Grafo Potencia) *Sea G un grafo (dirigido o no dirigido) definimos el* **grafo potencia** $k-$**ésima de** G*, notado G^k, como el grafo resultante de volver adyacentes (unir con una arista) a los vértices entre los cuales existe al menos un camino de k pasos o menos.*

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran algunas potencias de grafos dirigidos y no dirigidos.

Una consecuencia inmediata de la definición de potencia de grafos, es que las pontencias de un grafo forman una sucesión de grafos para los cuales $G^k \subseteq G^{k+1}$. Otra más está dada por el siguiente lema

LEMA 4.10 *Sea G un grafo (dirigido o no dirigido), existe un natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene*

$$G^n = G^{n+1}.$$

Demostración. Sea k la mayor distancia entre dos vértices dentro del grafo G. Es decir, todo par de vértices en este grafo están a una distancia menor o igual a k pasos. Luego, en el grafo G^k el comienzo y fin de este camino se vuelven adyacentes. Como todos los otros vértices se encuentran a una distancia igual o inferior a k, todos se vuelven adyacentes en esta potencia y por lo tanto en el grafo G^{k+1} no existe ninguna otra arista que dibujar y se tiene $G^k = G^{k+1}$. □

Esto nos permite verificar el siguiente resultado.

LEMA 4.11 *Sea G un grafo, si $Q(G)$ denota el complejo de clique asociado a este, se tiene para todo $k \in \mathbb{Z}$*

$$Q(G^k) \subseteq Q(G^{k+1}).$$

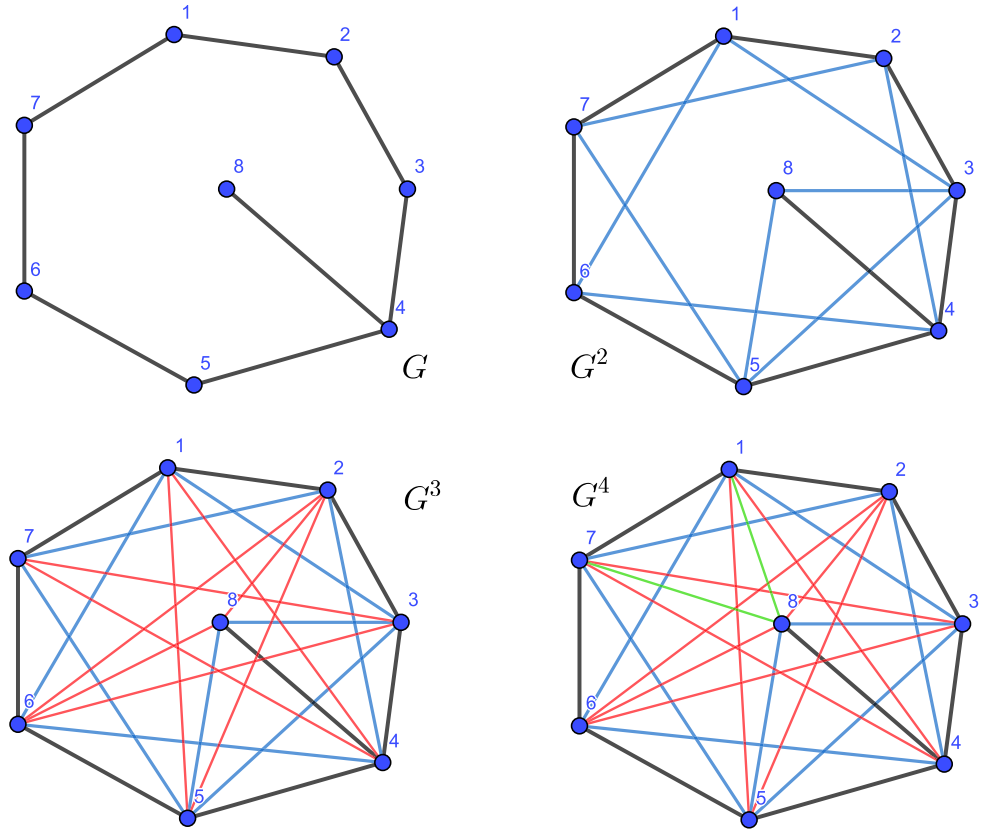


Figura 4.3: Potencias de grafo no dirigido.

Demostración. Sea $\sigma = [V_0, ..., V_n] \in Q(G^k)$, entonces el conjunto de vértices $\{V_0, ..., V_n\}$ es un clique en G^k. Necesariamente entonces este conjunto de vértices formará un clique en G^{k+1} y por tanto $\sigma = [V_0, ..., V_n] \in Q(G^{k+1})$. $\square$

Por facilidad notaremos al grafo $G^{n_0} := \widetilde{G}$. Debido al lema 4.10, tenemos que la sucesión de complejos de clique se vuelve constante en $Q(\tilde{G})$.

De esta manera vemos que al tomar un grafo (sea dirigido o no dirigido) y potenciarlo repetidamente se crea una sucesión de complejos de clique (Q_n) tal que $Q_n \subset Q_{n+1}$.

4.2. Homología persistente

En la sección anterior conseguimos una sucesión creciente de grafos, que a su vez crea una sucesión creciente de complejos de clique. Además, como consecuencia del lema 4.11, dicha sucesión se vuelve constante en algún punto. Esto nos permite usar la definición siguiente.

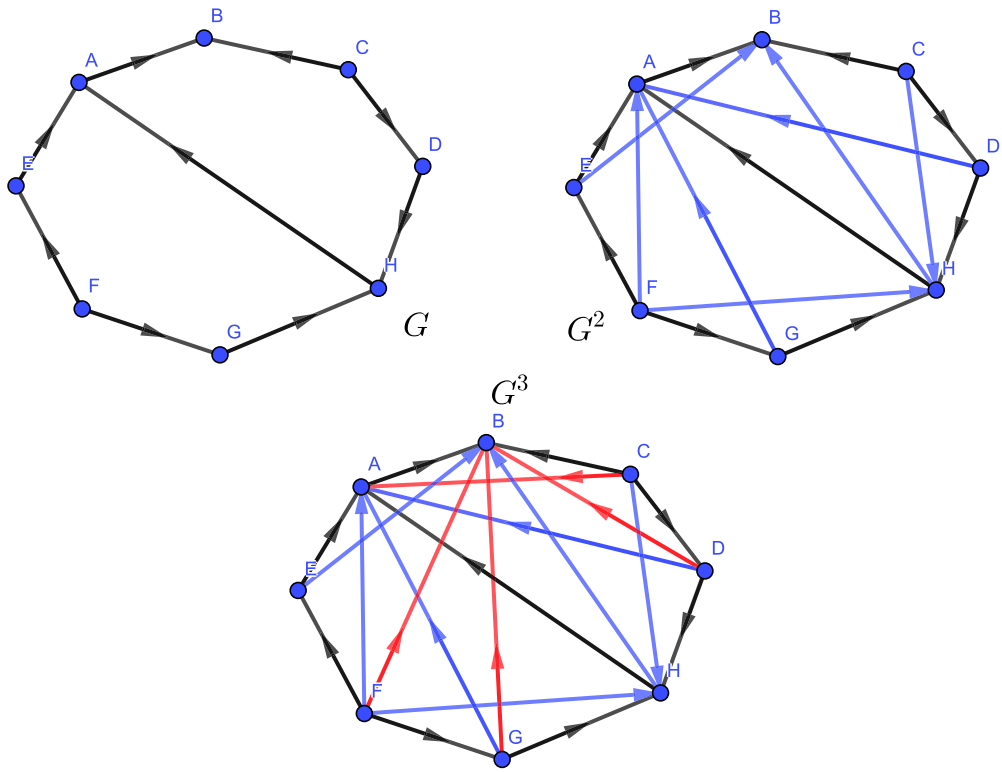


Figura 4.4: Potencias de digrafo.

