

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

DEFORMACIONES DE AGUJEROS DE GUSANO ATRAVESABLES
ASINTÓTICAMENTE DE SITTER Y ANTI-DE SITTER

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

MÉLIDA ANDREA CORREA GUAÑA
andrea_correag@hotmail.es

Director: Dr. CHRISTIAN LEONARDO VÁSCONEZ VEGA
christian.vasconez@epn.edu.ec

QUITO, JULIO 2018

DECLARACIÓN

Yo MÉLIDA ANDREA CORREA GUAÑA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Mélida Andrea Correa Guaña

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por MÉLIDA ANDREA CORREA GUAÑA, bajo mi supervisión.

Christian Leonardo Vásquez Vega, Ph.D.
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

A mi familia, quienes me han apoyado incondicionalmente en el transcurso de mi carrera, y gracias a sus palabras de aliento he podido seguir adelante siendo perseverante en cumplir mis ideales.

A mi tutor, Oscar Lasso, mi mayor agradecimiento; por guiarme en un tema interesante y desafiante, por su paciente orientación, apoyo constante y sus innumerables sugerencias a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

A Juan Pablo, por todo el apoyo que supo brindarme constantemente.

DEDICATORIA

A mi padres, Leonidas y Fanny.

A mis hermanos, Néstor y Monserrath.

Índice general

Índice de Figuras	VI
Índice de Tablas	VII
Resumen	IX
Abstract	X
1. Introducción	1
1.1. Relatividad General	3
1.1.1. El principio de equivalencia	5
1.1.2. Ecuaciones de campo de Einstein	6
1.1.3. Condiciones de Energía	11
2. Agujeros de gusano	13
2.1. Agujeros de gusano atravesables	13
2.1.1. Agujero de gusano de Morris-Thorne	14
2.1.2. Método de cortar y pegar	22
2.1.3. El horizonte desplazado	24
2.2. Agujeros de gusano deformados de Schwarzschild	26
2.2.1. Métrica con función de forma lineal	27
2.2.2. Diagramas de embebimiento	28
2.2.3. Condiciones de Energía	29
2.2.4. Fuerzas de marea despreciables	31
2.2.5. Geodésicas del agujero de gusano deformado	32
3. Agujeros de gusano deformados de Schwarzschild-(anti)de Sitter	37
3.1. Diagramas de embebimiento	39
3.2. Ecuaciones de Einstein	43
3.3. Condiciones de atravesabilidad	45
3.4. Geodésicas	53
3.5. Otra deformación	55
3.5.1. Diagramas de Embebimiento	56
3.5.2. Ecuaciones de Einstein	59
3.5.3. Condiciones de atravesabilidad	61

4. Conclusiones y Discusión	67
Bibliografía	69
A. Ecuaciones de Campo de Einstein	73
B. Espacios (anti)de Sitter como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío	74
C. Integración Numérica	78

Índice de figuras

3.1. Diagrama de embebimiento cuando $0 < a < 1$ y $\Lambda = -0,09$	40
3.2. Diagrama de embebimiento cuando $a < 0$ y $\Lambda = -0,009$	41
3.3. Diagrama de embebimiento cuando $0 < a < 1$ y $\Lambda = 1$	42
3.4. Diagrama de embebimiento cuando $a < 0$ y $\Lambda = 0,3$	43
3.5. Aceleración que siente el viajero cuando se mueve radialmente por el agujero de gusano, con el parámetro a fijo y $\Lambda < 0$	47
3.6. Aceleración que siente el viajero cuando se mueve radialmente por el agujero de gusano, con $\Lambda > 0$ y el parámetro a fijo.	49
3.7. Velocidad que alcanza el viajero para cruzar la garganta del agujero con $0 < a < 1$ y $\Lambda < 0$	50
3.8. Velocidad que alcanza el viajero para cruzar la garganta del agujero con $a < 0$ y $\Lambda < 0$	50
3.9. Velocidad que alcanza el viajero para cruzar la garganta del agujero con $0 < a < 1$ y $\Lambda > 0$	50
3.10. Velocidad que alcanza el viajero para cruzar la garganta del agujero con $a < 0$ y $\Lambda > 0$	51
3.11. Función $r(\tau)$ para $\Lambda < 0$ cuando $r_o = 1$, $v_i = 1$, y $r_i = 1$	54
3.12. Diagrama de embebimiento cuando $0 < a < 1$ y $\Lambda = -0,09$	57
3.13. Diagrama de embebimiento cuando $0 < a < 1$ y $\Lambda = 0,0011$	58
3.14. Aceleración que siente el viajero cuando se mueve radialmente por el agujero de gusano con el parámetro a fijo y $\Lambda < 0$	62
3.15. Aceleración que siente el viajero cuando se mueve radialmente por el agujero de gusano con el parámetro a fijo y $\Lambda > 0$	63
3.16. Velocidad del viajero para $\Lambda < 0$ y $a = 1/2$	64
3.17. Velocidad del viajero para $\Lambda < 0$ y $a = -100$	64
3.18. Velocidad del viajero para $\Lambda > 0$ y $a = 1/2$	65
3.19. Velocidad del viajero para $\Lambda > 0$ y $a = -100$	65

Índice de cuadros

3.1. Distancia propia $l(r)$ para $a = 1/2$ y $\Lambda > 0$	51
3.2. Distancia propia $l(r)$ para $a = 0$ y $\Lambda > 0$	51
3.3. Distancia propia $l(r)$ para $a = -3$ y $\Lambda > 0$	51
3.4. Velocidad $v(r)$ para $a = 1/2$ y $\Lambda > 0$	52
3.5. Velocidad $v(r)$ para $a = 0$ y $\Lambda > 0$	52
3.6. Velocidad $v(r)$ para $a = -3$ y $\Lambda > 0$	52
3.7. Tiempo Δt para $a = 1/2$ y $\Lambda > 0$	52
3.8. Tiempo Δt para $a = 0$ y $\Lambda > 0$	52
3.9. Tiempo Δt para $a = -3$ y $\Lambda > 0$	52
3.10. Distancia propia $l(r)$ para $a = 1/2$ y $\Lambda > 0$	65
3.11. Distancia propia $l(r)$ para $a = 0$ y $\Lambda > 0$	65
3.12. Distancia propia $l(r)$ para $a = -3$ y $\Lambda > 0$	66
3.13. Velocidad $v(r)$ para $a = 1/2$ y $\Lambda > 0$	66
3.14. Velocidad $v(r)$ para $a = 0$ y $\Lambda > 0$	66
3.15. Velocidad $v(r)$ para $a = -3$ y $\Lambda > 0$	66
3.16. Tiempo Δt para $a = 1/2$ y $\Lambda > 0$	66
3.17. Tiempo Δt para $a = 0$ y $\Lambda > 0$	66
3.18. Tiempo Δt para $a = -3$ y $\Lambda > 0$	66

Resumen

Existe un gran interés en el estudio de los agujeros de gusano atravesables. Estos agujeros se podrían utilizar como túneles que conectan dos regiones que pertenecen al mismo universo o a universos distintos. Debido a la ausencia de datos experimentales, algunos científicos creen que es imposible que estos objetos puedan existir de forma natural pero, en la actualidad existen algunas corrientes dentro de la comunidad que estudia los agujeros de gusano. Algunos estudios tienen como objetivo encontrar el tipo de materia que sostendría abierto el agujero para que pueda ser atravesado, otros se enfocan en encontrar agujeros de gusano como soluciones a diferentes teorías de gravedad. Una línea muy fructífera de trabajo es el análisis, en diferentes contextos, de la métrica del agujero de gusano de Morris-Thorne. Esta métrica fue introducida en 1986, y desde entonces se han estudiado distintos tipos de agujeros de gusano, proponiendo distintas funciones de forma e incluyendo sus deformaciones. En este trabajo se presenta el estudio de las deformaciones de los agujeros de gusano atravesables asintóticamente (anti)de Sitter, a través de la modificación del ansatz para la métrica. Usando las ecuaciones de Einstein se puede determinar el tipo de materia que sostiene el agujero, y se puede determinar si tal materia viola las condiciones de energía. A partir del ansatz propuesto, se define la función de embebimiento en un espacio cilíndrico, determinando los rangos en donde ésta función existe. Posteriormente, se presenta un estudio completo de las condiciones de atravesabilidad del agujero deformado, que consiste en determinar el tiempo que se demora el viajero en cruzar el agujero, que debe ser aproximadamente 1 año. Además consiste en encontrar la velocidad radial y las fuerzas tidales que siente el pasajero al viajar radialmente por el agujero. Estas aceleraciones no deben exceder la aceleración gravitacional de la Tierra. Finalmente, se analiza el comportamiento de las geodésicas del agujero.

Abstract

The scientific community has a great interest in the study of the wormholes, these objects could be used as tunnels that connect two regions that belong to the same universe, or to different universes. Due to the absence of experimental data, some scientists believe that it is impossible that these objects exist. There many branches in the community studying the wormholes. Some of them study the type of matter capable of maintaining the wormhole in order to be traversable by humanoid travellers. Another branch has been focussing in the study of the wormholes as a solution of different gravity theories. A particularly notable approach is the study of the metric of the Morris-Thorne wormhole. It was introduced in 1986, and since then it has been studied by proposing different shape functions, including their deformations. In this research we develop the study of the deformations of the asymptotically de (anti) de Sitter wormholes through the modification of the ansatz for the metric. Then, with the help of the Einstein equations we can determine if the kind of matter that support wormhole violates the energy conditions. From the proposed anzats, the embedding function is defined in a cylindrical space, determining the ranges where this function exists. A complete study of the traversability conditions of the deformed wormhole is presented, which consists in determining the time it takes a humanoid traveler to cross the wormhole, it must be a finite and reasonably small proper time. We find the radial velocity and the tidal forces felt by the passenger travelling radially through the wormhole, these accelerations must, not exceed the gravitational acceleration of the Earth. Finally, we study the geodesics of the wormhole.

Capítulo 1

Introducción

Los agujeros de gusano son soluciones de las ecuaciones de Einstein, aunque todavía se hacen hipótesis acerca de su existencia porque experimentalmente no se han detectado. Sin embargo, se han convertido en objeto de estudio por tener algunas propiedades que parecen ser medibles. En particular, se puede analizar las ondas gravitacionales provenientes de un objeto estelar para determinar si el objeto en cuestión no tiene un horizonte de sucesos [1].

Las soluciones de agujero de gusano se interpretan como túneles que conectan dos regiones del espacio-tiempo, y existe mucho interés de la comunidad científica por entender mejor las propiedades de éstos.

Uno de los primeros trabajos acerca de agujeros de gusano que conectan dos espacio-tiempos diferentes fue el de Einstein y Rosen [2], donde los autores presentan una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein que tenía dos propiedades interesantes: es asintóticamente plano, y conecta dos regiones diferentes del espacio tiempo. Inmediatamente surgió la idea de la posibilidad de atravesar dicho pasadizo y así viajar rápidamente entre regiones del universo alejadas entre sí. En 1988, Morris y Thorne mostraron que se podía “construir” -al menos teóricamente- agujeros de gusano atravesables por seres humanos [3]. Para esto se requiere la existencia de materia exótica concentrada alrededor de la garganta del agujero. Comúnmente, esta materia viola las condiciones de energía débil, nula y fuerte. Al fijar un tipo de materia se determina la geometría del espacio-tiempo que permitiría viajar a un humano a través del gusano. Estos agujeros presentan muchas restricciones y generalmente son inestables, por lo que se buscan métodos alternativos para la construcción de agujeros que reduzcan al mínimo la cantidad de materia exótica necesaria [4]. Sin embargo, existe cierto optimismo por estudiar los tipos de materia que pueden sostener a un agujero de gusano, en parte porque los modelos cosmológicos requieren la existencia de materia exótica, que viola la condición de energía dominante [5].

La métrica de Morris-Thorne ha sido una herramienta fundamental, diferentes ansatz para la función de forma y la función de corrimiento han sido estudiados [5, 6], además

distintos tipos de materia se han propuesto para construir agujeros de gusano [7, 8] Los agujeros de gusano asintóticamente (anti) de Sitter también han sido estudiados [9]. Sin embargo, hasta donde se conoce no se ha hecho un estudio detallado de las condiciones de atravesabilidad para una función de forma determinada.

En la actualidad, encontrar restricciones sobre la existencia de agujeros de gusano atravesables es un campo activo de investigación. Recientemente, se han encontrado restricciones a la existencia de cierto tipo de agujeros de gusanos (anti)de Sitter, en particular se excluye la existencia de estos agujeros cuando la fuente de materia es isotrópica, es decir, cuando las presiones tangencial y radial coinciden [10].

La manera más usual de encontrar soluciones de agujeros de gusano es mediante la introducción de un *ansatz* para la métrica. Con esto, se calcula las posibles deformaciones de una métrica que ya se conoce como solución de agujero de gusano. De ésta forma se han encontrado algunos tipos de agujeros de gusano cargados [11, 12].

Las condiciones para la existencia de agujeros de gusano tipo Schwarzschild asintóticamente (anti) de Sitter se estudian a partir de un *ansatz* para la función de forma del agujero de Morris Thorne, donde el límite asintótico de la métrica es un espacio (anti) de Sitter. Luego se calcula el tensor energía-impulso, correspondiente, que permita sostener el agujero. Adicionalmente, se puede estudiar las condiciones de atravesabilidad como en el caso asintóticamente plano.

Los agujeros de gusano asintóticamente (anti) de Sitter han sido estudiados de manera muy general [9]. Sin embargo, las propiedades de atravesabilidad han permanecido inexploradas. En el presente trabajo se inicia el estudio de agujeros de gusano tipo Schwarzschild (anti) de Sitter, con una función de forma cúbica para la métrica de Morris-Thorne. Además, tomando a la función de corrimiento como una constante, la parte espacial de la métrica se corresponde con la parte espacial de la métrica (anti) de Sitter. De ésta manera procederemos a estudiar algunas de las propiedades de atravesabilidad de los nuevos agujeros.

En la siguiente Sección se realiza un repaso de los elementos que usaremos de la teoría de la Relatividad General. En el Capítulo 2 se describe la métrica de Morris-Thorne y sus propiedades. Se exponen Los Agujeros de Gusano casi-Schwarzschild, que son la particularización de la métrica de Morris-Thorne para funciones de forma lineales. En el Capítulo 3 se presenta los Agujeros de Gusano Deformados Asintóticamente (anti)de Sitter. Conocidos como agujeros deformados. Se estudia el embebimiento de los agujeros en un espacio 3-dimensional Euclideo, se determina las condiciones de energía, sus propiedades de atravesabilidad, y posteriormente se da a conocer un estudio del comportamiento de las geodésicas. Finalmente, en el Capítulo 4 se dan conclusiones y futuras direcciones de investigación.

1.1. Relatividad General

Históricamente varios científicos han contribuido a formular la teoría de la Relatividad. El primero de ellos fue Galileo Galilei, quien formuló una hipótesis acerca de la Relatividad del movimiento de los cuerpos [13]. Galileo propuso esta idea luego de observar el movimiento de un barco en línea recta con velocidad constante. A partir de estas observaciones, Galileo introduce el concepto de Sistema de Referencia y las ecuaciones que relacionan el espacio y el tiempo medido por dos observadores situados en dos sistemas de referencia distintos. Actualmente, conocemos a estas relaciones como las transformaciones de Galileo [14]. El principio de Relatividad de Galileo establece que dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico, donde el tiempo es el mismo en los dos sistemas de referencia [15].

Años después, Isaac Newton utiliza el principio de Relatividad de Galileo y la ley fundamental de la dinámica para explicar el movimiento de los cuerpos celestes en el universo. Newton, al introducir el concepto de Sistemas de Referencia Inercial¹ (SRI) y aplicar las transformaciones de Galileo a éstos, muestra que las aceleraciones de los objetos son las mismas en los SRI, y por lo tanto, el principio de Galileo, en el cual, los procesos físicos tienen que ser independientes del observador, se cumple para todos los sistemas de referencia inerciales. A partir de esta idea, Newton establece los conceptos de tiempo y espacio absoluto; "El Espacio Absoluto, en su propia naturaleza, sin importar nada externo, permanece siempre similar e inamovible", y "El Tiempo Absoluto fluye de manera uniforme sin importar nada externo" [14, 16]

La comunidad científica presentó varias críticas a los conceptos de espacio y tiempo absoluto definidos por Newton, se preguntaban cómo se puede identificar qué marco inercial está en reposo en relación con el espacio absoluto, también manifestaban que no se puede comprender adecuadamente el concepto de espacio absoluto si se ignora la ley de inercia i.e. Newton consideraba que el espacio absoluto era una entidad física que actuaba sobre los cuerpos provocando en ellos la inercia, mientras que la relación inversa no era posible [17].

Para poder cambiar el concepto de espacio absoluto, Albert Einstein descartó la idea de la existencia del éter² y estableció dos postulados. El primero dice que las leyes de la física deben ser idénticas para todos los observadores, independientemente de si se aceleran o no, a este postulado se lo conoce como el principio de la Relatividad [13], el

¹Los Sistemas de Referencia Inercial son aquellos sistemas que se mueven unos con respecto a otros con velocidad constante.

²La idea del éter fue introducida por Descartes en 1644, esta idea se basaba en que las fuerzas entre dos cuerpos que no están en contacto actuaban a través de un material presente en el espacio, denominado éter. El éter tenía un función principal que era llevar ondas de luz. Los debates sobre la existencia de este material se dieron hasta fines del siglo XIX, en el que se realizaban experimentos como tratar de determinar la velocidad de la tierra en órbita a través del éter, tratando de medir el viento del éter en el laboratorio [13, 14]. El experimento de Michelson y Morley fue la primera prueba en contra de la idea de la existencia del éter.

segundo postulado dice que la luz viaja linealmente a una velocidad c en todas las direcciones en cada marco inercial, donde no importa qué tan rápido se aleje un observador de una señal de luz, siempre se alejará con velocidad constante c [14].

Einstein encontró un nuevo marco de espacio y tiempo, que acomodaba de forma natural ambos postulados. Este marco dependía de cambiar las transformaciones de Galileo³ por las transformaciones de Lorentz⁴ para enlazar los sistemas inerciales y dejar inalterado el espacio y tiempo dentro de cada sistema. Sin embargo, puede cambiar el sentido de una magnitud, como la velocidad, que tiene cada sistema sobre los demás. En el nuevo concepto de espacio-tiempo aparece el tiempo relativo, el cual es diferente de un sistema inercial a otro [14]. En consecuencia, el principio de la Relatividad confirma lo que se había demostrado en los experimentos de Michelson y Morley⁵ [13].

En 1905 Einstein formuló una nueva teoría basada en sus dos postulados, denominada Teoría de la Relatividad Especial. En esta teoría se estableció nuevas ecuaciones que permiten pasar de un sistema de referencia inercial a otro, y se reemplazó la noción de un tiempo absoluto (que depende del marco de referencia y la posición espacial) por un intervalo de tiempo entre dos eventos, eventos que pueden ocurrir al mismo tiempo para un observador y en diferentes momentos para otro [2]. La teoría Especial de la Relatividad, considerada como la teoría del espacio-tiempo plano, se aplica en el caso especial donde la curvatura del espacio-tiempo es insignificante [17].

Einstein buscó extender los conceptos de la Relatividad Especial en una nueva teoría que establece que la gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. A esta teoría se la conoce como la Teoría General de la Relatividad [16]. Para formular su nueva teoría y poder determinar las ecuaciones de campo, que establecen la geometría del espacio-tiempo desde una distribución de masa y energía, Einstein, tuvo que reinterpretar, desde un marco puramente geométrico, los conceptos fundamentales de la Mecánica de Newton y la teoría electromagnética de Maxwell-Lorentz, como: el tiempo, el espacio, entre otros. También usó varios principios físicos que ayudaron a comprender la naturaleza de las leyes de Newton con mayor precisión. Estos principios son: el principio de Match, principio de Equivalencia, principio de covarianza, principio de acoplamiento mínimo gravitacional y el principio de correspondencia [16].

³Cambios de coordenadas y velocidades que dejan invariantes las ecuaciones de Newton.

⁴Transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones de Maxwell.

⁵El experimento de Michelson y Morley constaba de un interferómetro, el cual divide la luz en dos haces, luz que emite un foco luminoso como un láser; éstos haces rebotan en dos espejos volviendo a juntarse. Dado que la luz es una onda, siempre que se tenga una fuente que solo emite una longitud de onda (es decir, un color muy definido), al volver a juntarse, los dos haces interferirán produciendo máximos y mínimos de intensidad.

1.1.1. El principio de equivalencia

Entre las contribuciones que hizo Galileo para la formulación de la teoría de la Relatividad, se cuentan los experimentos de caída libre que realizó con Simon Stevin, donde concluyeron que los cuerpos llegaban a la superficie de la tierra al mismo tiempo y con la misma aceleración, independientemente de su masa y composición [17].

El hecho de que la aceleración que toman los objetos en caída libre sea independiente de su masa, permite establecer una analogía entre los sistemas de referencia no-inerciales y los campos gravitatorios, mediante el Principio de Equivalencia Débil (PED), el cual establece que:

El campo gravitacional se acopla a todo. [16].

El PED fue demostrado por Newton, al considerar un experimento en el que dos masas (inercial⁶ y gravitacional⁷) que caen desde la misma altura en un campo gravitacional, donde la fuerza que se ejerce sobre cada masa es la misma $\vec{F}_I = \vec{F}_G$, llegan a la superficie con igual aceleración ($\vec{a}_1 = \vec{a}_2$). A partir de la segunda ley de Newton

$$\vec{F}_I = m_I \vec{a}, \quad (1.1)$$

donde m_I es masa inercial y \vec{a} su aceleración. De la expresión general de la energía potencial gravitacional

$$\vec{F}_G = -m_G \text{grad}(\phi), \quad (1.2)$$

donde $\phi = -G M/r$ es el potencial gravitatorio, y m_G la masa gravitacional. Entonces, la relación entre las fuerzas inercial y gravitacional que ejercen sobre los objetos de masas m_1 y m_2

$$m_{I1} \vec{a}_1 = \vec{F}_1 = -m_{G1} \text{grad} \phi, \quad (1.3)$$

$$m_{I2} \vec{a}_2 = \vec{F}_2 = -m_{G2} \text{grad} \phi. \quad (1.4)$$

El hecho de que los dos objetos lleguen a la superficie con igual aceleración implica que $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, de donde se concluye

$$\frac{m_{I1}}{m_{G1}} = \frac{m_{I2}}{m_{G2}}. \quad (1.5)$$

Repitiendo el experimento de caída libre con n-cuerpos (m_1, \dots, m_n) se puede llegar a que la razón m_I/m_G toma el valor de una constante universal α , la cual, con una elección apropiada de unidades y sin perder generalidad es posible igualar a 1. Por lo tanto, $m_I = m_G$. Esta relación indica que la trayectoria de un cuerpo en caída libre está determinada por su posición y velocidad inicial, independientemente de la forma y masa del objeto i.e. el PED. La generalización del PED hecha por Einstein, se denomina Principio de Equivalencia Fuerte (PEF), el cual establece que

⁶Es una medida a la resistencia que presenta el cuerpo cuando hay un cambio en la velocidad del movimiento

⁷Mide la respuesta de un cuerpo bajo la influencia de un campo gravitatorio.

No hay experimentos locales que puedan distinguir la caída libre en un campo gravitacional, del movimiento acelerado en ausencia de un campo gravitacional [16, pág. 129].

La validez del Principio de Equivalencia, y precisamente su carácter local, tiene importantes implicaciones sobre la estructura matemática del espacio-tiempo y ha sido fundamental en la formulación de la Relatividad. El hecho de que localmente un observador no pueda distinguir entre estar en caída libre en un campo gravitatorio o ser un observador inercial, implica que existe un cambio de coordenadas que elimina el campo gravitatorio en una pequeña región y hace que el espacio-tiempo parezca localmente plano [17].

1.1.2. Ecuaciones de campo de Einstein

La teoría de la Relatividad General formulada por Einstein en 1916, establece que la gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, es decir, es una propiedad geométrica del espacio-tiempo [15], esta curvatura es originada por la materia que interactúa con el espacio. Al sistema de ecuaciones tensoriales que describen las relaciones entre el espacio y la materia, se las conoce como Ecuaciones de Campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Del lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos la información de la curvatura del espacio-tiempo, donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R el escalar de Ricci y $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico. Del lado derecho se tiene $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-impulso de la distribución de materia presente, y G la constante de Gravitación Universal. (Ver Apéndice A)

El primer miembro de las ecuaciones de campo (ecuación 1.6) se lo conoce como el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Este tensor es una forma diferencial no-lineal de segundo orden, y como el tensor de curvatura está relacionado con la curvatura de la variedad, si $R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = 0$ entonces se puede demostrar que es posible elegir un sistema de coordenadas en el que la variedad es plana [15].

En cambio, el segundo miembro de la ecuación 1.6 es el tensor energía-impulso, un tensor de rango 2 que describe el flujo lineal de una distribución de masa y energía, $T_{\mu\nu}$ es un tensor con $div(T) = 0$, y contiene todas las formas en que se manifiesta la energía y el momento. Una región del espacio-tiempo en la cual $T_{\mu\nu} = 0$ se lo conoce como vacío, es decir, carece de materia.

Cualquier campo tensorial covariante simétrico de rango 2 define una métrica, y una variedad dotada de una métrica se llama variedad Riemanniana. Esta variedad puede ser dotada de tensor métrico Riemanniano con una signatura de (++++) , o semi-Riemanniano con signatura (-+++). Notamos que en Relatividad General se utiliza los

tensores métricos semi-Riemannianos o Lorentzianos [15].

Una métrica se usa para definir distancias y longitudes de vectores. A la distancia infinitesimal entre dos puntos se la denomina ds y viene dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu, \quad (1.7)$$

donde ds^2 se lo conoce como elemento de línea y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. En la variedad espacio-tiempo de la Relatividad General, μ y ν son índices que toman los valores de 0 a 3 correspondientemente, (t, x, y, z), y por lo tanto la matriz de coeficientes $g_{\mu\nu}$ es un tensor de 4×4 . En consecuencia, tenemos un conjunto de 16 funciones reales definidas en todos los puntos de la variedad espacio-tiempo [15].

Todos los tensores de la ecuación 1.6 son matrices 4×4 y como los tensores $g_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ son simétricos, tenemos un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que están acopladas y son no-lineales.

Poco después de la formulación de la Teoría de la Relatividad General, Einstein introdujo un término cosmológico a sus ecuaciones de campo para poder construir un modelo estático del universo con simetría esférica [18]. Aplicando el término cosmológico Λ a las ecuaciones de Einstein, las ecuaciones 1.6 quedaron definidas de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Einstein estaba convencido de que las masas aisladas no pueden imponer una estructura en el espacio en el infinito, es por ello que postuló un universo que es espacialmente finito y cerrado: un universo en el que no se necesitan condiciones de contorno y que era estático. Tiempo después, Edwin Hubble comprobó que el universo estaba en constante expansión, y el universo que Einstein había postulado junto con la necesidad de un término cosmológico desapareció [14].

