ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCIONES VISCOSAS PARA ECUACIONES PARABÓLICAS DE SEGUNDO ORDEN.

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

IVÁN MAURICIO PROAÑO NIZA

ivanproaoniza99@gmail.com

DIRECTOR: MIGUEL ANGEL YANGARI SOSA

miguel.yangari@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, IVÁN MAURICIO PROAÑO NIZA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Iván Mauricio Proaño Niza

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Iván Mauricio Proaño Niza, bajo mi supervisión.

Miguel Angel Yangari Sosa
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Iván Mauricio Proaño Niza

Miguel Angel Yangari Sosa

DEDICATORIA

A Juan, Nelly y Cristina, mi familia, de quienes aprendí que cualquier cosa se afronta con un poco de alegría.

AGRADECIMIENTO

Llega un momento en la vida donde puedes sentirte solo. Pero cuando vez todo el camino recorrido te das cuenta que cada persona junto a ti aportó algo para ser quien eres.

Agradezco a mis padres, Nelly y Juan, y mi hermana Cristina por todo el apoyo incondicional. Aunque no pueden ayudar con mis deberes, siempre sonreía al volver a casa.

A mi director de trabajo, Miguel Yangari, Ph.D por confiar en mi y prestarme su tiempo para el desarrollo de este trabajo. A Franco y Kevin por hacer amena las tres horas de reunión.

A mis profesores por la formación y guía durante mis años en la universidad, en particular a Fernando Cortez, Ph.D y a Zuly Salinas Msc. por todo su apoyo.

A mis amigos. Daniel y Liz por estar conmigo desde que solo creía saber sumar y multiplicar. Mis amigos de la universidad, Lis, Andrés y Gaby por las conversaciones en la cafetería y los apuntes de clase, prometo devolver sus bolígrafos algún día. Viviana Gavilanes, estarás aquí siempre por apoyarme y ser de mis mejores amigas. A David, por escucharme cuando necesito un respiro.

Para finalizar, gracias a ese muchacho que sueña volar alto, y que al caer posiblemente leerá esta página para motivarse y continuar.

RESUMEN

En este trabajo estudiamos las soluciones viscosas para ecuaciones parabólicas de segundo orden completamete no lineles. De manera general, aborda el problema $\partial_t u + H(x, t, u, Du, D^2u) = 0$, con $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ y condición inicial $u(x, 0) = u_0$ donde u_0 es continua y acotada. Utilizaremos el método de Perron para obtener la existencia de soluciones viscosas discontinuas a partir de un principio de comparación. Para el principio de comparación aprovecharemos ciertas hipótesis sobre el hamiltoniano H y utilizaremos la técnica de separación de variables para su demostración. Finalmente, trabajaremos en buscar la unicidad de las soluciones.

Todos estos resultados serán adaptados de las notas de curso de Cardaliaguet en [2] y del artículo de Topp y Yangari en [9], detallando las demostraciones de sus trabajos.

Palabras clave: Soluciones viscosas, Ecuaciones Parabólicas, Método de Perron, Principio de comparación, Problemas de Hamilton-Jacobi.

ABSTRACT

In this work we study the viscosity solutions for completely nonlinear second-order parabolic equations.In general, it addresses the problem $\partial_t u + H(x, t, u, Du, D^2u) = 0$, with $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ and initial condition $u(x, 0) = u_0$ where u_0 is continuous and bounded.We will use Perron's method to obtain the existence of discontinuous viscosity solutions from a comparison principle. For the comparison principle we will take advantage of certain hypotheses about the Hamiltonian H and we will use the technique of separation of variables for its proof. Finally, we will work on finding the uniqueness of the solutions.

All these results will be adapted from Cardaliaguet's course notes in [2] and Topp and Yangari's article in [9], detailing proofs of their work.