DEFINICIÓN 4.12 (Filtración de un Complejo Simplicial) *Sea X un complejo simplicial. Se llama* **filtración de** *X a una secuencia (X_n) de subcomplejos de X tal que para todo n: $X_n \subseteq X_{n+1}$, para la cual existe $k \in \mathbb{N} : X = X_k$.*

Es decir, los complejos de clique asociados a las potencias de un grafo G, forman una filtración del complejo $Q(\widetilde{G})$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el complejo de clique asociado a G^n tiene asociado un complejo de cadena, concretamente

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(Q(G^n)) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(Q(G^n)) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(Q(G^n)) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots$$

Notaremos a la $p-$cadena del complejo de clique asociado a la $n-$ésima potencia del grafo G, como C_p^n. Con esto el complejo de cadena queda representado como

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}^n \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p^n \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}^n \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots$$

el cuál notaremos $C_\cdot^n$.

Gracias al lema 4.11, existe un morfismo de inclusión $i : Q(G^n) \to Q(G^{n+1})$,

que gracias a lo desarrollado en la sección 3, induce un morfismo de cadenas $i_\# : C_\cdot^n \to C_\cdot^{n+1}$, la sucesión de complejos de cadena junto con los morfismos $i_\#$ (no numeramos los morfismos $i_\#$ por facilidad) es llamado un **complejo de persistencia** y será notado $\mathcal{C} = (C_\cdot^{(n)})_n$. Debido al lema 4.10 esta sucesión se volverá constante en $\widetilde{C}_\cdot$.

Gracias al lema 3.13, $i_\#$ a su vez induce un morfismo entre los grupos de homología $i_* : H_m(C_\cdot^{(n)}) \to H_m(C_\cdot^{(n+1)})$ para todo m, lo que nuevamente define un morfismo de cadenas, para identificar este morfismo usaremos la notación $i_* : H_*(C_\cdot^{(n)}) \to H_*(C_\cdot^{(n+1)})$. Dado que i_* es un morfismo de complejos de cadena, induce naturalmente morfismos de grupos $i_k^{(n)} : H_k(C_\cdot^{(n)}) \to H_k(C_\cdot^{(n+1)})$. Formalmente definimos:

DEFINICIÓN 4.13 (Homología Persistente) *Para $r \in \mathbb{N}$ la $r-$**homología persistente en grado** k, notada $\widehat{H}_k(C_\cdot^{(r)})$, se define como la imagen del morfismo inducido*

$$i_k^{(r)} : H_k(C_\cdot^{(r)}) \to H_k(C_\cdot^{(r+1)}).$$

De esta manera la homología persistente forma el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{p+2}^{(m)}"] & H_{p+1}(C_\cdot^{(m)}) \arrow[r, "\partial_{p+1}^{(m)}"] \arrow[d, "i_{p+1}^{(m)}"] & H_p(C_\cdot^{(m)}) \arrow[r, "\partial_p^{(m)}"] \arrow[d, "i_p^{(m)}"] & H_{p-1}(C_\cdot^{(m)}) \arrow[r, "\partial_{p-1}^{(m)}"] \arrow[d, "i_{p-1}^{(m)}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{p+2}^{(m+1)}"] & H_{p+1}(C_\cdot^{(m+1)}) \arrow[r, "\partial_{p+1}^{(m+1)}"] \arrow[d, "i_{p+1}^{(m+1)}"] & H_p(C_\cdot^{(m+1)}) \arrow[r, "\partial_p^{(m+1)}"] \arrow[d, "i_{p+1}^{(m+1)}"] & H_{p-1}(C_\cdot^{(m+1)}) \arrow[r, "\partial_{p-1}^{(m+1)}"] \arrow[d, "i_{p+1}^{(m+1)}"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[d, "i_{p+1}^{(n_0-1)}"] & \vdots \arrow[d, "i_{p+1}^{(n_0-1)}"] & \vdots \arrow[d, "i_{p+1}^{(n_0-1)}"] & \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{p+2}^{(n_0)}"] & H_{p+1}(\widetilde{C}_\cdot) \arrow[r, "\partial_{p+1}^{(n_0)}"] & H_p(\widetilde{C}_\cdot) \arrow[r, "\partial_p^{(n_0)}"] & H_{p-1}(\widetilde{C}_\cdot) \arrow[r, "\partial_{p-1}^{(n_0)}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

De aquí en adelante una clase de homología $x + Im(\partial_{k+1}) \in H_k(C_\cdot^{(r)})$, será notada por su representante x y escribiremos $x \in H_k(C_\cdot^{(r)})$ para simplificar notación.

Una clase no nula de homología $x \in H_k(C_\cdot^{(r)})$ se dice que:

- **nace en r** si $x \notin \widehat{H}_k(C_\cdot^{(r-1)})$.
- **muere en r+1** si $i_k^{(r)}(x) = 0$.

- tuvo un **tiempo de vida (o persistencia)** de $s - r$ y se denota por el intervalo $[r, s]$, si x tiene imagen no nula bajo i_k^r y a su vez, esta imagen tiene imagen no nula bajo $i_k^{(r+1)}$ y se continúa de esta manera hasta que su imagen muera en $s > r$, es decir si

$$\psi(x) = i_k^{(s-2)} \circ \cdots \circ i_k^{(r+1)} \circ i_k^{(r)}(x) \neq 0 \text{ pero } i_k^{(s-1)} \circ \psi(x) = 0.$$

Una clase de homología es un generador del grupo de homología. Si un generador tiene una vida $[r, s]$, la persistencia de éste se representa mediante una barra horizontal que inicia en r y termina en s. Podemos entonces representar los tiempos de vida de todos los generadores mediante un diagrama de barras que llamaremos **código de barras**.

Conociendo que la homología nos permite identificar los agujeros de un complejo simplicial, podemos estimar la homología persistente de una filtración de complejos identificando la cantidad de agujeros que estos tienen en cada etapa de la filtración.

EJEMPLO 4.14 *Consideremos el grafo de la figura 4.5, sus potencias y complejos de clique asociados. La primera potencia de este grafo posee dos componentes conexas, en las que se pueden identificar tres ciclos que serán generadores de homología (tres agujeros). Con esto sus grupos de homología serán*

$$H_0(Q(G)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_1(Q(G)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_n(Q(G)) = 0 \text{ para } n \geq 2.$$

En la segunda potencia del grafo podemos ver como uno de los ciclos desaparece, por cuanto el agujero es llenado formando el 3-símplice $[1, 6, 7, 8]$. *Los vértices 1, 2, 6 y 8 forman otro 3-símplice al igual que los vértices 1, 5, 6 y 7. Estos 3-símplices se encuentran "pegados" uno después del otro formando una figura que mantiene un solo generador de homología para esta componente conexa, mientras que la otra componente conexa mantiene su generador de homología; por lo tanto* $H_1(Q(G^2)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

