ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS FINITOS DE VARIEDADES TOPOLÓGICAS DE DIMENSIÓN DOS MEDIANTE GRAFOS DIRIGIDOS

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ROBERTO CARLOS TORRES RIVERA
roberto.torres@epn.edu.ec

Director: MMATH. DAVID EMMANUEL PAZMIÑO PULLAS
david.pazmino@epn.edu.ec

QUITO, AGOSTO 2018

DECLARACIÓN

Yo, ROBERTO CARLOS TORRES RIVERA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Roberto Carlos Torres Rivera

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por ROBERTO CARLOS TORRES RIVERA, bajo mi supervisión.

MMath. David Emmanuel Pazmiño Pullas
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mi madre Inés, quien es el pilar en el que me sostengo y es mi apoyo incondicional. A mi padre Oswaldo, quien es mi ejemplo e inspiración. Sus enseñanzas y consejos han guiado mi vida y me han llevado a la consecución de este sueño. A mis hermanos José, Oswaldo y Diego, quienes han estado siempre para mi y han apoyado todos los proyectos que he emprendido.

A Karen, quien ha estado presente desde el primer día que inicie este sueño de ser matemático, gracias por estar siempre junto a mi.

A mis hermanos de otra madre Jorge, Paúl, Leo, Giovanni y Cristian, por estar siempre conmigo en las buenas y en las malas, son amigos de toda la vida.

A David Pazmiño, por su paciencia y apoyo a lo largo de toda mi carrera, principalmente en el desarrollo de este proyecto. Además de ser la persona que me indujo en el mundo de la topología.

A mis compañeros, Leonardo, Carlos y Pablo, quienes fueron las primeras personas con quienes compartí los resultados de esta tesis y me brindaron sus valiosos consejos para el mejor desarrollo de la misma.

A los grandes profesores Marco Calahorrano, Paúl Acevedo, Luis Miguel Torres y Juan Carlos Trujillo, de quienes he tenido el gusto de aprender sus enseñanzas y recibir sus consejos, quienes no sólo son excelentes matemáticos sino personas.

A las autoridades de la Escuela Politécnica Nacional, Ing. Jaime Calderón, Mat. Ruth Cueva y Dr. Luis Lascano, por todo el apoyo que han dado a los proyectos que he dirigido en mi etapa de representante estudiantil.

A mis buenos amigos que conocí en mi ultima etapa como representante estudiantil en Fepon, Carlos, Tefy, Gabo, Emi, Paúl, Jeff, Alex, gato, Pau, Shir, Tafur, Lorraine, Jesús, etc. Sigan adelante trabajando siempre por los estudiantes.

DEDICATORIA

A todas las personas que me acompañan desde el cielo, en especial a mi primo Diego,
"hermano mio sólo resta decirte que jamás te olvidaré"

Índice general

Resumen **1**

Abstract **2**

1. Preliminares de Topología General **3**

2. Espacios Topológicos Finitos y Posets **15**

2.1. Definiciones Básicas 15

2.2. Morfismos entre posets 21

3. Elementos de Topología Algebraica **23**

3.1. Definiciones Básicas 23

3.2. Grupo Fundamental 29

3.3. Cálculo del Grupo Fundamental 32

4. Topología Algebraica en Posets Finitos **36**

4.1. Definiciones Básicas 36

4.2. Tipo Homotópico 39

4.3. Tipo Homotópico Débil 44

4.4. Modelos Finitos Minimales 50

4.4.1. Operaciones en Posets 51

4.5. Cálculo de π_1 54

5. Modelos Finitos Minimales usando digrafos **57**

5.1. Definiciones Básicas 57

5.2. Modelos Finitos Minimales 60

5.3. Operaciones en digrafos 62
5.4. Núcleo de un digrafo 66
5.4.1. Definiciones Básicas 66
5.5. Cálculo de π_1 70

Bibliografía **77**

Índice de figuras

1.1. Construcción de S^1 a partir de I 8
1.2. Construcción del cilindro a partir de I^2 9
1.3. Construcción del toro a partir de I^2 9
1.4. Construcción de la Banda de Möbius a partir de I^2 10
1.5. Construcción de la Botella de Klein a partir de I^2 10
1.6. Construcción de la esfera a partir de D^1 11
1.7. representación plana de $\mathbb{RP}^2$ 11

4.1. Espacio F 41
4.3. Algoritmo 1 aplicado a F 42
4.4. Algoritmo 1 aplicado a Y 43
4.5. Realización geométrica del poset del ejemplo anterior 46
4.7. Modelo finito de I 51
4.8. Modelo finito de $S^1 \times I$ 52
4.9. Modelo finito de $S^1 \times S^1$ 52
4.10. Modelo finito de $C(S^1)$ 53
4.11. Modelo finito de S^2 54
4.12. Cálculo del grupo fundamental del modelo finito de S^1 55
4.13. Cálculo del grupo fundamental de S^2 56

5.2. Subgrafo generado $< \{1,3,5,4\} >$ 58
5.3. Representación gráfica de F. 59
5.7. Modelo finito para S^1 62
5.8. Modelo finito de $S^1 \times I$. 63
5.9. Modelo finito de $S^1 \times S^1$. 63

5.10. Modelo finito de $C(S^1)$. 64
5.11. Modelo finito de S^2. 65
5.12. modelo finito minimal Botella de Klein 66
5.13. Algoritmo 2 aplicado a A. 68
5.14. G 69
5.15. Algoritmo 2 aplicado a G. 69
5.16. Cálculo de $\pi_1(S)$. 71
5.17. Cálculo de $\pi_1(H)$. 71
5.18. Cálculo de $\pi_1(G)$. 72

Resumen

Veremos la equivalencia que tienen los espacios finitos preordenados (posets) con un espacio topológico T_0 finito. Usaremos esta equivalencia para definir conceptos topológicos en los posets. Aprovecharemos la estructura combinatoria de un conjunto preordenado, para encontrar operaciones análogas a las definidas en variedades topológicas. Así mismo, definiremos equivalencias homotópicas entre espacios finitos y encontraremos ciertos puntos *beat points* que al elimarlos de nuestro espacio finito, estas nuevas estructuras libres de *beat points* preservan la homotopía del espacio original. Haciendo uso del espacio clasificador $K(X)$ de un espacio finito, encontraremos una equivalencia entre X y una variedad topológica M^n. Finalmente, generalizaremos algunas ideas introducidas para posets en estructuras binarias con una relación únicamente reflexiva.

Abstract

We will define the equivalence between finite preordered sets (posets) and finite T_0 topological spaces. We will use this equivalence to define topological concepts on posets and use the combinatorial structure of the poset to find analogous operations of the ones defined for manifolds. Likewise, we will define homotopy equivalences between finite spaces and we find certain points *beat points* such that when we remove then from our original space it preserves the homotopy of the original space. By using the classifier space $K(X)$ of a finite space, we find a equivalence between X and a manifold M^n. Finally, we find a generalization of some ideas intruduced for posets on binary reflexive structures.

Capítulo 1

Preliminares de Topología General

En el presente capitulo recordaremos los conceptos fundamentales de topología general y algunos de sus resultados más importantes.

DEFINICIÓN 1.1 (Espacio Topológico)**.** *Para un conjunto no vacío X, una topología sobre X es $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. *Dada una familia $\{A_\alpha \in \mathcal{T} : \alpha \in \Gamma\}$, entonces*
$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \in \mathcal{T}.$$
3. *Dados $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, entonces*
$$A_1 \cap A_2 \ \in \mathcal{T}.$$

El par $(X, \mathcal{T})$ es llamado espacio topológico y los conjuntos $A \in \mathcal{T}$ se los denomina ***abiertos*** *de X.*

OBSERVACIÓN. La Propiedad 3 se puede extender por inducción para una familia $A_1, A_2, \cdots, A_n$; es decir, dados $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{T}$, se tiene que
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$
para $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICIÓN 1.2. *(Conjunto Cerrado) Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$, el conjunto A se dice que es* ***cerrado*** *si*
$$A^C \in \mathcal{T}_x.$$

Así, por medio de las propiedades del complemento de un conjunto, podemos definir todos los conceptos asociados a un espacio topológico a través de los conjuntos cerrados.

Para introducir una topología en un conjunto, no siempre es necesario describir todos sus conjuntos abiertos; en lugar de ello, podemos hacerlo a tráves de ciertos conjuntos especiales en la topología.

DEFINICIÓN 1.3 (Bases). *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$ si para todo $A \in \mathcal{T}$ se tiene que*

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

OBSERVACIÓN.

1. Los conjuntos $B \in \mathcal{B}$ son llamados **abiertos básicos** de la topología $\mathcal{T}$.
2. Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, diremos que $\mathcal{B}$ genera la topología $\mathcal{T}$, o que $\mathcal{T}$ es la topología generada por $\mathcal{B}$.

PROPOSICIÓN 1.1 (Caracterización de Base). *Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. La Familia $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y solo si:*

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$; *y*
2. *para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que:*

$$x \in B \subset B_1 \cap B_2$$

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [5, Cap.1].

DEFINICIÓN 1.4 (Vecindad de un punto). *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$ un elemento del espacio, una vecindad de x es un conjunto V_x tal que*

$$\exists U \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U; \text{ y}$$

$$U \subset V_x.$$

OBSERVACIÓN.

1. El conjunto V_x no es necesariamente abierto. Si V_x una vecindad de x es un conjunto abierto; llamaremos a V_x una **vecindad abierta**.
2. De ahora en adelante, haremos uso únicamente de vecindades abiertas cuando nos refiramos a vecindad.

Uno de los conceptos más importantes en la Topología es el de la **continuidad de funciones** entre espacios topológicos; ya que este nos permite definir un morfismo entre espacios.

DEFINICIÓN 1.5. *(Continuidad de Funciones) Sean $(X, \mathcal{T}_x)$ e $(Y, \mathcal{T}_y)$ dos espacios topológicos, la función $f : X \to Y$ es continua si para todo $U \in \mathcal{T}_y$, se tiene que:*

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_x.$$

Es decir, f es continua si la imagen inversa de los conjuntos abiertos de Y son abiertos en X

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean $(X, \mathcal{T}_x), (Y, \mathcal{T}_y), (Z, \mathcal{T}_z)$ espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces*

$$(g \circ f) : X \to Z$$

es una función continua.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{T}_z$; debemos mostrar que

$$(g \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T}_x.$$

Como $A \in \mathcal{T}_z$, por continuidad de g se tiene que

$$g^{-1}(A) \in T_y.$$

Luego por continuidad de f, tenemos que

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_x.$$

Se tiene también que

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_x$$

□

TEOREMA 1.3. *Sean $(X, \mathcal{T}_x), (Y, \mathcal{T}_y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}_y$, para cualquier $B \in \mathcal{B}$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_x$.*
3. *para todo $A \subset X$*
$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

4. *para todo* $B \subset Y$
$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

La demostración del Teorema 1.3 puede ser encontrada en [5, Cap.2].

DEFINICIÓN 1.6. *(Función abierta) Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios topológicos, la función* f *es* ***abierta*** *si para todo* A *abierto de* X*, se tiene que*

$$f(A) \text{ es abierto de } Y.$$

DEFINICIÓN 1.7. *(Función cerrada) Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios topológicos, la función* f *es* ***cerrada*** *si para todo* A *cerrado de* X*, se tiene que*

$$f(A) \text{ es cerrado de } Y.$$

Por medio de la continuidad de funciones, podemos hacer distinción entre distintos espacios topológicos; para ello, haremos uso del siguiente concepto.

DEFINICIÓN 1.8. *(Homeomorfismo) Sean* $(X, \mathcal{T}_x)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_y)$ *dos espacios topológicos, la función* $f : X \to Y$ *es un* ***homeomorfismo*** *si:*

- f *es continua,*
- f *es biyectiva,*
- f^{-1} *es continua.*

Si existe un homeomorfismo entre X *e* Y*, se dice que los espacios son homeomorfos y se denotará*
$$X \cong Y$$

El homeomorfismo entre espacios topológicos induce una relación de equivalencia, por lo tanto, dos espacios topológicos homeomorfos tienen las mismas propiedades topológicas, tales como compacidad, conexidad, conexidad por caminos, separabilidad, etc.

TEOREMA 1.4. *Sea* $f : X \to Y$ *una función biyectiva. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. f *es un homeomorfismo.*
2. f *es continua y abierta.*
3. f *es continua y cerrada.*
4. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$*, para todo* $A \subset X$*.*

La demostración del Teorema 1.4 puede ser encontrada en [5, Cap.3].

DEFINICIÓN 1.9 (Homeomorfismo local)**.** *Sea $f : X \to Y$, f es un* ***homeomorfismo local*** *si para todo $x \in X$ existe V_x vecindad de x tal que $f(V_x) = U$ es abierto en Y y $f|_{V_x} : V_x \to U$ es un homeomorfismo.*

PROPOSICIÓN 1.5. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f : X \to Y$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $V_x \subset X$ una vecindad de x. Se tiene que $f(V_x) = U \in \mathcal{T}_y$ ya que f es un homeomorfismo.

Debemos mostrar ahora que $f|_{V_x} : V_x \to U$ es un homeomorfismo. Luego como f es continua y $V_x \in \mathcal{T}_x$ se tiene que la función $f|_{V_x}$ es continua. De manera análoga al razonamiento anterior se muestra que $f^{-1}|_U$ es continua. □

Con la ayuda de técnicas que surgen de la geometría tales como "cortar y pegar", podemos construir superficies tales como el *Toro*, la *Banda Möbius*, la *Botella de Klein*, etc. La formalización de estas construcciones hace uso del concepto de topología cociente.

DEFINICIÓN 1.10 (Topología Cociente)**.** *Sean $(X, \mathcal{T}_x)$ un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Definimos en Y la siguiente topología:*

$$\mathcal{T}_f := \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_x\}.$$

$\mathcal{T}_f$ se denomina ***topología cociente*** *en Y inducida por f.*

A continuación presentaremos algunos ejemplos de espacios dotados de la topología cociente y su representación plana.

DEFINICIÓN 1.11 (Representación plana)**.** *Decimos que $(G, \mathcal{R})$ es* ***representación plana*** *de un espacio topológico X; donde $G \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia definida en G. Además se tiene que*

$$G/\mathcal{R} \text{ es homeomorfo a } X.$$

Gráficamente representaremos la relación de equivalencia por medio de flechas y puntos en la frontera de G.

EJEMPLO 1. Círculo (S^1)

Sea $I = [0, 1]$; si definimos la relación de equivalencia

$$\sim := \{(0, 1); (1, 0)\} \cup \{(x, x) : x \in (0, 1)\},$$

entonces la función

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \to & (I/\sim) \\ & x & \to & [x] \end{array}$$

donde $[x] = \{y \in I : y \sim x\}$, la función f es sobreyectiva y

$$[0,1]/\sim = \{[x] : x \in [0,1]\},$$

donde $[0] = [1] = \{0,1\}$, $[x] = \{x\}$ para $x \neq 0$, $x \neq 1$. El homeomorfismo entre $I/\sim$ y S^1 está definido de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc} g: & I/\sim & \to & S^1 \\ & [x] & \to & f([x]) = e^{i\pi x}. \end{array}$$

En la siguiente figura podemos observar de manera gráfica la construcción de S^1 a partir del intervalo I.

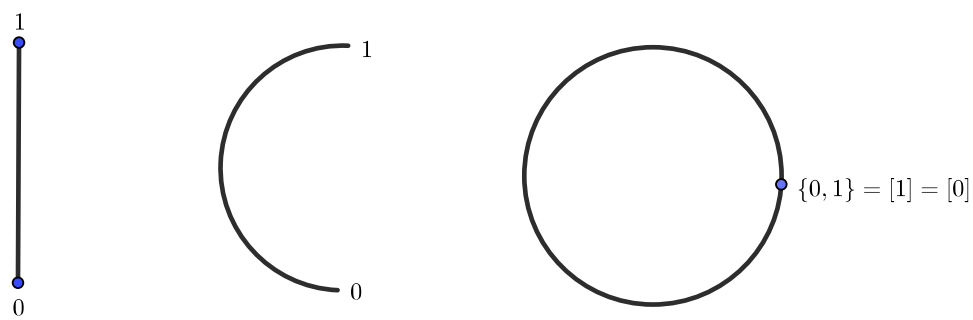


Figura 1.1: Construcción de S^1 a partir de I

La noción de clasificar un espacio por una relación de equivalencia se puede ver como la idea intuitiva de "cortar y pegar", en este caso pegamos los puntos 0 y 1 en I

EJEMPLO 2. Cilindro $S^1 \times I$
En $I \times I$ podemos definir las siguientes equivalencias

$$(0,t) \sim (1,t) \forall t \in I; \text{ y}$$

$$(s,t) \sim (s,t) \forall s \in (0,1) \forall t \in I.$$

$$\begin{array}{rccc} f: & I^2 & \longrightarrow & (I^2/\sim) \\ & (x,y) & \longrightarrow & [(x,y)] \end{array}$$

la función f es sobreyectiva.
De aquí en adelante, no se definira de manera explícita el homeomorfismo entre

los espacios cocientes y los espacios topológicos, en lugar de ello veremos como obtener un espacio topológico a partir de su representación plana; haciendo uso de las propiedades geométricas de ”cortar y pegar".

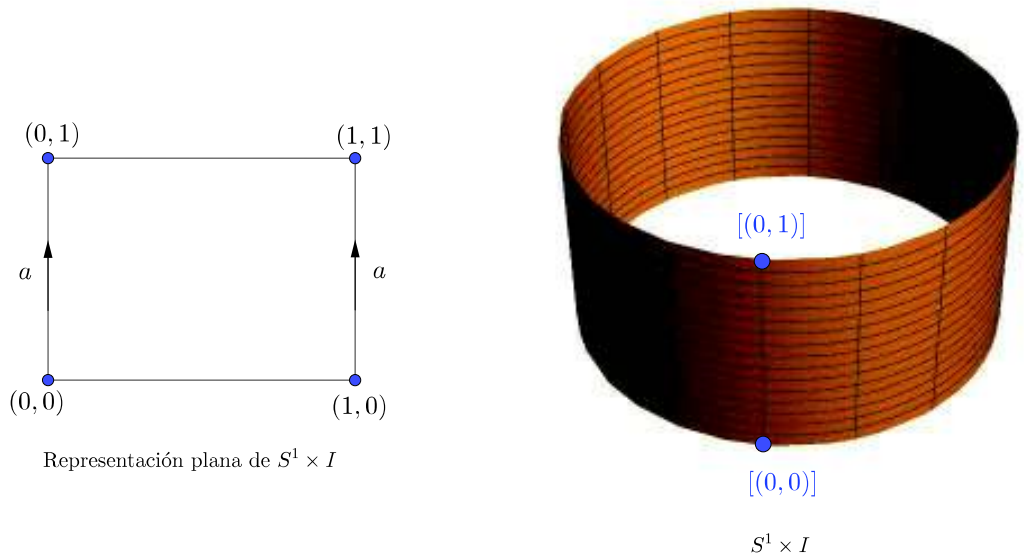


Figura 1.2: Construcción del cilindro a partir de I^2

En la Representación plana de nuestro espacio cociente las flechas nos indican en que sentido debemos "pegar" las aristas.

EJEMPLO 3. Toro $S^1 \times S^1$
Podemos construir el toro de manera similar a como lo hicimos para el cilindro en el Ejemplo 2, cocientando el cuadrado unidad I^2.