Keywords: Viscosity solutions, Parabolic equations, Perron's method, Comparison principle, Hamilton-Jacobi problems.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

Este trabajo aborda el concepto de soluciones viscosas para problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales, en el caso partícula de este componente, buscamos resultados de existencia y unicidad de este tipo de solución débil para el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \partial_t u + H\left(x, t, u, Du, D^2u\right) = 0, &\qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0, &\qquad x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es la solución del problema, Du denota el gradiente, D^2u la matriz hessiana con respecto a la variable x, $\partial_t u$ la derivada de u con respecto a la variable t y $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ representa la condición inicial del problema. Además, H es una función continua que toma valores en $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N$ a la que llamamos Hamiltoniano, adicionalmente, H es elíptico, es decir, si $X \leq Y$ entonces $H(x,t,s,p,X) \geq H(x,t,s,p,Y)$.

Para abordar el problema empezaremos con resultados de estabilidad por medio de convergencias uniformes. Seguido de la introducción de soluciones viscosas discontinuas para obtener resultados de existencias de soluciones gracias al método de Perron a partir de sub y súper-soluciones viscosas.

Una parte importante del Teorema de Perron, es partir de la comparación de sub y súper-soluciones viscosas, por lo que, abordaremos un teorema de comparación demostrada a partir de la técnica de separación de variables. Para finalizar, aprovechamos ciertas condiciones que nos permite deducir la unicidad de la solución.

1.1. Objetivo general

Desarrollar a detalle las demostraciones realizadas en [2], para obtener la existencia y unicidad de soluciones viscosas para ecuaciones parabólicas completamente no lineales de segundo orden.

1.2. Objetivos específicos

1. Describir la teoría de soluciones viscosas para problemas parabólicos no lineales de segundo orden.

2. Demostrar el Teorema de Perron para la existencia de soluciones discontinuas.

3. Desarrollar el principio de comparación para garantizar la unicidad de solución.

4. Mostrar la unicidad y continuidad de la solución por medio del principio de comparación

1.3. Alcance

El alcance del proyecto es que aprendamos la teoría concerniente a la formulación viscosa de un problema que involucre derivadas de segundo orden. Además, que realicemos a detalle las demostraciones de existencia y unicidad de soluciones continuas para problemas que involucren derivadas de segundo orden.

1.4. Marco teórico

La noción de soluciones viscosas fue introducida por primera vez en 1981 por Crandall y Lions en [4] para trabajar ecuaciones de Hamilton-Jacobi de primer orden. Hemos de destacar que, estos dos matemáticos junto a Ishii, desarrollan la formulación y el estudio completo de las ecuaciones de segundo orden en [3] publicado en 1992. Intermedio a estos sucesos importantes, se encuentra otros como la implementación del Método de Perron para soluciones viscosas desarrollado por Ishii en [5] y el principio del máximo para ecuaciones de segundo orden por Jensen en [6] durante los años 1987 y 1988 respectivamente.

Para nuestro problema y con el propósito de comprender las herramientas que se utilizan en la formulación viscosa, en esta sección, enunciaremos algunas nociones importantes para el desarrollo de este trabajo.

De Lafferriere, Lafferriere, y Nguyen, aprovechamos de las secciones 3.6 y 3.7 en [7] para la descripción de los siguientes resultados:

1.4.1. Límite superior e inferior de funciones

Para un detallado estudio y para las demostraciones de los resultados expuestos refiérase a [7, 8].

Para esta sección denotamos $B^*_\delta(x_0)$ a la bola de radio $\delta > 0$ y centro x_0, excluyendo al punto x_0, es decir, $B^*_\delta(x_0) = B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Además, (X, d) es un espacio métrico y $E \subseteq X$.

Definición 1.1. *Sean $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de E, definimos el límite superior y el límite inferior de f en x_0 como:*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup \{f(x) \ : \ x \in B^*_\delta(x_0) \cap E\} := L$$
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf \{f(x) \ : \ x \in B^*_\delta(x_0) \cap E\} : l$$

Proposición 1.1. *Sean $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de E. L es el límite superior de f en x_0 si y solo si se verifican las dos siguientes condiciones*

1. *Para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f(x) < L + \epsilon, \qquad \forall x \in B^*_\delta(x_0) \cap E.$$

2. *Para todo* $\epsilon > 0$ *y* $\delta > 0$*, existe* $x_\delta \in B^*_\delta(x_0) \cap E$ *tal que* $L - \epsilon < f(x_\delta)$

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* x_0 *un punto de acumulación de* E*.* l *es el límite inferior de* f *en* x_0 *si y solo si se verifican las dos siguientes condiciones*

1. *Para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$l - \epsilon < f(x), \qquad \forall x \in B^*_\delta(x_0) \cap E.$$

2. *Para todo* $\epsilon > 0$ *y* $\delta > 0$*, existe* $x_\delta \in B^*_\delta(x_0) \cap E$ *tal que* $f(x_\delta) < l + \epsilon$

COROLARIO 1.3.