Actualmente, Λ se interpreta como una constante universal que fija la densidad de energía del vacío

$$\rho_{vac} c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}; \quad (1.9)$$

y, si la constante es no-nula, la presión negativa del vacío podría hacer que el universo acelerara su expansión.

Formulación variacional de las ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden derivar usando un principio variacional. La condición que se requiere es

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0, \quad (1.10)$$

donde \mathcal{L} es una función escalar que debe ser invariante y debe construirse a partir del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ [19].

En función del escalar de curvatura R la densidad Lagrangiana es $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, y por lo tanto, la acción explícitamente sería

$$S_{EH} = \int R \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.11)$$

A la ecuación anterior se la conoce como acción de Einstein-Hilbert [20].

La variación de la acción está dada por

$$\delta S_{EH} = \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta [g_{\mu\nu} \sqrt{-g}]) d^4x = 0. \quad (1.12)$$

Del primer término de esta ecuación se tiene

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} \right)_{,\lambda}, \quad (1.13)$$

y del segundo término

$$\delta [g_{\mu\nu} \sqrt{-g}] = \sqrt{-g} \left[\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right]. \quad (1.14)$$

Reemplazando las ecuaciones 1.13 y 1.14 en 1.12, se obtiene

$$\delta S_{EH} = \int \sqrt{-g} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} d^4x, \quad (1.15)$$

donde aparece el tensor de Einstein, puesto que la variación es arbitraria. Se concluye que

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.16)$$

que son precisamente las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío [19]. Para poder obtener las ecuaciones de campo incluyendo una distribución de materia, se supone la existencia de otro campo junto al gravitacional; entonces, la acción total se convierte en

$$S = S_{EH} + S_M, \quad (1.17)$$

donde S_M es la acción correspondiente a la materia.

Soluciones a las ecuaciones de campo

Las soluciones a las ecuaciones de campo son métricas que describen la estructura del espacio-tiempo. Dado que las ecuaciones de campo son no-lineales y acopladas es muy complicado encontrar una solución general. Sin embargo, sí se han encontrado soluciones particulares.

Si suponemos algún tipo de simetría -la más común es la simetría esférica- el sistema de 10 ecuaciones se simplifica y permite encontrar soluciones exactas. Las soluciones exactas más simples son la solución de Schwarzschild y de Reissner-Nordström [21].

- i. **Solución de Schwarzschild.** Un mes después de la publicación de la Teoría General de la Relatividad, Karl Schwarzschild encontró una solución a las ecuaciones de campo. Esta métrica resuelve la geometría espacio-temporal fuera de una distribución estacionaria y esférica de la materia de masa M (conocida como la solución exterior). La solución de Schwarzschild encontró su primera aplicación en el cálculo del perihelio de Mercurio [22]. En coordenadas espaciales esféricas, la métrica de Schwarzschild se define como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.18)$$

donde $c = 1$. La métrica 1.18 tiene algunas propiedades características:

- Utiliza coordenadas esféricas para describir la parte espacial.
- Las componentes g_{tt} y g_{rr} no dependen del tiempo, lo cual muestra que es una solución estática.
- Como la métrica 1.18 resuelve la geometría espacio-temporal en el exterior de una concentración de materia de masa M , entonces las ecuaciones 1.6 toman la forma $G_{\mu\nu} = 0$ [23].
- Si $r \rightarrow \infty$ y $M \rightarrow 0$, se recupera la métrica de Minkowski.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.19)$$

- La métrica 1.18 es asintóticamente plana y presenta 2 singularidades, la primera en $r = 2GM$ y la segunda en $r = 0$. Esto divide la variedad en dos regiones, $0 < r < 2GM$ y $2GM < r < \infty$ [21].

La métrica 1.18 describe la solución de vacío esféricamente simétrica a las ecuaciones de Einstein, donde M es un parámetro que se puede interpretar como la masa Newtoniana que se mediría al estudiar órbitas a grandes distancias de la fuente gravitatoria.

Hay que notar que $r = 2GM$ define una superficie de gran interés: el horizonte de sucesos, denominado radio de Schwarzschild. Como la métrica 1.18 es válida en el vacío (se mantiene fuera de la superficie de una estrella) entonces si se mira al Sol, con $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{33}$ gramos y un radio de $r \approx 5 \times 10^5 GM_{\odot}$, su radio de Schwarzschild $r = 2GM_{\odot}$ está situado muy al interior de esta estrella, de modo que la energía luminosa que puede producir el Sol en el exterior a este radio puede llegar a la Tierra sin problema alguno. Sin embargo, si se pudiera compactar una estrella brillante contenida dentro del radio de Schwarzschild, la estrella ya no brillaría más

porque r se comportaría como el horizonte de sucesos unidireccional donde las cosas pueden caer pero nada puede emerger [20]. En el caso de los objetos que tienen un horizonte de sucesos se requiere de la métrica de Schwarzschild, pero para los objetos que no tienen singularidades, como el Sol, la métrica 1.18 no se la utiliza [23].

- ii. **Solución de Reissner-Nordström** Una de las soluciones estáticas más famosas para las ecuaciones de campo de Einstein es la métrica Reissner-Nordström, que describe la geometría del espacio-tiempo que rodea un agujero negro esféricamente simétrico que no rota y está cargado [24]. Un agujero negro altamente cargado sería rápidamente neutralizado por las interacciones con la materia en su vecindad, y por lo tanto, tal solución no es relevante para situaciones astrofísicas realistas. Sin embargo, los agujeros negros cargados permiten estudiar una serie de características importantes de situaciones más generales [12].

La solución de Reissner-Nordström se plantea como

$$ds^2 = \frac{\Delta_r}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta_r} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.20)$$

donde $\Delta_r = r^2 - 2Mr + Q^2 + G^2$, M es la masa, Q y G son las cargas eléctricas y magnéticas, respectivamente.

Entre las propiedades de esta solución se resaltan:

- La métrica 1.20 es una solución estática y asintóticamente plana.
- La singularidad está localizada en $r = 0$.
- Para $0 < Q^2 + G^2 < M^2$, hay dos horizontes definidos por $\Delta_r = 0$, y serían

$$r_{\pm} = M \left(1 \pm \sqrt{M^2 - (Q^2 + G^2)} \right). \quad (1.21)$$

- La raíz $r = r_+$ se la denomina horizonte externo y la raíz $r = r_-$ se la denomina horizonte interno. Para $r > r_+$, r es una coordenada tipo espacial y t es de tipo temporal, y en este caso, la solución de la métrica 1.20 puede considerarse como una pequeña perturbación fuera del horizonte del espacio-tiempo de Schwarzschild. Dentro de los horizontes, para $r_- < r < r_+$, r es una coordenada de tipo temporal y t de tipo espacial. Sin embargo, para la métrica de Reissner-Nordström la estructura del espacio-tiempo más cercana a la singularidad de curvatura se cambia drásticamente. No solo existe un tipo de singularidad de horizonte adicional en $r = r_-$, sino que es la región más interna, $0 < r < r_-$, donde la coordenada r se vuelve de tipo espacial y t de tipo temporal. [25]

- Cuando $M^2 = Q^2 + G^2$, los horizontes r_{\pm} se degeneran, y el agujero negro es llamado extremal.
- Para $M^2 < Q^2 + G^2$, la solución tiene una singularidad desnuda.
- Si las cargas, $(Q^2 + G^2) \rightarrow 0$, la métrica se aproxima a la métrica de Schwarzschild. Si $r \rightarrow \infty$ se recupera la métrica de Minkowski [26].

1.1.3. Condiciones de Energía

Las condiciones de energía son generalizaciones de la afirmación de que la densidad de energía no puede ser negativa para todo el tensor energía-impulso. Para especificar las condiciones de energía, se asume que el tensor energía-impulso $T^{\mu\nu}$ es diagonal,

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3), \quad (1.22)$$

donde ρ es la densidad de masa, y p_i son las diferentes componentes de la presión. Aunque se cree que las formas de materia clásica obedecen estas condiciones, es conocido el hecho de que las condiciones de energía son violadas por ciertos campos cuánticos, como en el efecto Casimir [27].

i. Condición de Energía Nula (CEN)

Para cualquier vector nulo k , se cumple

$$T_{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} \geq 0, \quad (1.23)$$

y tomando el tensor de energía-impulso de la ecuación 1.22, se tiene

$$\forall_i, \quad \rho + p_i \geq 0. \quad (1.24)$$

Esta condición se cumple en fluidos perfectos⁸, y se mantiene a lo largo de las líneas de flujo de los campos vectoriales apropiados [28].

ii. Condición de Energía Débil (CED)

Para cualquier vector temporal U^{μ} , se cumple

$$T_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} \geq 0, \quad (1.25)$$

es decir, la densidad de energía medida por un observador de tipo temporal debe ser positiva. De la ecuación 1.22, se tiene

$$\rho > 0 \text{ y } \forall_i, \quad \rho + p_i \geq 0, \quad (1.26)$$

⁸Los fluidos son análogos al polvo, pero en este caso las partículas ejercen una presión p entre sí. Además, el campo vectorial de velocidad temporal u_{μ} puede dejar de tener geodésicas como sus curvas integrales.

donde la CED se cumple para un fluido perfecto con tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P h_{\mu\nu}$, y un fluido con velocidad u^μ [29].

iii. Condición de energía Fuerte (CEF)

Para cualquier vector de tipo temporal U^μ , se cumple la siguiente desigualdad

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) U^\mu U^\nu \geq 0, \quad (1.27)$$

donde T es la traza del tensor energía impulso. De las ecuaciones de Einstein, la expresión 1.27 está relacionada con la traza del tensor de marea $E[U]_{\mu\nu}$ como

$$g^{\mu\nu} E[U]_{\mu\nu} = R_{\rho\alpha} U^\rho U^\alpha, \quad (1.28)$$

y, de la ecuación 1.22, se tiene

$$\forall_i, (\rho + p_i) \geq 0 \text{ y } (\rho + \sum_i p_i) \geq 0. \quad (1.29)$$

La condición CEF implica CEN pero no necesariamente CED. La materia que satisface la condición de energía fuerte asume que la gravedad es una fuerza atractiva donde la divergencia (convergencia) de las geodésicas⁹ disminuirá (aumentará) en el tiempo.

iv. Condición de Energía Dominante (CEDM)

Para cualquier vector temporal $U^{\mu\nu}$ se cumple

$$T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \geq 0 \text{ y } T_{\mu\nu} U^\mu \text{ no es espacial}. \quad (1.30)$$

Esto implica que la densidad de energía medida localmente siempre es positiva, y que el flujo de energía es de tipo temporal y nulo. De la ecuación 1.22 se tiene

$$\rho \geq 0 \text{ y } \forall, p_i \in [-\rho, +\rho]. \quad (1.31)$$

La CEDM se cumple para fluidos perfectos, y estipula que nunca se puede observar que la masa-energía fluya más rápido que la luz [20].

⁹Curva (C) de mínima distancia entre dos puntos de una superficie, donde ds es el desplazamiento infinitesimal a lo largo de C.

Capítulo 2

Agujeros de gusano

2.1. Agujeros de gusano atravesables

En 1916, el físico austríaco Ludwig Flamm, al examinar la solución de Schwarzschild, notó que también era posible construir otra solución que describía el fenómeno que más tarde se conocería como “agujero blanco”¹⁰. El agujero blanco actúa como una fuente que expulsa materia desde su horizonte de sucesos¹¹, a diferencia del agujero negro que tiene un horizonte donde las partículas pueden caer pero no pueden emerger. Flamm se dio cuenta que el agujero negro y el agujero blanco –que describen dos regiones diferentes del espacio-tiempo– estaban conectados por un conducto espacio-temporal, denominado garganta. Las regiones conectadas a través de esta garganta podían estar en diferentes partes del universo o en universos distintos. En 1935, Einstein y Nathan Rosen, analizaron a detalle la idea propuesta por Flamm, y lograron obtener una solución que la denominaron puente de Einstein-Rosen [26]. 20 años más tarde, John Archibald Wheeler llamaría agujero de gusano al puente de Einstein-Rosen.

El trabajo teórico realizado por Einstein y Rosen demostró matemáticamente que el agujero de gusano es inestable, es decir, el agujero de gusano se colapsa en un tiempo más corto del tiempo que toma un cuerpo en llegar al otro lado del agujero. Colapsando instantáneamente, incluso si solo un fotón intenta atravesarlo. Estas soluciones son conocidas como agujeros de gusano no atravesables.

Posteriormente, Morris, K. Thorne y U. Yertsever, plantearon la posibilidad de convertir al agujero de gusano en atravesable si se lograba mantenerlo abierto el tiempo suficiente como para que un objeto consiguiera llegar al otro lado del agujero. En su colaboración concluyeron que para mantener abierto un agujero de gusano necesitarían de una materia con una densidad de energía negativa, y una presión negativa mayor (en magnitud) que la densidad de energía. Sin embargo, el tipo de materia que conservaría abierto el agujero de gusano por un lapso de tiempo –que lo convertiría en atravesable– no satisface las condiciones de energía como lo hace la materia conocida. Por esta ra-

¹⁰Es el inverso temporal teórico de un agujero negro.

¹¹Es la superficie que separa el interior, que son regiones atrapadas, del exterior.

zón, se la denomina materia exótica. [30].

A continuación se exponen las diferentes formas en las que se puede construir un agujero de gusano, las condiciones de atravesabilidad y el tipo de materia que se necesita para crearlos y mantenerlos abiertos.

2.1.1. Agujero de gusano de Morris-Thorne

La posibilidad de que los agujeros de gusano de Schwarzschild puedan existir, y puedan ser utilizados para viajes interestelares, fue motivación suficiente para que Morris y Thorne iniciaran un nuevo estudio de agujeros de gusano atravesables. Su objetivo principal fue crear túneles espacio-temporales macroscópicos, que establecieran un atajo entre dos regiones que pertenecen al mismo universo o a universos diferentes, estos atajos tienen una garganta que une a dos bocas de entrada al túnel, y cada boca se localiza en una región asintóticamente plana del espacio-tiempo.

Para que los agujeros de gusano sean atravesables, se imponen ciertos requisitos: 1) El espacio-tiempo no debe tener singularidades ni horizontes, para que se pueda atravesar el agujero de manera bidireccional; 2) El tiempo de viaje del pasajero debe ser razonable, e.g., menos de un año; 3) Las fuerzas gravitacionales de marea deben ser ligeramente pequeñas en comparación con la fuerza gravitacional de la Tierra; 4) Se necesita un tipo de materia que viole las condiciones de energía, detalladas al final del Capítulo anterior.

Métrica de Morris-Thorne

La métrica del agujero de gusano de Morris-Thorne es estática y esféricamente simétrica,

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

donde (t, r, θ, ϕ) son las coordenadas usuales de espacio-tiempo, y $b(r)$ y $\phi(r)$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial r . $b(r)$ se denomina función de forma porque la función $b(r)$ determina la forma espacial del agujero de gusano mediante diagramas de embebimiento. A $\phi(r)$ se la conoce como función de corrimiento [9].

La métrica del agujero de gusano debe satisfacer las ecuaciones de Einstein para un tensor de energía-impulso dado. A partir de la métrica 2.1 determinamos las componentes del tensor de Einstein, las cuales nos permiten encontrar el tensor energía-impulso.

i. Componentes del tensor de Einstein

La interpretación física, y el análisis matemático, se simplificarán al construir una nueva base ortonormal a partir de un conjunto de vectores apropiados para un grupo de observadores que permanecen en reposo en el sistema de coordenadas

(ct, r, θ, ϕ) , con (r, θ, ϕ) fijos. Si denotamos vectores base del sistema de referencia de los observadores en reposo como: \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ y \mathbf{e}_ϕ [9], y determinamos los vectores de la nueva base con la transformación $\mathbf{e}_{\hat{\mu}} = \Lambda_{\hat{\mu}}^\nu \mathbf{e}_\nu$, donde

$$\Lambda_{\hat{\mu}}^\nu = \text{diag} \left[e^{-\phi(r)}, (1 - b(r)/r)^{1/2}, r^{-1}, (r \sin \theta)^{-1} \right], \quad (2.2)$$

entonces, los vectores de la nueva base están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}} &= e^{-\phi(r)} \mathbf{e}_t, & \mathbf{e}_{\hat{r}} &= (1 - b(r)/r)^{1/2} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} &= r^{-1} \mathbf{e}_\theta, & \mathbf{e}_{\hat{\phi}} &= (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En esta base, la nueva métrica toma la forma de la métrica de Minkowski,

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar el tensor de Einstein $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ en el sistema de referencia ortonormal, calculamos las componentes del tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{r}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} = (1 - b/r) \left[-\Phi'' + (b'r - b) [2r(r - b)^{-1}] \Phi' - (\Phi)^2 \right]; \\ R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{\theta}} = -(1 - b/r) \Phi'/r; \\ R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = -(1 - b/r) \Phi'/r; \\ R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = (b'r - b)/2r^3; \\ R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{r}}^{\hat{\phi}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}}^{\hat{\phi}} = (b'r - b)/2r^3; \\ R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = b/r^3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Usando el tensor de Riemann calculamos el tensor de Ricci $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ y el escalar de curvatura R . Las componentes del tensor de Einstein serían

$$\begin{aligned} G_{\hat{t}\hat{t}} &= \frac{b'}{r^2}; \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi'}{r}; \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left(\phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)} \phi' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)} \right); \\ G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde la notación ' indica la derivada respecto a la coordenada radial r .

ii. Tensor de Energía-Impulso

Las ecuaciones de campo requieren que el tensor de Einstein sea proporcional al tensor de energía-impulso, i.e. en la base ortonormal el tensor de energía-impulso, $T_{\mu\nu}$, debe tener la misma estructura algebraica que las componentes del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ (ecuaciones 2.5) [3]. Así, las únicas componentes distintas de cero del tensor energía-impulso son

$$\begin{aligned} T_{\hat{t}\hat{t}} &= \rho(r)c^2; \\ T_{\hat{r}\hat{r}} &= -\tau(r); \\ T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = p(r), \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de masa-energía, $\tau(r)$ la tensión radial y $p(r)$ la presión medida en la dirección ortogonal a la dirección radial. De las ecuaciones de campo (ecuación 1.6), las componentes del tensor de Einstein (ecuación 2.5), y del tensor energía-impulso (ecuación 2.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{b'}{r^2}; \\ \tau(r) &= -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\phi'}{r}; \\ p(r) &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\phi' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si se confina el agujero de gusano en el interior de una esfera de radio $r = R_s$, la cantidad de energía-impulso que genera la curvatura del agujero se extendería hasta alcanzar el radio máximo R_s de la esfera. Entonces, si $r > R_s$ la densidad de energía $\rho(r)$, la tensión por unidad de área $\tau(r)$ y la presión $p(r)$ son nulas. Al evaluar

$$\begin{aligned} b'(r) &= 8\pi Gc^{-2}r^2\rho; \\ \phi'(r) &= \frac{-8\pi Gc^{-4}\tau r^3 + b(r)}{2r(r-b)}; \\ \tau'(r) &= (\rho c^2 - \tau)\phi'(r) - \frac{2(p + \tau)}{r}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

en la región del vacío, cuando el radio del agujero es mayor al radio de la esfera donde se confina el agujero de gusano $r > R_s$, estas ecuaciones restringen la geometría del espacio-tiempo externo para tener la forma estándar de Schwarzschild, donde

$$b(r) = b(R_s) = B; \quad B = \text{const.} \quad (2.9)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{2} \ln(1 - B/r). \quad (2.10)$$

Notamos que el espacio exterior del agujero de gusano puede ser asintóticamente plano, de Sitter o anti-de Sitter [9].

iii. La función de embebimiento

Los diagramas de embebimiento son utilizados para visualizar las propiedades de las hipersuperficies en el espacio curvo. En este caso, usaremos los diagramas de embebimiento para representar un agujero de gusano y extraer información útil acerca de la forma que debería tener la función $b(r)$. Debido a que la métrica 2.1 es esféricamente simétrica, se puede considerar una sección espacial del agujero de gusano a un tiempo fijo t , sin perder generalidad. Si $\theta = \pi/2$ y $t = \text{constante}$, el elemento de línea es el siguiente

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\phi^2. \quad (2.11)$$

Para visualizar la sección del agujero, se embebe la métrica 2.1 en el espacio Euclideo 3-dimensional. En coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , esta métrica se expresa de la forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.12)$$

La superficie embebida es axialmente simétrica y está descrita por la función $z = z(r)$. En esta superficie el elemento de línea sería

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.13)$$

De las ecuaciones 2.11 y 2.13, obtenemos que la superficie embebida debe satisfacer

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (2.14)$$

Para ser una solución de agujero de gusano, la geometría del agujero debe tener un radio mínimo, $r_o = b(r_o)$, que corresponde a la garganta, por lo tanto, $dz/dr \rightarrow \infty$. Ya que dz/dr es divergente en la garganta, r no es la mejor coordenada para estudiar la forma del agujero de gusano, por lo que, consideramos la distancia radial propia medida por un observador estático. Esta distancia se expresa de forma integral como

$$l(r) = \pm \int_{r_o}^r \frac{dr}{(1 - b(r)/r)^{1/2}}, \quad (2.15)$$

donde el límite inferior es el radio de la garganta r_o y el límite superior r es el radio de la boca del agujero de gusano. Para que las condiciones de un viaje sean "razonables" se requiere que $l(r)$ esté definido y sea finito a lo largo de todo el espacio-tiempo, lo que implica que $(1 - b(r)/r) > 0$.

iv. Condiciones de atravesabilidad

Un viajero que intente atravesar un agujero de gusano podría morir por las fuerzas gravitatorias de marea. Podría ser incinerado por una alta radiación emitida cerca de una singularidad, podría ser lastimado gravemente por el contacto con materia exótica, o morir a causa de la vejez durante el viaje. Por otra parte, el viajero podría

quedar atrapado dentro del agujero de gusano después de que inadvertidamente éste se colapse. Sin embargo, es posible diseñar un agujero de gusano que disminuya cada uno de estos peligros.

En primer lugar, el viajero debe ser capaz de atravesar el agujero de gusano en un tiempo finito y razonablemente pequeño. Tomamos un agujero de gusano que conecta dos regiones, cada una ubicada en un universo diferente, denominando región 1 (donde se encuentra la estación de salida), y región 2 (donde está ubicada la estación de llegada). También se considera que un pasajero en su nave espacial, viaja radialmente a través del agujero de gusano, partiendo de una estación espacial ubicada a una distancia radial propia $l = -l_1$ desde la garganta del agujero, y termina en reposo en una estación espacial de llegada localizada a una distancia radial $l = l_2$ [3]. Si el viajero tiene una velocidad radial $v(r)$ al pasar el radio r , medido por un observador estático, se puede relacionar la distancia propia recorrida por el viajero dl , el radio recorrido dr y el lapso de tiempo propio medido por el viajero $d\tau$ a través de

$$v = e^{-\phi} \frac{dl}{dt} = \mp e^{-\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2} \frac{dr}{dt}; \quad (2.16)$$

$$v\gamma = \frac{dl}{d\tau} = \mp e^{-\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1/2} \frac{dr}{d\tau}, \quad (2.17)$$

donde dt es el lapso de tiempo visto por el observador estático, y $\gamma = [1 - (V/c)^2]^{-1/2}$ es el factor de Lorentz. El signo $-$ indica la primera mitad del viaje del pasajero desde la región 1 hasta la garganta, y el signo $+$ indica la segunda mitad del viaje desde la garganta hasta la región 2.

Como las estaciones espaciales de cada universo deben estar lo suficientemente lejos de la garganta para que los efectos gravitacionales sean pequeños, se asume que:

- La geometría del espacio, donde están ubicadas las estaciones, debe ser casi-plana, $b/r \ll 1$.
- El corrimiento al rojo gravitacional de las señales enviadas de las estaciones al infinito deben ser pequeñas, $\Delta\lambda/\lambda = e^{-\phi} - 1 \approx -\phi$, si $|\phi| \ll 1$.
- La aceleración gravitacional medida en las estaciones, $g = -(1 - b/r)^{-1/2} \phi' \simeq -\phi'$, debe ser menor o igual a la aceleración gravitacional de la Tierra g_{\oplus} .

Si el agujero de gusano es atravesable, el tiempo de viaje medido tanto para el viajero como para los observadores que se encuentran en reposo en las estaciones

de salida y llegada debe ser menor a 1 año,

$$\Delta_{viajero} = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v\gamma} \leq 1 \text{ año.}, \quad (2.18)$$

$$\Delta_{estación} = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v e^\phi} \leq 1 \text{ año.} \quad (2.19)$$

Adicionalmente, se requiere que la aceleración que siente el viajero no exceda la gravedad de la Tierra g_\oplus . En una base ortonormal del marco de referencia propio del viajero se tiene que

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \gamma \mathbf{e}_{\hat{t}} \mp \gamma v \mathbf{e}_{\hat{r}}; \quad \mathbf{e}_{\hat{1}} = \mp \gamma \mathbf{e}_{\hat{r}} + \gamma v \mathbf{e}_{\hat{t}}; \quad \mathbf{e}_{\hat{2}} = \mathbf{e}_{\hat{\theta}}; \quad \mathbf{e}_{\hat{4}} = \mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \quad (2.20)$$

en términos de los vectores base del observador estático. El viajero tiene una 4-aceleración expresada en su sistema de referencia como $a^{\hat{\mu}'} = U^{\hat{\nu}'} U_{;\hat{\nu}'}^{\hat{\mu}'}$. Para calcular a se considera U_α como una función de la posición radial del viajero, como

$$|a| = \left| \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} e^{-\phi} (\gamma e^\phi)' \right| \leq g_\oplus. \quad (2.21)$$

La aceleración gravitacional que siente el viajero está dada por

$$\Delta a^{\hat{\mu}'} = -R_{\hat{\nu}'\hat{\alpha}'\hat{\beta}'} U^{\hat{\nu}'} \eta^{\hat{\alpha}'} U^{\hat{\beta}'}, \quad (2.22)$$

donde $U^{\hat{\nu}'}$ es la 4-velocidad del viajero y $\eta^{\hat{\alpha}'}$ la separación entre dos partes arbitrarias del cuerpo del viajero. Hay que notar que $\Delta a^{\hat{\mu}'}$ es la aceleración del viajero en el espacio, con componentes

$$\Delta a^{\hat{\beta}'} = -R_{\hat{0}'\hat{j}'\hat{0}'} \eta^{\hat{j}'} = -R_{\hat{2}'\hat{j}'\hat{0}'} \eta^{\hat{j}'}. \quad (2.23)$$

Si se realiza las transformaciones de Lorentz a las componentes del tensor de Riemann, en el sistema del observador estático, se obtiene las componentes del tensor de Riemann distintas de cero en el sistema del viajero:

$$R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} = R_{\hat{r}'\hat{t}'\hat{r}'\hat{t}'} = - \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[-\phi'' - (\phi')^2 + \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \phi' \right]; \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} &= R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} = \gamma^2 R_{\hat{\theta}'\hat{t}'\hat{\theta}'\hat{t}'} + \gamma^2 v^2 R_{\hat{\theta}'\hat{r}'\hat{\theta}'\hat{r}'} \\ &= \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[v^2 \left(b' - \frac{b}{r} \right) + 2(r-b)\phi' \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

La desigualdad $|\Delta a^{\hat{\mu}'}| \leq g_\oplus$ nos proporciona las restricciones necesarias para la aceleración gravitacional de marea, medidas por un viajero moviéndose radialmente a través del agujero de gusano. Estas restricciones son evaluadas, particularmente, en la garganta y limitan la velocidad con la que el viajero atraviesa el agujero.