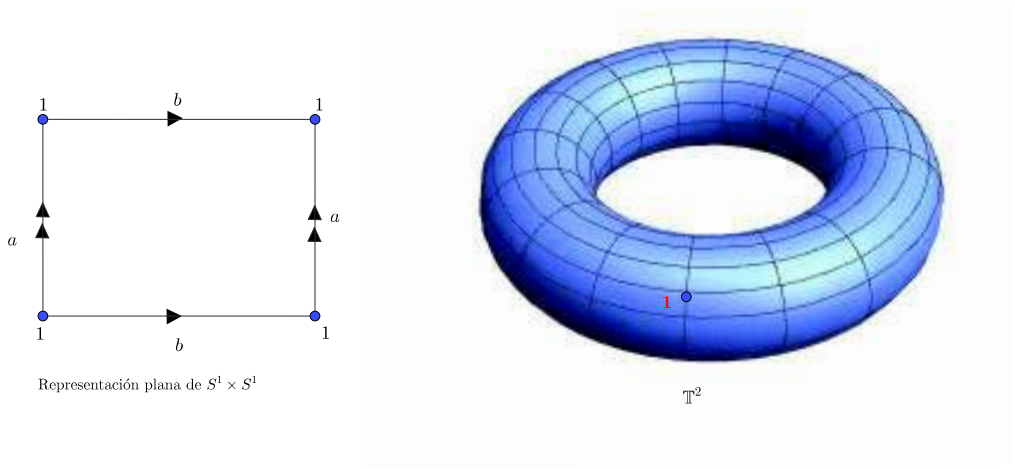


Figura 1.3: Construcción del toro a partir de I^2

EJEMPLO 4. Banda de Möbius $\mathbb{M}$

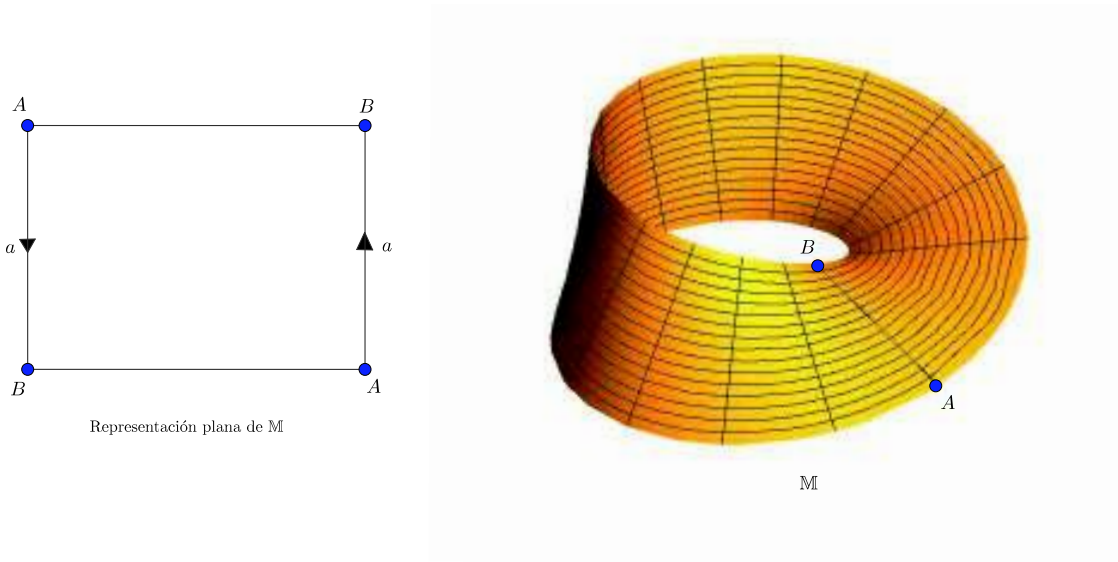


Figura 1.4: Construcción de la Banda de Möbius a partir de I^2

EJEMPLO 5. Botella de Klein $\mathbb{K}$

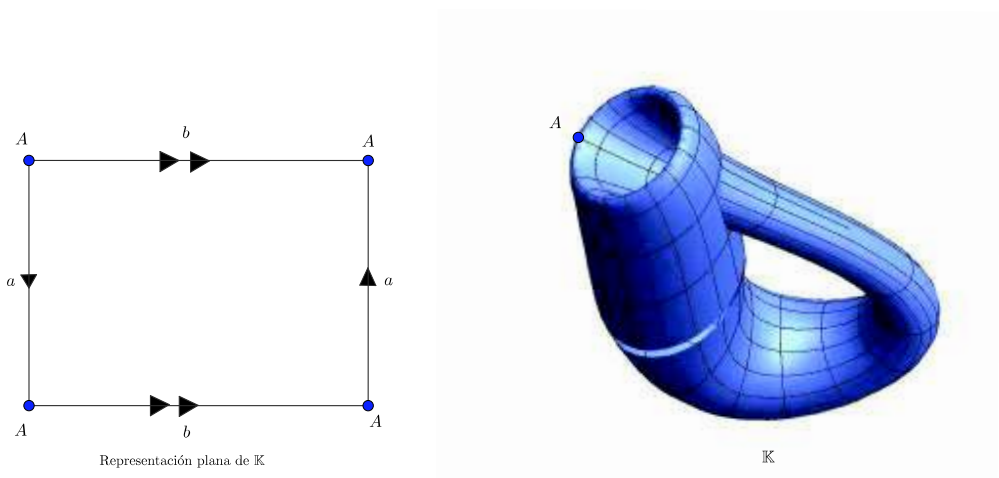
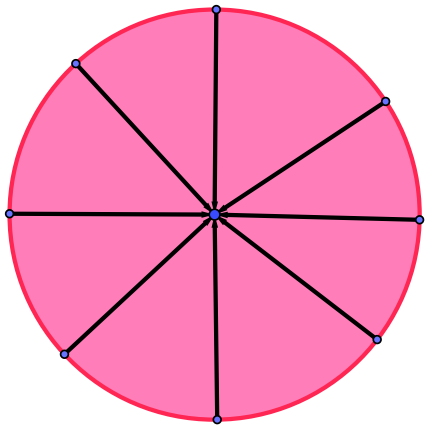


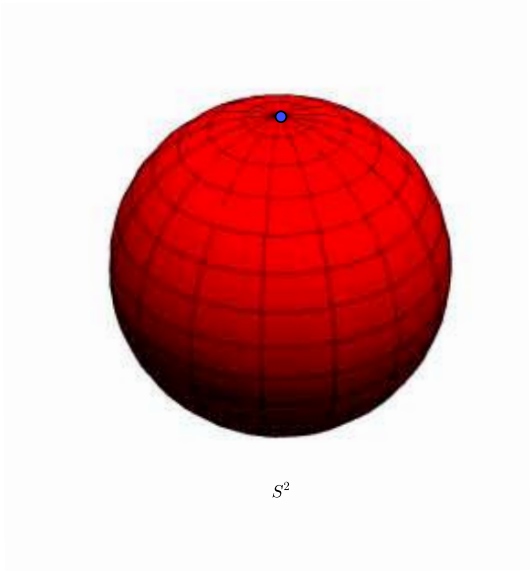
Figura 1.5: Construcción de la Botella de Klein a partir de I^2

EJEMPLO 6. Esfera S^2

Sea $D^1 := \{x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$ **el disco unidad**, podemos construir la esfera a partir del disco, "pegando" todos los puntos del borde entre sí.



representación plana de S^2



S^2

Figura 1.6: Construcción de la esfera a partir de D^1

EJEMPLO 7. Plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$
Para el plano proyectivo únicamente podemos mostrar su representación plana.

En general el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ se puede obtener al "pegar" los puntos antipodales en la n-esfera S^n.

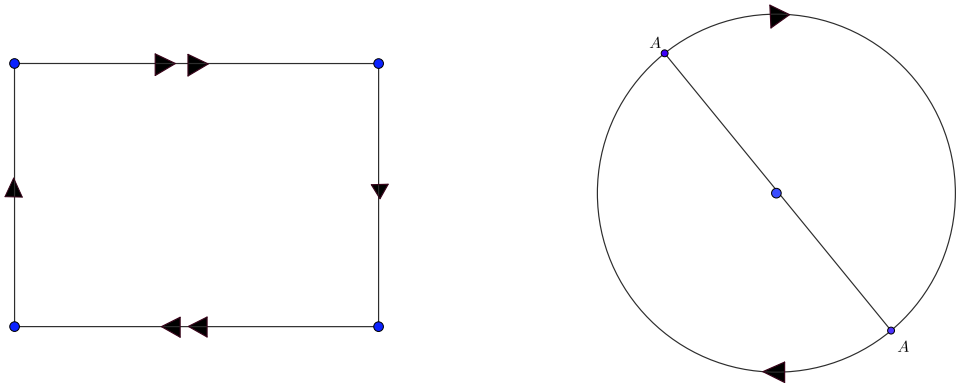


Figura 1.7: representación plana de $\mathbb{RP}^2$

Con ayuda del concepto de topología cociente podemos definir las siguientes operaciones.

DEFINICIÓN 1.12 (Cono de un espacio)**.** *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $I =$*

$[0,1]$. *El* ***cono*** *sobre X está definido de la siguiente manera:*

$$CX = (X \times I)/\sim$$

donde $(x,1) \sim (y,1)$ para todo $x, y \in X$

DEFINICIÓN 1.13 (Suspensión de un espacio)**.** *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $I = [0,1]$. La* ***suspensión*** *sobre X está definida de la siguiente manera:*

$$S(X) = (X \times I)/\sim$$

donde $(x,0) \sim (y,0)$ y $(x,1) \sim (y,1)$ para todo $x, y \in X$

Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ la n-esfera, se tiene que la suspensión de S^n es homeomorfa a una $n+1$ esfera, es decir

$$S^{n+1} \cong S(S^n).$$

Uno de los conceptos fundamentales en la topología es el de la conexidad. A continuación enunciaremos su definición y algunas de las propiedades más importantes.

DEFINICIÓN 1.14 (Topología discreta)**.** *Dado un conjunto X, se define la* ***topología discreta*** *en X de la siguiente manera*

$$\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X).$$

Donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X.

DEFINICIÓN 1.15 (Conexidad)**.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico no vacío, X se dice* ***conexo*** *si no existen $A, B \in \mathcal{T}$ tales que:*

$$X = A \cup B \text{ y } A \cap B = \emptyset.$$

TEOREMA 1.6. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es conexo.*
2. *Los únicos abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.*
3. *No existe una función $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{dis})$ continua y sobreyectiva.*

Demostración. Para demostrar la equivalencia de las proposiciones razonaremos por reducción al absurdo.

1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que existe $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$, $A \neq X$; abierto y cerrado, entonces

$$X = A \cup A^c.$$

Lo cual contradice la hipótesis de que X es conexo, por lo tanto, no existe $A \subset X$ abierto y cerrado.

2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que existe $f : (X, \mathcal{T}) \to ([0,1], \mathcal{T}_{dis})$ continua y sobreyectiva, entonces

$$X \neq f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$$

Luego $f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado. Lo cual contradice nuestra hipótesis inicial, de que los únicos abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.

3. $\Rightarrow$ 1. Razonaremos por la propiedad del contrarrecíproco.
Supongamos que X no es conexo, es decir, $X = A \cup B$ con $A, B \in \mathcal{T}$ disjuntos. Luego A y B son cerrados, definimos $\chi_A : X \to \{0,1\}$ de la siguiente manera

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \in B. \end{cases}$$

Se tiene que $\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \chi_A^{-1}(\{0,1\}) = X \in \mathcal{T}$.

$$\chi_A^{-1}(\{0\}) = B \in \mathcal{T}$$

$$\chi_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{T}$$

Por lo tanto, χ_A es continua y sobreyectiva.

$\square$

DEFINICIÓN 1.16 (Camino). *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Un **camino** en X es una función continua $\alpha : [a,b] \to X$.*
Se dice que α es un camino de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$.

OBSERVACIONES.

1. En la definición de camino se puede reemplazar $[a,b]$ por $I = [0,1]$.
2. Para todo $x \in X$ existe un camino de x a x (camino constante).
3. Si existe un camino α de x a y, entonces existe un camino de y a x.
4. Sean $\alpha, \beta : I \to X$ tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos su composición por:

$$\alpha * \beta : I \to X$$

$$t \to \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 1.17 (Conexidad por caminos)**.** *X se dice **conexo por caminos** o **arco-conexo** si $\forall x, y \in X$, $\exists \alpha$ camino de x a y.*

DEFINICIÓN 1.18 (Axiomas de separación)**.** *A continuación enunciamos algunos axiomas de separación que serán de utilidad a lo largo del presente trabajo.*

Espacio T_0: *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es T_0 o de **Kolmogórov** si para cualquier par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$.*

Espacio T_1: *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es T_1 o de **Fréchet** si para cualquier par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$ existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que.*

$$x \in A_1, x \notin A_2; y$$

$$y \in A_2, y \notin A_1.$$

Espacio T_2: *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es T_2 o de **Hausdorff** si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x \in A_1$, $y \in A_2$ tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.*

Capítulo 2

Espacios Topológicos Finitos y Posets

2.1. Definiciones Básicas

DEFINICIÓN 2.1 (Relación de preorden)**.** *Dado un conjunto S, se dice que el conjunto S está dotado de una relación de preorden si existe $\mathcal{R} \subset S \times S$, donde*

- *$\mathcal{R}$ es **reflexiva**; es decir,*

$$\forall x \in S \text{ se tiene que } (x, x) \in \mathcal{R}.$$

- *$\mathcal{R}$ es **transitiva**; es decir,*

$$\forall x, y, z \in S \text{ se tiene que}$$

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ y } (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}.$$

OBSERVACIÓN. Si $(x, y) \in \mathcal{R} \subset S \times S$, denotaremos como

$$x \leq y.$$

*Se dice que un par de elementos $x, y \in S$ son **comparables** si:*

$$x \leq y \text{ o } y \leq x.$$

EJEMPLO 8. El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ está dotado de la siguiente relación de preorden

$$x, y \in \mathbb{Z},$$

$$x \leq y \text{ ssi } x|y.$$

Donde $x|y$ significa que y es divisible para x.

DEFINICIÓN 2.2 (Conjunto Preordenado Finito)**.** *Sea S un conjunto finito, decimos*

que S es un conjunto ***preordenado finito*** *si S está dotado de una relación de preorden ($\leq$).*

DEFINICIÓN 2.3 (Espacio Topológico Finito)**.** *Un* ***espacio topológico finito*** *es un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, donde X es finito.*

DEFINICIÓN 2.4 (Conjunto abierto minimal U_x)**.** *Dado un espacio topológico finito $(X, \mathcal{T})$ se define para cada $x \in X$, el conjunto abierto minimal U_x de la siguiente manera:*

$$\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{T} | x \in A\},$$
$$U_x := \bigcap_{A \in \mathcal{A}_x} A.$$

El conjunto U_x es abierto ya que está definido como la intersección finita de conjuntos abiertos.

PROPOSICIÓN 2.1. *Los conjuntos U_x constituyen una base para el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.*

Demostración. Probaremos que el conjunto $U := \{U_x : x \in X\}$ constituye una base para $\mathcal{T}$.

1. Sea $x \in X$, se tiene que existe U_x tal que $x \in U_x$.
2. Sea x tal que $x \in U_y \cap U_z$, se tiene que existe U_x tal que $U_x \subset U_y \cap U_z$, ya que U_x es el abierto más pequeño que contiene a x.

Por lo tanto, $U = \{U_x : x \in X\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$. □

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $\mathcal{B}$ una base de $(X, \mathcal{T})$ entonces $U \subset \mathcal{B}$*

Demostración. Sea $x \in X$ debemos mostrar que para todo $U_x \in U$, se tiene que $U_x \in \mathcal{B}$.

Como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, el conjunto B es abierto; por lo tanto, $U_x \subset B$ al ser U_x el abierto más pequeño que contiene el elemento x; luego como U_x es abierto se sigue que $U_x \in \mathcal{B}$. □

PROPOSICIÓN 2.3. *Dado un espacio topológico finito X, se puede definir un preorden de la siguiente manera:*

$$x \leq y \text{ si } x \in U_y.$$

Demostración. Vamos a mostrar que la relación $\leq$ definida anteriormente es efectivamente una relación de preorden.

- Reflexividad: Sea $x \in X$, debemos mostrar que $x \leq x$.

  Se tiene por definición de U_x que $x \in U_x$, es decir, $x \leq x$.

- Transitividad: Dados $x, y \in X$, debemos mostrar que si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

  Por hipótesis, se tiene que $x \in U_y$ y $y \in U_z$, como $y \in U_y$ y al ser U_y el abierto más pequeño que contiene a y, entonces $U_y \subset U_z$, luego $x \in U_y \subset U_z$, por lo tanto, $x \in U_z$; es decir, $x \leq z$.

$\square$

PROPOSICIÓN 2.4. *Dado un conjunto preordenado finito X, se define una topología sobre X, que tiene como base el conjunto $U := \{U_x : x \in X\}$, donde*

$$U_x = \{y \in X : y \leq x\}.$$

Demostración. Vamos a mostrar que el conjunto U es una base.

1. Sea $x \in X$, se tiene que existe U_x tal que $x \in U_x$, ya que $x \leq x$.

2. Sea x tal que $x \in U_y \cap U_z$, debemos mostrar que existe U_x tal que

   $$x \in U_x \subset U_y \cap U_z.$$

   Como $x \in U_y \cap U_z$ se tiene que

   $$x \leq y \text{ y } x \leq z.$$

   Sea $t \in U_x$; entonces $t \leq x$, por transitividad de $\leq$ se tiene que

   $$t \leq y \text{ y } t \leq z,$$

   por lo tanto, $x \in U_x \subset U_y \cap U_z$.

$\square$

A través de 2.3 y 2.4, podemos asociar espacios topológicos finitos y conjuntos preordenados finitos, esto nos permite estudiar los espacios finitos combinando técnicas de la topología algebraica con la estructura combinatoria dotada por el preorden.

DEFINICIÓN 2.5 (Conjunto Parcialmente Ordenado). *Un conjunto $(X, \leq)$ se dice que es* ***parcialmente ordenado*** *o un* ***poset*** *si la relación $\leq$ cumple las siguientes propiedades:*

- *Reflexividad:*
$$\forall x \in X \text{ se tiene que } x \leq x.$$
- *Transtividad:*
$$\forall x, y, z \in X \text{ si } x \leq y \text{ y } y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$
- *Antisimetría:*
$$\forall x, y \in X \text{ si } x \leq y \text{ y } y \leq x \Rightarrow x = y.$$

Se dice que el conjunto $(X, \leq)$ es ***totalmente ordenado*** *si $\forall x, y \in X$ tal que $x \neq y$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$; es decir, todo par de elementos es comparable.*

DEFINICIÓN 2.6 (Cadena). *Sean $(X, \leq)$ un poset y $C \subset X$ se dice que C es una* ***cadena*** *si*
$$\forall x, y \in C \text{ se tiene que } x \leq y \text{ o } y \leq x.$$

Decimos que C tiene ***longitud*** *igual a $|C| - 1$.*

OBSERVACIÓN. Sea $C \subset X$, una cadena puede ser vista como una secuencia
$$\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset X$$
tales que $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$.

DEFINICIÓN 2.7 (Elemento maximal). *Un elemento x en un poset X se dice* ***maximal*** *si $y \geq x$ implica que $y = x$.*

DEFINICIÓN 2.8 (Máximo). *Un elemento x en un poset X se dice* ***máximo*** *si x es maximal y*
$$y \leq x \text{ para todo } y \in X.$$

Los conceptos de **elemento minimal** y **mínimo** se definen de manera dual a las anteriores.

PROPOSICIÓN 2.5. *Un poset finito X tiene máximo si y sólo si existe un único elemento maximal.*

PROPOSICIÓN 2.6. *Si un espacio finito $(X, \leq)$ es parcialmente ordenado, entonces el espacio topológico asociado a la relación $\leq$ es un espacio T_0.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, dividiremos la demostración en dos

casos.

1. Si x e y no son comparables, de aquí se tiene que existe el abierto U_x tal que $x \in U_x$ e $y \notin U_x$.

2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \leq y$, como $x \neq y$ y la relación es antisimétrica, se puede concluir que $y \nleq x$; por lo tanto, existe el abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $y \notin U_x$.

$\square$

OBSERVACIÓN. Podemos transformar una relación de preorden en una relación de orden clasificando el conjunto $(X, \leq_1)$ por medio de la siguiente relación de equivalencia

$$x \sim y \text{ ssi } x \leq y \text{ y } y \leq x.$$

El nuevo conjunto $(X/\sim, \leq_2)$ tiene la siguiente relación de orden

$$[x] \leq_2 [y] \text{ ssi } x \leq_1 y.$$

De aquí en adelante, trabajaremos únicamente con **posets finitos**

Una manera útil de representar gráficamente espacios finitos parcialmente ordenados o espacios T_0 es con ayuda del siguiente diagrama.

