ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTRUCTURA DE GRUPOS ABELIANOS ORDENADOS

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

CARLOS DANIEL RIVERA CHACÓN
zonacark@hotmail.com

Director: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA, PH.D.
miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, OCTUBRE 2018

DECLARACIÓN

Yo CARLOS DANIEL RIVERA CHACÓN, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Carlos Daniel Rivera Chacón

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por CARLOS DANIEL RIVERA CHACÓN, bajo mi supervisión.

Miguel Ángel Yangari Sosa, Ph.D.
Director

AGRADECIMIENTOS

A mi destino en esta vida, por estar escrito de esta manera, pues no encuentro alguna razón para cambiar mi pasado. (A Dios, por todo lo que me ha dado).

A mis padres: Carlos Milton Rivera Pozo y Mónica del Rocío Chacón Chacón, por comprender, dándome la oportunidad de escoger y seguir libremente la carrera de Matemática, logrando de esta manera cumplir con uno de mis objetivos. Este logro es de ellos, por su amor, sacrificio, apoyo, pero sobre todo, por estar siempre a mi lado. A mi hermana: Alba Sofía Rivera Chacón, por entenderme, y por lo tanto, de alguna forma tenerme presente a la hora de mostrar su cariño, pero sobre todo, por formar parte de esta familia.

A mis profesores, por su ardua labor y entrega al impartir su conocimiento, pero sobre todo, por infundir una gran inspiración a lo largo de todos los años de mi vida. Principalmente a quienes me hicieron conocer este maravilloso mundo de la Matemática. A la Lic. Jenny Jarrín, por ser la primera en mostrarme y convencerme del mucho potencial que tengo para esto. Al Lic. Marcelo Córdoba, por de alguna forma felicitarme por el éxito que tendría, aún sin saber que esto pasaría. Al Lic. Gustavo Velasco, porque durante tres años, más que un profesor, fue el mejor consejero de la vida. Al Mat. Alfonso Salazar, por mostrarle a mi aquel niño de primer semestre (en Álgebra Lineal) el gusto de que todo saldría bien en la carrera, y así fue. Por esta última razón, también al Mat. István Mező (en Álgebra Abstracta), y por su recomendación, la cual formó parte de tres con las que fui aceptado en un programa de estudios de postgrado en México, el cual cursaré. (Estas áreas desde un inicio me han gustado e interesado más, y son en las que se desarrolla este Trabajo de Titulación).

Al Mat. Francisco Ugarte, por realizar la publicación base de este trabajo, la cual logró llegar a mis manos cuando estuve en Perú, y por convencerme aún más de querer hacerlo al decir: "¡Hazlo!, sí podrás", y he lo aquí. De manera especial, al Mat. Nelson Subía, por confiar en mí, dándome la oportunidad de desarrollar este trabajo. Al Mat. Miguel Yangari, por permitir que la realización de este trabajo fuera posible, pero sobre todo, por sus recomendaciones a lo largo de mi carrera, con las cuales asistí a varias escuelas internacionales a nivel de pregrado. Por esta última razón, también al Mat. Alejandro Araujo, y porque una de sus recomendaciones me permitió asistir a mi primera escuela a nivel de postgrado, la cual fue en Perú, donde conocí al Mat. Francisco Ugarte.

A los grandes matemáticos de la historia, en especial a Hans Hahn, por establecer y demostrar su teorema de inmersión, el resultado fundamental de este trabajo.

Al Mat. Andrés Merino, profesor, y de alguna forma compañero de carrera, por ser otro de los tres que me recomendaron para ser aceptado y seguir mis estudios de postgrado. Por estas mismas razones, también al Mat. David Pazmiño, y por ser el primero en recomendarme para participar en mis dos primeras escuelas (las cuales fueron en México), pero sobre todo, por su necesaria ayuda en el transcurso de mi carrera. Por esta última razón, también al Mat. Marco Calahorrano. A todos los demás que el destino puso ahí para ayudarme y poder cumplir este sueño.

A las personas honestas de mi país que pagaron mi educación con sus impuestos.

A mi amiga Patricia Guerrero (Patito), por su cariño, amistad, pero sobre todo, por los momentos compartidos, en los cuales hubo risas, polémicas, aventuras y demás. Sin su compañía esta etapa de mi vida no hubiera sido la misma.

A los que me apoyaron en los momentos más importantes.

A los que de alguna forma vieron en mí el talento y gusto de compartir apropiadamente mis conocimientos a otros estudiantes.

A los que confían en mi capacidad, fortaleza, y que no defraudaré.

A la Escuela Politécnica Nacional, por todo lo bueno que me permitió y permitirá vivir dentro y fuera de ella.

Finalmente, si indicara a todos los seres con los que estoy agradecido y las respectivas razones, me harían falta varias hojas más, así que a todos ellos ¡gracias!, de alguna manera los llevo conmigo.

DEDICATORIA

A las únicas personas que se lo merecen, mis padres; y a mi hermana.

A eso que aún no existe pero que grandiosamente estará ahí, mi futuro en la Matemática.

Carlos Daniel

Índice general

Resumen IX

Abstract X

Abreviaturas y Notaciones 1

1. Introducción 2

2. Fundamentos Preliminares 6

2.1. Teoría de Grupos 6

2.1.1. Definiciones y Propiedades 6

2.1.2. Subgrupos 9

2.1.3. Subgrupos Normales 11

2.1.4. Subgrupos Generados y de Torsión 14

2.1.5. Homomorfismos 18

2.2. Teoría del Orden 21

2.3. Grupos Abelianos 25

2.3.1. Producto Directo 25

2.3.2. Suma Directa y Producto de Hahn 27

3. Grupos Divisibles 30

3.1. Definición y Propiedades 30

3.2. El Cierre Divisible 31

3.3. Resultados en Grupos Libres de Torsión 33

4. Grupos Ordenados **37**

4.1. Definiciones y Propiedades 37

4.2. Subgrupos Aislados 43

4.3. El Esqueleto 48

5. Grupos Divisibles y Ordenados **52**

5.1. Preámbulo de Álgebra Lineal 52

5.2. El Teorema de Hans Hahn 53

5.2.1. La Estructura Numerable 54

5.2.2. La Estructura Finita 56

6. Conclusiones y Recomendaciones **58**

6.1. Conclusiones y Comentarios 58

6.2. Recomendaciones y Comentarios 60

Bibliografía **61**

Resumen

El objetivo del presente trabajo es describir la estructura que tienen los grupos abelianos ordenados de rango finito, además del de poder ser considerado como un referente bibliográfico indispensable en el campo de la clasificación de grupos abelianos ordenados. En este trabajo se recopila, reproduciendo de manera original, detallada, profunda y estratégica, todos los resultados relacionados con la clasificación de grupos abelianos ordenados, que son necesarios para lograr describir la estructura que tienen estos grupos. Esto se logra estableciendo hasta el teorema de inmersión de Hahn (Teorema 5.3). En esta recopilación se demuestran resultados propios, y otros proporcionados, pero sobre todo, propuestos en los trabajos [20] de Ribenboim y [23] de Ugarte. Entre ellos, el que cumple el objetivo, el teorema de inmersión de Hahn para el caso de grupos abelianos ordenados de rango finito (Teorema 5.8). De este modo, se consigue una descripción prácticamente completa de la teoría de grupos abelianos divisibles y ordenados.

PALABRAS CLAVES: grupos abelianos divisibles, cierre divisible de grupos libres de torsión, grupos arquimedianos, subgrupos aislados (convexos), rango principal finito y esqueleto de grupos ordenados, teorema de inmersión de Hahn.

Abstract

The purpose of this paper is to describe the structure of ordered abelian groups of finite rank, besides being able to be considered as an indispensable bibliographical reference in the field of the classification of ordered abelian groups. This paper compiles, reproducing in an original, detailed, deep and strategic way, all results related to the classification of ordered abelian groups, which are necessary to describe the structure of these groups. This is achieved by establishing until the Hahn's embedding theorem (Theorem 5.3). This compilation has all my proofs of own results, and of others that were provided, but above all, proposed by Ribenboim in [20] and Ugarte in [23]. Between these, the result that fulfills the purpose, the Hahn's embedding theorem for the case of ordered abelian groups of finite rank (Theorem 5.8). In this manner, an almost complete description of the theory of divisible and ordered abelian groups is achieved.

KEYWORDS: divisible abelian groups, divisible closure of torsion–free groups, archimedean groups, isolated (convex) subgroups, finite principal rank and skeleton of ordered groups, Hahn's embedding theorem.

Abreviaturas y Notaciones

i.e.	es decir
e.g.	por ejemplo
pp.	página(s)
cf.	comparar o consultar o confrontar, con
$\ni$	tal que
$:=$	igual por definición o por notación
$A \times B$	el producto cartesiano del conjunto A por el conjunto B
$A \smallsetminus B$	la diferencia del conjunto A menos el conjunto B
$\emptyset$	el conjunto vacío
$\mathbb{N}$	el conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	el conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$
$\mathbb{Z}_{>0}$	el conjunto de los números enteros positivos
$\mathbb{Q}$	el conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$
$\mathbb{Q}_{>0}$	el conjunto de los números racionales positivos
$\mathbb{R}$	el conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$
$\mathbb{R}_{>0}$	el conjunto de los números reales positivos
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$
$M_{mn}(\mathbb{K})$	el conjunto de las matrices de dimensión mn sobre el cuerpo $\mathbb{K}$
$\sharp(A)$	la cardinalidad del conjunto A
$f(A)$	la imagen directa del conjunto A respecto de la función f
$f^{-1}(A)$	la pre-imagen del conjunto A respecto de la función f
$\dim_{\mathbb{K}} V$	la dimensión del espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$
$a \mid b$	el entero a divide al entero b
$a \nmid b$	el entero a no divide al entero b
$[\![a, b]\!]$	el intervalo cerrado de números enteros de a hasta b

Capítulo 1

Introducción

El Álgebra Abstracta (Moderna) es una de las áreas base de la Matemática, junto al Análisis Matemático, la Aritmética, la Geometría, la Teoría de Conjuntos y la Topología. Dentro de esta área se encuentra el campo de la clasificación de grupos abelianos. Clasificar estos grupos módulo isomorfismo es un objetivo aún no alcanzado, aunque ya se han logrado avances muy importantes, como los que se presentan a continuación.

En 1954, Kaplansky en gran parte de [17] presenta una recopilación elegante de los avances que se han logrado hasta ese entonces. Entre ellos, las clasificaciones de grupos abelianos divisibles, y grupos abelianos numerables de torsión. En el 2015, Fuchs en [10] presenta una recopilación con la misma idea. Entre los avances que incluye, está la clasificación de grupos abelianos finitamente generados.

En 1955, Szmielew en [22] presenta una clasificación completa de grupos abelianos por sus propiedades elementales (i.e., propiedades que pueden formalizarse en cierto tipo de cálculo[1]). Una clasificación completa de una clase de grupos se refiere a su partición en subclases disjuntas, de tal manera que dos grupos pertenecen a una subclase si y sólo si son elementalmente equivalentes, i.e., si y sólo si tienen todas sus propiedades elementales en común.[2] Sin embargo, nadie había intentado este tipo de clasificación con respecto a los grupos ordenados[3]. Hasta que en 1960, Robinson y Zakon en [21] llevan a cabo la clasificación por propiedades elementales de todos los grupos abelianos arquimedianos, y además, de una cierta clase más general de grupos que ellos llaman "ordenados regularmente".

[1] Ver e.g. en [21], Sección 1, pp. 222–225.

[2] Cf. [21] pp. 222.

[3] Se los conoce más como grupos linealmente ordenados o totalmente ordenados; o simplemente "o–groups"; y sobre todo, se debe diferenciarlos de los grupos parcialmente ordenados conocidos simplemente como "po–groups". Ver e.g. en [2] pp. 287 o [7] pp. 143.

De forma simultánea, Robinson y Zakon en [21] establecieron condiciones necesarias y suficientes para que dos grupos "ordenados regularmente" sean elementalmente equivalentes.[4] Lo lograron, estableciendo una serie de sistemas completos (finitos e infinitos) de axiomas. Cada sistema definiendo una cierta subclase de grupos abelianos ordenados.[5]

En 1907, Hahn en [15] establece y demuestra por primera vez el teorema de inmersión para grupos abelianos ordenados que ahora lleva su nombre. Este teorema describe la estructura de estos grupos, y por lo tanto es el resultado fundamental de este trabajo. Hahn mostró que todo grupo abeliano ordenado puede sumergirse en un espacio funcional real ordenado lexicográficamente. Su demostración se desarrolla a lo largo de veintisiete páginas sin contar los preliminares.

Durante cuarenta y cinco años, nadie ofreció una demostración más simple del teorema de inmersión de Hahn. Hasta que en 1952, Hausner y Wendel en [16] presentaron una demostración de dos páginas del teorema, pero para el caso de un espacio vectorial real ordenado.[6] Seguidamente en 1954, Clifford en [4] describe la demostración de Hahn como una "maratón transfinita", y muestra que la demostración de Hausner y Wendel se aplica igual de bien al caso general, con algunas modificaciones menores. Lo que proporciona una demostración "accesible" y simple del teorema fundamental de Hahn. Resultando que [4] es simplemente un apéndice de [16].[7]

En 1953, Conrad en [5] generaliza la inmersión de Hahn para que se aplique a grupos abelianos parcialmente ordenados, i.e., no solo simplifica la demostración, sino que extiende el teorema a estos grupos, y a sistemas aún más generales. Conrad basa su demostración en la noción intrínseca de una "descomposición" del grupo dado, en lugar de la noción extrínseca de un isomorfismo ordenado[8] sobre el grupo dado hacia un espacio funcional ordenado.[9]

Luego en 1956, Gravett en [13] aplicó una generalización de la teoría de valoraciones, para el estudio de grupos abelianos ordenados. Por lo tanto dedujo nuevas demostraciones de los teoremas de inmersión y completitud de Hahn para grupos abelianos ordenados. Su procedimiento, aunque se desarrolló de forma independiente, se parece al que Conrad hace en [5], en la medida en que Conrad demuestra

[4] Ver [21], Sección 4, Teorema 4.7, pp. 236.
[5] Cf. [21] pp. 222.
[6] Cf. [4] pp. 860.
[7] Cf. [4] pp. 860 y [7] pp. 143.
[8] Se lo conoce más como isomorfismo de orden. Ver e.g. en [13] pp. 57 o [20] pp. 4.
[9] Cf. [4] pp. 860 y [7] pp. 143.

una generalización de los teoremas de Hahn por medio de un teorema de inmersión (para grupos valorados en el sentido de Conrad).[10]

Gravett por su parte en [12] y [14] también generaliza la inmersión de Hahn, pero para que se aplique a conjuntos parcialmente ordenados[11]. Extendiendo los resultados de [5] a estos conjuntos.[12]

En 1957, Banaschewski en [1] presenta una breve, elegante y simple demostración del teorema de inmersión de Hahn, pero para el caso de módulos (totalmente) ordenados.[13] Luego en 1965, Ribenboim en [20] presenta una demostración simple del teorema para grupos abelianos divisibles y ordenados. Lo hace, utilizando un resultado de álgebra lineal de [1][14], que primero particulariza para espacios vectoriales[15]. Finalmente, en el 2016, Ugarte en [23] presenta una demostración de un resultado[16], que de alguna forma puede ser el teorema de inmersión Hahn, pero para el caso de grupos abelianos divisibles y ordenados de rango numerable.

El presente trabajo se introduce en la historia (el estudio y la investigación) de los seis párrafos anteriores, basándose en ella desde los inicios (con el trabajo [15] de Hahn) hasta lo más actual (con el trabajo [23] de Ugarte). Tiene como finalidad describir la estructura que tienen los grupos abelianos ordenados de rango finito, presentando el alcance de la investigación que se realizó en este campo (la clasificación de grupos abelianos), además de poder ser considerado como un referente bibliográfico indispensable para estudiar y continuar aún con más logros en sus avances. Como se observó anteriormente, también puede ser considerado en otros campos, aquellos que estén relacionados con la teoría de valoraciones,[17] los espacios lineales valorados, espacios de arcos, y ecuaciones diferenciales.[18]

El Capítulo 2 presenta e introduce, a modo de un recorrido no muy profundo, algunos resultados y conceptos importantes de las Teorías de Grupos y el Orden, que se utilizarán a lo largo de este escrito. Entre ellos, un concepto no tan usual, el producto de Hahn de una familia de grupos. En este trabajo resulta infructuoso presentar un recorrido del Álgebra Lineal, pues los resultados que se utilizan de esta área son en verdad muy escasos, a más de básicos y comunes dentro de la Matemática. Lo que

[10] Cf. [13] pp. 57.
[11] Se los conoce simplemente como "po–sets". Ver e.g. en [2] pp. 1 o [7] pp. 143.
[12] Cf. [7] pp. 143.
[13] Cf. [1] pp. 430, [6] pp. 646 y [7] pp. 143.
[14] Ver [1], Sección 3, Lema 4, pp. 431–432.
[15] Ver [20], Lema (Banaschewski), pp. 19–22.
[16] Ver [23], Sección 3, Proposición 3.5, pp. 121–122.
[17] Ver e.g. [5], [20] y [24].
[18] Ver e.g. [3], [6] y [12].

sí se presenta es un preámbulo corto y necesario en el Capítulo 5, para demostrar los resultados finales que son los principales.

El Capítulo 3 es un resumen detallado de la teoría de grupos abelianos divisibles. En este se presentan las definiciones de grupo abeliano divisible, el cierre divisible de un grupo abeliano, y se muestran algunos resultados. Entre ellos, uno muy importante porque se lo usa significativamente en los siguientes capítulos, y es el de que todo grupo abeliano libre de torsión es de manera natural un subgrupo de su cierre divisible (Proposición 3.3).

El Capítulo 4 es un resumen detallado de la teoría de grupos abelianos ordenados. En este se presentan las definiciones de grupo abeliano ordenado, grupo arquimediano, subgrupo aislado, el esqueleto de un grupo abeliano ordenado, entre algunas otras. Se muestran varios resultados, algunos muy importantes como los de Hölder (Teorema 4.11 y Proposición 4.22). Todos estos necesarios para que junto con los del Capítulo 3 se establezca el Capítulo 5.

En el Capítulo 5 se presentan resultados de la teoría de grupos abelianos divisibles y ordenados. Con estos resultados en parte se demuestran: el Teorema 5.6, que describe la estructura que tienen los grupos abelianos divisibles y ordenados de rango numerable; y el Teorema 5.8, que es el último y más importante, porque describe la estructura que tienen los grupos abelianos ordenados de rango finito.

Capítulo 2

Fundamentos Preliminares

Este capítulo es un breve resumen de las Teorías de Grupos y el Orden, en el que adecuadamente se presentan solo los conceptos básicos, propiedades y resultados, que se utilizarán en todos los siguientes capítulos. Las demostraciones y ejemplos que se muestran son para continuar estableciendo las teorías, o mostrar cómo se trabaja en ellas. Las referencias principales para este capítulo son [2], [8], [10] y [23], donde se encuentran el resto de las demostraciones.

2.1. Teoría de Grupos

2.1.1. Definiciones y Propiedades

LEMA 2.1. *Sean G un conjunto y $\divideontimes\colon G \times G \to G$ una función, entonces a lo más un elemento e de G cumple que $e \divideontimes g = g = g \divideontimes e$, para todo $g \in G$.*

DEFINICIÓN 2.1. *Sean G un conjunto y $+$[1]$\colon G \times G \to G$ una función. Se dice que el par ordenado $(G, +)$ es **grupo**[2], cuando se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$, para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ $\big($i.e., $+$ es asociativa$\big)$.*
2. *Existe un $0 \in G$ tal que $0 + g = g = g + 0$, para todo $g \in G$ $\big($por el lema anterior, un tal 0 es único$\big)$.*
3. *Para todo $g \in G$, existe $-g \in G$ tal que $g + (-g) = 0 = (-g) + g$.*

[1] En adelante se usa de forma general la notación aditiva, porque se trabaja con grupos abelianos.

[2] El primero en utilizar y presentar el término "grupo" en un contexto matemático, fue el matemático francés Évariste Galois (25 de octubre de 1811 – 31 de mayo de 1832), quien es considerado el fundador de la Teoría de Grupos. Usó los grupos para investigar la resolución de ecuaciones de grado superior también conocidas como ecuaciones polinómicas.

Dados dos grupos $(G, +_G)$ y $(H, +_H)$. Siguiendo un abuso de notación común, por simplicidad, se escribirán $(G, +)$ y $(H, +)$, teniendo siempre presente que la función subyacente de cada grupo no necesariamente es la misma.

OBSERVACIÓN 2.1. Dado un grupo $(G, +)$. Se tiene que $G \neq \emptyset$, pues existe al menos el elemento único 0 de G, que se lo llamará ***el elemento neutro de*** $(G, +)$.

LEMA 2.2. *Sean $(G, +)$ un grupo y $g \in G$, entonces $-g \in G$ es único, y se lo llamará **el elemento inverso de g en G respecto de $+$**.*

EJEMPLO 2.1. Los pares ordenados $(\mathbb{Z}_{>0}, +)$, $(\mathbb{N}, +)$ y $(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot)$ no son grupos. Pero los pares ordenados $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sí lo son. Respectivamente, estos son los grupos ***aditivos*** y ***multiplicativos*** más comunes.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea $(G, +)$ un grupo. Se dice que $(G, +)$ es **abeliano**[3] (o **conmutativo**), cuando para todo $g, h \in G$, se cumple que $g + h = h + g$ $\big($i.e., cuando $+$ es conmutativa$\big)$.*

EJEMPLO 2.2. Sean $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{n^2}(\mathbb{R}) \colon A \text{ es invertible}\}$. Al grupo $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ se lo llamará ***el grupo lineal general real de grado*** n. Si $n \neq 1$, el grupo $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ no es abeliano. Pero el grupo $(M_{n^2}(\mathbb{R}), +)$ sí lo es, aún si $n = 1$.