La presencia de materia exótica hace posible que el agujero de gusano se mantenga abierto por un lapso de tiempo adecuado. Esta materia no obedece a las condiciones de energía nula $\rho c^2 - \tau > 0$, y por lo tanto, no obedece a la condición de energía débil. Siendo así, es de mucha ayuda definir un parámetro adimensional ξ que caracterizará la presencia de materia exótica,

$$\xi = \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|}, \quad (2.26)$$

Si tomamos τ y ρ de la ecuación 2.7 para sustituirlos en la última ecuación, se puede escribir la forma general de ξ , como

$$\xi = \frac{b/r - b' - 2r(1 - b/r)\phi'}{|b'|}. \quad (2.27)$$

En la superficie embebida, las bocas del agujero de gusano deben extenderse notablemente para que el agujero de gusano se pueda conectar a un espacio-tiempo asintóticamente plano. La ecuación 2.14 debe satisfacer la condición de ensanchamiento $d^2r/dz^2 > 0$ cerca de la garganta r_o del agujero. Si derivamos el inverso de la superficie de embebimiento $dr/dz = (r/b(r) - 1)^{1/2}$ con respecto a z , se obtiene

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0. \quad (2.28)$$

Adicionalmente, con un poco de álgebra sobre las ecuaciones 2.27 y 2.14, ξ toma la forma

$$\xi = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r - b) \frac{\phi'}{|b'|}. \quad (2.29)$$

Si se toma en cuenta que ρ es finito, por lo tanto b' lo es. En la garganta se cumple que $(1 - b/r)\phi' \rightarrow 0$, y la condición de ensanchamiento 2.28 se puede escribir como

$$\xi(r_o) = \frac{\tau_o - \rho_o c^2}{|\rho_o c^2|}. \quad (2.30)$$

$\xi(r_o)$ toma valores positivos y muestra que la restricción $\tau_o > \rho_o c^2$ es una condición extremadamente fuerte, ya que indica que la tensión radial en la garganta debe exceder la densidad de energía. A la materia que satisface esta condición se la denomina Materia Exótica.

La constante cosmológica y las ecuaciones de campo

Para visualizar una interpretación física de la constante cosmológica Λ , se puede escribir las ecuaciones de campo 1.8 como

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 8\pi G c^{-4} \left(T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)} \right), \quad (2.31)$$

donde $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)} = -g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\Lambda c^4/(8\pi G))$ es el tensor de energía-impulso asociado al vacío. En el sistema de referencia ortonormal está dado por

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} diag [1, -1, -1, -1]. \quad (2.32)$$

Si definimos el tensor de energía-impulso total, $\bar{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, como

$$\bar{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} + T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)}, \quad (2.33)$$

el tensor de Einstein toma la forma $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 8\pi G c^{-4} \bar{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Si $\bar{T}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ es el tensor de energía-impulso total del agujero de gusano, sus componentes $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\tau}(r)$ y $\bar{p}(r)$, pueden expresarse explícitamente como

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(r) &= \rho(r) - \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda, \\ \bar{\tau}(r) &= \tau(r) - \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda, \\ \bar{p}(r) &= p(r) + \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A partir del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, y de las ecuaciones 2.5 y 2.6, se obtiene la densidad de energía, tensión radial y presión que incluiría la contribución de la constante cosmológica

$$\bar{\rho}(r) = \frac{c^2}{8\pi G} \left(\frac{b'}{r^2} - \Lambda \right) \quad (2.35)$$

$$\bar{\tau}(r) = \frac{c^4}{8\pi G} \left[\frac{b}{r^3} - 2 \left(1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi'}{r} - \Lambda \right], \quad (2.36)$$

$$\bar{p}(r) = \frac{c^4}{8\pi G} \left[\left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[\phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \phi' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} \right] + \Lambda \right] \quad (2.37)$$

En particular, si derivamos la ecuación 2.36 respecto a la coordenada radial r , y eliminamos b' y ϕ de las ecuaciones 2.35 y 2.37, respectivamente, se obtiene

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau) \phi' - \frac{2}{r} (p + \tau). \quad (2.38)$$

Esta es la ecuación relativista de Euler, es decir, es la relación hidrostática para el equilibrio del material que mantiene abierto el agujero de gusano. La ecuación 2.38 se puede obtener de la conservación del tensor energía-impulso $T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}_{;\hat{\nu}} = 0$, donde $\hat{\mu} = r$ [3].

Al agregar una constante cosmológica a las soluciones de los agujeros de gusano se puede estudiar agujeros asintóticamente de Sitter y anti-de Sitter que se obtienen cuando $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$, respectivamente [9]. La constante cosmológica Λ tiene el mismo efecto que una densidad de energía en el vacío ρ_{vac} , así como también una presión del vacío p_{vac} , relacionadas como $\rho_{vac} = -p_{vac}$. Si $\Lambda < 0$ la densidad

de energía en el vacío es negativa y la presión es positiva, y viceversa. Incluir Λ en la relación entre la densidad y la presión puede explicar la expansión acelerada del universo y cuán fuerte, o débil, es la interacción entre los agujeros.

2.1.2. Método de cortar y pegar

Existen algunas formas de construir agujeros de gusano. La más común es modificar el ansatz para la métrica. Sin embargo, los otros mecanismos que nos ayudan a construir agujeros de gusano suelen ser bastante útiles cuando se quiere estudiar cierto tipo de fenómenos. Existe una técnica que representa la noción intuitiva de construir un agujero atravesable, cortando dos agujeros negros antes del horizonte, para después pegarlos [4]. Visser fue capaz de construir un agujero de gusano mediante la unión de dos espacio-tiempos de Schwarzschild. La unión de los dos espacio-tiempos concentra una energía-impulso diferente de cero en la capa límite entre los dos universos, y para el estudio de esta capa límite se usa un formalismo de condición de unión [31]. Se considera la solución de Schwarzschild (ecuación 1.18) y se toma dos copias idénticas, removiendo las regiones 4-dimensionales definidas por

$$\Omega_{1,2} \equiv \{r_{1,2} \leq a | a > 2M\}. \quad (2.39)$$

Al remover las regiones $\Omega_{1,2}$ se tiene dos variedades geodésicamente incompletas¹², con límites dados por las hipersuperficies temporales $\partial\Omega_{1,2} \equiv \{r_{1,2} = a | a > 2M\}$. Al unir estas dos variedades incompletas se tiene un espacio-tiempo \mathcal{M} geodésicamente completo, que posee dos regiones asintóticamente planas conectadas por un agujero de gusano con la garganta localizada en $\partial\Omega$. En otras palabras, se considera dos espacio-tiempos $\Omega_{1,2}$ 4-dimensionales con cotas $\partial\Omega_{1,2}$, que al unirlas se crea una nueva variedad que no tiene límites $\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$. Hay que notar que la condición $a > 2M$ es necesaria para que no se forme un horizonte de sucesos [4].

Debido a que ambas piezas, que forman un espacio-tiempo \mathcal{M} , son de Schwarzschild, el tensor de energía-impulso es cero casi en todas partes del agujero de gusano, excepto en la garganta. Como toda la energía-impulso se concentra en la garganta se puede aplicar el formalismo de la condición de unión. La garganta posee una pared de dominio entre dos universos, esta pared es una membrana clásica que muestra inestabilidad y que puede ser aplicada a las ecuaciones de estado arbitrariamente [31].

i. Condiciones de unión y ecuaciones de Einstein

La primera condición de unión es que las geometrías 3-dimensionales de $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ deben ser las mismas. Esta primera condición conduce a que la geometría de la nueva variedad Ω sea continua en la unión. Si la conexión aún es discontinua, el tensor de Riemman puede tener una singularidad cuantificada en los términos

¹²Una variedad geodésicamente incompleta es una variedad para la cual, cada geodésica no puede extenderse indefinidamente, es decir, no pueden extenderse más allá de la singularidad de la curvatura.

de los límites $\partial\Omega_{1,2}$ de la segunda forma fundamental [4]. La segunda forma fundamental es

$$K_j^i \pm = \frac{1}{2} g^{ik} \cdot \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \eta} \right)_{\eta=\pm 0}, \quad (2.40)$$

donde η adopta las coordenadas normales de la unión en la variedad de Riemann, denominamos η positivo en Ω_1 y η negativo en Ω_2 , y $K_j^i \pm$ son los coeficientes asociados a las coordenadas normales de Ω_1 y Ω_2 , respectivamente.

$\kappa_{ij} = K_{ij}^+ - K_{ij}^-$ es la discontinuidad de la curvatura extrínseca de la garganta $\partial\Omega$. De manera que, los términos del tensor de Ricci en $\partial\Omega$ se pueden calcular en términos de la discontinuidad de la segunda forma fundamental,

$$R_{\nu}^{\mu}(x) = \begin{bmatrix} \kappa_j^i(x) & 0 \\ 0 & \kappa(x) \end{bmatrix} \cdot \delta(\eta) + R_{\nu}^{\mu+}(x) \cdot \Theta(\eta) + R_{\nu}^{\mu-}(x) \cdot \Theta(-\eta).$$

La discontinuidad de la curvatura extrínseca junto a las ecuaciones de campo de Einstein, determinan el tensor de energía-impulso de $\partial\Omega$, donde está localizada la garganta,

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} \delta(\eta). \quad (2.41)$$

$S^{\mu\nu}$ es el tensor de energía de superficie y η denota la distancia propia desde la garganta a la boca del agujero de gusano, en dirección perpendicular. La diagonal del tensor $S^{\mu\nu}$ se expresa como

$$S_j^i = -\frac{c^4}{8\pi G} (\kappa_j^i - \delta_j^i \kappa). \quad (2.42)$$

En general, para la simetría esférica y simetría de reflexión, $K^+ = -K^- = 1/2\kappa$, y

$$\kappa_j^i = \begin{bmatrix} \kappa_{\tau}^{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{\theta}^{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{\theta}^{\theta} \end{bmatrix},$$

donde κ_{τ}^{τ} y κ_{θ}^{θ} son los coeficientes de la segunda forma fundamental, mientras que el tensor de energía de superficie se escribe en términos de la densidad superficial σ y de la presión superficial ϑ ,

$$S_j^i = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta \end{bmatrix}.$$

De las ecuaciones 1.6 y de los tensores S_j^i y κ_j^i , se encuentra

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \kappa_{\theta}^{\theta}; \quad \vartheta = -\frac{1}{8\pi} (\kappa_{\tau}^{\tau} + \kappa_{\theta}^{\theta}), \quad (2.43)$$

que son los términos de densidad y presión superficial que se utilizan para estudiar

el caso estático de los agujeros de gusano de Schwarzschild.

ii. Agujeros de gusano estáticos

En particular, la segunda forma fundamental para los agujeros de gusano estáticos se escribe como

$$K_j^i{}^\pm = g^{ik} \cdot \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \eta} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)_{r=a} \cdot g^{ik} \cdot \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial r} \right)_{r=a}, \quad (2.44)$$

donde $K_j^i{}^\pm$ son los coeficientes asociados a las coordenadas normales de Ω_1 y Ω_2 , respectivamente. Si $\partial r / \partial \eta = \sqrt{1 - 2M/a}$, y de la métrica de Schwarzschild (ecuación 1.18), se obtiene

$$K_\tau^\tau{}^\pm = \pm \frac{\frac{M}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}}}; \quad K_\tau^\tau{}^\pm = \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}}}{a}, \quad (2.45)$$

donde la densidad de energía y tensión superficial están determinados por

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{1 - \frac{2M}{a}}; \quad \vartheta = -\frac{1}{4\pi a} \cdot \frac{1 - \frac{M}{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}}}. \quad (2.46)$$

La densidad de energía negativa y la tensión superficial negativa, argumentan la presencia de materia exótica y presión superficial en la garganta.

2.1.3. El horizonte desplazado

Existen algunas observaciones que han comprobado la existencia de agujeros negros junto a sus características propias [32]. Una forma de medir hasta qué punto las observaciones realmente pueden caracterizar la presencia de los agujeros negros relativistas, es considerar láminas de agujeros negros, i.e. objetos teóricos que imitan algunas de sus características y carecen de otras, a estos objetos teóricos se los conoce como agujeros de gusano [33]. Ya que la diferencia entre un agujero negro y un agujero de gusano es la presencia de un horizonte de sucesos, al aumentar un parámetro lo suficientemente pequeño en la métrica de un agujero negro, se puede mostrar que el agujero negro se convierte en un agujero de gusano.

Se considera un tipo de agujero de gusano simple, descrito por la métrica

$$ds^2 = -(g(r) + \lambda^2) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.47)$$

donde $g(r) \equiv (1 - 2GM/r)$ y λ es un parámetro adimensional. Si $\lambda = 0$ se recupera un agujero negro de masa M con un horizonte de sucesos localizado en $r = 2GM$. Si $\lambda \neq 0$ el espacio-tiempo toma una estructura diferente, donde no hay horizonte de sucesos pero en lugar del horizonte existe una garganta en $r = 2GM$ que une dos regiones

isométricas y asintóticamente planas.

El parámetro λ determina el tamaño de la garganta y la escala de tiempo que está asociada a la métrica 2.47. Si el valor de $\lambda \sim e^{-4\pi GM^2}$ el tiempo que fluye en la garganta es extremadamente lento desde el punto de vista de un observador distante,

$$t_{garganta} = \lambda t_{obs. distante}, \quad (2.48)$$

de tal forma que los procesos que cambian en función del tiempo en la garganta están congelados, imitando lo que sucede en el horizonte de sucesos.

El horizonte de sucesos del agujero negro es reemplazado por un tipo de brana localizada en una capa delgada alrededor del centro de la garganta del agujero de gusano en $r = 2GM$. De la métrica 2.47 la distribución del tensor energía-impulso que mantiene la garganta, tiene una densidad de energía que comprende regiones radiales y tangenciales proporcionales a $1/\lambda^2$.

Para definir el espacio-tiempo de los agujeros de gusano, es necesario especificar cómo el espacio-tiempo continúa a través de la garganta del agujero, y para especificar la continuación del espacio-tiempo se reemplaza la distancia radial propia $l(r)$ por una nueva variable $y(r)$,

$$y = \int_{2GM}^r \frac{dr}{\sqrt{g(r)}}, \quad (2.49)$$

y se obtiene las siguientes expresiones en términos de y

$$g(y) = \frac{y^2}{16G^2M^2}; \quad r(y) = 2GM + \frac{y^2}{8GM}. \quad (2.50)$$

Usando la coordenada y se define globalmente el espacio-tiempo del agujero de gusano de dos formas. La primera, cuando la variable y varía en todos los valores de los reales, y se tiene en mente un mundo multi-dimensional, en el que el colapso de una estrella establece un puente entre dos mundos en distintas dimensiones. La segunda, cuando se impone un Z_2 -simétrico y una condición de borde para $y = 0$, de manera que la variable y toma los valores de $0 \leq y < +\infty$, en este caso, se tiene en mente un único mundo, donde el colapso de una estrella crea una dimensión Z_2 -simétrico en $r = 2GM$.

Las geodésicas determinan las trayectorias del movimiento de partículas alrededor del agujero de gusano, y están descritas por las ecuaciones

$$\dot{t} = \frac{E}{g(r) + \lambda^2}; \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2};$$

$$\dot{r}^2 + g(r) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon \right) = \frac{g(r)}{g(r) + \lambda^2} E^2, \quad (2.51)$$

donde L es el momento angular de la partícula, E la energía, y ϵ determina el tipo de

geodésicas, para las geodésicas nulas y temporales se tiene $\epsilon = 0$ y $\epsilon = 1$, respectivamente. Si se hace un cambio de variable a la ecuación 2.51 de la coordenada radial r , se tiene

$$\rho = \int \sqrt{\frac{g(r) + \lambda^2}{g(r)}} dr, \quad (2.52)$$

y \dot{r} toma la forma estándar

$$\dot{\rho} + V(r(\rho)) = E^2 \quad (2.53)$$

$$V(r(\rho)) = (g(r) + \lambda^2) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon \right), \quad (2.54)$$

donde $V(r)$ es el potencial efectivo que permite entender cualitativamente la dinámica de las partículas en el agujero de gusano. Para las geodésicas nulas y temporales, y para cualquier otro valor del momento angular L , existe una órbita circular ubicada exactamente en $r = 2MG$. En este caso, la energía y el momento angular están relacionados por

$$E^2 = \lambda^2 \left(\frac{L^2}{4G^2M^2} + \epsilon \right), \quad (2.55)$$

donde la curvatura de la órbita circular en la garganta es estable, y el potencial efectivo en $r = 2MG$ implica que existen órbitas elípticas cerca de $r = 2MG$. El potencial efectivo $V(r)$, muestra que las partículas que caen en la órbita circular estable interna (ISCO) rebotan desde la garganta del agujero de gusano hacia el exterior. Para estudiar con más detalle este rebote de partículas se debe proporcionar una definición más completa de los agujeros de gusano, es decir, definir a los agujeros como objetos dinámicos para discutir la estructura dinámica de la brana ubicada en $y = 0$, y su posible interacción con la materia que cae en la brana.

Otras características de los agujeros negros, como la acreción aparente irreversible de la materia de un agujero [33, 34], las propiedades no-hair [35], los modos de timbre cuasi-normales [32, 34], y las propiedades disipadoras del horizonte de sucesos [35]. Han sido estudiadas a partir de la métrica 2.47 demostrando ser características imitadas por los agujeros de gusano.

2.2. Agujeros de gusano deformados de Schwarzschild

Desde el artículo pionero de Morris y Thorne, los agujeros de gusano han generado un gran interés en el campo de la física. Entre las múltiples razones que apoyan al interés que tienen los científicos por los agujeros de gusano atravesables, está el estudiar el tipo de materia que sostiene el agujero, y la posibilidad de construir máquinas de tiempo que conecten dos regiones del espacio-tiempo y puedan ser atravesados por el ser humano [6].

En la sección anterior, se presentó la geometría de los agujeros de gusano, las con-

diciones que deben satisfacer para ser atravesables y las restricciones que debe tener el tipo de materia que mantiene abierto el agujero, esta materia que se denomina materia exótica sostiene el agujero de gusano, viola las condiciones de energía nula y podría ser una de las razones que explica la expansión acelerada del universo. La expansión del universo se puede intuir por los efectos gravitacionales de la energía oscura o por energía fantasma [5].

Existen algunos estudios de la geometría de los agujeros de gusano atravesables y del contenido de la materia que los sostiene, esta materia puede ser materia exótica o materia fantasma. La materia fantasma que sostiene a los agujeros de gusano es un fluido anisotrópico con una presión radial negativa, que debería satisfacer las ecuaciones de estado,

$$\frac{\rho}{p_r} < -1 \quad i.e. \quad \rho + p_r < 0; \quad (2.56)$$

al igual que la materia exótica, la materia fantasma también viola las condiciones de energía y puede mantener el agujero de gusano estable [5]. A continuación, se presenta una generalización de los agujeros de gusano de Schwarzschild.

2.2.1. Métrica con función de forma lineal

La solución de Schwarzschild (ecuación 1.18) se puede interpretar como un agujero de gusano asintóticamente plano, donde la función de forma $b(r)$ es una función que depende de la coordenada radial r . Si $b(r) = r_o$ y la coordenada temporal tiene la forma $e^{2\phi(r)} = 1 - r_o/r$ (r_o es el radio mínimo de la garganta del agujero), entonces la solución de Schwarzschild posee un horizonte de sucesos en la garganta y el agujero es no atravesable.

Para construir agujeros de gusano atravesables de Schwarzschild, se restringe la función de corrimiento $\phi(r)$ a un valor constante $C = 0$, y la componente radial de la métrica 1.18 mantiene la forma $g_{rr}^{-1} \equiv 1 - r_o/r$. En cambio, para los agujeros deformados se toma el ansatz $b(r) = \alpha + ar$, donde α y a son constantes arbitrarias. Cuando evaluamos la función $b(r)$ en la garganta $b(r_o) = r_o$, se obtiene que $\alpha = (1 - a)r_o$, y por lo tanto $b(r)$ toma la forma

$$b(r) = ar + r_o(1 - a). \quad (2.57)$$

De la última ecuación, si $r \rightarrow \infty$ y $a \neq 0$, se muestra que

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow a. \quad (2.58)$$

Esta ecuación muestra que los agujeros de gusano no son asintóticamente planos cuando $r \rightarrow \infty$. Pero si $a = 0$ los agujeros son asintóticamente planos y cumplen con la condición $b(r)/r \rightarrow 0$.

Al reemplazar la ecuación 2.57 en la métrica 2.1 obtenemos la métrica de los agujeros

de gusano deformados,

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{(1-a)\left(1-\frac{r_o}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (2.59)$$

donde $a < 1$ y $r > r_o > 0$.

Los agujeros de gusano descritos por la métrica 2.59 no son asintóticamente planos cuando $a \neq 0$. Pero si se considera que la función de corrimiento $\phi(r)$ no es nula y es finita cuando $a \neq 0$, entonces el agujero es asintóticamente plano, como los agujeros considerados en Morris-Thorne. Por lo tanto, si $\phi(r)$ es finita y distinta de cero, entonces $e^{\phi(r)}$ es constante cuando $r \rightarrow \infty$, y la métrica 2.59 toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{(1-a)} - r^2 d\Omega^2, \quad (2.60)$$

donde $d\Omega^2$ es el ángulo sólido de una esfera de radio unidad y se lo define como $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Al realizar un cambio de variable en la métrica 2.60, donde $r^2 = (1-a)\rho^2$, obtenemos

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - (1-a)\rho^2 d\Omega^2. \quad (2.61)$$

Esta métrica describe un espacio-tiempo con un déficit de ángulo sólido si $0 < a < 1$. Si $a < 0$, describe un espacio-tiempo con un exceso de ángulo sólido. Si $a = 0$ recuperamos la métrica de Minkowski.

2.2.2. Diagramas de embebimiento

El estudio de los diagramas de embebimiento asociados a los agujeros de gusano deformados nos permite visualizar otras características de este espacio-tiempo. Precisamente, podemos visualizar la forma y el tamaño de las regiones espaciales, a t fijo y $\theta = \pi/2$, de las métricas 2.59 y 2.60 en un espacio 3-dimensional Euclidiano.

La superficie de embebimiento de la métrica 2.59 está dada por

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{(1-a)r_o + ar}{r(1-a)\left(1-\frac{r_o}{r}\right)}}. \quad (2.62)$$

El numerador de esta ecuación siempre es positivo cuando $0 < a < 1$. Pero, si $0 < a < 1$ y $(1-a)r_o + ar \geq 1$ entonces el embebimiento se extiende desde la garganta hacia el infinito. Por otro lado, si $a < 0$ se tiene que el numerador es positivo para $r_o < r < (1-1/a)r_o$, y el numerador es negativo cuando $r > (1-1/a)r_o$, lo que implica que el embebimiento existe solo para los valores $r_o < r < (1-1/a)r_o$.

Si elegimos $a = 3/4$, $r \rightarrow \infty$ y $r_o = 1$ la superficie de embebimiento 2.62 toma la

forma

$$\frac{dz_1}{dr} = \frac{\sqrt{3r+1}}{\sqrt{r-1}}, \quad (2.63)$$

cuya solución analítica es

$$z_1(r) = \sqrt{3r^2 - 2r - 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\sqrt{3r^2 - 2r - 1} + \sqrt{3}r - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (2.64)$$

Si $r \rightarrow \infty$ la superficie de embebimiento $dz_1/dr \rightarrow \sqrt{3}$, y la función $z_1(r)$ tiene una asíntota inclinada con pendiente $\sqrt{3}$.

Por otro lado, para la métrica 2.60 tenemos que la superficie de embebimiento es $dz_2/dr = \sqrt{3}$, y la función $z_2(r)$ es $z_2(r) = r\sqrt{3}$, donde la asíntota de $z_2(r)$ tiene una pendiente de $\sqrt{3}$. Las funciones $z_1(r)$ y $z_2(r)$ muestran que la asíntota de $z_1(r)$ es paralela a la asíntota de $z_2(r)$. Además, si $z_1(r)/z_2(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$ entonces la distancia entre los embebimientos de las métricas 2.59 y 2.60 se aproximan a cero [6].

2.2.3. Condiciones de Energía

Para encontrar las densidades de energía y presión del agujero de gusano deformado (ecuaciones 2.6), iniciamos determinando las componentes del tensor de Riemann (ecuación 2.4). De la métrica del agujero deformado (ecuación 2.59), tomamos la función de corrimiento $\phi(r) = 0$, la función de forma $b(r) = ar + r_o(1 - a)$ y la derivada $b(r)' = a$, y encontramos las componentes del tensor de curvatura

$$\begin{aligned} R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} = 0; \\ R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{\theta}} = 0; \\ R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = 0; \\ R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = -\frac{r_o(1-a)}{2r^3}; \\ R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}}^{\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}}^{\hat{\phi}} = -\frac{r_o(1-a)}{2r^3}; \\ R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = \frac{a}{r^2} + \frac{r_o(1-a)}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

A partir de este sistema de ecuaciones determinamos las componentes del tensor de Einstein $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$,

$$\begin{aligned} G_{\hat{t}\hat{t}} &= \frac{a}{r^2}; \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= -\frac{a}{r^2} + \frac{r_o(a-1)}{r^3}; \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= \frac{r_o(1-a)}{2r^3}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Finalmente, de las ecuaciones 2.6 y 2.66, se tiene

$$\begin{aligned}\kappa\rho &= \frac{a}{r^2}; \\ \kappa p_r &= \frac{r_o(a-1)}{r^3} - \frac{a}{r^2}; \\ \kappa p_l &= -\frac{r_o(a-1)}{2r^3},\end{aligned}\tag{2.67}$$

que corresponden a la densidad de energía, presión radial y lateral del agujero de gusano deformado.