DEFINICIÓN 2.9 (Diagrama de Hasse)**.** *Dado un poset finito $(X, \leq)$, se define su **Diagrama de Hasse** como el grafo dirigido $G = (V, A)$, cuyo conjunto de vértices es $V := \{v \in X\}$ y cuyo conjunto de arcos está definido de la siguiente manera:*

$$A := \{(a, b) : a, b, c \in X; a \leq b \text{ y } \nexists c \text{ tal que } a \leq c \ \leq b\}.$$

OBSERVACIÓN. En otras palabras, al dibujar el diagrama de Hasse de un poset, evitamos dibujar lazos dados por la *reflexividad* de $\leq$, y aristas dadas por la *transitividad* de $\leq$.
En lugar de especificar la dirección de los arcos, se entederá que un arco (a, b) une los puntos a y b si a se encuentra debajo de b.

EJEMPLO 9. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ Graficaremos el diagrama de Hasse para representar nuestro conjunto X con dos diferentes relaciones de orden, el orden usual $\leq$ y el orden dado por la divisibilidad $\leq_d$.

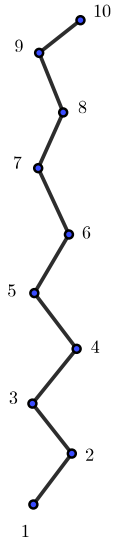


Diagrama de Hasse de$(X, \leq)$

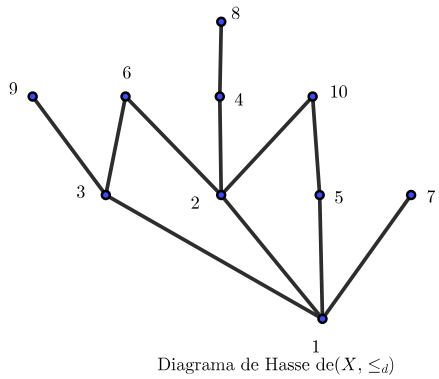


Diagrama de Hasse de$(X, \leq_d)$

Como se puede observar, la representación gráfica de un poset por medio de su diagrama de Hasse depende de la relación de orden asociada al conjunto.

DEFINICIÓN 2.10 (Conjunto hacia abajo)**.** *Sea U un subjunto del poset X; U es un* ***conjunto hacia abajo*** *si para todo $x \in U$ y $y \leq x$ se tiene que $y \in U$.*

Si x es un punto en un espacio finito X, F_x denotará la clausura del conjunto $\{x\}$ en X. Podemos caracterizar F_x de la siguiente manera:

$$F_x := \{y \in X : y \geq x\}.$$

Si un punto x pertenece a los espacios finitos X e Y, denotaremos a los conjuntos antes definidos de la siguiente manera U_x^X, U_x^Y, F_x^X y F_x^Y, así haremos distinción si los abiertos minimales o las clausuras son consideradas en X o en Y.

Se puede definir una topología a través de los conjuntos cerrados de un espacio finito X. El espacio X dotado de esta topología es llamado el **opuesto** de X (dual) y se denota por X^{op}. El orden de X^{op} es el orden inverso de X.

Si $x \in X$, entonces $U_x^{X^{op}} = F_x^X$.

OBSERVACIÓN. Sean $(X, \leq_1)$ y $(Y, \leq_2)$ dos posets, podemos definir una relación de orden en $X \times Y$ de la siguiente manera:

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq_1 x' \text{ y } y \leq_2 y'.$$

PROPOSICIÓN 2.7. *Sean X, Y espacios topológicos, una base para $X \times Y$ está dada*

por los productos $U \times V$ con U un abierto de X y V un abierto en Y.

Si X e Y son espacios topológicos finitos y $(x, y) \in X \times Y$, entonces $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$.

2.2. Morfismos entre posets

En esta sección veremos qué las funciones que preservan el orden en posets finitos y los morfismos entre espacios topológicos finitos son lo mismo. Los resultados de esta sección serán de gran utilidad para dar una descripción combinatoria de homotopía.

DEFINICIÓN 2.11 (Morfismo de orden)**.** *Sean $(X, \leq_X)$ y $(Y, \leq_Y)$ dos posets, se dice que la función $f : X \to Y$ es un **morfismo de orden** si*

$$x \leq_X x' \Rightarrow f(x) \leq_Y f(x') \; \forall x, x' \in X.$$

Es decir, si la función f conserva el orden.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios finitos, entonces f es continua si y sólo si f preserva el orden.*

Demostración.

- Supongamos que f es continua y $x \leq x'$, luego por la continuidad de f

  $$f^{-1}(U_{f(x')})$$

  es abierto en X, luego como $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$ y $x \in U_{x'} \subset f^{-1}(U_{f(x')})$, entonces se tiene que

  $$f(x) \leq f(x')$$

- Recíprocamente, supongamos que f preserva el orden; para probar la continuidad de f, usaremos el resultado del Teorema 1.3. Basta mostrar que $f^{-1}(U_y)$ es abierto en X para cualquier U_y abierto minimal de Y.

  Sea $x \in f^{-1}(U_y)$ y sea $x' \leq x$, luego $f(x') \leq f(x) \leq y$, entonces $x' \in f^{-1}(U_y)$. Por lo tanto $f^{-1}(U_y)$ es un conjunto hacia abajo.

□

En particular para espacios topológicos finitos, un *homeomorfismo* será una función f biyectiva tal que tanto f como f^{-1} preservan el orden.

Las propiedades topológicas de un espacio topológico finito, serán descritas con mayor detalle en el Capítulo 4, dado que serán usadas para definir los análogos de los resultados más importantes de topología algebraica que son desarrollados en el Capítulo 3.

Capítulo 3

Elementos de Topología Algebraica

En el presente capítulo recordaremos los conceptos fundamentales de topología algebraica y algunos de sus resultados más importantes, tales como la construcción del grupo fundamental y su cálculo. Estos resultados pueden ser vistos a más profundidad en [1].

3.1. Definiciones Básicas

Para la presente sección haremos uso de la Definición 1.16, que se enuncia a continuación.

DEFINICIÓN 1.16 Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y sea $[0,1]$. Un **camino** en X es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$.

El concepto de camino será de gran importancia a lo largo de este capítulo, ya que se dotará de una estructura de grupo a ciertas clases de equivalencia de caminos, a continuación enunciaremos algunas propiedades y operaciones de los caminos.

DEFINICIÓN 3.1 (Camino inverso). *Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ un camino desde $\alpha(0) = a$ hasta $\alpha(1) = b$, se define el **camino inverso** $\overline{\alpha}$ de la siguiente manera*

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t).$$

OBSERVACIÓN. $\overline{\alpha}(t)$ es un camino desde b hasta a.

DEFINICIÓN 3.2 (Producto de caminos). *Sean $\alpha : I \longrightarrow X$ y $\beta : I \longrightarrow X$ dos caminos,*

*si $\alpha(1) = \beta(0)$, se define el **producto** de α con β de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcl} \alpha * \beta : \ I & \to & X \\ t & \to & \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{array}$$

DEFINICIÓN 3.3 (Camino constante)**.** *Sea $x \in X$, se define el **camino constante** $\mathcal{C}_x$ de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_x : \ I & \longrightarrow & X \\ a & \longrightarrow & \mathcal{C}_x(a) = x. \end{array}$$

OBSERVACIÓN.

- El producto de caminos no es una operación asociativa, es decir

$$(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma).$$

- Sea α un camino desde a hasta b entonces:

$$\mathcal{C}_a * \alpha \neq \alpha,$$

$$\alpha * \mathcal{C}_b \neq \alpha,$$

$$\alpha * \overline{\alpha} \neq \mathcal{C}_a; \text{ y}$$

$$\overline{\alpha} * \alpha \neq \mathcal{C}_b.$$

DEFINICIÓN 3.4 (Lazo)**.** *Sea α un camino, si $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ se dice que α es un **lazo** con punto base x.*

DEFINICIÓN 3.5 (Homotopía de caminos)**.** *Sean $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ dos caminos tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$, se dice que α es **homotopicamente equivalente** a β si existe $H : I \times I \to$ una función continua tal que:*

$$H(t, 0) = \alpha(t) \qquad \forall t \in I,$$

$$H(t, 1) = \beta(t) \qquad \forall t \in I,$$

$$H(0, s) = \alpha(0) \qquad \forall s \in I; y$$

$$H(1, s) = \alpha(1) \qquad \forall s \in I.$$

H es una deformación continua de α_1 a α_2.

OBSERVACIONES.

- H genera una familia de caminos que conectan $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$.
- Denotaremos que α y β son homotópicamente equivalentes de la forma $\alpha \sim_H \beta$.

PROPOSICIÓN 3.1. *la relación definida por $\sim_H$ es una relación de equivalencia entre caminos.*

Demostración.

- Reflexividad:
  Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ un camino debemos encontrar una función continua
  $$H : I \times I \longrightarrow X.$$
  Sea $H(t,s) = \alpha(t) \forall s \in I$; como α es un camino la función $\alpha(t)$ es continua y se tiene que $H(t,s)$ es continua; por lo tanto $\alpha \sim_H \alpha$.
- Simetría:
  Sean $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ dos caminos tales que $\alpha \sim_H \beta$. Definimos $\overline{H}$ por $\overline{H}(t,s) = H(t, 1-s)$, se tiene que:
  $$\overline{H}(t,0) = H(t,1) = \beta(t),$$
  $$\overline{H}(t,1) = H(t,0) = \alpha(t),$$
  $$\overline{H}(0,s) = \alpha(0) = \beta(0); \text{ y}$$
  $$\overline{H}(1,s) = \alpha(1) = \beta(0).$$
  Además $\overline{H}$ es continua; por lo tanto $\beta \sim_{\overline{H}} \alpha$.
- Transitividad:
  Sean $\alpha, \beta, \gamma : I \longrightarrow X$ tres caminos tales que $\alpha \sim_{H_1} \beta$, $\beta \sim_{H_2} \gamma$. Definimos $H(t,s)$ por:
  $$H(t,s) = \begin{cases} H_1(t, 2s) & 0 \leq s \leq 0{,}5, \\ H_2(t, 2s-1) & 0{,}5 < s \leq 1. \end{cases}$$
  La función $H(t,s)$ es continua ya que $\lim\limits_{s \to 0{,}5^+} H(t,s) = H_1(t,1) = \beta(t)$ coincide con $\lim\limits_{s \to 0{,}5^-} H_2(t,0) = \beta(t)$ y las funciones $H_1(t,s), H_2(t,s), \beta(t)$ son continuas.
  Debemos mostrar ahora que $H(t,s)$ es una homotopía entre α y γ.
  $$H(t,0) = H_1(t,0) = \alpha(t),$$

$$H(t,1) = H_2(t,1) = \gamma(t),$$

$$H(0,s) = \alpha(0) = \gamma(0); \text{ y}$$

$$H(1,s) = \alpha(1) = \gamma(1).$$

Por lo tanto $\alpha \sim_H \gamma$.

□

PROPOSICIÓN 3.2. *Sean $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ caminos tales que $\alpha \sim_{H_1} \alpha_1$, $\beta \sim_{H_2} \beta_1$ y $\alpha(1) = \beta(0)$, entonces existe $H(t,s)$ tal que $\alpha * \beta \sim_H \alpha_1 * \beta_1$.*

Demostración. Definimos $H(t,s)$ por:

$$H(t,s) = \begin{cases} H_1(2t,s) & 0 \leq t \leq 0{,}5, \\ H_2(2t-1,s) & 0{,}5 < t \leq 1. \end{cases}$$

La función $H(t,s)$ es continua ya que $\lim\limits_{t \to 0{,}5^+} H(t,s) = H_1(1,s) = \alpha(1)$ coincide con $\lim\limits_{t \to 0{,}5^-} H(t,s) = H_2(0,s) = \beta(0)$; y las funciones H_1 y H_2 son continuas. Debemos mostrar ahora que $H(t,s)$ es una homotopía entre $\alpha * \beta$ y $\alpha_1 * \beta_1$.

$$H(t,0) = \begin{cases} H_1(2t,0) = \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 0{,}5, \\ H_2(2t-1,0) = \beta(2t-1) & 0{,}5 < t \leq 1. \end{cases} = \alpha * \beta.$$

$$H(t,1) = \begin{cases} H_1(2t,1) = \alpha_1(2t) & 0 \leq t \leq 0{,}5, \\ H_2(2t-1,1) = \beta_1(2t-1) & 0{,}5 < t \leq 1. \end{cases} = \alpha_1 * \beta_1.$$

$$H(0,s) = H_1(0,s) = \alpha(0).$$

$$H(1,s) = H_2(1,s) = \beta(1).$$

□

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean α,β y γ caminos tales que existe $\alpha * \beta * \gamma$, entonces*

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim_H \alpha * (\beta * \gamma).$$

Demostración. Sea $H : I \times I \to X$, definida de la siguiente manera:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4t}{1+s}\right) & 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{4}, \\ \beta(4t-1-s) & \dfrac{s+1}{4} < t \leq \dfrac{s+2}{4}, \\ \gamma\left(1 - \dfrac{4(1-t)}{2-s}\right) & \dfrac{s+2}{4} < t \leq 1. \end{cases}$$

La función $H(t,s)$ es continua ya que $\lim\limits_{t\to\frac{s+1}{4}^-} H(t,s) = \alpha(1)$ coincide con $\lim\limits_{t\to\frac{s+1}{4}^+} H(t,s) = \beta(0)$, $\lim\limits_{t\to\frac{s+2}{4}^-} H(t,s) = \beta(1)$ coincide con $\lim\limits_{t\to\frac{s+1}{4}^+} H(t,s) = \gamma(0)$, y las funciones α,β y γ son continuas.

Vamos a mostrar ahora que H es una homotopía entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$.

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha\,(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \beta(4t-1) & \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma\left(1 - \frac{4(1-t)}{2}\right) & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} = (\alpha * \beta) * \gamma.$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha\,(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(4t-2) & \frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{4}, \\ \gamma\,(1-4(1-t)) & \frac{3}{4} < t \leq 1. \end{cases} = \alpha * (\beta * \gamma).$$

$$H(0,s) = \alpha(0).$$

$$H(1,s) = \gamma(1).$$

□

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea α un camino desde x hasta y, entonces:*

1. $\alpha * \mathcal{C}_y \sim_H \alpha$,
2. $\mathcal{C}_x * \alpha \sim_H \alpha$,
3. $\alpha * \overline{\alpha} \sim_H \mathcal{C}_x$,
4. $\overline{\alpha} * \alpha \sim_H \mathcal{C}_y$.

Demostración. 1. Sea $H : I \times I \to$ definida de la siguiente manera:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{2t}{s+1}\right) & 0 \leq t \leq \dfrac{s+1}{2}, \\ y & \dfrac{s+1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

La función H es continua ya que $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}s^+} H(t,s) = \alpha(1)$ coincide con $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}s^-} H(t,s) = y$; y la función α es continua.

Vamos a mostrar ahora que la función H es una homotopía entre $\alpha * \mathcal{C}_y$ y α.

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha\,(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ y & \dfrac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} = \alpha * \mathcal{C}_y.$$

$$H(t,1) = \alpha(t),$$

$$H(0,s) = \alpha(0); \text{ y}$$

$$H(1,s) = \alpha(1) = y.$$

2. $\mathcal{C}_x * \alpha \sim_H \alpha$. La homotopía está dada por:

$$H(t,s) = \begin{cases} x & 0 \leq t < \dfrac{1-s}{2}, \\ \alpha\left(\dfrac{2t+s-1}{s+1}\right) & \dfrac{1-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   Se puede comprobar de manera sencilla que H es una homotopía con un razonamiento análogo al desarrollado en el ítem anterior.

3. $\alpha * \overline{\alpha} \sim_H \mathcal{C}_x$.
   Como la relación $\sim_H$ es una relación de equivalencia, por lo tanto simétrica, vamos a mostrar que $\mathcal{C}_x \sim_H \alpha * \overline{\alpha}$. Sea $H : I \times I \longrightarrow X$ la función definida por:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t < \dfrac{s}{2}, \\ \alpha(s) & \dfrac{s}{2} \leq t \leq 1 - \dfrac{s}{2}, \\ \overline{\alpha}(2t-1) & 1 - \dfrac{s}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

   La función $H(t,s)$ es continua ya que $\lim\limits_{t \to \frac{s}{2}^-} H(t,s) = \alpha(s)$ coincide con $\lim\limits_{t \to \frac{s}{2}^+} H(t,s) = \alpha(s)$, $\lim\limits_{t \to 1-\frac{s}{2}^-} H(t,s) = \alpha(s)$ coincide con $\lim\limits_{t \to 1-\frac{s}{2}^+} H(t,s) = \overline{\alpha}(1-s) = \alpha(s)$; y las función α es continua.

   Vamos a mostrar ahora que la función H es una homotopía entre $\mathcal{C}_x$ y $\alpha * \overline{\alpha}$

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t < 0, \\ \alpha(0) & 0 \leq t \leq 1, \\ \overline{\alpha}(2t-1) & 1 < t \leq 1. \end{cases} = \mathcal{C}_x.$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \overline{\alpha}(2t-1) & \dfrac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} = \alpha * \overline{\alpha}.$$

$$H(0,s) = \alpha(0) = x.$$

$$H(1,s) = \overline{\alpha}(1) = x.$$

4. $\overline{\alpha} * \alpha \sim_H \mathcal{C}_y$.

Razonaremos de manera análoga al ítem anterior, únicamente dejaremos expresada la función $H(t,s)$ que define la homotopía que buscamos.

$$H(t,s) = \begin{cases} \overline{\alpha}(2t) & 0 \leq t < \dfrac{s}{2}, \\ \overline{\alpha}(s) & \dfrac{s}{2} \leq t \leq 1 - \dfrac{s}{2}, \\ \alpha(2t-1) & 1 - \dfrac{s}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

□

3.2. Grupo Fundamental

Uno de los invariantes algebraicos que estudia la topología algebraica es el grupo fundamental; que se define por medio de clases de caminos, mediante una relación de equivalencia que será detallada más tarde.

DEFINICIÓN 3.6 (Clase de caminos)**.** *Sea α un camino desde x hasta y, definimos la **clase de caminos** o **clase de homotopía** por*

$$[\alpha]_H := \{\beta : \beta \sim_H \alpha\}.$$

OBSERVACIONES.

- La clase de equivalencia $[\alpha]_H$ reúne a todos los caminos que son homotópicamente equivalentes a α.
- Si no existe confusión denotaremos $[\alpha]_H$ por $[\alpha]$ o simplemente α.
- La clase de equivalencia $[\overline{\alpha}]$ será denotada por $[\alpha]^{-1}$ o α^{-1}.

DEFINICIÓN 3.7 (Producto de clases de caminos)**.** *Sean $[\alpha]$ y $[\beta]$ dos clases de caminos de x hasta y y de y a z respectivamente, se define el **producto de clases de caminos**, entre $[\alpha]$ y $[\beta]$ por:*

$$[\alpha] \cdot \beta] := [\alpha * \beta].$$

OBSERVACIÓN. No siempre se puede definir el producto entre clases de homotopía $[\alpha] \cdot [\beta]$, es necesario que $\alpha(1) = \beta(0)$.

PROPOSICIÓN 3.5. *el producto $(\cdot)$ de clases de caminos, cuando está definido, cumple las siguientes propiedades:*

1. *Asociatividad.*

$$([\alpha].[\beta]).[\gamma]) = [\alpha].([\beta].[\gamma]).$$

2. *Elemento neutro.*
   Sea $[\alpha]$ la clase de caminos tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, entonces:

$$[\alpha].[\mathcal{C}_y] = [\alpha],$$

$$[\mathcal{C}_x].[\alpha] = [\alpha].$$

3. *Elemento inverso.*
   Sea $[\alpha]$ la clase de caminos tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, entonces:

$$[\alpha].[\overline{\alpha}] = [\mathcal{C}_x],$$

$$[\overline{\alpha}].[\alpha] = [\mathcal{C}_y].$$

Demostración. El resultado de esta proposición se sigue de 3.3 y 3.4. □

Se puede observar que el conjunto de clases de caminos dotado de la operación *producto* $(.)$ cumple los axiomas de grupo, se puede encontrar la definición y los axiomas de grupo en [3][Cap. 2]. El único inconveniente es que el producto entre dos clases de caminos no siempre está definido.