LEMA 2.3. *Sean $(G, +)$ un grupo y $g, h \in G$, entonces $-(g + h) = (-h) + (-g)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
(-h) + (-g) &= 0 + ((-h) + (-g)) \\
&= [(-(g+h)) + (g+h)] + (-h) + (-g) \\
&= (-(g+h)) + g + (h + (-h)) + (-g) \\
&= (-(g+h)) + g + (0 + (-g)) \\
&= (-(g+h)) + (g + (-g)) \\
&= (-(g+h)) + 0 \\
&= -(g+h).
\end{aligned}$$

□

[3] El término "abeliano" para un grupo conmutativo proviene del nombre del matemático noruego Niels Henrik Abel (5 de agosto de 1802 – 6 de abril de 1829), quien investigó estos grupos.

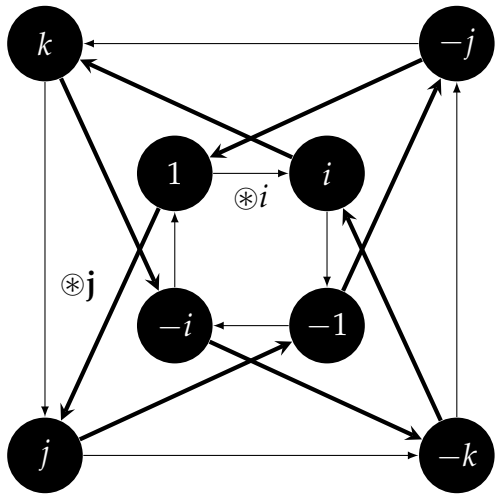
EJEMPLO 2.3. Sean $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, y la función $\circledast\colon Q_8 \times Q_8 \to Q_8$ bien definida por las ecuaciones:

$$i \circledast j = k,\ j \circledast k = i,\ k \circledast i = j,\ j \circledast i = -k,\ k \circledast j = -i,\ i \circledast k = -j,\ i \circledast i = j \circledast j = k \circledast k = -1;$$

y por la multiplicación usual de los signos. El siguiente diagrama permite recordar su definición:

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl, bend right] & \\ j \arrow[rr, bend right] & & k \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

Al grupo no abeliano $(Q_8, \circledast)$ se lo llamará ***el grupo de los cuaterniones***. Para este grupo, un posible ***diagrama de Cayley***[4] es el siguiente:



Dados un grupo $(G, +)$, un elemento g de G y un elemento n de $\mathbb{Z}$. Al elemento

$$ng := \begin{cases} \overbrace{g + \cdots + g}^{n \text{ veces}} & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{-n \text{ veces}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

se lo llamará ***el n–ésimo múltiplo de g***.

LEMA 2.4. *Para un grupo $(G, +)$, dos elementos n, m de $\mathbb{Z}$ y un elemento g de G, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

[4]Grafo finito que muestra la conformación abstracta de un grupo.

1. *Las funciones bien definidas*

$$\begin{aligned} \varsigma_g \colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto \varsigma_g(h) := g + h, \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} \tau_g \colon G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto \tau_g(h) := h + g \end{aligned}$$

   son biyectivas $\big($*i.e.,* $+$ *es cancelativa*$\big)$.

2. $m(ng) = mng$.

3. $ng + mg = (n + m)g$.

2.1.2. Subgrupos

OBSERVACIÓN 2.2. Dado un grupo $(G, +)$ y un subconjunto H de G. La función restringida $+|_H \colon H \times H \to G$ es asociativa.

DEFINICIÓN 2.3. *Sean* $(G,+)$ *un grupo y* $H \subseteq G$. *Se dice que* H *es* ***subgrupo de*** $(G,+)$, *y se denota por* $H \leq (G,+)$, *cuando* $(H,+|_H)$ *es grupo, i.e., cuando se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $g+h \in H$, *para todo* $g, h \in H$ $\big($*i.e.,* $+|_H$ *es clausurativa*$\big)$.

2. *Existe un* $0_H \in H$ *tal que* $0_H + h = h = h + 0_H$, *para todo* $h \in H$ $\big($*por el Lema 2.1, un tal* 0_H *es único*$\big)$.

3. *Para todo* $h \in H$, *existe* $-h_H \in H$ *tal que* $h + (-h_H) = 0 = (-h_H) + h$.

OBSERVACIÓN 2.3. Dado un grupo $(G, +)$. Los subconjuntos G y $\{0\}$ de G son subgrupos de $(G, +)$, y se los llamará ***los subgrupos triviales de*** $(G, +)$.

EJEMPLO 2.4. Los grupos $(\{0\}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ son subgrupos del grupo $(\mathbb{R}, +)$. Los grupos $(\{1\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ y $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ son subgrupos del grupo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

OBSERVACIÓN 2.4. Cualquier subgrupo de un grupo abeliano también es abeliano.

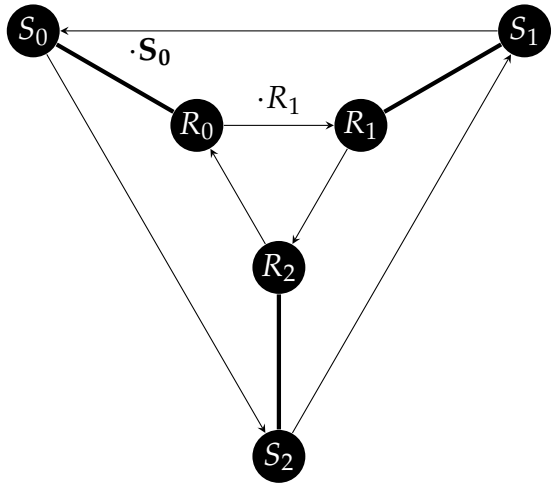
EJEMPLO 2.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $n\mathbb{Z} := \{nm : m \in \mathbb{Z}\}$. El grupo abeliano $(n\mathbb{Z}, +)$ es subgrupo del grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$.

Dado un grupo $(G,+)$. Siguiendo abusos de notación y lenguaje muy comunes, por simplicidad, frecuentemente se escribirá solo al conjunto G y se lo llamará el grupo, haciendo referencia táctica a la función subyacente $+$ que lo hace grupo. De esta manera; por un lado, dado un subgrupo H de $(G,+)$, se escribirá $H \leq G$ y se lo llamará el subgrupo H de G; y por otro lado, al elemento 0 se lo llamará el elemento neutro de G. Además, dado un elemento g de G, al elemento $-g$ se lo llamará el elemento inverso de g en G, y dado otro elemento h de G, los elementos $g+(-h)$, $h+(-g)$, $(-h)+g$ y $(-g)+h$ se escribirán $g-h$, $h-g$, $-h+g$ y $-g+h$, respectivamente.

LEMA 2.5. *Para un grupo $(G,+)$ y un subgrupo H de G, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *El elemento neutro de G pertenece a H, y coincide con el elemento neutro de H $\big($i.e., $0 = 0_H\big)$.*
2. *Para todo $h \in H$, el elemento inverso de h en G coincide con el elemento inverso de h en H $\big($i.e., $-h = -h_H\big)$.*

EJEMPLO 2.6. Sean $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $R_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R_1 := \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $S_1 := \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $R_2 := \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $S_2 := \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$, y $\mathrm{Dih}_3 := \{R_0, R_1, R_2, S_0, S_1, S_2\}$. El grupo no abeliano $(\mathrm{Dih}_3, \cdot)$ es subgrupo del grupo $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$, y se lo llamará ***el grupo diedral***. Su diagrama de Cayley es el siguiente:



Sean $H_1 = \{R_0, S_0\}$, $H_2 = \{R_0, S_1\}$, $H_3 = \{R_0, S_2\}$, y $H_4 = \{R_0, R_1, R_2\}$. Los grupos abelianos $(H_1, \cdot)$, $(H_2, \cdot)$, $(H_3, \cdot)$ y $(H_4, \cdot)$ son a su vez subgrupos del grupo $(\mathrm{Dih}_3, \cdot)$.

OBSERVACIÓN 2.5. Cualquier subgrupo de un grupo G, que esté contenido en un subgrupo H de G, también es subgrupo de H.

PROPOSICIÓN 2.6 (El Criterio de Subgrupo[5]). *Sean $(G,+)$ un grupo y $H \subseteq G$, entonces $H \leq G$ si y sólo si $H \neq \emptyset$ y $g - h \in H$, para todo $g, h \in H$. Más aún, si H es finito, entonces $H \leq G$ si y sólo si $H \neq \emptyset$ y $g + h \in H$, para todo $g, h \in H$.*

LEMA 2.7. *Sean G un grupo y $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ una familia de subgrupos de G, entonces la intersección generalizada de $\mathfrak{F}$ es subgrupo de G, i.e., $\bigcap_{H \in \mathfrak{F}} H \leq G$.*

2.1.3. Subgrupos Normales

DEFINICIÓN 2.4. *Sean $(G,+)$ un grupo, $g, h \in G$, y $H \leq G$:*

1. *Se dice que g **es congruente con** h **por la izquierda módulo** H, y se denota por $g \equiv_H^i h$, cuando $-g + h \in H$.*
2. *Se dice que g **es congruente con** h **por la derecha módulo** H, y se denota por $g \equiv_H^d h$, cuando $g - h \in H$.*

LEMA 2.8. *Para un grupo $(G,+)$ y un subgrupo H de G, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Las relaciones $\equiv_H^i$ y $\equiv_H^d$ sobre $G \times G$ son de equivalencia.*
2. *$[g]_H^i = g + H := \{g + h : h \in H\}$, y $[g]_H^d = H + g := \{h + g : h \in H\}$, para todo $g \in G$. A estas clases de equivalencia se las llamará **las clases laterales de** g, **izquierda** y **derecha** respectivamente, para todo $g \in G$.*
3. *Para todo $g \in G$, existen funciones biyectivas $f_i \colon H \to [g]_H^i$ y $f_d \colon H \to [g]_H^d$.*

EJEMPLO 2.7. Sean $H_1 = \{\pm 1\}$, $H_2 = \{\pm 1, \pm i\}$, $H_3 = \{\pm 1, \pm j\}$, y $H_4 = \{\pm 1, \pm k\}$. Los grupos abelianos $(H_1, \circledast)$, $(H_2, \circledast)$, $(H_3, \circledast)$ y $(H_4, \circledast)$ son subgrupos del grupo $(Q_8, \circledast)$. Con el subgrupo H_1 se obtienen las siguientes clases laterales:

[5] Ver [8], Capítulo 2, Proposición 1, pp. 47–48.

$$
\begin{gathered}
1 \circledast H_1 = (-1) \circledast H_1 := H_1 =: H_1 \circledast (-1) = H_1 \circledast 1, \\
i \circledast H_1 = (-i) \circledast H_1 := \{\pm i\} =: H_1 \circledast (-i) = H_1 \circledast i, \\
j \circledast H_1 = (-j) \circledast H_1 := \{\pm j\} =: H_1 \circledast (-j) = H_1 \circledast j, \\
\text{y} \\
k \circledast H_1 = (-k) \circledast H_1 := \{\pm k\} =: H_1 \circledast (-k) = H_1 \circledast k.
\end{gathered}
$$

EJEMPLO 2.8. Con el subgrupo H_1 del Ejemplo 2.6 se obtienen las siguientes clases laterales:

$$
\begin{gathered}
R_0 \cdot H_1 = S_0 \cdot H_1 := H_1 =: H_1 \cdot S_0 = H_1 \cdot R_0, \\
R_1 \cdot H_1 := \{R_1, S_1\} =: S_1 \cdot H_1, \qquad H_1 \cdot R_1 := \{R_1, S_2\} =: H_1 \cdot S_2, \\
R_2 \cdot H_1 := \{R_2, S_2\} =: S_2 \cdot H_1, \qquad \text{y} \qquad H_1 \cdot R_2 := \{R_2, S_1\} =: H_1 \cdot S_1.
\end{gathered}
$$

LEMA 2.9. *Sean G un grupo, $H \leq G$ y $g \in G$, entonces $g + H = H + g$ (i.e., las relaciones de equivalencia $\equiv_H^i$ y $\equiv_H^d$ sobre $G \times G$ coinciden) si y sólo si $g + h - g \in H$, para todo $h \in H$.*

DEFINICIÓN 2.5. *Sean $(G, +)$ un grupo y $H \leq G$. Se dice que H es **subgrupo normal de** G, y se denota por $H \trianglelefteq G$, cuando para todo $g \in G$, se cumple que $g + H = H + g$.*

OBSERVACIÓN 2.6. Los subgrupos triviales de cualquier grupo son normales.

EJEMPLO 2.9. Sean G un grupo y $N_G := \{g+h-g-h \colon g, h \in G\}$. El grupo N_G es subgrupo normal de G. A este subgrupo normal se lo llamará ***el subgrupo conmutador*** (o ***derivado***) ***de*** G.

EJEMPLO 2.10. Sean $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \colon \text{el determinante de } A \text{ es } 1\}$, y $D_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$. Al grupo $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ se lo llamará ***el grupo lineal especial real de grado*** n. Si $n \neq 1$, el grupo $(D_n(\mathbb{R}), \cdot)$ no es subgrupo normal del grupo $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$. Pero el grupo $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ sí lo es, aún si $n = 1$.

OBSERVACIÓN 2.7. Cualquier subgrupo de un grupo abeliano es normal.

EJEMPLO 2.11. En el grupo del Ejemplo 2.7, los subgrupos H_1, H_2, H_3 y H_4 son normales (i.e., todos sus subgrupos son normales)[6].

[6] A un grupo no abeliano con esta propiedad se lo conoce más como ***grupo Hamiltoniano***.

EJEMPLO 2.12. En el grupo del Ejemplo 2.6, los subgrupos H_1, H_2 y H_3 no son normales, pero el subgrupo H_4 sí lo es.

Dados un grupo G y un subgrupo normal H de G. Se denota por $\equiv_H$ a la relación de equivalencia $\equiv_H^{\mathrm{i}}$ que coincide con $\equiv_H^{\mathrm{d}}$, y por G/H a la partición de G inducida por $\equiv_H$. Dadas dos clases de equivalencia $[g]_H, [h]_H \in G/H$, para cada $g_1, g_2 \in [g]_H := g + H$ y cada $h_1, h_2 \in [h]_H := h + H$, se tiene que $-g_1 + g_2, -h_1 + h_2 \in H$, lo que implica $-h_1 + (-g_1 + g_2) + h_1 \in H$ por la normalidad de H, y entonces,

$$\begin{aligned} -(g_1 + h_1) + (g_2 + h_2) &= (-h_1 - g_1 + g_2) + h_2 \\ &= (-h_1 - g_1 + g_2) + 0 + h_2 \\ &= (-h_1 - g_1 + g_2 + h_1) + (-h_1 + h_2) \in H, \end{aligned}$$

i.e., $g_1 + h_1 \equiv_H g_2 + h_2$, así $g_1 + h_1, g_2 + h_2 \in (g + h) + H =: [g + h]_H$. Por lo tanto, resulta inmediato que la función

$$\begin{aligned} +\colon\ G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g + H, h + H) &\longmapsto (g + H) + (h + H) := (g + h) + H \end{aligned}$$

está bien definida, y cumple las tres propiedades para que con ella G/H sea grupo, tomando a la clase H como el elemento neutro de G/H, y a la clase $-g+H$ como el elemento inverso de $g+H$. A este grupo se lo llamará ***el cociente de*** G ***sobre*** H.

EJEMPLO 2.13. Sea G un grupo. Con los subgrupos normales triviales de G se obtienen los grupos cocientes $G/\{0\} := \{\{g\} : g \in G\}$ y $G/G := \{G\}$.

EJEMPLO 2.14. Sean $n \in \mathbb{N}$. Con el subgrupo normal $n\mathbb{Z}$ del grupo $(\mathbb{Z}, +)$ se obtiene el grupo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{0+n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1)+n\mathbb{Z}\}$. A este grupo cociente se lo conoce más como ***el grupo de los enteros módulo*** n, y se lo denota por $\mathbb{Z}_n := \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$.

EJEMPLO 2.15. Con el subgrupo normal $\mathbb{Z}$ del grupo $(\mathbb{R}, +)$ se obtiene el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{\alpha + \mathbb{Z} : -1 < \alpha < 1\}$.

EJEMPLO 2.16. Con el subgrupo normal $\mathbb{Z}$ del grupo $(\mathbb{Q}, +)$ se obtiene el grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} := \left\{\frac{a}{b} + \mathbb{Z} : a, b \text{ coprimos}, b > 0, \text{ y } -b < a < b\right\} \leq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

EJEMPLO 2.17. Con los subgrupos normales H_1, H_2, H_3 y H_4 del Ejemplo 2.7 se obtienen los siguientes grupos cocientes:

$$Q_8/H_1 := \{H_1, i \circledast H_1, j \circledast H_1, k \circledast H_1\}^7,$$
$$Q_8/H_2 := \{H_2, j \circledast H_2\}, \quad Q_8/H_3 := \{H_3, k \circledast H_3\}, \quad \text{y} \quad Q_8/H_4 := \{H_4, i \circledast H_4\}.$$

EJEMPLO 2.18. Con el subgrupo normal H_4 del Ejemplo 2.6 se obtiene el grupo cociente $\mathrm{Dih}_3/H_4 := \{H_4, S_0 \cdot H_4\}$.

LEMA 2.10. *Sea G un grupo, entonces G/N_G es abeliano. Además, si $H \trianglelefteq G$ tal que G/H es abeliano, entonces $N_G \leq H$. Por lo tanto, G es abeliano si y sólo si $N_G = \{0\}$.*

DEFINICIÓN 2.6. *Sean $(G, +)$ un grupo y $H \leq G$ $\big($resp. $H \trianglelefteq G\big)$. Se dice que H es **subgrupo** (resp. **subgrupo normal**) **propio** (o **estricto**) **de** G, y se denota por $H < G$ $\big($resp. $H \lhd G\big)$, cuando se cumple que H es subconjunto propio (o estricto) de G, i.e., cuando $H \subset G$.*

EJEMPLO 2.19. $D_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{Z}_{>0} \smallsetminus \{1\}$.

EJEMPLO 2.20. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

2.1.4. Subgrupos Generados y de Torsión

DEFINICIÓN 2.7. *Sean $(G, +)$ un grupo, $B \subseteq G$ y $H \leq G$. Se dice que H es **el subgrupo de** G **generado por** B, y se denota por $H = \langle B \rangle$, cuando se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$B \subseteq H$.*
2. *$B \subseteq K$ implica $H \leq K$, para todo $K \leq G$.*

COROLARIO 2.11. *Sean G un grupo y $B \subseteq G$, entonces existe $\langle B \rangle$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}_B = \{H \leq G : B \subseteq H\}$, entonces por el Lema 2.7, basta tomar $\langle B \rangle := \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_B} H$. □

[7] A este grupo se lo conoce más como ***el grupo de Klein***, y se lo denota por Vier.

LEMA 2.12. *Sean G un grupo, $B \subseteq G$, $-B := \{-g \in G : g \in B\}$ y $B' = -B \cup \{0\} \cup B$, entonces $\langle B \rangle := \{g_1 + \cdots + g_n \in G : n \in \mathbb{Z}_{>0} \wedge g_1, \ldots, g_n \in B'\}$.*

OBSERVACIÓN 2.8. Dados un grupo G y un subconjunto B de G. Se tiene que $\langle B \rangle$ es único, y también que es el subgrupo más pequeño que contiene a B. Además, si en particular $B = \{h\}$, entonces $\langle \{h\} \rangle := \{nh \in G : n \in \mathbb{Z}\}$.

EJEMPLO 2.21. Con el subconjunto $B = \left\{\frac{1}{p} : p \text{ es primo}\right\}$ del grupo $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ se obtiene el subgrupo generado $\langle B \rangle := \mathbb{Q}_{>0}$.

EJEMPLO 2.22. Con el subconjunto $B = \{i, j\}$ del grupo $(Q_8, \circledast)$ se obtiene el subgrupo generado $\langle B \rangle := Q_8$. Lo muestra su diagrama de Cayley 2.3.

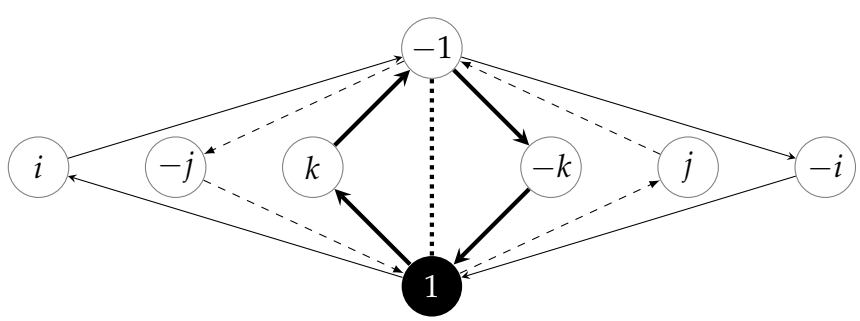
EJEMPLO 2.23. Con el subconjunto $B = \{R_0, S_0\}$ del grupo $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ se obtiene el subgrupo generado $\langle B \rangle := \mathrm{Dih}_3$. Lo muestra su diagrama de Cayley 2.6.