Las presiones radial y lateral para la garganta del agujero cuando $a < 1$, son

$$p_r(r_o) = -\frac{1}{r_o^2} < 0; \quad p_l(r_o) = -\frac{a-1}{2r_o^2} > 0.\tag{2.68}$$

El radio máximo del agujero está dado por $r_{max} = (a-1)r_o/a$, donde $r_{max} > 0$ para $a < 0$, y $r_{max} < 0$ para $0 < a < 1$. Como la presión radial p_r desaparece en la superficie del radio máximo r_{max} del agujero, entonces para $r > r_o$ la presión radial es negativa si $0 < a < 1$. Pero, si $a < 0$ se obtiene que $p_r < 0$ para $r_o < r < r_{max}$ y $p_r > 0$ si $r > r_{max}$.

La Condición de Energía Nula (CEN), definida por $\rho + p_i \geq 0$, se analiza a partir de la relación 2.67 y se obtiene que

$$\rho + p_r = \frac{r_o(a-1)}{r^3}\tag{2.69}$$

$$\rho + p_l = \frac{a}{r^2} - \frac{r_o(a-1)}{r^3}.\tag{2.70}$$

Notamos que de la ecuación 2.69 p_r no cumple con CEN. Por otro lado, de la ecuación 2.70 se deduce que p_l si cumple con la CEN si $r \geq r_o$ y $0 < a < 1$, y para $r_o < r < r_{max}/2$ si $-1 < a < 0$. Finalmente, si $a < -1$, $\rho + p_l < 0$ para $r > r_o$ no cumple con la CEN.

Para encontrar las condiciones de energía fuerte (CEF) (ecuación 1.29), dominante (CEDM) (ecuación 1.31) y débil (CED) (ecuación 1.26), se determina $\rho + p_{tot}$. Si $r > r_o > 0$ y $\rho + p_{tot} = \rho + p_r + 2p_l = 0$ entonces CEF, CEDM y CED no se cumplen [27].

Debido a que $\rho > 0$, $p_r < 0$ y $p_l > 0$, para $r > r_o$ y $0 < a < 1$, la métrica 2.60 describe un agujero de gusano fantasma que lleva un monopolo global. Por otro lado, ρ , p_l , y p_r representan las componentes del tensor energía-impulso que incluyen los efectos que producen dos objetos distintos del monopolo global y del mismo agujero deformado en la geometría del agujero de gusano. Los monopolos globales producen un déficit de ángulo sólido al infinito, pero dando un valor adecuado al parámetro a se puede obtener un déficit de ángulo sólido $\sim 4\pi$.

2.2.4. Fuerzas de marea despreciables

Otra condición para atravesar el agujero de gusano deformado es que la aceleración que siente el viajero al atravesar el agujero no exceda la gravedad de la Tierra, $g_{\oplus} = 980\text{cm/s}^2$. Para determinar la aceleración con la que cruza un viajero el agujero de gusano, consideramos que la persona viaja radialmente desde la estación de salida hacia la estación de llegada. El viajero, al moverse radialmente, siente una aceleración dada por 2.21 y, de acuerdo a la métrica 2.59 la aceleración toma la forma

$$|a_v| = \left| \left(1 - a + \frac{r_o(1-a)}{r} \right)^{1/2} \gamma' c^2 \right|, \quad (2.71)$$

donde γ es el factor de Lorentz, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y $v(r)$ la velocidad del viajero medida por un observador estático en r . La aceleración se puede escribir como

$$|a_v| = \left| (1-a)^{1/2} \left(1 - \frac{r_o}{r} \right)^{1/2} \gamma^{-3/2} v v' \right|. \quad (2.72)$$

Si $a = 0$, entonces $|a_v| = |a_{shc}|$, donde $|a_{shc}|$ es la aceleración que siente el viajero para un agujero de gusano de Schwarzschild. La aceleración $|a_v|$ será menor cuando se presente un déficit de ángulo sólido, y la magnitud de $|a_v|$ aumentará cuando exista un exceso en el ángulo sólido [18]. La condición de la aceleración dada por la ecuación 2.72 se pueden satisfacer independientemente del valor que tome el parámetro a , debido a que lo importante es que el viajero mantenga su velocidad $v(r)$ constante durante el viaje.

Como el viajero debe atravesar el agujero de gusano sin sufrir daños físicos, es importante determinar las fuerzas de marea que siente el viajero desde la cabeza a los pies, a estas fuerzas se las conoce como fuerzas laterales (ecuación 2.25) y radiales (ecuación 2.24) [3]. Como $\phi(r)$ se restringe a un valor constante, las fuerzas de marea radiales que consideran una restricción a la función de corrimiento tiene un valor cero. Por otro lado, las fuerzas laterales que siente el viajero se expresan como

$$\left| \frac{v^2}{2r^3} r_o(a-1) \right| |\varepsilon| \lesssim g_{\oplus}. \quad (2.73)$$

Estas fuerzas ocurren en el límite donde el movimiento es no-relativista, $v \ll c$ y $\gamma \ll 1$. Como ε es el tamaño del cuerpo del viajero y las fuerzas laterales son más intensas en la garganta, la velocidad con la que cruza el viajero de una región a otra es

$$v \lesssim \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{|a-1|}}. \quad (2.74)$$

El espacio-tiempo de los agujeros de gusano de Morris-Thorne es asintóticamente plano en el infinito espacial, por esta razón las estaciones están ubicadas en regiones casi-planas, a un radio donde $1 - b(r)/r$ difiere 1% de la unidad. En los agujeros de gusano deformados se aplica el mismo criterio para ubicar a las estaciones, por lo cual, se re-

quiere de la condición

$$(1 - a) \left(1 - \frac{r_o}{r}\right) = 0,99, \quad (2.75)$$

que da explícitamente la ubicación radial de las estaciones de salida y de llegada

$$r_1 = r_2 = \frac{100(1 - a)}{1 - 100a} r_o. \quad (2.76)$$

Para conocer el tiempo total de viaje que realiza el pasajero, necesitamos determinar la distancia radial propia (ecuación 2.15) entre las dos estaciones [30]. Esta distancia propia $l(r)$ para el agujero de gusano deformado es

$$l(r) = \pm(1 - a)^{-1/2} \left[\sqrt{r(r - r_o)} + \frac{1}{2} r_o \ln \left(\frac{2\sqrt{r(r - r_o)} + 2r - r_o}{r_o} \right) \right], \quad (2.77)$$

donde el signo + muestra la distancia radial propia desde la garganta a la estación de llegada y el signo - la distancia radial propia desde la estación de salida a la garganta. La variación de la distancia propia $\Delta l = l(r_2) - l(r_1)$ es

$$\Delta l(r) = \pm(1 - a)^{-1/2} \left[2\sqrt{\frac{9900(1 - a)}{(1 - 100a)^2}} + \ln \left(\frac{199 - 100a}{1 - 100a} + 2\sqrt{\frac{9900(1 - a)}{(1 - 100a)^2}} \right) \right], \quad (2.78)$$

y de las ecuaciones 2.74 y 2.78, el tiempo total que recorre el viajero está dado por

$$\Delta t = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[2\sqrt{\frac{9900(1 - a)}{(1 - 100a)^2}} + \ln \left(\frac{199 - 100a}{1 - 100a} + 2\sqrt{\frac{9900(1 - a)}{(1 - 100a)^2}} \right) \right]. \quad (2.79)$$

Si $a = 0$ el tiempo de viaje es 24,15s. Si $a < 0$ el tiempo de viaje del pasajero será más corto, es decir $0 < \Delta t < 24,15s$, y si $0 < a < 1$ el tiempo que tardará el viajero en cruzar el agujero será más prolongado, $\Delta t > 24,15s$. Hay que notar que el tiempo que recorre el pasajero desde una estación a otra, es el mismo tiempo que transcurre en cada estación.

2.2.5. Geodésicas del agujero de gusano deformado

Una vez determinadas las condiciones de atravesabilidad de los agujeros de gusano casi-Schwarzschild, estudiaremos cuál es el comportamiento que presentan las geodésicas de los agujeros deformados para diferentes valores del parámetro a , tomando en cuenta que las fuerzas de marea son despreciables.

De la definición

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (2.80)$$

se determina el Lagrangiano de la métrica 2.60,

$$\mathcal{L} = \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1 - a) \left(1 - \frac{r_o}{r}\right)} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (2.81)$$

Los momentos conjugados son

$$\Pi_t = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \dot{t} = E; \quad \Pi_\phi = -\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (2.82)$$

Si las trayectorias de las partículas están confinadas al plano $\theta = \pi/2$, se tiene que Π_t y Π_ϕ son

$$\Pi_t = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \dot{t} = E; \quad \Pi_\phi = -\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi}, \quad (2.83)$$

y si se reemplaza las ecuaciones 2.83 en 2.81 se obtiene la ecuación de las geodésicas

$$E^2 = h + \frac{L^2}{r^2} + \frac{\dot{r}^2}{(1-a)\left(1-\frac{r_o}{r}\right)}, \quad (2.84)$$

donde L es el momento angular y h el parámetro que define el tipo de geodésicas, para las geodésicas tipo tiempo $h = 1$ y para las nulas $h = 0$.

Para las geodésicas radiales tipo tiempo, $h = 1$ y $L = 0$, consideramos las condiciones iniciales (t_i, r_i) de una partícula de prueba. Si $t_i = 0$ entonces su posición inicial y velocidad inicial son r_i y v_i , respectivamente. De las condiciones iniciales y de la ecuación 2.84, para las geodésicas tipo tiempo tenemos

$$(1-a) = -\frac{\dot{r}_i^2}{\left(1-\frac{r_o}{r_i}\right)}. \quad (2.85)$$

Si reemplazamos la ecuación anterior en 2.84, y como $\dot{r}_i = v_i$, obtenemos

$$\dot{r}^2 = v_i^2 \frac{\left(1-\frac{r_o}{r}\right)}{\left(1-\frac{r_o}{r_i}\right)}. \quad (2.86)$$

Finalmente, la velocidad $v = \dot{r}$ toma la forma

$$\dot{r} = \pm v_i \sqrt{\frac{\left(1-\frac{r_o}{r}\right)}{\left(1-\frac{r_o}{r_i}\right)}}, \quad (2.87)$$

donde el signo negativo indica el movimiento de las partículas desde r_i hacia la garganta, y el signo positivo indica el movimiento de las partículas desde r_i hacia el infinito.

Si la partícula tiene una velocidad inicial $v_i > 0$, de la ecuación 2.87 la velocidad máxima que alcanza la partícula de prueba cuando $r \gg r_o$ es

$$v_{max} = \frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{r_o}{r_i}}}. \quad (2.88)$$

Si $v_i = 0$, entonces $\dot{r}_i = 0$ y $r(\tau)$ es constante, esto implica que la partícula de prueba es-

tá en reposo o con velocidad constante. Si aplicamos la condición de la velocidad inicial $v_i = 0$ a la ecuación de las geodésicas (ecuación 2.84), con las restricciones de $a < 1$ y $r_i > r$, tenemos que $E^2 = 1$. Pero, si la velocidad inicial de la partícula de prueba es $v_i > 0$ se obtiene que $E^2 > 1$, para $a < 1$ y $r_i > r$.

Al derivar la ecuación 2.87 en función del tiempo propio τ obtenemos la aceleración radial,

$$\ddot{r} = \frac{r_o}{2r^2} \frac{v_i^2}{\left(1 - \frac{r_o}{r_i}\right)}. \quad (2.89)$$

Las geodésicas radiales tipo tiempo se pueden expresar como $v_i^2 = (E^2 - 1)(1 - a)(1 - r_o/r)$, y del potencial efectivo definido por

$$U_{ef}(r) = \frac{r_o}{2r} (E^2 - 1)(1 - a), \quad (2.90)$$

la ecuación 2.89 se puede escribir como

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{dU_{ef}}{dr}. \quad (2.91)$$

El potencial $U_{ef}(r)$ es válido para partículas que se mueven radialmente, mostrando que \ddot{r} es repulsivo en todas partes del agujero. En cambio, las partículas que están en reposo ($E^2 = 1$) tienen una aceleración radial cero $\ddot{r} = 0$.

El tiempo propio de las partículas que se mueven por la trayectoria de las geodésicas, con v_i en r_i , se encuentra al resolver la ecuación 2.87. Este tiempo está definido por

$$\tau(r) = \pm \frac{1}{v_i} \sqrt{1 - \frac{r_o}{r_i}} \left[\sqrt{r(r - r_o)} + \frac{1}{2} r_o \ln \left(\frac{2}{r_o} \left[\sqrt{r(r - r_o)} + r \right] - 1 \right) \right] + C, \quad (2.92)$$

donde C es una constante. Si la partícula empieza a moverse desde r_i a $\tau = 0$ se impone la condición $\tau(r_i) = 0$, y la partícula que se mueve hacia la garganta llega en un tiempo finito.

En las geodésicas no-radiales tipo tiempo, donde $h = 1$ y $L \neq 0$, consideramos la posición inicial (r_i, ϕ_i) de la partícula de prueba, con velocidad radial inicial v_i y velocidad angular inicial $\dot{\phi}_i$. La ecuación de las geodésicas no-radiales tipo tiempo se determina de la ecuación 2.84, y toma la forma

$$E^2 = 1 + \frac{L_i^2}{r_i^2} + \frac{\dot{r}_i^2}{(1 - a) \left(1 - \frac{r_o}{r_i}\right)}, \quad (2.93)$$

donde $L = r^2 \dot{\phi}$, y $L = r_i^2 \dot{\phi}_i$ para una partícula que empieza a moverse desde r_i con ϕ_i .

A partir de la última ecuación, y asumiendo las condiciones iniciales (r_i, ϕ_i) , obtenemos

$$\dot{r}^2 = \left[L \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\dot{r}_i^2}{(1-a) \left(1 - \frac{r_o}{r_i} \right)} \right] (1-a)(1 - r_o/r), \quad (2.94)$$

donde \dot{r}^2 es la velocidad de la partícula de prueba al viajar por la trayectoria de las geodésicas no-radiales tipo tiempo. Si $L = 0$ se obtiene la ecuación 2.87, que es la velocidad de las partículas que viajan por las geodésicas temporales radiales [6].

Derivando la ecuación 2.94 encontramos la aceleración \ddot{r} de las geodésicas circulares no-radiales,

$$2\ddot{r} = (1-a) \frac{r_o}{r^2} \frac{\dot{r}}{(1-a)(1 - r_o/r)} + (1-a) \frac{2L}{r^3} \left(1 - \frac{r_o}{r} \right), \quad (2.95)$$

donde

$$\ddot{r} = (1-a) \frac{L}{r^3} \left(1 - \frac{r_o}{r} \right). \quad (2.96)$$

Si la partícula de prueba se encuentra en la garganta ($r = r_o$), la aceleración \ddot{r} dada por la última ecuación es nula. Si $\ddot{r} \geq 0$ la partícula está ubicada en cualquier otro punto del agujero de gusano y se acelerará en la dirección en la que crece la coordenada radial r .

A partir de la relación 2.94, la partícula de prueba tiene una velocidad radial cero en r_o y en r_{cero} , donde el radio r_{cero} se expresa como

$$r_{cero} = \left(\frac{1}{r_i^2} + \frac{v_i^2}{L^2(1-a)(1 - \frac{r_o}{r_i})} \right)^{-1/2} > 0. \quad (2.97)$$

Si $r_{cero} > r_o$, el radio r_{cero} será la distancia mínima de la garganta del agujero de gusano que puede ser alcanzado por una partícula de prueba, entonces las geodésicas tipo tiempo se encuentran siempre a un lado del agujero de gusano, donde la partícula no cruza la garganta.

Para determinar las geodésicas que cruzan la garganta integramos la ecuación

$$\int_0^l dl = \pm \int_{r_o}^r \frac{dr}{\sqrt{(1-a) \left(1 - \frac{r_o}{r} \right)}}, \quad (2.98)$$

y obtenemos

$$l(r) = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-a}} \left[2\sqrt{r(r - r_o)} + r_o \ln \left(\frac{r_o}{2} \left[-\frac{1}{2}r_o + r + \sqrt{r(r - r_o)} \right] \right) \right], \quad (2.99)$$

donde $l(r)$ tendrá el valor de cero cuando $r = r_o$, y si $r_o \leq r < \infty$, entonces para $l(r)$ se cumple

$$\frac{1}{2\sqrt{1-a}} (2r + r_o \ln(r)) \leq l(r) < \infty. \quad (2.100)$$

Como las geodésicas que cruzan la garganta están dadas por la coordenada radial propia $l(r)$, de la ecuación 2.93 se puede definir la ecuación de las geodésicas en términos de l y $r(l)$ de la siguiente manera

$$E^2 = h + \frac{L^2}{r(l)^2} + \dot{l}^2, \quad (2.101)$$

donde $\dot{l} = dl/d\tau$ y $r(l)$ la función inversa de $l(r)$.

Si $\dot{l}^2 > 0$, imponemos la condición para las geodésicas no-radiales tipo tiempo

$$E^2 > 1 + \frac{L^2}{r(l)^2}, \quad (2.102)$$

y la métrica toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 - r^2(l)d\Omega^2, \quad (2.103)$$

con la coordenada radial l .

Los puntos de retorno de las geodésicas no-radiales del agujero de gusano, se determinan a partir de la ecuación 2.101. Si se toma $\dot{l} = 0$ y $h = 1$ los puntos de retorno satisfacen

$$r_{cero} = \frac{L^2}{\sqrt{E-1}} \geq r_o, \quad (2.104)$$

donde $r_{cero} > r_o$ para una geodésica radial con $r_i > r_o$, $v_i < 0$ y $\phi_i \neq 0$. La ecuación anterior se cumple ya que el radio de la partícula de prueba ($r_{cero} < r_i$) que se acerca a la garganta es desviado por el agujero de gusano [5].

Capítulo 3

Agujeros de gusano deformados de Schwarzschild-(anti)de Sitter

La métrica de Morris-Thorne es asintóticamente plana, si queremos estudiar un agujero asintóticamente (anti) de Sitter necesitamos hacer algunas modificaciones. Como se observó en el Capítulo 2, la introducción del término con constante cosmológica cambia el comportamiento asintótico de la métrica. A continuación, estudiamos las deformaciones de un agujero de gusano tipo Schwarzschild-(anti)de Sitter, proponiendo un *ansatz* para la función de forma $b(r)$ y estudiando todos sus rangos de validez.

Consideraremos la métrica de Morris-Thorne (ecuación 2.1) y una función de forma con dependencia cúbica de la coordenada radial:

$$b(r) = ar + (1 - a)r_o - (1 - a)\Lambda r^3, \quad (3.1)$$

donde Λ es la constante cosmológica, y a es un parámetro arbitrario que representa la deformación de la métrica. Llamaremos r_1 al punto donde se ubica la garganta del agujero, de éste modo la ecuación $b(r_1) = 0$ determina la ubicación de la garganta, obteniéndose

$$r_o = r_1 + \Lambda r_1^3. \quad (3.2)$$

Si $\Lambda = 0$ ($r_o = r_1$) se recupera el agujero de gusano casi-Schwarzschild, pero si $\Lambda \neq 0$ se obtiene

$$r_1 = \left(\frac{Q}{18\Lambda^3} \right)^{1/3} - \left(\frac{2}{3Q} \right)^{1/3}, \quad (3.3)$$

donde

$$Q = 9\Lambda^2 r_o + \sqrt{3} \sqrt{4\Lambda^3 + 27\Lambda^4 r_o^2}. \quad (3.4)$$

La componente g_{rr} de la métrica del nuevo agujero tiene que ser siempre negativa, lo que implica que el denominador debe satisfacer:

$$(1 - a) \left(1 - \frac{r_o}{r} + \Lambda r^2 \right) > 0. \quad (3.5)$$

El factor $(1 - r_o/r + \Lambda r^2)$ es positivo ya que es la componente g_{rr} de la métrica de Schwarzschild (anti)-de Sitter-, y por lo tanto $a < 1$.

La métrica de Morris-Thorne con la función $b(r)$ propuesta (ecuación 3.1), se la puede escribir como

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{(1-a)\left(1 - \frac{r_o}{r} + \Lambda r^2\right)} - r^2 d\Omega^2. \quad (3.6)$$

Esta métrica ya no es asintóticamente plana, de hecho, cuando $r \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow a - (1-a)\Lambda r^2, \quad (3.7)$$

y si el parámetro $a = 0$ entonces

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow -\Lambda r^2. \quad (3.8)$$

Lo que implica que la métrica del agujero deformado (anti)de Sitter con $a = 0$ tiende asintóticamente a una métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{(1 + \Lambda r^2)} - r^2 d\Omega^2. \quad (3.9)$$

Como ya señalamos, la ecuación anterior ya no es asintóticamente plana como en el caso de los agujeros de gusano casi-Schwarzschild. Ahora las secciones espaciales de la métrica se corresponden con las secciones espaciales de una métrica(anti)-de Sitter. Nótese que por la definición de la función de forma (ecuación 3.7), la parte espacial de la métrica se corresponderá con la parte espacial de la métrica de Sitter cuando $\Lambda < 0$ y con anti-de Sitter cuando $\Lambda > 0$.

El espacio de Sitter es una variedad Lorentziana que tiene una curvatura constante y es maximalmente simétrico¹³. En la última década, los resultados obtenidos por Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) han confirmado que nuestro universo está descrito por un modelo cosmológico cuya componente de energía oscura es equivalente a la constante cosmológica $\Lambda > 0$, esta energía oscura es la responsable de la expansión acelerada del universo [32]. A pesar de que Λ haya tenido una contribución despreciable en el universo temprano, la densidad de energía de todas las demás componentes (materia normal, neutrinos y ondas gravitacionales) decrece a medida que el universo se expande, entonces, Λ tuvo que volverse dominante en algún momento del pasado y por eso hoy tenemos una expansión acelerada [34].

¹³El espacio simétrico donde el grupo de simetría tiene la máxima dimensión posible.

3.1. Diagramas de embebimiento

Una herramienta útil para visualizar las secciones de la métrica es el diagrama de embebimiento. Para embeber regiones bidimensionales a t constante y $\theta = \pi/2$ del agujero de gusano deformado, usamos la ecuación 2.14 y la expresamos de la siguiente manera

$$\frac{dz}{dr} = \left(\frac{b(r)}{r \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Así, la ecuación anterior para la métrica 3.6 toma la forma

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{ar + (1-a)r_o - (1-a)\Lambda r^3}{r((1-a)(1 - \frac{r_o}{r} + \Lambda r^2))}}. \quad (3.11)$$

Para que la función esté correctamente definida se requiere que el numerador de la última relación sea real.

Si $\Lambda > 0$, la expresión dentro de la raíz es positiva cuando $0 < a < 1$ y $r > r_o > 0$. Pero, si $a < 0$, el embebimiento existe cuando r satisface

$$r_o < r < \frac{3a(2^{2/3})(1-a)\Lambda + \alpha^{2/3}}{-3(2^{1/3})(1-a)\Lambda\alpha^{1/3}}, \quad (3.12)$$

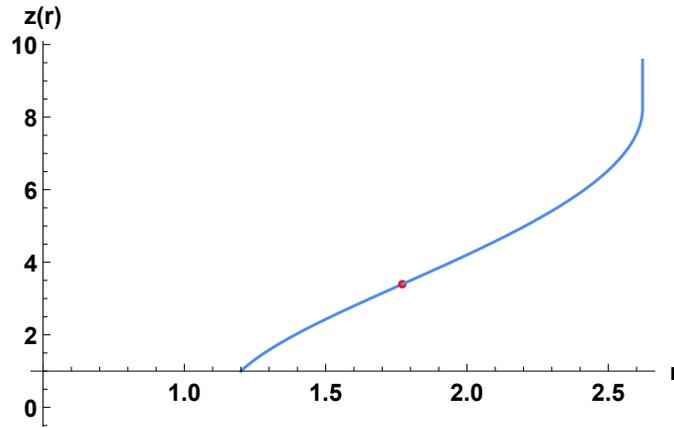
donde $\alpha = \left(-27(1-a)^3\Lambda^2r_o + \sqrt{-108(1-a)^3a^3\Lambda^3 + 27^2(1-a)^6\Lambda^4r_o^2}\right)$.

En cambio, si $\Lambda < 0$ y $r > r_o > 0$, el numerador es positivo cuando $r \approx r_o$, por lo que el embebimiento existe si r satisface la inecuación 3.12.

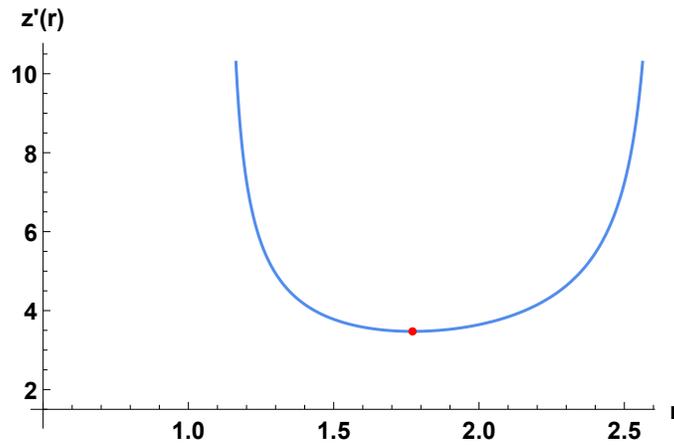
No es posible encontrar una solución analítica de la ecuación 3.11 por lo que procedemos a buscar soluciones numéricas para distintos parámetros de a y Λ (Ver apéndice C). Graficamos $z(r)$ y $z'(r)$ para saber cuál es el comportamiento de la función de embebimiento y de su derivada.

La Figura 3.1 muestra el comportamiento de la función $z(r)$ cuando $\Lambda < 0$ para $0 < a < 1$. En el panel (b) se observa que la derivada de $z(r)$ es decreciente en el intervalo $1,13 < r \leq 1,7711$, y a partir del punto mínimo $1,7711$ $z'(r)$ crece nuevamente hasta la asíntota $r = 2,622$. En el panel (a) visualizamos que $z(r)$ es una función creciente que se encuentra acotada por dos asíntotas, $r = 1,129$ y $r = 2,622$, presenta un punto de inflexión en $1,7711$, y su tasa de cambio es alta cuanto $r \rightarrow 2,622$. Entonces existe embebimiento cuando $1,13 < r < 2,62$ para $a = 0,5$ y $\Lambda = -0,09$. En este caso, el agujero de gusano se extiende desde un punto cercano a la garganta r_1 hasta $r \approx 2,622$, y la restricción 3.7 conduce a una geometría que conecta dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planas.

$$0 < a < 1, \quad \Lambda < 0$$



(a) Diagrama de embebimiento con a positivo y $\Lambda < 0$.

