

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**UNA GENERALIZACIÓN DEL MODELO DE BURRIDGE Y  
KNOPOFF PARA TERREMOTOS**

**TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**GABRIEL EDUARDO SALVADOR JIMENEZ**

**a7xsalvador@hotmail.com**

**DIRECTOR: RAMON XULVI-BRUNET**

**ramon.xulvi@epn.edu.ec**

**QUITO, ENERO 2020**

## DECLARACIÓN

Yo, GABRIEL EDUARDO SALVADOR JIMENEZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional, y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración, cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y la normativa institucional vigente.

---

GABRIEL EDUARDO SALVADOR JIMENEZ

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por GABRIEL EDUARDO SALVADOR JIMENEZ, bajo mi supervisión.

---

Ramon Xulvi-Brunet, Ph.D.  
Director del Proyecto

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi madre y a mi padre, por su apoyo constante e incondicional durante toda mi vida y en particular en esta etapa.

Al Dr. Ramón Xulvi-Brunet, muchas gracias por su guía, consejo y soporte en cada aspecto de este trabajo.

Al Centro de Modelización Matemática MODEMAT, por haberme permitido utilizar el sistema HPC-MODEMAT, gracias al cual se pudieron obtener muchos de los resultados presentados aquí.

A las personas que hicieron de este tiempo una experiencia grata. En particular a Saúl, Erazo, Alejandro, Pablo, Pandi, Elizabeth y Chubi. A Christopher, por poner casa.

*DEDICATORIA*

A mi madre, a mi padre y a mis hermanos: Diego, Juan y Diana.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sismos y terremotos . . . . .	1
1.2. Terremotos y sistemas complejos . . . . .	4
1.3. Modelos de Burridge-Knopoff . . . . .	5
1.3.1. Descripción del modelo BK unidimensional . . . . .	6
1.3.2. Descripción del modelo BK bidimensional . . . . .	9
1.3.3. Distribución de magnitudes . . . . .	10
1.4. Esquema del trabajo de titulación . . . . .	12
<b>2. Métodos</b>	<b>13</b>
2.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden . . . . .	13
2.2. Método de Box-Muller . . . . .	15
<b>3. Una generalización del modelo de Burridge y Knopoff</b>	<b>17</b>
3.1. Disposición espacial de los bloques . . . . .	17
3.1.1. Interacción entre bloques . . . . .	18
3.1.2. Interacción entre bloques y la placa superior . . . . .	19
3.1.3. Rozamiento . . . . .	19
3.1.4. Fuerza neta en un bloque . . . . .	20
3.2. Disposición de las constantes elásticas . . . . .	20
3.3. Cálculo de la distribución de magnitudes . . . . .	21
3.4. Implementación computacional . . . . .	21
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>24</b>
4.1. Reproducción de resultados conocidos . . . . .	24
4.1.1. Dinámica de un solo bloque . . . . .	24
4.1.2. Distribución de magnitudes para el modelo BK unidimensional de 200 bloques . . . . .	25
4.2. Variación de las constantes elásticas . . . . .	27
4.2.1. Variación de $\sigma_c$ . . . . .	27
4.2.2. Variación de $\sigma_p$ . . . . .	29
4.3. Disposición tridimensional de los bloques . . . . .	30
4.4. Variación en el número total de eventos . . . . .	33
<b>5. Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>A. Programas Computacionales</b>	<b>35</b>
A.1. Modelo propuesto . . . . .	35
A.2. Clasificación de magnitudes . . . . .	38
A.3. Distribución de magnitudes . . . . .	39

# Índice de figuras

1.1. Mecanismos fundamentales de fallas geológicas . . . . .	1
1.2. Ley de Gutenberg–Richter . . . . .	3
1.3. Esquema de una falla lateral vista desde arriba . . . . .	5
1.4. Esquema del modelo de Burridge-Knopoff unidimensional . . . . .	6
1.5. Gráfico de la fuerza de rozamiento introducida por J.M. Carlson y J.S. Langer . . . . .	8
1.6. Versión bidimensional del modelo de Burridge y Knopoff . . . . .	9
1.7. Solución numérica del modelo BK en una dimensión. . . . .	10
2.1. Transformaciones de Box-Muller. . . . .	16
3.1. Esquema de una versión tridimensional del modelo de Burridge y Knopoff	17
4.1. Velocidad de un bloque en función del tiempo en el modelo BK. . . . .	25
4.2. Distribución de magnitudes de sismos para un sistema de 200 bloques. .	26
4.3. Distribución de magnitudes cuando se varía $\sigma_c$ en un sistema de 200 bloques. . . . .	28
4.4. Distribución de magnitudes cuando se varía $\sigma_c$ en un sistema de 2000 bloques. . . . .	28
4.5. Distribución de magnitudes cuando se varía $\sigma_p$ en un sistema de 200 bloques. . . . .	29
4.6. Distribución de magnitudes para $\alpha = 4$ cuando se varía $\sigma_p$ en un sistema de 2000 bloques. . . . .	30
4.7. Distribución de magnitudes de arreglos tridimensionales de dimensiones $10 \times 10 \times 4$ y $20 \times 20 \times 3$ . . . . .	31
4.8. Distribución de magnitudes de arreglos tridimensionales “cúbicos”. . .	32
4.9. Distribución de magnitudes del sistema $10 \times 10 \times 4$ para distinto número total de eventos. . . . .	33

# Índice de cuadros

4.1. Tabla de parámetros usados para el movimiento un bloque. . . . .	24
4.2. Tabla de parámetros usados para el movimiento del sistema de 200 bloques.	25
4.3. Tabla de parámetros usados para el movimiento del sistema cuando se varían las constantes elásticas. . . . .	27
4.4. Tabla de parámetros usados para la variación de $\sigma_c$ . . . . .	27
4.5. Tabla de parámetros usados para la variación de $\sigma_p$ . . . . .	29
4.6. Tabla de parámetros usados para el movimiento del sistema de bloques tridimensional. . . . .	30
4.7. Magnitud aproximada a la que empieza la tendencia horizontal $M^*$ en función del tamaño del sistema. . . . .	31



## Resumen

En una falla geológica, un estado de calma puede ser interrumpido por eventos sísmicos que se cuantifican mediante el *momento sísmico*. Observaciones de muchos de estos eventos han permitido encontrar una relación empírica entre un momento sísmico dado y el número de eventos de un momento mayor o igual a éste. Esta relación es una ley de potencias conocida como la ley de Gutenberg-Richter. La explicación de esta ley sigue siendo una cuestión pendiente en el campo de las ciencias de la tierra.

Con el fin de entender mejor la ley de Gutenberg-Richter, en 1967, R. Burridge y L. Knopoff propusieron un modelo de bloques y resortes basándose en el comportamiento de una falla geológica. Cualquier sistema de este modelo evoluciona hacia un estado "crítico" donde, una vez alcanzado, pequeñas alteraciones de éste pueden llevar a eventos llamados avalanchas, las cuales se interpretan como sismos. Sin embargo, en el modelo de Burridge y Knopoff, la distribución de sismos no es coherente con la ley de Gutenberg-Richter en todo el rango de magnitudes registradas.

En este trabajo, proponemos modificaciones al modelo de Burridge y Knopoff mediante la incorporación de dos ideas nuevas con el fin de que la descripción de una falla sea más realista. La primera idea es asignar constantes elásticas diferentes a los resortes que componen el modelo con el objetivo de reproducir las irregularidades de los materiales que hacen que el medio no sea uniforme. Asumimos, en una primera aproximación, que estas constantes pueden extraerse de una distribución gaussiana. Por otro lado, debido a que el comportamiento de una falla involucra la interacción de todas las dimensiones espaciales, la segunda idea es establecer una disposición tridimensional de los bloques que componen el modelo.

Los resultados de las simulaciones numéricas muestran que cuando las constantes elásticas están asignadas siguiendo una distribución gaussiana, a mayor desviación estándar de esta distribución, mayor es el número de eventos de magnitud mediana.

Por otro lado, los resultados sugieren que al aumentar el tamaño del sistema tridimensional, la distribución de sismos tendería a cumplir la ley de Gutenberg y Richter. Además, en el caso tridimensional se puede notar que no hay una dependencia entre la distribución de sismos con los parámetros de rozamiento utilizados.

## Abstract

In a geological fault, a state of calm can be interrupted by seismic events that are quantified by the *seismic moment*. Observations of many of these events have allowed us to find an empirical relationship between a given seismic moment and the number of events of a moment greater than or equal to it. This relationship is a power law known as the Gutenberg-Richter law. The explanation of this law remains an outstanding question in the field of earth sciences.

In order to better understand the Gutenberg-Richter law, in 1967, R. Burridge and L. Knopoff proposed a model of blocks and springs based on the behavior of a geological fault. Any system of this model evolves towards a “critical” state where, once reached, small alterations of it can lead to events called avalanches, which are interpreted as earthquakes. However, in the Burridge and Knopoff model, the distribution of earthquakes is not consistent with the Gutenberg-Richter law over the entire range of recorded magnitudes.

In this work, we propose modifications to the Burridge and Knopoff model by incorporating two new ideas in order to make the description of a fault more realistic. The first idea is to assign different elastic constants to the springs that make up the model in order to reproduce the irregularities of the materials that make the medium not uniform. We assume, in a first approximation, that these constants can be obtained from a Gaussian distribution. On the other hand, because the behavior of a fault involves the interaction of all spatial dimensions, the second idea is to establish a three-dimensional arrangement of the blocks that make up the model.

The results of the numerical simulations show that when the elastic constants are drawn from a Gaussian distribution, the greater the standard deviation of this distribution, the greater the number of events of medium magnitude.

On the other hand, the results suggest that by increasing the size of the three-dimensional system, the distribution of earthquakes would tend to comply with the law of Gutenberg and Richter. In addition, in the three-dimensional case it can be noted that there is no dependence between the distribution of earthquakes with the friction parameters used.

## Capítulo 1

# Introducción

Una tendencia de la física teórica moderna es el estudio de sistemas que tradicionalmente han sido estudiados en otras disciplinas científicas. Un ejemplo de esta tendencia es el estudio de los terremotos [8]. Para entender este fenómeno, conceptos propios de sismología, así como de geología, serán introducidos en este capítulo. Se verá qué relaciones empíricas en las mediciones de los terremotos hacen que éstos se puedan relacionar con sistemas auto-organizados críticamente. Basándose en el comportamiento de una falla y los en sistemas auto-organizados críticamente, se presentará el modelo clásico de Burridge y Knopoff, y se propondrá variaciones a éste que podrían ayudar a asemejar más el comportamiento del modelo a las observaciones.

### 1.1. Sismos y terremotos

En geología, una “falla” es una rotura de un cuerpo rocoso tridimensional, de manera que una superficie aproximadamente plana se forma, separando los dos cuerpos rocosos resultantes que se desplazan uno respecto al otro [1]. Estos dos cuerpos se conocen como bloques de la falla. La superficie formada cuando se produce la ruptura, y que además está en contacto con ambos bloques, se conoce como el plano de la falla. Este plano puede tener cualquier orientación, como se muestra en la Figura 1.1.

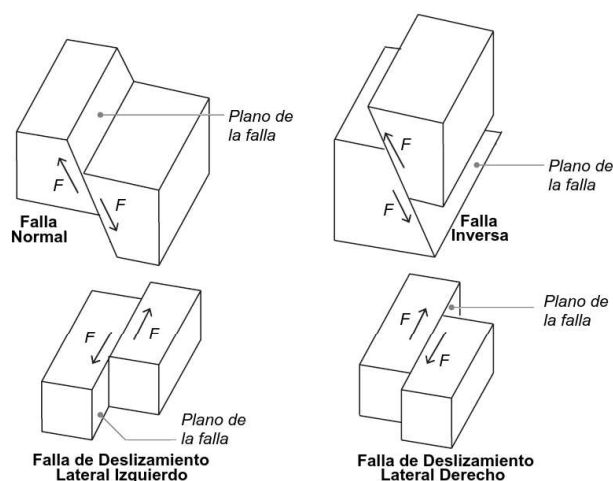


FIGURA 1.1: Mecanismos fundamentales de fallas. Cuando el plano de la falla no es completamente vertical, forma un bloque de techo y uno de piso. La falla es normal si el bloque de techo se desliza hacia abajo con relación al bloque de piso. Si se deslizan de forma opuesta, la falla es inversa. Las fallas con desplazamiento lateral se clasifican de acuerdo al movimiento relativo, derecho o izquierdo, de los bloques. Adaptado de Elnashai, Amr S., and Luigi Di Sarno. *Fundamentals of earthquake engineering*. New York: Wiley, 2008. [13].

La mayoría del tiempo, una falla se encuentra en un estado de relativa calma. Sin embargo, eventualmente, este estado es interrumpido por eventos que se caracterizan por desplazamientos violentos de los bloques de la falla. Esto se debe a que se acumula tensión dentro de la falla en los periodos de calma mientras el rozamiento en el interior de la falla contrarreste la tensión [8, 21]. Una vez que se pierde el equilibrio, una gran cantidad de energía es liberada.

Todo movimiento o vibración del suelo causado por la liberación súbita de la energía acumulada en una falla se define como un sismo [1]. Los sismos de gran magnitud se conocen como terremotos. Este término se usa para describir tanto el deslizamiento repentino de una falla, como el temblor resultante y la energía sísmica liberada, causado por el deslizamiento de los bloques de la falla o por otros cambios bruscos de tensión en la tierra como, por ejemplo, la actividad volcánica o magmática [1]. El punto subterráneo donde se origina el sismo se conoce como hipocentro, o foco; y el punto en la superficie de la tierra que se encuentra directamente encima del hipocentro se conoce como el epicentro [1].

Para expresar el “tamaño” de un sismo se hace uso de las medidas de *intensidad* y de *magnitud*. Las medidas de *intensidad* son cualitativas y no hacen uso de instrumentos de medición objetivos, sino de la percepción de los daños a estructuras o el comportamiento humano durante un terremoto. Las medidas de *magnitud* son cuantitativas y se basan en la medición del desplazamiento de los bloques de tierra o en las amplitudes de diferentes tipos de ondas generadas durante un movimiento sísmico [1].

Existen diferentes tipos de escalas de magnitud que son usadas para medir eventos sísmicos. Charles Francis Richter, junto con Beno Gutenberg, desarrollaron en 1935 la escala sismológica de magnitud local  $M_L$  orientada a distinguir el gran número de sismos pequeños de los terremotos de gran tamaño que eran observados en California en ese entonces. La escala asigna valores a los sismos dependiendo de la cantidad de energía que liberan, siendo definida de tal forma que un evento de magnitud 3, registrado en un sismómetro Wood-Anderson de torsión (aparato utilizado para medir la amplitud de las ondas en la superficie provocadas por el terremoto), a una distancia de 100 kilómetros, muestre en el sismómetro un pico de 1 milímetro. La magnitud local  $M_L$  tiene la siguiente forma:

$$M_L = \log_{10} \frac{A}{A_0}, \quad (1.1)$$

donde  $A$  es el pico medido en el sismómetro, que fue provocado por las ondas sísmicas en la superficie, y  $A_0$  es una curva de referencia [4].  $A$  y  $A_0$  dependen de la distancia desde el epicentro hasta el sismómetro. La escala de magnitud es adimensional.

Esta escala fue hecha originalmente para medir eventos de magnitud moderada (desde magnitud 3 hasta magnitud 7) asignando un número que permite que el tamaño de un sismo pueda ser comparado con el de otro. El problema de esta escala es la saturación para eventos de magnitud grande, es decir, la escala muestra magnitudes similares para sismos de gran magnitud que claramente son de intensidad diferente. Se atribuyó este problema a que los parámetros que se usaban para calcular la magnitud local  $M_L$  no eran lo suficientemente relevantes para el estudio de terremotos de gran magnitud.

La escala de magnitud local  $M_L$  fue reemplazada por la escala de magnitud de momento  $M_w$ , la cual se basa en una medida físicamente más significativa llamada momento sísmico  $M_0$ . El momento sísmico mide la extensión de la deformación en el epicentro del terremoto [13]. Se evalúa de la siguiente manera:

$$M_0 = GA\Delta u, \quad (1.2)$$

donde  $G$  es una constante elástica que caracteriza el cambio de forma que experimenta el material de la falla cuando se aplican esfuerzos tangenciales al mismo (y tiene unidades de presión, generalmente del orden de gigapascales),  $A$  es el área del plano de la falla y  $\Delta u$  es el deslizamiento promedio entre lados opuestos de la falla.

Con ayuda del concepto de momento sísmico, en 1979, Thomas C. Hanks y Hiroo Kanamori introdujeron la escala de magnitud de momento  $M_w$  [16]. Esta escala, al igual que la escala de magnitud local  $M_L$ , resume en un único número la cantidad de energía liberada por un sismo. La ventaja de la escala de magnitud de momento  $M_w$  es que no se satura para grandes terremotos. La magnitud de momento  $M_w$  depende del momento sísmico  $M_0$  y está calibrada para estar aproximadamente de acuerdo con la escala de magnitud local  $M_L$  en el valor de magnitud 6. La función empírica que relaciona el momento sísmico  $M_0$  con la magnitud de momento  $M_w$  [17] es :

$$M_w \approx \frac{2}{3} \log_{10} (M_0) - 10.7, \quad (1.3)$$

donde  $M_w$  es la magnitud de momento y  $M_0$  es el valor numérico en joules del momento sísmico medido.