DEFINICIÓN 2.8. *Sea $(G, +)$ un grupo. Se dice que G es **cíclico**, cuando existe $h \in G$ tal que $\langle h \rangle := \langle \{h\} \rangle = G$.*

EJEMPLO 2.24. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus \{1\}$. El grupo $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ no es cíclico, pero el grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$ sí lo es.

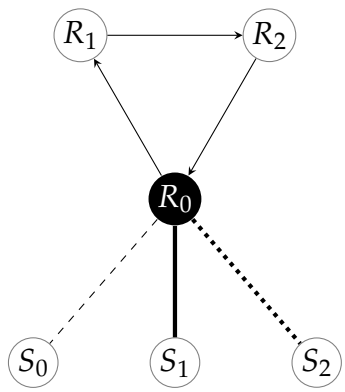
LEMA 2.13. *Sean G un grupo cíclico y $H \leq G$, entonces H es cíclico.*

EJEMPLO 2.25. El grupo $(Q_8, \circledast)$ no es cíclico, pero sus subgrupos propios sí lo son. Su ***diagrama de ciclos***[8] es el siguiente:



[8]Grafo finito que muestra los subgrupos cíclicos de un grupo.

EJEMPLO 2.26. El grupo $(\mathrm{Dih}_3, \cdot)$ no es cíclico, pero sus subgrupos propios sí lo son. Su diagrama de ciclos es el siguiente:



LEMA 2.14. *Si G es un grupo cíclico, entonces es abeliano.*

EJEMPLO 2.27. El grupo $(\mathbb{Q}, +)$ no es cíclico, pero el grupo $(\mathbb{Z}, +)$ sí lo es. De hecho, si $n \in \mathbb{N}$, el grupo $(n\mathbb{Z}, +)$ es cíclico.

DEFINICIÓN 2.9. *Sea $(G, +)$ un grupo. A $\sharp(G)$ se lo llamará **el orden de** G.*

EJEMPLO 2.28. El orden del grupo $(Q_8, \circledast)$ es 8. Es el grupo Hamiltoniano de orden más pequeño que existe.

EJEMPLO 2.29. El orden del grupo $(\mathrm{Dih}_3, \cdot)$ es 6. Es el grupo no abeliano de orden más pequeño que existe.

EJEMPLO 2.30. El orden del grupo $(\mathrm{Vier}, \circledast)$ es 4. Es el grupo no cíclico de orden más pequeño que existe.

LEMA 2.15. *Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, entonces existe un grupo de orden n.*

Demostración. Basta tomar el grupo de los enteros módulo n, pues $\sharp(\mathbb{Z}_n) = n$. $\square$

DEFINICIÓN 2.10. *Sean $(G, +)$ un grupo y $h \in G$. A $\sharp(\langle h \rangle)$ se lo llamará **el orden de** h.*

EJEMPLO 2.31. En el grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$: se tiene que 1 es el orden de $[0]_{12}$; que 2 es el de $[6]_{12}$; que 3 es el de $[4]_{12}$ y $[8]_{12}$; que 4 es el de $[3]_{12}$ y $[9]_{12}$; que 6 es el de $[2]_{12}$ y $[10]_{12}$; y que 12 es el de $[1]_{12}$, $[5]_{12}$, $[7]_{12}$ y $[11]_{12}$.

EJEMPLO 2.32. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Todos los elementos del grupo $(n\mathbb{Z}, +)$ tienen orden infinito, a excepción del 0 que tiene orden 1.

EJEMPLO 2.33. En el grupo $(Q_8, \circledast)$: se tiene que 1 es el orden de 1; que 2 es el de -1; y que 4 es el de $\pm i$, $\pm j$, y $\pm k$. Lo muestra su diagrama de ciclos 2.25.

EJEMPLO 2.34. En el grupo $(\mathrm{Dih}_3, \cdot)$: se tiene que 1 es el orden de R_0; que 2 es el de S_0, S_1 y S_2; y que 3 es el de R_1 y R_2. Lo muestra su diagrama de ciclos 2.26.

LEMA 2.16. *Para un grupo $(G, +)$, un elemento h de G y un elemento n de $\mathbb{Z}_{>0}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *n es el orden de h.*
2. *$n = \min\{m \in \mathbb{Z}_{>0} : mh = 0\}$.*
3. *$nh = 0$ y $n|k$, para todo $k \in \{m \in \mathbb{Z} : mh = 0\}$.*

DEFINICIÓN 2.11. *Sean $(G, +)$ un grupo y $h \in G$. Se dice que h es **de torsión**, cuando el orden de h es finito.*

EJEMPLO 2.35. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. En el grupo $(n\mathbb{Z}, +)$ no existen elementos de torsión, a excepción del 0. Pero en el grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$ sí, y de hecho, todos sus elementos son de torsión.

OBSERVACIÓN 2.9. Dados un grupo G y el conjunto $B = \{h \in G : h \text{ es de torsión}\}$. Se tiene que $B \leq G$. Además, si B es no nulo $\big($i.e., si $B \neq \{0\}\big)$, entonces se lo llamará ***el subgrupo de torsión de*** G.

EJEMPLO 2.36. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. El grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$ es el subgrupo de torsión de sí mismo.

EJEMPLO 2.37. El grupo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ es el subgrupo de torsión de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$.

DEFINICIÓN 2.12. *Sea $(G, +)$ un grupo. Se dice que G es **libre de torsión**, cuando para todo $H \leq G$ tal que $H \neq \{0\}$, se cumple que H no es de torsión $\big($i.e., cuando el único subgrupo de torsión de G es el trivial $\{0\}\big)$, i.e., cuando para todo $h \in G \smallsetminus \{0\}$, el orden de h es infinito.*

OBSERVACIÓN 2.10. Por definición, cualquier subgrupo de un grupo libre de torsión también es libre de torsión.

EJEMPLO 2.38. Sean p un número primo y $\mathbb{Q}_p := \left\{ \frac{n}{p^m} \in \mathbb{Q} : n, m \in \mathbb{Z} \right\}$. El grupo $(\mathbb{Z}_p, +)$ no es libre de torsión, pero el grupo $(\mathbb{Q}_p, +)$ sí lo es.

TEOREMA 2.17 (Joseph–Louis de Lagrange[9]). *Sea $(G, +)$ un grupo finito y $H \leq G$, entonces el orden de H divide al orden de G, i.e., $\sharp(H) | \sharp(G)$.*

COROLARIO 2.18. *Para un grupo finito $(G, +)$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *El orden de h divide al orden de G, para todo $h \in G$. Por lo tanto, $\sharp(G)h = 0$, para todo $h \in G$.*
2. *Si el orden de G es un número primo p, entonces G es cíclico. Por lo tanto, G es abeliano.*

2.1.5. Homomorfismos

DEFINICIÓN 2.13. *Sean $(G,+)$, $(H,+)$ grupos y $f\colon G \to H$ una función. Se dice que f es **homomorfismo**, cuando para todo $g, h \in G$, se cumple que $f(g+h) = f(g) + f(h)$.*

DEFINICIÓN 2.14. *Sean $(G, +)$, $(H, +)$ grupos y $f\colon G \to H$ un homomorfismo. Al conjunto $\mathrm{Ker}(f) := \{g \in G : f(g) = 0\}$ se lo llamará **el núcleo (o kernel) de** f.*

EJEMPLO 2.39. Sean G y H grupos. La función bien definida

$$\begin{aligned} 0_G^H \colon G &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto 0_G^H(g) := 0 \end{aligned}$$

es homomorfismo, y se lo conoce como ***el homomorfismo nulo de** G **en** H*. Su núcleo es el grupo G.

DEFINICIÓN 2.15. *Sean $(G, +)$, $(H, +)$ grupos y $f\colon G \to H$ un homomorfismo:*

[9] Ver [8], Capítulo 3, Teorema 8, pp. 89–90.

1. *Se dice que f es **monomorfismo**, o **de inmersión**, cuando f es inyectivo.*

$$G \overset{f}{\rightarrowtail} H$$

2. *Se dice que f es **epimorfismo**, cuando f es sobreyectivo.*

$$G \overset{f}{\twoheadrightarrow} H$$

3. *Se dice que f es **isomorfismo**, cuando f es biyectivo.*

$$G \overset{f}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} H$$

LEMA 2.19. *Para dos grupos $(G,+)$, $(H,+)$ y un homomorfismo $f\colon G \to H$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *La imagen del elemento neutro de G respecto de f coincide con el elemento neutro de H $\big($i.e., $f(0) = 0\big)$.*
2. *Para todo $g \in G$, la imagen del elemento inverso de g respecto de f coincide con el elemento inverso de $f(g)$ $\big($i.e., $f(-g) = -f(g)\big)$.*
3. *El núcleo de f es subgrupo de normal de G $\big($i.e., $\mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq G\big)$.*
4. *La imagen de f es subgrupo de H $\big($i.e., $\mathrm{Img}(f) \leq H\big)$.*
5. *f es monomorfismo si y sólo si su núcleo contiene únicamente al elemento neutro de G $\big($i.e., f es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}\big)$.*

EJEMPLO 2.40. Sean G un grupo y $H \leq G$. La función bien definida

$$\begin{aligned} \imath\colon H &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto \imath(h) := h \end{aligned}$$

es monomorfismo, y se lo llamará ***el monomorfismo inclusión de** H **en** G.*

EJEMPLO 2.41. Sean G un grupo y $g \in G$. La función bien definida

$$\begin{aligned} g_G\colon (\mathbb{Z},+) &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto g_G(n) := ng \end{aligned}$$

es homomorfismo, y se lo conoce como ***el homomorfismo múltiplo de** g **en** G.* Su núcleo es el subgrupo $\{n \in \mathbb{Z} : ng = 0\}$. Si g no es de torsión, g_G es monomorfismo.

EJEMPLO 2.42. Sean G un grupo y $H \trianglelefteq G$. La función bien definida

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\longrightarrow G/H \\ g &\longmapsto \varphi(g) := g + H \end{aligned}$$

es epimorfismo, y se lo llamará ***el epimorfismo canónico de*** G. Su núcleo es el subgrupo H.

EJEMPLO 2.43. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. La función determinante

$$\begin{aligned} \det\colon (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

es epimorfismo. Su núcleo es el subgrupo $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

EJEMPLO 2.44. Sea G un grupo abeliano. La función bien definida

$$\begin{aligned} \mathrm{op}\colon G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto \mathrm{op}\,(g) := -g \end{aligned}$$

es isomorfismo, y se lo conoce como ***el isomorfismo antipodal de*** G. Su inversa es la misma función.

EJEMPLO 2.45. La función exponencial

$$\begin{aligned} \exp\colon (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \\ \alpha &\longmapsto \exp(\alpha) := e^{\alpha} \end{aligned}$$

es isomorfismo. Su inversa es la función logaritmo natural

$$\begin{aligned} \ln\colon (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ \beta &\longmapsto \ln(\beta) := \log_e(\beta). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.16. *Sean G y H grupos:*

1. *Se dice que **de manera natural** G **es subgrupo de** H, o que G **se sumerge en** H, cuando existe un homomorfismo de inmersión entre G y H.*

2. *Se dice que G **es isomorfo a** H, o que H **es isomorfo a** G, y se denota por $G \simeq H$ o por $H \simeq G$ respectivamente; o simplemente se dice que G **y** H **son isomorfos**; cuando existe un isomorfismo entre G y H.*

EJEMPLO 2.46. Sea G un grupo. $G/\{0\} \simeq G$ y $G/G \simeq \{0\}$.

EJEMPLO 2.47. Con los grupos $(\mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_4, +)$ y los del Ejemplo 2.17:

$$\mathbb{Z}_2 \simeq H_1 \simeq Q_8/H_2 \simeq Q_8/H_3 \simeq Q_8/H_4, \quad \mathbb{Z}_4 \not\simeq \text{Vier}, \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}_4 \simeq H_2 \simeq H_3 \simeq H_4.$$

De manera natural $(\mathbb{Z}_2, +) \leq (Q_8, \circledast)$ y $(\mathbb{Z}_4, +) \leq (Q_8, \circledast)$. El grupo $(Q_8, \circledast)$ es el de más pequeño orden que demuestra que para uno de sus subgrupos normales (en este caso H_1) el grupo cociente Vier $:= Q_8/H_1$ no tiene que ser isomorfo a uno de los subgrupos de Q_8.

EJEMPLO 2.48. Con los grupos $(\mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_3, +)$ y los del Ejemplo 2.18:

$$\mathbb{Z}_2 \simeq H_1 \simeq H_2 \simeq H_3 \simeq \text{Dih}_3/H_4, \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}_3 \simeq H_4.$$

De manera natural $(\mathbb{Z}_2, +) \leq (\text{Dih}_3, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_3, +) \leq (\text{Dih}_3, \cdot)$.

2.2. Teoría del Orden

DEFINICIÓN 2.17. *Sean G un conjunto y $\leq$ una relación sobre $G \times G$. Se dice que $\leq$ es **pre-orden de** (o **en**) G, que G es **pre-ordenado con** $\leq$, y se denota por $(G, \leq)$, cuando se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$g \leq g$, para todo $g \in G$ (i.e., $\leq$ es reflexiva).*
2. *$g_1 \leq g_2$ y $g_2 \leq g_3$ implica $g_1 \leq g_3$, para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ (i.e., $\leq$ es transitiva).*

OBSERVACIÓN 2.11. Cualquier subconjunto de un conjunto pre-ordenado también es pre-ordenado restringiendo el pre-orden del conjunto al subconjunto.

Dados dos conjuntos pre-ordenados $(G, \leq_G)$ y $(H, \leq_H)$. Siguiendo un abuso de notación común, por simplicidad, se escribirán $(G, \leq)$ y $(H, \leq)$, teniendo siempre presente que la relación con la que cada conjunto es pre-ordenado no necesariamente es la misma. Dados dos elementos g y h de G. Si no están relacionados con $\leq$, se dice que g y h ***no son comparables***. Si están relacionados con $\leq$, se dice que g y h ***son comparables***. Además, suponiendo que se tiene $g \leq h$, esto se leerá g ***es menor igual que*** h, y teniendo presente que es lo mismo, frecuentemente se escribirá $h \geq g$, que se leerá h ***es mayor igual que*** g.

DEFINICIÓN 2.18. *Sea $(G, \leq)$ un conjunto pre-ordenado. Se dice que $\leq$ es* ***orden parcial de*** *(o* ***en****) G, y que G es* ***parcialmente ordenado con*** *$\leq$, cuando para todo $g, h \in G$ tales que $g \leq h$ y $h \leq g$, se cumple que $g = h$ (i.e., cuando $\leq$ es antisimétrica).*

OBSERVACIÓN 2.12. Cualquier subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado también es parcialmente ordenado restringiendo el orden parcial del conjunto al subconjunto.

Dados un conjunto parcialmente ordenado $(G, \leq)$ con dos elementos comparables g y h de forma que $g \leq h$. Si $g \neq h$, entonces $g \leq h$ se denota por $g < h$, que se leerá g ***es estrictamente menor que*** h, y teniendo presente que es lo mismo, frecuentemente se escribirá $h > g$, que se leerá h ***es estrictamente mayor que*** g.

DEFINICIÓN 2.19. *Sea $(G, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que $\leq$ es* ***orden total de*** *(o* ***en****) G, y que G es* ***ordenado con*** *$\leq$, cuando para todo $g, h \in G$, se cumple que $g \leq h$ o que $h \leq g$ (i.e., cuando todos sus elementos son comparables).*

OBSERVACIÓN 2.13. Cualquier subconjunto de un conjunto ordenado también es ordenado restringiendo el orden total del conjunto al subconjunto.

EJEMPLO 2.49. Sea G un conjunto. En el conjunto $\mathcal{P}(G) := \{H : H \subseteq G\}$, la relación inclusión $\subseteq$ es orden parcial. Si G tiene más de un elemento, este orden parcial no es total, pues se tienen $\{g\} \nsubseteq \{h\}$ y $\{h\} \nsubseteq \{g\}$, para todo $g, h \in G$ tales que $g \neq h$.

EJEMPLO 2.50. En el conjunto $\mathbb{Z}_{>0}$, la relación divisibilidad $|$ es orden parcial que no es total. En el conjunto $\mathbb{Z}^*$, esta relación no es orden parcial, pero sí es pre-orden.

EJEMPLO 2.51. Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ con el orden usual $\big($i.e., $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}\big)$ son ordenados.

EJEMPLO 2.52. Sean $(G, \leq)$ y $(H, \leq)$ conjuntos parcialmente ordenados. El conjunto $G \times H$ es parcialmente ordenado con la relación $\leq_\times$, definida por $(g_1, h_1) \leq_\times (g_2, h_2)$ cuando: $g_1 \leq g_2$ y $h_1 \leq h_2$. A este orden parcial se lo llamará ***el orden parcial producto de*** $G \times H$. El conjunto $G \times H$ también es parcialmente ordenado con la relación $\leq_{\text{lex}}$, definida por $(g_1, h_1) \leq_{\text{lex}} (g_2, h_2)$ cuando: $g_1 < g_2$ ó $\big[g_1 = g_2$ y $h_1 \leq h_2\big]$. A este orden parcial se lo llamará ***el orden parcial lexicográfico de*** $G \times H$.

Dados n conjuntos parcialmente ordenados $(G_1, \leq)$,...,$(G_n, \leq)$. Recursivamente se pueden definir en el conjunto $G_1 \times \cdots \times G_n$ sus respectivos órdenes parciales producto $\leq_\times$ y lexicográfico $\leq_{\text{lex}}$. Por lo tanto, suponiendo que están definidos en $G_1 \times \cdots \times G_{n-1}$, se definen en $G_1 \times \cdots \times G_n$ por $(g_1, \ldots, g_n) \leq_\times (h_1, \ldots, h_n)$ cuando: $(g_1, \ldots, g_{n-1}) \leq_\times (h_1, \ldots, h_{n-1})$ y $g_n \leq h_n$; y por $(g_1, \ldots, g_n) \leq_{\text{lex}} (h_1, \ldots, h_n)$ cuando: $(g_1, \ldots, g_{n-1}) <_{\text{lex}} (h_1, \ldots, h_{n-1})$ ó $\left[(g_1, \ldots, g_{n-1}) = (h_1, \ldots, h_{n-1}) \text{ y } g_n \leq h_n\right]$.

LEMA 2.20. *Si los conjuntos $(G_1, \leq)$,...,$(G_n, \leq)$ son ordenados, entonces el conjunto $(G_1 \times \cdots \times G_n, \leq_{\text{lex}})$ es ordenado.*

DEFINICIÓN 2.20. *Sean $(G, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $g \in G$:*

1. *Se dice que g es **máximo**, cuando para todo $h \in G$, se cumple que $g \geq h$.*
2. *Se dice que g es **mínimo**, cuando para todo $h \in G$, se cumple que $g \leq h$.*

EJEMPLO 2.53. $(\mathbb{Q}, \leq)$ no tiene máximo, tampoco mínimo.

EJEMPLO 2.54. Sea G un conjunto. $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$ tiene máximo que es el conjunto G, y también mínimo que es el conjunto $\emptyset$.

EJEMPLO 2.55. $(\mathbb{Z}_{>0}, |)$ no tiene máximo, pero sí mínimo que es el número 1.

EJEMPLO 2.56. El conjunto $\mathbb{N}$ con el orden total usual opuesto no tiene mínimo, pero sí máximo que es el número 0.

DEFINICIÓN 2.21. *Sea $(G, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que $\leq$ es **buen orden de** (o **en**) G, y que G **es** (o **está**) **bien ordenado con** $\leq$, cuando para todo $H \subseteq G$ tal que $H \neq \emptyset$, se cumple que H tiene mínimo.*

OBSERVACIÓN 2.14. Por definición, cualquier subconjunto de un conjunto bien ordenado también es bien ordenado.

EJEMPLO 2.57. $(\mathbb{Z}_{>0}, |)$ no está bien ordenado, pero $(\mathbb{Z}_{>0}, \leq)$ sí lo está.

OBSERVACIÓN 2.15. Cualquier conjunto bien ordenado es ordenado.

LEMA 2.21. *Sean $(G, \leq)$ un conjunto ordenado y $H \subseteq G$ finito, entonces H está bien ordenado.*

LEMA 2.22. *Sean $(G, \leq)$ un conjunto ordenado y $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ una familia finita de subconjuntos de G bien ordenados, entonces la unión generalizada de $\mathfrak{F}$, i.e., $\left(\bigcup_{H \in \mathfrak{F}} H, \leq\right)$ está bien ordenada.*

LEMA 2.23. *Si los conjuntos $(G_1, \leq)$,...,$(G_n, \leq)$ están bien ordenados, entonces el conjunto $(G_1 \times \cdots \times G_n, \leq_{lex})$ está bien ordenado.*

DEFINICIÓN 2.22. *Sean $(G,+)$, $(H,+)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : G \to H$ una función:*

1. *Se dice que f es **orden preservante** (i.e., que **preserva el orden**), o **creciente**, o **monótona**, cuando para todo $g, h \in G$ tales que $g \leq h$, se cumple que $f(g) \leq f(h)$.*
2. *Se dice que f es **orden reflectante** (i.e., que **reflecta el orden**), cuando para todo $g, h \in G$ tales que $f(g) \leq f(h)$, se cumple que $g \leq h$.*
3. *Se dice que f es **orden inversora** (i.e., que **invierte el orden**), o **decreciente**, o **antítona**, cuando para todo $g, h \in G$ tales que $g \leq h$, se cumple que $f(h) \leq f(g)$.*

EJEMPLO 2.58. Sea $G \neq \emptyset$ un conjunto. La función bien definida

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(G) &\longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ H &\longmapsto f(H) := G \smallsetminus H \end{aligned}$$

(i.e., la función que asigna a un subconjunto de G su complemento en G) es orden inversora con respecto al orden parcial inclusión.