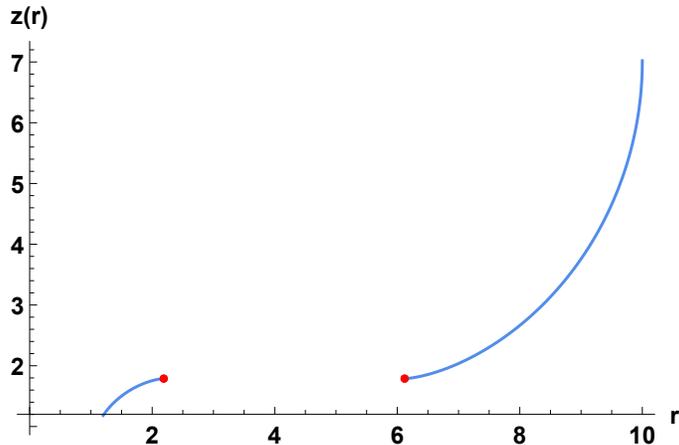


(b) Diagrama de la ecuación diferencial $z'(r)$ con $0 < a < 1$.

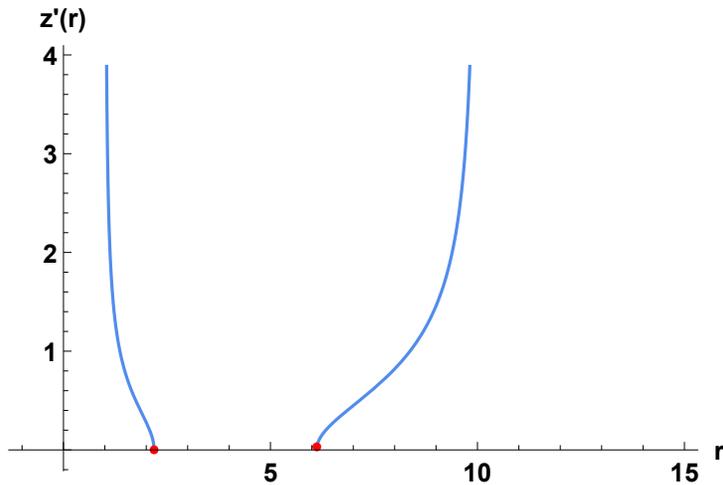
Figura 3.1: Diagramas correspondientes a la función de embebimiento $z(r)$ y a su derivada $z'(r)$, cuando $\Lambda = -0,09$ y $a = 0,5$.

La Figura 3.2 muestra el comportamiento de la función $z(r)$ cuando $\Lambda < 0$ para $a < 0$. En el panel (b) observamos que la derivada de $z(r)$ tiene dos puntos de corte en $r = 2,1887$ y $r = 6,2$. $z'(r)$ es decreciente en el intervalo $1 < r \leq 2,1887$ y se vuelve creciente en el intervalo $6,2 \leq r < 10$. En el panel (a) se ve que $z(r)$ es una función creciente que se encuentra acotada por dos asíntotas, $r = 1$ y $r = 10$, presenta una tasa de cambio que se incrementa cuando $r \rightarrow 10$, y cuando $2,1887 < r < 6,2$ la función $z(r)$ no existe. Por lo tanto, existe embebimiento cuando $1 < r \leq 2,1887$ y $6,126 < r < 10$ para $a = -1$ y $\Lambda = -0,009$. Por ello, el agujero se extiende desde la garganta r_1 hasta $r \rightarrow 10$, tomando en cuenta que la región del agujero que no puede ser embebida se da cuando $2,1887 < r < 6,12$, y de acuerdo a la restricción 3.7 la geometría del agujero conecta dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planas.

$$a < 0, \quad \Lambda < 0$$



(a) Diagrama de embebimiento con a negativo y $\Lambda < 0$.

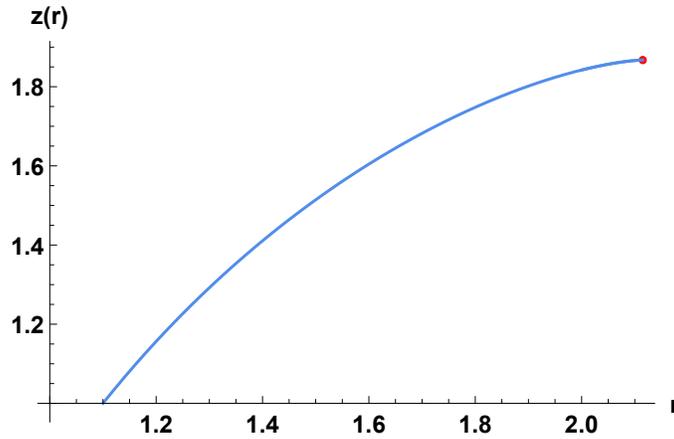


(b) Diagrama de la ecuación diferencial $z'(r)$ con $a < 0$.

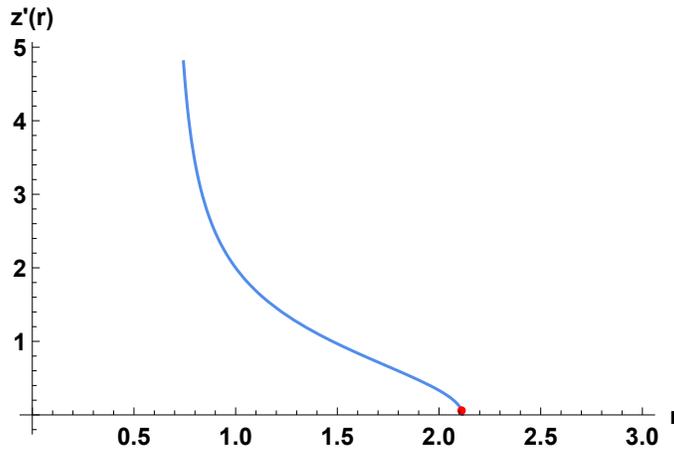
Figura 3.2: Diagramas correspondientes a la función de embebimiento $z(r)$ y a su derivada $z'(r)$, cuando $\Lambda = -0,009$ y $a = -1$.

La Figura 3.3 presenta el comportamiento de la función $z(r)$ cuando $\Lambda > 0$ para $0 < a < 1$. En el panel (b) visualizamos que la derivada de $z(r)$ es decreciente en el intervalo $1 < r \leq 2,1142$, con un punto de corte en $r = 2,1142$. Por otro lado, en el panel (a) apreciamos que la tasa de cambio de $z(r)$ con $\Lambda > 0$ es muy pequeña en comparación con la tasa de cambio de la función $z(r)$ con $\Lambda < 0$. $z(r)$ es una función creciente que se encuentra acotada por una asíntota en $r = 1$ y presenta un punto máximo en $r = 2,1142$. Por lo tanto, el embebimiento se extiende desde la garganta r_1 hasta un valor máximo de r , $r = 2,1142$, lo que nos permite señalar que el tamaño del embebimiento es muy pequeño, y que para valores de r mayores a $2,1142$ las regiones del agujero no pueden ser embebidas en un espacio Euclideo ordinario. Hay que notar que de acuerdo a la condición 3.7, la geometría del agujero conecta dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planas.

$$0 < a < 1, \quad \Lambda > 0$$



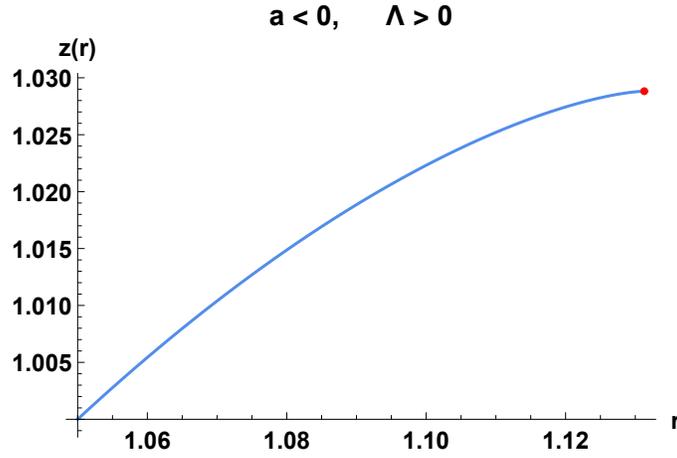
(a) Diagrama de embebimiento con a positivo y $\Lambda > 0$.



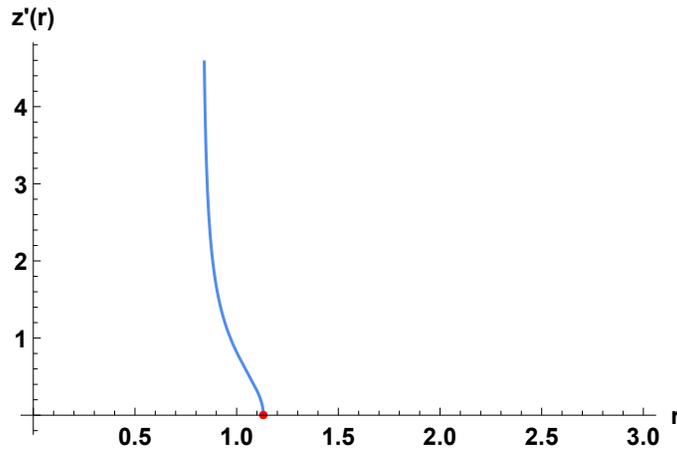
(b) Diagrama de la ecuación diferencial $z'(r)$ con $0 < a < 1$.

Figura 3.3: Diagramas correspondientes a la función de embebimiento $z(r)$ y a su derivada $z'(r)$, cuando $\Lambda = 1$ y $a = 0,8$.

La Figura 3.4 expone el comportamiento de la función $z(r)$ cuando $\Lambda > 0$ para $a < 0$. En el panel (b) observamos que la derivada de $z(r)$ es decreciente en el intervalo $1 < r \leq 1,1312$, con un punto de corte en $r = 1,1312$. Por otra parte, en el panel (a) se muestra que la tasa de cambio de $z(r)$ cuando $\Lambda > 0$ es muy pequeña en comparación con la tasa de cambio de la función $z(r)$ con $\Lambda < 0$. $z(r)$ es una función creciente que se encuentra acotada por una asíntota en $r = 1$ y tiene un punto máximo en $r = 1,1312$. De manera que, la función de embebimiento existe si $1 < r \leq 1,1312$ cuando $a = -1$ y $\Lambda = 0,3$. En este caso, el embebimiento se extiende desde la garganta r_1 hasta un valor máximo de r , $r = 1,1312$, lo que nos permite resaltar que el tamaño del embebimiento es muy pequeño, y que las regiones que se encuentran cuando $r > 1,1312$ no pueden ser embebidas en un espacio Euclideo ordinario. Hay que notar que de acuerdo a la condición 3.7, la geometría del agujero conecta dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planas.



(a) Diagrama de embebimiento con a negativo y $\Lambda > 0$.



(b) Diagrama de la ecuación diferencial $z'(r)$ con $a < 0$.

Figura 3.4: Diagramas correspondientes a la función de embebimiento $z(r)$ y a su derivada $z'(r)$, cuando $\Lambda = 0,3$ y $a = -1$.

3.2. Ecuaciones de Einstein

Para determinar la forma del tensor energía-impulso que puede sostener la garganta del agujero procederemos a calcular el tensor de Einstein, para luego igualar componente a componente con el tensor energía-impulso. Usando las ecuaciones 2.4 con $\phi(r) = 0$, $b(r) = ar + (1 - a)r_o - (1 - a)\Lambda r^3$ obtenemos las componentes del tensor de Riemann en el sistema de coordenadas tangencial:

$$\begin{aligned}
 R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{r}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} = 0, \\
 R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{\theta}} = 0, \\
 R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = 0, \\
 R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = -\frac{(1-a)}{2r^3} [2\Lambda r^3 + r_o], \\
 R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{r}}^{\hat{\phi}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}}^{\hat{\phi}} = -\frac{(1-a)}{2r^3} [2\Lambda r^3 + r_o], \\
 R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = \frac{ar + (1-a)r_o - (1-a)\Lambda r^3}{r^3}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Las componentes del tensor de Ricci vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
R_{\hat{t}\hat{t}} &= 0, \\
R_{\hat{r}\hat{r}} &= -\frac{(1-a)}{r^3} [2\Lambda r^3 + r_o], \\
R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= \frac{1}{2r^3} [(1-a)r_o + 2ar - 4(1-a)\Lambda r^3], \\
R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \frac{1}{2r^3} [(1-a)r_o + 2ar - 4(1-a)\Lambda r^3].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Además, el escalar de curvatura es:

$$R = \frac{2}{r^3} (3(1-a)\Lambda r^3 - ar). \tag{3.15}$$

Finalmente, las componentes del tensor de Einstein se escriben como:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{a}{r^2} - 3(1-a)\Lambda, \tag{3.16}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{r_o(a-1)}{r^3} - \frac{a}{r^2} - (1-a)\Lambda, \tag{3.17}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{(1-a)r_o}{2r^3} + (1-a)\Lambda, \tag{3.18}$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{(1-a)r_o}{2r^3} + (1-a)\Lambda. \tag{3.19}$$

El tensor de Einstein es diagonal, así que asumimos que el tensor energía-impulso tiene la misma estructura $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\bar{\kappa}\rho, \bar{\kappa}p_r, \bar{\kappa}p_l)$, por lo tanto

$$\bar{\kappa}\rho = \frac{c^2}{8\pi G} \left[\frac{a}{r^2} - 3(1-a)\Lambda \right], \tag{3.20}$$

$$\bar{\kappa}p_r = \frac{c^4}{8\pi G} \left[\frac{r_o(a-1)}{r^3} - \frac{a}{r^2} - (1-a)\Lambda \right], \tag{3.21}$$

$$\bar{\kappa}p_l = \frac{c^4}{8\pi G} \left[\frac{(1-a)r_o}{2r^3} + (1-a)\Lambda \right]. \tag{3.22}$$

Si $\Lambda = 0$ recuperamos los resultados para el agujero de gusano casi-Schwarzschild.

De acuerdo a la ecuación 3.3, cuando $\Lambda > 0$ la garganta se localiza en $r_1 > 0$, y si $\Lambda < 0$ la garganta se encuentra en $r_1 < 0$. Por lo tanto, analizamos el comportamiento de la presión radial y lateral en la garganta del agujero de gusano.

La presión radial en la garganta del agujero se expresa de la siguiente manera

$$p_r(r_1) = \frac{r_o(a-1)}{r_1^3} - \frac{a}{r_1^2} - (1-a)\Lambda, \tag{3.23}$$

donde $c^4/8\pi G = 1$. De la ecuación 3.3, si $\Lambda > 0$ y $a < 1$ entonces $p_r(r_1) < 0$. Si $\Lambda < 0$ y

$a < 1$ se tiene $p_r(r_1) < 0$. Por otro lado, la presión lateral está definida por

$$p_l(r_1) = \frac{(1-a)r_o}{2r^3} + (1-a)\Lambda, \quad (3.24)$$

donde $c^4/8\pi G = 1$. Si $\Lambda > 0$ y $a < 1$ se tiene que $p_l(r_o) > 0$. Pero, si $\Lambda < 0$ y $a < 1$ la presión lateral es negativa ($p_l(r_o) < 0$). Si $\Lambda = 0$ la presión radial y lateral toman la forma del agujero de gusano casi-Schwarzschild.

Definimos la Condición de Energía Nula (CEN), dada por la ecuación 1.24, a partir de los datos obtenido en las ecuaciones 3.20, 3.21 y 3.22,

$$\begin{aligned} \rho + p_r &= \left[\frac{r_o(a-1)}{r^3} - 4\Lambda(1-a) \right], \\ \rho + p_l &= \left[\frac{r_o(1-a)}{2r^3} + \frac{a}{r^2} - 2\Lambda(1-a) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $(c^{-4}8\pi G) = 1$. Si $\Lambda < 0$ y $a < 1$ se cumple CEN para la presión radial ($\rho + p_r > 0$). Si $\Lambda < 0$, $a < 1$ y $r > r_o > 0$ CEN se cumple para la presión lateral ($\rho + p_l > 0$). En cambio, si $\Lambda > 0$ y $a < 1$ CEN no se cumple para p_r y p_l .

Si la suma de la densidad de energía y las presiones es positiva, se cumple la condición de energía fuerte (CEF),

$$\rho + p_{tot} = \rho + p_r + 2p_l = 2\Lambda(a-1). \quad (3.26)$$

Si $\Lambda < 0$ entonces $\rho + p_{tot} > 0$ y cumple con CEF. Pero, si $\Lambda > 0$ entonces $\rho + p_{tot} < 0$ y no cumple con CEF. Para las condiciones de energía débil (CED) y dominante (CEDM) la densidad radial debe ser positiva, y de acuerdo a la ecuación 3.20 si $\Lambda < 0$ y $a < 1$ se tiene que $\rho > 0$, pero si $\Lambda > 0$ y $a < 1$ entonces $\rho < 0$. Por lo tanto, se cumple CED y CEDM para $\Lambda < 0$ y $a < 1$.

3.3. Condiciones de atravesabilidad

Consideramos que una persona viaja radialmente por el agujero de gusano, desde la estación de salida (donde el viajero se encuentra en reposo) hasta la estación de llegada. La aceleración que siente el viajero no debe exceder la gravedad de la Tierra $g_{\oplus} = 980\text{cm/s}^2$. Así, a la aceleración que siente un viajero que se mueve radialmente determinamos por la ecuación 2.21, y obtenemos

$$|a_{vj}| = \left| \left((1-a) \left(1 - \frac{r_o}{r} + \Lambda r^2 \right) \right)^{1/2} \gamma' c^2 \right|. \quad (3.27)$$

Además, tomando en cuenta que $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, la última ecuación se convierte en

$$|a_{vj}| = \left| \left((1-a) \left(1 - \frac{r_o}{r} + \Lambda r^2 \right) \right)^{1/2} v v' \gamma^3 \right|. \quad (3.28)$$

Si $a \neq 0$ y $\Lambda = 0$ se tiene que $|a_{vj}| = |a_v|$, donde $|a_v|$ es la aceleración del agujero casi-Schwarzschild (ecuación 2.72). Si $a = 0$, y $\Lambda = 0$, entonces $|a_{vj}| = |a_{shc}|$, donde $|a_{shc}|$ es la aceleración que siente el viajero para un agujero de gusano de Schwarzschild y se la escribe como

$$|a_{shc}| = \left| \left(1 - \frac{r_o}{r} \right)^{1/2} v v' \gamma^3 \right|. \quad (3.29)$$

Entonces para $\Lambda > 0$, si $0 < a < 1$, se tiene que $|a_{vj}| > |a_{shc}| > |a_v|$, pero, si $a < 0$ se tiene que $|a_{vj}| > |a_v| > |a_{shc}|$. Por otro lado, para $\Lambda < 0$, si $0 < a < 1$, se tiene que $|a_{vj}| < |a_v| < |a_{shc}|$, pero, si $a < 0$ se tiene que $|a_{vj}| < |a_{shc}| < |a_v|$. La condición de la aceleración (ecuación 3.28) se pueden satisfacer independientemente cuando el parámetro $0 < a < 1$ y $\Lambda > 0$, puesto que lo importante es que el viajero mantenga su velocidad $v(r)$ constante durante el viaje. Pero, si $a < 0$ y $\Lambda > 0$, el viajero debe disminuir considerablemente su velocidad $v(r)$ entre las estaciones.

Para tener una idea de la magnitud de la aceleración que acabamos de calcular, consideramos un objeto moviéndose a una velocidad de 600 m/s, la aceleración que tendría el objeto que se mueve radialmente por el agujero de gusano es 424,26m/s² cuando $\Lambda = 0$ y $a = 0$. Pero, si $r \approx 20$ km y $r_o = 1$ km se tiene que $a_{vj} \approx 600$ m/s². En cambio, para calcular la aceleración cuando $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$, se toma $r_o = 1$ y el radio de la garganta $1 \text{ km} < r < 20$ km. Entonces, si $\Lambda > 1$ y $0 < a < 1$ se tiene a_{vj} aumenta considerablemente, es decir, si $\Lambda \approx 1$ la aceleración que siente el viajero tendría un promedio de 813,34 m/s², pero si $\Lambda \gg 1$ la aceleración tomaría valores superiores a 2800 m/s². Para $\Lambda > 0$ y $a < 0$ la aceleración tendría una magnitud mínima de 2000 m/s².

Ahora, si estudiamos la aceleración que siente el viajero cuando $\Lambda < 0$ tendremos que, para $0 < a < 1$ y $-1 \leq \Lambda < 0$ la aceleración ≈ 900 m/s², y si $\Lambda \ll -1$ y $0 < a < 1$ la aceleración excede los 2000 m/s². Por otra parte, si $a < 0$ y $\Lambda < 0$ se tiene que $a_{vj} \approx 3000$ m/s².

Las aceleraciones radial y lateral que siente el viajero están dadas por las ecuaciones 2.24 y 2.25, respectivamente. La restricción de fuerzas de marea radiales se puede considerar como una restricción de la función de desplazamiento al rojo, mientras que la restricción de marea lateral se puede considerar como una restricción de la velocidad v con la que el viajero cruza el agujero de gusano. Por lo tanto, si $\phi = 0$ el viajero no siente la aceleración radial, pero la aceleración lateral es

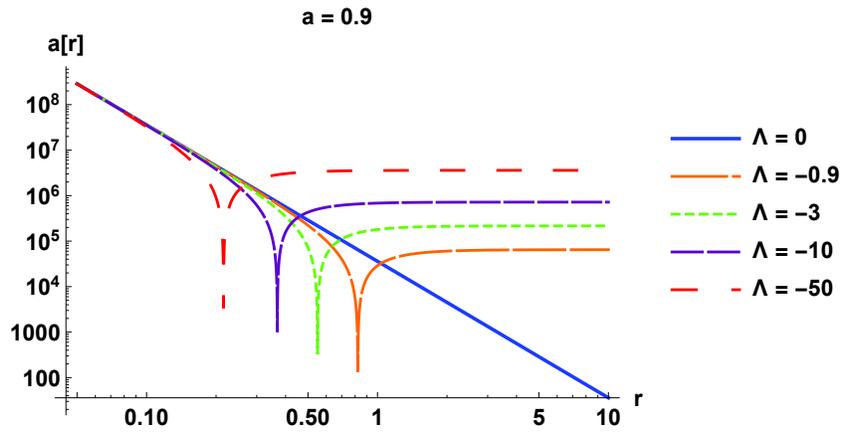
$$\left| \frac{\gamma^2 v^2}{2r^2} \left(\frac{v^2}{c^2} \left(2(a-1)\Lambda r^2 + \frac{r_o(a-1)}{r} \right) \right) \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}. \quad (3.30)$$

Si obligamos a que el movimiento sea no-relativista ($v \ll c$) entonces $\gamma \approx 1$. De este modo, de la última relación obtenemos

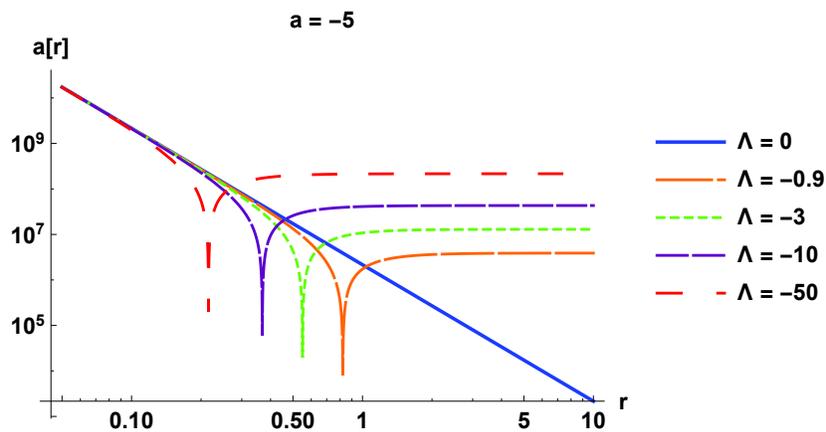
$$\left| v^2 \left((a-1)\Lambda + \frac{r_o(a-1)}{2r^3} \right) \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}. \quad (3.31)$$

Si $\Lambda = 0$ la aceleración lateral toma la forma del agujero casi-Schwarzschild, de manera que, para el nuevo agujero deformado de Schwarzschild la aceleración lateral varía en su magnitud de acuerdo al valor de Λ .

En la Figura 3.5 observamos que, si $\Lambda < 0$ la aceleración lateral que siente el viajero aumenta mientras el valor del parámetro a disminuye, y si el radio de la boca del agujero aumenta, entonces la aceleración lateral disminuye hasta llegar a una magnitud mínima en un determinado valor de r , para después aumentar y alcanzar un valor constante con el que podrá cruzar el agujero. Hay que tener en cuenta que si $\Lambda < 0$ la aceleración lateral aumenta a medida que la constante cosmológica disminuye.



(a) Aceleración radial con $a > 0$.



(b) Aceleración radial con $a < 0$.

Figura 3.5: Aceleración que siente el viajero al moverse radialmente por el agujero para diferentes valores de la constante cosmológica $\Lambda < 0$ cuando el parámetro a toma valores fijos.

En cambio, en la Figura 3.6 exponemos que a medida que el radio de la boca del agujero aumenta, la aceleración lateral disminuye hasta llegar a un valor constante con la que el viajero podrá cruzar el agujero de gusano. Si $\Lambda > 0$ la magnitud de la aceleración lateral aumenta mientras el parámetro de deformación disminuye y la constante cosmológica aumenta, como se muestra en las Figuras 3.6a y 3.6b.

Nuevamente, considerando un objeto que se mueve a una velocidad 600 m/s (ecuación 3.31), la aceleración que el objeto siente al atravesar el agujero es de 75 m/s² cuando $\Lambda = 0$ y $a = 0$. Si $a = 0,5$ la aceleración que siente el objeto al cruzar el agujero aumenta a medida que Λ disminuye (si $\Lambda < 0$). En cambio, (si $\Lambda > 0$) la aceleración que siente el objeto al cruzar el agujero aumenta mientras Λ aumenta.

De la ecuación 3.31 podemos ver que la aceleración lateral que siente el viajero es mínima si el radio de la boca del agujero $r \approx r_o$ (donde $r_o = 1$) y $-0,1 < \Lambda < 0$. Pero, si $r \gg r_o$ entonces la aceleración que siente el viajero al cruzar el agujero aumenta cuando $\Lambda \rightarrow -\infty$ y $\Lambda \rightarrow +\infty$. También se puede determinar que la magnitud de la aceleración aumenta si el parámetro de deformación a disminuye.