DEFINICIÓN 3.8 (Grupo Fundamental)**.** *El conjunto $\{[\alpha]_H : \alpha$ es un lazo con punto base $x_0 \in X\}$ se denomina **grupo fundamental** de X con punto base x_0 y será denotado por $\pi_1(X, x_0)$.*

PROPOSICIÓN 3.6. *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.*

Demostración. Como trabajaremos con clases de homotopía de lazos, se tiene la condición $\alpha(1) = \beta(0) = x_0$, entonces el producto de clases de lazos con base x_0 siempre estará definido.

Luego de la Proposición 3.5, se sigue que el producto de clases de caminos cumple los axiomas de grupo. Por lo tanto $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo. □

TEOREMA 3.7. *Si X es conexo por caminos, entonces los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos para cualquier $x, y \in X$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \pi_1(X, x)$ y sea γ un camino de x a y. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} f_\gamma : & \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, y) \\ & \alpha & \longrightarrow & [\overline{\gamma}].[\alpha].[\gamma]. \end{array}$$

La función f_γ es un morfismo ya que:

$$\begin{aligned} f_\gamma(\alpha.\beta^{-1}) &= \gamma^{-1}.(\alpha.\beta^{-1}).\gamma \\ &= \gamma^{-1}.(\alpha.\gamma.\gamma^{-1}.\beta^{-1}).\gamma \\ &= (\gamma^{-1}.\alpha.\gamma).(\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\gamma) \\ &= f_\gamma(\alpha).f_\gamma(\beta^{-1}). \end{aligned}$$

Definimos el morfismo:

$$\begin{array}{rccc} f_{\gamma^{-1}}: & \pi_1(X,y) & \longrightarrow & \pi_1(X,x) \\ & \epsilon & \longrightarrow & [\gamma].[\epsilon].[\overline{\gamma}]. \end{array}$$

Entonces se tiene que:

$$f_{\gamma^{-1}}.f_\gamma = id_{\pi_1(X,x)},$$

$$f_\gamma.f_{\gamma^{-1}} = id_{\pi_1(X,y)}.$$

□

OBSERVACIONES.

- Si un espacio topológico X es conexo por caminos, su grupo fundamental no depende del punto base y será denotado simplemente por $\pi_1(X)$.
- El grupo fundamental de un espacio topológico X es también conocido como **primer grupo de homotopía**.
- El conjunto $\pi_0(X)$ de un espacio topológico X tiene la cardinalidad igual al número de componentes conexas por caminos del espacio X.
- De aquí en adelante consideraremos únicamente espacios topológicos conexos por caminos.

PROPOSICIÓN 3.8. *Sean X e Y dos espacios topológicos conexos por caminos, entonces*

$$\pi_1(X \times Y) \approx \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

La demostración de esta proposición puede ser encontrada en [7][Cap. 2].

EJEMPLO 10. Sea $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(\{x_0\}) = 1_\mathcal{G}$, con $1_\mathcal{G}$ el grupo trivial.

Demostración. El único lazo que existe para el espacio $\{x_0\}$ es el lazo constante $\mathcal{C}_{x_0}$, por lo tanto $\pi_1(\{x_0\}) = \{[\mathcal{C}_{x_0}]\} = 1_\mathcal{G}$. □

PROPOSICIÓN 3.9. *El grupo fundamental del circulo S^1 es igual a $\mathbb{Z}$; es decir,*

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

La demostración de esta proposición puede ser encontrada en [1][Sec. 1.1].

3.3. Cálculo del Grupo Fundamental

Una vez hemos definido el grupo fundamental de un espacio topológico es importante conocer resultados que nos ayudan a calcularlo. Así haremos de los resultados de la sección anterior para hallar el grupo fundamental de espacios topológicos más complejos.

DEFINICIÓN 3.9 (Homotopía de funciones)**.** *Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas, decimos que $H : X \times I \to Y$ es una homotopía entre f y g si:*

$$H \text{ es continua,}$$

$$H(x,0) = f(x) \quad \forall x \in X; \text{ y}$$

$$H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

OBSERVACIONES.

- Si existe $H(x,t)$ una homotopía entre f y g, diremos que f es **homotópicamente equivalente**, denotaremos $f \sim_H g$.
- $\sim_H$ es una relación de equivalencia.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función continua; y sean f y g caminos tales que $f \sim_H g$, entonces*

$$\varphi(f) \sim_H \varphi(g).$$

Demostración. Sea H la homotopía entre f y g, entonces $\varphi \circ H$ es una homotopía entre $\varphi(f)$ y $\varphi(g)$. □

Sea α la clase de homotopía de f, entonces denotaremos por $\varphi_*(\alpha)$ a la clase de homotopía de $\varphi(f)$. La función φ_* cumple las siguientes propiedades.

PROPIEDADES.

- si α y β son clases de caminos tales que existe $\alpha \cdot \beta$, entonces

$$\varphi_*(\alpha \cdot \beta) = \varphi_*(\alpha) \cdot \varphi_*(\beta).$$

- Para cualquier punto $x \in X$, se tiene que

$$\varphi_*(\mathcal{C}_x) = \mathcal{C}_{\varphi(x)}.$$

- $\varphi_*(\alpha^{-1}) = (\varphi_*\alpha)^{-1}$.

Sea $\psi : Y \longrightarrow Z$ una función continua, entonces se tiene las siguientes propiedades:

- $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$.
- $id_* = id$.

Gracias a estas propiedades se tiene que φ_* es un homomorfismo en caso de que trabajemos con lazos, llamaremos a φ_* el **homomorfismo inducido** por φ.

Se tiene que una función continua $\varphi : X \longrightarrow Y$ induce un homomorfismo $\varphi_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$; además si φ es un homeomorfismo, entonces φ_* es un isomorfismo de grupos.

DEFINICIÓN 3.10 (Retracción). *Sea $A \subset X$, se dice que A es una **retracción** de X si existe $r : X \longrightarrow A$, función continua tal que*

$$r|_A = id_A;$$

es decir, $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

PROPIEDADES.

1. Si A es retracción de B y B es retracción de C, entonces

$$A \text{ es retracción de } C.$$

2. Sean $A \subset X$ y Y espacios topológicos. $A \times Y$ es retracción de $X \times Y$ si y sólo si A es retracción de X.

PROPOSICIÓN 3.11. *Sea A una retracción de X, entonces el homomorfismo inducido $i_* : \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X)$ por la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es inyectivo.*

Demostración. Si $r : X \longrightarrow A$ es una retracción se tiene que $ri = id_A$, luego $r_*i_* = id_{\pi_1(A)}$; por lo tanto i_* es un homomorfismo inyectivo. □

DEFINICIÓN 3.11 (Retracto por Deformación). *Sea $A \subset X$, se dice que A es **retracto por deformación** de X si existe una retracción $r : X \longrightarrow A$ y una homotopía*

$$H : X \times I \longrightarrow X$$

tal que:
$H(x,0) = x$,
$H(x,1) = r(x)$; *y*
$H(a,t) = a, \ \ a \in A$.

TEOREMA 3.12. *Si A es retracto por deformación de X, entonces*

$$\pi_1(A) \approx \pi_1(X).$$

Demostración. Vamos a mostrar que la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo entre $\pi_1(a)$ y $\pi_1(X)$.

Se tiene que $r_* i_* = id_{\pi_1(A)}$, como A es retracto por deformación de X se tiene que $i \circ r \sim_H id_X$, por lo tanto

$$i_* r_* = id_{\pi_1(X)}.$$

Entonces se tiene que i_* es sobreyectiva; y como r es una retracción se tiene que i_* es inyectiva. Por lo tanto $i_* : \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X)$ es un isomorfismo de grupos. □

DEFINICIÓN 3.12 (Espacio Contractible)**.** *Un espacio topológico X se dice* ***contractible*** *si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ es retracto por deformación de X.*

TEOREMA 3.13. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un espacio topológico convexo, entonces X es contractible.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ definimos la siguiente homotopía:

$$\begin{array}{rccl} H: & X \times I & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \longrightarrow & H(x,t) = (1-t)x + tx_0, \end{array}$$

se tiene entonces que:

$$H(x,0) = x,$$

$$H(x,1) = x_0; \text{ y}$$

$$H(x_0,t) = x_0.$$

Por lo tanto $\{x_0\}$ es retracto por deformación de X.

□

COROLARIO 3.14. *Sea $D^n = \{x \in R^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$, entonces*

$$\pi_1(D^n) \approx 1_{\mathcal{G}}.$$

El siguiente resultado nos permite calcular el grupo fundamental de un espacio

topológico conociendo el grupo fundamental de dos subespacios conexos.

TEOREMA 3.15 (Teorema de Van Kampen)**.** *Sea X un espacio topológico, tal que $X = U_1 \cup U_2$, con U_1, U_2 subconjuntos abiertos y conexos por caminos además $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ es también abierto y conexo por caminos, entonces:*

$$\pi_1(X) = \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)/\pi_1(U_1 \cap U_2).$$

Demostración. Una demostración completa del teorema de Van Kampen puede ser encontrada en [7, Cap. 4]. □

Capítulo 4

Topología Algebraica en Posets Finitos

En el presente capítulo particularizaremos algunos de los resultados más importantes de la topología algebraica para los conjuntos parcialmente ordenados finitos y así aprovecharemos las propiedades combinatorias de los Posets.

4.1. Definiciones Básicas

Recordemos que en el Capítulo 2 hemos presentado algunas de las definiciones básicas de Posets y su relación con los espacios topológicos finitos. En esta sección presentaremos algunas definiciones que serán de utilidad para definir los conceptos más importantes de la topología algebraica tales como: *conexidad, homotopía, contracción, etc.*.

DEFINICIÓN 4.1 (Reja)**.** *Sea X un poset finito. Una sucesión $x_0, x_1, ..., x_n$ de puntos en X, es una* ***reja*** *en X si*

$$x_i \text{ y } x_{i+1} \text{ son comparables .}$$

Decimos que nuestra reja empieza en x_0 y termina en x_n.

DEFINICIÓN 4.2 (Conexo por orden)**.** *Un espacio X, se dice* ***conexo por orden*** *si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe una reja que empieza en x y termina en y.*

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean x, y dos puntos comparables en un espacio finito X, entonces existe un camino desde x hasta y en X.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \leq y$ y definimos:

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I & \longrightarrow & X \\ & t & \longrightarrow & \alpha(t) = \begin{cases} x & 0 \leq t < 1, \\ y & t = 1. \end{cases} \end{array}$$

□

Sea $U \subset X$ un abierto tal que $y \in U$, entonces también contiene a x. Por lo tanto $\alpha^{-1}(U)$ es uno de los siguientes conjuntos: $\emptyset, I$ o $[0,1)$, los cuales son abiertos en I; es decir, α es un camino de x a y.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea X un espacio finito, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *X es un espacio conexo.*
2. *X es un poset conexo por orden.*
3. *X es un espacio conexo por caminos.*

Demostración.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean $x, y \in X$. Como X es un poset conexo por orden, existe una reja $x, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y$. Por lo tanto $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2 * ... * \alpha_n$, con α_i el camino, dado por la Proposición 4.1, que une los puntos x_{i-1} y x_i, es un camino que une a los puntos x e y.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que X es conexo y sea $x \in X$; sea $A = \{y \in X : \text{ existe una reja de } x \text{ a } y\}$. Si se tienen $y \in A$ y $z \leq y$, entonces $z \in A$, por lo tanto, A es un conjunto hacia abajo y de manera análoga se tiene que A es un conjunto hacia arriba; por lo tanto A es abierto y cerrado, como X es conexo se puede concluir que $A = X$.

3) $\Rightarrow$ 1) se sigue de las definiciones.

□

DEFINICIÓN 4.3 (Orden puntual)**.** *Sean X e Y espacios finitos. Podemos definir en el espacio finito Y^X de las funciones continuas que van de X a Y el* ***orden puntual***

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X.$$

PROPOSICIÓN 4.3. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos funciones entre espacios finitos, entonces $f \sim g$ si y sólo si existe una reja $f, f_1, f_2, ..., f_{n-1}, g$.*

Demostración. Sabemos que $f \sim g$ si y sólo si existe un camino $\alpha : I \longrightarrow Y^X$ desde f hasta g. Por el Enunciado 2 de la Proposición 4.2, existe una reja $f, f_1, f_2, ..., f_{n-1}, g$ dada por el orden puntual. □

COROLARIO 4.4. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones entre espacios finitos, entonces $f \sim g$ si y sólo si $f^{op} \sim f^{op}$, con $f^{op} : X^{op} \longrightarrow Y^{op}$. En particular se tiene que*

$$X \sim Y \Leftrightarrow X^{op} \sim Y^{op}.$$

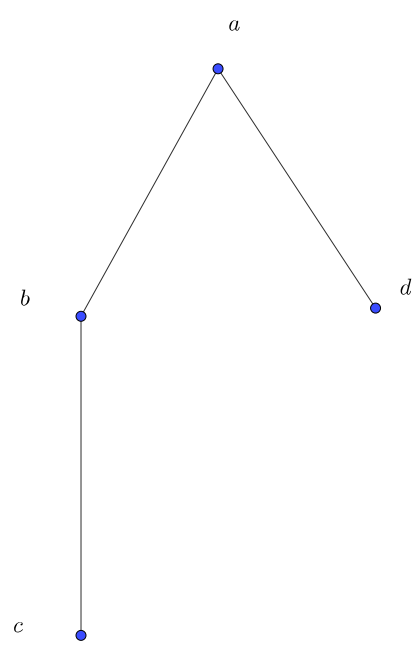
COROLARIO 4.5. *Sea X un espacio finito tal que X tiene elemento máximo o mínimo, entonces X es contractible.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que X tiene un elemento máximo; es decir, existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ para todo $x \in X$, por lo tanto

$$id_X \leq \mathcal{C}_y.$$

Donde $\mathcal{C}_y$ es la función constante y, entonces $id_X \sim \mathcal{C}_y$. □

EJEMPLO 11. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ el poset representado por el siguiente diagrama de Hasse:



Como a máximo, entonces X es contractible.

4.2. Tipo Homotópico

Vamos a encontrar resultados análogos a los encontrados en el Capítulo 3 para posets finitos. El resultado más importante será la definición de *beat point*; que nos permite definir el núcleo de un espacio finito, el cuál es un espacio generalmente de menor cardinalidad y homotópicamente equivalente al espacio original.

DEFINICIÓN 4.4 (Beat point)**.** *Un punto x en un espacio finito X es un* ***beat point hacia abajo*** *si el conjunto $\hat{U}_x = U_x \backslash \{x\}$ tiene elemento máximo. De manera dual podemos definir $x \in X$ un* ***beat point hacia arriba*** *si $\hat{F}_x = F_x \backslash \{x\}$ tiene elemento mínimo. Si x es un beat point hacia abajo o hacia arriba, diremos que x es* ***beat point****.*

OBSERVACIÓN. En el diagrama de Hasse de un espacio finito X es fácil reconocer si un punto $x \in X$ es beat point; x es beat point si su grado de entrada o de salida como digrafo es igual a 1, es decir, existe únicamente un arco que termina o empieza en x.

OBSERVACIÓN. Sea x elemento de un poset finito, se tiene que x es beat point hacia arriba si y sólo si existe $y \geq x$ tal que para toda cadena C de longitud positiva que empieza en x, se tiene que $y \in C$. De manera dual se tiene que x es beat point hacía abajo si y sólo si existe $y \leq x$ tal que para toda cadena C de longitud positiva que termina en x, se tiene que $y \in C$.

TEOREMA 4.6. *Sean X un espacio finito y $x \in$ un beat point. Entonces $X \backslash \{x\}$ es retracto por deformación de X.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que x es un beat point hacía arriba, luego sea y el mínimo de $\hat{F}_x$. Definimos la siguiente retracción

$$\begin{array}{rccl} r: & X & \longrightarrow & X \backslash \{x\} \\ & t & \longrightarrow & r(t) = \begin{cases} t & t \neq x, \\ y & t = x. \end{cases} \end{array}$$

Claramente r es una función que preserva el orden. Sea $i : X \backslash \{x\} \hookrightarrow X$ la inclusión canónica, entonces $ir \geq id_X$. Luego por la Proposición 4.3 $ir \sim id_X$. □

DEFINICIÓN 4.5 (núcleo)**.** *Sea X un espacio finito, definimos el* ***núcleo*** *del espacio X de la siguiente manera $X_C := X \backslash B$, en donde $B = \{x \in X : x$ es beat point $\}$.*

DEFINICIÓN 4.6 (Espacio Finito minimal)**.** *Un espacio finito X, se dice que es* ***minimal*** *si X no tiene beat points.*

Se tiene que si X es minimal, entonces

$$X_C = X.$$

TEOREMA 4.7. *Sea X un espacio finito minimal, una función $f : X \longrightarrow X$ es homotópica a la identidad si y sólo si $f = id_X$.*

Demostración. De la Proposición 4.3 y sin pérdida de generalidad, supongamos que $f \leq id_X$. Sea $x \in X$, supongamos por inducción que $f|_{\hat{U}_x} = id_{\hat{U}_x}$; luego si $f(x) \neq x$, entonces $f(x) \in \hat{U}_x$ y para todo $y < x$, $y = f(x) \leq f(x)$; entonces $f(x)$ es el máximo de $\hat{U}_x$ lo cual es una contradicción ya que X no tiene beat points, es decir $f(x) = x$.

□

TEOREMA 4.8 (Teorema de Clasificación)**.** *Una equivalencia homotópica entre espacios finitos minimales define un homeomorfismo entre los espacios.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una equivalencia homotópica y sea $g : Y \longrightarrow X$ su inversa homotópica, entonces por el Teorema 4.7 se tiene que $gf = id_X$ y $fg = id_Y$. Por lo tanto f define un homeomorfismo. □

COROLARIO 4.9.

- *El núcleo de un espacio es único salvo homeomorfismos.*
- *Dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen núcleos homeomorfos.*

ALGORITMO 1 (Núcleo de un Espacio)**.** Sea X un espacio finito, podemos encontrar su núcleo X_C mediante el siguiente algoritmo.

- Dado X un espacio finito.
- Para $x \in X$, tal que x es beat point de X

$$X_1 = X \backslash \{x\}.$$

$$X = X_1.$$

- Si X no tiene beat points, entonces

$$X_C = X$$

Haciendo uso del algoritmo anterior implementado en `https://cocalc.com` presentamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 12.

1. Sea F el espacio topológico representado por el siguiente diagrama de Hasse:

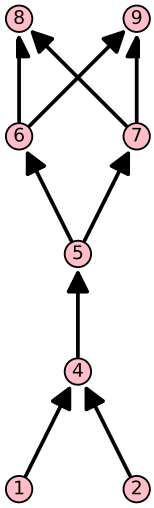
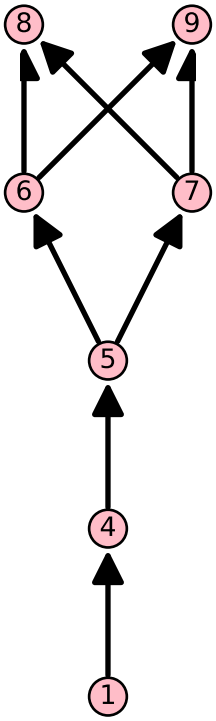
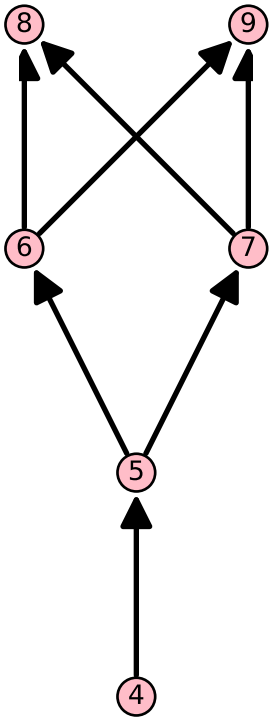


Figura 4.1: Espacio F

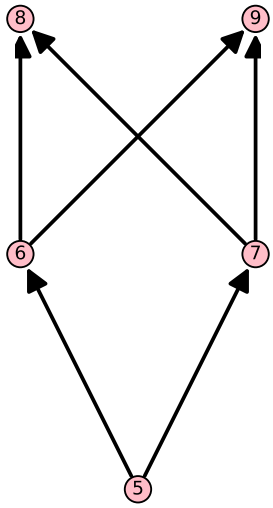
Veremos gráficamente la aplicación del Algoritmo 1, sobre como hallar el núcleo F_C del espacio F.