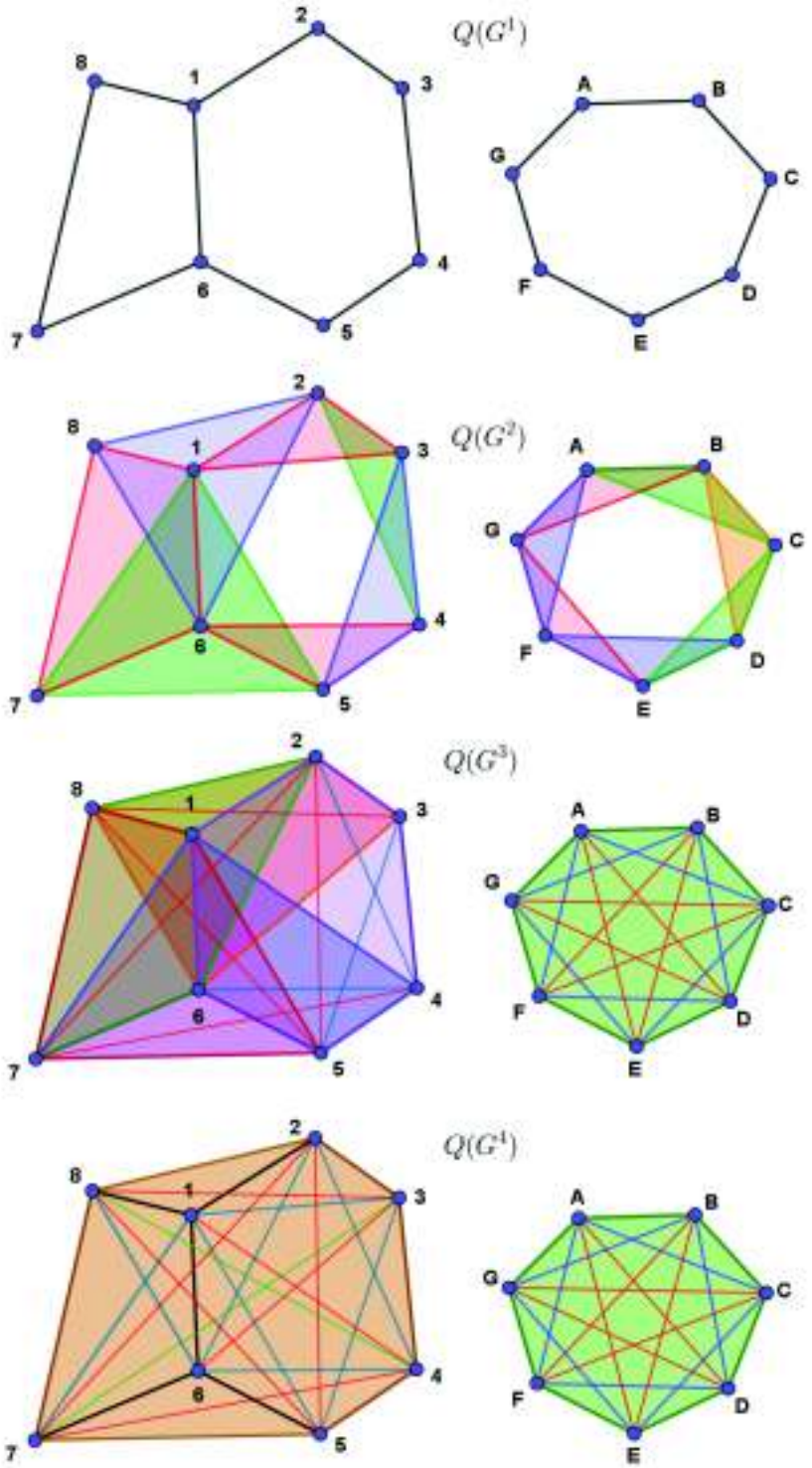


Figura 4.5: Complejos de clique asociados a potencias de un grafo no dirigido.

En la tercera potencia del grafo, la parte derecha de la componente conexa de la izquierda completa el 5*-símplice* $[1,2,3,4,5,6]$*, llenando de esta manera el generador de homología que quedaba en la potencia anterior. Por otro lado se forman los* 4*-símplices* $[1,2,3,6,8]$*,* $[1,4,5,6,7]$*,* $[1,5,6,7,8]$ *y* $[1,2,6,7,8]$ *y además la segun-*

da componente conexa completa un clique de siete puntos formando el 6-símplice $[A, B, C, D, E, F, G]$; notemos que esta figura no es inmersible en $\mathbb{R}^3$, por lo que no se puede determinar la distribución espacial de los símplices, sin embargo, podemos inferir que todos los símplices están pegados, formando una figura contractible. En la cuarta potencia se completa el clique de la componente de la izquierda formando una figura contractible y las potencias posteriores no cambiarán esta estructura; con esto representamos la homología persistente de esta filtración en el código de barras del cuadro 4.1.

Cuadro 4.1: Homología persistente de un grafo no dirigido.

Homología \ Grafo	G^1	G^2	G^3	G^4	G^5	G^6
H_0						
H_1						

EJEMPLO 4.15 *Consideremos ahora el digrafo de la figura 4.6, sus potencias y complejos de clique asociados. La primera potencia de este grafo posee una componente conexa y tres ciclos que serán generadores de homología (tres agujeros). Con esto sus grupos de homología serán*

$$H_0(Q(G)) = \mathbb{Z}_2, \quad H_1(Q(G)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_n(Q(G)) = 0 \text{ para } n \geq 2.$$

En la segunda potencia del grafo, el ciclo $[A, E, F]$ es rellenado y se completan los 3-símplices: $[1, 6, 5]$, $[4, 3, 2]$, $[E, A, B]$ y $[F, E, D]$. Estos símplices cubren un poco del espacio de los generadores de homología de la potencia anterior; sin embargo, es fácil ver que estos ciclos son reemplazados por ciclos homólogos y por tanto su imagen bajo el morfismo inducido es no nula. Así, tendremos dos generadores de homología en esta potencia lo que significa que $H_1(Q(G)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

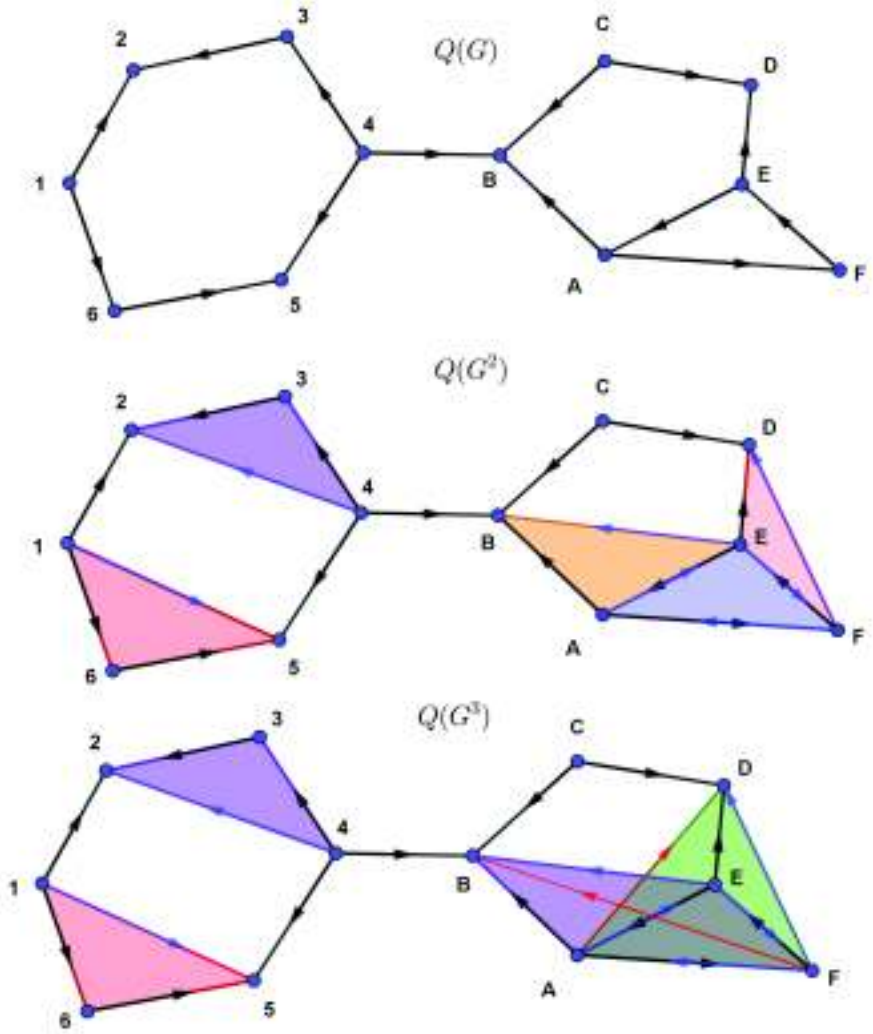


Figura 4.6: Complejos de clique asociados a potencias de un digrafo.

Para la tercera potencia del grafo se completan los 3*-símplices* $[A, F, E, B]$ *y* $[E, A, F, D]$*. Estos símplices forman tetraedros que comparten una cara (el* 2*-símplice* $[A, E, F]$*) y podemos ver que los generadores de homología de la potencia anterior se mantienen. Las potencias subsiguientes no cambiarán esta estructura, por lo tanto, la homología persistente de esta filtración se representa en el Cuadro 4.2*

La homología persistente permite identificar características topológicas de un espacio que no son detectables con homología u homotopía [6]. Las características que tengan un tiempo de vida considerable (considerable será un término definido en base del contexto), pueden ser consideradas importantes mientras que las que tengan vida corta se consideran despreciables.