Determinamos la velocidad con la que el viajero cruza la garganta del agujero, donde $g_{\oplus} = 980\text{cm/s}^2$, $r = r_o$ y $\xi = 2\text{m}$,

$$v = \sqrt{\frac{4,9}{|a-1| \left| \Lambda + \frac{1}{2r_o^2} \right|}}. \quad (3.32)$$

La velocidad máxima está dada por

$$v_{max} = \frac{7(2\Lambda r_o^2 + 1)}{4\sqrt{10} r_o^5 \sqrt{|a-1| \left| \Lambda + \frac{1}{2r_o^2} \right|}^{5/2}}. \quad (3.33)$$

Analizando la ecuación 3.32, $v(r_o)$ es proporcional a r_o cuando $\Lambda \approx 0$ y $a < 1$. Por lo tanto, a medida que el radio de la garganta aumenta, el viajero debe aumentar su velocidad para poder cruzar el agujero.

La deformación del agujero, dado por el parámetro a y la constante cosmológica Λ , juegan un papel importante en la determinación de la velocidad con la que el viajero debe cruzar el radio de la garganta, es decir, la velocidad $v(r_o)$ aumenta considerablemente cuando $0 < a < 1$ y $\Lambda = 0$. Pero si el parámetro a toma valores negativos ($a < 0$) entonces la velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero será cada vez menor cuando $\Lambda \rightarrow 0$. La velocidad $v(r_o)$ que se determina de la ecuación 3.32 el viajero puede atravesar el agujero de gusano.

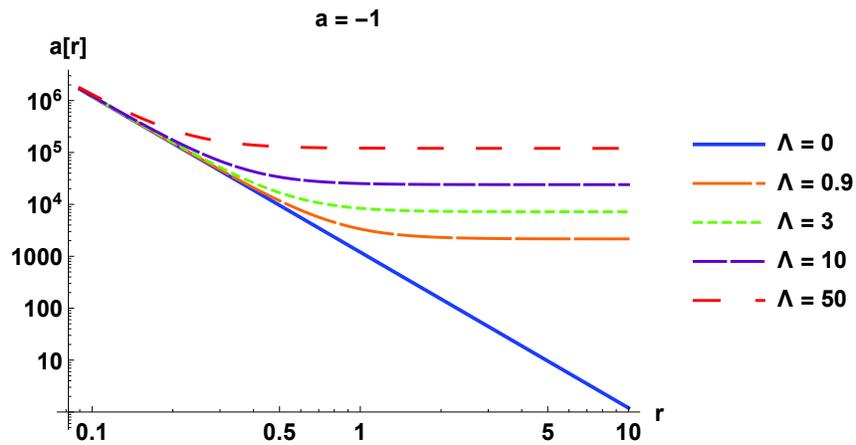
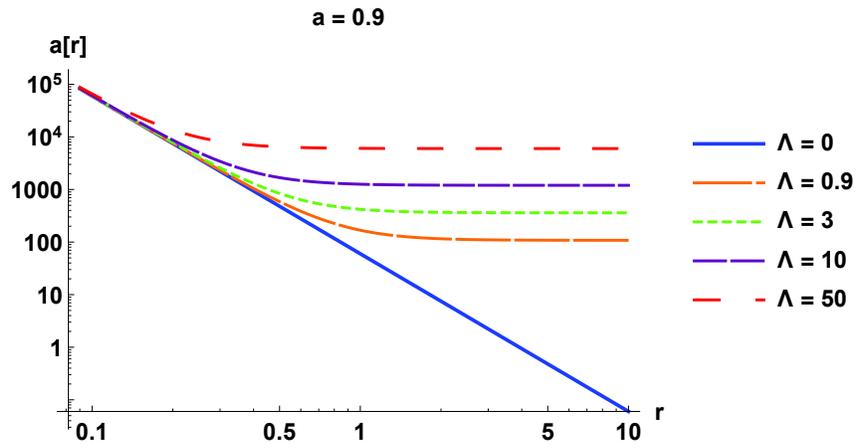


Figura 3.6: Aceleración que siente el viajero al moverse radialmente por el agujero para diferentes valores de la constante cosmológica $\Lambda > 0$ cuando el parámetro a toma valores fijos.

Ahora, si $\Lambda < 0$ la velocidad $v(r_o)$ disminuirá a medida que los valores de a sean pequeños, es decir, si se varía la constante cosmológica ($\Lambda < 0$) la velocidad del viajero alcanza un valor máximo (ecuación 3.33) en un determinado r_o , y posteriormente disminuye su magnitud hasta alcanzar una velocidad constante con la que puede cruzar la garganta del agujero, como se muestra en las Figuras 3.7 y 3.8; pero si $\Lambda > 0$, la velocidad $v(r_o)$ aumentará moderadamente a medida que los valores de a sean pequeños hasta alcanzar un valor constante; si se considera que $\Lambda \gg 0$ la velocidad $v(r_o)$ que necesita alcanzar el viajero para cruzar el agujero será poco probable, debido a que el pasajero necesita de una velocidad mínima con la que pueda atravesar el agujero, con esta velocidad mínima el tiempo que le tomará al pasajero será máximo.

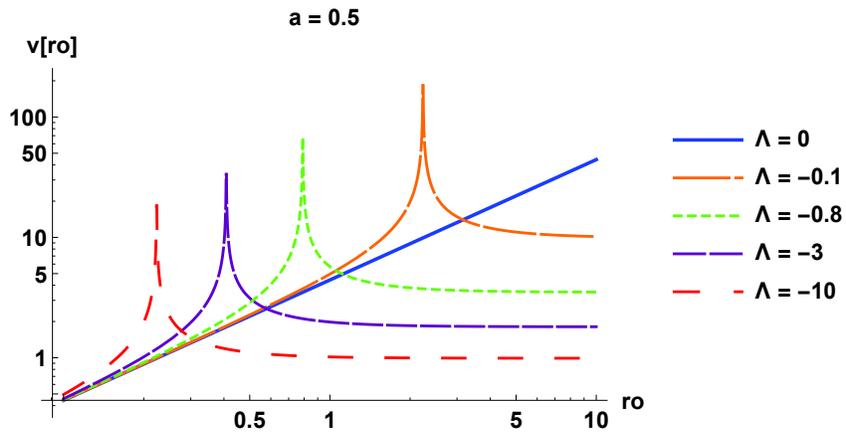


Figura 3.7: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, donde la constante cosmológica Λ toma distintos valores cuando el parámetro de deformación $a = 1/2$.

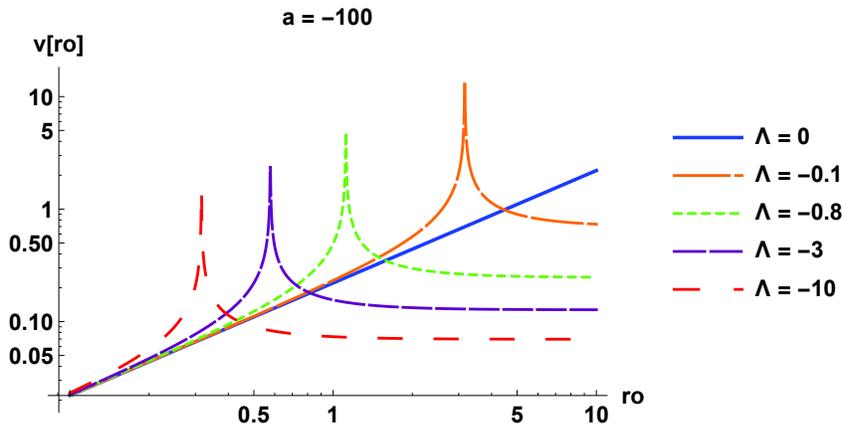


Figura 3.8: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, donde la constante cosmológica $\Lambda < 0$ para el parámetro de deformación $a = -100$.

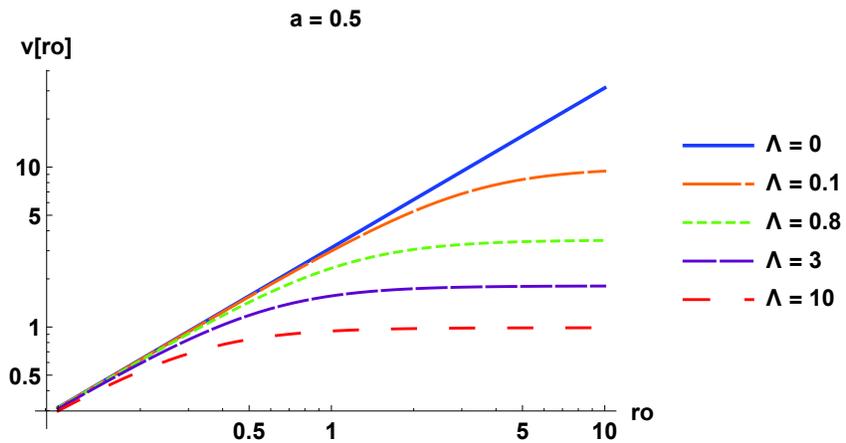


Figura 3.9: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, donde la constante cosmológica Λ toma distintos valores cuando el parámetro de deformación $a = 1/2$.

En las Figuras 3.9 y 3.10 presentamos el aumento de la velocidad del viajero $v(r_o)$ cuando $\Lambda > 0$, esta velocidad $v(r_o)$ alcanza un valor constante con la que el viajero puede cruzar la garganta del agujero. Las magnitudes de la velocidad $v(r_o)$ que toma el viajero para cruzar el agujero de gusano cuando $\Lambda < 0$ y $\Lambda > 0$, que se muestran en las Figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10, son valores que hacen posible que el viajero pueda atravesar el agujero.

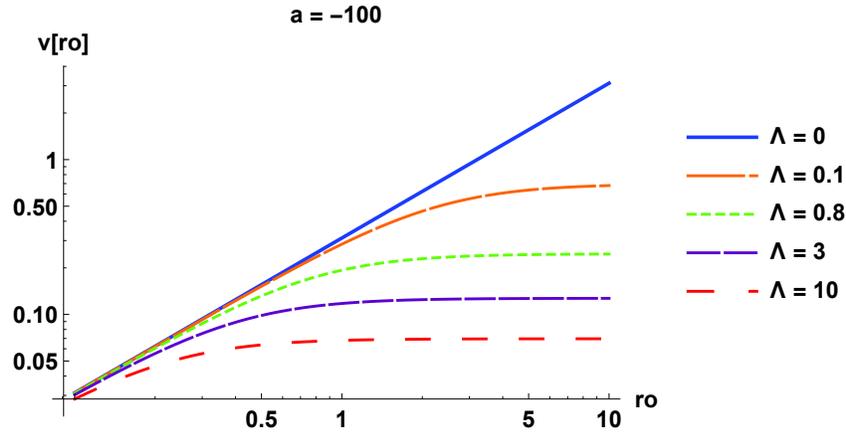


Figura 3.10: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, donde la constante cosmológica $\Lambda > 0$ cuando el parámetro de deformación $a = -100$.

A partir de la función de forma $b(r)$ (ecuación 3.1), determinamos la distancia propia definida por la ecuación 2.15,

$$l(r) = \pm \int_{r_o}^r \frac{dr}{\sqrt{(1-a)(1-\frac{r_o}{r} + \Lambda r^2)}}. \quad (3.34)$$

La integral anterior no se puede encontrar de forma analítica cuando $\Lambda > 0$ y $a < 1$, entonces se integra $l(r)$ numéricamente para diferentes valores de a , y se obtiene la distancia radial propia cuando $r_o = 1$ y $r = 5$. Hay que tomar en cuenta que los signos + y - indican la distancia propia desde la garganta del agujero a la estación de llegada y de salida, respectivamente.

Distancia $l(r)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$l(r) = \pm 8,366 \text{ km}$
$\Lambda = 0,8$	$l(r) = \pm 2,411 \text{ km}$
$\Lambda = 3$	$l(r) = \pm 1,294 \text{ km}$

Cuadro 3.1: $l(r)$ para $a = 1/2$

Distancia $l(r)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$l(r) = \pm 5,916 \text{ km}$
$\Lambda = 0,8$	$l(r) = \pm 1,706 \text{ km}$
$\Lambda = 3$	$l(r) = \pm 0,915 \text{ km}$

Cuadro 3.2: $l(r)$ para $a = 0$

Distancia $l(r)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$l(r) = \pm 2,957 \text{ km}$
$\Lambda = 0,8$	$l(r) = \pm 0,852 \text{ km}$
$\Lambda = 3$	$l(r) = \pm 0,457 \text{ km}$

Cuadro 3.3: $l(r)$ para $a = -3$

Para determinar Δt es necesario la variación de la distancia propia recorrida Δl y de la velocidad del viajero $v(r_o)$. Primero, encontramos los valores de $l(r)$ y $v(r_o)$ para $a : 1/2, 0$ y -3 , ver Cuadros 3.1, 3.2 y 3.3 para $l(r)$. Para $v(r_o)$ se exponen los Cuadros 3.4, 3.5 y 3.6. Luego, usamos la ecuación $\Delta t = \Delta l/v$, y para distintos l determinamos el tiempo total que se demora el viajero en atravesar el agujero de gusano de una estación a otra.

Velocidad $v(r_o)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$v(r_o) = 4,427 \text{ km/s}$
$\Lambda = 0,8$	$v(r_o) = 2,746 \text{ km/s}$
$\Lambda = 3$	$v(r_o) = 1,673 \text{ km/s}$

Cuadro 3.4: $v(r_o)$ para $a = 1/2$

Velocidad $v(r_o)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$v(r_o) = 3,131 \text{ km/s}$
$\Lambda = 0,8$	$v(r_o) = 1,942 \text{ km/s}$
$\Lambda = 3$	$v(r_o) = 1,183 \text{ km/s}$

Cuadro 3.5: $v(r_o)$ para $a = 0$

Velocidad $v(r_o)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$v(r_o) = 1,567 \text{ km/s}$
$\Lambda = 0,8$	$v(r_o) = 0,978 \text{ km/s}$
$\Lambda = 3$	$v(r_o) = 0,596 \text{ km/s}$

Cuadro 3.6: $v(r)$ para $a = -3$

Tiempo Δt para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$\Delta t = 3,779 \text{ s}$
$\Lambda = 0,8$	$\Delta t = 1,757 \text{ s}$
$\Lambda = 3$	$\Delta t = 1,5469 \text{ s}$

Cuadro 3.7: Δt para $a = 1/2$

Tiempo Δt para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$\Delta t = 3,811 \text{ s}$
$\Lambda = 0,8$	$\Delta t = 1,757 \text{ s}$
$\Lambda = 3$	$\Delta t = 1,547 \text{ s}$

Cuadro 3.8: Δt para $a = 0$

Tiempo Δt para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$\Delta t = 3,392 \text{ s}$
$\Lambda = 0,8$	$\Delta t = 1,742 \text{ s}$
$\Lambda = 3$	$\Delta t = 1,535 \text{ s}$

Cuadro 3.9: Δt para $a = -3$

De los Cuadros 3.7, 3.8 y 3.9 visualizamos que a medida que Λ aumenta el tiempo total que recorre el viajero es cada vez menor, pero si $\Lambda \rightarrow 0^+$ el viajero se demora más en atravesar el agujero de gusano. Como la distancia propia (ecuación 3.34) no existe cuando Λ toma valores negativos, entonces la distancia propia y el tiempo total de viaje que recorre el pasajero no se determina para $\Lambda < 0$.

3.4. Geodésicas

En ésta sección estudiaremos el comportamiento de las geodésicas del agujero de gusano descrito por la métrica 3.6. De la ecuación 2.80, el Lagrangiano asociado a la métrica 3.6 tiene la forma:

$$2\mathcal{L} = \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1-a)(1-\frac{r_o}{r} + \Lambda r^2)} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2. \quad (3.35)$$

Por lo que los momentos conjugados Π_t y Π_ϕ son

$$\Pi_t = \dot{t} = E; \quad (3.36)$$

$$\Pi_\phi = r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} = cte. \quad (3.37)$$

Tomamos las secciones $\theta = \pi/2$ de la métrica -gracias a la simetría esférica- y el Lagrangiano (ecuación 3.35), se convierte en

$$h = E^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1-a)(1-\frac{r_o}{r} + \Lambda r^2)} - \frac{L^2}{r^2}, \quad (3.38)$$

donde hemos usado las definiciones 3.36 y 3.37, y hemos definido al momentum angular por unidad de masa como $L = r^2 \dot{\phi}$. Adicionalmente, se define el tipo de geodésicas, $h = 1$ para las geodésicas tipo tiempo y $h = 0$ para las geodésicas nulas.

Estudiaremos las geodésicas radiales tipo tiempo, es decir, $L = 0$ y $h = 1$. Cuando $t_i = 0$ tomamos (r_i, v_i) como la posición radial inicial y la velocidad inicial, respectivamente, y obtenemos

$$E^2 = 1 + \frac{v_i^2}{(1-a)\left(1-\frac{r_o}{r_i} + \Lambda r_i^2\right)}. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, la ecuación 3.38 se puede escribir como

$$\dot{r} = \pm v_i \sqrt{\frac{1-\frac{r_o}{r} + \Lambda r^2}{1-\frac{r_o}{r_i} + \Lambda r_i^2}}, \quad (3.40)$$

donde el signo menos es válido para las partículas que se mueven de r_i hacia la garganta del agujero, y el signo positivo es válido cuando el movimiento es desde r_i hacia el infinito.

La última ecuación indica que la partícula que inicia con velocidad v_i continua moviéndose con velocidad creciente, y contrariamente a lo que pasa en los agujeros de gusano casi-Schwarzschild la velocidad no está acotada superiormente por un máximo. Si la partícula tiene velocidad inicial cero entonces $\dot{r} = 0$, por lo que se deduce que la partícula permanecerá en reposo, es por eso que se necesita que la partícula tenga una

velocidad inicial distinta de cero. De la ecuación 3.39 obtenemos

$$v_i^2 = (E^2 - 1)(1 - a) \left(1 - \frac{r_o}{r} + \Lambda r^2\right), \quad (3.41)$$

puesto que $a < 1$ y $(1 - r_o/r + \Lambda r^2) > 0$ se tiene que

$$E^2 \geq 1, \quad (3.42)$$

donde $E = 1$ implica que la partícula está en reposo. Al derivar la ecuación 3.40 en función de τ tenemos

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}(E^2 - 1)(1 - a) \left(\frac{r_o}{r^2} + 2\Lambda r\right). \quad (3.43)$$

Si definimos un potencial efectivo $V_{ef}(r) = (E^2 - 1)(1 - a) (r_o/r - \Lambda r^2)$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{ef}}{dr}. \quad (3.44)$$

Esta última relación muestra que dependiendo de los valores de Λ el campo gravitacional será repulsivo o atractivo. Por lo tanto nos restringiremos a las zonas donde $r_o/r^2 + 2\Lambda r > 0$. Si $\Lambda = 0$ se obtiene el agujero de gusano casi Schwarzschild, para el cual el potencial V_{ef} siempre es mayor a cero, y por lo tanto el campo gravitacional es siempre repulsivo. Para los agujeros de gusano deformados con $\Lambda > 0$ el potencial siempre es positivo y por lo tanto la gravedad repulsiva. Sin embargo, para el caso donde $\Lambda < 0$ hay zonas en la que la gravedad es atractiva y en otras repulsiva. Para partículas en reposo $E^2 = 1$, $\ddot{r} = 0$, lo que significa que poseen aceleración radial cero.

Resolver analíticamente la ecuación 3.40 es muy complicado, y considerando que estamos interesados en el comportamiento cuantitativo de las geodésicas procederemos a resolverla numéricamente. En la Figura 3.11 se muestra la función $r(\tau)$ para cuando $r_o = 1$, $v_i = 1$, $\Lambda = -1$ y $r_i = 1$. Como ya se esperaba, la velocidad radial es creciente cuando $\Lambda < 0$, y aunque va creciendo lentamente desde cierto r se prolonga hacia el infinito. Esto contrasta con el caso casi-Schwarzschild donde existía una velocidad máxima para el movimiento del viajero que atraviesa el agujero.

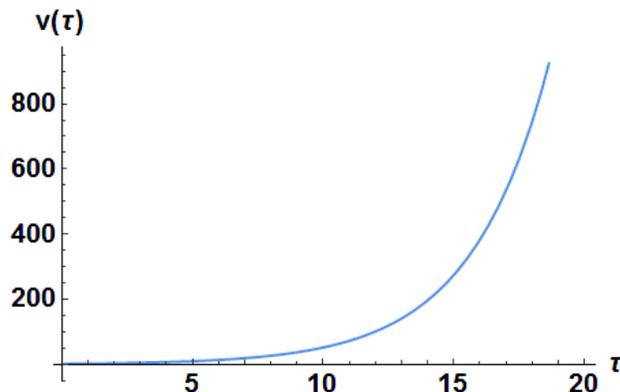


Figura 3.11: Función $r(\tau)$ para $\Lambda < 0$ cuando $r_o = 1$, $v_i = 1$, y $r_i = 1$.

3.5. Otra deformación

Como se mostró en la sección 2.2, los agujeros de gusano casi-Schwarzschild son asintóticamente planos. Una manera de construir un ansatz para la métrica que sea asintóticamente (anti)de Sitter es agregar un término que cambie el comportamiento asintótico de la métrica, así proponemos la siguiente forma para la métrica del agujero de gusano:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{(1-a)\left(1 - \frac{r_o}{r}\right) + \Lambda r^2} - r^2 d\Omega^2, \quad (3.45)$$

donde r_o es una constante (cuando $\Lambda = 0$ en r_o se ubica la garganta del agujero), $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ y Λ la constante cosmológica.

La componente g_{rr} de la métrica anterior es negativa, y por lo tanto,

$$(1-a)\left(1 - \frac{r_o}{r}\right) + \Lambda r^2 > 0. \quad (3.46)$$

Consideraremos que en esta métrica se cumple que $(1-a) > 0$, por consiguiente la componente g_{rr} es positiva cuando $\Lambda > 0$, $a < 1$ y r satisface

$$r > \frac{\beta^{2/3} - 3\Lambda(1-a)2^{2/3}}{3\Lambda\beta^{1/3}2^{1/3}}, \quad (3.47)$$

donde $\beta = 27^2\Lambda^2(1-a)r_o + \Lambda(1-a)\sqrt{108(1-a)\Lambda + 27^2\Lambda^2r_o^2}$ y $r > r_o$. Si $\Lambda < 0$ la componente g_{rr} de la métrica 3.45 es positiva cuando r satisface la ecuación 3.47 y $a < 1 + (27^2r_o^2\Lambda/108) < 0$.

Comparando con la métrica de Morris-Thorne, tenemos que la función de forma $b(r)$ para la métrica 3.45 es

$$b(r) = r_o(1-a) + ar - \Lambda r^3. \quad (3.48)$$

Esta función de forma tiene dependencia cúbica de la coordenada radial r . Y la ubicación de la garganta del agujero r_1 se encuentra usando $b(r_1) = r_1$, de donde se obtiene que r_1 tiene que satisfacer

$$r_o = r_1 + \Lambda/(1-a) r_1^3. \quad (3.49)$$

Si $\Lambda = 0$ se recupera la métrica casi-Schwarzschild donde $r_o = r_1$. Si $\Lambda \neq 0$ se tiene

$$r_1 = \frac{1}{3\Lambda} \left(\frac{P}{2}\right)^{1/3} + (a-1) \left(\frac{2}{P}\right)^{1/3}, \quad (3.50)$$

donde

$$P = -27\Lambda^2r_o(a-1) + 3\Lambda(1-a)\sqrt{12\Lambda(a-1) + 21\Lambda^2r_o^2}. \quad (3.51)$$

Usando la ecuación 3.48, si $r \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow a - \Lambda r^2, \quad (3.52)$$

por lo que, si el parámetro $a = 0$ entonces

$$\frac{b(r)}{r} \rightarrow -\Lambda r^2. \quad (3.53)$$

De la métrica 3.45 se ve que si $\Lambda = 0$ y $a = 0$ la métrica es asintóticamente plana.

Si la función de corrimiento $\phi(r) = 0$ y $r \rightarrow \infty$, la métrica 3.45 en el nuevo límite es

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{(1-a)\left(1 - \frac{r_o}{r}\right) + \Lambda r^2} - r^2 d\Omega^2. \quad (3.54)$$

Usaremos esta métrica para estudiar los agujeros asintóticamente (anti)de Sitter.

3.5.1. Diagramas de Embebimiento

Utilizando el mismo procedimiento para embeber regiones bidimensionales usado en la sección 2.1.1, obtenemos para la función de embebimiento

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{(1-a)r_o + ar - \Lambda r^3}{r((1-a)(1 - r_o/r) + \Lambda r^2)}}, \quad (3.55)$$

donde el denominador es positivo porque toma la forma de la componente g_{rr} de la métrica 3.6. Para que la última relación esté definida correctamente se requiere que la raíz tenga valores reales.

Si $\Lambda < 0$, el numerador de la fracción dentro de la raíz toma valores positivos cuando

$$\frac{2^{2/3} - \alpha^{2/3}}{3 \Lambda^{1/3} \alpha^{1/3}} < r, \quad (3.56)$$

donde $\alpha = -27\Lambda^2(1-a)r_o + \sqrt{-108\Lambda^3 a^3 + 27^2\Lambda^4(1-a)^2 r_o^2}$ y $a < 1 + 27^2 r_o^2 \Lambda / 108 < 0$.

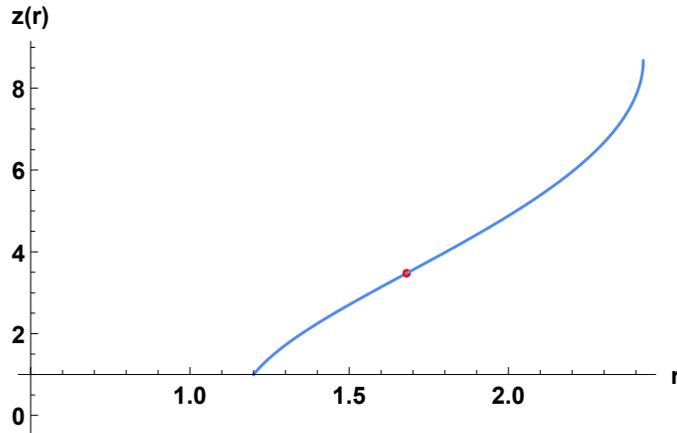
Si $\Lambda > 0$, el numerador de la fracción dentro de la raíz toma valores positivos cuando

$$r_o < r < \frac{2^{2/3} - \alpha^{2/3}}{3 \Lambda^{1/3} \alpha^{1/3}}, \quad (3.57)$$

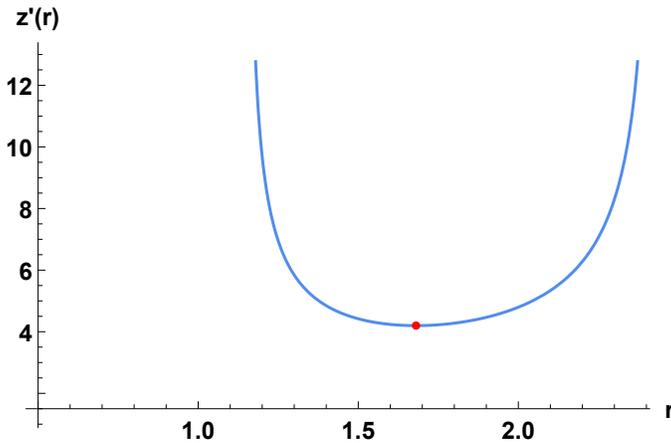
donde $\alpha = -27\Lambda^2(1-a)r_o + \sqrt{-108\Lambda^3 a^3 + 27^2\Lambda^4(1-a)^2 r_o^2}$ y $a < 1$.