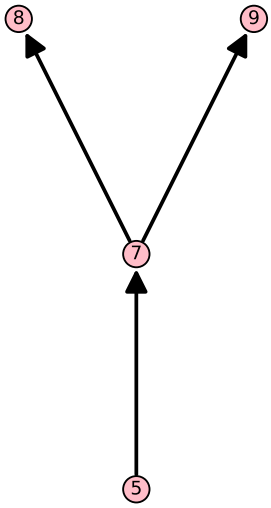
(a) $F\backslash\{2\}$



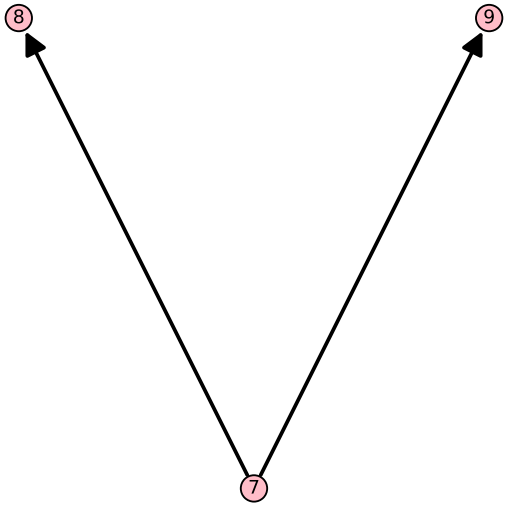
(b) $F\backslash\{1\}$



(c) $F\backslash\{4\}$



(d) $F\backslash\{6\}$



(e) $X\backslash\{5\}$

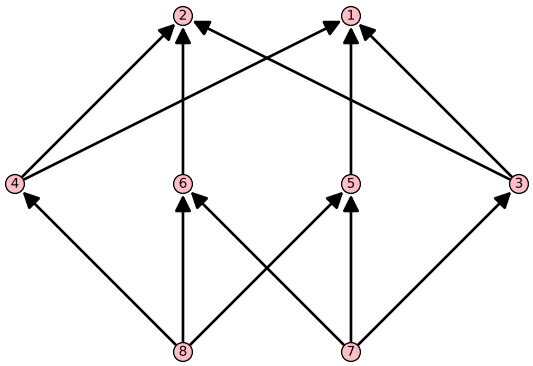
(f) $F\backslash\{9\}$

(g) F_C

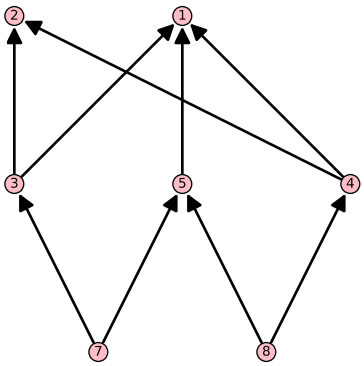
Figura 4.3: Algoritmo 1 aplicado a F

Se puede ver que el núcleo $F_C = \{9\}$ tiene cardinalidad 1, por lo tanto F es contractible.

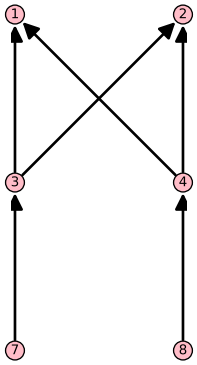
2. Sea Y el espacio representado mediante el siguiente diagrama de Hasse, hallaremos su núcleo con ayuda del Algoritmo 1:



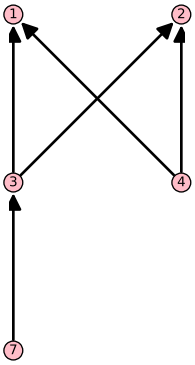
(a) Y



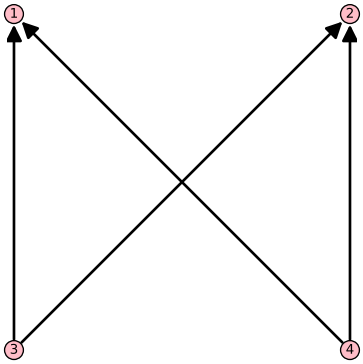
(b) $Y\backslash\{6\}$



(c) $Y\backslash\{5\}$



(d) $Y\backslash\{8\}$



(e) Y_C

Figura 4.4: Algoritmo 1 aplicado a Y

Podemos concluir que los espacios F y Y no son homotópicamente equivalentes ya que sus núcleos no son homeomorfos.

4.3. Tipo Homotópico Débil

DEFINICIÓN 4.7 (Homotopía Débil). *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, se dice que f es una* ***homotopía débil*** *o* ***equivalencia homotópica débil*** *si f induce morfismos en todos los grupos de homotopía; es decir, si las funciones*

$$f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$$

son isomorfismos para todo $n \geq 1$.

OBSERVACIONES.

- Si $f : X \longrightarrow Y$ es una homotopía, entonces f es una homotopía débil.
- Si $f : X \longrightarrow Y$ es una homotopía débil, entonces f no es necesariamente una homotopía.
- La homotopía débil cumple la propiedad llamada 2 de 3; es decir, si f y g son dos funciones tales que existe $g \circ f$ y 2 de las 3 funciones $f, g, g \circ f$ son equivalencias homotópicas débiles, entonces también lo es la tercera.

DEFINICIÓN 4.8 (Complejo Simplicial). *Un complejo simplicial K es una dupla $K = (V_K, S_K)$, donde los conjuntos V_K y S_K son conjuntos finitos denominados* ***conjunto de vértices*** *y* ***conjunto de simplices*** *respectivamente.*

PROPIEDADES.

1. El conjunto S_K está formado por subconjuntos finitos de V_K.
2. Si no existe confusión se puede denotar $v \in K$ si $v \in V_K$ y $\sigma \in K$ si $\sigma \in S_K$.
3. Si un simplice σ está contenido en otro simplice τ, se dice que σ es una cara de τ, si $\sigma \neq \tau$ se dice que σ es una cara propia de τ.
4. Un simplice con $n + 1$ vértices es llamado $n - simplice$.
5. La dimensión de K es igual al máximo de las dimensiones de los simplices que lo conforman.
6. Los simplices maximales, aquellos que no sean caras propias de otro simplice, se denominan **facetas**.

DEFINICIÓN 4.9 (Realización Geométrica). *Sea K un complejo simplicial, se define la* ***realización geométrica*** *$|K|$ como la el conjunto de las combinaciones convexas de*

los simplices que lo conforman; es decir

$$|K| := \left\{ \sum_{v \in \sigma} \alpha_v v | \sigma \in S_K \right\}.$$

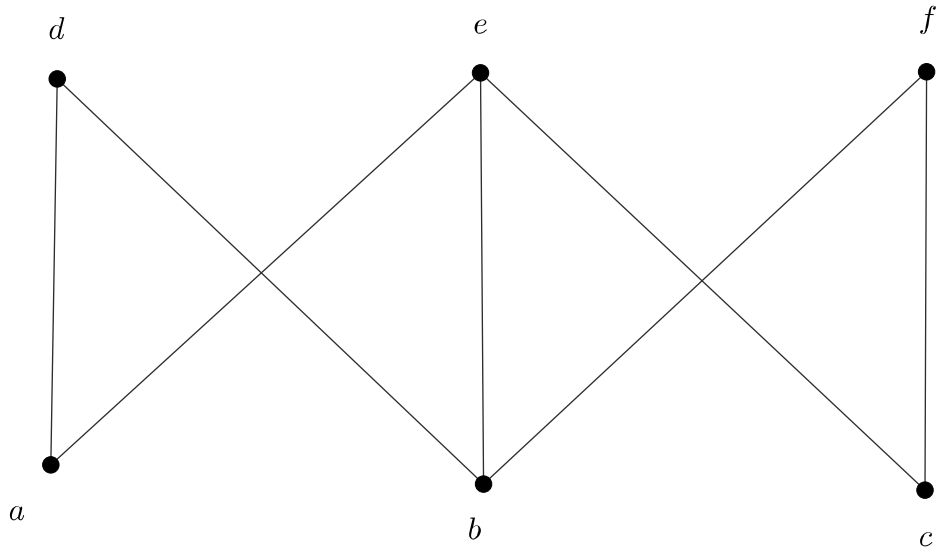
DEFINICIÓN 4.10 (Función simplicial)**.** *Sean K y L dos complejos simpliciales, se dice que $\varphi : V_K \to V_L$ es una* ***función simplicial*** *si dado $\sigma \in S_K$, se tiene que $\varphi(\sigma) \in S_L$; es decir, la función envía simplices en simplices.*

Abusando de la notación se denotará a una función simplicial como $\varphi : K \to L$.

DEFINICIÓN 4.11 (Complejo Simplicial de orden)**.** *Sea X un espacio finito; el* ***complejo simplicial de orden*** *o* ***espacio clasificador*** *$K(X)$ asociado a X es, el complejo simplicial cuyos simplices son las cadenas no vacías definidas en X.*

Si $f : X \to Y$ es una función continua entre los espacios X e Y, entonces la función simplicial asociada $K(f) : K(X) \to K(Y)$ está definida por $K(f)(x) = f(x)$.

EJEMPLO 13. Sea X un espacio finito representado por el siguiente diagrama de Hasse:



La realización geométrica de su complejo de orden es la siguiente:

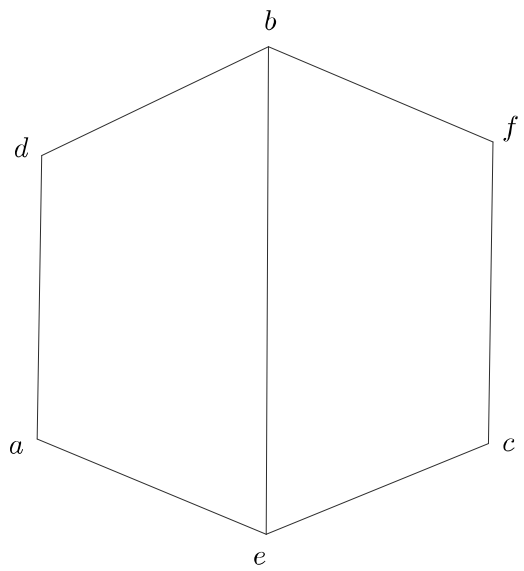


Figura 4.5: Realización geométrica del poset del ejemplo anterior

DEFINICIÓN 4.12 (Soporte)**.** *Sea $\gamma \in |K(X)|$, se define el* ***soporte*** *de γ como el conjunto $supp(\gamma) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$ donde*

$$\gamma = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i.$$

DEFINICIÓN 4.13 (Función $K - McCord$)**.** *Sea X un espacio finito,la* ***función*** *$K - McCord$ está definida de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \mu_X : \ |K(X)| &\longrightarrow X \\ \gamma &\longrightarrow \mu_X(\gamma) = \text{mín}\{supp(\gamma)\}. \end{aligned}$$

TEOREMA 4.10. *La función $K - McCord$ μ_X es una equivalencia homotópica débil para todo espacio finito X.*

Demostración. La demostración de este teorema puede ser encontrada en [2, Pg.12] □

PROPOSICIÓN 4.11. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre espacios finitos,*

entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} |K(X)| \arrow[r, "|K(f)|"] \arrow[d, "\mu_X"] & |K(Y)| \arrow[d, "\mu_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. sea $\gamma \in |K(X)|$ se tiene que

$$\begin{aligned} f\mu_X(\gamma) &= f(\text{mín}(supp(\gamma))) = \text{mín}(f(supp(\gamma))) \\ &= \text{mín}(supp(|K(f)|(\gamma))) = \mu_Y|K(f)|(\gamma) \end{aligned}$$

□

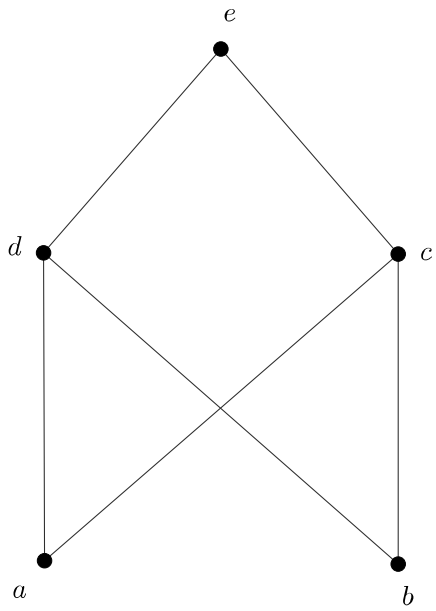
COROLARIO 4.12. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios finitos, entonces f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si $|K(f)| : |K(X)| \longrightarrow |K(Y)|$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Por el Teorema 4.10 sabemos que U_Y es una equivalencia homotópica débil, luego por la propiedad de 2 de 3 $|K(f)|$ es una equivalencia homotópica débil si y sólo si $\mu_Y|K(f)| = f\mu_X$ es una equivalencia homotópica débil.
Recíprocamente como μ_X es una equivalencia homotópica débil por 4.10, $|K(f)|$ es una equivalencia homotópica débil si y sólo si f es una equivalencia homotópica débil. □

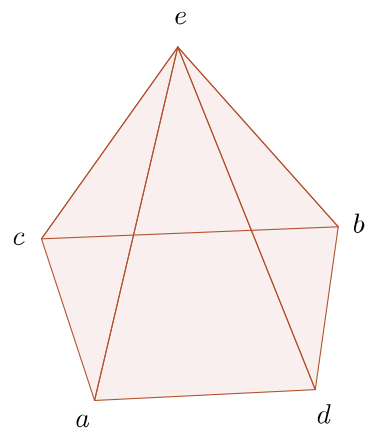
Este corolario es de gran importancia ya que nos permite garantizar que las realizaciones geométricas de un espacio topológico $|K(X)|$ y su núcleo $|K(X_C)|$ son homótopicamente equivalentes; es decir, $|K(X_C)|$ es retracto por deformación de $|K(X)|$.

En particular tenemos que si un espacio X es contractible; es decir su núcleo es un punto $x_0 \in X$, entonces $|K(X)|$ es un espacio topológico contractible.

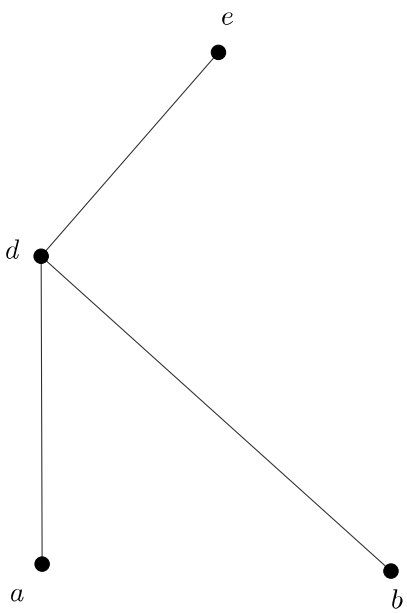
EJEMPLO 14. Sea X el siguiente espacio topológico finito, mostraremos como funciona la reducción de beat points en la realización geométrica del mismo.



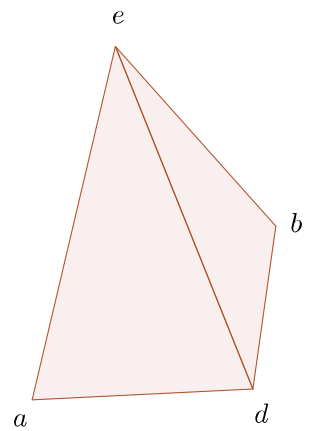
X



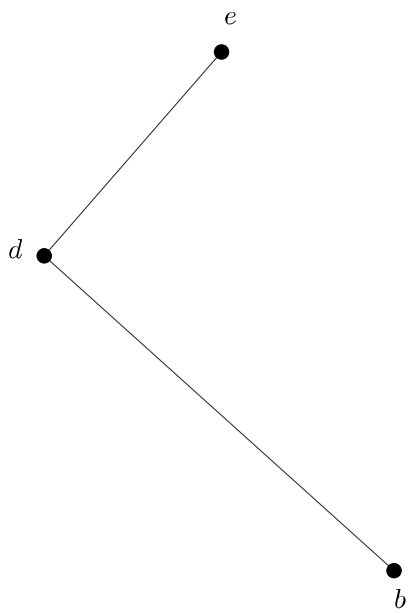
$|K(X)|$



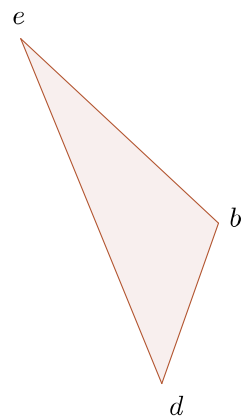
$X - \{c\}$



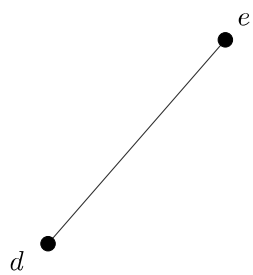
$|K(X - \{c\})|$



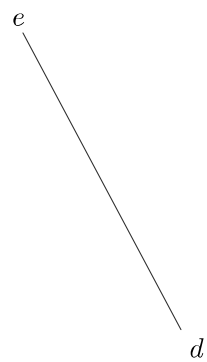
$X - \{c, a\}$



$|K(X - \{c, a\})|$



$X - \{c, a, b\}$



$|K(X - \{c, a, b\})|$

X_C

$|K(X_C)|$

4.4. Modelos Finitos Minimales

Con base en los resultados de la sección anterior, podemos definir un modelo finito para una variedad topológica de dimensión dos, ya que la realización geométrica de un espacio finito $|K(X)|$ preserva las propiedades topológicas del espacio X. Así podremos dar una noción de producto, suspensión, cono y otras operaciones definidas en las variedades topológicas para sus modelos finitos.

DEFINICIÓN 4.14 (Variedad Topológica)**.** *Un espacio topológico X, se dice que es una **variedad topológica** de dimensión n si X es un espacio T_2, tal que para todo $x \in X$ existe una vecindad V_x homeomorfa al disco abierto de dimensión n $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.*

EJEMPLO 15. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica de dimensión n.

EJEMPLO 16. La n esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ es una variedad topológica de dimensión n.

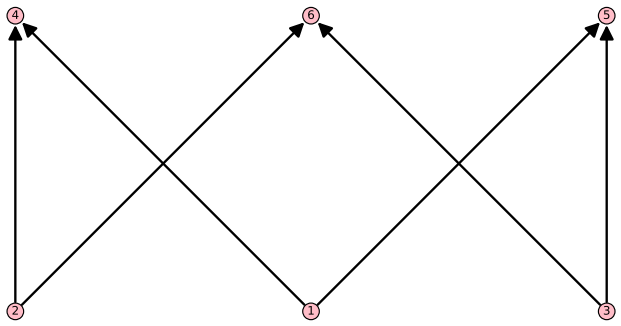
EJEMPLO 17. Los espacios definidos en los Ejemplos [2,3,4,5,6,7] son variedades topológicas de dimensión 2.

DEFINICIÓN 4.15 (Modelo finito)**.** *Sea M^n una variedad topológica de dimensión n, se dice que un espacio finito X es un **modelo finito** de M^n si $|K(X)|$ es homeomorfo a M^n.*

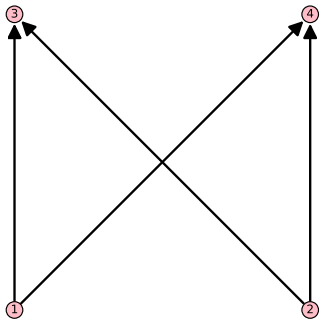
DEFINICIÓN 4.16 (Modelo finito minimal)**.** *Sea X un modelo finito de una variedad topológica M^n, se dice que X es **minimal** si para todo $x_0 \in X$, se tiene que $|K(X \backslash \{x\})|$ no es homeomorfo a M^n.*

OBSERVACIÓN. Si X_1 y X_2 son modelos finitos de M^n no necesariamente se tiene que X_1 es homeomorfo a X_2.

EJEMPLO 18. Los siguientes espacios finitos son modelos finitos minimales de S^1 :



(a) X



(b) Y

Se puede notar claramente que X e Y no son homeomorfos; ya que no tienen la misma cantidad de puntos.

Para encontrar modelos finitos de ciertas variedades topológicas de dimensión 2 que están definidas a partir del circulo tales como el cilindro, toro, cono circular y la esfera; es necesario definir operaciones análogas, para posets finitos, a las que usamos para definir dichas variedades.