Si el grafo obtenido viene de un conjunto de datos considerados como puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$ unidos con aristas que representen relaciones entre ellos (general-

Cuadro 4.2: Homología persistente de un digrafo

Homología / Grafo	G^1	G^2	G^3	G^4	G^5
H_0					
H_1					

mente cercanía); la homología persistente de la filtración de los complejos de clique asociados aportará información sobre el cuerpo de datos. Esta característica es de extrema utilidad al analizar datos, pues la homología aporta información no perceptible con métodos tradicionales [7].

No obstante, el cálculo de la homología persistente constituye un costo computacional alto, puesto que se debe calcular una homología para cada potencia del grafo.

Capítulo 5

Reducciones de Grafos que Preservan Homología Persistente

Hasta ahora hemos visto como invariantes algebraicos como la homotopía y especialmente la homología, pueden darnos información importante sobre los complejos simpliciales y hemos relacionados dichos complejos con grafos, logrando así identificar características topológicas de los grafos.

Adicionalmente, hemos visto cómo podemos extraer información importante al estudiar la homología persistente de la filtración de un grafo (es decir de sus complejos de clique asociados), en lugar de fijarnos solo en la homología tradicional.

La homología persistente constituye un reto computacional fuerte que está directamente ligado a la magnitud de los grafos a estudiar, así como la de sus potencias. Si se consiguiese reducir un grafo, por ejemplo eliminando algunos de sus puntos, el cálculo de la homología persistente se podría simplificar considerablemente. Sin embargo, reducir un grafo quitando puntos del mismo puede cambiar la homología del complejo de clique asociado a éste y por ende su homología persistente. El reto se encuentra entonces, en hallar transformaciones que preserven homología y que a la vez permitan simplificar el grafo a estudiar.

Para desarrollar la idea de las condiciones que nos permitan reducir puntos de un grafo sin afectar a su homología, analicemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.1 *Consideremos el grafo de la figura 5.1 con su complejo de clique asociado.*

El 2-símplice [a,b,c] es contractible y por tanto tiene grupo fundamental nulo. Es decir, es homotópicamente equivalente a un punto y por el teorema 3.10 se tiene que

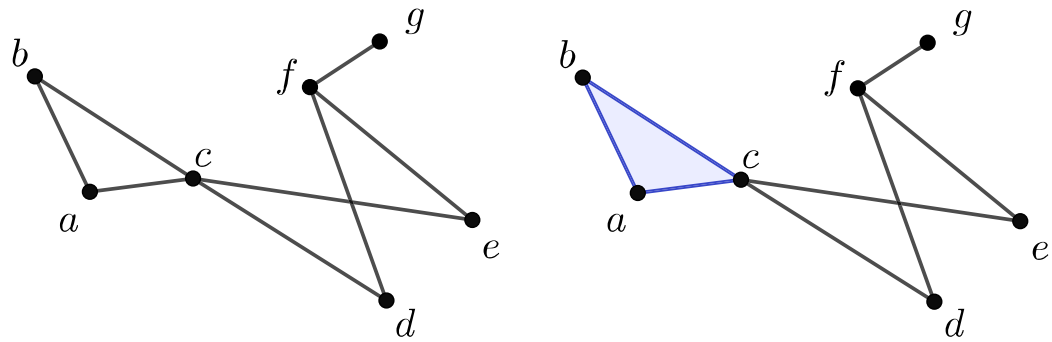


Figura 5.1: Grafo no dirigido y su complejo de clique asociado.

sus grupos de homología son nulos para $n > 0$ *y* $H_0([a,b,c]) = \mathbb{Z}$.

Calculemos la homología del complejo simplicial:

El complejo se compone de un $2-$*símplice, ocho* $1-$*símplices y siete* $0-$*símplices. No existen símplices de dimensión mayor por lo que el complejo de cadena se representa como*

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Calculando las correspondientes $p-$*cadenas tenemos*

$$C_2(X) = \langle [a,b,c] \rangle \quad C_1(X) = \langle [a,b],\, [a,c],\, \ldots,\, [f,g] \rangle \quad C_0(X) = \langle a, b, \ldots, g \rangle,$$

con esto calculamos las imágenes y núcleos de los morfismos de borde respectivos

$$\begin{aligned}
Im(\partial_3) &= 0 \\
Ker(\partial_2) &= 0 \\
Im(\partial_2) &= \langle [a,b] + [b,c] + [a,c] \rangle \\
Ker(\partial_1) &= \langle [a,b] + [b,c] + [a,c],\, [c,d] + [d,f] + [f,e] + [e,c] \rangle \\
Im(\partial_1) &= \langle a+b,\, b+c,\, \cancel{a+c},\, c+d,\, d+f,\, f+e,\, \cancel{c+e},\, f+g \rangle \\
&= \langle a+b,\, b+c,\, c+d,\, d+f,\, f+e,\, f+g \rangle \\
Ker(\partial_0) &= C_0(X)
\end{aligned}$$

y los grupos de homología serán

$$H_2(X) = Ker(\partial_2)/Im(\partial_3) = 0/Im(\partial_3) = 0$$

$$
\begin{aligned}
H_1(X) = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2) &= \frac{\cancel{\langle [a,b]+[b,c]+[a,c]}, [c,d]+[d,f]+[f,e]+[e,c]\rangle}{\cancel{\langle [a,b]+[b,c]+[a,c]\rangle}} \\
&= \langle [c,d]+[d,f]+[f,e]+[e,c]\rangle = \mathbb{Z}_2 \\
H_0(X) = Ker(\partial_0)/Im(\partial_1) &= \frac{\langle a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g\rangle}{\langle a+b,\, b+c,\, c+d,\, d+f,\, f+e,\, f+g\rangle} \\
&= \cancel{\frac{\langle a,\, a+b,\, b+c,\, c+d,\, d+f,\, f+e,\, f+g\rangle}{\langle a+b,\, b+c,\, c+d,\, d+f,\, f+e,\, f+g\rangle}} \\
&= \cancel{\langle \bar{a}\rangle = \mathbb{Z}_2}.
\end{aligned}
$$

Ahora notemos que el vértice a y el vértice b cumplen la condición de que están dentro del símplice $[a,b,c]$ y en ninguno más -a diferencia del vértice c que se encuentra en el $2-$símplice $[a,b,c]$ y en los $1-$símplices $[c,d]$ y $[c,e]$.

Si eliminamos el vértice a del grafo de la figura 5.1 obtenemos un subgrafo de éste, representado en la figura 5.2,

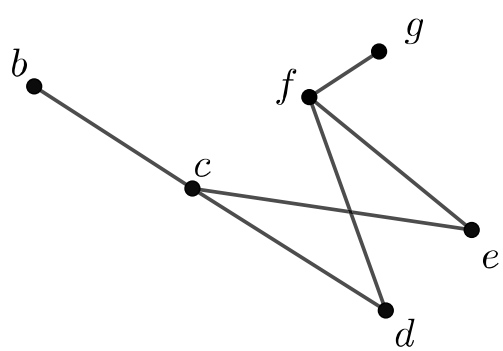


Figura 5.2: Subgrafo de la figura 5.1.

cuyo complejo de clique asociado es idéntico al grafo y podemos calcular su homología de la misma manera que antes:

El complejo de cadena será

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

sus $p-$cadenas,

$$C_1(X) = \langle [b,c],\, [c,d],\, \ldots,\, [f,g]\rangle \quad C_0(X) = \langle b, c, \ldots, g\rangle$$

las imágenes y núcleos

$$
\begin{aligned}
Im(\partial_2) &= 0 \\
Ker(\partial_1) &= \langle [c,d] + [d,f] + [f,e] + [e,c] \rangle \\
Im(\partial_1) &= \langle a+b,\ b+c,\ c+d,\ d+f,\ f+e,\ \cancel{c+e},\ f+g \rangle \\
&= \langle a+b,\ b+c,\ c+d,\ d+f,\ f+e,\ f+g \rangle \\
Ker(\partial_0) &= C_0(X)
\end{aligned}
$$

por lo que sus grupos de homología son

$$
\begin{aligned}
H_2(X) = Ker(\partial_2)/Im(\partial_3) &= 0/0 = 0 \\
H_1(X) = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2) &= \frac{\langle [c,d] + [d,f] + [f,e] + [e,c] \rangle}{\langle 0 \rangle} \\
&= \langle [c,d] + [d,f] + [f,e] + [e,c] \rangle = \mathbb{Z}_2 \\
H_0(X) = Ker(\partial_0)/Im(\partial_1) &= \frac{\langle b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g \rangle}{\langle a+b,\ b+c,\ c+d,\ d+f,\ f+e,\ f+g \rangle} \\
&= \frac{\cancel{\langle b,\ b+c,\ c+d,\ d+f,\ f+e,\ f+g \rangle}}{\cancel{\langle b+c,\ c+d,\ d+f,\ f+e,\ f+g \rangle}} \\
&= \cancel{\langle b \rangle} = \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}
$$

Los cuáles, si comparamos con los grupos de homología obtenidos anteriormente veremos que son los mismos. Es decir, si reducimos el grafo primero y luego calculamos su homología -lo que claramente simplifica los cálculos de homología- obentemos los mismos resultados que calculando la homología del grafo sin reducir.