- *Para* L*, existe una sucesión* (x_n) *en* E *tal que* $x_n \to x$*,* $x_k \neq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$*.*
- *Para* l*, existe una sucesión* (x_n) *en* E *tal que* $x_n \to x$*,* $x_k \neq 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$*.*
- $L \leq \alpha$ *si y solo si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) \leq \alpha + \epsilon$*, para todo* $x \in B^*_\delta(x_0) \cap E$*..*
- $l \geq \alpha$ *si y solo si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) \geq \alpha + \epsilon$*, para todo* $x \in B^*_\delta(x_0) \cap E$*.*
- *Sea una sucesión* (x_n) *en* E *tal que* $x_n \to x$*,* $x_k \neq 0$*, si* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$ *entonces* $\beta \geq l$ *y* $\beta \leq L$*.*

Algunas relaciones entre el límite superior e inferior a continuación

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean las funciones* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* x_0 *un punto de acumulación de* E*.*

1. $\limsup_{x\to x_0}(f+g)(x) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x) + \limsup_{x\to x_0} g(x)$*.*
2. $\liminf_{x\to x_0}(f+g)(x) \geq \liminf_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x)$

3. $\limsup_{x\to x_0}(-f(x)) = -\liminf_{x\to x_0} f(x)$.

4. $\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} g(x)$

5. *Si para algún* $\delta > 0$*,* $f \leq g$ *en* $B_\delta(x_0)\cap E$ *entonces*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \liminf_{x\to x_0} g(x) \quad \text{y} \qquad \limsup_{x\to x_0} f(x) \leq \limsup_{x\to x_0} g(x)$$

1.4.2. Funciones semicontinuas

Para las demostraciones de los siguientes resultados refiérase a [7].

DEFINICIÓN 1.2. *Sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in E$*. Decimos que* f *es una función semicontinua inferior (SCI) en* x_0 *si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f(x) > f(x_0) - \epsilon \qquad \forall x \in B_\delta(x_0)\cap E$$

De manera similar, f *es semicontinua superior (SCS) si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon \qquad \forall x \in B_\delta(x_0)\cap E$$

No es difícil ver que f es continua si y solo si es SCS y SCI simultáneamente. Algunas propiedades y caracterizaciones que nos permite aprovechar la sección anterior se muestra a continuación

PROPOSICIÓN 1.5. *Sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* x_0 *un punto de acumulación en* E*. Entonces,* f *es SCI si y solo si*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

. f *es SCS si y solo si*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in E$*.* f *es SCI si y solo si para toda socesión* (x_n) *en* E *convergente a* x_0 *se tiene que*

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

. f es SCS si y solo si para toda socesión (x_n) en E convergente a x_0 se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_0)$$

.

Proposición 1.7. *Sea E un compacto, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ SCI, entonces f tiene un mínimo global en E, es decir, existe $x_1 \in E$ tal que $f(x) \geq f(x_1)$ para todo $x \in E$. Por otro lado, si f es SCS, f tiene un máximo global, i.e., existe $x_1 \in E$ tal que $f(x) \leq f(x_1)$ con $x \in E$*

Proposición 1.8. *f es semicontinua superior si y solo si $-f$ es semicontinua inferior.*

Proposición 1.9. *Sea $(f_\alpha)_A$ una familia arbitraria de funciones, entonces, si la familia es de funciones SCI se tiene que*

$$f(x) = \limsup_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$$

es SCI. Por otro lado, si la familia es de funciones SCS entonces la función dada por la siguiente expresión es SCS

$$f(x) = \liminf_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$$

.

Proposición 1.10. *Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, entonces:*

$$f^*(x) = \limsup_{y\to x} f(y)$$

representa una función semicontinua superior. Analogamente,

$$f_*(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

es una función semicontinua inferior.