Por otro lado, observaciones de muchos eventos sísmicos han permitido encontrar una relación empírica entre la magnitud de momento  $M_w$  y el número  $N$  de sismos con magnitud mayor o igual a  $M_w$ . Esta relación se conoce como la ley de Gutenberg-Richter y se expresa de la siguiente forma:

$$N(\geq M_w) = N_T 10^{-bM_w}, \quad (1.4)$$

donde  $b$  es una constante (también conocida como  $b$ -value) y  $N_T$  es el número total de eventos que se registraron (generalmente durante un año). Equivalentemente, la ley de Gutenberg-Richter se puede ver como una ley de potencias entre el momento sísmico  $M_0$  y el número  $N$  de eventos con un momento mayor o igual a  $M_0$ .

Un ejemplo de la ley de Gutenberg-Richter se muestra en la Figura 1.2.

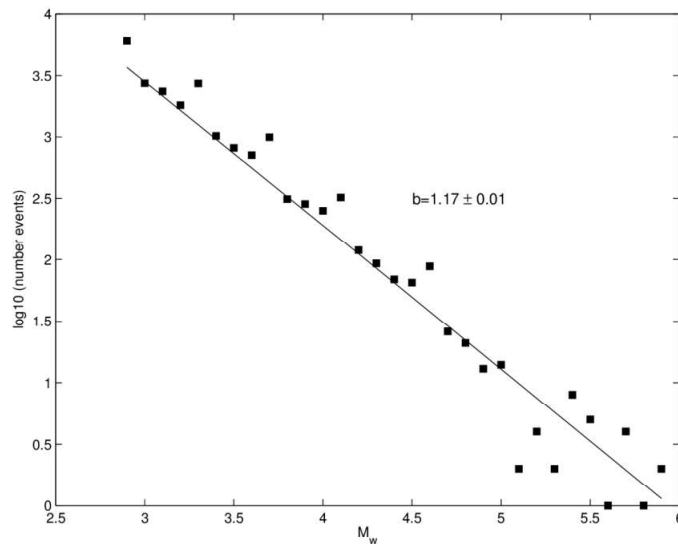


FIGURA 1.2: Ley de Gutenberg–Richter. Se muestra la relación entre  $N$ , número de ocurrencias de sismos en Italia de magnitud mayor o igual a  $M_w$ , con  $M_w$ . La línea continua es un ajuste con pendiente que permite hallar el valor de  $b$ . Tomado de *Faenza, Licia, Carlo Meletti, and Laura Sandri. "Bayesian inference on earthquake size distribution: A case study in Italy." Bulletin of the Seismological Society of America 100.1 (2010): 349-363.* [14].

El valor de  $b$  es generalmente cercano a 1 en regiones donde hay más actividad sísmica. Valores más altos de  $b$  indican una mayor proporción de eventos sísmicos pequeños, mientras que valores más pequeños de  $b$  indican una menor proporción de eventos pequeños en relación con los eventos grandes [11].

Esta ley es completamente empírica y no dice nada sobre un sismo o terremoto específico. Es decir, hay eventos que ocurren en un intervalo de tiempo determinado, pero esto no significa que esta información pueda usarse para predecir el próximo evento sísmico de magnitud dada. Además, el hecho de que en un lugar un terremoto de cierta magnitud no haya tenido lugar durante mucho tiempo no significa que haya uno por venir [2].

## 1.2. Terremotos y sistemas complejos

Los sistemas complejos son aquellos que se componen de un gran número de componentes que interactúan entre sí de forma no lineal [20]. Estos sistemas tienen un comportamiento que es difícil de tratar analíticamente debido a los tipos de interacciones entre sus partes, y tienen propiedades emergentes que surgen a partir de estas interacciones. Debido a que tales sistemas aparecen en una amplia variedad de campos, los puntos en común entre ellos se han convertido en el tema de su propia área de investigación independiente.

Un caso particular de sistema complejo es aquel en el que la evolución natural del sistema hace que este evolucione hacia un estado “crítico”. Perturbaciones a este estado pueden llevar a eventos llamados avalanchas [2]. Después de haber ocurrido una avalancha, el sistema evoluciona nuevamente hacia el estado crítico. Las avalanchas pueden ocurrir en cualquier momento y pueden ser de diferentes tamaños. La mayoría de estas tienen lugar por medio de eventos repentinos. Por otro lado, la evolución hacia este estado “crítico” ocurre solamente por cambios naturales dentro del sistema, sin influencia externa, es decir, establecidos solamente por las interacciones entre los elementos individuales del sistema.

Esto es lo que llamamos un sistema auto-organizado críticamente. La distribución del tamaño de eventos con una dependencia de ley de potencia (o *power law*) es una característica estadística propia de los sistemas que se autoorganizan críticamente [2, 25, 3].

Así pues, la dinámica de los terremotos es un ejemplo de fenómenos que se autoorganizan críticamente. Como se mencionó anteriormente, en una falla se acumula tensión mientras el rozamiento en el interior de la falla contrarresta esta tensión. Una vez se pierde el equilibrio (debido a una mayor acumulación de tensión) una gran cantidad de energía es liberada, causando sismos (los cuales son equivalentes a las avalanchas). La alternancia entre los intervalos en los que la tensión se acumula y se libera se conoce como *stick-slip* [21].

Desde una perspectiva geológica es completamente plausible que el comportamiento de un terremoto sea dependiente de una gran cantidad de detalles mecánicos que pueden surgir de diferentes entornos tectónicos. Esto explicaría que no se pueda predecir ni el tamaño de la avalancha ni cuando puede ocurrir. Sin embargo, los terremotos de todo el mundo comparten relaciones comunes, como la señalada por Gutenberg y Richter. Esta relación sugiere una forma diferente de entender el fenómeno de los terremotos.

El hecho de que la ley de Gutenberg y Richter sea una ley de potencias hizo que Per Bak y Chao Tang propusieran la idea de que los terremotos pueden ser tratados como sistemas complejos que se autoorganizan críticamente [3]. Esta similitud entre el comportamiento de las fallas y los sistemas complejos que se autoorganizan críticamente

hace de la ciencia de los terremotos un campo de prueba para los conceptos que surgen en la física de sistemas dinámicos complejos [10].

En la siguiente sección se presenta un modelo complejo que se autoorganiza críticamente desarrollado por Burridge y Knopoff. Este sistema predice la ley de Gutenberg y Richter en eventos de pequeña y mediana magnitud [8].

### 1.3. Modelos de Burridge-Knopoff

El sistema estudiado por Burridge y Knopoff (el modelo BK) pretende reproducir la dinámica típica que tiene lugar a lo largo de una falla. Con este objetivo, consideremos el modelo más simple de una falla de deslizamiento lateral, ilustrada esquemáticamente en la Figura 1.3. Aquí, los dos bloques de la falla están siendo empujados uno contra otro, forzando un movimiento en direcciones opuestas a lo largo del plano de la falla. Las correspondientes tensiones normales, o de *compresión*, y tangenciales, o de *cizalladura*, son aplicadas a cierta distancia del plano de la falla. Si la tensión local de cizalladura excede el umbral del rozamiento que mantiene juntos los bloques de la falla, las placas resbalan una respecto a la otra.

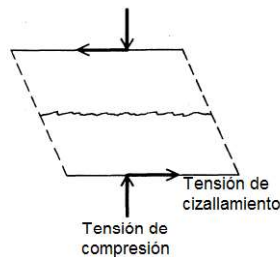


FIGURA 1.3: Esquema de una falla lateral. Tensión de compresión y de cizalladura son aplicadas lejos de la interfaz entre placas elásticas y homogéneas. Adaptado de Carlson, Jean M., James S. Langer, and Bruce E. Shaw. "Dynamics of earthquake faults. *Reviews of Modern Physics* 66.2 (1994): 657 [8].

La descripción de una falla contiene tres elementos esenciales:

- Un mecanismo para aplicar tensión de cizalladura.
- Mecanismos para almacenar la energía elástica asociada tanto a la tensión de compresión como a la de cizalladura (la tensión que almacenan los bloques de la falla debido a su contacto y movimiento relativo de una con otro).
- La fricción entre los bloques de la falla. Esta fricción ejerce un rozamiento estático cuando los bloques de la falla están acumulando tensión entre ellos. Debido a la acumulación de tensión, eventualmente los bloques de la falla se mueven. En este caso, la fricción disminuye con el aumento de velocidad de los bloques de la falla [8].

R. Burridge y L. Knopoff propusieron en 1967 un modelo para explorar el comportamiento de una falla geológica [5]. Este modelo consiste en una cadena de bloques que representan una discretización del lado, que está en contacto con el plano de la falla, de un bloque de la falla (es importante distinguir los *bloques* que componen el modelo BK de los *bloques de la falla*). El plano de la falla está representado, en el modelo BK, como una superficie rugosa inferior en contacto con los bloques. En el modelo BK, los elementos que describen una falla se implementan de la siguiente manera:

- Una placa superior moviéndose a velocidad constante representa el mecanismo para aplicar la tensión de cizalladura.
- La tensión de cizalladura almacena energía elástica en resortes de hoja conectados a los bloques. Los resortes que conectan los bloques entre sí representan la respuesta elástica a la tensión de compresión.
- La fricción entre los bloques de la falla está representada con la fricción entre los bloques con la superficie rugosa inferior.

Por tanto, el modelo de Burridge-Knopoff contiene los tres elementos esenciales para la descripción de una falla. En la siguiente sección se verá con más detalle la descripción de este modelo.

### 1.3.1. Descripción del modelo BK unidimensional

Consideremos el plano de la falla como una línea en esta aproximación unidimensional. La discretización del lado del bloque de la falla se hace considerando una cadena unidimensional de  $N$  bloques iguales de masa  $m$  en contacto con una superficie rugosa plana como se ve en la Figura 1.4. El movimiento de los bloques se da debido a que estos están conectados por medio de resortes de hoja (resortes que siguen la ley de Hooke haciendo que los bloques vuelvan a su posición de equilibrio) sujetos a una placa superior en movimiento que se desplaza a una velocidad constante  $v$ .

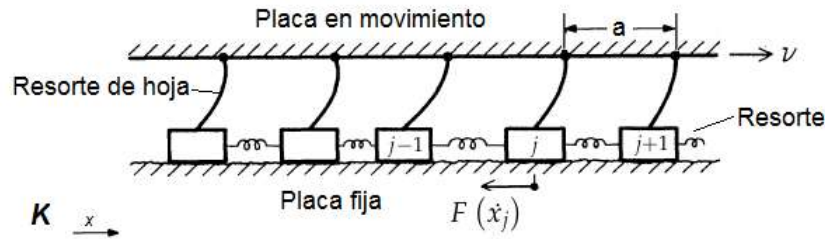


FIGURA 1.4: Esquema del modelo de Burridge-Knopoff unidimensional. Cada bloque está conectado a su vecino mediante resortes. En equilibrio la distancia de separación de los bloques es  $a$ . Cada bloque, es empujado en dirección del eje  $x$  (del sistema de referencia  $K$ ) mediante resortes de hoja a una placa superior que se mueve a velocidad constante  $v$ . Este movimiento provoca un rozamiento  $F(\dot{x}_j)$  en el bloque  $j$ -ésimo. Adaptado de Carlson, Jean M., James S. Langer, and Bruce E. Shaw. "Dynamics of earthquake faults. *Reviews of Modern Physics* 66.2 (1994): 657 [8].

Cuando el sistema está en equilibrio, los bloques consecutivos están separados una distancia de equilibrio  $a$  fijada a la placa superior, donde  $a$  es la distancia para la cual un resorte que conecta a dos bloques vecinos no ejerce fuerza. Es decir, en el sistema de referencia cartesiano  $K$ , la posición de equilibrio del bloque  $j$ -ésimo  $x_j^{eq}$ , en un tiempo  $t$  está dada por:

$$x_j^{eq} = ja + vt, \tag{1.5}$$

donde se tiene el término  $vt$  debido a que la placa en movimiento que se desplaza a una velocidad constante  $v$  respecto al sistema  $K$ .

Todos los resortes en el modelo BK siguen la ley de Hooke. En una cadena unidimensional, el bloque  $j$ -ésimo sufre una fuerza debido a los resortes vecinos a los que



está conectado. La ecuación que describe el movimiento del bloque  $j$ -ésimo está dada por:

$$m\ddot{x}_j = -k_c (x_j - x_{j-1} - a) + k_c (x_{j+1} - x_j - a) - k_p (x_j - x_j^{eq}) - F(\dot{x}_j), \quad (1.6)$$

donde  $x_j$  es la posición en el sistema de referencia  $K$ ,  $m$  es la masa de cada bloque,  $k_c$  es la constante elástica de los resortes que conectan a los bloques entre sí (en este caso, todos estos resortes tienen la misma constante elástica),  $k_p$  es la constante elástica de los resortes de hoja,  $\ddot{x}_j$  representa la segunda derivada de  $x_j$  respecto al tiempo, y  $F(\dot{x}_j)$  es la fuerza de rozamiento.

En la ecuación (1.6), cuando  $1 < j < N$ , el primer sumando del lado derecho es la fuerza elástica ejercida sobre el bloque  $j$  por el resorte conectado al bloque  $j - 1$ , mientras que el segundo sumando es la fuerza elástica ejercida sobre el bloque  $j$  por el resorte conectado al bloque  $j + 1$ . Debido a que los bloques en las fronteras están conectados solamente a un bloque, para  $j = 1$  se toma solamente el aporte del segundo sumando del lado derecho de la ecuación, y para  $j = N$ , se toma solamente el primer sumando del lado derecho.

Simplificando la ecuación anterior, se tiene:

$$m\ddot{x}_j = k_c (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) - k_p (x_j - ja) + k_p vt - F(\dot{x}_j). \quad (1.7)$$

Es usual introducir el cambio de coordenadas siguiente:

$$X_j = x_j - ja, \quad (1.8)$$

de esta forma, la ecuación se convierte en:

$$m\ddot{X}_j = k_c (X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}) + k_p (vt - X_j) - F(\dot{X}_j). \quad (1.9)$$

La función  $F(\dot{X})$  depende de la velocidad. En la literatura especializada, se han considerado varios tipos de fricción. En este Trabajo de Titulación se hará uso de la fuerza de rozamiento más ampliamente utilizada, que fue introducida por J.M. Carlson y J.S. Langer [9]:

$$F(v) = F_0\phi(v), \quad (1.10)$$

donde

$$\phi(v) = \begin{cases} \frac{(1 - \sigma)}{1 + \frac{2\alpha v}{1 - \sigma}}, & \text{si } v > 0 \\ (-\infty, 1], & \text{si } v \leq 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Aquí,  $\alpha$  y  $\sigma$  son dos parámetros y  $(-\infty, 1]$  significa que el valor que toma la fuerza de rozamiento puede ser cualquiera, dentro del intervalo  $]-\infty, 1]$ , con tal de contrarrestar la influencia de los resortes e impedir el movimiento del bloque. El parámetro  $\alpha$  expresa el ritmo con el cual la fricción decrece cuando la velocidad aumenta. Cuando  $\alpha$  decrece, la fricción se hace más disipativa; por otro lado, cuando  $\alpha$  aumenta, la fricción se hace menos disipativa. Desde un punto de vista cualitativo, se ha encontrado que  $\alpha = 1$  es un umbral importante, ya que valores de  $\alpha < 1$  evitan que el sistema genere sismos de magnitud grande [21]. Por otro lado, el parámetro  $\sigma$  cuantifica la fuerza de rozamiento en el instante cuando termina la fricción estática, como se ve en la Figura 1.5. Para que

la fuerza de rozamiento decrezca con la velocidad cuando  $v > 0$  se tiene que cumplir que  $0 \leq \sigma < 1$ .

La estructura de  $\phi(v)$  responde a la dinámica *stick-slip*, mencionada anteriormente, que exhibe una discontinuidad como consecuencia de la alternancia entre la acumulación de tensión y la liberación de esta. Se impone que el movimiento hacia atrás sea prohibido, como hemos indicado, tomando  $(-\infty, 1]$  cuando  $v \leq 0$ . El valor de  $F_0$  corresponde al valor máximo de la fuerza de fricción estática. Cuando la fuerza que ejercen los resortes sobre un bloque supera el umbral  $F_0$ , el bloque empieza a deslizarse con una fricción que se hace más débil a medida que la velocidad aumenta, como se muestra en la Figura 1.5.

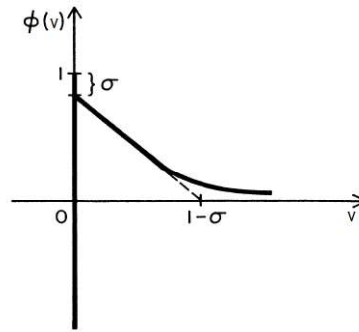


FIGURA 1.5: Gráfico de la fuerza de rozamiento introducida por J.M. Carlson y J.S. Lange. Tomado de *Carlson, Jean M., and J. S. Langer. "Properties of earthquakes generated by fault dynamics." Physical Review Letters 62.22 (1989): 2632.[7].*

Todos los bloques inicialmente están en reposo, es decir, para un bloque  $j$ -ésimo en el tiempo  $t = 0$  se cumple:

$$\dot{X}_j(t = 0) = 0. \tag{1.12}$$

Por otro lado, es necesario discutir qué pasaría si las posiciones iniciales de todos los bloques  $x_j^0$  fuesen iguales a la posición en equilibrio  $x_j^{eq}$  en el tiempo  $t = 0$ . En este caso, una vez que la placa superior comience a desplazarse a una velocidad constante  $v$ , todos los bloques del sistema estarían quietos hasta que la tensión supere el umbral de la fuerza de rozamiento. Antes de que los bloques resbalen, el aporte de los resortes que conectan los bloques unos con otros sería nulo debido a que los bloques se encontrarían equidistantes a una posición  $a$  de equilibrio. Cuando la tensión de los resortes de hoja supere el umbral del rozamiento, todos los bloques se moverían al mismo tiempo debido a que, si no hay aporte de los resortes de los bloques vecinos, las ecuaciones de movimientos serían las mismas para todos los bloques. Es decir, si las posiciones iniciales de todos los bloques coinciden con la posición en equilibrio en el tiempo  $t = 0$ , no habría nunca un aporte de los resortes de los bloques vecinos. Esto haría que, después de un evento, las condiciones del sistema sean similares a las condiciones iniciales provocando así una evolución periódica. Para evitar esta evolución periódica, se asigna pequeños desplazamientos aleatorios respecto a la posición de equilibrio para cada bloque como condición inicial [21].