Esta es precisamente la noción que nos servirá para encontrar las condiciones que nos permitan reducir un grafo sin afectar su homología.

DEFINICIÓN 5.2 (Beat-point, Vértice Asociado) *Dado un grafo G, un vértice $x \in V(G)$ se dice* **beat-point** [1] *si existe $z \in V(x)$, tal que, todos los vecinos de x son también vecinos de z. El punto z será llamado el vértice* **asociado a** *x.*

Ya que todos los vecinos de un *beat-point* x son también vecinos de su asociado z, todo clique al que pertenezca x contendrá también a z y por lo tanto todo símplice

[1] Se ha usado el nombre de beat-point puesto que se está presentando una variación de la noción conocida por este nombre dentro de la topología algebraica para espacios finitos. Para ver resultados relacionados, se invita al lector a [1].

que contenga a x también contendrá a z.

TEOREMA 5.3 *Al eliminar beat-points de un grafo G, se obtiene un subgrafo de G que tiene la misma homología.*

Demostración. Sea $b \in V(G)$ un *beat-point* y z su vértice asociado. Como existe una arista que une a b con z podemos definir una función continua tal que $f(b) = z$. Ésta función llevará a b a lo largo de esta arista hasta unirse con z. Todo símplice que contenga a b, será enviado a una de sus caras -la cara resultante de quitar el vértice b- mientras que todo símplice que no contenga a b tendrá por imagen un símplice homoeomorfo a sí mismo, por lo tanto f es una función simplicial que envía el complejo $Q(G)$ a un subcomplejo $Q_1(G)$ del mismo, es decir es una retracción.

Como la función f lleva a b a lo largo de la arista que lo une con z, podemos definir una función que recorra la arista en la mitad del intervalo $[0, 1]$ y la recorra de regreso en la otra mitad. Esta función es precisamente una homotopía entre $i \circ f$ e Id_X, donde $i : Q_1(G) \to Q(G)$ es la inyección entre complejos.

Esto demuestra que f es una retracción por deformación y por tanto preserva homotopía y gracias al corolario 3.15 preserva también homología. □

Este resultado garantiza preservar la homología de un grafo al retirar sus *beat-points*. Sin embargo, para preservar homología persistente será necesario asegurar que la transformación no afecte, no sólo al grafo sino tampoco a sus potencias.

TEOREMA 5.4 *Sea G un grafo, $x \in V(G)$ y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si x es un beat-point de G^k, entonces es un beat-point en G^{k+m} para $m \geq 0$.*

Demostración. Para facilitar la notación, notaremos $V(x)^r$ al conjunto de los vértices que se encuentran hasta a r pasos de x, es decir, existe un camino entre x y todo $b \in V(x)^r$ de una longitud menor a $r + 1$.

Procedemos por inducción sobre m:

Sea x un beat point en G^{k+m}, se demostrará que x es un *beat-point* en G^{k+m+1}. Esto demostrará a la vez la base de la inducción para $m = 0$ y el paso inductivo para $m > 0$. Para esto, sea z el punto asociado a x.

Sea $w \in V(x)^{k+m+1} = V(x)^{k+m} \bigcup \bigcup_{y \in V(x)^{k+m}} V(y)$.

- Si $w \in V(x)^{k+m}$, como z es el asociado de x en G^{k+m}, entonces $w \in V(z)^{k+m} \subset V(z)^{k+m+1}$.

- Si $w \in \bigcup_{y \in V(x)^{k+m}} V(y)$ tenemos que existe $s \in V(x)^{k+m}$ tal que $w \in V(s)$, como z es asociado a x entonces $w \in V(z)^{k+m}$. Es decir, w está a menos de $k+m+1$ pasos de s, y s está a un paso de z, luego w está a menos de $k+m+2$ pasos de z y por tanto $w \in V(z)^{k+m+1}$.

Lo que muestra que x es beat-point en G^{k+m+1}. □

El resultado anterior implica que un *beat-point* reducido al inicio no causará cambio en la homología de las potencias del grafo. Así mismo, si en la potencia $k-$ésima aparece un *beat-point*, este será *beat-point* de las potencias posteriores del grafo y por tanto también del grafo $\widetilde{G}$.

Se introduce a continuación una noción análoga para el caso de grafos dirigidos.

DEFINICIÓN 5.5 *Dado un digrafo G, un vértice $x \in V(G)$ se dice*

- **beat-point dirigido de entrada** *si existe $z \in V_-(G)$ tal que*

$$y \in V_+(x) \Rightarrow y \in V_+(x) \quad y \quad w \in V_-(x) \Rightarrow w \in V_-(x).$$

- **beat-point dirigido de salida** *si existe $z \in V_+(G)$ tal que*

$$y \in V_-(x) \Rightarrow y \in V_-(x) \quad y \quad w \in V_+(x) \Rightarrow w \in V_+(x).$$

Los *beat-points* dirigidos cumplen la misma propiedad de preservar homotopía cuando son removidos [14] y por tanto también preservan homología. Para preservar homología persistente será necesario hallar un resultado análogo al teorema 5.4 [10].

TEOREMA 5.6 *Sea G un digrafo, $x \in V(G)$ y $k \in \mathbb{N} \setminus 0$. Si x es un beat-point de G^k, entonces es un beat-point dirigido en G^{k+m} para $m \geq 0$.*

Demostración. Para facilitar la notación, notaremos $V_+(x)^r$ al conjunto de los vértices que se encuentran hasta a r pasos de x, es decir existe un camino entre x y todo $b \in V(x)^r$ y la distancia mínima a recorrer para llegar de x a b es menor a $r+1$ pasos y por $V_-(x)^r$ a los puntos análogos de llegada.

Procedemos por inducción sobre m:

Sea x un *beat point* dirigido de entrada en G^{k+m}, se demostrará que x es un *beat-point* en G^{k+m+1}. Esto demostrará a la vez la base de la inducción para $m = 0$ y el paso inductivo para $m > 0$. Para esto, sea $z \in V_-(x)^{k+m}$ el punto asociado a x.

Sea $w \in V_+(x)^{k+m+1} = V_+(x)^{k+m} \bigcup \bigcup_{y \in V_+(x)^{k+m}} V_+(y)$.

- Si $w \in V(x)_+^{k+m}$, como z es el asociado de x en G^{k+m}, entonces $w \in V_+(z)^{k+m} \subset V_+(z)^{k+m+1}$.

- Si $w \in \bigcup_{y \in V_+(x)^{k+m}} V_+(y)$ tenemos que existe $s \in V_+(x)^{k+m}$ tal que $w \in V_+(s)$, como z es asociado a x entonces $w \in V_+(z)^{k+m}$. Es decir, w está a menos de $k+m+1$ pasos de s, y s está a un paso de z, luego w está a menos de $k+m+2$ pasos de z y por tanto $w \in V_+(z)^{k+m+1}$.

Sea $a \in V_-(x)^{k+m+1} = V_-(x)^{k+m} \bigcup \bigcup_{y \in V_-(x)^{k+m}} V_-(y)$.

- Si $a \in V_-(x)^{k+m}$, como z es el asociado de x en G^{k+m}, entonces $a \in V_-(z)^{k+m} \subset V_-(z)^{k+m+1}$.