De la ecuación 3.55 no es posible encontrar una solución analítica, por ello se procede a buscar soluciones numéricas para distintos parámetros de a y Λ (Ver apéndice C).

$$0 < a < 1, \quad \Lambda < 0$$



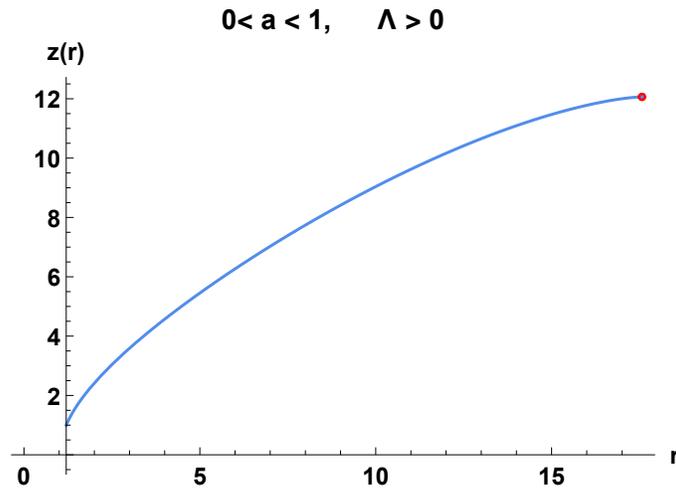
(a) Diagrama de embebimiento con a positivo y $\Lambda < 0$.



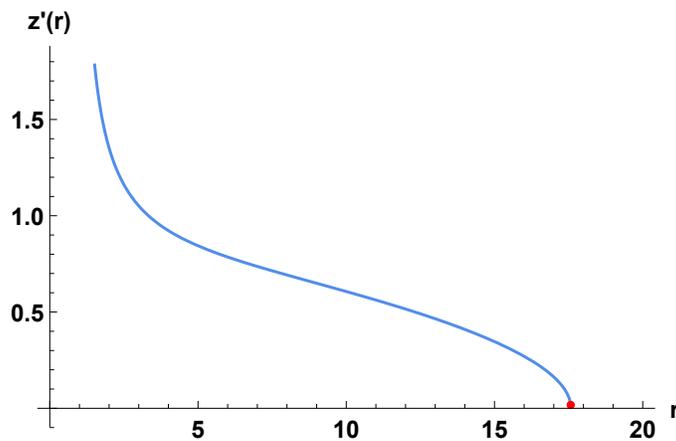
(b) Diagrama de la ecuación diferencial $z'(r)$ con $0 < a < 1$.

Figura 3.12: Diagramas correspondientes a la función de embebimiento $z(r)$ y a su derivada $z'(r)$, cuando $\Lambda = -0,1$ y $a = 0,5$.

En la Figura 3.12 mostramos el comportamiento de la función $z(r)$ cuando $\Lambda < 0$ y $0 < a < 1$. En el panel (b) se presenta que la derivada de $z(r)$ es decreciente en el intervalo $1,1535 < r \leq 1,68043$, y a partir del punto mínimo $1,68043$ $z'(r)$ crece nuevamente hasta la asíntota $r = 2,423$. En el panel (a) se observa que $z(r)$ es una función creciente que se encuentra acotada por dos asíntotas, $r = 1,149$ y $r = 2,423$, presenta un punto de inflexión en $1,6804$, y su tasa de cambio es alta cuanto $r \rightarrow 2,423$. Siendo así, el embebimiento existe cuando $1,1535 < r < 2,423$ para $a = 0,5$ y $\Lambda = -0,1$. En este caso, el agujero de gusano se extiende desde un punto cercano a la garganta r_1 hasta $r \approx 2,423$, y la restricción 3.7 conduce a una geometría que conecta dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planas.



(a) Diagrama de embebimiento con a positivo y $\Lambda > 0$.



(b) Diagrama de la ecuación diferencial $z'(r)$ con $0 < a < 1$.

Figura 3.13: Diagramas correspondientes a la función de embebimiento $z(r)$ y a su derivada $z'(r)$, cuando $\Lambda = 0,0011$ y $a = 0,3$.

La Figura 3.13 expone el comportamiento de la función $z(r)$ para $\Lambda > 0$ y $0 < a < 1$. En el panel (b) vemos que la derivada de $z(r)$ es decreciente en el intervalo $1 < r \leq 17,57$, con un punto de corte en $r = 17,57$. Por otro lado, en el panel (a) observamos que $z(r)$ presenta una tasa de cambio mínima en comparación con la tasa de cambio de la función $z(r)$ del panel (a) de la Figura 3.12. $z(r)$ es una función creciente que se encuentra acotada por una asíntota en $r = 1$ y presenta un máximo en $r = 17,57$, de manera que, la función de embebimiento existe cuando $1 < r < 17,576$ para $a = 0,3$ y $\Lambda = 0,0011$. En este caso, el embebimiento se extiende desde la garganta r_1 hasta un valor máximo de r ($r = 17,57$). Lo que nos permite señalar que el tamaño del embebimiento es finito, y que para valores de r mayores a $17,57$ las regiones del agujero no pueden ser embebidas en un espacio Euclideo ordinario. Hay que notar que, de acuerdo a la condición 3.7, la geometría del agujero conecta dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planas.

En las Figuras 3.12 y 3.13 presentamos los diagramas de embebimiento cuando $0 < a < 1$ para $\Lambda < 0$ y $\Lambda > 0$, respectivamente. Por otra parte, si $a < 0$ los intervalos de

la función $z(r)$ tienen una mayor fluctuación para $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$, y se puede encontrar las funciones de embebimiento siguiendo el mismo procedimiento como en el caso de la métrica 3.6.

3.5.2. Ecuaciones de Einstein

Para encontrar la forma del tensor energía-impulso de la métrica 3.45, determinamos las componentes del tensor de Riemann dados por las ecuaciones 2.4,

$$\begin{aligned}
R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = 0, \\
R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = 0, \\
R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{t}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = 0, \\
R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = \frac{1}{2r^3} [-2\Lambda r^3 - r_o(1-a)], \\
R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{r}}^{\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = \frac{1}{2r^3} [-2\Lambda r^3 - r_o(1-a)], \\
R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} &= -R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = \frac{ar - \Lambda r^3 + r_o(1-a)}{r^3}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Luego, hallamos las componentes del tensor de Ricci como:

$$\begin{aligned}
R_{\hat{t}\hat{t}} &= 0, \\
R_{\hat{r}\hat{r}} &= -\frac{1}{r^3} [2\Lambda r^3 + r_o(1-a)], \\
R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= \frac{1}{2r^3} [(1-a)r_o + 2ar - 4\Lambda r^3], \\
R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} &= \frac{1}{2r^3} [(1-a)r_o + 2ar - 4\Lambda r^3],
\end{aligned} \tag{3.59}$$

y el escalar de curvatura:

$$R = -\frac{1}{r^3} (2ar - 6\Lambda r^3). \tag{3.60}$$

Finalmente, el tensor de Einstein viene dado por:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{a}{r^2} - 3\Lambda, \tag{3.61}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{1}{r^3} [ar + r_o(1-a) - \Lambda r^3], \tag{3.62}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{2r^3} [r_o(1-a) + 2\Lambda r^3] \tag{3.63}$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{2r^3} [r_o(1-a) + 2\Lambda r^3]. \tag{3.64}$$

La densidad de energía y presión están dadas por

$$\bar{\kappa}\rho = \frac{c^2}{8\pi G} \left[\frac{a}{r^2} - 3\Lambda \right], \quad (3.65)$$

$$\bar{\kappa}p_r = \frac{c^4}{8\pi G} \left[-\frac{1}{r^3} [ar + r_o(1-a)] + \Lambda \right], \quad (3.66)$$

$$\bar{\kappa}p_l = \frac{c^4}{8\pi G} \left[\frac{r_o(1-a)}{2r^3} + \Lambda \right]. \quad (3.67)$$

Si $\Lambda = 0$ las componentes del tensor de Einstein $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ y las componentes del tensor energía-impulso $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ tomarían la forma del agujero casi-Schwarzschild.

La garganta del agujero de gusano descrito por la métrica 3.45 está localizada en r_1 , y de acuerdo a la ecuación 3.50, se analiza el comportamiento de la presión radial y lateral en la garganta del agujero.

La presión radial en la garganta del agujero está definida por

$$p_r(r_1) = -\frac{1}{r_1^3} [ar_1 + r_o(1-a)] + \Lambda, \quad (3.68)$$

donde $c^4/8\pi G = 1$. Para $\Lambda > 0$ y $a < 1$ tenemos que $r_1 > 0$ y por lo tanto $p_r(r_1) > 0$. Si $\Lambda < 0$ y $a < 1$ entonces $p_r(r_1) < 0$. Por otro lado, la presión lateral se expresa de la siguiente forma

$$p_l(r_1) = \frac{r_o(1-a)}{2r_1^3} + \Lambda, \quad (3.69)$$

donde $c^4/8\pi G = 1$. Para $\Lambda > 0$ y $a < 1$ tenemos que $r_1 > 0$ y por lo tanto $p_l(r_1) > 0$. Pero, si $\Lambda < 0$ y $a < 1$ entonces $p_l(r_1) < 0$. Si $\Lambda = 0$ la presión radial y lateral toman la forma del agujero de gusano casi-Schwarzschild.

Se define la Condición de Energía Nula (CEN) (ecuación 1.24), a partir de los datos obtenido en las expresiones 3.65, 3.66 y 3.67,

$$\begin{aligned} \rho + p_r &= \left[\frac{r_o(a-1)}{r^3} - 2\Lambda \right], \\ \rho + p_l &= \left[\frac{a}{2r^3} + \frac{r_o(1-a)}{2r^3} - 2\Lambda \right], \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde $r_o > 0$ y $r > r_o$. Si $-1 < \Lambda < 0$ y $a < 1 + \Lambda r^3/(r - r_o) < 0$ no se cumple CEN para p_r cuando $0 < r < (r_o(a-1)/2\Lambda)^{1/3}$. Si $\Lambda < -1$ y $a < 1 + (27^2 r_o^2 \Lambda)/108 < 0$ CEN se cumple para p_r cuando $0 < r < (r_o(a-1)/2\Lambda)^{1/3}$. Si $0 < \Lambda < 1$ y $0 < a < 1$ se cumple CEN para p_l cuando $r > (r_o(a-1)/2\Lambda)^{1/3}$, y si $\Lambda > 1$ y $0 < a < 1$ CEN se cumple para la presión lateral p_l cuando $0 < r < (r_o(a-1)/2\Lambda)^{1/3}$.

Si la suma de la densidad de energía, y las presiones (p_r y p_l) es mayor o igual que cero, entonces se cumple la condición de energía fuerte (CEF). En nuestro caso

$$\rho + p_{total} = \rho + p_r + 2p_l = 0. \quad (3.71)$$

Si $\Lambda < 0$ y $a < 0$ la densidad ρ es positiva para $r < \sqrt{a/3\Lambda}$ y se cumple la condición de energía débil (CED) y dominante (CEDM). Pero, si $\Lambda < 0$ y $0 < a < 1$ CED y CEDM no se cumplen. Si $\Lambda > 0$ y $0 < a < 1$ la densidad ρ es positiva y se cumple CED y CEDM para $r < \sqrt{a/3\Lambda}$, pero si $\Lambda > 0$ y $a < 0$ no se cumple CED y CEDM.

3.5.3. Condiciones de atravesabilidad

Siguiendo el procedimiento usual, consideramos que una persona viaja radialmente por el agujero de gusano, desde una estación de salida a una estación de llegada. De la ecuación 3.72, la aceleración que siente un viajero que se mueve radialmente es

$$|a| = \left| \left((1-a) \left(1 - \frac{r_o}{r} \right) + \Lambda r^2 \right)^{1/2} v v' \gamma^3 \right|. \quad (3.72)$$

Y las restricciones de fuerzas de marea son nulas para la aceleración radial ($\phi = 0$), pero la aceleración lateral es

$$\left| \frac{\gamma^2 v^2}{2r^2} \left(\frac{v^2}{c^2} \left(-2\Lambda r^2 + \frac{r_o(a-1)}{r} \right) \right) \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}, \quad (3.73)$$

donde el movimiento es no-relativista ($v \ll c$ y $\gamma = 1$). De este modo, la aceleración se expresa como

$$\left| v^2 \left(-\Lambda + \frac{r_o(a-1)}{2r^3} \right) \right| |\xi| \lesssim g_{\oplus}. \quad (3.74)$$

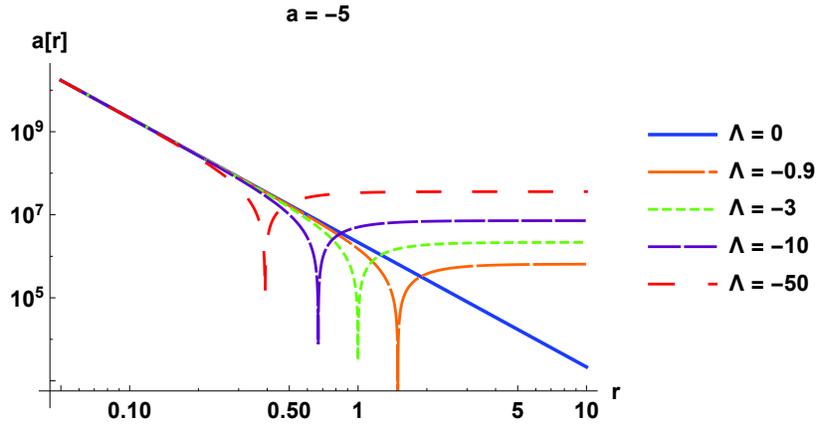
Si $\Lambda = 0$ la aceleración lateral toma la forma del agujero de gusano casi-Schwarzschild, de manera que, para el agujero deformado la aceleración lateral tiene un aumento y una disminución en su magnitud cuando $\Lambda < 0$ y $\Lambda > 0$, respectivamente.

Si $\Lambda < 0$ la aceleración lateral aumenta a medida que la constante cosmológica disminuye: en la Figura 3.14 se muestra que si $\Lambda < 0$ y el radio de la boca del agujero aumenta, entonces la aceleración lateral disminuye hasta llegar a una magnitud mínima en un determinado valor de r , para después aumentar y alcanzar un valor constante con el que podrá cruzar el agujero. Hay que resaltar que la aceleración lateral se mantiene constante si el parámetro a disminuye, pero la aceleración lateral mínima se alcanza en radios mayores.

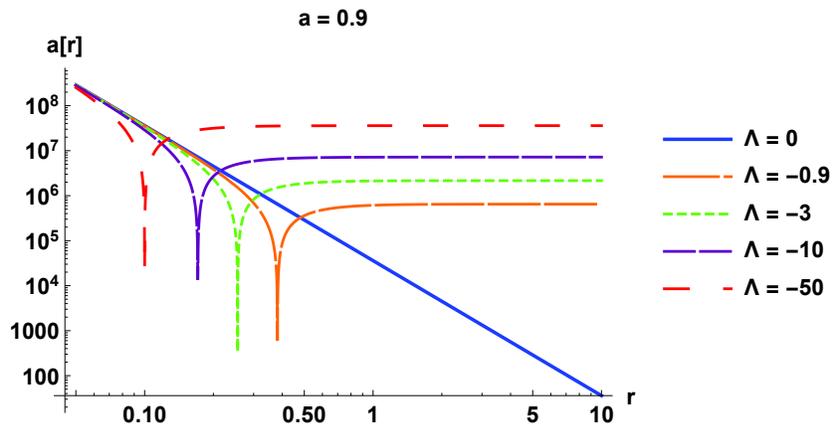
En cambio, en la Figura 3.15 se presenta que a medida que el radio de la boca del agujero aumenta, la aceleración lateral disminuye hasta llegar a un valor constante con la que el viajero podrá cruzar el agujero de gusano. Si $\Lambda > 0$ y el parámetro de deformación a disminuye, la magnitud de la aceleración lateral se mantiene constante pero la aceleración alcanza esta magnitud en mayores radios, como se muestra en los paneles (a) y (b)

de la Figura 3.15.

De la ecuación 3.30 se ve que la aceleración lateral que siente el viajero alcanza valores extremadamente grandes cuando $\Lambda > 0$ y $\Lambda < 0$, para $r > r_o$ y $a < 1$. La mínima aceleración que toma el viajero se da si el radio de la boca del agujero r es $\approx r_o$ (donde $r_o = 1$) y $-0,1 < \Lambda < 0$.



(a) Aceleración radial con $a < 0$.



(b) Aceleración radial con $a > 0$.

Figura 3.14: Aceleración que siente el viajero al moverse radialmente por el agujero de gusano para diferentes valores de la constante cosmológica $\Lambda < 0$ cuando el parámetro a toma valores fijos.

Tomando $g_{\oplus} = 980\text{cm/s}^2$, $r = r_o$ y $\xi = 2\text{m}$, la velocidad con la que el viajero cruza la garganta del agujero es:

$$v = \sqrt{\frac{4,9}{\left| -\Lambda + \frac{(a-1)}{2r_o^2} \right|}}. \quad (3.75)$$

La velocidad máxima está dada por

$$v_{max} = \frac{7(1 - a + 2\Lambda r^2)}{8\sqrt{10}r^4 \left| \Lambda - \frac{a-1}{2r_o^2} \right|^{5/2}}. \quad (3.76)$$

La ecuación 3.75 indica que la velocidad es proporcional al radio de la garganta del agujero cuando $\Lambda \rightarrow 0$, entonces $v(r)$ aumenta a medida que r_o aumenta. En efecto, el parámetro de deformación a del agujero hace que la magnitud de la velocidad aumente o disminuya considerablemente, esta variación de velocidad ocurre si $0 < a < 1$ donde $v(r_o)$ se incrementa, si $a < 0$ el valor de $v(r_o)$ decrece.

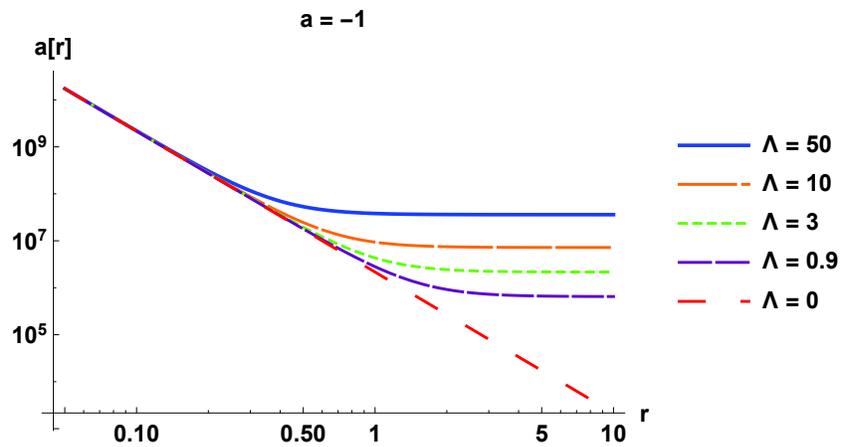
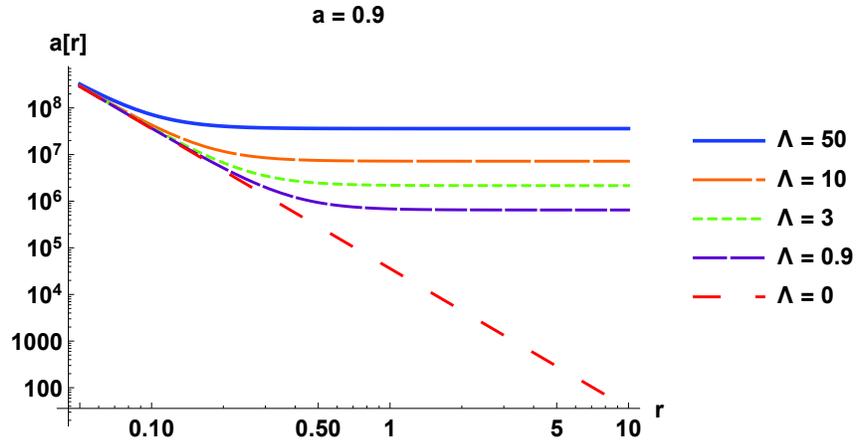


Figura 3.15: Aceleración que siente el viajero al moverse radialmente por el agujero de gusano para diferentes valores de la constante cosmológica $\Lambda > 0$ cuando el parámetro a toma valores fijos.

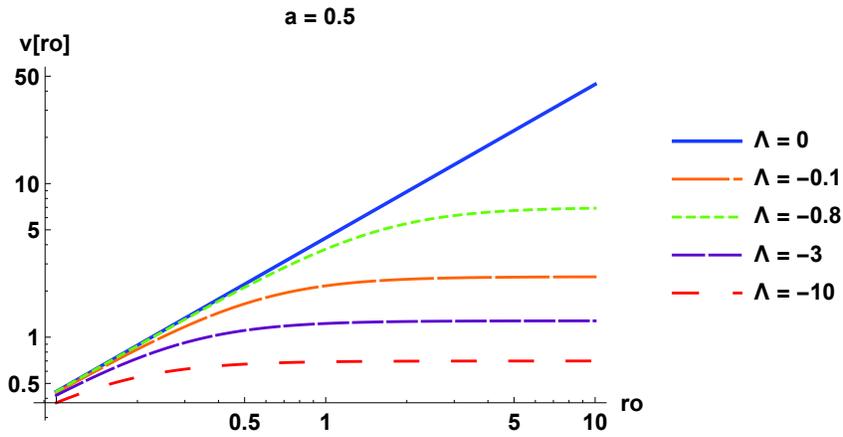


Figura 3.16: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, donde la constante cosmológica Λ toma valores negativos cuando el parámetro de deformación $a = 1/2$.

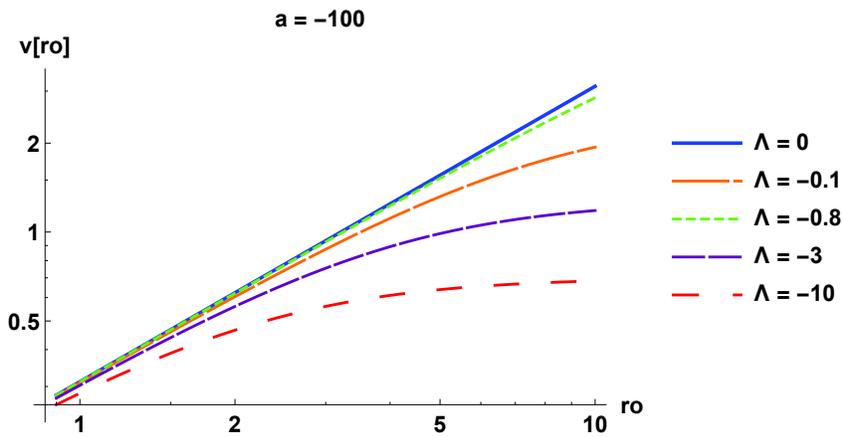


Figura 3.17: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, donde $\Lambda < 0$ cuando el parámetro de deformación $a = -100$.

La ecuación 3.75 muestra que la velocidad $v(r_o)$ del viajero también depende de la constante cosmológica Λ . Si tomamos un valor fijo del parámetro de deformación a y se hace variar $\Lambda < 0$, se obtiene que la velocidad con la que el viajero cruza la garganta del agujero de gusano aumenta hasta llegar a un valor constante con la que podrá atravesar radios más extensos, como se presenta en las Figuras 3.16 y 3.17. Si $a < 0$ la magnitud de la velocidad será mucho menor en comparación con la magnitud de la velocidad cuando $0 < a < 1$, esta variación de velocidad se ve cuando $a = 1/2$ y $a = -100$.

Por otra parte, si $\Lambda > 0$ y a toma un valor fijo, la velocidad del viajero alcanza un valor máximo (ecuación 3.76) en un radio r_o determinado, y posteriormente disminuye su magnitud hasta un valor constante con la que podrá cruzar el agujero. Los máximos de la magnitud de la velocidad $v(r_o)$ del viajero disminuyen a medida que Λ aumenta, las Figuras 3.18 y 3.19 indican como se comporta la velocidad para diferentes valores de Λ positivos cuando $a = 1/2$ y $a = -100$.

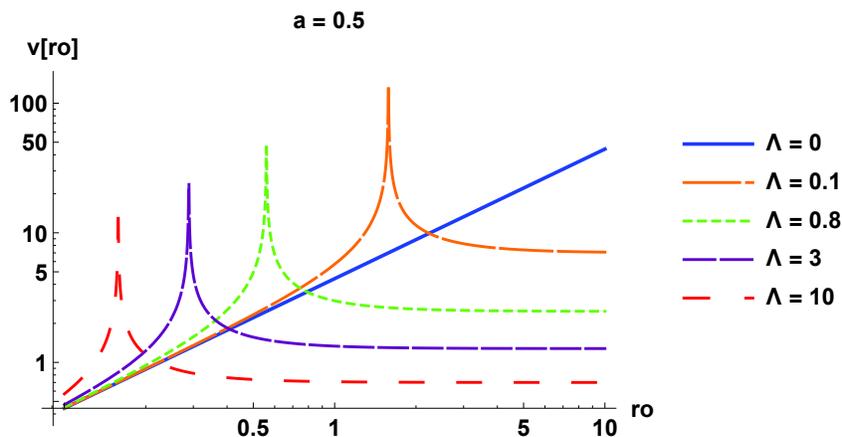


Figura 3.18: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, cuando $\Lambda > 0$ para el parámetro de deformación $a = 1/2$.