4.4.1. Operaciones en Posets

DEFINICIÓN 4.17 (Producto Cartesiano)**.** *Sean X, Y espacios finitos, entonces definimos el producto cartesiano $(\times)$ como el poset $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}$, donde $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$.*

PROPOSICIÓN 4.13. *Sean X e Y espacios finitos, entonces $|K(X \times Y)|$ es homeomorfo a $|K(X)| \times |K(Y)|$.*

Demostración. La demostración de está proposición puede ser encontrada en [6, Proposición 4.1]. □

La Proposición 4.13 será de gran ayuda para encontrar modelos finitos para variedades topológicas definidas por medio de un producto cartesiano.

EJEMPLO 19. Vamos a encontrar un modelo finito para el cilindro definido en el Ejemplo 2 como $S^1 \times I$, para ello primero vamos a encontrar un modelo finito para el intervalo cerrado $I = [0, 1]$.
Es fácil ver que un modelo finito para el intervalo I está dado por el siguiente diagrama:

Figura 4.7: Modelo finito de I

Entonces un modelo finito para el cilindro está dado por el producto de los modelos descritos en la figura (b) y el modelo anterior (Figura 4.7). Su diagrama de Hasse es el siguiente:

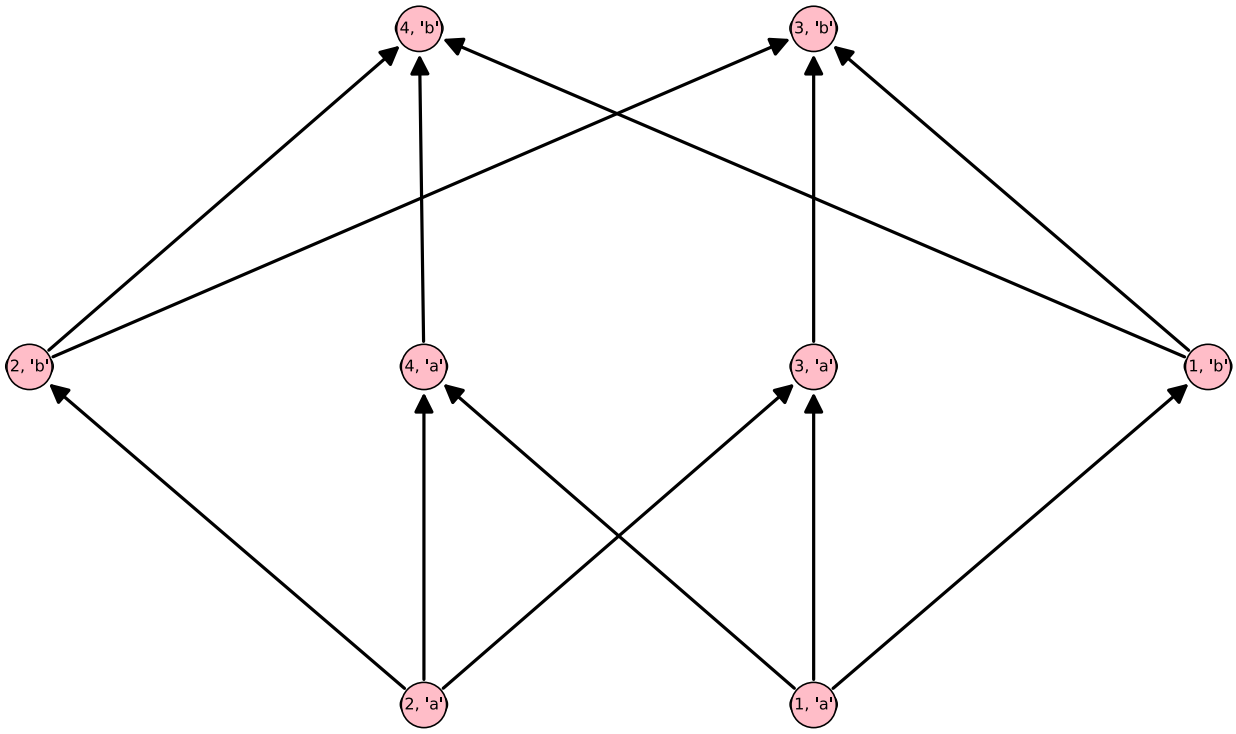


Figura 4.8: Modelo finito de $S^1 \times I$

EJEMPLO 20. Ahora encontraremos un modelo finito para el toro, definido en el Ejemplo 3 como $S^1 \times S^1$; el modelo finito para dicha variedad está dado por el producto de el modelo finito para S^1 descrito en la figura (b) por si mismo. Su representación gráfica es la siguiente:

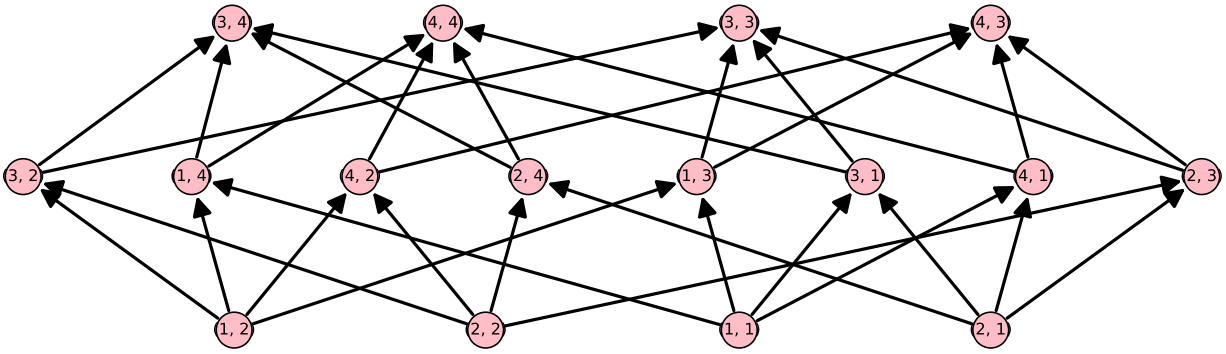


Figura 4.9: Modelo finito de $S^1 \times S^1$

Ahora vamos a definir una operación análoga a la suspensión compacta y cono, definidos en [1.12, 1.13], para posets.

DEFINICIÓN 4.18 (Cono finito)**.** *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ un espacio finito, se define el* ***cono*** *de X como el siguiente poset $C(X) := \{X \cup \{y\} : y \geq x_i \quad \forall x_i \in X\}$.*

OBSERVACIÓN. Para representar gráficamente un cono finito de un espacio X, en el diagrama de Hasse de X agregamos un nuevo punto a y lo unimos con los elementos maximales de X.

PROPOSICIÓN 4.14. *Sea X un espacio topológico finito, entonces $|K(C(X))|$ es homeomorfo a $C(|K(X)|)$.*

EJEMPLO 21. Vamos a encontrar un modelo finito para el cono de S^1, dado el modelo finito de S^1 representado en la figura (b), un modelo finito para el cono $C(S^1)$ tiene la siguiente representación gráfica:

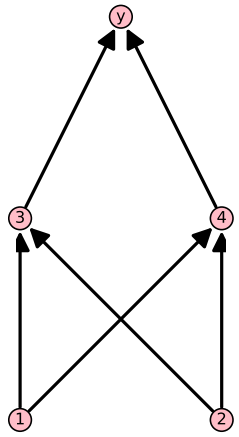


Figura 4.10: Modelo finito de $C(S^1)$

DEFINICIÓN 4.19 (Suspensión finita)**.** *Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ un espacio finito, definimos la suspensión de X como el siguiente poset $S(X) := \{X \cup \{y, z\} : y \geq x_i \;\; z \geq x_i \;\; \forall x_i \in X\}$.*

OBSERVACIÓN. Para representar gráficamente la suspensión finita de una poset X, en el diagrama de Hasse de X agregamos dos nuevos puntos al poset y los unimos con los elementos maximales de X.

PROPOSICIÓN 4.15. *Sea X un espacio topológico finito, entonces $|K(S(X))|$ es homeomorfa a $S(|K(X)|)$.*

EJEMPLO 22. Vamos a encontrar un modelo finito para $S^2 = S(S^1)$, dado el modelo finito de S^1 representado en la figura (b). Un modelo finito para S^2 se tiene realizando la suspensión finita del modelo de S^1; y su representación gráfica es la siguiente:

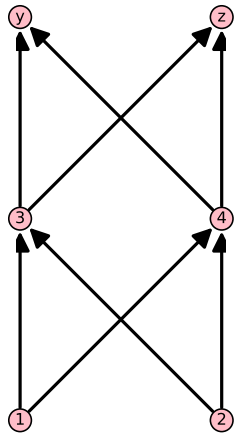


Figura 4.11: Modelo finito de S^2

Las nociones de *cono* y *suspensión* finita, se pueden definir de manera análoga si en lugar de unir los nuevos puntos con los elementos maximales lo hacemos con los elementos minimales, ya que esto es equivalente a unir con los elementos maximales en el poset opuesto.

4.5. Cálculo de π_1

Barmak y Minian definieron en [9] una forma sencilla de calcular el primer grupo de homotopía de una poset. Aquí la enunciaremos y haremos uso de ese concepto para verificar que el grupo de homotopía de los modelos finitos coincide con el grupo de homotopía de la variedad topológica que representan.

TEOREMA 4.16 (Cálculo de π_1 para posets)**.** *Sea X un espacio finito y sea $x_0 \in X$. Sea D un subdiagrama del diagrama de Hasse de X que corresponde a un espacio simplemente conexo A. Sea además $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ el subconjunto de $E(X)$ de aristas que no están en D. Sea G el grupo generado por los $e_\alpha$con las relaciones dadas por admisibilidad. Es decir para cualquier par de cadenas*

$$x = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r = y,$$

$$x = x'_1 \leq x'_2 \leq \cdots \leq x'_s = y,$$

de un punto x a un punto y, agregamos la relación

$$\prod_{(x_i,x_{i+1})\notin D} (x_i, x_{i+1}) = \prod_{(x'_i,x'_{i+1})\notin D} (x'_i, x'_{i+1}).$$

Supongamos que existe un subconjunto $\gamma \subset \Lambda$ tal que las clases $\{\bar{e}_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$ generan G y tales que para cada $\alpha \in \gamma$ existe un camino de aristas cerrado ω_α en x_0 tal que

contiene e_α exactamente una vez y no contiene otra arista e_β para $\beta \in \Lambda$. Entonces $\pi_1(X, x_0) \simeq G$.

Demostración. La demostración de este teorema está desarrollada en [9, Teorema 4.4] □

Si bien el enunciado del teorema es bastante complejo, la forma de usarlo es bastante sencilla y la mostraremos a continuación para calcular el primer grupo de homotopía del modelo finito de S_1, descrito en la Figura 4.6b, y de la esfera descrito en la Figura 4.11.

EJEMPLO 23. Vamos a calcular el primer grupo de homotopía del modelo finito X de S^1, descrito en [4.6b]; para ello dividiremos sus aristas en dos subconjuntos E y A, donde A son las aristas tal que forman un árbol generador y E son las aristas de X que no están en A. Como A es un árbol, el subdiagrama asociado a A es contractible, por lo tanto sus aristas no aportan información al grupo. Luego etiquetamos las aristas que no están en A y estás serán las que generan el grupo $\pi_1(X)$.

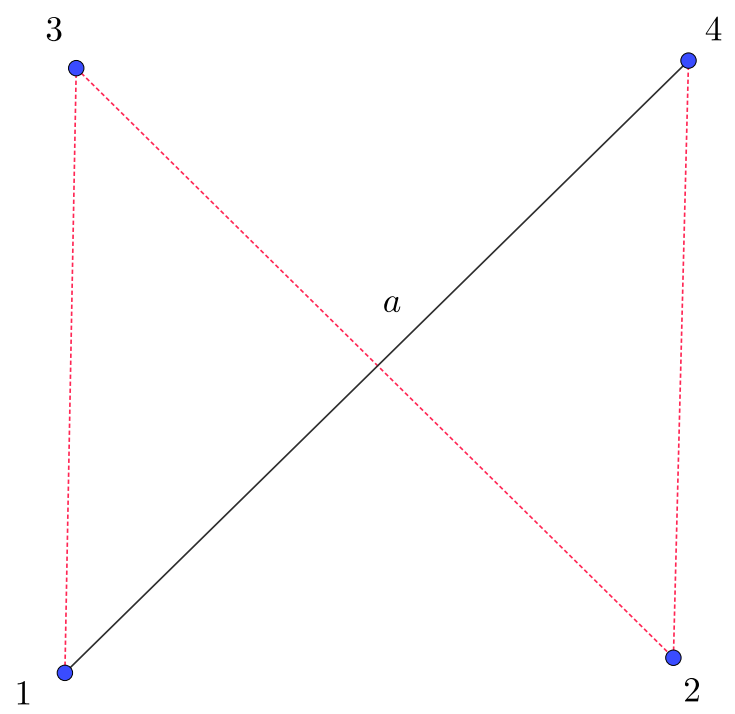


Figura 4.12: Cálculo del grupo fundamental del modelo finito de S^1

Luego, como no tenemos existen entre a y otro elemento, $\pi_1(X) =< \{a\} >\cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$

OBSERVACIÓN. El grupo fundamental de un poset de altura 1 será un grupo libre.

EJEMPLO 24. Usaremos los mismos criterios para calcular el grupo fundamental del modelo finito Y de S^2 descrito en [4.11].

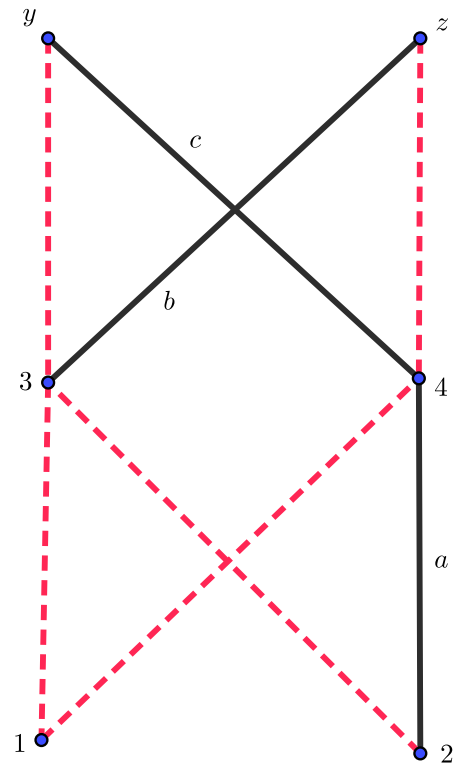


Figura 4.13: Cálculo del grupo fundamental de S^2

Se tiene, entonces que $\pi_1(Y) =< \{a, b, c\} : a = 1, b = 1, c = 1 >= 1_{\mathcal{G}} \cong \pi_1(S^2)$ se tiene que $c = 1$ ya que existen dos cadenas que parten de 1 y terminan en y así se tiene que

$$1 * c = c = 1.$$

De la misma manera existen dos cadenas que inician en 2 y terminan en y

$$a * c = a = 1.$$

Luego de las cadenas que parten de 2 y terminan en z, se tiene que

$$b = a = 1.$$

Capítulo 5

Modelos Finitos Minimales usando digrafos

Hasta ahora hemos usado conjuntos parcialmente ordenados para encontrar modelos finitos para variedades topológicas, sin embargo podemos hallar modelos de menor cardinalidad sacrificando las propiedades transitivas y antisimétricas en nuestro modelo. La forma gráfica de presentar nuestros nuevos modelos será por medio de un grafo dirigido. Así nos será posible encontrar modelos finitos de menor cardinalidad que los que encontramos en el capítulo anterior. Además dentro de este se presenta la generalización de algunos resultados que fueron descritos en el capítulo anterior, como el cálculo de π_1 y la reducción de *beat points* descrita en la sección 4.2 para obtener el núcleo de un grafo.

5.1. Definiciones Básicas

DEFINICIÓN 5.1 (Estructura Binaria Reflexiva)**.** *Una **estructura binaria reflexiva** es un conjunto no vacío X dotado de una relación reflexiva θ; es decir, $\theta \subset X^2$ tal que $(x, x) \in \theta$ para todo $x \in X$.*
Si $(x, y) \in \theta$ vamos a denotar por $x \to y$ o también diremos que xy es una arista de X.

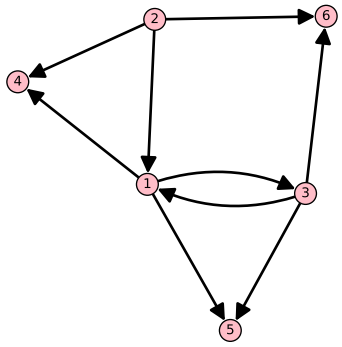
DEFINICIÓN 5.2 (Homomorfismo de estructuras binarias Reflexivas)**.** *Sean X, Y dos estructuras binarias reflexivas, la función $f : X \longrightarrow Y$ es un **homomorfismo** si para todo $x, y \in X$ tales que $x \to y$, se tiene que*

$$f(x) \to f(y).$$

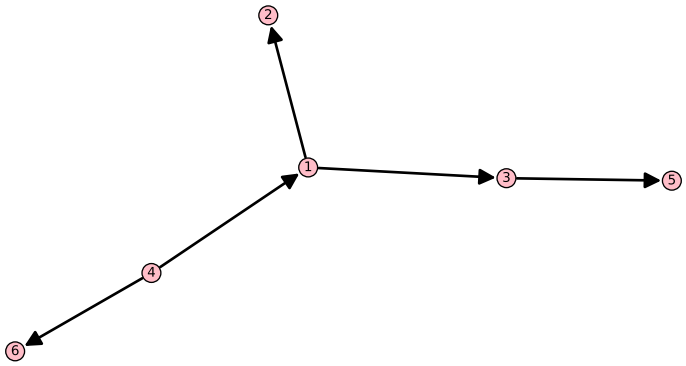
DEFINICIÓN 5.3 (Grafo Dirigido)**.** *Un **grafo dirigido** o **digrafo** es un par $D = (V, E)$,*

donde V es el conjunto de vértices del grafo y $E \subset V \times V$ es llamado el conjunto de aristas. Como su nombre lo indica,en esta estructura el orden de las aristas es importante; por tanto, si $(x, y) \in E$ entonces lo representaremos gráficamente por medio de una flecha desde x hacia y.

EJEMPLO 25. Las siguientes son representaciones gráficas de algunos digrafos.



(a) D_1



(b) D_2

DEFINICIÓN 5.4 (Subgrafo)**.** *Sea $D = (V, E)$ un grafo dirigido, decimos que $D_1 = (V_1, E_1)$ es un **subgrafo** de D si $V_1 \subset V$ y $E_1 \subset E$.*

DEFINICIÓN 5.5 (Subgrafo generado)**.** *Sean $D = (V, E)$ un digrafo y $V_1 \subset V$, entonces el **subgrafo generado** por V_1 denotado por $< V_1 >$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es V_1 y su conjunto de aristas $E_1 = \{(x, y) \in E : x, y \in V_1\}$.*

EJEMPLO 26. Encontraremos el subgrafo de D_1, en el ejemplo 25, generado por los vértices $\{1, 3, 5, 4\}$.

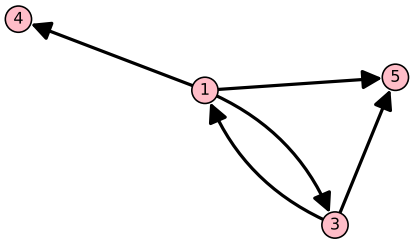


Figura 5.2: Subgrafo generado $< \{1, 3, 5, 4\} >$

DEFINICIÓN 5.6 (Representación Gráfica de una Estructura Binaria Reflexiva)**.** *Si $(X, \rightarrow)$ es una estructura binaria reflexiva, la representaremos gráficamente por medio de un digrafo $D = (X, E)$, donde los vértices serán los puntos del espacio X y las aristas serán aquellos (x, y) tales que $x \rightarrow y$.*

OBSERVACIONES.

- En la representación gráfica de nuestras estructuras, no ignoraremos la flecha dada por la reflexividad de nuestra relación.
- Dado un digrafo $D = (V, E)$, podemos construir una estructura binaria reflexiva aumentando los lazos que hagan falta; por esto, usaremos de forma intercambiable los términos digrafo y estructura binaria reflexiva.