- Si $a \in \bigcup_{y \in V_-(x)^{k+m}} V_-(y)$ tenemos que existe $s \in V_-(x)^{k+m}$ tal que $w \in V_-(s)$, como z es asociado a x entonces $w \in V_-(z)^{k+m}$. Es decir, w está a menos de $k+m+1$ pasos de s, y s está a un paso de z, luego w está a menos de $k+m+2$ pasos de z y por tanto $w \in V_-(z)^{k+m+1}$.

Lo que muestra que x es *beat-point* dirigido de entrada en G^{k+m+1}. La demostración para los *beat-point* dirigidos de salida es análoga. □

Es importante notar que para grafos no dirigidos, $\widetilde{G}$ es una unión disjunta de cliques, en la cual si reducimos *beat-points* obtenemos un conjunto discreto; mientras que para un grafo dirigido, $\widetilde{G}$ puede ser visto como un preorden (aquí los puntos indistinguibles serán *beat-points* y asociados entre sí, por lo cual en este caso su homología se reduce a la homología de un poset).

Los teoremas 5.4 y 5.6 implican que, remover *beat-points* en cualquier punto de la filtración de complejos simpliciales no afecta la homología persistente de la misma. Es decir que no existen cambios en la homología de cada eslabón del complejo de persistencia y por tanto nos llevan al siguiente resultado.

TEOREMA 5.7 *Sea G un grafo, remover beat-points de G^k para cualquier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ no afecta a la homología persistente de la filtración de complejos clique asociada a la potenciación del grafo.*

Demostración. Para cada $s, r \in \mathbb{N}$ tal que $s \leq r$ notamos por:

- $BP(G^r)$ a los *beat-points* del grafo G^r,

- $G^r \backslash BP(G^s)$ al grafo resultante de quitar los *beat-points* del grafo G^s al grafo G^r,
- $\widehat{G^r} = G^r \backslash BP(G^r)$,
- $\overline{G^{r+1}} = G^{r+1} \backslash BP(G^r)$.

Recordemos el diagrama 4.2, fijando un $p \in \mathbb{N}$ para cada $m \in \mathbb{N}$ una de las columnas del diagrama se representa como

$$H_p(C_\cdot^{(m)}) \xrightarrow{i_p^{(m)}} H_p(C_\cdot^{(m+1)}) \xrightarrow{i_p^{(m+1)}} \cdots \xrightarrow{i_p^{(n_0-1)}} H_p(\widetilde{C}_\cdot).$$

En la demostración del teorema 5.3 se muestra que remover *beat-points* es formalmente aplicar una función simplicial que resulta ser una retracción por deformación en el complejo de clique asociado al grafo. Tenemos así una equivalencia homotópica $r_m : Q(G^m) \to Q(\widehat{G^m})$, que gracias lo desarrollado en la sección 3 induce un isomorfismo entre los grupos de homología de estos dos complejos, es decir

$$H_p(C_\cdot^{(m)}) \xleftrightarrow{r_m} H_p(Q(\widehat{G^m})).$$

De igual manera, gracias a los teoremas 5.4 y 5.6 -los cuales nos dicen que $BP(G^m) \subseteq BP(G^{m+1})$- tenemos que quitar los puntos $BP(G^m)$ del grafo G^{m+1} induce un isomorfismo entre los grupos de homología de $Q(G^{m+1})$ y $Q(\overline{G^{m+1}})$. A su vez, si a $\overline{G^{m+1}}$ le quitamos sus *beat-points* restantes volveremos a tener otro isomorfismo entre grupos de homología. Nótese que al remover los *beat-points* restantes de $\overline{G^{m+1}}$ obtenemos el grafo $\widehat{G^{m+1}}$, de tal manera que lo expresado en este párrafo se resume como

$$H_p(C_\cdot^{(m+1)}) \xleftrightarrow{\overline{r_{m+1}}} H_p(Q(\overline{G^{m+1}})) \xleftrightarrow{r_{m+1}} H_p(Q(\widehat{G^{m+1}})).$$

Además, existe una inclusión natural entre los grafos $i : \widehat{G^m} \to \overline{G^{m+1}}$, la cual induce una función simplicial entre sus complejos de clique asociados y por lo tanto induce morfismo entre grupos de homología

$$H_p(Q(\widehat{G^m})) \xrightarrow{\bar{i}_m} H_p(Q(\overline{G^{m+1}})).$$

Ahora recordemos que el morfismo $i_{p+1}^{(m)}$ es inducido por la inclusión natural $i^{(m)} : G^m \to G^{m+1}$. Así, los morfismos $r_m, i_{p+1}^{(m)}, \bar{i}_m$ y $\overline{r_{m+1}}$ son todos inducidos por

morfismos entre grafos que forman el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^m \arrow[r, "i^{(m)}"] \arrow[d, "r_m"] & G^{m+1} \arrow[d, "\overline{r_{m+1}}"] \\
\widehat{G^m} \arrow[r, "\bar{i}"] & \overline{G^{m+1}}
\end{tikzcd}$$

que es claro que conmuta por cuanto las funciones se limitan a quitar puntos de los grafos. Este diagrama entonces induce el diagrama conmutativo entre grupos de homología

$$\begin{tikzcd}
H_p(C_\cdot^{(m)}) \arrow[r, "i_{p+1}^{(m)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "r_m"] & H_p(C_\cdot^{(m+1)}) \arrow[d, leftrightarrow, "\overline{r_{m+1}}"] \\
H_p(Q(\widehat{G^m})) \arrow[r, "\bar{i}_m"] & H_p(Q(\overline{G^{m+1}})),
\end{tikzcd}$$

el cuál, continuando con el razonamiento, podemos expandir a

$$\begin{tikzcd}
H_p(C_\cdot^{(m)}) \arrow[r, "i_{p+1}^{(m)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "r_m"] & H_p(C_\cdot^{(m+1)}) \arrow[r, "i_{p+1}^{(m+1)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\overline{r_{m+1}}"] & H_p(C_\cdot^{(m+2)}) \arrow[d, leftrightarrow] \\
H_p(Q(\widehat{G^m})) \arrow[r, "\bar{i}_m"] \arrow[dr] & H_p(Q(\overline{G^{m+1}})) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "r_{m+1}"] & H_p(Q(G^{m+2} \setminus BP(G^m))) \arrow[d, leftrightarrow] \\
 & H_p(Q(\widehat{G^{m+1}})) \arrow[r, "\bar{i}_{m+1}"] \arrow[dr] & H_p(Q(\overline{G^{m+2}})) \arrow[d, leftrightarrow, "r_{m+2}"] \\
 & & H_p(Q(\widehat{G^{m+2}}))
\end{tikzcd}$$

Dónde las diagonales están definidas como $r_{m+1} \circ \bar{i}_m$ para cada m. Este diagrama demuestra que el morfismo que define la homología persistente (la fila de arriba) es equivalente a la composición de los morfismos horizontales y verticales mostrados en el diagrama. $\square$

El lema 4.10 nos indica que el diagrama encontrado en la demostración del teorema 5.7 es finito y por lo tanto todos los teoremas demostrados nos permiten obtener el siguiente algoritmo para el cálculo de la homología persistente:

ALGORITMO 5.8 *[Algoritmo de cálculo de homología persistente para complejos de cliques de grafos]:*

1. $\overline{G_1} = G$

2. *Mientras* $G_k \neq G_{k+1}$:

   a) $\overline{G_{k+1}} = G_{k+1} \backslash BP(G_k)$

   b) $\widehat{G_k} = \overline{G_k} \backslash BP(G_k)$

   c) *Calcular* $Im(r_{k+1} \circ \bar{i}_k)$

   d) *k=k+1*

Los teoremas anteriores muestran que $Im(r_{k+1} \circ \bar{i}_k)$ es equivalente a la p-homología persistente en grado k de $\mathcal{C}(G)$ para todo p. En otras palabras, en cada paso de cálculo de la homología persistente podemos primero reducir *beat-points* y luego calcular la homología de cada complejo. Esto se revela en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 5.9 *Consideremos el grafo del Ejemplo 4.14. La primera potencia del grafo no tiene beat-points, por lo que no podemos reducir ningún punto y su complejo de clique tanto como su homología son iguales a las calculadas en el Ejemplo 4.14.*

$$H_0(Q(G)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_1(Q(G)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_n(Q(G)) = 0 \text{ para } n \geq 2.$$

En la segunda potencia el vértice 8 *se convierte en beat-point del grafo siendo el vértice* 1 *su asociado; de igual manera el vértice* 7 *es beat-point con el vértice* 6 *como su asociado, por lo que podemos removerlos. De esta manera el complejo de clique asociado queda determinado por el hexágono en la componente conexa de la izquierda y el heptágono en la componente de la derecha con sus respectivos* 2*-símplices respectivos. El complejo tendrá entonces 2 generadores de homología y por lo tanto, tenemos* $H_1(Q(G^2)) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

En la tercera potencia del grafo, se completan los cliques de cada compenente conexa formando dos figuras contractibles. Nótese que, en este punto todos los vértices de cada componente conexa del grafo son beat-points, con un solo vértice asociado para cada componente conexa y de esta manera los generadores de homología se cancelan.