EJEMPLO 2.59. La función bien definida

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto f(n) := n + 1 \end{aligned}$$

(i.e., la función que asigna a un número natural su sucesor) es orden preservante y reflectante con respecto al orden total usual.

2.3. Grupos Abelianos

Desde esta sección se empieza a trabajar con grupos abelianos. A continuación se presentan las definiciones usuales del producto generalizado directo, la suma directa y el producto de Hahn de una familia de grupos. Este último concepto no muy común, pero imprescindible en este trabajo.

2.3.1. Producto Directo

Dados dos grupos abelianos $(G,+)$ y $(H,+)$. Resulta inmediato que la función

$$\begin{aligned} +\colon (G\times H)\times(G\times H) &\longrightarrow G\times H \\ ((g_1,h_1),(g_2,h_2)) &\longmapsto (g_1,h_1)+(g_2,h_2) := (g_1+g_2,h_1+h_2) \end{aligned}$$

está bien definida, y cumple las cuatro propiedades para que con ella $G\times H$ sea grupo abeliano, tomando al par ordenado $(0,0)$ como el elemento neutro de $G\times H$, y al par ordenado $(-g_1,-h_1)$ como el elemento inverso de (g_1,h_1). A este grupo se lo llamará ***el producto directo de*** G ***por*** H.

EJEMPLO 2.60. Con $(\mathbb{Z}_2,+)$ se obtiene $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 := \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\simeq$ Vier.

Dados una familia de grupos abelianos $\{G_i\}_{i\in I}$ con I ordenado, y su producto generalizado

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} G_i &:= \left\{ f\colon I\to \bigcup_{i\in I} G_i \ :\ f \text{ es función, y } f(i)\in G_i, \text{ para todo } i\in I \right\} \\ &:= \left\{ \underline{g} := (g_i)_{i\in I} \ :\ g_i\in G_i,\ \forall i\in I \right\}. \end{aligned}$$

Resulta inmediato que la función

$$\begin{aligned} +\colon \qquad \left(\prod_{i\in I} G_i\right)\times\left(\prod_{i\in I} G_i\right) &\longrightarrow \prod_{i\in I} G_i \\ \left(\underline{g},\underline{h}\right) = \left((g_i)_{i\in I},(h_i)_{i\in I}\right) =: (g_i,h_i)_{i\in I} &\longmapsto \underline{g}+\underline{h} := (g_i+h_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

está bien definida, y cumple las cuatro propiedades para que con ella $\prod_{i\in I} G_i$ sea grupo abeliano, tomando al vector $\underline{0} := (0)_{i\in I}$ como el elemento neutro de $\prod_{i\in I} G_i$, y al vector $-\underline{g} := (-g_i)_{i\in I}$ como el elemento inverso de $\underline{g}$. A este grupo se lo llamará ***el producto directo de*** $\{G_i\}_{i\in I.}$

Para cada $j \in I$, a la función bien definida

$$\begin{aligned} \pi_j \colon \prod_{i\in I} G_i &\longrightarrow G_j \\ \underline{g} &\longmapsto \pi_j(\underline{g}) := g_j \end{aligned}$$

se la llamará ***la proyección j–ésima de*** $\prod_{i\in I} G_i$. Para cada $\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i$, al conjunto $\operatorname{sop}(\underline{g}) := \left\{ i \in I : \pi_i(\underline{g}) \neq 0 \right\}$ se lo llamará ***el soporte de*** $\underline{g}$.

OBSERVACIÓN 2.16. Dado un elemento $\underline{g}$ de $\prod_{i\in I} G_i$. El soporte de $-\underline{g}$ coincide con el de $\underline{g}$ $\big($i.e., $\operatorname{sop}(-\underline{g}) = \operatorname{sop}(\underline{g})\big)$.

OBSERVACIÓN 2.17. Dados dos elementos $\underline{g}$ y $\underline{h}$ de $\prod_{i\in I} G_i$. El soporte de su suma está contenido en la unión de sus respectivos soportes $\big($i.e., $\operatorname{sop}(\underline{g}+\underline{h}) \subseteq \operatorname{sop}(\underline{g}) \cup \operatorname{sop}(\underline{h})\big)$.

Dado un elemento $\underline{g}$ de $\prod_{i\in I} G_i \smallsetminus \{\underline{0}\}$ tal que su soporte tiene mínimo. Al elemento $\operatorname{or}(\underline{g}) := \operatorname{mín}\left\{\operatorname{sop}(\underline{g})\right\} \in I$ se lo llamará ***el origen de*** $\underline{g}$ $\big($i.e., el $\operatorname{or}(\underline{g}) = i$ si y sólo si $\pi_i(\underline{g}) \neq 0$ y $\pi_j(\underline{g}) = 0$, para todo $j < i\big)$. Suponiendo que el $\operatorname{or}(\underline{g}) = i$, entonces al elemento $\operatorname{in}(\underline{g}) := \pi_i(\underline{g}) \in G_i$ se lo llamará ***el inicial de*** $\underline{g}$. Por convención, se acepta que el $\operatorname{sop}(\underline{0}) = \emptyset$, el $\operatorname{or}(\underline{0}) = \infty$ y el $\operatorname{in}(\underline{0}) = 0$. Además, de ser necesario, se pone $\overline{I} := I \cup \{\infty\}$, y se considera el orden en $\overline{I}$ como el de I junto con $i < \infty$, para todo $i \in I$.

OBSERVACIÓN 2.18. Dado un elemento $\underline{g}$ de $\prod_{i\in I} G_i$. Si el $\operatorname{sop}(\underline{g})$ está bien ordenado, entonces $\underline{g}$ tiene origen.

OBSERVACIÓN 2.19. Dado un elemento $\underline{g}$ de $\prod_{i\in I} G_i$. Si I está bien ordenado, entonces $\underline{g}$ tiene origen.

Dada una familia de grupos abelianos $\{G_i\}_{i\in I}$ con I ordenado y finito tal que $\sharp(I) = n$ $\big($i.e., con $I = [\![1, n]\!]\big)$. Su producto directo $\prod_{i\in I} G_i = \prod_{i=1}^{n} G_i$ se escribirá $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times G_{n-1} \times G_n$.

EJEMPLO 2.61. Sean p un número primo y G un grupo. Con la familia ordenada de grupos aditivos abelianos $\mathfrak{F} = \left\{ M_{p^2}(\mathbb{R}), p\mathbb{Z}, G/N_G, \mathbb{Z}_p, \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}_p \right\}$ se obtiene el grupo producto $\prod_{H\in\mathfrak{F}} H = M_{p^2}(\mathbb{R}) \times p\mathbb{Z} \times G/N_G \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p$.

Tomando $\underline{g} \in \prod_{H\in\mathfrak{F}} H$, el vector $\underline{g} = \left(I_p, p, N_G, [1]_p, \frac{1}{p}+\mathbb{Z}, \frac{p}{p+1}+\mathbb{Z}, \frac{p+1}{p^p}\right)$, con I_p la matriz identidad de dimensión p^2. El $\operatorname{sop}(\underline{g}) := [\![1,7]\!] \setminus \{3\}$, el $\operatorname{or}(\underline{g}) := 1$, y el $\operatorname{in}(\underline{g}) := \pi_1(\underline{g}) := g_1 := I_p$.

EJEMPLO 2.62. Con la familia ordenada de grupos multiplicativos abelianos $\mathfrak{F}=\{\mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*\}$ se obtiene el grupo producto $\prod_{H\in\mathfrak{F}} H = \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*$. Tomando $\underline{g} \in \prod_{H\in\mathfrak{F}} H$, el vector $\underline{g} = \left(1, \frac{p}{q}, -\frac{p}{q}, -\frac{q}{p}\right)$, con p y q números primos diferentes. El $\operatorname{sop}(\underline{g}) := [\![2,4]\!]$, el $\operatorname{or}(\underline{g}) := 2$, y el $\operatorname{in}(\underline{g}) := \pi_2(\underline{g}) := g_2 := \frac{p}{q}$.

Dada una familia de grupos abelianos $\{(G_i,+)\}_{i\in I}$ con I ordenado tal que $(G_i,+) = (G,+)$, para cada $i \in I$. A su producto directo $\prod_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} G$ se lo llamará ***el producto directo de*** $\sharp(I)$ ***copias de*** G. Además, si I es finito, entonces $\prod_{i\in I} G$ se escribirá $G^{\sharp(I)}$.

EJEMPLO 2.63. Sea p un número primo. Con la familia ordenada $\mathfrak{F} = \{\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p\}$ se obtiene el grupo producto $\prod_{H\in\mathfrak{F}} H = {\mathbb{Q}_p}^3 := \left\{\underline{g} := (g_1, g_2, g_3) : g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Q}_p\right\}$.

2.3.2. Suma Directa y Producto de Hahn

Dada una familia de grupos abelianos $\{G_i\}_{i\in I}$ con I ordenado. Al conjunto $\bigoplus_{i\in I} G_i := \left\{\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i : \sharp[\operatorname{sop}(\underline{g})] < \infty\right\}$ se lo llamará ***la suma directa de*** $\{G_i\}_{i\in I.}$

OBSERVACIÓN 2.20. Si $\underline{g} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, entonces $\underline{g}$ tiene origen.

Dada una familia de grupos abelianos $\{G_i\}_{i\in I}$ con I ordenado. Al conjunto $\biguplus_{i\in I} G_i := \left\{\underline{g} \in \prod_{i\in I} G_i : \text{el } \operatorname{sop}(\underline{g}) \text{ está bien ordenado, o } \underline{g} = \underline{0}\right\}$ se lo llamará ***el producto de Hahn de*** $\{G_i\}_{i\in I.}$

OBSERVACIÓN 2.21. $\bigoplus_{i\in I} G_i \subseteq \biguplus_{i\in I} G_i$.

EJEMPLO 2.64. Con la familia ordenada de grupos multiplicativos abelianos $\{\mathbb{Q}_{>0}\}_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ se obtienen el grupo suma $\bigoplus_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0} \subset \prod_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0}$, y el grupo producto de Hahn $\biguplus_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0} \subset \prod_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0}$.

OBSERVACIÓN 2.22. Si I está bien ordenado, entonces $\biguplus_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} G_i$.

EJEMPLO 2.65. Con la familia ordenada de grupos aditivos abelianos $\{i\mathbb{Z}\}_{i\in\mathbb{N}}$ se obtienen el grupo suma $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} i\mathbb{Z}$, y el grupo producto de Hahn $\biguplus_{i\in\mathbb{N}} i\mathbb{Z} = \prod_{i\in\mathbb{N}} i\mathbb{Z}$.

OBSERVACIÓN 2.23. Si I es finito, entonces $\bigoplus_{i\in I} G_i = \biguplus_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} G_i$.

EJEMPLO 2.66. Con la familia ordenada del Ejemplo 2.61 se obtienen el grupo suma $\bigoplus_{H\in\mathfrak{F}} H = M_{p^2}(\mathbb{R}) \oplus p\mathbb{Z} \oplus G/N_G \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}_p = \prod_{H\in\mathfrak{F}} H$, y el grupo producto de Hahn $\biguplus_{H\in\mathfrak{F}} H = M_{p^2}(\mathbb{R}) \uplus p\mathbb{Z} \uplus G/N_G \uplus \mathbb{Z}_p \uplus \mathbb{R}/\mathbb{Z} \uplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \uplus \mathbb{Q}_p = \prod_{H\in\mathfrak{F}} H$.

PROPOSICIÓN 2.24. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos con I ordenado, entonces $\bigoplus_{i\in I} G_i \leq \biguplus_{i\in I} G_i \leq \prod_{i\in I} G_i$.*

Demostración. Por definición $\underline{0} \in \biguplus_{i\in I} G_i$. Sean $\underline{g}, \underline{h} \in \biguplus_{i\in I} G_i$, entonces el $\operatorname{sop}(\underline{g})$ y el $\operatorname{sop}(\underline{h})$ están bien ordenados, por lo tanto, el $\operatorname{sop}(\underline{g} - \underline{h})$ está bien ordenado. Así $\biguplus_{i\in I} G_i \leq \prod_{i\in I} G_i$, por la Proposición 2.6.
Como $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{0})] = 0$, entonces $\underline{0} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$. Sean $\underline{g}, \underline{h} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, entonces $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{g})] < \infty$ y $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{h})] < \infty$, lo que implica $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{g}) \cap \operatorname{sop}(\underline{h})] < \infty$ y $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{g}) \cup \operatorname{sop}(\underline{h})] < \infty$ pues $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{g}) \cup \operatorname{sop}(\underline{h})] = \sharp[\operatorname{sop}(\underline{g})] + \sharp[\operatorname{sop}(\underline{h})] - \sharp[\operatorname{sop}(\underline{g}) \cap \operatorname{sop}(\underline{h})]$, por lo tanto, $\sharp[\operatorname{sop}(\underline{g} - \underline{h})] < \infty$. Así $\bigoplus_{i\in I} G_i \leq \biguplus_{i\in I} G_i$, por la Proposición 2.6. □

OBSERVACIÓN 2.24. Dadas dos familias de grupos abelianos $\{G_i\}_{i\in I}$ y $\{H_i\}_{i\in I}$ con I ordenado. Si $H_i \leq G_i$ para cada $i \in I$, entonces $\bigoplus_{i\in I} H_i \leq \bigoplus_{i\in I} G_i$, $\biguplus_{i\in I} H_i \leq \biguplus_{i\in I} G_i$, y $\prod_{i\in I} H_i \leq \prod_{i\in I} G_i$.

EJEMPLO 2.67. Con la familia ordenada del Ejemplo 2.64: $\bigoplus_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0} \leq \bigoplus_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{R}^*$, $\biguplus_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0} \leq \biguplus_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{R}^*$, y $\prod_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{>0} \leq \prod_{i\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathbb{R}^*$.

EJEMPLO 2.68. Con la familia ordenada del Ejemplo 2.62: $\bigoplus_{H\in\mathfrak{F}} H \leq \mathbb{Q}^* \uplus \mathbb{R}^* \uplus \mathbb{Q}^* \uplus \mathbb{R}^*$, $\bigoplus_{H\in\mathfrak{F}} H \leq \mathbb{Q}_{>0} \uplus \mathbb{R}^{*3}$, $\bigoplus_{H\in\mathfrak{F}} H \leq \mathbb{R}_{>0}{}^2 \uplus \mathbb{Q}^* \uplus \mathbb{R}^* \leq \mathbb{R}^{*2} \uplus \mathbb{Q}^* \uplus \mathbb{R}^* \leq \mathbb{R}^{*4}$, entre algunos más.

LEMA 2.25. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos con I ordenado, entonces de manera natural $G_i \leq \bigoplus_{i\in I} G_i$, para todo $i \in I$.*

Demostración. Para todo $i \in I$, basta observar que

$$G_i \simeq \left\{ \underline{g} \in \bigoplus_{i\in I} G_i : g_j = 0, \forall j \in I \smallsetminus \{i\} \right\} \leq \bigoplus_{i\in I} G_i,$$

o definir el homomorfismo de inmersión

$$\begin{aligned} \imath_i \colon G_i &\longrightarrow \bigoplus_{i\in I} G_i \\ g_i &\longmapsto \imath_i(g_i) := \underline{g}^i \end{aligned}$$

siendo $\underline{g}^i \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ el vector $(g_i)_{i\in I}$ tal que $g_j = 0$, para todo $j \in I \smallsetminus \{i\}$. $\square$

Capítulo 3

Grupos Divisibles

En este capítulo se presenta el concepto básico de grupo divisible, ejemplos, sus propiedades, y resultados obtenidos. Todos juntos servirán mucho en el siguiente capítulo, y más en el Capítulo 5. Las referencias principales para este capítulo son [17], [20] y [23].

3.1. Definición y Propiedades

DEFINICIÓN 3.1. *Sea $(G, +)$ un grupo abeliano. Se dice que G es **divisible**, cuando para todo $g \in G$ y todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, existe $h \in G$ con el cual se cumple que $nh = g$.*

EJEMPLO 3.1. El grupo $(\mathbb{Z}, +)$ no es divisible, pero el grupo $(\mathbb{Q}, +)$ sí lo es.

OBSERVACIÓN 3.1. El hecho de que un grupo abeliano G sea divisible significa que para cada $g \in G$, la ecuación $nx = g$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tiene solución $x \in G$, pero no se afirma que esa solución sea única.

EJEMPLO 3.2. El grupo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ es divisible, pues para todo $\alpha = \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, basta tomar $\beta = \left(\frac{a}{nb} + \mathbb{Z}\right) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con el cual se cumple que $n\beta = \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Sin embargo, el elemento β no es único, pues basta observar que la igualdad $n\left[\left(\frac{a}{nb} + \frac{1}{n}\right) + \mathbb{Z}\right] = \alpha$ abre camino a muchas soluciones.

EJEMPLO 3.3. El grupo $(\mathbb{R}, +)$ es divisible; y además, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la ecuación $n\beta = \alpha$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tiene solución única $\beta = \dfrac{\alpha}{n} \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Para un grupo abeliano $(G, +)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es divisible y libre de torsión.*
2. *Para todo $g \in G$ y todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, se cumple que la ecuación $nx = g$ tiene una única solución en G.*
3. *G admite una estructura de $\mathbb{Q}$–espacio vectorial $\big($que extiende su estructura natural de $\mathbb{Z}$–módulo$\big)$.*

Demostración. Al ser G abeliano, es $\mathbb{Z}$–módulo.

Como G es divisible, entonces para todo $g \in G$ y todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, la ecuación $nx = g$ tiene solución $x \in G$. Si h_1 y h_2 son soluciones, se cumple que $g = nh_1 = nh_2$, lo que implica $n(h_1 - h_2) = 0$. Como G es libre de torsión, entonces el orden de $(h_1 - h_2)$ es infinito. Por lo tanto, $(h_1 - h_2) = 0$. Así 1 implica 2.

Como 2 se cumple, entonces basta definir

$$\begin{aligned} \bullet\colon\ \mathbb{Q} \times G &\longrightarrow G \\ \left(\frac{m}{n}, g\right) &\longmapsto \frac{m}{n} \bullet g := x \end{aligned}$$

siendo $x \in G$ la única solución de la ecuación $nx = mg$. Luego, resulta inmediato que esta función está bien definida, y cumple las cuatro propiedades para que con ella G sea $\mathbb{Q}$–espacio vectorial. Así 2 implica 3.

Como G es $\mathbb{Q}$–espacio vectorial. Por un lado, G es divisible, porque para todo $g \in G$ y todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, se cumple la igualdad $n\left(\dfrac{1}{n} \bullet g\right) = g$ con $\left(\dfrac{1}{n} \bullet g\right) \in G$. Por otro lado, G es libre de torsión, porque para todo $g \in G$ y todo $n \in \mathbb{Z}^*$, $ng = 0$ implica $0 = \dfrac{1}{n} \bullet 0 = \dfrac{1}{n} \bullet (ng) = n\left(\dfrac{1}{n} \bullet g\right) = g$. Así 3 implica 1. $\square$

3.2. El Cierre Divisible

En esta sección se presenta un hecho muy importante, y es el de que todo grupo abeliano libre de torsión puede sumergirse en un grupo divisible.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sean $(G,+)$ un grupo abeliano libre de torsión y $\sim$ la relación definida sobre el conjunto $\mathbb{Z}_{>0} \times G$ por $(n,g) \sim (m,h)$ cuando $mg = nh$, entonces $\sim$ es relación de equivalencia. Además, sean $\overline{G} := (\mathbb{Z}_{>0} \times G)/\sim$ y $\frac{g}{n}$ el representante de la clase de $(n,g) \in \mathbb{Z}_{>0} \times G$, entonces $(\overline{G},+)$ es grupo abeliano, donde $+$ es la función*

$$\begin{aligned} +\colon\ \overline{G} \times \overline{G} &\longrightarrow \overline{G} \\ \left(\frac{g}{n}, \frac{h}{m}\right) &\longmapsto \frac{g}{n} + \frac{h}{m} := \frac{mg+nh}{nm}. \end{aligned}$$

Más aún, $\overline{G}$ divisible y libre de torsión.

Demostración. Claramente $\sim$ es reflexiva y simétrica. Sean (n_1,g_1), (n_2,g_2) y (n_3,g_3) elementos de $\mathbb{Z}_{>0} \times G$ tales que $(n_1,g_1) \sim (n_2,g_2)$ y $(n_2,g_2) \sim (n_3,g_3)$, entonces se tiene que $n_2g_1 = n_1g_2$ y que $n_3g_2 = n_2g_3$, que implican $n_3(n_2g_1) = n_3(n_1g_2)$ y $n_1(n_3g_2) = n_1(n_2g_3)$. Al ser G abeliano, es $\mathbb{Z}$–módulo, y por tanto, se tiene que $n_2(n_3g_1) = n_2(n_1g_3)$, lo que implica $n_2(n_3g_1 - n_1g_3) = 0$. Al ser G libre de torsión, el orden de $(n_3g_1 - n_1g_3)$ es infinito, y por tanto, se tiene que $(n_3g_1 - n_1g_3) = 0$, lo que implica $(n_1,g_1) \sim (n_3,g_3)$. Así $\sim$ es relación de equivalencia.