Una vez aplicadas estas condiciones iniciales, se hace evolucionar el sistema. El movimiento de la placa superior hace que eventualmente se acumule tensión en alguno de los resortes de hoja. Esta tensión hace que, cuando la fuerza en un bloque particular sea más grande que un cierto umbral, el bloque resbale en dirección al movimiento de la

placa superior. Debido a que entre los bloques hay una conexión mediante resortes, el bloque que resbale provocará un aumento de tensión en sus vecinos. Este aumento de tensión hará que los vecinos de un bloque que resbaló también resbalen, llevando así a una reacción en cadena que se interpreta como un sismo [2].

El estado crítico es cuando el sistema se encuentra previo a un sismo. La alternancia entre etapas donde se encuentra en relativa calma y etapas donde el sistema tiene bloques en movimiento se conoce como *stick-slip motion*. Un evento sísmico ocurre cuando un bloque empieza a deslizarse y termina cuando todos los bloques del sistema quedan quietos otra vez [21].

### 1.3.2. Descripción del modelo BK bidimensional

En 2 dimensiones, el modelo consiste en un arreglo de  $N = L \times L$  bloques idénticos de masa  $m$ , cada uno conectado mutuamente a los cuatro vecinos más cercanos por medio de resortes con constante elástica  $k_c$  y a una placa superior en movimiento por medio de resortes de hoja de constante elástica  $k_p$  [19], como se muestra en la Figura 1.6.

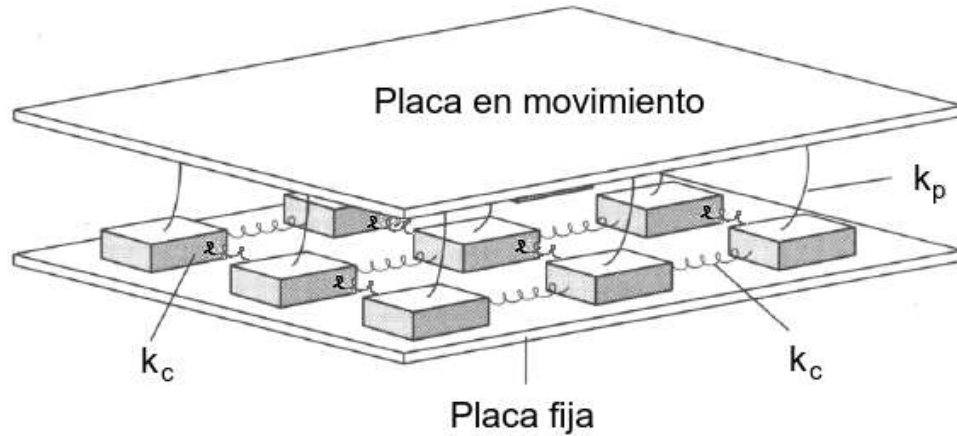


FIGURA 1.6: Versión bidimensional del modelo de Burridge y Knopoff. Los bloques están conectados con sus vecinos más cercanos mediante resortes y con una placa en movimiento mediante resortes de hoja. Tienen un contacto con fricción a una placa fija inferior. Adaptado de *National Research Council. Living on an active Earth: Perspectives on earthquake science. National Academies Press, 2003.* [10].

Procediendo de forma similar al caso unidimensional, la ecuación que describe el movimiento de un bloque  $(i, j)$  es:

$$m\ddot{X}_{i,j} = k_c (X_{i+1,j} + X_{i,j+1} + X_{i-1,j} + X_{i,j-1} - 4X_{i,j}) + k_p (vt - X_{i,j}) - F(\dot{X}_{i,j}), \quad (1.13)$$

donde  $X_{i,j}$  es el desplazamiento del bloque  $(i, j)$  en el eje  $x$  (análogo a  $X_j$  en el caso unidimensional).

El movimiento perpendicular al de la placa, en el eje  $y$ , no se toma en cuenta debido al hecho de que si la placa superior se mueve solamente en el eje  $x$ , el aporte de los resortes en el eje  $y$  sería pequeño para superar el umbral de la fuerza de rozamiento [18].

### 1.3.3. Distribución de magnitudes

Como se mencionó anteriormente, un evento sísmico ocurre cuando un bloque empieza a deslizarse y termina cuando todos los bloques del sistema quedan quietos [21]. La naturaleza del rozamiento hace que una vez que finalice el evento sísmico, el sistema vuelva a un aparente equilibrio, hasta que las fuerzas externas vuelvan a superar el umbral de la fuerza de rozamiento y ocurra un sismo otra vez. Resolviendo numéricamente las ecuaciones que describen el modelo de BK, se puede acumular una gran cantidad de datos respecto al comportamiento dinámico de los bloques, como se ve en la Figura 1.7.

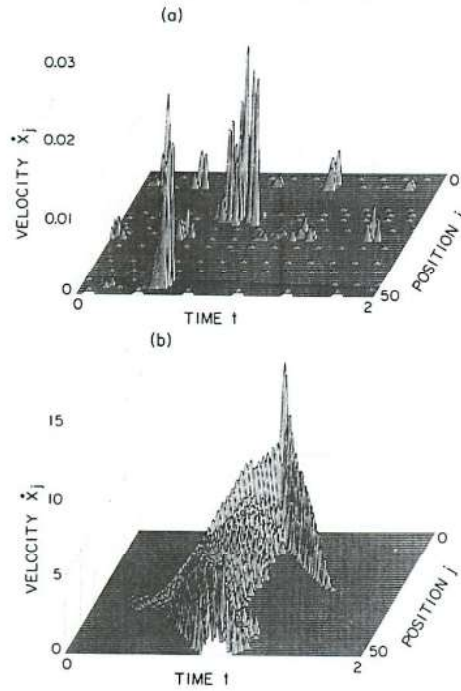


FIGURA 1.7: Solución numérica del modelo BK en una dimensión para un sistema de 50 bloques [7]. En (a) se muestran eventos pequeños, algunos de los cuales involucran el movimiento de un solo bloque. En (b) se ve un gran evento que involucra todos los bloques del sistema. Tomado de Carlson, Jean M., and J. S. Langer. "Properties of earthquakes generated by fault dynamics." *Physical Review Letters* 62.22 (1989): 2632.[7].

De esta forma, el equivalente al desplazamiento  $\Delta u$  de la falla en el modelo BK es, en el caso unidimensional,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \Delta X_i, \quad (1.14)$$

donde  $\Delta X_i$  es el desplazamiento acumulado del bloque  $i$  durante un evento sísmico. Dado que el desplazamiento en la dirección opuesta a la velocidad de la placa en movimiento está prohibido por la fuerza de rozamiento, el valor de  $\Delta x_i$  siempre es mayor a cero.

En el caso bidimensional,  $\Delta u$  se lo puede definir como:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta X_{i,j} \quad (1.15)$$

donde  $\Delta X_{i,j}$  es el desplazamiento acumulado del bloque  $(i, j)$  durante un evento sísmico.

Para relacionar el desplazamiento  $\Delta u$  con la ley de Gutenberg-Richter, reemplazamos la ecuación (1.2) en (1.3) de forma que se tiene:

$$M_w \approx \frac{2}{3} [\log_{10} (\Delta u) + \Gamma], \quad (1.16)$$

donde  $\Gamma$  es una constante de valor  $\Gamma = \log_{10} (GA) - \frac{3}{2}(10,7)$ . Los valores de  $G$ ,  $A$ , y  $\Delta u$  están en unidades básicas del sistema internacional debido a que  $M_0$  se mide en joules en la ecuación (1.3). Sin embargo, en este trabajo tomaremos valores adimensionales siguiendo trabajos anteriores [8, 21].

Introducimos la siguiente definición para la magnitud  $M$  del modelo BK para un sismo:

$$M = \log_{10} (\Delta u). \quad (1.17)$$

La magnitud de momentos, reemplazando la ecuación (1.17) en (1.16), es:

$$M_w \approx \frac{2}{3} (M + \Gamma). \quad (1.18)$$

Reemplazando la ecuación (1.18) en la expresión (1.4) de la ley de Gutenberg-Richter tenemos:

$$N(\geq M) = N_T 10^{-\frac{2}{3}b(M+\Gamma)} \quad (1.19)$$

donde  $N(\geq M)$  es el número de sismos que tienen una magnitud mayor o igual a un valor dado de  $M$ . Introduciendo el parámetro  $B = \frac{2}{3}b$ , tenemos una expresión equivalente de la ley de Gutenberg-Richter para el modelo BK:

$$N(\geq M) = N_T 10^{-B(M+\Gamma)}. \quad (1.20)$$

Podemos ahora introducir una distribución de sismos  $P(M)$ , la cual se la define de la siguiente forma:

$$P(M) = \frac{N(\geq M)}{N_T}. \quad (1.21)$$

En caso de que el modelo BK cumpla la ley de Gutenberg-Richter para toda magnitud  $M$ , se esperaría que se cumpla la siguiente expresión:

$$\log_{10} [P(M)] = -B(M + \Gamma), \quad (1.22)$$

sin embargo, la distribución de sismos generada por el modelo BK, tanto en el caso unidimensional como en el bidimensional, no es consistente con la ley de Gutenberg-Richter en todo el rango de magnitudes, particularmente para magnitudes grandes. En este trabajo, proponemos un modelo (basado en el modelo BK) donde se espera encontrar, de acuerdo con la expresión (1.22), un comportamiento lineal decreciente con pendiente  $B$  en todo el rango de magnitudes para verificar la ley de Gutenberg y Richter. El valor de  $\Gamma$  no influye en el carácter cualitativo de la ley de Gutenberg y Richter, por ello no se tomará en cuenta en este trabajo.

## 1.4. Esquema del trabajo de titulación

Los modelos BK unidimensional y bidimensional tienen ciertas limitaciones intrínsecas debido a su simplicidad. No considera variables como por ejemplo la presión, la temperatura y la profundidad en el rozamiento. Quizá sea por su simplicidad que estos modelos muestran una distribución de sismos que no describe adecuadamente el comportamiento de la ley de Gutenberg-Richter para todo rango de magnitudes.

En este trabajo se propone un modelo, basado en las ideas de los modelos BK descritos, que incorpora dos ideas nuevas con el fin de construir una descripción más realista.

- **Constantes elásticas diferentes:** Irregularidades en los materiales que componen una falla hacen que en realidad el medio no sea uniforme [15]. Proponemos describir este comportamiento no uniforme haciendo que las constantes elásticas que conectan los bloques sean diferentes unas de otras. Como una primera aproximación, asumimos que estas constantes puedan extraerse de una distribución gaussiana.
- **3D:** Debido a que un deslizamiento real de una falla involucra la interacción de todas las dimensiones espaciales de un medio elástico [8], se plantea analizar un modelo tridimensional, esto es, un modelo que disponga de una distribución espacial tridimensional de bloques conectados con resortes a sus vecinos más cercanos. Esta idea fue ya mencionada por J.M. Carlson y J.S. Langer en 1989, sin embargo no se ejecutó por las limitaciones computacionales de ese entonces [8, 6].

Con estas dos nuevas suposiciones, planteamos simular numéricamente un modelo del estilo de Burridge y Knopoff con constantes elásticas que sigan una distribución gaussiana y en tres dimensiones. El objetivo general de este Trabajo de Titulación es estudiar las propiedades del modelo propuesto y relacionarlo con las observaciones sísmicas. Para ello obtendremos de nuestras simulaciones la distribución de sismos  $P(M)$ .

Este Trabajo de Titulación sigue el siguiente esquema: En el Capítulo 2 se hace una descripción de las herramientas que serán útiles para la simulación del modelo que planteamos. Esto es, una breve explicación del Método de Runge-Kutta de cuarto orden que se usará para resolver las ecuaciones diferenciales del sistema que plantearemos, y una descripción del método de Box-Muller, usado para obtener números que sigan una distribución gaussiana. En el Capítulo 3 se describe detalladamente nuestra propuesta para generalizar el modelo BK. En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos. Finalmente, en el Capítulo 5, presentamos las conclusiones de este trabajo.

## Capítulo 2

# Métodos

Se presentan en este capítulo las siguientes herramientas: el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual será usado para resolver numéricamente los sistemas de ecuaciones diferenciales de nuestro modelo, y el método de Box-Muller, el cual se usará para definir el valor de las constantes elásticas de los resortes del modelo de acuerdo a una distribución gaussiana.

### 2.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Uno de los métodos numéricos más utilizados y eficientes para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales es el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Es fácil de implementar y produce un buen comportamiento numérico en la mayoría de aplicaciones [12].

Para ilustrarlo, tomemos el caso de una única ecuación diferencial  $y' = f(t, y, y')$ , con  $y' = dy/dt$ . Este método pretende encontrar de forma aproximada  $y(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_f]$ , a partir de un valor inicial  $y(t_0) = y_0$ . Para ello se divide el intervalo  $[t_0, t_f]$  en  $n$  subintervalos de ancho  $h$  de tal forma que  $h = \frac{t_f - t_0}{n}$ . Integrando  $y' = f(t, y, y')$  respecto a  $t$ , desde  $t_i$  a  $t_i + h$ , se tiene:

$$y(t_i + h) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_i+h} f(t, y') dt. \quad (2.1)$$

Por otro lado, la regla del Simpson [12] dice que el valor numérico de la integral de una función  $f$  se puede aproximar por:

$$\int_{t_i}^{t_i+h} f(t, y, y') dt \approx \frac{h}{6} \left[ y'(t_i) + 4y' \left( t_i + \frac{h}{2} \right) + y'(t_{i+1}) \right]. \quad (2.2)$$

Reemplazando (2.2) en (2.1) se tiene:

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + \frac{h}{6} \left[ y'(t_i) + 2y' \left( t_i + \frac{h}{2} \right) + 2y' \left( t_i + \frac{h}{2} \right) + y'(t_{i+1}) \right], \quad (2.3)$$

En el lado derecho de (2.3) se sustituyen los valores de  $y'(t_i)$ ,  $y'(t_i + \frac{h}{2})$ ,  $y'(t_{i+1} + \frac{h}{2})$  y  $y'(t_{i+1})$  aproximándolos con valores que llamaremos  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ . Como primera aproximación se estima el valor  $y'(t_i) \approx k_1 = f(t_i, y_i)$ . La aproximación de  $k_1$  se conoce como "el método de Euler". Estimando la pendiente en el punto medio del intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , y utilizando el método de Euler para predecir el valor de  $y$  en ese punto, se tiene que  $y'(t_i + \frac{h}{2}) \approx k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$ . Una segunda estimación para la pendiente en el punto medio de  $y'(t_{i+1} + \frac{h}{2})$  es  $y'(t_{i+1} + \frac{h}{2}) \approx k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2)$ . El valor de  $y'(t_{i+1})$  se aproxima utilizando la pendiente mejorada  $k_3$  en el punto medio para pasar a  $t_{i+1}$ . Se tiene entonces que  $y'(t_{i+1}) \approx k_4 = f(t_{i+1}, y_i + hk_3)$ .

Realizando estas aproximaciones, y reemplazando en (2.3), se tiene:

$$y(t_i + h) \approx y(t_i) + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], \quad (2.4)$$

donde:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_{i+1}, y_i + hk_3). \end{cases} \quad (2.5)$$

La implementación del método, empieza por una aproximación, usando (2.4), para el valor de  $y(t_0 + h)$ , a partir del valor inicial conocido de  $y(t_0) = y_0$ . A partir de la aproximación de  $y(t_0 + h)$  obtenida, se repite el mismo procedimiento para hallar una aproximación de  $y(t_0 + 2h)$ . Este proceso se repite hasta llegar a una aproximación de  $y(t_f)$ . El paso  $h$  usado en la solución de las ecuaciones del modelo BK debe de ser  $h = \Delta t \leq 0,001$  según [21, 26].

En este Trabajo de Titulación se requiere resolver un sistema de  $N \times 3$  ecuaciones diferenciales ( $N$  por el número de bloques y 3 por las dimensiones espaciales de los bloques), las cuales están planteadas siguiendo las ecuaciones de Newton. Por una parte, el hecho de que las ecuaciones diferenciales sigan las ecuaciones de Newton implica la existencia de una segunda derivada en las mismas. Es por ello por lo que definimos:

$$v = \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = v'. \quad (2.6)$$

Por tanto, se obtiene dos ecuaciones diferenciales  $y' = f(t, y, y')$  y  $v' = f_2(t, y, y')$ , que son semejantes. Si se conoce el valor de  $v$  en  $t_0$  se tienen dos problemas de valor inicial a los cuales se puede aplicar el método de Runge-Kutta desarrollado para una ecuación de primer orden.