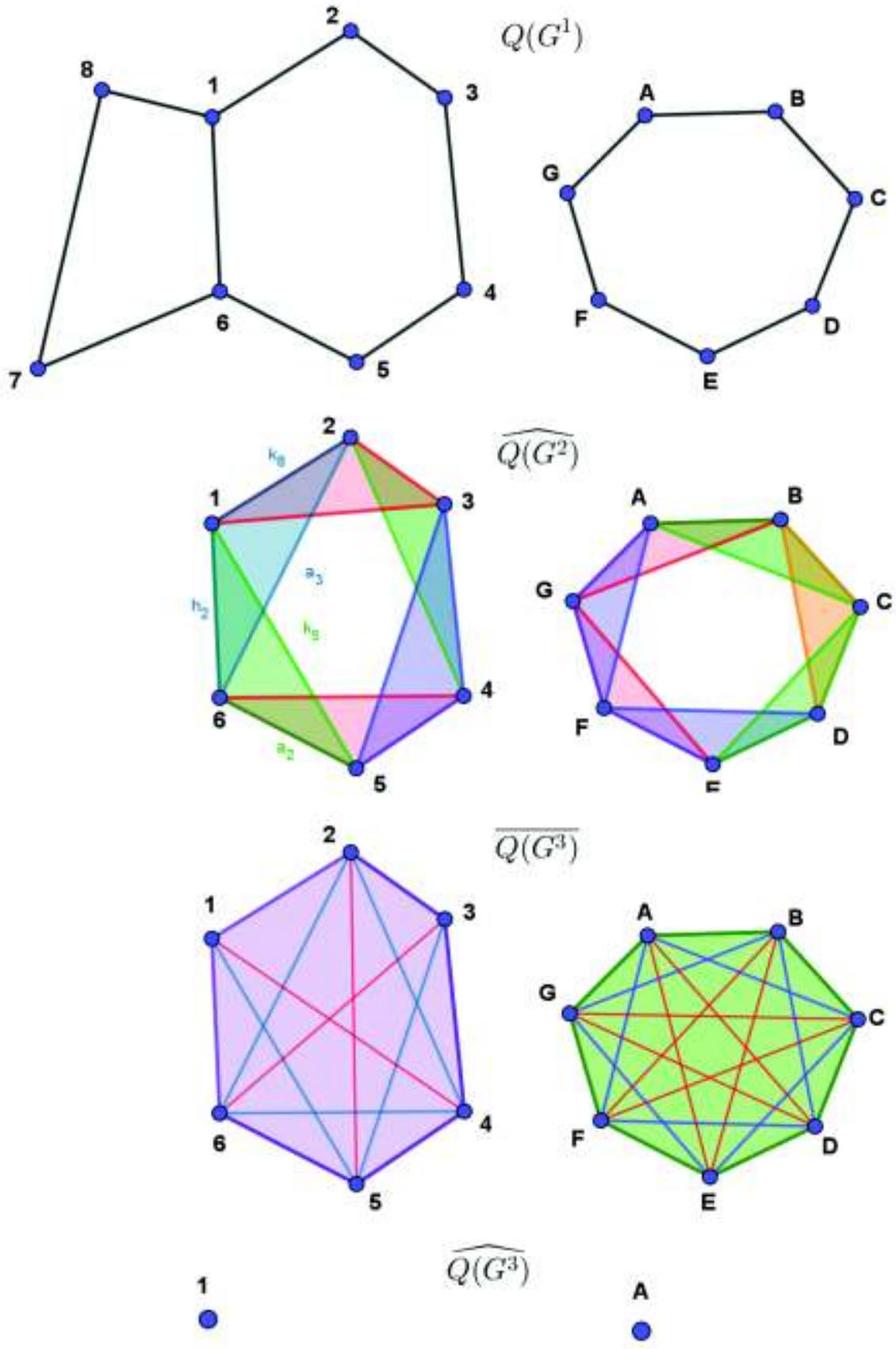


Figura 5.3: Complejos de clique de los grafos reducidos.

La filtración resultante y su homología persistente se presentan en la Figura 5.3 y el Cuadro 5.1.

Cuadro 5.1: Homología persistente de un grafo no dirigido

Homología \ Grafo	G^1	G^2	G^3	G^4	G^5	G^6
H_0						
H_1						

EJEMPLO 5.10 *Viendo ahora el grafo dado en el Ejemplo 4.15, vemos que la primera potencia tampoco tiene beat-points y por lo tanto, no hay puntos que reducir y sus grupos de homología se mantienen. Sin embargo, en la segunda potencia del grafo los vértices $3, 6, A$ y F son todos beat-points y pueden ser removidos. En este punto podemos ver que las potencias del grafo se estabilizan y por tanto no es necesario seguir calculando homologías.*

La filtración resultante y su homología persistente se presentan en la Figura 5.4 y el Cuadro 5.2.

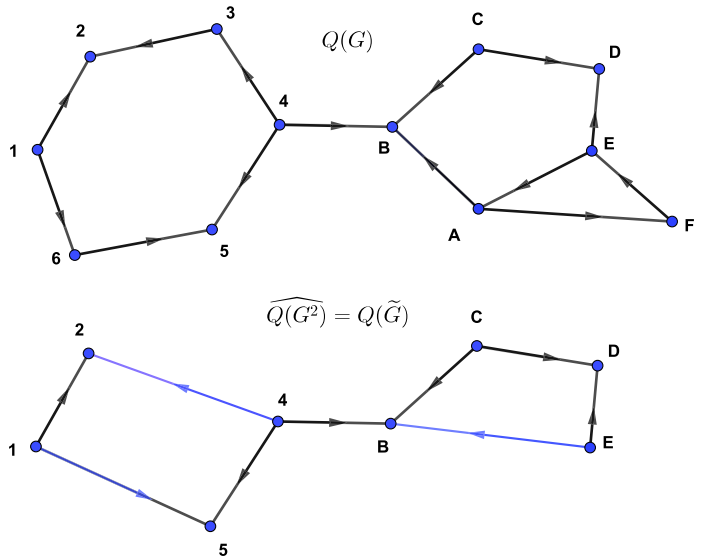


Figura 5.4: Complejos de clique de los digrafos reducidos.

Cuadro 5.2: Homología persistente de un digrafo

Homología / Grafo	G^1	G^2	G^3	G^4	G^5
H_0					
H_1					

En los ejemplos anteriores se ha comprobado que la homología persistente se mantiene siguiendo el cálculo sugerido por el algoritmo 5.8. Además, podemos ver que los cálculos de homología son simplificados considerablemente y la estabilización de las potencias del grafo sucede en potencias menores. Ahora veamos un ejemplo que pone en evidencia otra ventaja del uso de este algoritmo.