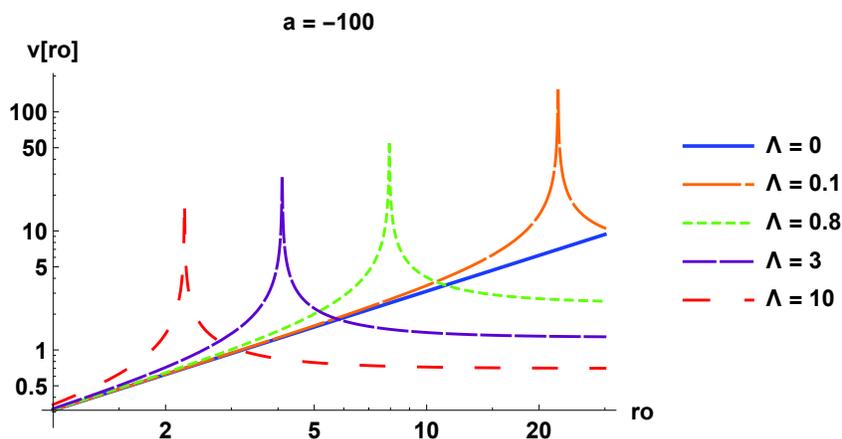


Figura 3.19: Velocidad que necesita el viajero para cruzar el agujero de gusano, cuando $\Lambda > 0$ para el parámetro de deformación $a = -100$.

De la ecuación 2.15, definimos la distancia propia de la métrica 3.45:

$$l(r) = \pm \int_{r_o}^r \frac{dr}{\sqrt{(1-a)(1-\frac{r_o}{r}) + \Lambda r^2}}. \quad (3.77)$$

Esta integral no se puede encontrar en forma analítica, y se integra $l(r)$ numéricamente para diferentes valores de a , y se obtiene la distancia radial propia cuando $r_o = 1$ y $r = 10$.

Distancia $l(r)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$l(r) = \pm 2,57 \times 10^6 \text{ km}$
$\Lambda = 0,8$	$l(r) = \pm 2,47 \text{ km}$
$\Lambda = 10$	$l(r) = \pm 0,71 \text{ km}$

Cuadro 3.10: $l(r)$ para $a = 1/2$

Distancia $l(r)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$l(r) = \pm 2,56 \times 10^6 \text{ km}$
$\Lambda = 0,8$	$l(r) = \pm 2,42 \text{ km}$
$\Lambda = 10$	$l(r) = \pm 0,71 \text{ km}$

Cuadro 3.11: $l(r)$ para $a = 0$

Distancia $l(r)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$l(r) = \pm 2,57 \times 10^6$ km
$\Lambda = 0,8$	$l(r) = \pm 2,21$ km
$\Lambda = 10$	$l(r) = \pm 0,71$ km

Cuadro 3.12: $l(r)$ para $a = -3$

Para determinar Δt necesitamos de la variación de la distancia propia recorrida Δl y de la velocidad del viajero $v(r_o)$. Los valores de $l(r)$ y $v(r_o)$ para $a : 1/2, 0$ y -3 se exponen en los Cuadros 3.10, 3.11, 3.12, y 3.13, 3.14, 3.15, respectivamente.

Velocidad $v(r_o)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$v(r_o) = 4,64$ km/s
$\Lambda = 0,8$	$v(r_o) = 2,18$ km/s
$\Lambda = 10$	$v(r_o) = 0,69$ km/s

Cuadro 3.13: $v(r_o)$ para $a = 1/2$

Velocidad $v(r_o)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$v(r_o) = 3,28$ km/s
$\Lambda = 0,8$	$v(r_o) = 1,97$ km/s
$\Lambda = 10$	$v(r_o) = 0,68$ km/s

Cuadro 3.14: $v(r_o)$ para $a = 0$

Velocidad $v(r_o)$ para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$v(r_o) = 1,64$ km/s
$\Lambda = 0,8$	$v(r_o) = 1,69$ km/s
$\Lambda = 10$	$v(r_o) = 0,64$ km/s

Cuadro 3.15: $v(r)$ para $a = -3$

Tiempo Δt para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$\Delta t = 10,95 \times 10^5$ s
$\Lambda = 0,8$	$\Delta t = 2,26$ s
$\Lambda = 10$	$\Delta t = 2,05$ s

Cuadro 3.16: Δt para $a = 1/2$

Tiempo Δt para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$\Delta t = 15,67 \times 10^5$ s
$\Lambda = 0,8$	$\Delta t = 2,45$ s
$\Lambda = 10$	$\Delta t = 2,08$ s

Cuadro 3.17: Δt para $a = 0$

Tiempo Δt para $\Lambda > 0$	
$\Lambda = 1 \times 10^{-15}$	$\Delta t = 3,13 \times 10^6$ s
$\Lambda = 0,8$	$\Delta t = 3,25$ s
$\Lambda = 10$	$\Delta t = 2,18$ s

Cuadro 3.18: Δt para $a = -3$

De los Cuadros 3.16, 3.17 y 3.18 vemos que a medida que Λ aumenta el tiempo total que recorre el viajero es cada vez menor, pero si $\Lambda \rightarrow 0^+$ el viajero se demora más en atravesar el agujero de gusano. Como la distancia propia (ecuación 3.77) no existe para valores negativos de Λ , la distancia propia y el tiempo total no se determinaron para $\Lambda < 0$.

Capítulo 4

Conclusiones y Discusión

En este trabajo hemos estudiado a los agujeros de gusano con secciones espaciales (anti)-de Sitter, considerando diferentes funciones de forma de la métrica de Morris-Thorne. A partir de las métricas que describen a los agujeros de gusano deformados hemos determinado: 1) Cuando existe el embebimiento, 2) Las condiciones que debe tener cada agujero de gusano para ser atravesable, 3) Si la deformación del agujero de gusano permite la desaparición de la materia exótica que sostiene el agujero, y 4) El comportamiento de las geodésicas tipo tiempo.

Inicialmente, hemos propuesto una función de forma $b(r)$ con dependencia cúbica de la coordenada radial r , definiendo la métrica que describe al nuevo agujero de gusano, a partir de la métrica de Morris-Thorne. Una vez encontrada la nueva métrica, se encontró la posición r_1 de la garganta del agujero de gusano. De la función de forma $b(r)$, se mostró que las métricas del agujero de gusano deformado de Schwarzschild (a)dS (ecuación 3.6) y del nuevo agujero de gusano deformado (a)dS (ecuación 3.45) describen agujeros que no son asintóticamente planos, cuando $r \rightarrow \infty$. A continuación, de la definición de la superficie de embebimiento dz/dr , graficamos los diagramas de embebimiento correspondientes al agujero de gusano deformado de Schwarzschild (a)dS y del nuevo agujero de gusano deformado (a)dS. Para determinar las funciones de embebimiento $z(r)$, hemos estudiado las regiones dónde los términos de la expresión de la superficie embebida (ecuación 2.14) de cada agujero toman valores reales, de modo que pueda existir el embebimiento.

Una vez definidas las zonas donde se satisface la coordenada radial r , hemos encontrado la solución numérica a las funciones $z(r)$, hemos graficado los diagramas de embebimiento. Los agujeros de gusano deformados de Schwarzschild (a)dS y los nuevos agujeros de gusano deformados (a)dS, presentan una geometría que conectan dos regiones del espacio-tiempo que no son asintóticamente planos. Si $\Lambda < 0$ el embebimiento se extiende desde un punto cercano a la garganta r_1 hasta $r \rightarrow 2,622$, para $0 < a < 1$, como observamos en la Figura 3.1. Pero, si $a < 0$, y $\Lambda < 0$, el embebimiento se extiende desde la garganta r_1 hasta $r \rightarrow 10$. En este caso, la región del agujero que no puede ser embebida se da cuando $2,1887 < r < 6,12$, esto se aprecia en la Figura 3.2. Por otro

lado, notamos en las Figuras 3.3 y 3.4 que para $\Lambda > 0$, y $a < 1$, el embebimiento se extiende desde la garganta r_1 hasta un valor máximo de r . Realizamos el mismo análisis para los nuevos agujeros de gusano deformados (a)dS. Si $\Lambda < 0$ el embebimiento se extiende desde un punto cercano a la garganta r_1 hasta $r \rightarrow 2,423$, cuando a es positivo, como se observa en la Figura 3.12. Si $\Lambda > 0$ el embebimiento ocurre desde la garganta r_1 hasta un valor máximo de r , lo que se aprecia en la Figura 3.13.

Hemos utilizado las ecuaciones de campo de Einstein para encontrar la densidad de energía ρ , y las presiones radial p_r y lateral p_l del agujero de gusano. De esta manera determinamos si la materia que sostiene el agujero de gusano cumple con las condiciones de energía nula (CEN), fuerte (CEF), débil (CED) y dominante (CEDM). En las sección 3.2 mostramos matemáticamente que en el agujero de gusano deformado de Schwarzschild (a)dS no se cumple ninguna de las condiciones de energía cuando $\Lambda > 0$. En consecuencia, la materia que sostiene el agujero de gusano deformado es materia exótica. Pero, si $\Lambda < 0$ entonces la materia que sostiene el agujero deformado no es de tipo exótica, ya que cumple con las condiciones CEF, CED y CEDM. Por otro lado, en el nuevo agujero de gusano deformado (a)dS, la materia que sostiene el agujero permite la desaparición de la materia exótica. En este caso, se cumplen las condiciones de energía si $\Lambda > 1$, y $0 < a < 1 + \Lambda r^3 / (r - r_o)$. Además, cuando $\Lambda < -1$ y $a < 1 + \Lambda r^3 / (r - r_o) < 0$.

Finalmente, encontramos las condiciones de atravesabilidad cuando el viajero cruza el agujero de gusano deformado. Para ello, se determinó la aceleración $|a_{vj}|$ que siente el viajero al moverse radialmente, y las fuerzas tidales que actúan sobre él. De las fuerzas tidales que actúan sobre el viajero solo encontramos la aceleración lateral, a través de la velocidad $v(r_o)$ que alcanza el pasajero para cruzar la garganta del agujero de gusano, ya que la aceleración radial tiene una restricción de la función de desplazamiento al rojo $\phi(r) = 0$, y por lo tanto, la aceleración radial se anula.

En los nuevos agujeros de gusano deformados, cuando $\Lambda > 0$, la aceleración que siente el viajero al moverse radialmente es mayor que la aceleración que se siente en el agujero de Schwarzschild ($a_{vj} > a_{sch}$). En cambio, si $\Lambda < 0$ la aceleración del nuevo agujero de gusano es menor que la aceleración en el agujero de Schwarzschild ($a_{vj} < a_{sch}$). Entonces, con la aceleración que se obtiene para el nuevo agujero de gusano se podría atravesar los agujeros de Schwarzschild. Estas aceleraciones, con las que un viajero atravesaría el agujero de gusano, se pueden analizar a partir de la aceleración límite que puede soportar un ser humano. Si consideramos que el cuerpo humano soporta hasta $46g_{\oplus}$ ($g_{\oplus} : 9,8 \text{ m/s}^2$) sin protección espacial; y, hasta $90g_{\oplus}$ con una protección adecuada. Un viajero puede atravesar el agujero siempre que el parámetro a tome valores positivos ($0 < a < 1$), y que la constante cosmológica satisfaga uno de los siguientes intervalos: $0 < \Lambda \leq 1$ ó $-1 < \Lambda < 0$.

Ahora, la mayor velocidad $v(r_o)$ que debería tener el pasajero, para cruzar la gar-

ganta del agujero de gusano deformado de Schwarzschild (a)dS, ocurre para $\Lambda > 0$, y $\Lambda < 0$, cuando $0 < a < 1$. En el caso del nuevo agujero deformado (a)dS, esta velocidad es mayor para $\Lambda > 0$, y $\Lambda < 0$, cuando $a < 0$.

Si tomamos en cuenta los límites de la aceleración que siente el viajero al moverse radialmente y la velocidad que alcanza al cruzar el agujero, podemos concluir que, el tiempo promedio que se demora el pasajero en cruzar el agujero de gusano está entre $1,6s < \Delta t < 5s$, cuando $\Lambda > 0$.

También estudiamos el comportamiento de las geodésicas radiales tipo tiempo del agujero de gusano deformado de Schwarzschild (a)dS. El análisis de la ecuación de las geodésicas (ecuación 3.38) muestra que las partículas que tienen velocidad inicial v_i continúan moviéndose radialmente con una velocidad creciente en un tiempo finito, de manera que, si $\Lambda > 0$, la gravedad es repulsiva. Pero, si $\Lambda < 0$ la gravedad puede ser repulsiva o atractiva.

Los resultados de este trabajo muestran el estudio de algunas propiedades que presentan los agujeros de gusano deformados, con secciones espaciales asintóticamente (a)dS. Nuestras conclusiones proveen una base para investigaciones futuras, e.g., 1)El estudio del comportamiento que presentan las geodésicas no radiales tipo tiempo de estos nuevos agujeros (a)dS, 2)El análisis de las propiedades de atravesabilidad de agujeros de gusano asintóticamente (anti) de Sitter (i.e. la componente temporal diferente de 1), 3)El estudio completo de las propiedades de los agujeros deformados (a)dS que incluyan carga eléctrica.

Bibliografía

- [1] F. Goelen T. Hertong P. Bueno, P. A. Cano and B. Vercknocke. *Phys. Rev.*, page 024040, 2018.
- [2] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 48(73-77), 1935.
- [3] Michael S Morris and Kip S Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 56(5):395–412, 1988.
- [4] S. Kar M. Visser and N. Dadhich. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. *Phys. Rev. Lett.*, page 201102, 2003.
- [5] M. Cataldo and F. Orellana. Static phantom wormholes of finite size. *Phys. Rev.*, 96:064022, 2017.
- [6] L. Liempi M. Cataldo and P. Rodríguez. Traversable schwarzschild-like wormholes. *Eur. Phys. Rev.*, 748:77, 2017.
- [7] Sergey Sushkov. Wormholes supported by a phantom energy. *Physical Review D*, 71(4):043520, 2005.
- [8] Vladimir Folomeev and Vladimir Dzhunushaliev. Wormhole solutions supported by interacting dark matter and dark energy. *Physical Review D*, 89(6):064002, 2014.
- [9] José PS Lemos, Francisco SN Lobo, and Sergio Quinet de Oliveira. Morris-thorne wormholes with a cosmological constant. *Physical Review D*, 68(6):064004, 2003.
- [10] KA Bronnikov, KA Baleevskikh, and MV Skvortsova. Wormholes with fluid sources: A no-go theorem and new examples. *Physical Review D*, 96(12):124039, 2017.
- [11] Sung-Won Kim and Hyunjoo Lee. Exact solutions of a charged wormhole. *Physical Review D*, 63(6):064014, 2001.
- [12] Peter Kuhfittig. On the feasibility of charged wormholes. *Open Physics*, 9(5):1144–1150, 2011.
- [13] Matthias Blau. *Lecture notes on general relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern Germany, 2011.

- [14] S Hollands and Ko Sanders. Lecture notes on general relativity.
- [15] Crespo B. M. Ecuaciones de campo de einstein. *Dpto de Fisica, Universidad de Murcia*.
- [16] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, USA, 1899.
- [17] K. Cabrera. *Una Introducción a la Relatividad General*. 2017.
- [18] Christophe Desjardins Morris. Exact solutions of the einstein equations. 2012.
- [19] V Tapia. La estructura canónica de la relatividad general, lect. *Notes, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2008*.
- [20] John Dirk Walecka. *Introduction to general relativity*. World Scientific Publishing Company, 2007.
- [21] Jonatan Nordebo. The reissner-nordström metric, 2016.
- [22] Special and General Reativity. Schwarzschild solution. *Instituto de Verano SPCS*, 2014.
- [23] L. Mastin. The Physics Of Universe. 2009, <http://www.physicsoftheuniverse.com/topicsblackholeswormholes.html>.
- [24] Saskia Grunau and Valeria Kagramanova. Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the reissner-nordström space-time: analytical solutions. *Physical Review D*, 83(4):044009, 2011.
- [25] Chris M Chambers. The cauchy horizon in black hole-de sitter spacetimes. *arXiv preprint gr-qc/9709025*, 1997.
- [26] David Lindley. Focus: The birth of wormholes. *Physics*, 15:11, 2005.
- [27] materia Fantasma Agujeros de Gusano Rotante. J. méndez, centro de investigación y de estudios avanzados.
- [28] Manuel Hohmann. Selected topics in the theories of gravity. 2014.
- [29] Asaf Pe'er. Schwarzschild solution and black holes. 2014.
- [30] D. Darling. Encyclopedia Of Science. 2016, <http://www.daviddarling.info/encyclopedia/W/wormhole.html>.
- [31] Matt Visser, Sayan Kar, and Naresh Dadhich. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. *Physical review letters*, 90(20):201102, 2003.
- [32] Thibaut Damour. *Surface effects in black hole physics*. na, 1982.
- [33] Thibault Damour and Sergey N Solodukhin. Wormholes as black hole foils. *Physical Review D*, 76(2):024016, 2007.

- [34] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [35] Vitor Cardoso and Leonardo Gualtieri. Testing the black hole 'no-hair'hypothesis. *Classical and Quantum Gravity*, 33(17):174001, 2016.
- [36] Christian G Böhmer. General relativistic static fluid solutions with cosmological constant. *arXiv preprint gr-qc/0308057*, 2003.
- [37] Stephen W Hawking and George Francis Rayner Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press, 1973.

Apéndice A

Ecuaciones de Campo de Einstein

De la ecuación 1.6, la curvatura del espacio-tiempo está relacionado con el tensor de curvatura o tensor de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$. El tensor $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ se define a partir de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\mu} + g_{\lambda\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\lambda}), \quad (\text{A.1})$$

y se obtiene

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\rho}\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

este tensor también se lo puede definir en términos del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y de sus primeras y segundas derivadas, es decir,

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\alpha\nu} &= g_{\beta\alpha}R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \\ R_{\beta\mu\alpha\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\partial_{\beta}g_{\mu\alpha} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}g_{\beta\alpha} + \partial_{\alpha}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

El tensor de Riemann expresa una solución para la medición de la curvatura de una variedad en cualquier punto, a partir de la diferenciación covariante [15]. Si la variedad es una región plana $\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} = 0$ y sus derivadas son 0, entonces se tiene $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0$.

Se realiza una contracción en el primer y último índice del tensor de curvatura para obtener un nuevo tensor no-nulo de rango 2, que se lo llama Tensor de Ricci [15], cuyas componentes covariantes son

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

La contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico nos da una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad y se lo conoce como el escalar de curvatura [15]

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Las derivadas covariantes del tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obedecen una relación para obtener el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

que corresponde al lado izquierdo de la ecuación 1.6.

Apéndice B

Espacios (anti)de Sitter como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

El espacio (anti) de Sitter tiene especial relevancia en el estudio teórico de nuestro Universo. En este apéndice se presenta una breve descripción del espacio (anti) de Sitter en 4 dimensiones, en particular nos interesa como solución a las ecuaciones de campo de Einstein. Además, las métricas cuyo límite asintótico es anti de Sitter son de gran importancia en el marco de la conjetura AdS/CFT, en cambio las métricas con límite asintótico de Sitter son usadas en cosmología para describir el espacio tiempo en el que vivimos.

Consideremos a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica Λ :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Además, tomemos como ansatz la siguiente métrica estática y esféricamente simétrica (ponemos $c=1$),

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{a(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.2})$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Usando la métrica (B.2) se encuentran los símbolos de Christoffel distintos de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} \nu'(r) & \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} a'(r) \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \nu'(r) e^{\nu(r)-a(r)} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \sin^2 \theta e^{-a(r)} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-a(r)} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot \theta, \\ \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{1}{r} & & \end{aligned}$$

El escalar de Ricci para la métrica (B.2) viene dado por

$$R = -\nu''(r)e^{-a(r)} - \frac{1}{2}\nu'(r)^2e^{-a(r)} + \frac{1}{2}a'(r)\nu'(r)e^{-a(r)} + \frac{2}{r^2} - \frac{2e^{-a(r)}}{r^2} + \frac{2}{r}a'(r)e^{-a(r)} - \frac{2}{r}\nu'(r)e^{-a(r)}.$$

Finalmente, se obtiene las componentes del tensor de Einstein,

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{\nu(r)} \frac{d}{dr} \left(r - r e^{-a(r)} \right); \quad (\text{B.3})$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} \left(1 + r\nu'(r) - e^{a(r)} \right); \quad (\text{B.4})$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-a(r)} \frac{1}{2} \left(\nu''(r) - \frac{1}{r}a'(r) + \frac{1}{r}\nu'(r) + \frac{1}{2}\lambda^2\nu'(r)^2 - \frac{1}{2}a'(r)\nu'(r) \right); \quad (\text{B.5})$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}. \quad (\text{B.6})$$

El sistema de ecuaciones B.1 se reduce a tres ecuaciones con dos incógnitas. Para resolver este sistema de ecuaciones se considera únicamente las componentes del tensor de Einstein dadas por las expresiones B.3 y B.4 [36]. Por lo tanto, de la ecuación B.1 se tiene,

$$\frac{1}{r^2} e^{\nu(r)} \frac{d}{dr} \left(r - r e^{-a(r)} \right) - \Lambda e^{\nu(r)} = 0; \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{1}{r^2} \left(1 + r\nu'(r) - e^{a(r)} \right) + \Lambda e^{a(r)} = 0. \quad (\text{B.8})$$

La ecuación B.7 tiene como solución

$$e^{-a(r)} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (\text{B.9})$$

donde $2M$ es una constante de integración. Usando la ecuación se obtiene que

$$e^{a(r)} e^{\lambda\nu(r)} = 1 \quad (\text{B.10})$$

Esto implica que la solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con la constante cosmológica es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{B.11})$$

La métrica B.11 es conocida como la métrica de Schwarzschild (anti)de Sitter. Si $\Lambda = 0$ se recupera la métrica de Schwarzschild, ahora, si $M = 0$ se obtiene la solución (anti)de Sitter,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) dt^2 + \left(1 + \frac{\Lambda}{3}r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2; \quad (\text{B.12})$$

Hay que notar que la solución B.12 tiene un horizonte de sucesos cosmológico en $r = (3/\Lambda)^{1/2}$. La métrica B.12 es un espacio asintóticamente (anti)de Sitter.

Las componentes del tensor de Ricci para la métrica B.12 son

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \Lambda \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} \right); \\ R_{rr} &= \frac{\Lambda}{3 - \Lambda r^2}; \\ R_{\theta\theta} &= \Lambda r^2; \\ R_{\phi\phi} &= \Lambda r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

El escalar de curvatura es

$$R = 4\Lambda. \quad (\text{B.13})$$

La ecuación muestra una de las propiedades del espacio (anti) de Sitter, la curvatura constante. Además, el tensor de Riemann estará completamente determinado por R , que será constante en toda la variedad; lo cual se puede demostrar por la condición, así, el espacio (anti) de Sitter satisface

$$R_{abcd} = \frac{1}{12} R(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (\text{B.14})$$

El espacio (anti) de Sitter es una variedad Lorentziana maximalmente simétrica, i.e. es tanto homogénea como isotrópa. Estos espacios-tiempo son homogéneos y son soluciones a las ecuaciones de campo en el vacío con $\Lambda = 1/4 R$, aunque también se pueden considerar como soluciones a las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto con una densidad y presión constante de $R/32\pi$ y $-R/32\pi$, respectivamente [36].

Cuando $\Lambda = 0$ se recupera el espacio-tiempo de Minkowski. El espacio con $\Lambda > 0$ es el espacio-tiempo de Sitter que se representa como un hiperboloide

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = a^2, \quad \text{donde } a = \sqrt{3/\Lambda}, \quad (\text{B.15})$$

el cual, cuando se embebe en un espacio plano presenta la siguiente métrica

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2. \quad (\text{B.16})$$

El hiperboloide esta cubierto por las coordenadas (t, χ, θ, ϕ) , donde la sección espacial a un tiempo fijo t son esferas de curvatura constante positiva. Sus geodésicas normales son líneas que se contraen monótonamente hasta alcanzar una separación espacial mínima y luego vuelven a expandirse hacia el infinito [37].

Análogamente, el espacio con $\Lambda < 0$ es llamado espacio anti-de Sitter, y puede ser representado como un hiperboloide

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = -a^2, \quad \text{donde } a = \sqrt{-3/\Lambda}, \quad (\text{B.17})$$

que al ser embebido en un espacio plano presenta la siguiente métrica

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2. \quad (\text{B.18})$$

El hiperboloide está cubierto por las coordenadas (T, r, θ, ϕ) , donde cualquier sección espacial a T constante tiene una curvatura negativa. El espacio anti-de Sitter está cubierto por las superficies que no tienen geodésicas normales y, además, no contiene ninguna línea temporal cerrada [37].

Hay que notar que las secciones espaciales de la métrica B.11 corresponden a las secciones espaciales de la métrica (anti)de Sitter. En el presente trabajo se ha estudiado soluciones de agujeros de gusano con secciones espaciales (anti)de Sitter, donde la parte espacial de la métrica se corresponderá con la parte espacial de la métrica de Sitter cuando $\Lambda < 0$ y con anti-de Sitter cuando $\Lambda > 0$.

Una de las características de los espacios (anti)de Sitter es el hecho de que tienen un límite tipo tiempo en el espacio y un límite nulo en el infinito. Por lo tanto, el problema de Cauchy no se define correctamente, a menos que se impongan condiciones de contorno apropiadas [36, 37]. La existencia del límite tipo tiempo en el futuro infinito es de particular importancia para simulaciones numéricas. Teniendo en cuenta este hecho, algunos autores han estudiado el caso de la formación de agujeros negros antes de la primera reflexión con un comportamiento crítico; básicamente, la evolución se acerca a una solución universal que presenta un comportamiento similar a los fenómenos observados en el colapso gravitacional [25].

Los espacios asintóticamente (anti)de Sitter presentan aplicaciones en estudios matemáticos, investigaciones teóricas en relatividad general, teoría cuántica de campos y teoría de cuerdas; además, sus aplicaciones se extienden hasta cosmología contemporánea inflacionaria y de materia oscura, modelando naturalmente la expansión acelerada del universo, tanto en su pasado como en su futuro distante. Esta notable cantidad de aplicaciones en diversas ramas de investigación se debe claramente al hecho de que el espacio-tiempo (anti)de Sitter es altamente simétrico y simple, aunque no es trivial. [25].

Apéndice C

Integración Numérica

Datos : Superficie embebida z' ; $a, r_o, r_1, \Lambda \in \mathbb{R}$.

Salida : z .

Variables: h_i con $i = 1, 2, 3$; valores de los posibles intervalos donde se satisface la coordenada radial r .

$k=0$;

$r_1=1$;

$f(r, a, r_o, \Lambda) = MND(z' = g[r, a, r_o, \Lambda])$; //Correspondiente a la aproximación numérica de la función diferencial z' respecto a los puntos inicial y final.

while $r_1 < r < h_i$ **do**

$z = f(r, a, r_o, \Lambda)$; //Toma el valor de la condición inicial para la solución numérica y evalúa hasta h_i .

$k++$;

$q(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$; //Nodos de interpolación.

$MDI = f(r, a, r_o, \Lambda)$ //Función de interpolación.

Algoritmo 1: INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA ENCONTRAR LA FUNCIÓN DE EMBEBIMIENTO