EJEMPLO 27. Sea $F = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ dotado de la siguiente relación reflexiva:

$$x \to y \text{ si } x = y \text{ y } x \text{ es impar}; y$$

$$x \to y \text{ si } x = y \text{ y } |y - x| = 1.$$

La representación gráfica de nuestra estructura X es la siguiente:

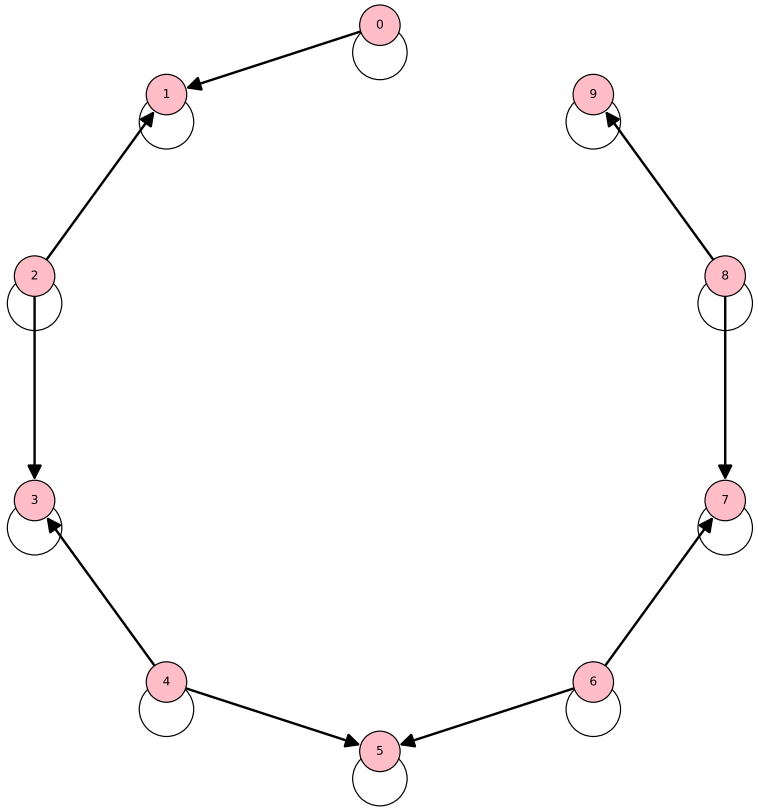


Figura 5.3: Representación gráfica de F.

5.2. Modelos Finitos Minimales

Ahora necesitamos generalizar la idea de un modelo finito minimal descrita en el Capítulo 4 Definición 4.16. Para ello debemos asociar nuestras estructuras con una variedad topológica, es decir necesitamos encontrar un espacio clasificador $K(X)$ y su realización geométrica.

Recordemos que el espacio clasificador $K(X)$ o complejo simplicial de orden, presentado en la Definición 4.11, está definido por medio de las cadenas de altura n; es decir, si $C = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una cadena de altura n, entonces C es también un n-simplice en el espacio clasificador.

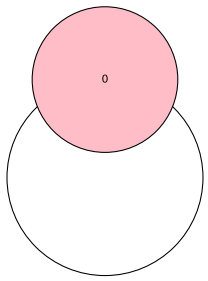
Necesitamos entonces encontrar el análogo a una cadena de altura n en una estructura binaria reflexiva $(X, \rightarrow)$.

Dada una estrutura binaria reflexiva $(X, \rightarrow)$. Vamos a encontrar las definiciones análogas a las encontradas para posets para la estrucutra X, que nos permitirán definir un modelo finito.

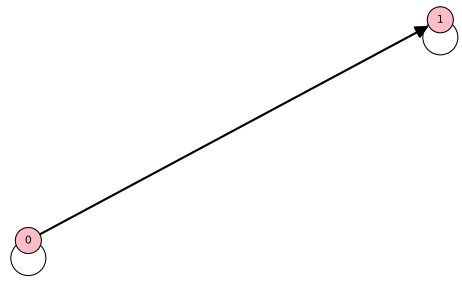
DEFINICIÓN 5.7 (Cadena)**.** *Sea $C = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ se dice que C es una* ***cadena*** *de altura n. Si se tiene que $x_i \rightarrow x_j$ para todo $i \leq j$.*

DEFINICIÓN 5.8 (Complejo simplicial asociado a una estructura binaria reflexiva)**.** *Sea X una estructura binaria reflexiva, entonces el* ***complejo simplicial*** *o* ***espacio clasificador*** *$K(X)$ asociado a X es el complejo simplicial, cuyos simplices son las cadenas no vacías de X.*

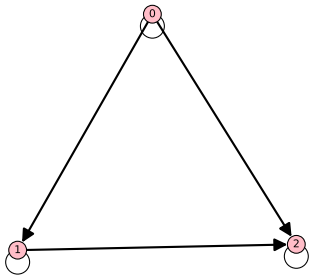
Así la representación gráfica en una estructura binaria reflexiva de los siguientes n-simplices son las siguientes:



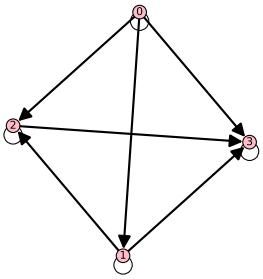
(a) Representación gráfica del 0-simplice.



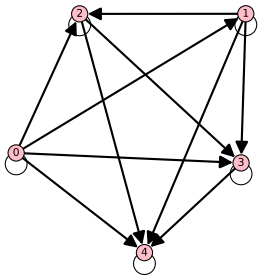
(b) Representación gráfica del 1-simplice.



(a) Representación gráfica del 2-simplice.

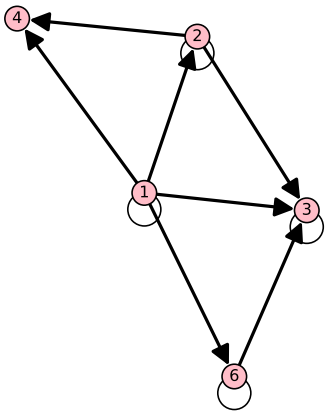


(b) Representación gráfica del 3-simplice.

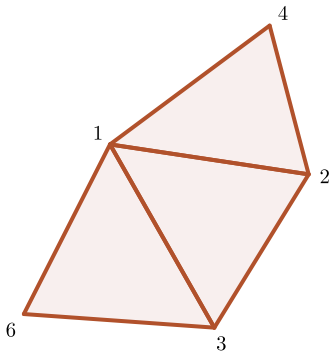


(c) Representación gráfica del 4-simplice.

EJEMPLO 28. Sea A la estructura binaria reflexiva representada en la figura 5.6a. Vamos a encontrar la realización geométrica del espacio clasificador de A.



(a) Representación gráfica de A.



(b) Realización geométrica de $K(A)$.

Ahora ya tenemos las herramientas necesarias para definir un modelo finito minimal, en una estructura binaria reflexiva o digrafo. Para ello recordaremos que para definir modelo finito en el capítulo anterior 4.15] y 4.16] hicimos uso de la topología en la realización geométrica del espacio clasificador. Procederemos de manera análoga para modelos finitos con digrafos.

DEFINICIÓN 5.9 (Modelo Finito)**.** *Sea M^n una variedad topológica, decimos que X una estructura binaria reflexiva es* ***modelo finito*** *de M^n si $|K(X)|$ es homeomorfo a M^n.*

DEFINICIÓN 5.10 (Modelo finito minimal)**.** *Sea X un modelo finito de una variedad topológica M^n, se dice que X es* ***minimal*** *si para todo $x \in X$ $|K(X\backslash\{x\})|$ no es homeomorfo a M^n.*

De la misma manera como lo hicimos en el capítulo 4, vamos a definir un modelo finito para S^1 y con dicho modelo definiremos modelos finitos para variedades topológicas más complejas como el toro, cono circular, cilindro y esfera. Definiremos entonces operaciones análogas para construir dichas variedades en su modelo finito.

5.3. Operaciones en digrafos

EJEMPLO 29 (Modelo finito de S^1)**.** La siguiente estructura binaria reflexiva es un modelo finito minimal para S^1.

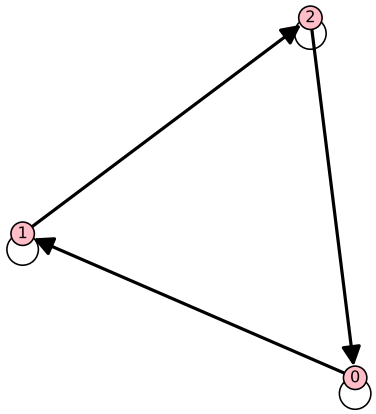


Figura 5.7: Modelo finito para S^1

Como podemos observar, podemos obtener un modelo finito de S^1 con un menor número de puntos al encontrado en 4.6b.

DEFINICIÓN 5.11 (Producto Cartesiano)**.** *Sean X, Y estructuras binarias reflexivas, entonces el* ***producto cartesiano*** *$(\times)$ de X e Y es la siguiente estructura:*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

Donde $(x_1, y_1) \to (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 \to x_2$ y $y_1 \to y_2$.

EJEMPLO 30. Vamos a encontrar un modelo finito para el cilindro $S^1 \times I$, para ello haremos uso de los modelos finitos de S^1, descrito en 5.7; y del intervalo cerrado I, descrito 5.4b. Así el modelo finito de $S^1 \times I$ está dado por el producto de dichos

modelos; y su representación gráfica es la siguiente:

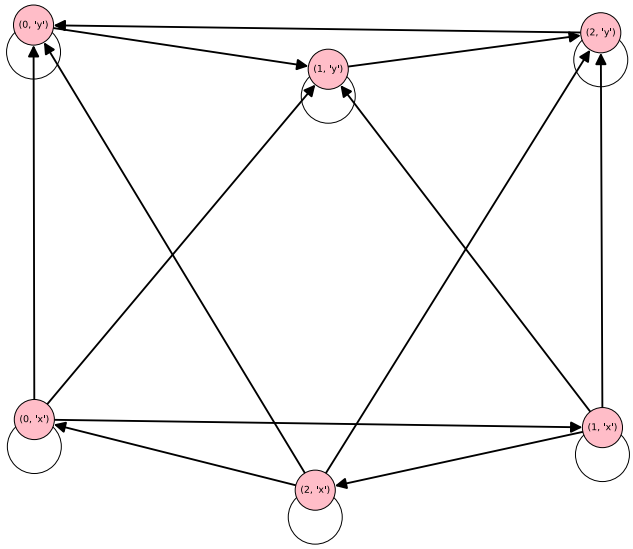


Figura 5.8: Modelo finito de $S^1 \times I$.

EJEMPLO 31. Ahora encontraremos un modelo finito para el toro, definido como $S^1 \times S^1$; el modelo finito para dicha variedad está dado por el producto del modelo finito de S^1 , descrito en 5.7], consigo mismo. Su representación gráfica es la siguiente:

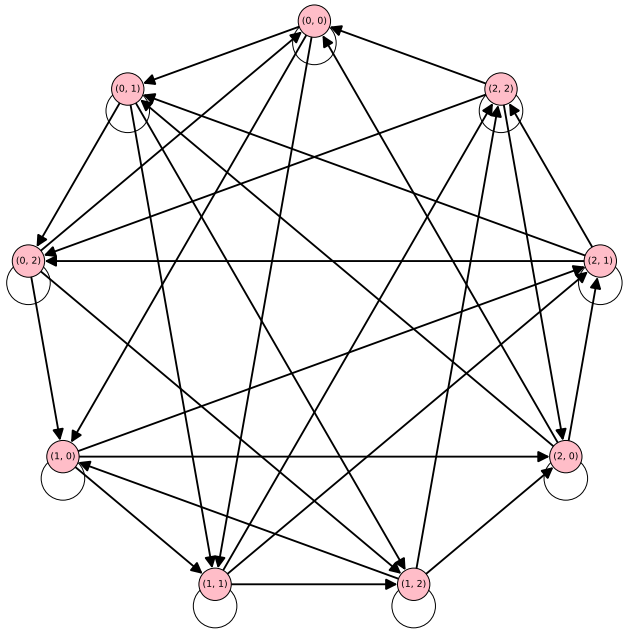


Figura 5.9: Modelo finito de $S^1 \times S^1$.

Nos resta ahora definir operaciones análogas al *cono* y la *suspensión compacta* para digrafos.

DEFINICIÓN 5.12 (Cono). *Sean $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$; y $(D, \rightarrow)$ una estructura binaria reflexiva, se define el* ***cono*** *de D como la siguiente estructura*

$$C(D) := \{D \cup \{x\} : d_i \rightarrow x \; \forall d_i \in D\}.$$

OBSERVACIÓN. Para representarlo gráficamente en un digrafo agregamos un nuevo vértice y a nuestro digrafo original y dibujamos una arista desde cada vértice de D hacia x.

EJEMPLO 32. Vamos a encontrar un modelo finito para el cono de S^1, para ello haremos uso de la operación *cono*, en el modelo finito de S^1, descrito en 5.7. Así un modelo finito para $C(S^1)$ tiene la siguiente representación gráfica:

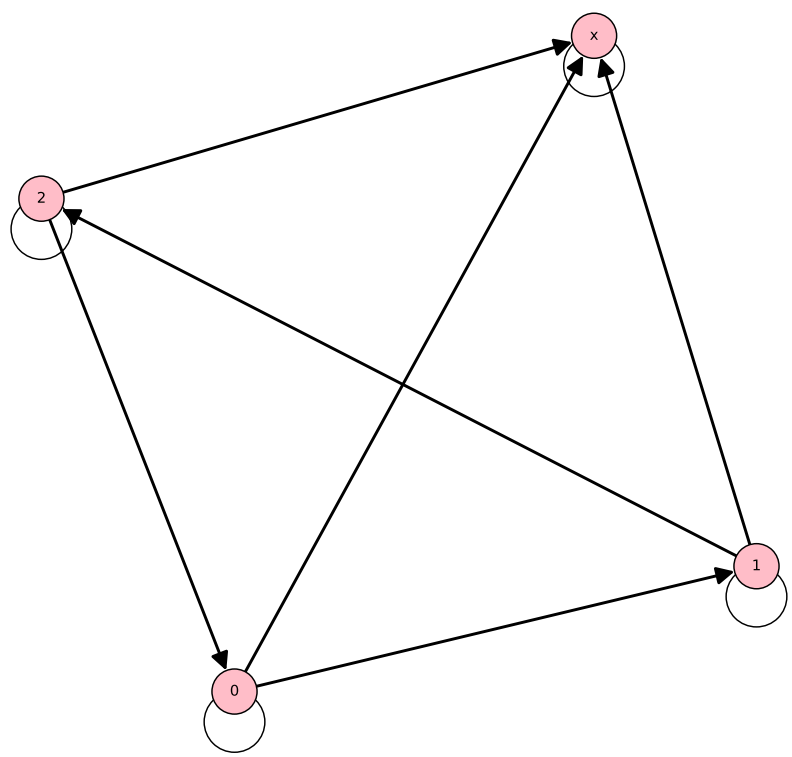


Figura 5.10: Modelo finito de $C(S^1)$.

DEFINICIÓN 5.13 (Suspensión). *Sea $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$; y $(D, \rightarrow)$ una estructura binaria reflexiva, se define la* ***suspensión*** *de D como la siguiente estructura*

$$S(D) := \{D \cup \{x, y\} : d_i \rightarrow x \; y \; d_i \rightarrow y \; \forall d_i \in D\}.$$

OBSERVACIÓN. Para representarlo gráficamente en un digrafo agregamos dos nuevos vértices x, y a nuestro digrafo original y dibujamos una arista desde cada vértice de D hacia x e y.

EJEMPLO 33. Vamos a encontrar un modelo finito para la esfera definida como $S(S^1)$, para ello haremos uso de la operación *suspensión* en el modelo finito de S^1 5.7]. Así un modelo finito para $S^2 = S(S^1)$ tiene la siguiente representación gráfica:

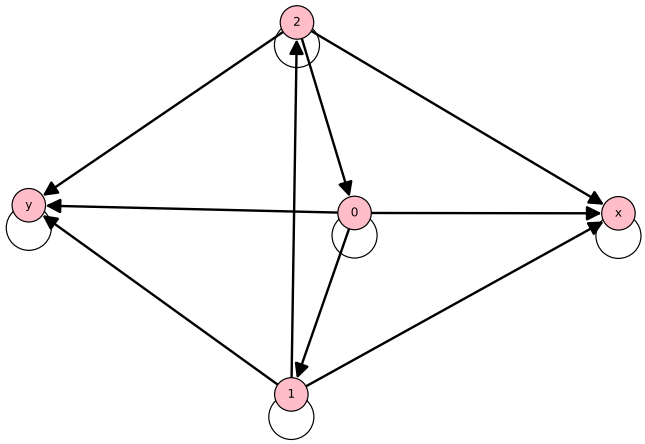


Figura 5.11: Modelo finito de S^2.

Para construir un modelo finito de otras variedades topológicas de dimensión dos tales como la botella de Klein, banda de Möbius y plano proyectivo, podemos hacer uso de su representación plana y una triangulación.

DEFINICIÓN 5.14 (triangulación)**.** *Sea M^2 una variedad topológica de dimensión dos. Una* ***triangulación*** *de M^n es una familia $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ que recubre S tal que:*

- *Para todo T_i se tiene que T_i es homeomorfo a un triangulo; y*
- $T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset, & \\ \{x\} & \textit{vértice,} \\ \{a, b\} & \textit{lado en común.} \end{cases}$

Es decir la intersección de dos triángulos es un 0-simplice o un 1-simplice.

EJEMPLO 34. Vamos a encontrar un modelo finito minimal para la botella de Klein definida en el Ejemplo 5, haremos uso de su representación plana y haremos una triangulación, para definir la dirección de las flechas usaremos la dirección dada por su representación plana y para completar los triángulos forzaremos la transitividad entre las flechas. Así un modelo finito para $\mathbb{K}$ tiene la siguiente representación gráfica.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
3 \arrow[u] \arrow[r] & 5 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr] & 6 \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[d] \\
4 \arrow[u] \arrow[r] & 7 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr] & 8 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[d] \\
A \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
$$

Figura 5.12: modelo finito minimal Botella de Klein

5.4. Núcleo de un digrafo

A lo largo de la sección anterior hemos obtenido modelos finitos de menor cardinalidad al usar estructuras binarias reflexivas, sin embargo podemos reducir la cardinalidad de ciertas estructuras binarias reflexivas al reducir puntos de tal manera que no cambiemos la homotopía en la realización geométrica de su espacio clasificador. Para ello vamos a generalizar la idea de *beat point* vista en el capítulo anterior, Definición 4.4, y así podremos calcular el núcleo de un digrafo.

Recordemos además que en el Ejemplo 14 vimos que reducir un beat point en un poset significa realizar una retracción por deformación en la realización geométrica del espacio clasificador asociado a nuestro poset.

Para finalizar encontraremos una algoritmo para cálcular el núcleo de un digrafo que será homotópicamente al espacio original con la definición de homotopía estudiada por Larose en [8]

5.4.1. Definiciones Básicas

Dados un digrafo D y $x \in D$ definimos los siguientes subgrafos:

$$U(x) :=< \{y \in D : y \to x\} >,$$

$$F(x) :=< \{y \in D : x \to y\} >,$$

$$\hat{U}(x) :=< \{y \in D \backslash \{x\} : y \to x\} >,$$

$$\hat{F}(x) :=< \{y \in D \backslash \{x\} : x \to y\} >,$$

$$C(x) :=< \{y \in D : y \to x \vee x \to y\} > .$$

LEMA 5.1. *Sea $x \to y$ una arista del digrafo D. En $K(D)$, y pertenece a todo n-simplice que contiene a x si y sólo si se tienen las siguientes condiciones:*

1. *Si $x \to z$, entonces $y \to z$ o $z \to y$.*
2. *Si $w \to x$, entonces $w \to y$.*

Demostración. Se puede ver fácilmente que si $x \to y$ para completar un 2-simplice debemos forzar la transitividad de sus aristas, entonces como $x \to z$ se puede obtener transitividad si tenemos una arista entre y y z sin importar en que dirección la definamos. Por otro lado como $w \to x$ se puede obtener transitividad únicamente si existe una flecha que conecte a w con y, es decir $w \to y$. □

Si se cumplen las condiciones dadas en el lema podemos colapsar el punto x al punto y sin cambiar la homotopía del digrafo, ya que estamos realizando un retracto por deformación en la realización geométrica del espacio clasificador de nuestro digrafo; es decir,

$$|K(D)| \cong_H |K(D \backslash \{x\})|.$$

TEOREMA 5.2 (generalización de beat point)**.** *Dado un digrafo D, el vértice $x \in D$ es un **beat point hacia arriba** si y sólo si existe $y \in D$ tal que $x \to y$, $\hat{U}(x) \subset C(y)$ y $\hat{F}(x) \subset F(y)$.*
*De manera análoga definimos un **beat point hacia abajo** considerando el digrafo con las aristas opuestas.*

Demostración. La demostración se sigue directamente del Lema 5.1]. □

DEFINICIÓN 5.15 (núcleo)**.** *Sea D un digrafo, definimos el **núcleo** del digrafo D de la siguiente manera $D_C := D \backslash B$, donde $B = \{x \in D : x \text{ es beat point}\}$.*

COROLARIO 5.3.