Por otro lado, para resolver un sistema de  $N \times 3$  ecuaciones diferenciales definimos los vectores posición  $\mathbf{r}$  y velocidad  $\mathbf{v}$  de forma que tengan dimensión  $N \times 3$ , donde:  $\mathbf{v} = \mathbf{r}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  y  $\mathbf{v}' = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . De esta forma se tiene los problemas de valor inicial:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad (2.7)$$

y

$$\mathbf{v}' = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0. \quad (2.8)$$

La solución a estos problemas de valor inicial se obtiene usando la ecuación (2.4) de forma vectorial:

$$\mathbf{r}(t_i + h) \approx \mathbf{r}(t_i) + \frac{h}{6} [\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4], \quad (2.9)$$

donde:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{r}_i) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{r}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{r}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{r}_i + h\mathbf{k}_3). \end{cases} \quad (2.10)$$

La ecuación 2.9 se usará para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que se plantearán en el Capítulo 3.



## 2.2. Método de Box-Muller

El método de Box-Muller consiste en definir un par de transformadas que hagan que dos números,  $p$  y  $t$ , pseudoaleatorios entre 0 y 1, que sigan una distribución de probabilidad uniforme, sean transformados en un par diferente de números  $x$  y  $y$ , que sigan una distribución de probabilidad gaussiana [23].

Para hallar las transformadas, se define una función  $U(R)$  de la siguiente forma [24]:

$$U(R) := \frac{1}{2\pi} \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy. \quad (2.11)$$

Esta función  $U(R)$  se construye a partir de la integral del producto de dos funciones de densidad normal ( $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$  y  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ ) con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 1$ . Los límites de integración están definidos dentro de una circunferencia de radio  $R$ . El factor  $\frac{1}{2\pi}$  de la integral sirve para normalizar entre 0 y 1 los valores de  $U(R)$ . Reemplazando  $U(R)$  con el cambio de variable  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$  se tiene:  $U(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$ . Integrando la ecuación anterior, se tiene:  $U(R) = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}$ . Siendo  $p$  y  $t$  valores pseudoaleatorios entre 0 y 1, establecemos que  $U(R) = p = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}$ , y despejando  $R$ , obtenemos:  $R = \sqrt{-2 \ln(1-p)}$ . Por otro lado, sabiendo que en la función  $\cos \theta$ ,  $\theta$  varía entre  $[0, 2\pi]$  se define  $\theta$  tal que  $\theta = 2\pi t$ . Finalmente, reemplazando  $R = \sqrt{-2 \ln(1-p)}$  en  $x = R \cos 2\pi t$ , se tiene:

$$x = \sqrt{-2 \ln(1-p)} \cos 2\pi t \quad (2.12)$$

y

$$y = \sqrt{-2 \ln(1-p)} \sin 2\pi t. \quad (2.13)$$

Gráficamente vemos que el par de números  $p$  y  $t$  en la Figura 2.1(a) se transforman por medio de las ecuaciones (2.12) y (2.13). Vemos así que la distribución de probabilidad de  $x$  se convierte en una distribución gaussiana.

En la práctica, generando un par de números pseudo aleatorios  $p$  y  $t$  y reemplazándolos en (2.12), se tendrá que  $x$  y  $y$  siguen una distribución de probabilidad gaussiana con media  $\mu = 0$  y con varianza  $\sigma^2 = 1$ , es decir en  $N(0, 1)$ .

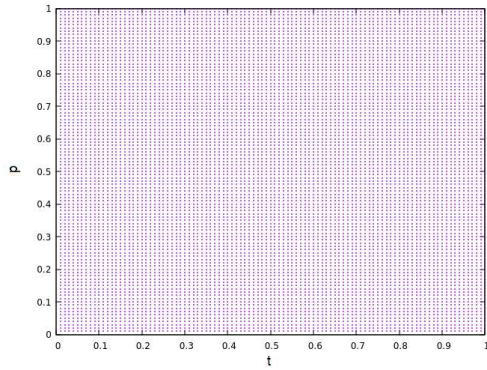
Para generalizar el método de Box-Muller para tener un par de distribuciones  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  y  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , se define  $X = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$  y  $Y = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ . De esta forma la función  $U(R) := \frac{1}{2\pi} \int_{X^2+Y^2 \leq R^2} e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}} dXdY$  se construye a partir del producto de dos funciones de densidad normal ( $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$  con  $dX = \frac{dx}{\sigma_1}$  y  $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{Y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$  con  $dY = \frac{dy}{\sigma_2}$ ). Siguiendo el mismo procedimiento realizado anteriormente, se tiene que:

$$x = \mu_1 + \sigma_1 \sqrt{-2 \ln(1-p)} \cos 2\pi t \quad (2.14)$$

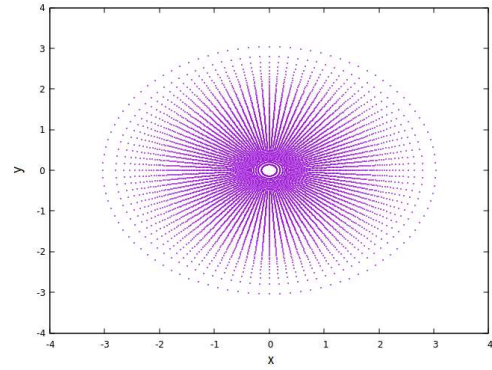
y

$$y = \mu_2 + \sigma_2 \sqrt{-2 \ln(1-p)} \sin 2\pi t. \quad (2.15)$$

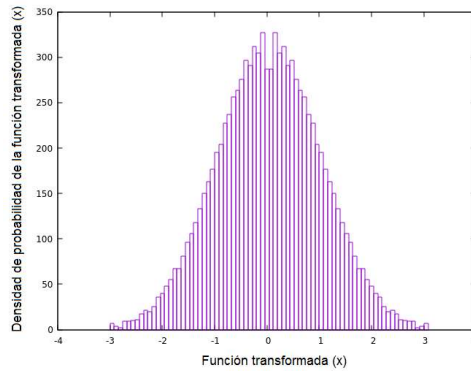
En este Trabajo de Titulación, el método de Box-Muller es utilizado para definir las constantes elásticas de los resortes. Debido a que hay dos tipos de resorte, de constantes  $k_p$  y  $k_c$ , se puede utilizar los dos números generados por el método de Box-Muller para



(a) Números  $p$  y  $t$  uniformemente separados.



(b) Transformaciones de Box-Muller  $x$  y  $y$  de los números  $p$  y  $t$ .



(c) Distribución de probabilidad de  $x$ .

FIGURA 2.1: Transformaciones de Box-Muller. Para ejemplificar tomamos un conjunto de números  $p$  y  $t$  uniformemente separados como se muestra en (a). En (b) se muestra un conjunto de números  $x$  y  $y$  dados a partir de aplicar la transformada de Box-Muller en los números de (a). En (c) se muestra la distribución de probabilidad de  $x$ . En la práctica los números  $p$  y  $t$  provienen de una distribución de números pseudoaleatorios con distribución de probabilidad unitaria.

asignar valores a las constantes elásticas (con valores diferentes en cada resorte) de la siguiente forma:

$$k_c = k_c^0 + \sigma_c \sqrt{-2 \ln(1-p)} \cos 2\pi t \tag{2.16}$$

y

$$k_p = k_p^0 + \sigma_p \sqrt{-2 \ln(1-p)} \sin 2\pi t, \tag{2.17}$$

donde  $k_c^0$  y  $k_p^0$  son valores típicos para las constantes elásticas (detallados en el Capítulo 4.) y  $\sigma_c$  y  $\sigma_p$  son valores de la desviación estándar diferentes para cada tipo de resorte.

## Capítulo 3

# Una generalización del modelo de Burridge y Knopoff

En este capítulo se describe el modelo que proponemos como una generalización del modelo BK, así como su implementación en Fortran.

### 3.1. Disposición espacial de los bloques

Queremos describir el comportamiento de un sistema como el de la Figura 3.1.

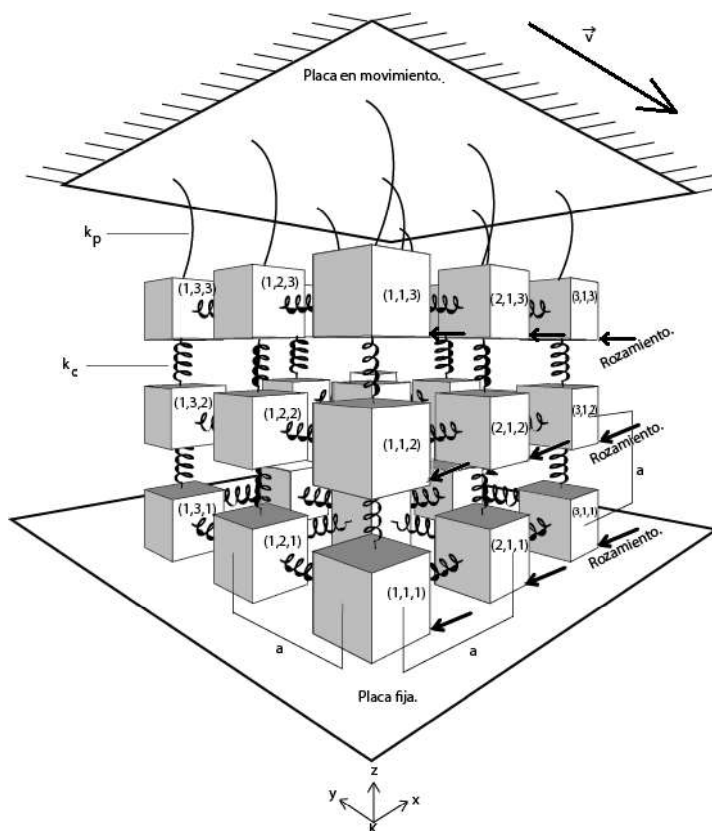


FIGURA 3.1: Esquema de una versión tridimensional del modelo de Burridge y Knopoff. El esquema muestra el modelo, en equilibrio, de un sistema de  $N = 3 \times 3 \times 3$  bloques.

Se trata de un arreglo de  $N = P \times Q \times R$  bloques, donde  $N$  es el número total de bloques,  $P$ ,  $Q$  y  $R$  es el número de bloques en el eje  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Todos los bloques están conectados con sus vecinos más cercanos con resortes de constante  $k_c$ . Los bloques superiores están conectados mediante resortes de hoja de constante  $k_p$ .

a una placa en movimiento. Las posiciones en equilibrio de los bloques, en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , están ubicadas equidistantemente por una distancia  $a$ . La placa superior se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  constante y la placa inferior está fija. Cada bloque es identificado con tres números  $(i, j, k)$ .

Debido a que la disposición tridimensional inicial de los bloques en equilibrio es tal que en el eje  $x$ ,  $y$  y  $z$  los bloques están separados equidistantemente con una distancia  $a$ , un bloque  $(i, j, k)$  estará ubicado, respecto al sistema de referencia  $K$ , en una posición en equilibrio  $\vec{r}^{eq}_{(i,j,k)}$  de la forma:

$$\vec{r}^{eq}_{(i,j,k)} = ia\vec{u}_x + ja\vec{u}_y + ka\vec{u}_z + \vec{v}t, \quad (3.1)$$

en un tiempo  $t$ , con los subíndices  $i = 1, \dots, P$ ,  $j = 1, \dots, Q$  y  $k = 1, \dots, R$ . Los vectores  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ , y  $\vec{u}_z$  son los unitarios de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, del sistema de referencia  $K$  (ver Figura 3.1). Esta forma vectorial de escribir las ecuaciones de movimiento permite que el modelo pueda incluir una velocidad  $\vec{v}$  de movimiento de la placa superior en cualquier dirección, cuando antes se limitaba solo al eje  $x$ . Cabe mencionar que la distancia  $a$  no se especifica directamente en las formulaciones del modelo BK unidimensional ni bidimensional, sin embargo, es común en la literatura especializada se hagan desarrollos tomando  $a \rightarrow 0$  debido a que el sistema de bloques con resortes representa una discretización de una parte de la falla [8, 21, 9, 7, 6].

De manera general, en el tiempo  $t$ , un bloque  $(i, j, k)$  va a estar en la posición:

$$\vec{r}(t)_{(i,j,k)} = x(t)_{(i,j,k)}\vec{u}_x + y(t)_{(i,j,k)}\vec{u}_y + z(t)_{(i,j,k)}\vec{u}_z, \quad (3.2)$$

donde  $x(t)_{(i,j,k)}$ ,  $y(t)_{(i,j,k)}$ , y  $z(t)_{(i,j,k)}$  son las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, del bloque  $(i, j, k)$ , en un tiempo  $t$  y respecto al sistema de referencia  $K$ .

### 3.1.1. Interacción entre bloques

Como se ve en la Figura 3.1, cada bloque está conectado a sus vecinos más cercanos. Esto quiere decir que un bloque  $(i, j, k)$  estará conectado a los bloques  $(i \pm 1, j, k)$ ,  $(i, j \pm 1, k)$  y  $(i, j, k \pm 1)$ . Es decir, un bloque estará conectado a 6 bloques (a menos de que el bloque esté en la frontera del sistema). Siendo  $\vec{F}_{(i,j,k)(l,m,n)}$  la fuerza en el bloque  $(i, j, k)$  por parte del resorte que conecta el bloque  $(i, j, k)$  con el bloque  $(l, m, n)$  (según la ley de Hooke en tres dimensiones con un resorte de constante  $k_c$ ), tenemos que el aporte de la fuerza  $\vec{F}_{bloques}$  de los resortes de los bloques vecinos está dada por:

$$\vec{F}_{(i,j,k)}^{bloques} = \vec{F}_{(i,j,k)(i+1,j,k)} + \vec{F}_{(i,j,k)(i-1,j,k)} + \vec{F}_{(i,j,k)(i,j+1,k)} + \vec{F}_{(i,j,k)(i,j-1,k)} + \vec{F}_{(i,j,k)(i,j,k+1)} + \vec{F}_{(i,j,k)(i,j,k-1)}, \quad (3.3)$$

donde se tienen las siguientes condiciones para los bloques en las fronteras del sistema:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{(i,j,k)(i+1,j,k)} &= 0, & \text{si } i &= P; \\ \vec{F}_{(i,j,k)(i-1,j,k)} &= 0, & \text{si } i &= 1; \\ \vec{F}_{(i,j,k)(i,j+1,k)} &= 0, & \text{si } j &= Q; \\ \vec{F}_{(i,j,k)(i,j-1,k)} &= 0, & \text{si } j &= 1; \\ \vec{F}_{(i,j,k)(i,j,k+1)} &= 0, & \text{si } k &= R; \\ \vec{F}_{(i,j,k)(i,j,k-1)} &= 0, & \text{si } k &= 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La forma vectorial de expresar la ley de Hooke en tres dimensiones  $\vec{F}_{(i,j,k)(l,m,n)}$  es:

$$\vec{F}_{(i,j,k)(l,m,n)} = -k_c \left( \left| \vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)} \right| - R_{(i,j,k)(l,m,n)} \right) \frac{\vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)}}{\left| \vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)} \right|} \quad (3.5)$$

donde  $\vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)}$  es el vector que apunta desde el bloque  $(l, m, n)$  hacia  $(i, j, k)$ ,  $R_{(i,j,k)(l,m,n)}$  es la longitud del resorte en reposo (o la distancia en equilibrio entre dos bloques),  $\vec{F}_{(i,j,k)(l,m,n)}$  es la fuerza que ejerce sobre el bloque  $(i, j, k)$  el resorte conectado al bloque  $(l, m, n)$ . Se ve que el caso tridimensional, en la ecuación (3.5), es similar al caso de una dimensión de la ley de Hooke, salvo por la presencia de  $\frac{\vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)}}{\left| \vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)} \right|}$ , que se incluye en la ecuación (3.5) como el vector unitario que da la dirección hacia donde ejerce la fuerza el resorte. La distancia en equilibrio  $R_{(i,j,k)(l,m,n)}$  que separa a un bloque  $(i, j, k)$  y un bloque  $(l, m, n)$  conectados por un resorte es:

$$R_{(i,j,k)(l,m,n)} = a \sqrt{(l-i)^2 + (m-j)^2 + (n-k)^2}. \quad (3.6)$$

El vector  $\vec{L}_{(l,m,n)(i,j,k)}$ , que apunta de  $(l, m, n)$  a  $(i, j, k)$  es:

$$\vec{L}_{(i,j,k)(l,m,n)} = \vec{r}_{(i,j,k)} - \vec{r}_{(l,m,n)} = (x_{(i,j,k)} - x_{(l,m,n)})\vec{u}_x + (y_{(i,j,k)} - y_{(l,m,n)})\vec{u}_y + (z_{(i,j,k)} - z_{(l,m,n)})\vec{u}_z. \quad (3.7)$$

En resumen, la fuerza que ejercen los resortes de los bloques vecinos en un bloque  $(i, j, k)$  está dada por la ecuación (3.3) con las condiciones dadas en (3.4) para una correcta disposición de la conexión de los resortes. El cálculo de la fuerza entre dos vecinos  $\vec{F}_{(i,j,k)(l,m,n)}$  se hace con la ecuación (3.5).