Podemos ver que si f es SCS entonces $f^* = f$, de forma similar, si f es SCI, $f = f_*$. Algunas otras propiedades pueden ser tomadas de la subsección anterior.

Capítulo 2

Metodología

Este trabajo tiene la intención de describir y explicar los resultados de existencia y unicidad que se desprenden del estudio de las soluciones viscosas para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. Para empezar con el desarrollo de esta componente es primordial en análisis documental y bibliográfico en torno a los trabajos que tienen como intensión estudiar las soluciones viscosas para ecuaciones de Hamilton-Jacobi no lineales, enfocados en el caso particular de las ecuaciones no lineales que involucran las segundas derivadas de la solución.

Partimos de la compresión lectora centrados en los articulas[2, 9, 10], y del estudio de nociones como la semicontinuidad y los limites superiores e inferiores descritos en el Marco Teórico de este documento. Para dar paso al desarrollo de una formulación viscosa válida para el problema (1.1) donde se describe los conceptos de sup-soluciones, súper-soluciones y soluciones viscosas. Durante este proceso y en adelante se toma como referencia [2], adaptando los resultados para el uso de las variables (x, t) en $\mathbb{R}^N \times [0, \infty[$ y aprovechando conceptos como el máximo y mínimo local.

Después de haber desarrollado los resultados principales, característicos de la formulación viscosa, podemos partir de una familia de de funcionales H_n y sus respectivas sup-soluciones u_n para obtener sup-soluciones del problema (1.1) a partir de las convergencias uniformes. Sin embardo, y dado que la convergencia uniforme es una hipótesis muy fuerte, introducimos los conceptos de semi-límites relajados que permite modificar el teorema de estabilidad con el paso a límites.

En este punto, es importante mencionar que las sup y súper soluciones muestran una dualidad en las demostraciones de tal manera que los resultados obtenidos para uno de los conceptos será análogo para el otro. Este efecto se debe gracias a las propiedades semejantes que presentan los supremos e ínfimos, los límites superiores e inferiores, y los máximos y mínimos.

El siguiente paso es desarrollar las demostraciones concernientes a la existencia de soluciones a partir del Método de Perron. Para esta parte aprovechamos las envolventes SCS y SCI, que vienen dadas por lo definido en la Proposición 1.10, además, introducimos las definiciones de soluciones viscosas discontinuas. Ya que el teorema de existencia nos asegura una solución viscosa discontinua en medio de una sup-solución y súper-solución que como hipótesis se encontraban comparadas en todo el dominio. Como parte previa al resultado de existencia, estudiaremos el comportamiento de una familia de sub-soluciones discontinuas.

Como una penúltima parte, nos restringimos a trabajar en $[0, T]$ y dotaremos de la comparación necesaria en el teorema de existencia, desplegando la demostración del teorema del Principio de Comparación. Esta parte del trabajo ha sido dividido en dos casos, primero abordamos el caso en el que H no depende explícitamente del tiempo, y partiremos de la condición elíptica y de hipótesis provenientes de [9]. Además, destacamos que los resultados para este caso son una extensión de las demostraciones presentadas en [9]. De manera similar, para el segundo caso donde H depende del tiempo aprovecharemos los resultados de[10] para desarrollar las demostraciones a detalle del principio de comparación. Parte principal de las demostraciones del principio de comparación es la aplicación del Lema de Matrices de Ishii-Jensen que será rescatado del Corolario 1 en [1], además, es primordial partir en todos los casos de la hipótesis $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ donde u y v son sup y súper-soluciones respectivamente.

Para concluir, notemos que el Principio de Comparación parte de la condición $u(x, 0) \leq v(x, 0)$. Para solventar esta cuestión encontraremos una sup-solución y una súper-solución que verifique esta condición a partir de la condición inicial u_0 y utilizaremos las condiciones descritas en

[9, 10] para realizar la demostración del teorema de existencia y unicidad.

Antes de empezar describiendo algunas de las herramientas mencionadas previamente, es indispensable partir desde la formulación viscosa para entender a detalle las definiciones enmarcadas en la teoría de las soluciones viscosas.

2.1. Formulación viscosa para ecuaciones parabólicas de segundo orden

En esta sección abordaremos definiciones y resultados demostrados sobre soluciones viscosas para ecuaciones parabólicas de segundo orden, tomando como base los trabajos desarrollados en [2].