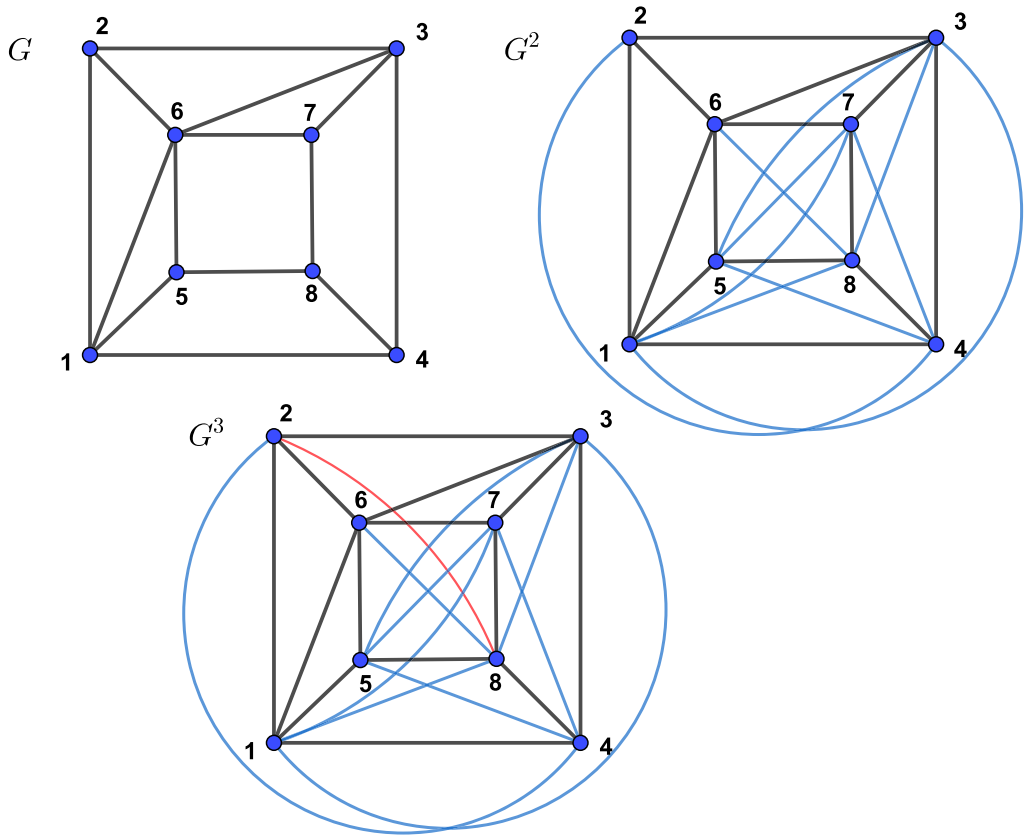


Figura 5.5: Potencias del grafo G (sin reducciones).

EJEMPLO 5.11 *Consideremos el grafo de la figura 5.5. En la primera potencia del grafo se tienen 3 generadores de homología, específicamente los ciclos* $[1,5,8,4]$, $[5,6,7,8]$ *y* $[7,8,4,3]$. *En la segunda potencia, sin embargo, se unen casi todos los vértices formando cliques de dimensión muy alta, que no solo dificultan mucho el cálculo de la homología por la cantidad de cálculos a realizar, sino que también dificultan la identificación de los generadores de homología a simple vista (como lo hemos realizado en los ejemplos anteriores) y no es sino hasta la tercera potencia que tenemos certeza de que la figura se vuelve contractible, cuando se completa el clique de todos los vértices. En otras palabras, a simple vista es difícil determinar cuántos y cuáles generadores de homología se forman o desaparecen. Además, realizar el cálculo formal resulta una tarea larga y tediosa.*

Analizando el grafo podemos ver que el vértice 2 *es beat-point con* 6 *como vértice asociado. Así, podemos eliminar este vértice, obteniendo el grafo de la figura 5.6 con su respectiva potencia.*

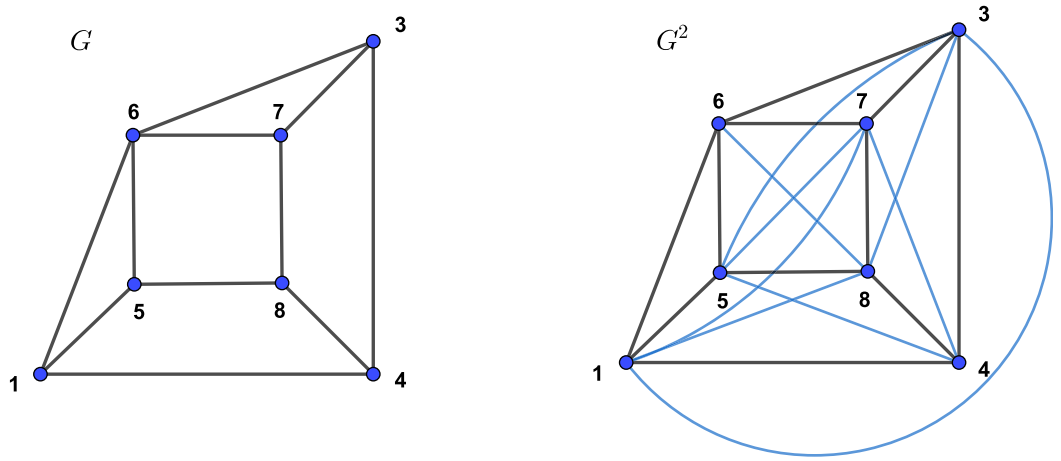


Figura 5.6: Potencias del grafo G, tras eliminar "beat points" .

De manera directa se puede, primero verificar que la homología de la primera potencia del grafo no ha cambiado, pues mantiene los mismos 3 generadores de homología. En la segunda potencia, podemos ver que todos los puntos están unidos, de tal manera que obtenemos un clique de 8 puntos, que como sabemos es una figura contractible. Por lo tanto, su homología es igual a la de un punto y es sencilla de calcular.

Es así que, en este caso podemos saber que la homología de G^2 *sin necesidad de calcular su complejo de clique asociado.*

De los ejemplos presentados se visibiliza el hecho de que el algoritmo planteado

-resultante de los teoremas demostrados en este trabajo- reduce el coste computacional asociado al cálculo de la homología persistente, debido a que se ha reducido el número de vértices en cada potencia del grafo dado. Esta característica resulta de extrema utilidad si se analizan cuerpos de datos grandes.

Queda por analizar otros tipos de reducciones que preserven la homología persistente para distintas filtraciones de complejos simpliciales así como implementaciones eficientes de los algoritmos presentados, lo cual es un trabajo que se realizará a futuro.

Bibliografía

[1] Jonathan Ariel Barmak y Elias Gabriel Minian. Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete & Computational Geometry*, 47(2):301–328, Mar 2012.

[2] Gunnar Carlsson, Afra Zomorodian, Anne Collins, y Leonidas Guibas. Persistence barcodes for shapes. In *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*, SGP '04, pgs. 124–135, New York, NY, USA, 2004. ACM.

[3] Herbert Edelsbrunner y Dmitriy Morozov. Persistent homology: theory and practice. Technical report, Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA (US), 2012.

[4] Brittany Terese Fasy, Jisu Kim, Fabrizio Lecci, y Clément Maria. Introduction to the R package TDA. *CoRR*, abs/1411.1830, 2014.

[5] Patrizio Frosini. A distance for similarity classes of submanifolds of a euclidean space. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 42(3):407–415, 1990.

[6] Robert Ghrist. Barcodes: The persistent topology of data. Technical report, 2007.

[7] Daniel Goldfarb. An application of topological data analysis to hockey analytics. *CoRR*, abs/1409.7635, 2014.

[8] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[9] Richard Johnsonbaugh. *Discrete Mathematics*. Prentice Hall, 2009.

[10] Benoit Larose. Taylor operations on finite reflexive structures. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 1(1):1–26, 2006.

[11] James R. Munkres. *Topology: A First Course*. Prentice Hall, 1975.

[12] Allen D. Parks y David J. Marchette. Persistent homology in graph power filtrations. *Royal Society Open Science*, 2016.

[13] Jeffrey Ray y Marcello Trovati. A survey of topological data analysis (tda) methods implemented in python. In Leonard Barolli, Isaac Woungang, y Omar Khadeer Hussain, editors, *Advances in Intelligent Networking and Collaborative Systems*, pgs. 594–600, Cham, 2018. Springer International Publishing.

[14] Roberto Torres y David Pazmiño. Modelos finitos minimales para variedades topológicas de dimensión dos usando digrafos. 2018.