### 3.1.2. Interacción entre bloques y la placa superior

El papel de los resortes de hoja es el de tratar devolver a los bloques a su respectiva posición de equilibrio. Siguiendo esta idea, los resortes de hoja juegan el mismo rol en 3 dimensiones. Como aproximación al comportamiento real, suponemos que en un bloque  $(i, j, k)$ , el resorte de hoja hace una fuerza proporcional al desplazamiento del bloque  $(i, j, k)$  respecto a su posición en equilibrio, de manera que se tiene:

$$\vec{F}_{(i,j,k)}^{Hoja} = \begin{cases} -k_p \left[ \vec{r}(t)_{(i,j,k)} - \vec{r}_{(i,j,k)}^{eq} \right] & k = R, \\ 0 & k \neq R. \end{cases} \quad (3.8)$$

donde  $\vec{r}_{(i,j,R)}^{eq}$  es la posición en equilibrio del bloque  $(i, j, R)$  en el sistema de referencia  $K$  y está dada por la ecuación (3.1). Se tiene esta estructura debido a que los bloques que están conectados a los resortes de hoja son aquellos que están en la parte superior, es decir, cumplen que  $k = R$ .

### 3.1.3. Rozamiento

Es necesario que el rozamiento afecte a todos los bloques. Por este motivo, se considera que los bloques van estén rodeados de un "medio" que ejercerá un rozamiento sobre los mismos. En el modelo que proponemos, utilizamos una versión vectorial  $\vec{F}$  del rozamiento  $F(v)$  de J.M. Carlson y J.S. Langer [6] mencionado en la ecuación (1.11). Recordemos que  $F(v)$  era:

$$F(v) = F_0 \phi(v),$$

con,

$$\phi(v) = \begin{cases} \frac{(1-\sigma)}{1+\frac{2\alpha v}{1-\sigma}}, & \text{si } v > 0 \\ (-\infty, 1], & \text{si } v \leq 0, \end{cases}$$

donde  $\alpha$  y  $\sigma$  son los parámetros. Recordemos que  $\sigma$  cuantifica la disminución del rozamiento cuando termina la fricción estática y  $\alpha$  provee información del decrecimiento del rozamiento en relación con el aumento de la velocidad.

Suponemos que el valor de  $F_0$  es el mismo para todas las coordenadas. Así, podemos escribir, a partir de (1.11), una función del rozamiento de la forma:

$$\vec{F}(\dot{\vec{r}}_{(i,j,k)}) = F(\dot{x}_{(i,j,k)})\vec{u}_x + F(\dot{y}_{(i,j,k)})\vec{u}_y + F(\dot{z}_{(i,j,k)})\vec{u}_z \quad (3.9)$$

### 3.1.4. Fuerza neta en un bloque

Resumiendo, se debe resolver las ecuaciones diferenciales del sistema de  $P \times Q \times R$  bloques con posiciones en equilibrio dadas por la ecuación (3.1).

$$\vec{r}_{(i,j,k)}^{eq} = ia\vec{u}_x + ja\vec{u}_y + ka\vec{u}_z + \vec{v}t.$$

La fuerza total en un bloque  $(i, j, k)$  va estar dada por:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}_{(i,j,k)} = \vec{F}_{(i,j,k)}^{bloques} + \vec{F}_{(i,j,k)}^{Hoja} - \vec{F}(\dot{\vec{r}}_{(i,j,k)})}, \quad (3.10)$$

donde  $\vec{F}_{(i,j,k)}^{bloques}$  está dada por la ecuación (3.3),  $\vec{F}_{(i,j,k)}^{Hoja}$  está dada por la ecuación (3.8) y  $\vec{F}(\dot{\vec{r}}_{(i,j,k)})$  por la ecuación (3.9).

Como se mencionó en el Capítulo 1, para evitar la evolución periódica del sistema, la posición inicial de los bloques es la posición en equilibrio sumada a un valor aleatorio pequeño. La velocidad inicial de los bloques es cero y la velocidad  $\vec{v}$  de la placa es constante.

## 3.2. Disposición de las constantes elásticas

Otra consideración que vamos a hacer en el modelo es que las constantes elásticas que conectan los bloques sean diferentes unas de otras, ya que, como se mencionó en el Capítulo 1, irregularidades en los materiales que componen una falla hacen que en realidad el medio no sea uniforme [15]. Como una aproximación para resolver el problema, proponemos que estas constantes elásticas sigan una distribución gaussiana.

De esta forma, un bloque  $(i, j, k)$  estará conectado a un bloque vecino  $(l, m, n)$  mediante un resorte de constante  $k_c^{(i,j,k)(l,m,n)}$ , obtenida a partir de una distribución gaussiana con una media de  $k_c^0$  y una varianza de  $\sigma_c^2$ :

$$k_c^{(i,j,k)(l,m,n)} = k_c^0 + \sigma_c \sqrt{-2 \ln(1-p)} \cos 2\pi t, \quad (3.11)$$

donde  $p$  y  $t$  son dos números pseudoaleatorios y  $\sigma_c$  es la desviación estándar como se explicó en el Capítulo 2.

Por otro lado, un bloque superior  $(i, j, R)$  (con  $k = R$ ) estará conectado a la placa superior mediante un resorte de hoja con constante elástica  $k_p^{(i,j,R)}$ , obtenida a partir de una distribución gaussiana de media de  $k_p^0$  y varianza de  $\sigma_p^2$ :

$$k_p^{(i,j,R)} = k_p^0 + \sigma_p \sqrt{-2 \ln(1-p)} \sin 2\pi t. \quad (3.12)$$

Los valores para estas constantes elásticas serán obtenidos por medio del método de Box Muller explicado en el Capítulo 2.

### 3.3. Cálculo de la distribución de magnitudes

Como se mencionó en el Capítulo 1, un evento sísmico ocurre cuando un bloque empieza a deslizarse, y termina cuando todos los bloques del sistema quedan quietos otra vez [21]. Extendiendo el concepto de momento  $M$  para 3 dimensiones, se tiene:

$$M = \log_{10} \left( \sum_i \sum_j \sum_k \Delta X_{(i,j,k)} \right), \quad (3.13)$$

donde, de forma análoga a los casos unidimensionales y bidimensionales,  $\Delta X_{(i,j,k)}$  es el desplazamiento del bloque  $(i, j, k)$  durante un evento sísmico.

Por otro lado, como también se mencionó en el Capítulo 1, la distribución  $P(M)$  es la razón entre el número  $N(\geq M)$  de sismos de magnitud mayor o igual a una magnitud  $M$  dada y el número total de sismos  $N_T$ .

$$P(M) = \frac{N(\geq M)}{N_T}.$$

Con la distribución  $P(M)$ , en el siguiente capítulo, se podrá verificar los resultados del modelo BK en casos conocidos y explorar el comportamiento del modelo presentado en este capítulo en relación con la ley de Gutenberg-Richter presentada en el Capítulo 1.

### 3.4. Implementación computacional

Para la implementación del modelo que hemos propuesto en este capítulo, se escribió un código en Fortran 90. El código se encuentra en el Apéndice A.1.

Para definir las coordenadas iniciales, se llama a la subrutina de Fortran `random_number` aplicada en la variable `numer`. Esto hace que la variable `numer` sea un valor pseudoaleatorio entre 0 y 1. Siguiendo la referencia [21], se suma a las coordenadas en equilibrio al tiempo  $t = 0$  un pequeño desplazamiento aleatorio ( $0.01 * \text{numer}$ ).

Se crea además, un arreglo auxiliar de coordenadas en equilibrio de cada bloque en tiempo  $t = 0$  que será usado más adelante. La asignación de las constantes elásticas de cada resorte se hace mediante el método Box-Muller como se había visto en la sección 3.2.

En el siguiente segmento de código se puede ver éstas tres implementaciones.

```

58 !Se definen parametros iniciales.
59 k_c=0
60 do l=1,nx
61   do m=1,ny
62     do n=1,nz
63       !Se da las coordenadas iniciales al sistema.
64       call random_number(numer)
65       r(l,m,n,1)=l*deqx+0.01*numer
66       call random_number(numer)
67       r(l,m,n,2)=m*deqy+0.01*numer
68       call random_number(numer)
69       r(l,m,n,3)=n*deqz+0.01*numer
70
71       !Se crea un bloque de coordenadas en equilibrio auxiliar para usarlo con los resortes superiores.
72       r_eq(l,m,n,1)=l*deqx
73       r_eq(l,m,n,2)=m*deqy
74       r_eq(l,m,n,3)=n*deqz
75

```

```

76 !Se da una distribucion gaussiana a los resortes.
77 if(l.ne.nx) then
78   call rgauss(sigma_c, valor_distribucion)
79   k_c(1,m,n,1)=abs(k_c_0+valor_distribucion)
80   k_c(1+1,m,n,2)=k_c(1,m,n,1)
81 end if
82 if(m.ne.ny)then
83   call rgauss(sigma_c, valor_distribucion)
84   k_c(1,m,n,3)=abs(k_c_0+valor_distribucion)
85   k_c(1,m+1,n,4)=k_c(1,m,n,3)
86 end if
87 if(n.ne.nz)then
88   call rgauss(sigma_c, valor_distribucion)
89   k_c(1,m,n,5)=abs(k_c_0+valor_distribucion)
90   k_c(1,m,n+1,6)=k_c(1,m,n,5)
91 end if
92
93
94 end do
95 !Se da una distribucion gaussiana a los resortes superiores.
96 call rgauss(sigma_p, valor_distribucion)
97 k_p(1,m)= abs(k_p_0+valor_distribucion)
98
99 end do
100 end do

```

El comportamiento dinámico del modelo que proponemos, en función del tiempo, se obtiene a partir de la resolución numérica de la ecuación (3.10) para el sistema de  $P \times Q \times R$  bloques mediante el algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden (expuesto en la sección 2.1. y presentado en la subrutina llamada rk4 escrito entre las líneas 255-284 del Apéndice A.1.). Para ello, se definen los arreglos  $r$ ,  $v$  y  $a$  de dimensiones  $P \times Q \times R \times 3$  ( $P \times Q \times R$  por la dimensión del sistema y 3 por las coordenadas espaciales).

El algoritmo de Runge-Kutta hace uso de una subrutina que hemos llamado *aceleracion* (escrita entre las líneas 162-242 del Apéndice A.1.) para poder describir la dinámica de cada bloque como se había mencionado en la Sección 3.1. Dentro de esta subrutina hay 3 aportes importantes:

1. El aporte de la fuerza  $\vec{F}_{(i,j,k)}^{\text{bloques}}$  (descrita en la sección 3.1.1.) se calcula con la ecuación (3.5) siguiendo las condiciones de la expresión (3.4). La implementación está en el siguiente segmento de código:

```

185 !Resortes en el EJE X
186 if (l.ne.nx)then
187   !"distancia" es una subrutina que calcula la distancia entre 2 bloques.
188   call distancia(1,m,n,l+1,m,n,dist,erre,r,nx,ny,nz)
189   a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)+k_c(1,m,n,1)*(dist-deqx)*(erre(1:)/dist)/masa
190 end if
191 if (l.ne.1)then
192   call distancia(1,m,n,l-1,m,n,dist,erre,r,nx,ny,nz)
193   a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)+k_c(1,m,n,2)*(dist-deqx)*(erre(1:)/dist)/masa
194 end if
195 !Resortes en el EJE Y
196 if(m.ne.ny)then
197   call distancia(1,m,n,l,m+1,n,dist,erre,r,nx,ny,nz)
198   a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)+k_c(1,m,n,3)*(dist-deqy)*(erre(1:)/dist)/masa
199 end if
200 if(m.ne.1)then
201   call distancia(1,m,n,l,m-1,n,dist,erre,r,nx,ny,nz)
202   a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)+k_c(1,m,n,4)*(dist-deqy)*(erre(1:)/dist)/masa
203 end if
204 !Resortes en el EJE Z
205 if (n.ne.nz)then
206   call distancia(1,m,n,l,m,n+1,dist,erre,r,nx,ny,nz)
207   a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)+k_c(1,m,n,5)*(dist-deqz)*(erre(1:)/dist)/masa
208 end if
209 if (n.ne.1)then
210   call distancia(1,m,n,l,m,n-1,dist,erre,r,nx,ny,nz)
211   a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)+k_c(1,m,n,6)*(dist-deqz)*(erre(1:)/dist)/masa
212 end if

```

2. El aporte de la fuerza  $\vec{F}_{(i,j,k)}^{\text{Hoja}}$  (descrita en la sección 3.1.2.) que ejercen los resortes de hoja sobre cada bloques se implementa resolviendo la ecuación (3.8). La implementación está en el siguiente segmento de código (donde se hace uso del arreglo auxiliar de coordenadas en equilibrio):

```

214 !Se incluye el efecto de las fuerzas de los resortes de hoja.
215 !Resortes de los bloques superiores n=nz.
216 if(n==nz) a(1,m,n,1:)=a(1,m,n,1:)-k_p(1,m)*(r(1,m,n,1:)-r_eq(1,m,n,1:)-v1(1:)*t)/masa

```



3. El aporte del rozamiento  $\vec{F}(\vec{r}_{(i,j,k)})$  (descrito en la sección 3.1.3) sobre cada bloque se calcula con la ecuación (3.9). La implementación está en el siguiente segmento de código:

```

218 !Rozamiento
219 if (a(1,m,n,1)<F_0 .and. v(1,m,n,1).le.0.0) then
220   a(1,m,n,1)=0
221 else
222   a(1,m,n,1)=a(1,m,n,1)-F_0*phi( (v(1,m,n,1)))/masa
223 end if
224
225 if (a(1,m,n,2)<F_0 .and. v(1,m,n,2).le.0.0) then
226   a(1,m,n,2)=0
227 else
228   a(1,m,n,2)=a(1,m,n,2)-F_0*phi( (v(1,m,n,2)))/masa
229 end if
230
231 if (a(1,m,n,3)<F_0 .and. v(1,m,n,3).le.0.0) then
232   a(1,m,n,3)=0
233 else
234   a(1,m,n,3)=a(1,m,n,3)-F_0*phi( (v(1,m,n,3)))/masa
235 end if

```

Se va a hacer el cálculo de magnitudes en una variable que hemos llamado zuma, tomada al inicio como zuma=0. Para implementar comportamiento dinámico de cada bloque en el código, es necesario llamar a la subrutina rk4 que llamará a la subrutina aceleracion y calculará la dinámica del sistema en un tiempo dt. En cada intervalo de tiempo dt, se verifica si cada bloque está en movimiento. Si cumple con esta condición, a la variable zuma, que cuenta el momento sísmico, se le suma el desplazamiento del bloque en movimiento. Caso contrario, si todos los de bloques están quietos, se reporta la magnitud de momento asociada a zuma y se asigna zuma=0. Se repite el proceso hasta que se reporten, en este caso, un número total de  $N_T = 10^4$  sismos. Una vez el programa reporte este número total, el programa finaliza. El código que describe este proceso se encuentra a continuación.

```

116 do
117   call rk4(r,v,i,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1,dt)
118
119   i_2=0
120
121   do o=1,nx
122     do p=1,ny
123       do q=1,nz
124         !Se ve si el producto punto de la velocidad de los bloques con la
125         !direccion de la velocidad de la placa es mayor a cero
126         VELOCIDAD=v(o,p,q,1)*u_v1(1)+v(o,p,q,2)*u_v1(2)+v(o,p,q,3)*u_v1(3)
127
128         if (VELOCIDAD>0) zuma=zuma+VELOCIDAD*dt
129
130         !se cuenta en i_2 cuantos bloques estan quietos.
131         if (VELOCIDAD<=0) i_2=i_2+1
132
133       end do
134     end do
135   end do
136
137   !i_2==nt :: todos los bloques estan quietos
138   if (i_2==nt .and. zuma.ne.0) then
139     write(8,*) log(zuma)/log(10.0)
140     flush(8)
141     zuma=0
142     iasd=iasd+1
143   end if
144   i=i+1
145   if(iasd>10000) go to 1001
146 end do
147 1001 continue

```

Este sistema que se ha planteado en este capítulo tiene que resolver una cantidad de  $P \times Q \times R \times 3$  sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas. Esto implica una alta demanda de tiempo computacional en el caso de que el número total de bloques sea grande.

## Capítulo 4

# Resultados numéricos

En este capítulo se presentan resultados de la distribución de magnitudes del modelo planteado en el capítulo anterior. Inicialmente mostramos cómo éste tiene concordancia con los resultados conocidos del modelo BK. Posteriormente, presentamos qué ocurre al variar  $\sigma_c$ ,  $\sigma_p$  y el número de bloques en la versión tridimensional del modelo y con constantes elásticas variables.

### 4.1. Reproducción de resultados conocidos

En esta sección se reproducen varios resultados conocidos, a partir del modelo que hemos propuesto en el Capítulo 3.

#### 4.1.1. Dinámica de un solo bloque

El caso más simple de examinar es el comportamiento del sistema cuando hay solamente un bloque involucrado. Este caso ayuda a familiarizarse con los eventos de desplazamiento (*slip events*) y con los eventos donde los bloques están quietos. (*stick events*)

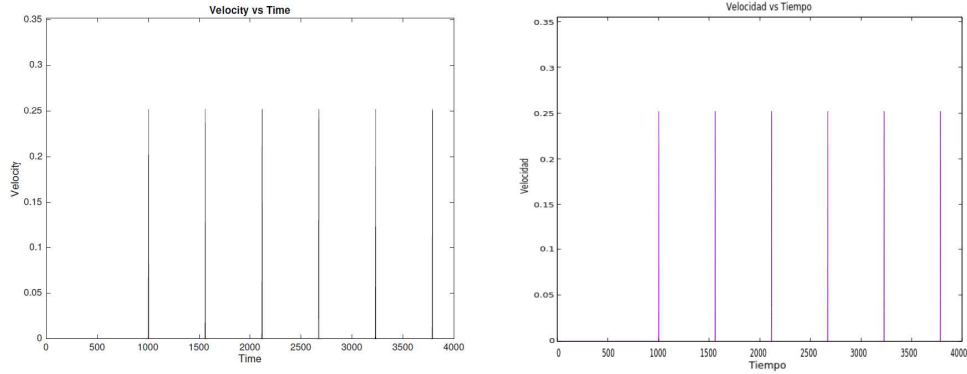
Parámetros								
$m$	$k_p^0$	$k_c^0$	$V$	$F_0$	$\sigma$	$\alpha$	$\sigma_c$	$\sigma_p$
1	1	60	0.001	1	0.01	1	0	0

TABLA 4.1: Tabla de parámetros usados para el movimiento un bloque.