Consideremos la siguiente ecuación:

$$u_t(x,t) + H\left(x,t,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t)\right) = 0, \quad (x,t) \in Q \tag{2.1}$$

Donde Q denota al conjunto $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$. $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida, u_t representa la derivada parcial con respecto a la variable t, Du y D^2u denota el gradiente y la matriz hessiana de u en x respectivamente. El operador H al que llamaremos Hamiltoniano, esta definido como:

$$H : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua. Donde S_N es el espacio de las matrices simétricas de orden $N \times N$. Diremos que la ecuación (2.1) es parabólica si H es elíptica, es decir, si para todo $(x,t,s,p,X,Y) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N \times S_N$ se verifica que

$$\text{Si } \ X \leq Y \ \text{ entonces } \ H(x,t,s,p,X) \geq H(x,t,s,p,Y)$$

Donde $X \leq Y$ denota que $Y - X$ es una matriz simétrica definida positiva.

2.1.1. Soluciones Viscosas

Definición 2.1. *Decimos que $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sub-solución viscosa de (2.1) si u es semicontinua superior (SCS) en Q y si para toda función test*

$\phi \in C^2(Q)$, tal que $u - \phi$ alcanza un máximo local en un punto $(x_0, t_0) \in Q$, se tiene que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)\right) \leq 0 \tag{2.2}$$

Definición 2.2. *Decimos que $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una súper-solución viscosa de (2.1) si u es semicontinua inferior (SCI) en Q y si para toda función test $\phi \in C^2(Q)$, tal que $u - \phi$ alcanza un mínimo local en un punto $(x_0, t_0) \in Q$, se tiene que*

$$\phi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)\right) \geq 0 \tag{2.3}$$

Definición 2.3. *Decimos que $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución viscosa de (2.1) si u es sub-solución viscosa y súper-solución viscosa de (2.1)*

Proposición 2.1. *Sea $u \in C^2(Q)$. u es sub-solución viscosa de (2.1) sí y solo sí para todo $(x, t) \in Q$ se tiene que*

$$u_t(x, t) + H\left(x, t, u(x, t), Du(x, t), D^2u(x, t)\right) \leq 0 \tag{2.4}$$

Demostración. Supongamos que u es sub-solución viscosa de (2.1). Como $u \in C^2(Q)$, puede ser utilizada como función test, pues $u - u$, al ser la función nula, alcanza un máximo local en todo punto $(x, t) \in Q$. Así, para todo $(x, t) \in Q$, se tiene que

$$u_t(x, t) + H\left(x, t, u(x, t), Du(x, t), D^2u(x, t)\right) \leq 0.$$

Por otro lado, supongamos que para todo $(x, t) \in Q$ se verifica (2.4). Probemos que u es sub-solución de $(2{,}1)$. Para ello, sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u - \phi$ alcanzan un máximo local en el punto $(x_0.t_0) \in Q$. Por las condiciones de optimalidad para máximos locales se tiene que

$$\begin{aligned} u_t(x_0, t_0) - \phi_t(x_0, t_0) &= 0 \\ Du(x_0, t_0) - D\phi(x_0, t_0) &= 0 \\ D^2u(x_0, t_0) - D^2\phi(x_0, t_0) &\leq 0 \end{aligned}$$

Como H es elíptica y $D^2u(x_0, t_0) \leq D^2\phi(x_0, t_0)$, gracias a la condición (2.4), se tiene que

$$
\begin{aligned}
&u_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right)\\
&\leq u_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),D^2u(x_0,t_0)\right) \leq 0
\end{aligned}
$$

Además, como $u_t(x_0,t_0) = \phi_t(x_0,t_0)$ y $Du(x_0,t_0) = D\phi(x_0,t_0)$, tenemos que

$$\phi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) \leq 0$$

Además, como u es continua, también es SCS. Esto prueba que u es sub-solución viscosa.

□

Proposición 2.2. *Sea $u \in C^2(Q)$. u es súper-solución viscosa de (2.1) sí y solo sí para todo $(x,t) \in Q$ se tiene que*

$$u_t(x,t) + H\left(x,t,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t)\right) \geq 0 \tag{2.5}$$

Demostración. Supongamos que u es súper-solución viscosa de (2.1).