- *El núcleo de un espacio es único salvo homeomorfismos.*

Ahora vamos a presentar el algoritmo para calcular el núcleo de un digrafo.

ALGORITMO 2 (Núcleo de un digrafo)**.** Sea D un digrafo, podemos encontrar su núcleo D_C mediante el siguiente algoritmo.

- Dado D un digrafo.

- Sea $x \in D$ beat point de D, entonces

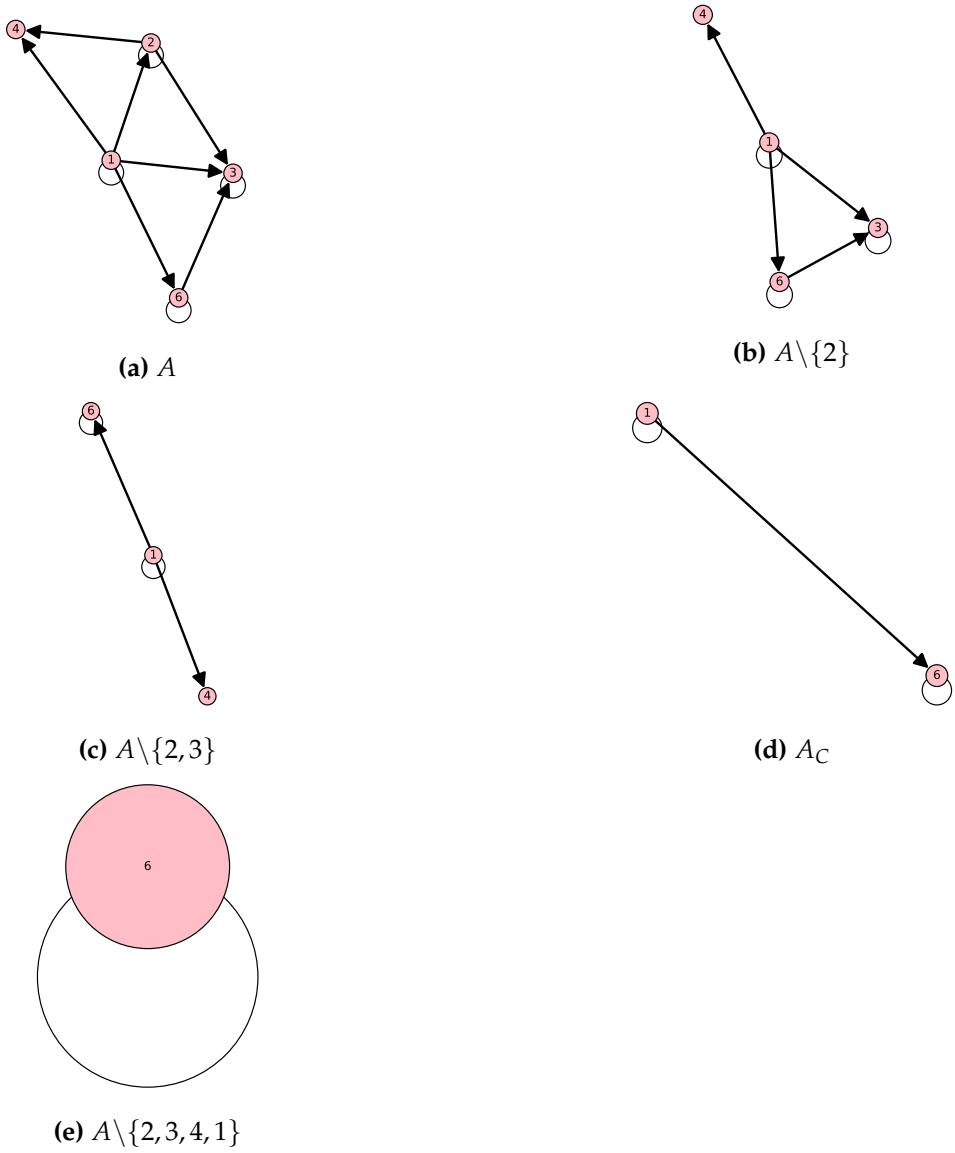
$$D =< D \backslash \{x\} > .$$

- Si D no tiene beat points, entonces

$$D_C = D.$$

Con ayuda del Algoritmo 2 implementado en el software `https://cocalc.com` presentamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 35. Dado el digrafo A presentado en la Figura 5.6a vamos a encontrar su núcleo.



(a) A **(b)** $A\backslash\{2\}$ **(c)** $A\backslash\{2,3\}$ **(d)** A_C **(e)** $A\backslash\{2,3,4,1\}$

Figura 5.13: Algoritmo 2 aplicado a A.

DEFINICIÓN 5.16 (digrafo contractible)**.** *Sea D un digrafo, se dice que D es* ***contractible*** *si $D_C = \{x\}$; es decir, su núcleo tiene un solo elemento.*

PROPOSICIÓN 5.4. *Sea D un digrafo, entonces $C(D)$ es un digrafo contractible.*

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, se tiene que x_i es *beat point* de x para todo $x_i \in D$ por lo tanto $D_C = \{x\}$. □

PROPOSICIÓN 5.5. *Sean D y G digrafos, entonces D es homotópicamente equivalente a G si y sólo si D_C es homeomorfo a G_C.*

EJEMPLO 36. Sea G el digrafo dado en la Figura 5.14, vamos a comprobar que G no es homotópicamente equivalente a A definido en la Figura 5.6a. Para ello vamos a encontrar G_C aplicando el Algoritmo 2.

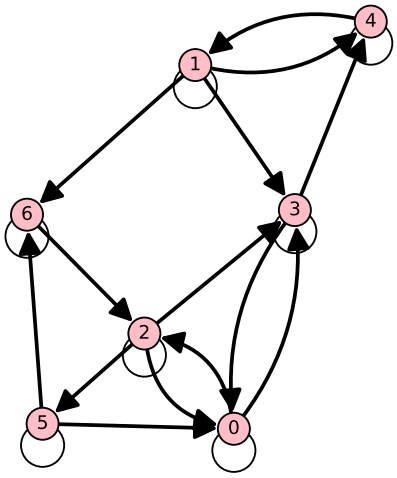
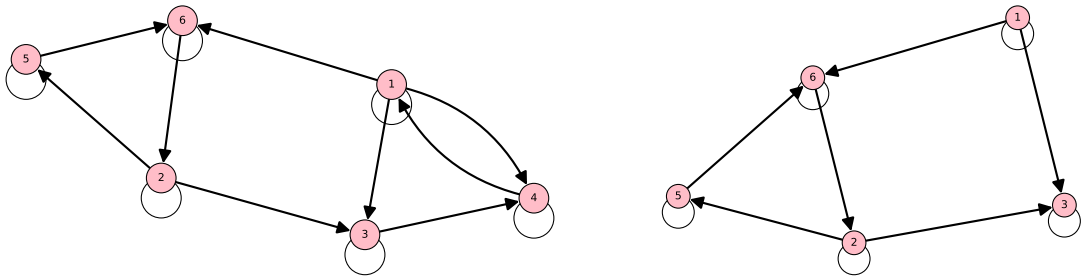


Figura 5.14: G



(a) $G \backslash \{0\}$ **(b)** G_C

Figura 5.15: Algoritmo 2 aplicado a G.

Podemos concluir entonces que A no es homotópicamente equivalente a G; ya que sus núcleos no son homeomorfos.

5.5. Cálculo de π_1

De la misma manera como se hizo en la Sección 4.5 vamos a encontrar una forma de calcular el grupo fundamental de un digrafo.

PROPOSICIÓN 5.6 (Cálculo del grupo fundamental de un digrafo)**.** *Sea D un digrafo y A un árbol generador de D. Sean d_i las aristas de A. Etiquetamos las aristas $d_i = 1$, entonces el grupo fundamental de D es el grupo generado por las aristas $e_\alpha \notin A$ con las relaciones dadas por:*

Si e_1 una arista de x hacia y y e_2 es una arista que une y con z y existe una arista e_3 que une x con z, es decir definen un 2-simplice, $e_1.e_2 = e_3$.

Sea G el grupo generado por e_α con las relaciones dadas, entonces $\pi_1(D) \cong G$.

Demostración. Como A es árbol generador, entonces A es contractible. Luego el resto de aristas generan lazos en D/A. Así un trío de aristas e_1, e_2, e_3 tales que $e_1.e_2 = e_3$, generan un 2-simplice en el espacio clasificador $K(D)$. Esto implica que el camino $e_1 * e_2 \cong_H e_3$ en $|K(D)|$. □

OBSERVACIÓN.

- Para los siguientes ejemplos, en la representación gráfica omitiremos las aristas dadas por la reflexividad y si existen las aristas $x \to y$ e $y \to x$, denotaremos gráficamente como un segmento que une x con y.
- Si existen las aristas $x \to y$ e $y \to x$, si etiquetamos la arista $x \to y$ como α, entonces la arista $y \to x$ será etiquetada como α^{-1}.

EJEMPLO 37. Vamos a encontrar el grupo fundamental del modelo finito S de S^1, descrito en la Figura 5.7. Para ello encontramos un árbol en nuestro gráfico y etiquetamos las aristas que no pertenecen al árbol.

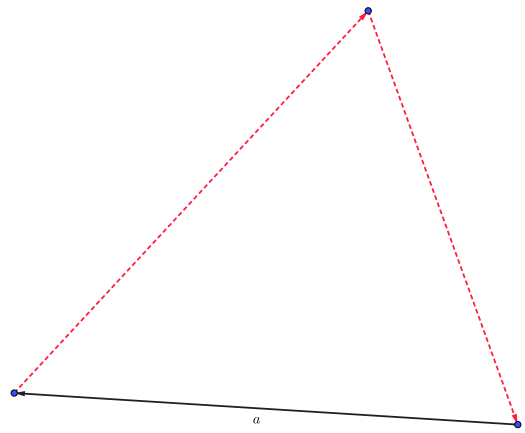


Figura 5.16: Cálculo de $\pi_1(S)$.

Entonces $\pi_1(S) =< \{a\} >\cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$.

EJEMPLO 38. Vamos a encontrar el grupo fundamental del modelo finito H de S^2 descrito en la Figura 5.11.

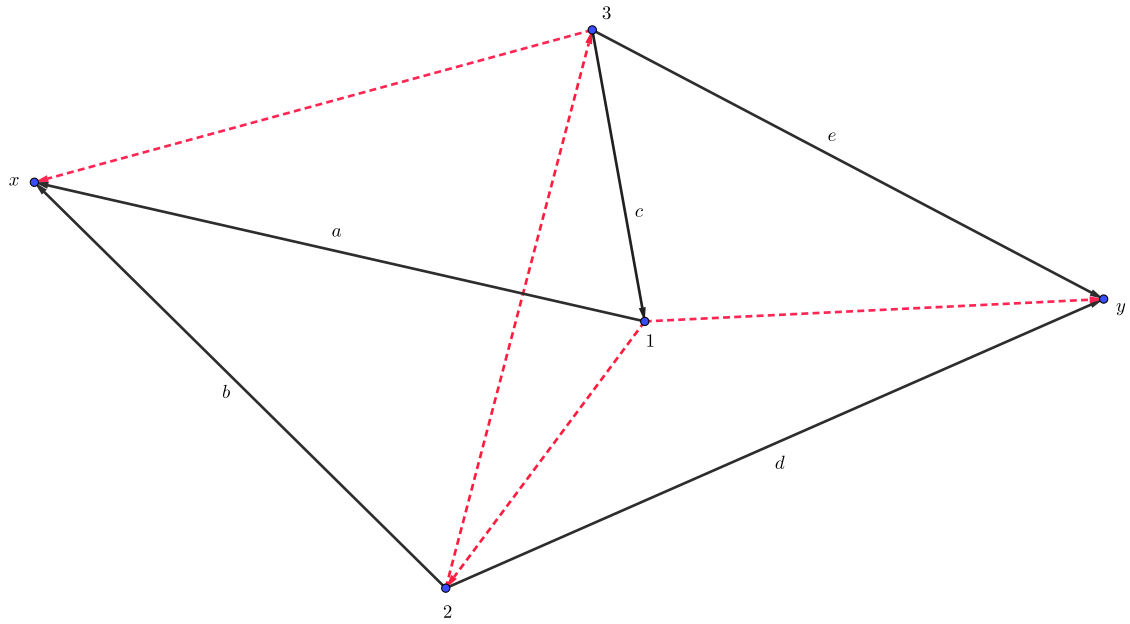


Figura 5.17: Cálculo de $\pi_1(H)$.

Podemos obtener las siguientes relaciones de los 2-simplices.

$$1 * d = d = 1,$$

$$1 * e = e = d = 1,$$

$$b = 1,$$

$$1 * b = 1 = a; \text{ y}$$

$$c * a = c = 1.$$

Por lo tanto $\pi_1(H) =< \{1\} >= 1_{\mathcal{G}} \cong \pi_1(S^2)$.

EJEMPLO 39. Vamos a calcular el primer grupo de homotopía para un dígrafo que no necesariamente es modelo finito de una variedad topológica. Sea G el dígrafo presentado en la Figura 5.15a, vamos a calcular $\pi_1(G)$.

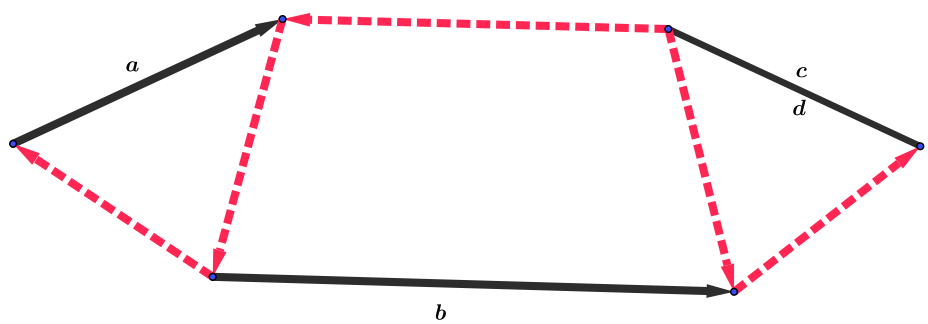


Figura 5.18: Cálculo de $\pi_1(G)$.

Entonces tenemos las siguientes relaciones:

$$1 = c; \text{ y}$$

$$d = c^{-1} = 1$$

Por lo tanto $\pi_1(G) =< \{a, b\} >\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

En el presente trabajo se han obtenido generalizaciones a estructuras binarias reflexivas de algunos resultados presentados por Barmak y Minian para posets en [2], [9], [12].

En un futuro se espera generalizar más ideas expuestas por Barmak tales como la noción de *weak point* definida en [2] o el cálculo de π_2 para una estructura binaria reflexiva.

Apéndice

Algoritmo 1 implementado en Cocalc

```

def F(x,X):
    lista=[]
    for y in X.list():
        if X.is_gequal(y,x): lista.append(y)
    return X.subposet(lista)

def U(x,X):
    lista=[]
    for y in X.list():
        if X.is_gequal(x, y): lista.append(y)
    return X.subposet(lista)

def C(x,X):
    lista=[]
    for y in X.list():
        if X.is_gequal(x, y) or X.is_gequal(y,x): lista.append(y)
    return X.subposet(lista)

def F_hat(x,X):
    lista=[]
    for y in X.list():
        if X.is_greater_than(y,x): lista.append(y)
    return X.subposet(lista)

def U_hat(x,X):
    lista=[]
    for y in X.list():
        if X.is_greater_than(x, y): lista.append(y)
    return X.subposet(lista)

def C_hat(x,X):
    lista=[]
    for y in X.list():
        if X.is_greater_than(x, y) or X.is_greater_than(y,x): lista.append(y)
    return X.subposet(lista)

def core(X):
```

```
    bp=1
    i=0
    while bp==1:
        i=i+1
        for x in X.list():
            if is_beat(x,X):
                lista=X.list()
                lista.remove(x)
                X=X.subposet(lista)
                im=X.plot()
                X.show()
                nombre='name_'+ str(i)+'.pdf'
                im.save(nombre)
                break
        else:
            bp=0
    return X
```

Algoritmo 2 implementado en Cocalc

```
def F(x,G):
    return {arista[1] for arista in G.outgoing_edges(x)}

def U(x,G):
    return {arista[0] for arista in G.incoming_edges(x)}
def C(x,G):
    return F(x,G).union(U(x,G))

def beat(x,G):
    arriba=F(x,G)
    arriba.discard(x)
    g_arriba=G.subgraph(arriba)
    abajo=U(x,G)
    abajo.discard(x)
    g_abajo=G.subgraph(abajo)
    for y in arriba:
        arriba_y=F(y,G)
        abajo_y=U(y,G)
        g_arriba_y=G.subgraph(arriba_y)
        g_abajo_y=G.subgraph(abajo_y)
        vec_y=g_arriba_y.union(g_abajo_y)
        if g_arriba.is_subgraph(vec_y) and g_abajo.is_subgraph(g_abajo_y):
            up=True
            return (y,up)
    for y in abajo:
        arriba_y=F(y,G).union(set([y]))
        abajo_y=U(y,G).union(set([y]))
        g_arriba_y=G.subgraph(arriba_y)
        g_abajo_y=G.subgraph(abajo_y)
        vec_y=g_arriba_y.union(g_abajo_y)
        if g_abajo.is_subgraph(vec_y) and g_arriba.is_subgraph(g_arriba_y) :
            up=False
```

```
            return (y,up)
    return None
def core(G):
    bp=True
    i=0
    while bp:
        i=i+1
        for x in G.vertices():
            H=G
            pegar=beat(x,G)
            print x,pegar
            if pegar!=None:
                lista=G.vertices()
                lista.remove(x)
                G=G.subgraph(lista)
                im=G.plot()
                G.show()
                nombre='name' +str(i) + '.pdf'
                im.save(nombre)
                break
                break
        else:
            bp=False
    return G
```

Bibliografía

[1] Hatcher A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, England, 2001.

[2] Barmak J. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Mathematical Subject Classification (2010), New York, 2011.

[3] E.H. Connell. *Elements of Abstract and Linear Algebra*. Mathematical Subject Classifications (1991), Miami, 2001.

[4] Munkres J. *Topology 2nd edition*. Prentice Hall, New York, 2000.

[5] Vilches M. *Topologia Geral*. Departamento de Análise - IME, Rio de Janeiro, 2012.

[6] Walker J. *Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered sets*. Tesis, M.I.T., Cambridge, MA, 1981.

[7] W. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Sringer-Verlag, New York, 1991.

[8] Larose B., Tardif C. *A discrete homotopy theory for binary reflexive structures*. Advances in Mathematics 189 (2004), 269-300.

[9] Barmak J., Minian G. *G-colorings of posets, coverings and presentations of the fundamental group*. arXiv:1212.6442.

[10] Witbooi P., Hardie K. *Finite relational structure models of topological spaces and maps*. Theoretical Computer Science 405 (2008), 24-34

[11] Stong R. *Finite Topological Spaces*. Transactions of the American Society, Vol. 123, No.2. (1996), 325-340

[12] Barmak J., Minian G. *Simple homotopy types and finite spaces*. Advances in Mathematics 218 (2008), 87?104

[13] Fernández X. *Topología de espacios finitos: un enfoque algorítmico*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires,2008