Tomamos los parámetros escogidos en el trabajo de Moschetta y Mascia [21], quienes a su vez siguen el trabajo de Saito y Matsukawa [22], enlistados en la Tabla 4.1. Con el fin de validar el modelo que proponemos, tomamos nuestro modelo descrito en el Capítulo 3 con  $P = Q = R = 1$  que corresponde al caso de un sólo bloque. Tomamos también  $\sigma_c = \sigma_p = 0$ ), es decir, las constantes elásticas de los resortes de cada tipo no varían una de otra.

En ausencia de masas adyacentes, el movimiento tiende a ser periódico, como se ve en la Figura 4.1. Podemos ver que hay intervalos donde el bloque resbala e intervalos donde el bloque está quieto. Aunque esta clase de sistemas está lejos de ser una representación de eventos sísmicos reales, cuando el bloque está resbalando se interpreta como un evento sísmico, y el periodo donde el bloque está quieto se interpreta como un ciclo de carga. Es decir, el bloque está almacenando energía que eventualmente acabará liberándose [21].

En la Figura 4.1 (b) se puede ver, además de la dinámica de los eventos *stick-slip*, que el comportamiento de nuestro modelo, para el caso de un sólo bloque, es idéntico al reportado en [21] (Figura 4.1 (a)), bajo los mismos parámetros utilizados.



(a) Velocidad en función del tiempo de un bloque en el modelo BK reportados en [21].

(b) Velocidad en función del tiempo de un bloque en el modelo BK propuesto en este trabajo.

FIGURA 4.1: Velocidad de un bloque en función del tiempo en el modelo BK. Cuando hay solamente un bloque involucrado, solamente el resorte de hoja y el rozamiento ejercerán efecto sobre el mismo. De esta manera, la placa en movimiento hace que se acumule tensión, la cual es liberada en eventos de desplazamiento (*slip events*). Los eventos de desplazamiento son eventos sísmicos y se pueden identificar cuando la velocidad es mayor a cero.

Este hecho parece indicar que nuestra implementación numérica del modelo propuesto en el Capítulo 3 es adecuada.

#### 4.1.2. Distribución de magnitudes para el modelo BK unidimensional de 200 bloques

Consideremos ahora una cadena unidimensional de 200 bloques. En nuestro modelo, esto lo conseguimos tomando  $P = 200$  y  $Q = R = 1$ . Siguiendo el trabajo de Moschetta y Mascia [21], tomamos los parámetros enlistados en la Tabla 4.3. Las desviaciones estándar, de nuevo, son cero ( $\sigma_c = \sigma_p = 0$ ).

Parámetros								
$m$	$k_p^0$	$k_c^0$	$V$	$F_0$	$\sigma$	$\alpha$	$\sigma_c$	$\sigma_p$
1	1	100	0.001	1	0.01	{1,1.5,2,3,4}	0	0

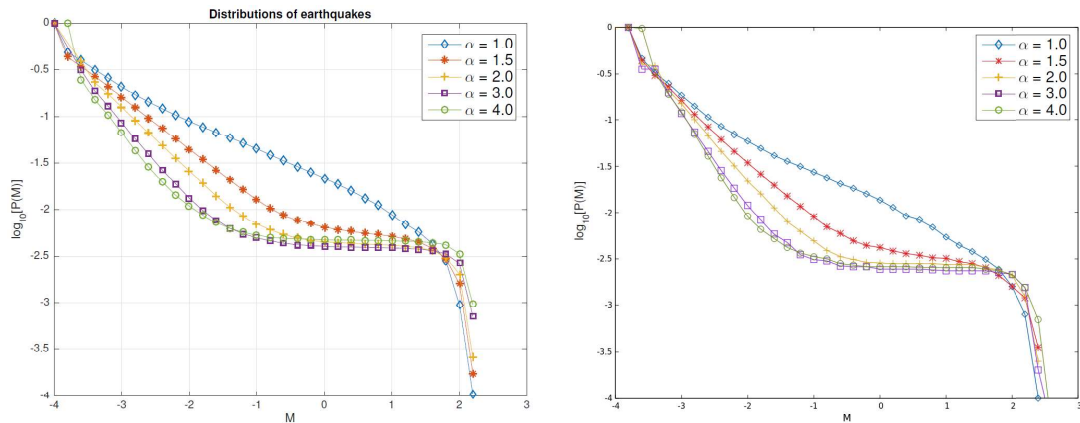
TABLA 4.2: Tabla de parámetros usados para el movimiento del sistema de 200 bloques.

Para el cálculo de  $P(M)$ , se clasifica las magnitudes estableciendo rangos  $[M, M + dM]$ . En esta sección se presentan resultados con  $dM=0.2$ , siguiendo lo reportado en [21]. Recordando la ecuación (1.21):

$$P(M) = \frac{N(\geq M)}{N_T},$$

para la magnitud más pequeña registrada  $M^0$  de un número de  $N_T$  eventos, se tendrá que  $N(\geq M^0) = N_T$ . Por este motivo, siempre se cumple que  $\log_{10} [P(M^0)] = 0$ . Por otro lado, a medida que el valor  $M$  aumenta en relación a  $M^0$ , el número  $N(\geq M)$  de sísmos de magnitud mayor o igual a  $M$  va a disminuir. Esto hace que  $\log_{10} [P(M^0)]$  siempre sea decreciente.

En la Figura 4.2 se tienen distribuciones para distintos valores de  $\alpha$ . En el caso de  $\alpha = 1$  es posible reconocer un comportamiento muy cercano a una línea recta entre magnitudes de  $M \approx -3,7$  y  $M \approx 1,7$ , lo cual puede ser interpretado como coherente con la ley de Gutenberg y Richter dentro de este rango. Adoptando el método de mínimos cuadrados, se puede estimar un valor de  $B=0.42$ , valor que coincide con el resultado reportado en [21].



(a) Distribución de magnitudes de sismos reportados en [21].

(b) Distribución de magnitudes de sismos obtenidos mediante el modelo propuesto en este trabajo.

FIGURA 4.2: Distribución de magnitudes de sismos para un sistema de 200 bloques. La simulación fue realizada tomando los datos de la Tabla 4.3.

Para valores de  $\alpha > 1$ , en el rango de magnitudes pequeñas (aproximadamente para  $M < -2$ ), la ley de Gutenberg y Richter parece ser válida debido a que existe una tendencia lineal en la distribución de magnitudes. A este comportamiento le sigue una tendencia a que la pendiente sea horizontal (que eventualmente termina en  $M \approx 2$ ). Esta tendencia horizontal en  $\log_{10}[P(M)]$  se debe a que existen pocos eventos registrados que tienen magnitudes dentro de este rango; sin embargo, hay eventos de magnitudes fuera de este rango que hacen  $N(\geq M)$  tenga un valor diferente de cero. Los eventos fuera de este rango de magnitudes hacen que este comportamiento se conozca como *peak structure* o "estructura de pico". En la Figura 4.2, estos eventos están acumulados en un "pico" en  $M \approx 2$ . La magnitud en la cual empieza la tendencia horizontal la llamaremos  $M^*$  y en este caso depende de  $\alpha$ . Al aumentar el valor de  $\alpha$ , el comportamiento no es coherente con la ley de Gutenberg y Richter en todo el rango de magnitudes debido a la "estructura de pico".

La "estructura de pico" es consecuencia de que el valor de  $\alpha$  representa el ritmo con el cual la fricción decrece cuando la velocidad aumenta. A menor valor de  $\alpha$ , la fricción se hace más disipativa. Los eventos pequeños son más frecuentes en un sistema con un menor valor de  $\alpha$  en relación a un sistema con mayor valor de  $\alpha$  [6, 22]. Se había mencionado en el Capítulo 1 que valores de  $\alpha < 1$  evitan que el sistema genere eventos de magnitud grande, ahora se ve que valores grandes de  $\alpha$  hacen que el sistema genere mayor cantidad de eventos sísmicos de magnitud grande que se evidenciarían en la "estructura de pico".

Vemos de nuevo que el modelo planteado en este trabajo es consistente con los resultados obtenidos en [21] (Figura 4.2 (a)) y, además, el comportamiento de la distribución de sismos es coherente con resultados del estudio del modelo BK reportados anteriormente [8, 21, 9, 22]. Este resultado vuelve a indicar que la implementación del modelo propuesto en el Capítulo 3 parece ser correcta.

En la siguiente sección se hallará qué ocurre cuando, en el caso unidimensional de 200 bloques, se asignan constantes elásticas que sigan una distribución gaussiana.

## 4.2. Variación de las constantes elásticas

Se verá ahora cómo influye en la distribución de magnitudes la variación de los valores de  $\sigma_c$  y de  $\sigma_p$ . En el Capítulo 3 se habían definido las expresiones (3.11) y (3.12) para las constantes elásticas de la siguiente forma:

$$k_c^{(i,j,k)(l,m,n)} = k_c^0 + \sigma_c \sqrt{-2 \ln(1-p)} \cos 2\pi t$$

y

$$k_p^{(i,j,R)} = k_p^0 + \sigma_p \sqrt{-2 \ln(1-p)} \sin 2\pi t.$$

Para saber el efecto en la variación de las desviaciones estándar  $\sigma_c$  y  $\sigma_p$  se varía de manera independiente los valores de  $\sigma_c$  y  $\sigma_p$  según el valor de  $k_c^0$  y  $k_p^0$  reportados en la Tabla 4.3.

Parámetros								
$m$	$k_p^0$	$k_c^0$	$V$	$F_0$	$\sigma$	$\alpha$	$\sigma_c$	$\sigma_p$
1	1	100	0.001	1	0.01	{1,1.5,2,3,4}	0	0

TABLA 4.3: Tabla de parámetros usados para el movimiento del sistema cuando se varían las constantes elásticas.

Dado que las constantes elásticas van a ser definidas a partir de una distribución que depende de números pseudoaleatorios, se hicieron 3 simulaciones de cada sistema de 200 bloques, obteniéndose una distribución  $P_i(M)$  para cada  $i$ -ésima simulación. Se presenta en  $\log_{10}[P(M)]$  el resultado de la media aritmética de las 3 simulaciones, es decir  $\log_{10}[P(M)] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \log_{10}[P_i(M)]$ . Las barras de error son de la desviación estándar de la muestra  $s = \sqrt{\frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (\log_{10}[P_i(M)] - \log_{10}[P(M)])^2}$ . Por las limitaciones de tiempo computacional para desarrollar este trabajo de titulación, en los sistemas donde no se presentan barras de error, se realizó solamente una simulación.

### 4.2.1. Variación de $\sigma_c$

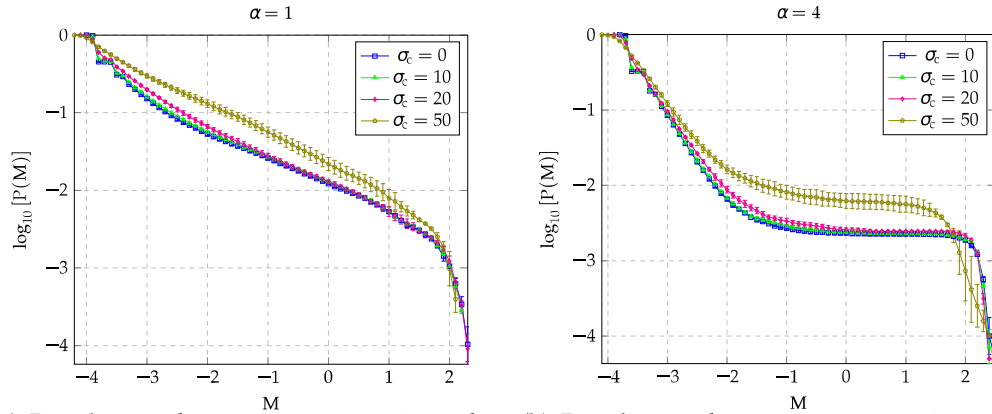
Para analizar independientemente  $\sigma_c$  de  $\sigma_p$  se toma  $\sigma_p = 0$ , es decir  $k_p^{(i,j,R)} = k_p^0$ . Los parámetros utilizados para este caso están en la Tabla 4.4.

Parámetros								
$m$	$k_p^0$	$k_c^0$	$V$	$F_0$	$\sigma$	$\alpha$	$\sigma_c$	$\sigma_p$
1	1	100	0.001	1	0.01	{1,4}	{0, 10, 20, 50}	0

TABLA 4.4: Tabla de parámetros usados para la variación de  $\sigma_c$ .

En la Figura 4.3 se puede ver la distribución de sismos para diferentes valores de  $\sigma_c$  para un sistema de 200 bloques. Se puede ver que la naturaleza de la distribución  $P(M)$  no cambia cualitativamente ante una variación de  $\sigma_c$ . En el caso de  $\alpha = 1$ ,  $\log_{10}[P(M)]$  mantiene una tendencia lineal hasta llegar a cierta magnitud en la cual decae abruptamente; y, en el caso de  $\alpha = 4$ , es notable una estructura de pico que se conserva ante el aumento de  $\sigma_c$ .

En ambos casos, tanto para  $\alpha = 1$  como para  $\alpha = 4$ , se puede ver que la distribución  $P(M)$  es mayor en magnitudes pequeñas e intermedias medida que aumenta el valor de  $\sigma_c$ . Esto indicaría que aumentar la desviación estándar  $\sigma_c$  hace que en el sistema se provoque un comportamiento en el que eventos de magnitud mediana sean más frecuentes que los eventos de magnitud grande. A pesar de este comportamiento, el carácter cualitativo de la distribución de sismos se conserva.



(a) Distribución de sismos para  $\alpha = 1$  con diferentes valores de  $\sigma_c$  en un sistema de 200 bloques. El número total de eventos sísmicos recopilados en este caso fue de  $N_T = 10^4$ .

(b) Distribución de sismos para  $\alpha = 4$  con diferentes valores de  $\sigma_c$  en un sistema de 200 bloques. El número total de eventos sísmicos recopilados en este caso fue de  $N_T = 10^4$ .

FIGURA 4.3: Distribución de magnitudes cuando se varía  $\sigma_c$  en un sistema de 200 bloques.

Se puede verificar el efecto que tiene definir las constantes elásticas  $k_c^{(i,j,k)(l,m,n)}$  a partir de una distribución gaussiana cuando se estudia un sistema más grande. En la Figura 4.4 se presenta la distribución de sismos para una cadena unidimensional de 2000 bloques. Se puede ver que para todos los valores de  $\sigma_c$ , el comportamiento cualitativo es idéntico, sin embargo, un valor alto de  $\sigma_c = 50$  hace que los valores de  $\log_{10} [P(M)]$  sean más grandes para magnitudes medianas, en concordancia con lo que se observa en el sistema de 200 bloques.

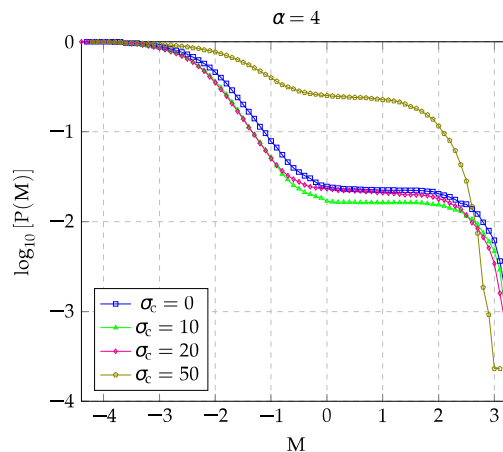


FIGURA 4.4: Distribución de magnitudes cuando se varía  $\sigma_c$  en un sistema de 2000 bloques. El número total de eventos sísmicos recopilados en este caso fue de  $N_T = 10^4$ .

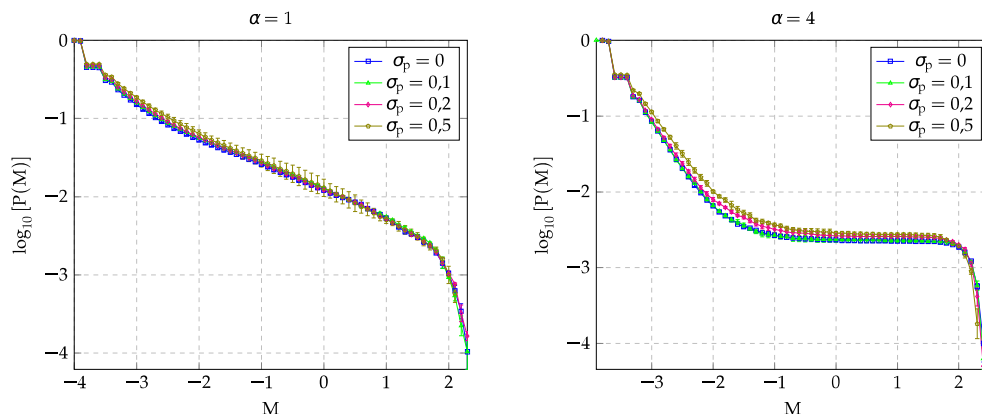
### 4.2.2. Variación de $\sigma_p$

Para analizar independientemente el efecto de  $\sigma_p$  con el de  $\sigma_c$ , se toma  $\sigma_c = 0$ , es decir  $k_c^{(i,j,k)(l,m,n)} = k_c^0$ . Los parámetros utilizados están en la Tabla 4.5.