Como $u \in C^2(Q)$, puede ser utilizada como función test, pues $u - u$, al ser la función nula, alcanza un mínimo local en todo punto $(x,t) \in Q$. Así, para todo $(x,t) \in Q$, se tiene que

$$u_t(x,t) + H\left(x,t,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t)\right) \geq 0.$$

Por otro lado, supongamos que para todo $(x,t) \in Q$ se verifica (2.5). Probemos que u es súper-solución de (2,1). Para ello, sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u-\phi$ alcanzan un mínimo local en el punto $(x_0.t_0) \in Q$. Por las condiciones de optimalidad para mínimos locales se tiene que

$$
\begin{aligned}
u_t(x_0,t_0) - \phi_t(x_0,t_0) &= 0\\
Du(x_0,t_0) - D\phi(x_0,t_0) &= 0\\
D^2u(x_0,t_0) - D^2\phi(x_0,t_0) &\geq 0
\end{aligned}
$$

Como H es elíptica y $D^2u(x_0,t_0) \leq D^2\phi(x_0,t_0)$, gracias a la condición (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned}&u_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right)\\ &\geq u_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),D^2u(x_0,t_0)\right) \geq 0\end{aligned}$$

Además, como $u_t(x_0,t_0) = \phi_t(x_0,t_0)$ y $Du(x_0,t_0) = D\phi(x_0,t_0)$, tenemos que

$$\phi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) \geq 0$$

Además, como u es continua, también es SCI. Esto prueba que u es súper-solución viscosa. □

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea $u \in C^2(Q)$. u es solución viscosa de (2.1) sí y solo sí para todo $(x,t) \in Q$ se tiene que*

$$u_t(x,t) + H\left(x,t,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t)\right) = 0 \tag{2.6}$$

Demostración. Este resultado es consecuencia directa de las dos proposiciones anteriores y la definición de solución viscosa.

Esta proposición nos dice que toda solución clásica es una solución viscosa, y que toda solución viscosa suficientemente regular es una solución clásica.

Definamos el operador $\tilde{H}$ como

$$\tilde{H}(x,t,s,p,X) = -H(x,t,-s,-p,-X), \quad (x,t,s,p,X) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N$$

Para el cual, describimos la siguiente ecuación

$$u_t(x,t) + \tilde{H}\left(x,t,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t)\right) = 0, \quad (x,t) \in Q \tag{2.7}$$

□

PROPOSICIÓN 2.4. *$\tilde{H}$ verifica la condición elíptica.*

Demostración. Sea $(x,t,s,p,X,Y) \in Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S_N$ tal que $X \leq Y$. Tenemos que $-Y \leq -X$ y $(x,t,-s,-p,-X,-Y) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N$, como H es elíptica tenemos que

$$H(x,t,-s,-p,-Y) \geq H(x,t,-s,-p,-X)$$

Por tanto,

$$\tilde{H}(x,t,s,p,X) = -H(x,t,-s,-p,-X) \geq -H(x,t,-s,-p,-Y) = \tilde{H}(x,t,s,p,Y)$$

Probando que $\tilde{H}$ es elíptica. Además, los resultados y definiciones relacionados a las soluciones viscosas se aplican a la ecuación (2.7). $\square$

PROPOSICIÓN 2.5. *Si u es sub-solución viscosa de (2.1), entonces $-u$ es súper-solución viscosa de (2.7).*

Demostración. Como u es sub-solución viscosa de (2.1), u es SCS, por tanto, $-u$ es SCI.

Sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $(-u) - \phi$ alcanza un mínimo local en un punto (x_0,t_0). Tenemos que $u-(-\phi)$ alcanza un máximo local en el punto (x_0,t_0).