Además, al ser G abeliano, es $\mathbb{Z}$–módulo. Por lo tanto, resulta inmediato que la función $+$ está bien definida, y cumple las cuatro propiedades para que con ella $\overline{G}$ sea grupo abeliano, tomando a la clase $\frac{0}{1} := \{(n,0) : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ como el elemento neutro 0 de $\overline{G}$, y a la clase $-\frac{g}{n} := \{(mn,-mg) : m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ como el elemento inverso de $\frac{g}{n}$. Más aún, $\overline{G}$ es divisible, pues para todo $\frac{g}{n} \in \overline{G}$ y todo $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, se cumple la igualdad $m\left(\frac{g}{mn}\right) = \frac{g}{n}$ con $\frac{g}{mn} \in \overline{G}$. Si $m\left(\frac{g}{n}\right) = 0$ para todo $\frac{g}{n} \in \overline{G}$ y todo $m \in \mathbb{Z}^*$, entonces $\frac{mg}{n} = \frac{0}{1}$, lo que implica $mg = n0$. Como G es libre de torsión, entonces $g = 0$, lo que implica $\frac{g}{n} = 0$. Así $\overline{G}$ también es libre de torsión. $\square$

Dado un grupo abeliano libre de torsión G. Al grupo abeliano divisible y libre de torsión construido en la proposición anterior $\overline{G} := (\mathbb{Z}_{>0} \times G)/\sim$ se lo llamará ***el cierre divisible de*** G. La siguiente proposición y el subsiguiente corolario explican el por qué de ese nombre.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean G un grupo abeliano libre de torsión y $\overline{G}$ su cierre divisible, entonces existe un monomorfismo $l\colon G \to \overline{G}$ tal que para todo monomorfismo $f\colon G \to H$ con H cualquier grupo abeliano divisible y libre de torsión, existe un único monomorfismo $t\colon \overline{G} \to H$ tal que $t \circ l = f$.*

Demostración. Basta tomar el homomorfismo

$$\begin{aligned} l\colon G &\longrightarrow \overline{G} \\ g &\longmapsto l(g) := \frac{g}{1}; \end{aligned}$$

en efecto, el $\mathrm{Ker}(l) = \{0\}$. Además, si $f\colon G \to H$ es un monomorfismo, con H un grupo abeliano divisible y libre de torsión, entonces basta definir el monomorfismo

$$\begin{aligned} t\colon \overline{G} &\longrightarrow H \\ \frac{g}{n} &\longmapsto t\left(\frac{g}{n}\right) := x \end{aligned}$$

siendo $x \in H$ la única solución de la ecuación $nx = f(g)$. De esta manera, t es único y para todo $g \in G$, se verifica que $[t \circ l](g) := t[l(g)] := t\left(\frac{g}{1}\right) := f(g)$. □

$$\begin{tikzcd} & & H \\ G \arrow[urr, "f=t\circ l"] \arrow[dr, "l"'] & & \\ & \overline{G} \arrow[uur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

COROLARIO 3.4. *Sean G un grupo abeliano libre de torsión y $\overline{G}$ su cierre divisible, entonces de manera natural $G \leq \overline{G}$, y además, $\overline{G}$ es el grupo divisible y libre de torsión más pequeño que contiene a G.*

Demostración. Por la proposición anterior. Por un lado, G resulta ser identificado con un subgrupo de $\overline{G}$, al tenerse $G \simeq \left\{\frac{g}{1} : g \in G\right\} =: \mathrm{Img}(l) \leq (\overline{G}, +)$. Por otro lado, si H es un grupo divisible y libre de torsión tal que $G \leq H$, entonces $\overline{G} \leq H$. □

3.3. Resultados en Grupos Libres de Torsión

Al trabajar con cierres divisibles y tomar diversos elementos conviene utilizar la siguiente técnica: Tomando $\frac{g_1}{n_1}, \ldots, \frac{g_i}{n_i}, \ldots, \frac{g_r}{n_r} \in \overline{G}$, se definen $n^* = n_1 \cdots n_i \cdots n_r$ y $n_i' = n_1 \cdots n_{i-1} \cdot n_{i+1} \cdots n_r$. Luego $\frac{n_i' g_i}{n^*} = \frac{g_i}{n_i}$, y por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{g_i}{n_i} = \frac{1}{n^*} \sum_{i=1}^{r} n_i' g_i.$$

A esta técnica se la llamará ***reducción a un común denominador***.

PROPOSICIÓN 3.5. *Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos libres de torsión con I ordenado, y $\{\overline{G_i}\}_{i\in I}$ su correspondiente familia de cierres divisibles, entonces el cierre divisible del producto de Hahn de $\{G_i\}_{i\in I}$ es igual al producto de Hahn de $\{\overline{G_i}\}_{i\in I}$, i.e.,*

$$\overline{\biguplus_{i\in I} G_i} = \biguplus_{i\in I} \overline{G_i}.$$

Demostración. Sea $\underline{g} \in \overline{\biguplus_{i\in I} G_i}$, con $\underline{g} \neq \underline{0}$, entonces existen $\underline{h} \in \biguplus_{i\in I} G_i$ y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\underline{g} = \dfrac{\underline{h}}{n}$ y $\underline{h} \neq \underline{0}$. Luego, $\underline{h} = (h_i)_{i\in I}$ con $h_i \in G_i$ para todo $i \in I$, $h_j \neq 0$ para al menos algún $j \in I$, y además, el $\operatorname{sop}(\underline{h})$ está bien ordenado. Como $g_i = \dfrac{h_i}{n} \in \overline{G_i}$ para todo $i \in I$, y el $\operatorname{sop}(\underline{g}) = \operatorname{sop}(\underline{h})$, entonces $\underline{g} \in \biguplus_{i\in I} \overline{G_i}$.

Recíprocamente, sea $\underline{g} \in \biguplus_{i\in I} \overline{G_i}$, con $\underline{g} \neq \underline{0}$, entonces $\underline{g} = (g_i)_{i\in I}$ con $g_i \in \overline{G_i}$ para todo $i \in I$, $g_j \neq 0$ para al menos algún $j \in I$, y además, el $\operatorname{sop}(\underline{g})$ está bien ordenado. Luego, para todo $i \in I$, existen $p_i \in G_i$ y $n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\left(\dfrac{p_i}{n_i}\right)_{i\in I} = \underline{g}$. Tomando $\underline{h} = (n_i' p_i)_{i\in I}$, el $\operatorname{sop}(\underline{h}) = \operatorname{sop}(\underline{g})$, pues los $\{G_i\}_{i\in I}$ son libres de torsión; así $\underline{h} \in \biguplus_{i\in I} G_i$. Tomando $n = n^* \in \mathbb{Z}_{>0}$, se tiene que $\dfrac{\underline{h}}{n} = \left(\dfrac{h_i}{n}\right)_{i\in I} = \left(\dfrac{n_i' p_i}{n^*}\right)_{i\in I} = \left(\dfrac{p_i}{n_i}\right)_{i\in I} = \underline{g}$, entonces $\underline{g} \in \overline{\biguplus_{i\in I} G_i}$. □

Dado un grupo abeliano libre de torsión G. Se denota por $\mathcal{S}(G)$ al conjunto que colecciona todos los subgrupos de G, y por $\mathcal{V}(\overline{G})$ al que colecciona todos los subespacios de su cierre divisible $\overline{G}$. Para cada elemento H de $\mathcal{S}(G)$, se toma como $\Gamma(H)$ el subespacio $\langle H\rangle$ de $\overline{G}$, y para cada elemento E de $\mathcal{V}(\overline{G})$, se toma como $\Delta(E)$ el subgrupo $E \cap G$ de G. De esta manera, se definen bien las funciones

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{V}(\overline{G}) \\ H &\longmapsto \Gamma(H) := \langle H\rangle, \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \Delta\colon \mathcal{V}(\overline{G}) &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ E &\longmapsto \Delta(E) := E \cap G. \end{aligned}$$

COROLARIO 3.6. *Si en los conjuntos $\mathcal{S}(G)$ y $\mathcal{V}(\overline{G})$ se toma el orden parcial inclusión, entonces las funciones Γ y Δ son crecientes.*

Demostración. Claramente Δ es creciente. Sean H_1 y $H_2 \in \mathcal{S}(G)$ tales que $H_1 \subseteq H_2$. Como $H_1 \subseteq \Gamma(H_2)$ y $\Gamma(H_1)$ es el subespacio más pequeño que contiene a H_1, entonces $\Gamma(H_1) \subseteq \Gamma(H_2)$. □

Dado un grupo abeliano libre de torsión G. Se denota por $\bullet$ a la función con la que su cierre divisible $\overline{G}$ es $\mathbb{Q}$–espacio vectorial. De esta manera, para cada $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y cada $\frac{g}{n} \in \overline{G}$, se tiene que $\frac{p}{q} \bullet \frac{g}{n} := \frac{pg}{qn}$.

LEMA 3.7. *Si $E \in \mathcal{V}(\overline{G})$, entonces $\Gamma(\Delta(E)) = E$.*

Demostración. Como $\Delta(E) \leq E$, y $\Gamma(\Delta(E))$ es el subespacio más pequeño que contiene a $\Delta(E)$, entonces $\Gamma(\Delta(E)) \leq E$.

Recíprocamente, sea $\alpha \in E$, como G es un sistema generador de $\overline{G}$, entonces existen $g_1, \ldots, g_r \in G$ y $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_r}{q_r} \in \mathbb{Q}$ con $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{q_i} \bullet \frac{g_i}{1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i g_i}{q_i} = \frac{1}{q^*} \sum_{i=1}^{r} q_i' p_i g_i.$$

Por lo tanto, se tiene que $q^*\alpha = \sum_{i=1}^{r} q_i' p_i g_i \in E \cap G =: \Delta(E)$, y como $\frac{1}{q^*} \in \mathbb{Q}$, entonces $\alpha = \left(\frac{1}{q^*} \bullet q^*\alpha\right) \in \Gamma(\Delta(E))$. $\square$

Dado un elemento H de $\mathcal{S}(G)$. En general no siempre es cierto que $\Delta(\Gamma(H)) = H$, como lo muestra el siguiente contraejemplo.

EJEMPLO 3.4. Al tomar $G = \mathbb{Z}$ y $H = 2\mathbb{Z} \in \mathcal{S}(G)$, se obtiene que $\overline{G} := \mathbb{Q}$ y que $\Gamma(H) := \mathbb{Q} =: \overline{H}$. Por lo tanto, $\Delta(\Gamma(H)) := \Gamma(H) \cap G = \mathbb{Z} \neq H$.

LEMA 3.8. *Si $H \in \mathcal{S}(G)$ y $\alpha \in \overline{G}$, entonces $\alpha \in \Gamma(H)$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\alpha \in H$.*

Demostración. Si $\alpha \in \Gamma(H)$, entonces existen $g_1, \ldots, g_r \in H$ y $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_r}{q_r} \in \mathbb{Q}$ con $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i}{q_i} \bullet \frac{g_i}{1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i g_i}{q_i} = \frac{1}{q^*} \sum_{i=1}^{r} q_i' p_i g_i.$$

Tomando $n = q^* \in \mathbb{Z}_{>0}$, se tiene que $n\alpha = \sum_{i=1}^{r} q_i' p_i g_i \in H$.

Recíprocamente, si existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\alpha \in H$, como $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \overline{G}$, entonces $\alpha = \left(\frac{1}{n} \bullet n\alpha\right) \in \Gamma(H)$. $\square$

Para finalizar, se presenta un resultado que es significativo, porque responde una interrogante muy considerable.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean G un grupo abeliano libre de torsión, $\overline{G}$ su cierre divisible, $H \leq G$, $\overline{H}$ su cierre divisible y $\Gamma(H)$ el subespacio vectorial de $\overline{G}$ generado por H, entonces $\overline{H} = \Gamma(H)$.*

Demostración. Como $\Gamma(H)$ es $\mathbb{Q}$–espacio vectorial, entonces por la Proposición 3.1, $\Gamma(H)$ es subgrupo abeliano divisible y libre de torsión de $\overline{G}$ tal que $H \leq \Gamma(H)$. Por lo tanto, $\overline{H} \leq \Gamma(H)$, por el Corolario 3.4.

Recíprocamente, por la definición de $\Gamma(H)$ y por reducción a un común denominador, todo elemento de $\Gamma(H)$ admite una escritura de la forma $\dfrac{h}{n}$ con $h \in H$ y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Por lo tanto, $\Gamma(H) \leq \overline{H}$. $\square$

Capítulo 4

Grupos Ordenados

En cada una de las tres secciones de este capítulo se presentan definiciones, ejemplos, propiedades, y resultados obtenidos sobre la teoría de grupos abelianos ordenados; lo necesario para establecer y obtener el resto de resultados del siguiente capítulo. Las referencias principales para este capítulo son [4], [19], [20] y [23].

4.1. Definiciones y Propiedades

DEFINICIÓN 4.1. *Sea $(G, +)$ un grupo abeliano. Se dice que G es **pre-ordenado**, cuando es pre-ordenado como conjunto, y su pre-orden $\leq$ es compatible, i.e., cuando para todo $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1 \leq g_2$, se cumple que $g_1 + g_3 \leq g_2 + g_3$, para todo $g_3 \in G$.*

OBSERVACIÓN 4.1. Cualquier subgrupo de un grupo pre-ordenado también es pre-ordenado restringiendo el pre-orden del grupo al subgrupo.

COROLARIO 4.1. *Sea $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano pre-ordenado, y sean $g, h \in G$, entonces $g, h \leq 0$ implica $g + h \leq 0$; y análogamente $g, h \geq 0$ implica $g + h \geq 0$.*

Demostración. Por definición $\leq$ en particular es compatible, entonces $g, h \leq 0$ implica $g + h \leq g \leq 0$; y análogamente $g, h \geq 0$ implica $g + h \geq g \geq 0$. □

DEFINICIÓN 4.2. *Sea $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano pre-ordenado. Se dice que G es **parcialmente ordenado** (resp. **ordenado**), cuando $\leq$ es orden parcial (resp. orden total).*

EJEMPLO 4.1. Los grupos $(\mathbb{Z}, +, \leq)$, $(\mathbb{Q}, +, \leq)$, $(\mathbb{R}, +, \leq)$, $(\mathbb{Z}^2, +, \leq_{\text{lex}})$, $(\mathbb{Q}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ y $(\mathbb{R}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ son ordenados.

OBSERVACIÓN 4.2. Cualquier subgrupo de un grupo parcialmente ordenado (resp. ordenado) también es parcialmente ordenado (resp. ordenado) restringiendo el orden parcial (resp. orden total) del grupo al subgrupo.

COROLARIO 4.2. *Sea $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano parcialmente ordenado, y sean $g, h \in G$, entonces $g, h < 0$ implica $g + h < 0$; y análogamente $g, h > 0$ implica $g + h > 0$.*

Demostración. Como G es parcialmente ordenado, entonces $\leq$ en particular es compatible de forma estricta. Por lo tanto, por el corolario anterior, $g, h < 0$ implica $g + h < 0$; y análogamente $g, h > 0$ implica $g + h > 0$. □

DEFINICIÓN 4.3. *Sean $(G, +, \leq)$, $(H, +, \leq)$ grupos abelianos pre-ordenados y sea $f \colon G \to H$ un homomorfismo. Se dice que f es **de orden**, cuando preserva el orden (i.e., cuando es creciente).*

DEFINICIÓN 4.4. *Sean $(G, +, \leq)$, $(H, +, \leq)$ grupos abelianos pre-ordenados y sea $f \colon G \to H$ un homomorfismo de orden. Se dice que f es **isomorfismo ordenado**, cuando es isomorfismo y reflecta el orden (i.e., cuando es biyectivo y su inversa es creciente).*

DEFINICIÓN 4.5. *Sean G y H grupos pre-ordenados (resp. parcialmente ordenados). Se dice que el pre-orden (resp. orden parcial) de G es igual al pre-orden (resp. orden parcial) de H, cuando existe un isomorfismo ordenado entre G y H. Además, en cualquier caso, se dice que G **es orden-isomorfo a** H, o que H **es orden-isomorfo a** G, y se denota por $G \cong H$ o por $H \cong G$ respectivamente; o simplemente se dice que G **y** H **son orden-isomorfos**.*

LEMA 4.3. *Sea $(G, +)$ un grupo abeliano, entonces G es ordenado si y sólo si existe $S \subseteq G$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$S \cup -S = G$.*
2. *$S \cap -S = \{0\}$.*
3. *Para todo $g, h \in S$, se cumple que $g + h \in S$.*

Demostración. Como G es ordenado, suponiendo $\leq$ su orden total, entonces basta tomar $S = \{g \in G : g \geq 0\}$. En efecto, S satisface la propiedad 1 porque $\leq$ es total, satisface la propiedad 2 porque $\leq$ en particular es reflexiva y antisimétrica, y satisface la propiedad 3 por el Corolario 4.1.

Recíprocamente, como $S \subseteq G$ cumple las tres propiedades, entonces basta definir la relación $\leq$ sobre el conjunto $G \times G$, por $g \leq h$ cuando $h - g \in S$. En efecto; por la propiedad 2, para todo $g \in G$, se tiene que $g - g = 0 \in S$, además, para todo $h \in G$ tal que $g \leq h$ y $h \leq g$, se tiene que $h - g = 0$, porque $h - g \in S$ y $h - g \in -S$; por la propiedad 3 para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ tales que $g_1 \leq g_2$ y $g_2 \leq g_3$, se tiene que $g_3 - g_1 = (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) \in S$, porque $g_2 - g_1 \in S$ y $g_3 - g_2 \in S$; y por la propiedad 1 para todo $g, h \in G$, se tiene que $h - g \in S$ o que $h - g \in -S$. □

OBSERVACIÓN 4.3. Además del conjunto $S := \{g \in G : g \geq 0\}$ definido en la primera parte de la demostración anterior, claramente se puede tomar el conjunto $\{g \in G : g \leq 0\} =: -S$ porque también cumple las tres propiedades. A estos subconjuntos se los llamará ***los conos de*** G, ***positivo*** y ***negativo*** respectivamente.

OBSERVACIÓN 4.4. En virtud del lema anterior, para cada $g, h \in G$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$g \leq h \equiv h - g \in S, \quad g < h \equiv h - g \in S \setminus \{0\}, \quad g \nleq h \equiv g > h, \quad \text{y} \quad g \nless h \equiv g \geq h.$$

LEMA 4.4. *Sean $(G,+,\leq)$, $(H,+,\leq)$ grupos abelianos ordenados, S, T sus respectivos conos positivos, y sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo, entonces f es de orden si y sólo si $f(S) \subseteq T$.*

Demostración. Sea $h \in f(S)$, entones existe $g \in S$ tal que $h = f(g)$. Como f es de orden, entonces $h \geq f(0) = 0$.

Recíprocamente, sean $g, h \in G$ tales que $g \leq h$, entonces $h - g \in S$. Como $f(S) \subseteq T$, entonces $f(h) - f(g) = f(h - g) \in T$. □

LEMA 4.5. *Si G es un grupo abeliano ordenado, entonces es libre de torsión.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $g \in G \setminus \{0\}$. Como G es ordenado, entonces $g > 0$ o $g < 0$. En cualquier caso, $ng \neq 0$ por el Corolario 4.2, pues $g > 0$ implica $ng > 0$ y $g < 0$ implica $ng < 0$. □

OBSERVACIÓN 4.5. En virtud del lema anterior, cualquier grupo abeliano ordenado tiene su cierre divisible.

LEMA 4.6. *Sean $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $g, h \in G$, entonces $g \leq h$ si y sólo si $ng \leq nh$.*

Demostración. Si $g \leq h$, entonces $n(h - g) \geq 0$ por el Corolario 4.1, lo que implica $ng \leq nh$.

Recíprocamente, como G es ordenado, si $ng > nh$, entonces $n(g-h) > 0$. Por el Lema 4.5, necesariamente se tiene que $g - h > 0$, lo que implica $g > h$. $\square$

LEMA 4.7. *Sean $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, $n, m \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$ tal que $g > 0$, entonces $ng \leq mg$ si y sólo si $n \leq m$.*

Demostración. Como $\mathbb{Z}$ y G son ordenados, si $n > m$, entonces $(n-m)g > 0$ por el Corolario 4.2, lo que implica $ng > mg$.

Recíprocamente, si $n \leq m$, entonces $(m-n)g \geq 0$ por el Corolario 4.2, lo que implica $ng \leq mg$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.8. *Sean $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, $\overline{G}$ su cierre divisible, y $l \colon G \to \overline{G}$ su homomorfismo de inmersión, entonces $\overline{G}$ es ordenado de modo que l es de orden.*

Demostración. Sea S el cono positivo de G, entonces por el Lema 4.3, basta tomar $\overline{S} = \left\{ \frac{g}{n} \in \overline{G} : g \in S \right\}$. En efecto, así $\overline{S}$ es el cono positivo de $\overline{G}$ porque S es el de G. Además, $l(S) := \left\{ \frac{g}{1} : g \in S \right\} \subseteq \overline{S}$, y así, l es de orden por el Lema 4.4. $\square$

OBSERVACIÓN 4.6. Como el conjunto $\overline{S} := \left\{ \frac{g}{n} \in \overline{G} : g \in S \right\}$ definido en la demostración anterior es el cono positivo de $\overline{G}$, y para cada $\frac{g}{n}, \frac{h}{m} \in \overline{G}$ se tiene que $\frac{g}{n} \leq \frac{h}{m}$ cuando $\frac{h}{m} - \frac{g}{n} \in \overline{S}$, entonces $\frac{g}{n} \leq \frac{h}{m}$ equivale a $nh - mg \in S$.