Parámetros								
$m$	$k_p^0$	$k_c^0$	$V$	$F_0$	$\sigma$	$\alpha$	$\sigma_c$	$\sigma_p$
1	1	100	0.001	1	0.01	{1,4}	0	{0, 0.1, 0.2, 0.5}

TABLA 4.5: Tabla de parámetros usados para la variación de  $\sigma_p$ .

En la Figura 4.5 se muestra la distribución de magnitudes para un sistema de 200 bloques para diferentes valores de  $\sigma_p$ . Parecería que el aumento de  $\sigma_p$  no provoca una variación notable en la distribución  $P(M)$ . Sin embargo, al estudiar un sistema de 2000 bloques, como se ve en la Figura 4.6, se puede ver una tendencia a que a un mayor valor de  $\sigma_p$  hay un mayor número de eventos de magnitud mediana. Esto indica que el efecto que tiene el definir las constantes elásticas de los resortes de hoja de constante  $k_p^{(i,j,R)}$  por medio de una distribución gaussiana tiene un efecto similar al de definir las constantes elásticas  $k_c^{(i,j,k)(l,m,n)}$  de los resortes que conectan los bloques entre sí: Para valores de  $\sigma_p$  altos, la cantidad de eventos de magnitud intermedia aumenta en relación con lo que ocurre con valores de  $\sigma_p$  bajos.



(a) Distribución de sismos para  $\alpha = 1$  con diferentes valores de  $\sigma_p$  en un sistema de 200 bloques. El número total de eventos sísmicos recopilados en este caso fue de  $N_T = 10^4$ .

(b) Distribución de sismos para  $\alpha = 4$  con diferentes valores de  $\sigma_p$  en un sistema de 200 bloques. El número total de eventos sísmicos recopilados en este caso fue de  $N_T = 10^4$ .

FIGURA 4.5: Distribución de magnitudes cuando se varía  $\sigma_p$  en un sistema de 200 bloques.

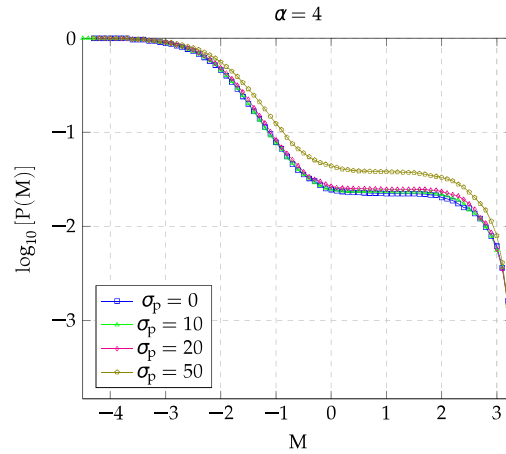


FIGURA 4.6: Distribución de magnitudes para  $\alpha = 4$  cuando se varía  $\sigma_p$  en un sistema de 2000 bloques. El número total de eventos sísmicos recopilados en este caso fue de  $N_T = 10^4$ .

### 4.3. Disposición tridimensional de los bloques

A partir de los parámetros de la Tabla 4.6, con las desviaciones estándar iguales a cero ( $\sigma_c = \sigma_p = 0$ ), veremos cómo varía la distribución de sismos en el modelo tridimensional que hemos planteado.

Parámetros									
$m$	$k_p^0$	$k_c^0$	$V$	$F_0$	$\sigma$	$\alpha$		$\sigma_c$	$\sigma_p$
1	1	100	0.001	1	0.01	{1,1.5,2,3,4}		0	0

TABLA 4.6: Tabla de parámetros usados para el movimiento del sistema de bloques tridimensional.

Tomemos dos casos tridimensionales, el primero con  $P = Q = 10$  y  $R = 4$  (sistema  $10 \times 10 \times 4$ ); y el segundo con  $P = Q = 20$  y  $R = 3$  (sistema  $20 \times 20 \times 3$ ). Las distribuciones de magnitudes para estos sistemas se muestran en la Figura 4.7. Se puede notar que el valor de  $\alpha$  no juega un papel importante en la distribución de magnitudes, como sí lo hace para el caso unidimensional. Por otro lado, se ve una “estructura de pico” debido a la tendencia horizontal que tiene en magnitudes grandes.

Dada la naturaleza de estas distribuciones, se puede estimar qué porción de magnitudes se encuentran fuera de la estructura de pico definiendo una fracción  $f$ :

$$f = \frac{\overline{M}^* - \overline{M}_{min}}{\overline{M}_{max} - \overline{M}_{min}},$$

donde  $\overline{M}_{max} - \overline{M}_{min}$  es el rango total de magnitudes (restando el promedio  $\overline{M}_{max}$  de las magnitudes máximas registradas del promedio  $\overline{M}_{min}$  de las magnitudes mínimas registradas), y,  $\overline{M}^* - \overline{M}_{min}$  son las magnitudes que están fuera de la tendencia horizontal mediante, donde  $\overline{M}^*$  es el promedio de magnitudes  $M^*$ . Si la distribución es consistente con la ley de Gutenberg y Richter en todo el rango de magnitudes, se tendría un valor de  $f \rightarrow 1$ .

El valor de  $f$  parece aumentar a medida que el número de bloques es mayor ( $f=0.5568$  para el sistema de  $10 \times 10 \times 4$  y  $f=0.6631$  para el sistema de  $20 \times 20 \times 3$ ). Esto podría indicar que con un mayor número de bloques, la tendencia horizontal en la distribución de sismos iría disminuyendo haciendo que sea congruente con la ley de



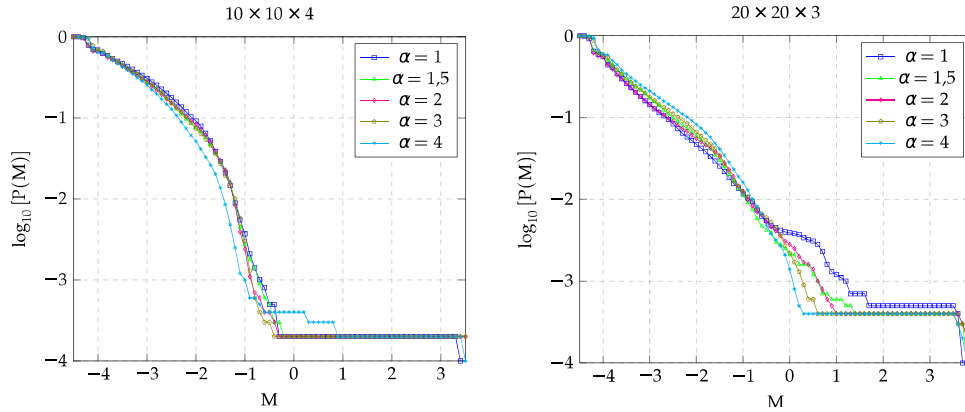


FIGURA 4.7: Distribución de magnitudes de arreglos tridimensionales de dimensiones  $10 \times 10 \times 4$  y  $20 \times 20 \times 3$ . Se puede ver que al aumentar el número de bloques hace que la distribución sea más semejante a la ley de Gutenberg y Richter.

Gutenberg y Richter en todo rango de magnitudes. Sin embargo, para comprobar esto, se presentan dificultades para la simulación de sistemas de mayor tamaño debido a su alta demanda computacional en tiempo.

Una forma de comprobar una relación entre el aumento del número de bloques y la fracción  $f$  es tomando arreglos tridimensionales “cúbicos” (cuando  $P = Q = R$ ) como se había visto en la Figura 3.1. En este caso se tiene distribuciones de magnitudes como se ve en la Figura 4.8. De manera general, se tiene una región dentro de magnitudes pequeñas y medias (entre  $M \approx -4$  y  $M \approx M^*$ ) donde  $\log_{10} [P(M)]$  decae; y para magnitudes mayores  $\log_{10} [P(M)]$  permanece constante. Este comportamiento indica una estructura de pico, donde existen magnitudes mucho mayores al resto de magnitudes registradas y no se registran eventos de magnitud intermedia entre estas magnitudes mucho mayores y el resto de las magnitudes. Los valores de  $f$  están registrados en la Tabla 4.7.

Tamaño del sistema	$f = \frac{\bar{M}^* - \bar{M}_{min}}{\bar{M}_{max} - \bar{M}_{min}}$
$2 \times 2 \times 2$	0.390269542
$3 \times 3 \times 3$	0.528859266
$4 \times 4 \times 4$	0.559275654
$5 \times 5 \times 5$	0.565801802
$10 \times 10 \times 4$	0.556867089
$20 \times 20 \times 3$	0.663095588

TABLA 4.7: Magnitud aproximada a la que empieza la tendencia horizontal  $M^*$  en función del tamaño del sistema.

El hecho de haber trabajado con sistemas tridimensionales tan pequeños no garantiza que  $f$  dependa del número de bloques; sin embargo, para los sistemas estudiados está presente esta tendencia. Sistemas con un número grande de bloques podrían verificar la ley de Gutenberg y Richter para todo rango de magnitudes. Sin embargo, la simulación de tales sistemas implica un alto tiempo computacional mayor al que se tuvo acceso durante la redacción de este trabajo.

La idea de un modelo BK tridimensional ya había sido mencionada en los trabajos de Carlson y Langer a inicios de la década de 1990 [8, 9], pero no se ejecutó en ese entonces por el alto costo computacional que supondría llevar a cabo este sistema debido

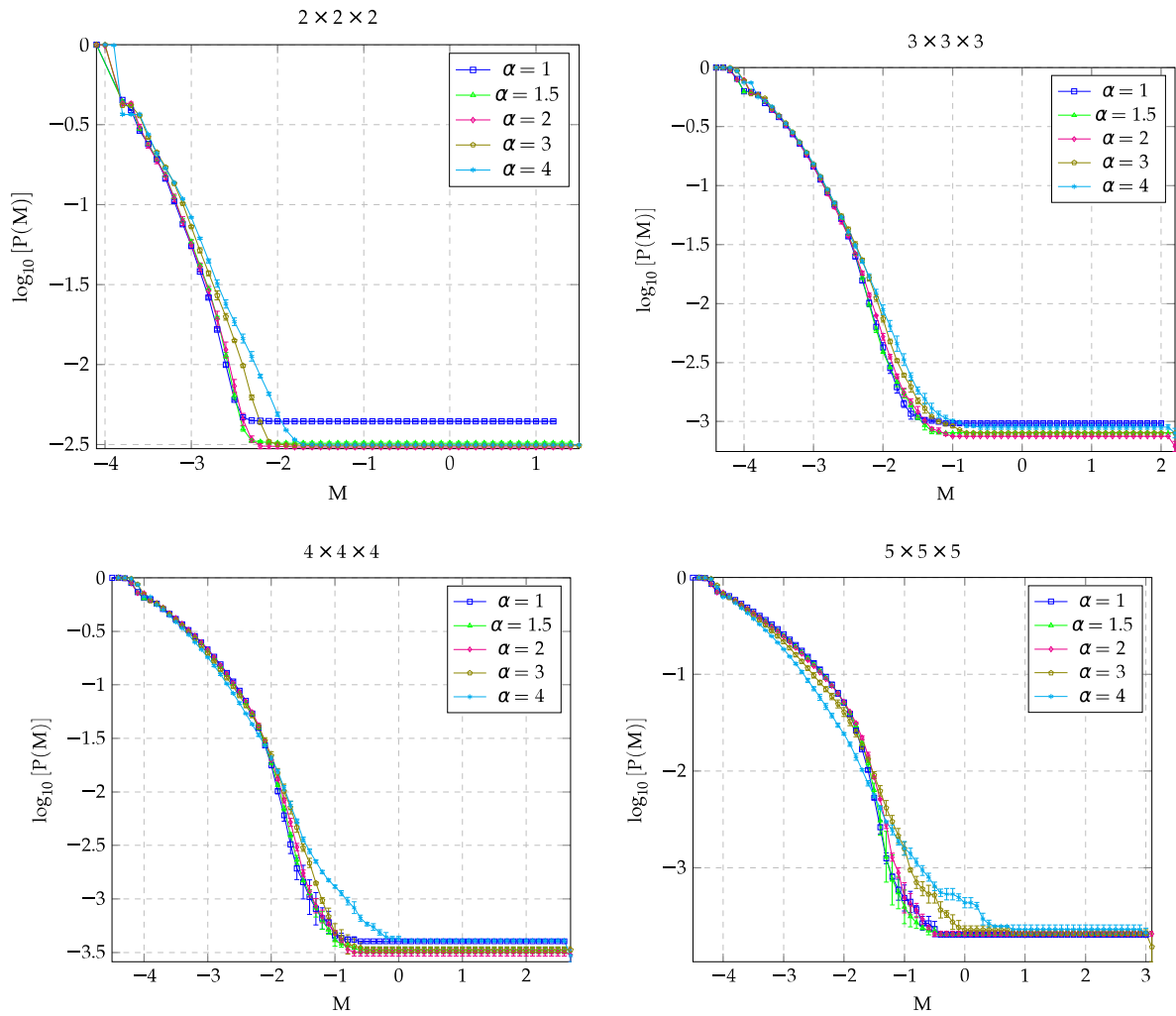


FIGURA 4.8: Distribución de magnitudes de arreglos tridimensionales “cúbicos”.

a las limitaciones computacionales de ese entonces. Este problema ha estado presente durante la realización de este trabajo, donde la simulación de sistemas grandes ha tomado mucho tiempo el adquirir un número de datos  $N_T$  lo suficientemente grande para elaborar una distribución. La duración de las simulaciones ha dependido del número total de bloques que se consideren, así como de los parámetros que se usen. Para la realización de este trabajo, se presentaron resultados de simulaciones que han tardado desde una semana hasta tres meses (algunas de las cuales fueron ejecutadas en el sistema HPC-MODEMAT de la EPN, otras fueron ejecutadas en varios núcleos de un servidor de la Facultad de Ciencias de la EPN). El excesivo tiempo de simulación fue una limitante para poder explorar ampliamente las propiedades del modelo que hemos propuesto.

Sin embargo, el modelo que ha sido planteado parecería que tiende a describir la ley de Gutenberg y Richter. Para confirmar esto es necesario saber qué ocurre en sistemas más grandes a los considerados en este trabajo.

#### 4.4. Variación en el número total de eventos

Se había visto en el Capítulo 1 que en el modelo BK se registra un total de  $N_T$  eventos, los cuales suelen ser del orden de  $10^4$ . En este trabajo se utilizó  $N_T = 10^4$ , debido a que en el caso unidimensional este número funciona bien. Sin embargo, el modelo que hemos propuesto no ha sido estudiado con anterioridad y no se sabe cuál es el efecto de variar el número total de eventos registrados. En la Figura 4.9 se puede ver cómo cambia la distribución de sismos en para distintos valores de  $N_T$ .

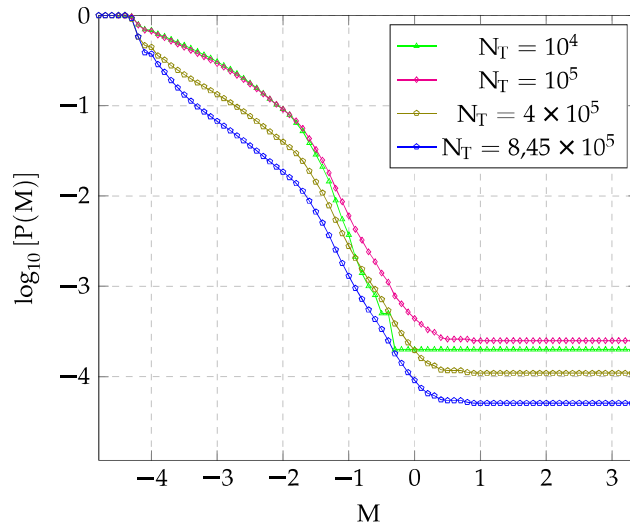


FIGURA 4.9: Distribución de magnitudes del sistema  $10 \times 10 \times 4$  para distinto número total de eventos.

Cuando se tiene  $N_T = 10^4$  se obtiene una estructura de pico, sin embargo el valor estimado de  $M^*$  es menor en relación a lo que se tiene para  $N_T = 10^5$  y  $N_T = 4 \times 10^5$ . Para  $N_T = 10^5$  y  $N_T = 4 \times 10^5$  las curvas son más suaves debido a la mayor cantidad de datos, pero en  $N_T = 4 \times 10^5$  y en  $N_T = 8,45 \times 10^5$  existen mayor cantidad de eventos pequeños que hacen que  $\log_{10}[P(M)]$  sea menor en todo el rango de magnitudes.

Entre  $-2 \leq M \leq -1$  se puede ver un cambio en la pendiente de las distribuciones en todos los casos, lo que podría ser interpretado como una *double power law*, o ley de potencias doble. Sin embargo, para el caso de  $N_T = 8,45 \times 10^5$  parecería que esta doble ley de potencias se va atenuando. Esto indicaría que para tener una distribución semejante a la que se predice en la ley de Gutenberg y Richter, sería necesario que el número total de eventos  $N_T$  sea alto (de al menos un orden de  $10^5$ ).