LEMA 4.9. *Sean $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, $(\overline{G}, +, \leq)$ su cierre divisible, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_{>0}$ y $\frac{g}{n}, \frac{h}{m} \in \overline{G}$, entonces $\frac{g}{n} \leq \frac{h}{m}$ si y sólo si $\frac{p}{q} \bullet \frac{g}{n} \leq \frac{p}{q} \bullet \frac{h}{m}$.*

Demostración. $\frac{g}{n} \leq \frac{h}{m}$ equivale a $mg \leq nh$, lo que equivale a $qpmg \leq qpnh$ por el Lema 4.6, que equivale a $\frac{p}{q} \bullet \frac{g}{n} \leq \frac{p}{q} \bullet \frac{h}{m}$. $\square$

LEMA 4.10. *Sean $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, $(\overline{G}, +, \leq)$ su cierre divisible, $\frac{p}{q}, \frac{k}{s} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{g}{n} \in \overline{G}$ tal que $\frac{g}{n} > 0$, entonces $\frac{p}{q} \bullet \frac{g}{n} \leq \frac{k}{s} \bullet \frac{g}{n}$ si y sólo si $\frac{p}{q} \leq \frac{k}{s}$.*

Demostración. Como $\frac{g}{n} > 0$ equivale a $g > 0$, entonces $ng > 0$ por el Corolario 4.2, y así, $\frac{p}{q} \bullet \frac{g}{n} \leq \frac{k}{s} \bullet \frac{g}{n}$ equivale a $snpg \leq qnkg$. Lo que equivale a $sp \leq qk$ por el Lema 4.7, que equivale a $\frac{p}{q} \leq \frac{k}{s}$. $\square$

Para finalizar esta sección, se contestará a una interrogante muy importante, y es la de si se tendrá o no el recíproco del Lema 4.5.

DEFINICIÓN 4.6. *Sea $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado. Se dice que G es **arquimediano**, cuando para todo $\alpha, \beta \in G$ tales que $\alpha \geq 0$ y $\beta > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ con el cual se cumple que $n\beta \geq \alpha > (n-1)\beta$.*

OBSERVACIÓN 4.7. Por definición, cualquier subgrupo de un grupo arquimediano también es arquimediano.

EJEMPLO 4.2. Los grupos $(\mathbb{Z}^2, +, \leq_{\text{lex}})$, $(\mathbb{Q}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ y $(\mathbb{R}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ no son arquimedianos. Pero los grupos $(\mathbb{Z}, +, \leq)$, $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ y $(\mathbb{R}, +, \leq)$ sí lo son.

TEOREMA 4.11 (Otto Hölder[1]). *Sea $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, entonces G es arquimediano si y sólo si es orden-isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +, \leq)$.*

Demostración. Fijo $\alpha \in G$ tal que $\alpha > 0$. Sea $\beta \in G$ tal que $\beta > 0$. Como G es arquimediano, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, existen $m_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $m_{n+1} \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$m_n\alpha \geq n\beta > (m_n - 1)\alpha \qquad \text{y} \qquad m_{n+1}\alpha \geq (n+1)\beta > (m_{n+1} - 1)\alpha,$$

que equivale a

$$\frac{m_n\alpha}{1} \geq \frac{n\beta}{1} > \frac{(m_n - 1)\alpha}{1} \qquad \text{y} \qquad \frac{m_{n+1}\alpha}{1} \geq \frac{(n+1)\beta}{1} > \frac{(m_{n+1} - 1)\alpha}{1}.$$

Lo que por el Lema 4.9 equivale a

$$\frac{m_n\alpha}{n} \geq \frac{n\beta}{n} > \frac{(m_n - 1)\alpha}{n} \qquad \text{y} \qquad \frac{m_{n+1}\alpha}{n+1} \geq \frac{(n+1)\beta}{n+1} > \frac{(m_{n+1} - 1)\alpha}{n+1}.$$

Como $\dfrac{n\beta}{n} = \dfrac{(n+1)\beta}{n+1}$ y $\leq$ en particular es transitiva, entonces

$$\frac{m_n\alpha}{n} > \frac{(m_{n+1} - 1)\alpha}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{m_{n+1}\alpha}{n+1} > \frac{(m_n - 1)\alpha}{n}.$$

Lo que por el Lema 4.10 equivale a

$$\frac{m_n}{n} > \frac{m_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{m_{n+1}}{n+1} > \frac{m_n}{n} - \frac{1}{n},$$

que equivale a

$$\frac{1}{n+1} > \frac{m_{n+1}}{n+1} - \frac{m_n}{n} > -\frac{1}{n}.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{m_{n+1}}{n+1} - \dfrac{m_n}{n}\right) = 0$, y por lo tanto, la sucesión $\left(\dfrac{m_{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

[1] Ver [9], Capítulo 4, Teorema 1, pp. 45–46.

Poniendo $f(\beta) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m_{n+1}}{n+1} > 0$, se tiene que $f(-\beta) = -f(\beta)$, entonces en virtud de la definición de límite y suma de límites, la función

$$\begin{aligned} f\colon G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \begin{cases} f(\beta) & \text{si } \beta > 0, \\ 0 & \text{si } \beta = 0, \\ -f(-\beta) & \text{si } \beta < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

está bien definida y resulta ser un monomorfismo. Por lo tanto, basta tomar f restringida hacia su imagen. En efecto, así $G \cong f(G) \leq \mathbb{R}$, porque $f(S) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el cono positivo de $f(G)$ si S es el de G.

Recíprocamente, como $(\mathbb{R}, +, \leq)$ es arquimediano, si existe $H \leq \mathbb{R}$ tal que $G \cong H$, entonces G es arquimediano porque H lo es. $\square$

OBSERVACIÓN 4.8. Dado un grupo abeliano libre de torsión G tal que $\sharp(G) \leq \sharp(\mathbb{R})$, su cierre divisible $\overline{G}$ admite una base $\overline{B}$ tal que $\sharp(\overline{B}) \leq \sharp(\mathbb{R})$. Como $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \sharp(\mathbb{R})$, entonces se puede seleccionar un subconjunto libre B de $\mathbb{R}$ tal que $\sharp(B) = \sharp(\overline{B})$. Dada una función biyectiva $f\colon \overline{B} \to B$, f induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\overline{G}$ y $\langle B \rangle \in \mathcal{V}(\mathbb{R})$. Este isomorfismo, en virtud del teorema anterior, permite ordenar a $\overline{G}$, y brindarle de paso a su subgrupo G de manera natural una estructura de grupo arquimediano.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos ordenados con I ordenado, y $\left\{\iota_i\colon G_i \to \biguplus\limits_{i\in I} G_i\right\}_{i\in I}$ su correspondiente familia de homomorfismos de inmersión, entonces $\biguplus\limits_{i\in I} G_i$ es ordenado de modo que los $\{\iota_i\}_{i\in I}$ son de orden.*

Demostración. Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ la correspondiente familia de conos positivos de $\{G_i\}_{i\in I,}$ entonces por el Lema 4.3, basta tomar $S_{\biguplus} = \left\{\underline{g} \in \biguplus\limits_{i\in I} G_i : \mathrm{in}(\underline{g}) > 0 \vee \underline{g} = \underline{0}\right\}$. En efecto, así para todo $\underline{g} \in S_{\biguplus}$ con $\underline{g} \neq \underline{0}$ existe $k \in I$ tal que $\mathrm{or}(\underline{g}) = k$ y $g_k \in S_k \smallsetminus \{0\}$, por lo tanto, $S_{\biguplus}$ es el cono positivo de $\biguplus\limits_{i\in I} G_i$ porque los $\{S_i\}_{i\in I}$ son de los $\{G_i\}_{i\in I.}$

Además, $\iota_i(S_i) := \left\{\underline{g} \in \biguplus\limits_{i\in I} G_i : g_i \in S_i \wedge \forall j \in I \smallsetminus \{i\},\, g_j = 0\right\} \subseteq S_{\biguplus}$ para todo $i \in I$, y así, los $\{\iota_i\}_{i\in I}$ son de orden por el Lema 4.4. $\square$

OBSERVACIÓN 4.9. Como el conjunto $S_{\biguplus} = \left\{\underline{g} \in \biguplus\limits_{i\in I} G_i : \mathrm{in}(\underline{g}) > 0 \vee \underline{g} = \underline{0}\right\}$ definido en la demostración anterior es el cono positivo de $\biguplus\limits_{i\in I} G_i$, y para cada $\underline{g}, \underline{h} \in \biguplus\limits_{i\in I} G_i$ se tiene que $\underline{g} \leq \underline{h}$ cuando $\underline{h} - \underline{g} \in S_{\biguplus}$, entonces $\underline{g} \leq \underline{h}$ equivale a $\underline{g} \leq_{\mathrm{lex}} \underline{h}$.

COROLARIO 4.13. *Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos ordenados con I ordenado, y el monomorfismo inclusión $\iota\colon \bigoplus_{i\in I} G_i \to \biguplus_{i\in I} G_i$, entonces $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es ordenada de modo que ι es de orden si y sólo si es el orden lexicográfico.*

Demostración. El resultado es consecuencia directa de la observación anterior, siendo $S_{\oplus} := \left\{ \underline{g} \in \bigoplus_{i\in I} G_i : \underline{0} \leq_{\text{lex}} \underline{g} \right\}$ el cono positivo de $\bigoplus_{i\in I} G_i$. □

PROPOSICIÓN 4.14. *Si G es un grupo abeliano libre de torsión, entonces es ordenado lexicográficamente.*

Demostración. Sea $\overline{B} = \{(n,g)_i\}_{i\in I}$ una base del cierre divisible $\overline{G}$ de G, entonces $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q} \simeq \overline{G}$. Por lo tanto, por el corolario anterior, y en particular por el Corolario 3.4, $\overline{G}$ y de manera natural G son ordenados con un orden compatible al lexicográfico. □

OBSERVACIÓN 4.10. Dado un grupo abeliano libre de torsión G. Con el orden de la proposición anterior, G no es arquimediano. Pero por la Observación 4.8, si $\sharp(G) \leq \sharp(\mathbb{R})$, entonces G además tiene una estructura de grupo arquimediano. Por lo tanto, en ese caso existen dos órdenes distintos (en cierto sentido extremos) que se pueden definir en G.

4.2. Subgrupos Aislados

Dado un grupo abeliano ordenado G. Se introducirá en esta sección un tipo de subgrupo de G, que permitirá distinguir si el orden de G se aproxima más al de $\mathbb{R}$, o al de una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$.

DEFINICIÓN 4.7. *Sean $(G,+,\leq)$ un grupo abeliano ordenado y $H \leq G$. Se dice que H es **subgrupo aislado (o convexo**[2]**) de** G, cuando para todo $h_1, h_2 \in H$ y todo $g \in G$ tales que $h_1 < g < h_2$, se cumple que $g \in H$.*

EJEMPLO 4.3. $\mathbb{Q} \times \{0\}$ no es subgrupo aislado de $(\mathbb{Q}^2, +, \leq_{\text{lex}})$, pero $\{0\} \times \mathbb{Q}$ sí lo es.

OBSERVACIÓN 4.11. Los subgrupos triviales de cualquier grupo abeliano ordenado son aislados.

OBSERVACIÓN 4.12. Cualquier subgrupo aislado de un grupo abeliano ordenado G, que esté contenido en un subgrupo H de G, también es subgrupo aislado de H.

[2]Ver e.g. en [1] pp. 430 o [4] pp. 861 o [7] pp. 147.

EJEMPLO 4.4. Los únicos subgrupos aislados de $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ son los triviales $\mathbb{Z}$ y $\{0\}$.

Al trabajar con subgrupos aislados conviene utilizar la función valor absoluto $|\cdot|$ definida en grupos abelianos ordenados hacia sus respectivos conos positivos, y el siguiente lema como definición. Además, tener presente la subsiguiente observación en las demostraciones de los Teoremas 5.3 y 5.8 del siguiente capítulo.

LEMA 4.15. *Sean G un grupo abeliano ordenado, y $H \leq G$, entonces H es subgrupo aislado de G si y sólo si $0 < g < h$ implica $g \in H$, para todo $g \in G$ y todo $h \in H$.*

Demostración. Sean $g \in G$ y $h \in H$ tales que $0 < g < h$. Si H es subgrupo aislado de G, entonces $g \in H$.

Recíprocamente, sean $h_1, h_2 \in H$ y $g \in G$ tales que $h_1 < g < h_2$, entonces se tiene que $0 < g - h_1 < h_2 - h_1$, lo que implica $g - h_1 \in H$, y por lo tanto, $g \in H$. □

OBSERVACIÓN 4.13. Dado un grupo abeliano ordenado G con subgrupos aislados H_1 y H_2 tales que $H_1 < H_2$. Si $h \in H_2 \smallsetminus H_1$, entonces necesariamente $|g| < |h|$, para cada $g \in H_1$.

PROPOSICIÓN 4.16. *Sean G un grupo abeliano ordenado, $H \leq G$, y el epimorfismo canónico $\varphi\colon G \to G/H$, entonces G/H es ordenado de modo que φ es de orden si y sólo si H es subgrupo aislado de G.*

Demostración. Sean $g \in G$ y $h \in H$ tales que $0 < g < h$. Como φ es de orden, entonces $\varphi(0) < \varphi(g) < \varphi(h)$, lo que por definición de φ equivale a $H < g + H < H$. Como G/H es ordenado, entonces $g + H = H$, lo que implica $g \in H$.

Recíprocamente, sea S el cono positivo de G, entonces por el Lema 4.3, basta tomar $\varphi(S) := \{g + H \in G/H \colon g \in S\}$. En efecto, $\varphi(S)$ es el cono positivo de G/H porque S es el de G, y H es subgrupo aislado de G. Además, φ es de orden por el Lema 4.4. □

OBSERVACIÓN 4.14. Como el conjunto $\varphi(S) := \{g + H \in G/H \colon g \in S\}$ de la demostración anterior es el cono positivo de G/H, y para cada $g_1 + H, g_2 + H \in G/H$ se tiene que $g_1 + H \leq g_2 + H$ cuando $(g_2 + H) - (g_1 + H) \in \varphi(S)$, entonces $g_1 + H \leq g_2 + H$ equivale a que exista $h \in H$ tal que $g_1 \leq g_2 + h$.

Dados un grupo abeliano ordenado G, y un subconjunto B de G. Se definen los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A}(G) := \{H \in \mathcal{S}(G) : H \text{ es subgrupo aislado de } G\},$$
$$\mathcal{C}(B) := \{H \in \mathcal{A}(G) : B \subseteq H\}, \qquad \text{y} \qquad \mathcal{I}(B) := \{H \in \mathcal{A}(G) : H \subset B\}.$$

LEMA 4.17. *El conjunto $\mathcal{A}(G)$ es ordenado por la inclusión.*

Demostración. Sean $H_1, H_2 \in \mathcal{A}(G)$ tales que $H_1 \nsubseteq H_2$, entonces existe $h \in H_1$ tal que $h > 0$ y $h \notin H_2$. Por lo tanto, si $g \in H_2$, necesariamente se tiene que $|g| < h$, lo que implica $g \in H_1$. $\square$

OBSERVACIÓN 4.15. En virtud del lema anterior, $\mathcal{A}(G)$ es cerrado bajo uniones e intersecciones arbitrarias.

DEFINICIÓN 4.8. *Al subgrupo $\widetilde{B} := \bigcap_{H \in \mathcal{C}(B)} H$ se lo llamará **el subgrupo aislado de** G **generado por** B. Si en particular $B = \{h\}$, a $\widetilde{h} := \widetilde{B}$ se lo llamará **el subgrupo aislado principal de** G **generado por** h.*

OBSERVACIÓN 4.16. Por definición, $\widetilde{B}$ es el subgrupo aislado más pequeño que contiene a B. Además, si en particular $B = \{0\}$, entonces $\widetilde{0} := \{0\}$.

DEFINICIÓN 4.9. *Sea $H \in \mathcal{A}(G)$. Al subgrupo $\overset{\circ}{H} := \bigcup_{H_k \in \mathcal{I}(H)} H_k$ se lo llamará **el subgrupo aislado interior de** H.*

OBSERVACIÓN 4.17. Por definición, $\overset{\circ}{H}$ es el subgrupo aislado más grande contenido propiamente en H.

LEMA 4.18. *Sean G un grupo abeliano ordenado, $h \in G$ tal que $h > 0$, y el conjunto $B = \{g \in G : \exists n \in \mathbb{Z}_{>0} \ni 0 \leq g < nh\}$, entonces el subgrupo aislado principal de G generado por h es el subgrupo $-B \cup B$, i.e., $\widetilde{h} = \{g \in G : \exists n \in \mathbb{Z}_{>0} \ni |g| < nh\} =: \widetilde{B}$.*

Demostración. Como $-B \cup B$ es subgrupo aislado de G tal que $h \in -B \cup B$, y $\widetilde{h}$ es el subgrupo aislado de G más pequeño que contiene a h, entonces $\widetilde{h} \leq -B \cup B$.

Recíprocamente, sean $g \in -B \cup B$ y $H \in \mathcal{C}(\{h\})$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, tal que $|g| < nh$, y por lo tanto, $g \in H$. $\square$

OBSERVACIÓN 4.18. Dados un grupo abeliano ordenado G, y un elemento h de G. Se tiene que $\widetilde{h} = \{g \in G : \exists n \in \mathbb{Z}_{>0} \ni |g| < n|h|\}$.

LEMA 4.19. *Sean G un grupo abeliano ordenado, $h \in G$ tal que $h > 0$, y el conjunto $B = \{g \in G : 0 < g \wedge \forall n \in \mathbb{Z}_{>0},\ ng < h\}$, entonces el subgrupo aislado interior de $\widetilde{h}$ es el subgrupo $-B \cup \{0\} \cup B$, i.e., $\overset{\circ}{\widetilde{h}} = \{g \in G : \forall n \in \mathbb{Z}_{>0},\ n|g| < h\} =: \widetilde{B}$.*

Demostración. Sea $g \in \overset{\circ}{\widetilde{h}}$, entonces existe $H \in \mathcal{I}(\widetilde{h})$ tal que $g \in H$. Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, entonces necesariamente $n|g| < h$, lo que implica $g \in -B \cup \{0\} \cup B$.

Recíprocamente, si $g \in -B \cup \{0\} \cup B$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, se tiene que $n|g| < h$, por lo tanto, basta tomar $\widetilde{g}$. En efecto, $\widetilde{g} \in \mathcal{I}(\widetilde{h})$ porque $\widetilde{g} \subseteq \widetilde{h}$ y $h \notin \widetilde{g}$. $\square$

OBSERVACIÓN 4.19. Dados un grupo abeliano ordenado G, y un elemento h de G. Se tiene que $\overset{\circ}{\widetilde{h}} = \{g \in G : \forall n \in \mathbb{Z}_{>0},\ n|g| < |h|\}$.

COROLARIO 4.20. *Sean G un grupo abeliano ordenado, y $h \in G \setminus \{0\}$, entonces existen dos subgrupos aislados de G, de modo que uno es el más pequeño subgrupo aislado de G que contiene a h, y el otro es el más grande subgrupo aislado de G que no contiene a h.*

Demostración. Consecuencia directa de los dos lemas anteriores. $\square$

DEFINICIÓN 4.10. *Sea $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado:*

1. *A $\dim_{\mathbb{Q}} \overline{G}$ se lo llamará **el rango racional de** G.*
2. *A $\sharp\,[\mathcal{I}(G)]$ se lo llamará **el rango de** G.*

OBSERVACIÓN 4.20. Dado un grupo abeliano ordenado, su rango racional es mayor igual que su rango.

OBSERVACIÓN 4.21. Dado un grupo abeliano ordenado de rango infinito G. Al ordenar el conjunto $\mathcal{A}(G)$ con su orden total opuesto, se tiene que $\mathcal{A}(G)$ no está bien ordenado.

PROPOSICIÓN 4.21. *Sean G un grupo abeliano ordenado, $H \leq G$ aislado, el epimorfismo canónico $\varphi\colon G \to G/H$ y el conjunto $\mathcal{B} = \{H_k \in \mathcal{A}(G) : H \leq H_k\}$, entonces existe una función biyectiva $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}(G/H)$.*

Demostración. Como φ asigna a los elementos de $\mathcal{B}$ elementos de $\mathcal{A}(G/H)$, entonces basta tomar la función bien definida

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{A}(G/H) \\ H_k &\longmapsto f(H_k) := \{\varphi(h) : h \in H_k\} =: \varphi(H_k). \end{aligned}$$

En efecto; f es inyectiva porque si $H_i \leq H_j$ y $f(H_i) = f(H_j)$, entonces se tiene que $h_j \in H_j$ implica $\varphi(h_j) \in f(H_i)$, lo que implica $h_j = h_i + h$ con $h \in H$, por lo tanto, $h_j \in H_i$; y f es sobreyectiva porque si $H_{/k} \in \mathcal{A}(G/H)$, entonces tomando $\varphi^{-1}(H_{/k}) \in \mathcal{A}(G)$ se tiene que $H \leq \varphi^{-1}(H_{/k})$, a más de que $f(\varphi^{-1}(H_{/k})) := \varphi(\varphi^{-1}(H_{/k})) = H_{/k}$ pues φ es sobreyectivo. $\square$

PROPOSICIÓN 4.22 (Otto Hölder[3]). *Sea $G \neq \{0\}$ un grupo abeliano ordenado, entonces G es arquimediano si y sólo si su rango es igual a uno, i.e., si y sólo si los únicos subgrupos aislados de G son los triviales $\{0\}$ y G.*

Demostración. Sea $H \neq \{0\}$ un subgrupo aislado de G, entonces existe $\beta \in H \setminus \{0\}$. Si $\alpha \in G$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n|\beta| \geq |\alpha| > (n-1)|\beta|$, lo que implica $\alpha \in H$, y por lo tanto, $G = H$.

Recíprocamente, sea $\beta \in G \setminus \{0\}$, entonces $\widetilde{\beta} = G$. Por lo tanto, si $\alpha \in G$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $|\alpha| < n|\beta|$, y así, basta tomar $m = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq n|\beta|\}$, porque $n|\beta| \geq m|\beta| \geq |\alpha| > (m-1)|\beta|$. □

COROLARIO 4.23. *Sea G un grupo abeliano ordenado de rango n, con subgrupos aislados*

$$\{0\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_i < \cdots < H_{n-1} < H_n = G,$$

entonces H_i/H_{i-1} es arquimediano, para todo $i \in [\![1, n]\!]$.

Demostración. Consecuencia directa de las dos proposiciones anteriores. □

DEFINICIÓN 4.11. *Sean $(G, +, \leq)$ un grupo abeliano ordenado, S su cono positivo, y $g, h \in S \setminus \{0\}$. Se dice que h* ***es infinitamente más grande que*** *g, y se denota por $h \gg g$, cuando se cumple que $\widetilde{h} > \widetilde{g}$.*

Dado un grupo abeliano ordenado G con subgrupo aislado H. Si H no es principal, entonces se lo llamará ***subgrupo aislado límite de*** G. El siguiente lema explica el por qué de ese nombre.

LEMA 4.24. *Sean G un grupo abeliano ordenado y $H \leq G$ aislado límite, entonces existe $\{H_i\}_{i \in I}$ una familia de subgrupos aislados principales de G con I ordenado tal que $H = \bigcup_{i \in I} H_i$ con $H \neq H_i$, para todo $i \in I$.*

Demostración. Como H es subgrupo aislado de G que no es principal, entonces para todo $h \in H$, se tiene que $\widetilde{h} \subset H$. Por lo tanto, basta tomar $\{H_i\}_{i \in I} = \{\widetilde{h}\}_{h \in H}$, porque $H = \bigcup_{h \in H} \widetilde{h}$. □

[3] Ver [11], Capítulo 2, Proposición 2.1, pp. 61.

EJEMPLO 4.5. Sea I un conjunto de índices en correspondencia biunívoca con $\mathbb{Z}_{>0}$. Al ordenar I con el orden total usual opuesto, siendo $G = \prod_{i\in I} \mathbb{R}$ y $H = \biguplus_{i\in I} \mathbb{R}$, se tiene que $H = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}$ es subgrupo aislado límite de G, pues para todo $\underline{h} \in H \smallsetminus \{\underline{0}\}$, existe el más grande $n_h \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $h_{n_h} \neq 0$, y por lo tanto, $H \supset \widetilde{\underline{h}} \cong \biguplus_{i\in I_{n_h}} \mathbb{R} = \bigoplus_{i\in I_{n_h}} \mathbb{R}$ con $I_{n_h} = \{i \in I : i \geq n_h\} = \{n_h, n_h - 1, n_h - 2, \ldots, 1\} \subset I$. Además, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}^*$, se tiene que $(\ldots, 0, 0, |\beta|, \alpha, \alpha, \alpha) = \underline{h} \gg \underline{g} = (\ldots, 0, 0, 0, \alpha, \beta, \alpha)$, pues $\widetilde{\underline{h}} > \widetilde{\underline{g}}$.

OBSERVACIÓN 4.22. Dado un grupo abeliano ordenado G con subgrupo aislado $H \neq \{0\}$ que es principal. Se tiene que $H/\mathring{H}$ es arquimediano, y que el subgrupo aislado interior $\mathring{H}$ no necesariamente es principal.

OBSERVACIÓN 4.23. Dado un grupo abeliano ordenado G con subgrupo aislado H que es arquimediano. Se tiene que H es principal. Además, si $H \neq \{0\}$, entonces $\mathring{H} = \{0\}$.

4.3. El Esqueleto

Dados un grupo abeliano ordenado $(G, +, \leq)$ y un conjunto ordenado de índices $(I, \leq)$ que está en correspondencia biunívoca con $(\mathcal{A}(G), \leq)$. Se denota por H_i al subgrupo aislado de G que le corresponde al índice $i \in I$. Se denota por $\leq_{\mathrm{r}}$ al orden total opuesto al del conjunto $\mathcal{A}(G)$. Cuando I sea reordenado con $\leq_{\mathrm{r}}$ $\big($i.e., cuando $i \leq_{\mathrm{r}} j$ equivale a $H_j \leq H_i$, para cada $i, j \in I\big)$, tiene sentido a $\leq_{\mathrm{r}}$ llamarlo también ***el rango de*** G. A $\mathcal{A}_{\mathrm{p}}(G) := \{H \in \mathcal{A}(G) : H$ es subgrupo aislado principal de $G\}$ le corresponde biunívocamente un subconjunto J de I. Cuando $\leq_{\mathrm{r}}$ sea restringido a $J \times J$, a $\leq_{\mathrm{r}}$ se lo llamará ***el rango principal de*** G. Para cada $i \in J$, se denota por R_i al grupo abeliano arquimediano $H_i/\mathring{H}_i$ que se lo llamará ***el grupo de residuos de*** G ***asociado a*** i. Se denota por $\mathcal{F}_G$ a la familia ordenada $\{R_i\}_{i\in(J,\leq_{\mathrm{r}})}$ que se la llamará ***el esqueleto de*** G. Se denota por $\mathcal{G}(G)$ $\big($resp. $\mathcal{H}(G)\big)$ al grupo abeliano ordenado $\bigoplus_{i\in(J,\leq_{\mathrm{r}})} R_i \left(\text{resp.} \biguplus_{i\in(J,\leq_{\mathrm{r}})} R_i\right)$ que se lo llamará ***el graduado*** (resp. ***el graduado de Hahn***) ***asociado al rango principal de*** G.

OBSERVACIÓN 4.24. Dado un grupo abeliano ordenado G con $\mathcal{F}_G = \{R_i\}_{i\in(I,\leq_{\mathrm{r}})}$. Para cada $g \in G \smallsetminus \{0\}$, existe un único $j \in I$ con el cual $g \in H_j$ y $g \notin \mathring{H}_j$.

OBSERVACIÓN 4.25. Dado un grupo abeliano ordenado G con subgrupo aislado $H \neq \{0\}$ que es arquimediano. Se tiene que H es grupo de residuos de G $\big($i.e., se tiene que $H \in \mathcal{F}_G\big)$.

OBSERVACIÓN 4.26. El esqueleto de cualquier grupo abeliano arquimediano no nulo es de manera natural igual al mismo grupo.

Dados dos grupos abelianos ordenados con el mismo rango, en general que sean isomorfos no siempre es cierto, como lo muestra el siguiente contraejemplo.

EJEMPLO 4.6. Los grupos $(\mathbb{Z}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ y $(\mathbb{Q}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ tienen rango 2, pero no son isomorfos. Los grupos arquimedianos $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ tienen rango 1, pero tampoco son isomorfos.

Incluso teniendo el mismo esqueleto, en general que sean isomorfos sigue sin ser siempre cierto, como lo muestra el siguiente teorema con el subsiguiente corolario.

TEOREMA 4.25 (Georg Cantor – Paulo Ribenboim[4]). *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos arquimedianos con I ordenado, entonces el esqueleto de $\biguplus_{i\in I} G_i$ es de manera natural la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ reordenada con el rango principal de $\biguplus_{i\in I} G_i$, i.e., $\mathcal{F}_{\biguplus_{i\in I} G_i} \cong \{G_i\}_{i\in(I,\leq_r)}$.*

Demostración. Sea $\widetilde{\underline{h}} \in \mathcal{A}_{\text{p}}\left(\biguplus_{i\in I} G_i\right)$ tal que $\underline{h} \neq \underline{0}$, entonces existe $k \in I$ tal que $\text{or}(\underline{h}) = k$. Denotando $H_k = \widetilde{\underline{h}} := \left\{\underline{g} \in \biguplus_{i\in I} G_i : \exists n \in \mathbb{Z}_{>0} \ni |\underline{g}| <_{\text{lex}} n|\underline{h}|\right\}$, se tiene que $\underline{g} \in H_k$ equivale a $\text{or}(\underline{g}) \geq k$. En efecto; $|\underline{g}| <_{\text{lex}} n|\underline{h}|$ implica $\text{or}(\underline{g}) \geq k$, porque $\text{or}(n\underline{h}) = k$; recíprocamente, por un lado, $\text{or}(\underline{g}) > k$ implica $|\underline{g}| <_{\text{lex}} |\underline{h}|$, y por otro lado, $\text{or}(\underline{g}) = k$ implica $g_k \in G_k \setminus \{0\}$, lo que implica $|\underline{g}| <_{\text{lex}} n|\underline{h}|$, porque G_k es arquimediano. Por lo tanto, para todo $k \in I$, $H_k = \left\{\underline{g} \in \biguplus_{i\in I} G_i : i < k \Rightarrow g_i = 0\right\}$ con $\overset{\circ}{H}_k = \left\{\underline{g} \in \biguplus_{i\in I} G_i : i \leq k \Rightarrow g_i = 0\right\} =: H_{k+1}$, lo que implica $H_k/\overset{\circ}{H}_k \cong G_k$ y $\mathcal{F}_{\biguplus_{i\in I} G_i} = \left\{H_i/\overset{\circ}{H}_i\right\}_{i\in(I,\leq_{\text{r}})} \cong \{G_i\}_{i\in(I,\leq_{\text{r}})}$. $\square$

[4] Ver [20], Teorema 1, pp. 16–17.

COROLARIO 4.26. *Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos arquimedianos con I ordenado, entonces el esqueleto de $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es de manera natural la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ reordenada con el rango principal de $\bigoplus_{i\in I} G_i$, i.e., $\mathcal{F}_{\bigoplus_{i\in I} G_i} \cong \{G_i\}_{i\in(I,\leq_r)}$.*

Demostración. El mismo razonamiento de la demostración anterior se aplica para el subgrupo $\bigoplus_{i\in I} G_i$ de $\biguplus_{i\in I} G_i$. □

De esta manera, se pueden tener dos grupos, uno que contiene al otro, pero ambos con el mismo esqueleto. Estos grupos son el mismo cuando I es finito. No obstante, aún en este caso, el esqueleto no determina el grupo, como lo muestra el siguiente contraejemplo propuesto en [4] que según Clifford es debido al Mat. Basil Gordon.[5]

EJEMPLO 4.7. Sea G el subgrupo abeliano ordenado de $(\mathbb{Q}^2, +, \leq_{\text{lex}})$ generado por el conjunto $B = \left\{ \left(\frac{1}{p_k}, \frac{k}{p_k} \right) \in \mathbb{Q}^2 : p_k \text{ es el } k\text{–ésimo número primo} \right\}$.

En primer lugar, el conjunto $H = \{0\} \times \mathbb{Z}$ es subgrupo de G. En efecto, basta observar que $(0,1) \in G$, porque $2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1,1) \in G$ y $3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (1,2) \in G$.

En segundo lugar, H es subgrupo aislado de G. En efecto, para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ y todo $(\alpha, \beta) \in G$, se tiene que $(0,0) <_{\text{lex}} (\alpha, \beta) <_{\text{lex}} (0, n)$ implica $\alpha = 0$, pero $(0, \beta) \in G$ equivale a $(0, \beta) = n_1 \left(\frac{1}{p_{k_1}}, \frac{k_1}{p_{k_1}} \right) + \cdots + n_r \left(\frac{1}{p_{k_r}}, \frac{k_r}{p_{k_r}} \right)$ para ciertos $n_i \in \mathbb{Z}$. Con esto y por reducción a un común denominador, $0 = \frac{n_1}{p_{k_1}} + \cdots + \frac{n_r}{p_{k_r}} = \frac{1}{p_k^*} \sum_{i=1}^{r} p'_{k_i} n_i$, lo que implica $0 = \sum_{i=1}^{r} p'_{k_i} n_i$, que equivale a $p'_{k_j} n_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} p'_{k_i} n_i$. Por lo tanto, $p_{k_j} | p'_{k_j} n_j$, lo que necesariamente implica $p_{k_j} | n_j$, pues $p_{k_j} \nmid p'_{k_j}$ y p_{k_j} es primo. Así $\beta = \frac{n_1 k_1}{p_{k_1}} + \cdots + \frac{n_r k_r}{p_{k_r}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{n_j k_j}{p_{k_j}} \in \mathbb{Z}$, lo que implica $(\alpha, \beta) \in H$.

En tercer lugar, H no admite subgrupo complementario en G. En efecto, porque de lo contrario existe $H' \leq G$ tal que $H + H' = G$ y $H \cap H' = \{0\}$, y entonces para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, se tiene que $\left(\frac{1}{p_k}, \frac{k}{p_k} \right) = (0, n_k) + (\alpha_k, \beta_k)$ para ciertos $(\alpha_k, \beta_k) \in H'$ y $n_k \in \mathbb{Z}$, lo que implica $p_k(\alpha_k, \beta_k) = (1, k - p_k n_k) \in H'$. Por lo tanto, necesariamente para todo $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$, se tiene que $i - p_i n_i = j - p_j n_j$, pues $(0, i - p_i n_i - j + p_j n_j) \in H'$.

[5] Ver [4] pp. 862.

Así para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, resulta que $n_{k+1} = \dfrac{2n_1 + k}{p_{k+1}}$, pero $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{p_{k+1}} = 0$, por lo tanto, no necesariamente se tiene que $\dfrac{2n_1 + k}{p_{k+1}} \in \mathbb{Z}$, lo cual es imposible.

En cuarto lugar, H es grupo de residuos de G. En efecto, basta observar que H es arquimediano, porque $H \cong \mathbb{Z}$.

En quinto lugar, por todo lo anterior, es imposible que G sea suma directa de sus grupos de residuos.

En sexto lugar, $\mathcal{F}_G = \{G/H, H\}$. En efecto, basta observar que G/H también es arquimediano, porque $\mathbb{Q}$ lo es y para todo $(\alpha, \beta) + H \in G/H$ se tiene que $\alpha > 0$ equivale a $(\alpha, \beta) + H > H$, pues $(0, \beta) \in H$.

Por lo tanto, en último lugar, $H \oplus G/H$ y G son dos grupos abelianos ordenados con el mismo esqueleto que no son isomorfos.

Capítulo 5

Grupos Divisibles y Ordenados

Empleando el contenido de todos los capítulos precedentes, en este capítulo se presentan los últimos resultados de la teoría de grupos abelianos divisibles y ordenados. Entre ellos, los Teoremas 5.3, 5.6 y 5.8, que son los resultados principales de este trabajo, porque describen la estructura que tienen estos grupos.

5.1. Preámbulo de Álgebra Lineal

Los siguientes dos lemas presentados en esta sección son fundamentales en este capítulo. El segundo es el de mayor interés, porque se lo utilizará en las demostraciones de los resultados principales.

LEMA 5.1 (Bernhard Banaschewski). *Sean V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, el conjunto $\mathcal{L}(V) := \{L \subseteq V : L$ es subespacio de $V\}$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(V)$ tal que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, entonces existe una función $\vartheta\colon \mathcal{M} \to \mathcal{L}(V)$ de modo que:*

1. *$V = L \bigoplus \vartheta(L)$, para todo $L \in \mathcal{M}$.*
2. *$\vartheta(L_2) \subseteq \vartheta(L_1)$, para todo $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ tales que $L_1 \subseteq L_2$.*

Demostración. Ver([1], Sección 3, Lema 4, pp. 431–432) o ([20], Lema (Banaschewski), pp. 19–22). □

Banaschewski en [1] lo establece y demuestra por primera vez, para el caso en el que V es un $\mathbb{K}$–módulo. Ribenboim en [20] lo establece y demuestra exactamente como está enunciado en este trabajo.

LEMA 5.2. *Sean V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\{L_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ una familia de $\mathcal{L}(V)$ tal que*

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_i \subset \cdots \subset L_{n-1} \subset L_n = V,$$

con $B_i = \{v_{ij} + L_{i-1} : v_{ij} \in L_i\}_{j\in I_i}$ base de L_i/L_{i-1} para todo $i \in [\![1,n]\!]$, entonces $B = \{v_{ij} : i \in [\![1,n]\!] \wedge j \in I_i\}$ es una base de V. Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum\limits_{i=1}^{n} \sharp(I_i)$.

Demostración. Sea $v \in V$, entonces $v + L_{n-1} = \sum\limits_{j\in I_n} \lambda_{nj} v_{nj} + L_{n-1}$ para ciertos $\lambda_{nj} \in \mathbb{K}$ pues $v + L_{n-1} \in L_n/L_{n-1}$; poniendo $v_n = \sum\limits_{j\in I_n} \lambda_{nj} v_{nj}$, se tiene que $v - v_n \in L_{n-1}$, entonces $(v - v_n) + L_{n-2} = \sum\limits_{j\in I_{n-1}} \lambda_{(n-1)j} v_{(n-1)j} + L_{n-2}$ para ciertos $\lambda_{(n-1)j} \in \mathbb{K}$ pues $(v - v_n) + L_{n-2} \in L_{n-1}/L_{n-2}$; y así, inductivamente se tiene que B es un sistema generador de V, porque $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j\in I_i} \lambda_{ij} v_{ij}$.

Sean $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ con $i \in [\![1,n]\!]$ y $j \in I_i$ tales que $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j\in I_i} \lambda_{ij} v_{ij}$. Como $\sum\limits_{j\in I_i} \lambda_{ij} v_{ij} \in L_i$ para todo $i \in [\![1,n]\!]$; entonces $0 + L_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j\in I_i} \lambda_{ij} v_{ij} + L_{n-1} = \sum\limits_{j\in I_n} \lambda_{nj} v_{nj} + L_{n-1}$ pues $0 + L_{n-1} \in L_n/L_{n-1}$, lo que implica $\lambda_{nj} = 0$ para todo $j \in I_n$, por lo tanto, $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j\in I_i} \lambda_{ij} v_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j\in I_i} \lambda_{ij} v_{ij}$; y así, inductivamente se tiene que B es un subconjunto libre de V, porque $\lambda_{ij} = 0$ para todo $i \in [\![1,n]\!]$ y todo $j \in I_i$. □

5.2. El Teorema de Hans Hahn

Uno de los teoremas de Hans Hahn[1] establece el siguiente resultado estructural, y se lo conoce más como ***el Teorema de inmersión de Hahn***:

TEOREMA 5.3 (Hans Hahn). *Sea G un grupo abeliano divisible y ordenado con $\mathcal{F}_G = \{R_i\}_{i\in(I,\leq_r)}$ entonces G se sumerge en $\mathcal{H}(G)$, i.e., G es de manera natural un subgrupo de $\mathcal{H}(G)$; más aún, sea $\jmath\colon G \to \mathcal{H}(G)$ el homomorfismo de inmersión que existe, entonces $\jmath$ es de orden.*

Demostración. Ver([15], Sección 2, pp. 614–642) o([20], Teorema 2, pp. 22–24). □

[1] Hans Hahn (27 de septiembre de 1879 – 24 de julio de 1934) fue un matemático austríaco que hizo contribuciones al Análisis Funcional, la Topología, la Teoría de Conjuntos, el Cálculo de Variaciones, el Análisis Real y la Teoría del Orden.

Hahn en [15] lo estable y demuestra por primera vez, con una demostración que ocupa veintisiete páginas, la cual Clifford en [4] califica de "maratón transfinita". Eso tiene sentido porque Hahn utiliza métodos transfinitos, según Banaschewski en [1][2]. Ribenboim en [20] lo demuestra utilizando el Lema 5.1.

OBSERVACIÓN 5.1. En virtud del teorema anterior, y de que cada grupo de residuos de un grupo abeliano divisible y ordenado es de manera natural un subgrupo de $\mathbb{R}$. Se tiene que cualquier grupo abeliano divisible y ordenado puede sumergirse en un producto de Hahn de copias de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la posibilidad de ordenar un grupo abeliano divisible se traduce en la posibilidad de hallar un esqueleto del grupo. Porque el orden se corresponde con el graduado de Hahn del grupo, y por lo tanto con su esqueleto.

5.2.1. La Estructura Numerable

Añadiendo la divisibilidad como hipótesis a los grupos abelianos ordenados se obtienen los siguientes resultados:

LEMA 5.4. *Sea G un grupo abeliano divisible y ordenado con $H \leq G$ aislado, entonces H es divisible.*

Demostración. Sean $h \in H$ y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Como G es divisible, entonces existe $g \in G$ tal que $ng = h$. Como H es subgrupo aislado de G, entonces $g \in H$ pues $|g| \leq n|g|$. $\square$

OBSERVACIÓN 5.2. En virtud del lema anterior, dado un grupo abeliano divisible y ordenado G. Se tiene que $\mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{V}(G)$.

COROLARIO 5.5. *Sea G un grupo abeliano divisible y ordenado con $\mathcal{F}_G = \{R_i\}_{i \in (I, \leq_r)}$, entonces R_i es divisible, para todo $i \in I$.*

Demostración. Sean $i \in I$, $h + \overset{\circ}{H}_i \in R_i$ y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Como por el lema anterior H_i es divisible, entonces existe $g \in H_i$ tal que $ng = h$. Por lo tanto, basta tomar $g + \overset{\circ}{H}_i \in R_i$, pues $n\left(g + \overset{\circ}{H}_i\right) = ng + \overset{\circ}{H}_i = h + \overset{\circ}{H}_i$. $\square$

[2] Ver [1] pp. 430.