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo se planteó dos variaciones al modelo de Burridge y Knopoff con el fin de obtener una distribución de magnitudes que sea consistente con la ley de Gutenberg y Richter para todo rango de magnitudes registradas. La primera variación que se propuso fue la de definir los resortes de tal forma los valores de sus constantes elásticas estén distribuidas de una forma gaussiana. La segunda variación que se propuso fue la disposición tridimensional de los bloques.

Según los resultados numéricos que se obtuvieron, establecer las constantes elásticas de los resortes por medio de una distribución gaussiana hace que aumente el número de eventos de magnitud intermedia, tanto en el caso cuando se varía la desviación estándar de los resortes que conectan los bloques entre sí ( $\sigma_c$ ) como cuando se varía la desviación estándar de los resortes de hoja ( $\sigma_p$ ).

Por otro lado, simular los sistemas tridimensionales que se presentó en este trabajo requirió una alta demanda de tiempo computacional. En este caso, se obtienen distribuciones de sismos con una "estructura de pico" o *peak structure* donde se registran eventos de magnitudes grandes, pero no se registran eventos de magnitudes inferiores cercanas a estas magnitudes grandes. Los resultados parecerían mostrar que, a mayor número de bloques en disposición tridimensional, la distribución de sismos es más cercana a la ley de Gutenberg y Richter.

Además, en la disposición tridimensional del modelo que hemos planteado se ve que la distribución de sismos, en un sistema de dimensión dada, es independiente de los parámetros de fricción utilizados. Este comportamiento difiere del caso unidimensional, donde  $\alpha$  juega un papel importante en la distribución de sismos.

Para un trabajo futuro, es necesario realizar simulaciones con sistemas tridimensionales de tamaño más grande de los que se consideraron aquí. Trabajar con una mayor cantidad de bloques permitiría validar o refutar el modelo que proponemos con la ley de Gutenberg y Richter para todo el rango de magnitudes. Además de esto, es necesario optimizar el sistema que hemos propuesto, ya sea en su estructura como en el método numérico para resolver la dinámica del mismo, para que el tiempo de ejecución sea más corto y poder explorar ampliamente las características del modelo.

## Apéndice A

# Programas Computacionales

En este Apéndice se incluyen los códigos computacionales utilizados para la elaboración de este trabajo. El código del programa que describe el modelo de Burridge y Knopoff que hemos propuesto se encuentra en la Sección A.1. Este programa genera un archivo llamado *momentos.dat* donde se registran  $10^4$  momentos sísmicos  $M$  del modelo BK de cada evento según la ecuación (3.13), donde  $M$  se definió como:

$$M = \log_{10} \left( \sum_i \sum_j \sum_k \Delta X_{(i,j,k)} \right),$$

El código del programa de la Sección A.2. lee el archivo *momentos.dat* y cuenta el número  $N(\geq M)$  de sismos de magnitud mayor o igual a  $M$  para diferentes magnitudes de  $M$ . El código del programa de la Sección A.3 permite hallar  $\log_{10}[P(M)]$  a partir de los valores de  $N(\geq M)$  según la ecuación (1.21).

Los códigos están escritos en Fortran 90 debido que es uno de los lenguajes más eficientes para desarrollar aplicaciones de computación numérica de alto rendimiento.

### A.1. Modelo propuesto

```

1  program B_K
2  !use ifport !en caso de usar ifort
3  implicit none
4
5  ! "nx" bloques en el eje x, "ny" bloque en el eje y y "nz" bloques en el eje z.
6  integer, parameter :: nx=200,ny=1,nz=1
7  integer :: nt
8  real*8, dimension(nx,ny,nz,3):: r,v,r_eq
9
10
11 !Se definen las constantes.
12 real*8, dimension(nx,ny,nz,6):: k_c
13 real*8, dimension(nx,ny)::k_p
14 real*8 :: k_c_0, k_p_0, sigma_c, sigma_p, valor_distribucion, masa, F_0, dt,VELOCIDAD,zuma,numer
15
16
17 !Se definen las distancias en equilibrio.
18 real*8 :: deqx,deqy,deqz
19
20 !Se define la velocidad de movimiento de la placa inferior.
21 real*8, dimension(3) :: v1, u_v1
22 real*8:: r_v1
23
24 integer::i,l,m,n,o,p,q,i_1,i_2,conta,conta2,o_,p_,q_,i_,iasd
25
26
27 open(8,file='momentos.dat')
28
29
30 dt=0.0001
31
32 !Se establecen valores para las distancias en equilibrio.
33 deqx=0.00000001
34 deqy=0.00000001
35 deqz=0.00000001
36
37 !Valor para la media y varianza de las constantes elasticas.
38 k_c_0=100.0
39 k_p_0=1.0
40 sigma_c=0
41 sigma_p=0
42

```

```

43 masa=1.0
44 F_0=1.0
45
46 v1=0!velocidad de movimiento de la placa
47 v1(1)=0.001
48
49
50 r=0
51 v=0
52
53 !Se calcula el unitario de v1
54 r_v1=sqrt(v1(1)*v1(1)+v1(2)*v1(2)+v1(3)*v1(3))
55 u_v1=v1/r_v1
56
57
58 !Se definen parametros iniciales.
59 k_c=0
60 do l=1,nx
61   do m=1,ny
62     do n=1,nz
63       !Se da las coordenadas iniciales al sistema.
64       call random_number( Numer)
65       r(1,m,n,1)=l*deqx+0.01*Numer
66       call random_number( Numer)
67       r(1,m,n,2)=m*deqy+0.01*Numer
68       call random_number( Numer)
69       r(1,m,n,3)=n*deqz+0.01*Numer
70
71       !Se crea un bloque de coordenadas en equilibrio auxiliar para usarlo con los resortes superiores.
72       r_eq(1,m,n,1)=l*deqx
73       r_eq(1,m,n,2)=m*deqy
74       r_eq(1,m,n,3)=n*deqz
75
76       !Se da una distribucion gaussiana a los resortes.
77       if(l.ne.nx) then
78         call rgauss(sigma_c, valor_distribucion)
79         k_c(1,m,n,1)=abs(k_c_0+valor_distribucion)
80         k_c(1+1,m,n,2)=k_c(1,m,n,1)
81       end if
82       if(m.ne.ny) then
83         call rgauss(sigma_c, valor_distribucion)
84         k_c(1,m,n,3)=abs(k_c_0+valor_distribucion)
85         k_c(1,m+1,n,4)=k_c(1,m,n,3)
86       end if
87       if(n.ne.nz) then
88         call rgauss(sigma_c, valor_distribucion)
89         k_c(1,m,n,5)=abs(k_c_0+valor_distribucion)
90         k_c(1,m,n+1,6)=k_c(1,m,n,5)
91       end if
92
93
94     end do
95   !Se da una distribucion gaussiana a los resortes superiores.
96   call rgauss(sigma_p, valor_distribucion)
97   k_p(1,m)= abs(k_p_0+valor_distribucion)
98
99 end do
100 end do
101
102 !i2 es un contador auxiliar para las iteraciones que se van a usar.
103 i_2=0
104 i=1
105 iasd=0
106 nt=nx*ny*nz
107 zuma=0
108
109
110 print *, "Inicio del calculo dinamico"
111 print *, "nx=",nx
112 print *, "ny=",ny
113 print *, "nz=",nz
114 print *, "nt=",nt
115
116 do
117   call rk4(r,v,i,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1,dt)
118
119   i_2=0
120
121   do o=1,nx
122     do p=1,ny
123       do q=1,nz
124         !Se ve si el producto punto de la velocidad de los bloques con la
125         !direccion de la velocidad de la placa es mayor a cero
126         VELOCIDAD=v(o,p,q,1)*u_v1(1)+v(o,p,q,2)*u_v1(2)+v(o,p,q,3)*u_v1(3)
127
128         if (VELOCIDAD>0) zuma=zuma+VELOCIDAD*dt
129
130         !se cuenta en i_2 cuantos bloques estan quietos.
131         if (VELOCIDAD<=0) i_2=i_2+1
132
133       end do
134     end do
135   end do
136
137   !i_2==nt :: todos los bloques estan quietos
138   if (i_2==nt .and. zuma.ne.0) then
139     write(8,*) log(zuma)/log(10.0)
140     flush(8)
141     zuma=0

```



```

241
242 subroutine distancia(i_o,j_o,k_o,i_f,j_f,k_f,dist,erre,r,nx,ny,nz)
243 implicit none
244 integer, intent(in)::nx,ny,nz
245 real*8,dimension(nx,ny,nz,3)::r
246 integer::i_o,j_o,k_o,i_f,j_f,k_f
247 real*8::dist
248 real*8,dimension(3)::erre
249 erre(1:)=r(i_f,j_f,k_f,1:)-r(i_o,j_o,k_o,1:)
250 dist=sqrt(erre(1)*erre(1)+erre(2)*erre(2)+erre(3)*erre(3))
251 end subroutine distancia
252
253 subroutine rk4 (r,v,i,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1,dt)
254 implicit none
255 integer, intent(in)::nx,ny,nz
256 real*8,dimension(nx,ny,nz,3)::xx1,vv1,dv1,xx2,vv2,dv2,xx3,vv3,dv3,xx4,vv4,dv4
257 real*8,dimension(nx,ny,nz,3)::r,v,a,r_eq
258 real*8,dimension(nx,ny,nz,6)::k_c
259 real*8,dimension(nx,ny)::k_p
260 real*8,dimension(3)::v1
261 real*8::dt,deqx,deqy,deqz,masa,F_0,t
262 integer::j1,i
263 t=dt*i
264 xx1 = r
265 vv1 = v
266 call aceleracion(xx1,vv1,a,t,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1)
267 dv1 = a
268 xx2 = xx1+vv1*dt/2
269 vv2 = vv1+dv1*dt/2
270 call aceleracion(xx2,vv2,a,t,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1)
271 dv2 = a
272 xx3 = xx1+vv2*dt/2
273 vv3 = vv1+dv2*dt/2
274 call aceleracion(xx3,vv3,a,t,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1)
275 dv3 = a
276 xx4 = xx1+vv3*dt
277 vv4 = vv1+dv3*dt
278 call aceleracion(xx4,vv4,a,t,nx,ny,nz,deqx,deqy,deqz,r_eq,k_c,k_p,masa,F_0,v1)
279 dv4 = a
280 r = xx1+(vv1+2*vv2+2*vv3+vv4)*dt/6;
281 v = vv1+(dv1+2*dv2+2*dv3+dv4)*dt/6;
282 end subroutine rk4
283
284 subroutine rgauss(sigma,x)
285 !use ifport !en caso de usar ifort
286 implicit none
287
288 real*8::x,sigma,p,t,PI,numer
289 PI=4.0*atan(1.0)
290 call random_number(p)
291 call random_number(t)
292 x=sigma*sqrt(-2*log(1-p))*cos(2*PI*t)
293 end subroutine rgauss

```

## A.2. Clasificación de magnitudes

```

1 program hist
2 implicit none
3
4 integer,parameter::maxdata = 10000000
5 integer,parameter::nobnd = 100
6
7 integer::i1
8
9 real,dimension(maxdata)::data
10 real,dimension(nobnd)::bound = (/(-5+0.1*real(i1),i1 = 1,nobnd)/)
11
12 integer::i,nodata,ierr
13
14 open(10,file='momentos.dat',status='old',iostat=ierr)
15
16 if(ierr/=0)then
17 write(*,*)'El archivo momentos.dat no se pudo abrir'
18 stop
19 endif
20
21 open(20,file='histogram.out')
22
23 do i = 1,size(data)
24 read(10,*,iostat=ierr) data(i)
25
26 if(ierr>0)then
27 write(*,*)'Error leyendo'
28 stop
29 elseif(ierr<0)then
30 exit ! Se llega al final del archivo
31 endif
32 enddo
33
34 close(10)
35 nodata = i - 1
36
37 call print_hist(data(1:nodata),bound)
38
39 contains
40

```



```

41 ! subrutina para imprimir los datos
42 subroutine print_hist(data, bound)
43   real, dimension(:), intent(in) :: data, bound
44
45   integer :: i
46
47   do i = 2, size(bound)
48     ! cuenta la cantidad de datos que superan una magnitud dada
49     write(20, '(f10.2, i10)') bound(i), count(data >= bound(i-1))
50   enddo
51 end subroutine print_hist
52
53 end program hist

```

### A.3. Distribución de magnitudes

```

1  program magni
2  implicit none
3
4  integer, parameter :: N=99
5  real*16, dimension(N):: ejex
6  real*16, dimension(N):: ejey
7  real*16::maxi, mini
8  integer :: i
9  open(10, file="histogram.out")
10 open(11, file="a.dat")
11
12 do i=1, N
13   read(10, *) ejex(i), ejey(i)
14 end do
15
16 maxi=ejey(1)
17 mini=ejey(N)
18
19
20 do i=1, N
21   if (ejey(i).ne.maxi .or. ejey(i+1).ne.maxi) then
22
23     if (ejey(i)==mini) then
24       goto 123
25     end if
26
27     write(11, *) ejex(i), log(real(ejey(i)/maxi))/log(10.0)
28
29   end if
30 end do
31 123 continue
32
33 end program magni

```

# Bibliografía

- [1] ALLABY, M. *A dictionary of geology and earth sciences*. Oxford University Press, 2013.
- [2] BAK, P. *How nature works: the science of self-organized criticality*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] BAK, P., AND TANG, C. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 94, B11 (1989), 15635–15637.
- [4] BOORE, D. M. The richter scale: its development and use for determining earthquake source parameters. *Tectonophysics* 166, 1-3 (1989), 1–14.
- [5] BURRIDGE, R., AND KNOPOFF, L. Model and theoretical seismicity. *Bulletin of the seismological society of america* 57, 3 (1967), 341–371.
- [6] CARLSON, J., AND LANGER, J. Mechanical model of an earthquake fault. *Physical Review A* 40, 11 (1989), 6470.
- [7] CARLSON, J. M., AND LANGER, J. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Physical Review Letters* 62, 22 (1989), 2632.
- [8] CARLSON, J. M., LANGER, J. S., AND SHAW, B. E. Dynamics of earthquake faults. *Reviews of Modern Physics* 66, 2 (1994), 657.
- [9] CARLSON, J. M., LANGER, J. S., SHAW, B. E., AND TANG, C. Intrinsic properties of a burridge-knopoff model of an earthquake fault. *Physical Review A* 44, 2 (1991), 884.
- [10] COUNCIL, N. R., ET AL. *Living on an Active Earth: Perspectives on Earthquake Science*. National Academies Press, 2003.
- [11] CRAMPIN, S., AND GAO, Y. The physics underlying gutenbergrichter in the earth and in the moon. *Journal of Earth Science* 26, 1 (2015), 134–139.
- [12] EDWARDS, C. H., PENNEY, D. E., AND CALVIS, D. T. *Differential equations and boundary value problems*. Pearson Education Limited, 2016.
- [13] ELNASHAI, A. S., AND DI SARNO, L. *Fundamentals of earthquake engineering*. Wiley New York, 2008.
- [14] FAENZA, L., MELETTI, C., AND SANDRI, L. Bayesian inference on earthquake size distribution: A case study in italy. *Bulletin of the Seismological Society of America* 100, 1 (2010), 349–363.
- [15] GARCIA, F. E., AND BRAY, J. D. Distinct element simulations of shear rupture in dilatant granular media. *International Journal of Geomechanics* 18, 9 (2018), 04018111.
- [16] HANKS, T. C., AND KANAMORI, H. A moment magnitude scale. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 84, B5 (1979), 2348–2350.

- [17] KANAMORI, H. The energy release in great earthquakes. *Journal of geophysical research* 82, 20 (1977), 2981–2987.
- [18] KAWAMURA, H., HATANO, T., KATO, N., BISWAS, S., AND CHAKRABARTI, B. K. Statistical physics of fracture, friction, and earthquakes. *Reviews of Modern Physics* 84, 2 (2012), 839.
- [19] KAWAMURA, H., YOSHIMURA, K., AND KAKUI, S. Nature of the high-speed rupture of the two-dimensional burridge-knopoff model of earthquakes. *arXiv preprint arXiv:1805.07511* (2018).
- [20] KWAPIEŃ, J., AND DROŹDŹ, S. Physical approach to complex systems. *Physics Reports* 515, 3-4 (2012), 115–226.
- [21] MOSCHETTA, P., AND MASCIA, C. Assessment of predictor-corrector strategy for the burridge-knopoff model. *arXiv preprint arXiv:1607.08267* (2016).
- [22] SAITO, T., AND MATSUKAWA, H. Size dependence of the burridge-knopoff model. In *Journal of Physics: Conference Series* (2007), vol. 89, IOP Publishing, p. 012016.
- [23] SEILER, M. C., AND SEILER, F. A. Numerical recipes in c: the art of scientific computing. *Risk Analysis* 9, 3 (1989), 415–416.
- [24] SHINZATO, T. Box muller method. *Hitotsubashi University, Tokyo* (2007).
- [25] SORNETTE, D. Probability distributions in complex systems. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, 2009, pp. 7009–7024.
- [26] XIA, J., GOULD, H., AND KLEIN, W. Simulations of the burridge-knopoff model. In *3rd APEC Cooperation for Earthquake Simulation (ACES) Workshop, Maui, Hawaii, US., 2002* (2002).