TEOREMA 5.6 (Francisco Ugarte[3]). *Sea G un grupo abeliano divisible y ordenado de rango numerable con $\mathcal{F}_G = \{R_i\}_{i\in(I,\leq_r)}$ entonces de manera natural se tiene que $\mathcal{G}(G) \leq G \leq \mathcal{H}(G)$; más aún, sean $\gamma\colon \mathcal{G}(G) \to G$ y $\jmath\colon G \to \mathcal{H}(G)$ los homomorfismos de inmersión que existen, entonces γ y $\jmath$ son de orden. Por lo tanto, los tres grupos coinciden cuando I es finito.*

Demostración. La segunda inclusión natural de orden es el Teorema 5.3.

Para todo $i \in I$, por la Proposición 3.1 y el corolario anterior, R_i es un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial con alguna base $B_i = \left\{g_{ij} + \overset{\circ}{H}_i : g_{ij} \in H_i\right\}_{j\in J_i}$ entonces por el Lema 5.2 los elementos de $\left\{g_{ij} : i \in I \wedge j \in J_i\right\}$ son $\mathbb{Q}$–linealmente independientes en G, y para todo $g_i + \overset{\circ}{H}_i \in R_i$, existen únicos $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}$ tales que $g_i + \overset{\circ}{H}_i = \sum\limits_{j\in J_i} \lambda_{ij} g_{ij} + \overset{\circ}{H}_i$. Por lo tanto, al fijar B_i y los representantes de sus elementos, el homomorfismo γ_i definido sobre R_i hacia G mediante $\gamma_i\left(g_{ij} + \overset{\circ}{H}_i\right) = g_{ij}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \gamma_i\colon \quad R_i \quad &\longrightarrow G \\ g_i + \overset{\circ}{H}_i &\longmapsto \gamma_i\left(g_i + \overset{\circ}{H}_i\right) := \gamma_i\left(\sum_{j\in J_i} \lambda_{ij} g_{ij} + \overset{\circ}{H}_i\right) = \sum_{j\in J_i} \lambda_{ij}\left[\gamma_i\left(g_{ij} + \overset{\circ}{H}_i\right)\right] = g_i \end{aligned}$$

está bien definido. Además es inyectivo y de orden, pues $\operatorname{Ker}(\gamma_i) := \left\{\overset{\circ}{H}_i\right\}$ y $g_{ij} \geq 0$ equivale a $g_{ij} + \overset{\circ}{H}_i \geq 0 + \overset{\circ}{H}_i$, para todo $j \in J_i$. Estos monomorfismos inducen el monomorfismo bien definido

$$\begin{aligned} \gamma\colon \qquad \mathcal{G}(G) \qquad &\longrightarrow G \\ \underline{g} = \left(\ldots, g_{i+1} + \overset{\circ}{H}_{i+1}, g_i + \overset{\circ}{H}_i, \ldots\right) &\longmapsto \gamma\left(\underline{g}\right) := \sum_{i\in I} g_i, \end{aligned}$$

que también es de orden, pues para todo $i, k, m \in I$ tales que $i > k$ y $m < i$, se tiene que $g_{ij} + g_{mn} \in H_i \smallsetminus H_k$, para todo $j \in J_i$ y todo $n \in J_m$. □

OBSERVACIÓN 5.3. En virtud del teorema anterior, dado un grupo abeliano divisible y ordenado de rango numerable. El graduado asociado a su rango principal aparece como cota inferior, y el graduado de Hahn asociado a su rango principal aparece como cota superior, entre cualquier grupo cuyo esqueleto sea el mismo que el del grupo dado. Esto no se puede concluir, si el grupo abeliano ordenado no es divisible. Lo muestra el Contraejemplo 4.7 del capítulo anterior, pues su grupo G no es divisible, $\mathcal{G}(G) = \mathcal{H}(G)$ y $\mathcal{G}(G) \nleq G$.

[3]Ver [23], Sección 3, Proposición 3.5, pp. 121–122.

5.2.2. La Estructura Finita

PROPOSICIÓN 5.7. *Para un grupo abeliano ordenado $(G, +, \leq)$ y su cierre divisible $\overline{G}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $H \in \mathcal{A}(G)$, entonces $\Delta(\Gamma(H)) = H$.*
2. *Si $H \in \mathcal{A}(G)$, entonces $\Gamma(H) \in \mathcal{A}(\overline{G})$.*
3. *Si $E \in \mathcal{A}(\overline{G})$, entonces $\Delta(E) \in \mathcal{A}(G)$.*
4. *Existe una correspondencia biunívoca que preserva y reflecta el orden total inclusión entre $\mathcal{A}(G)$ y $\mathcal{A}(\overline{G})$.*

Demostración. Claramente $H \leq \Delta(\Gamma(H))$. Recíprocamente, sea $g \in \Delta(\Gamma(H))$, por el Lema 3.8, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $ng \in H$. Como $|g| \leq n|g|$ y $H \in \mathcal{A}(G)$, entonces $g \in H$. Así se cumple 1.

Sean $\alpha \in \overline{G}$ y $\beta \in \Gamma(H)$ tales que $0 < \alpha < \beta$. Por el Lema 3.8, existe $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n\beta \in H$. Por el Lema 4.9, se tiene que $0 < n\alpha < n\beta$, lo que implica $n\alpha \in H$, pues $H \in \mathcal{A}(G)$. Por lo tanto, $\alpha \in \Gamma(H)$ por el Lema 3.8. Así se cumple 2.

Claramente se cumple 3.

Por los dos literales anteriores y el Corolario 3.6, basta restringir y tomar la función $\Gamma\colon \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(\overline{G})$. En efecto, la función $\Delta\colon \mathcal{A}(\overline{G}) \to \mathcal{A}(G)$ es la inversa de Γ, por el literal 1 y el Lema 3.7. Así se cumple 4. □

OBSERVACIÓN 5.4. En virtud del lema anterior, dado un grupo abeliano ordenado. Todos y cada uno de los subgrupos aislados de su cierre divisible son nada más y nada menos que los subespacios vectoriales generados por todos y cada uno de sus subgrupos aislados. Por lo tanto, el rango del grupo dado coincide con el de su cierre divisible.

OBSERVACIÓN 5.5. Dados un grupo abeliano ordenado G y su cierre divisible $\overline{G}$ con esqueletos respectivos $\mathcal{F}_G = \left\{R_i = H_i/\overset{\circ}{H}_i\right\}_{i\in(I,\leq_{\mathrm{r}})}$ y $\mathcal{F}_{\overline{G}} = \left\{\overline{R_i} = \overline{H_i/\overset{\circ}{H}_i}\right\}_{i\in(I,\leq_{\mathrm{r}})}$. Para cada $i \in I$, se tiene que $\Gamma(R_i) = \Gamma\left(H_i/\overset{\circ}{H}_i\right) = \Gamma(H_i)/\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_i\right) = \overline{H_i}/\overline{\overset{\circ}{H}_i} = \overline{H_i/\overset{\circ}{H}_i} = \overline{R_i}$, i.e., se tiene que $\overline{R_i}$ es el $\mathbb{Q}$–espacio vectorial generado por R_i.

El presente trabajo termina con el siguiente resultado, que describe la estructura que tienen todos los grupos abelianos ordenados de rango finito. Se lo puede llamar ***el Teorema de inmersión de Hahn para grupos de rango finito***:

TEOREMA 5.8. *Si $(G,+,\leq)$ es un grupo abeliano ordenado de rango n, entonces es orden-isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}^n,+,\leq_{lex})$.*

Demostración. Como G, y por lo tanto $\overline{G}$ son de rango n, entonces sin pérdida de generalidad, suponiendo que $\mathcal{A}_{\mathrm{p}}(G)=\mathcal{A}(G)$, con $\mathcal{A}(G):=\{H_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ de modo que

$$\{0\}=H_0<H_1<\cdots<H_i<\cdots<H_{n-1}<H_n=G,$$

se tienen $\mathcal{F}_G=\left\{R_i=H_i/\overset{\circ}{H}_i\right\}_{i\in([\![1,n]\!],\leq_{\mathrm{r}})}$ y $\mathcal{F}_{\overline{G}}=\left\{\overline{R_i}=\Gamma\left(H_i\right)/\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_i\right)\right\}_{i\in([\![1,n]\!],\leq_{\mathrm{r}})}$.

Para todo $i\in[\![1,n]\!]$, resulta que $\overline{R_i}$ es un $\mathbb{Q}$–espacio vectorial con alguna base $\overline{B_i}=\left\{g_{ij}+\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_i\right):g_{ij}\in\Gamma\left(H_i\right)\right\}_{j\in I_i}$ entonces por el Lema 5.2 los elementos de $\overline{B}=\left\{g_{ij}:i\in[\![1,n]\!]\wedge j\in I_i\right\}$ son $\mathbb{Q}$–linealmente independientes en $\overline{G}$, y para todo $g\in\overline{G}$, existen únicos $\lambda_{ij}\in\mathbb{Q}$ tales que $g=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j\in I_i}\lambda_{ij}g_{ij}$. Por lo tanto, poniendo $g_i=\sum\limits_{j\in I_i}\lambda_{ij}g_{ij}$, fijando $\overline{B_i}$ y los representantes de sus elementos, la función

$$\begin{aligned}\delta\colon\quad \overline{G}\quad &\longrightarrow \mathcal{H}(\overline{G})\\ g=\sum_{i=1}^{n}g_i &\longmapsto \delta(g):=\left[g_n+\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_n\right),\ldots,g_{i+1}+\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_{i+1}\right),g_i+\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_i\right),\ldots,g_1+\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_1\right)\right]\end{aligned}$$

está bien definida, y es $\mathbb{Q}$–lineal porque lo es en cada componente. Además es un isomorfismo de espacios vectoriales, porque transforma la base $\overline{B}$ de $\overline{G}$ en el conjunto $\delta(\overline{B}):=\left\{\left[\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_n\right),\ldots,\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_{i+1}\right),g_{ij}+\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_i\right),\ldots,\Gamma\left(\overset{\circ}{H}_1\right)\right]\in\mathcal{H}(\overline{G}):g_{ij}\in\overline{B}\right\}$, que es una base de $\mathcal{H}(\overline{G})$, pues $\overline{B_i}$ es base de $\overline{R_i}$. Más aún, δ es ordenado; porque por un lado, para todo $g\in\overline{G}\smallsetminus\{0\}$, existe $i\in[\![1,n]\!]$ tal que $g_i\neq 0$ y $g_l=0$, para todo $l\in[\![1,n]\!]$ tal que $l>i$; y por otro lado, para todo $k,m\in[\![1,n]\!]$ tales que $i>k$ y $m<i$, se tiene que $g_{ij}+g_{mn}\in H_i\smallsetminus H_k$, para todo $j\in I_i$ y todo $n\in I_m$; por lo tanto, $g>0$ equivale a $g_i>0$ que equivale a $\delta(g)>0$. De esta manera, $\overline{G}\cong\mathcal{H}(\overline{G})$.

Para todo $i\in[\![1,n]\!]$, por el Teorema 4.11 existe $\mathcal{R}_i\leq\mathbb{R}$ tal que $\overline{R_i}\cong\mathcal{R}_i$, i.e., tal que a su vez existe $\psi_i\colon\overline{R_i}\to\mathcal{R}_i$ un isomorfismo ordenado. Estos isomorfismos ordenados inducen otro isomorfismo ordenado $\psi\colon\mathcal{H}(\overline{G})\to\biguplus\limits_{i\in([\![1,n]\!],\leq_{\mathrm{r}})}\mathcal{R}_i$. Por lo tanto, poniendo $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}=\biguplus\limits_{i\in([\![1,n]\!],\leq_{\mathrm{r}})}\mathcal{R}_i\leq\mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathcal{H}(\overline{G})\cong\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$.

Finalmente, en particular por el Corolario 3.4, de manera natural se tiene que $G\cong\delta(G)\cong\psi\left[\delta(G)\right]\leq\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$. $\square$

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Conclusiones y Comentarios

1. Se recopiló toda la teoría de grupos abelianos divisibles y ordenados necesaria para poder establecer el teorema de inmersión de Hahn (Teorema 5.3). Este teorema describe la estructura de estos grupos. Resultando que todo grupo abeliano divisible y ordenado es de manera natural un subgrupo aditivo del producto de Hahn de determinadas copias de $\mathbb{R}$ ordenado lexicográficamente.

2. Se mostró que existen dos órdenes diferentes que podrían ser definidos en los grupos abelianos libres de torsión (Observación 4.10).

3. Se comprobó que para lograr distinguir el tipo de orden que tienen los grupos abelianos ordenados, introducir en ellos sus respectivos subgrupos aislados es una herramienta fundamental.

4. Sin tomar en consideración las primeras dos secciones de los Fundamentos Preliminares (Capítulo 2), se presentaron demostraciones (varias originales)[1] lo suficientemente detalladas de todos los resultados establecidos en este trabajo. En especial de aquellos que fueron proporcionados y propuestos por Ribenboim en [20] y por Ugarte en [23], a excepción del teorema de inmersión de Hahn (Teorema 5.3) y el lema de álgebra lineal de Banaschewski (Lema 5.1).

[1] Lemas 2.25, 4.4, 4.18 y 4.19. Proposiciones 2.24, 3.2, 3.5, 4.16 y 4.21. Observaciones 4.9, 4.13 y 5.5. Resultados originales: Corolario 3.4, Lema 5.4 y Corolario 5.5. Resultados propiamente originales: Proposición 3.9 y Teorema 5.8.

Según Aroca en [3], Hahn en [15] utiliza resultados de análisis funcional para espacios vectoriales racionales cuando demuestra su teorema de inmersión.[2] De acuerdo con Ugarte en [23][3], Ribenboim en [20] demuestra el lema de álgebra lineal de Banaschewski, para inmediatamente utilizarlo en su demostración del teorema de inmersión de Hahn. De este modo, y como el que se pudo apreciar en la Introducción (Capítulo 1), las demostraciones de Hahn, Ribenboim y Banaschewski continuarán formando parte de la gran historia que antecede este trabajo.

5. Se comprobó que lograr ordenar los grupos abelianos divisibles se convierte en lograr hallar sus respectivos esqueletos (Observación 5.1).

6. Se mostró que los grupos abelianos divisibles y ordenados de rango numerable están acotados inferior y superiormente (Observación 5.3). Inferiormente por los graduados asociados a sus respectivos rangos principales. Superiormente por los graduados de Hahn asociados a sus respectivos rangos principales. Resultado que indica la minimalidad[4] de las inmersiones descritas en el teorema de inmersión de Hahn para estos grupos (Teorema 5.6).

7. Se mostró que el rango de los grupos abelianos ordenados es igual al de sus respectivos cierres divisibles (Observación 5.4).

8. Se logró describir la estructura de los grupos abelianos ordenados de rango finito, y sin la necesidad de pedirles la divisibilidad como hipótesis, estableciendo el Teorema 5.8, que es el teorema de inmersión de Hahn para grupos de rango finito, además de presentar una demostración del mismo. Resultando que todo grupo abeliano ordenado de rango finito es de manera natural un subgrupo aditivo del producto de Hahn de finitas copias de $\mathbb{R}$ ordenado lexicográficamente. Logros que junto con la publicación [23] de Ugarte son igual de importantes que los de la publicación [1] de Banaschewski, la publicación [4] de Clifford, la publicación [16] de Hausner y Wendel, e incluso que los de las respectivas partes[5] de los trabajos [19] y [20] del mismo Ribenboim.

[2]Ver [3] pp. 34. El Mat. José Manuel Aroca Hernández (quien fue el Director de Tesis de Doctorado del Mat. Francisco Javier Ugarte Guerra) lo afirma en su contribución científica: "Valoraciones, Arcos y Ecuaciones Diferenciales", la cual está en [3] (pp. 13–39).

[3]Ver [23] pp. 106.

[4]Reducción a lo esencial, despojando elementos sobrantes.

[5]Capítulos 1–2 de [19] y Capítulo 1 de [20].

6.2. Recomendaciones y Comentarios

Las recomendaciones con sus respectivos comentarios que se presentan en esta sección final son dos prolongaciones y una continuación que (si se desea a futuro) podrían hacerse con, y a partir de, este trabajo.

1. Estudiar la minimalidad de las inmersiones descritas en el Teorema 5.6 para el caso de grupos abelianos divisibles y ordenados de rango no numerable. Un primer paso es verificando si sigue siendo la misma que se mostró en la Observación 5.3 para los de rango numerable. Lo importante en este paso es analizar si el Lema 5.2 sigue cumpliéndose cuando la familia de subespacios que satisface las hipótesis del mismo es no numerable.

2. Estudiar e introducir las extensiones inmediatas de un grupo abeliano ordenado y sus grupos maximales[6]. Después comprobar, presentando una demostración, que un grupo maximal de todo grupo abeliano divisible y ordenado de rango finito es el graduado de Hahn asociado a su respectivo rango principal. Resultado particular del que Ribenboim establece y demuestra en [20][7] de forma general, para todo grupo abeliano divisible y ordenado.

3. Estudiar la publicación [24] de Ugarte investigando toda su bibliografía, y comprobar, presentando a detalle, todos sus resultados. Según Ugarte en [23][8], él en [24] introduce las valoraciones y relaciones de dominación[9], con las cuales logra caracterizar los esqueletos correspondientes a órdenes compatibles con el orden de un grupo abeliano ordenado.[10] Lo hace probando y utilizando antes otros resultados importantes. Uno de ellos (utilizando el lema de álgebra lineal de Banaschewski, el cual primero establece) resultando ser, de alguna forma en el contexto de las valoraciones y relaciones de dominación, el teorema de inmersión de Hahn.[11] De este modo, esta continuación podrá ser otro gran trabajo.

[6] Ver sus definiciones en [19], Capítulo 2, pp. 48.
[7] Ver [20], Teorema 3, pp. 24–25.
[8] Ver [23] pp. 124.
[9] Ver sus definiciones en [24], Sección 2, pp.49 y 48 respectivamente.
[10] Ver [24], Sección 4, Teorema 4.4, pp. 60–61.
[11] Ver [24], Sección 4, Lema 4.1 y Teorema 4.2 respectivamente, pp. 58–59.

Bibliografía

[1] B. BANASCHEWSKI, *Totalgeordnete Moduln*, Archiv der Mathematik, Vol. 7 (1957–January), pp. 430–440.

[2] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 25, third edition, second printing, The United States of America, 1973.

[3] A. CAMPILLO AND D. HERNÁNDEZ, *El Legado Matemático de Juan Bautista Sancho Guimerá*, Ediciones Universidad de Salamanca, primera edición, Salamanca, España, 2016–Enero.

[4] A. H. CLIFFORD, *Note on Hahn's Theorem on Ordered Abelian Groups*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 5 (1954–December), pp. 860–863.

[5] P. F. CONRAD, *Embedding Theorems for Abelian Groups with Valuations*, American Journal of Mathematics, Vol. 75, Nº 1 (1953–January), pp. 1–29.

[6] P. F. CONRAD, *A Note on Valued Linear Spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 9 (1958–August), pp. 646–647.

[7] P. F. CONRAD, J. HARVEY, AND C. HOLLAND, *The Hahn Embedding Theorem for Abelian Lattice–Ordered Groups*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 108, Nº 1 (1963–July), pp. 143–169.

[8] D. S. DUMMIT AND R. M. FOOTE, *Abstract Algebra*, John Wiley and Sons, Inc., third edition, The United States of America, 2004.

[9] L. FUCHS, *Partially Ordered Algebraic Systems*, International Series of Books and Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 28, Pergamon Press, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, The United States of America, 1963.

[10] L. FUCHS, *Abelian Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer International Publishing Switzerland, The United States of America, 2015.

[11] L. FUCHS AND L. SALCE, *Modules over Non-Noetherian Domains*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 84, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, The United States of America, 2001.

[12] K. A. H. GRAVETT, *Valued Linear Spaces*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 6, Nº 1 (1955–January), pp. 309–315.

[13] K. A. H. GRAVETT, *Ordered Abelian Groups*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 7, Nº 1 (1956–January), pp. 57–63.

[14] K. A. H. GRAVETT, *'Netrics' of Sets and Linear Spaces*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 10, Nº 1 (1959–January), pp. 9–16.

[15] H. HAHN, *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Österreichische Akademie der Wissenschaften, in Wien, Mathematisch – Naturwissenschaftliche Klasse, Vol. 116 (Abteilung IIa) (1907–March), pp. 601–655.

[16] M. HAUSNER AND J. G. WENDEL, *Ordered Vector Spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 3 (1952–December), pp. 977–982.

[17] I. KAPLANSKY, *Infinite Abelian Groups*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, The United States of America, 1965.

[18] C. C. PINTER, *Set Theory*, Addison–Wesley Series in Mathematics, The United States of America, 1971.

[19] P. RIBENBOIM, *Théorie des Groupes Ordonnés*, Publicaciones de la Serie MONOGRAFÍAS DE MATEMÁTICA del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur de Bahía Blanca, Imprenta López, Buenos Aires, Argentina, 1963–Octubre.

[20] P. RIBENBOIM, *Théorie des Valuations*, Les Presses de l'Université de Montréal, first edition, Montreal, Quebec, Canada, 1965.

[21] A. ROBINSON AND E. ZAKON, *Elementary Properties of Ordered Abelian Groups*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 96, Nº 2 (1960–August), pp. 222–236.

[22] W. SZMIELEW, *Elementary Properties of Abelian Groups*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 41, Nº 2 (1955), pp. 203–271.

[23] F. J. UGARTE, *Estructura de los grupos abelianos ordenados*, Pro Mathematica, Vol. 29, Nº 57 (2016), pp. 105–128.

[24] F. J. UGARTE, *Valoraciones y relaciones de dominación en grupos abelianos sin torsión*, Pro Mathematica, Vol. 29, Nº 58 (2016), pp. 45–62.