Como $-\phi \in C^2(Q)$ es tal que $u - (-\phi)$ alcanza un máximo local en el punto (x_0,t_0) y u es sub-solución viscosa de (2.1), se tiene que

$$\begin{aligned} -\phi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),-D\phi(x_0,t_0),-D^2\phi(x_0,t_0)\right) &\leq 0 \\ -\phi_t(x_0,t_0) - \tilde{H}\left(x_0,t_0,-u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) &\leq 0 \\ \phi_t(x_0,t_0) + \tilde{H}\left(x_0,t_0,-u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que $-u$ es súper-solución viscosa de (2.7). $\square$

PROPOSICIÓN 2.6. *Si u es súper-solución viscosa de (2.1), entonces $-u$ es sub-solución viscosa de (2.7).*

Demostración. Como u es sub-solución viscosa de (2.1), u es SCI, por tanto, $-u$ es SCS.

Sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $(-u) - \phi$ alcanza un máximo local en un punto (x_0,t_0). Tenemos que $u-(-\phi)$ alcanza un mínimo local en el punto (x_0,t_0).

Como $-\phi \in C^2(Q)$ es tal que $u - (-\phi)$ alcanza un mínimo local en el punto (x_0,t_0) y u es súper-solución viscosa de (2.1), se tiene que

$$\begin{aligned} -\phi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),-D\phi(x_0,t_0),-D^2\phi(x_0,t_0)\right) &\geq 0 \\ -\phi_t(x_0,t_0) - \tilde{H}\left(x_0,t_0,-u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) &\geq 0 \\ \phi_t(x_0,t_0) + \tilde{H}\left(x_0,t_0,-u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que $-u$ es sub-solución viscosa de (2.7). □

PROPOSICIÓN 2.7. *Si u es solución viscosa de (2.1), entonces $-u$ es solución viscosa de (2.7).*

Demostración. Es un resultado directo de las dos proposiciones anteriores y la definición de solución viscosa. □

2.2. Nociones aplicables al trabajo

En esta sección se detallarán las herramientas importantes para la implementación de lo descrito al principio del capítulo, los resultados propios de estas nociones serán demostrados en el siguiente capítulo como parte de los resultados.

Para la estabilidad

El primer teorema de estabilidad requiere de una familia de operadores (H_n) asociadas a ecuaciones que tienen como sub-solución los respectivos u_n. Utilizamos hipótesis de convergencia uniforme para obtener una sub-solución para (2.1). Sin embargo, con el propósito de reducir las condiciones de convergencia uniforme utilizaremos los semi-limites relajados dados por las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.4. *Dada una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones localmente uniformemente mayoradas en Q. Definimos el semi-límite relajado superior por:*

$$u^\star(x,t) = \limsup_{(x_n,t_n)\to(x,t)} u_n(x_n,t_n)$$

DEFINICIÓN 2.5. *Dada una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones localmente uniformemente minorados en Q. Definimos el semi-límite relajado inferior por:*

$$u_\star(x,t) = \liminf_{(x_n,t_n)\to(x,t)} u_n(x_n,t_n)$$

estas definiciones permiten demostrar un segundo teorema de estabilidad que requiere menos en sus condiciones de convergencia.

Para el Método de Perron

Para definir sub y súper-soluciones viscosas discontinuas se requiere introducir las definiciones de envolventes SCS y SCI, dadas por

DEFINICIÓN 2.6. *Sea $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$. Llamamos envolvente SCS de u a la más pequeña función SCS mayor a u. Y esta dada por*

$$u^*(x_o, t_o) = \limsup_{(x,t)\to(x_o,t_o)} u(x,t).$$

Llamamos envolvente SCI de u a la más grande función SCI menor a u. Y esta dada por

$$u_*(x_o, t_o) = \liminf_{(x,t)\to(x_o,t_o)} u(x,t)$$

.

Esta definición aprovecha los resultados de semicontinuidad descrito en el Marco Teórico.

El Teorema de Perron, busca una solución viscosa discontinua w tal que $u \leq w \leq v$ con u y v sub y súper-soluciones respectivamente tales que $u \leq v$.

Para la demostración de este teorema se denota el conjunto

$$\Lambda := \{z : Q :\to \mathbb{R} \,|\, z^* \text{ es una sub-solución viscosa de (2.1) y } u \leq z \leq v\}$$

y prueba por reducción al absurdo que w es una solución viscosa discontinua, definida por,

$$w(x,t) = \sup_{z\in\Lambda} z(x,t)$$

Para el Principio de Comparación

Partimos de las condiciones descritas en [10, 9]. Para entender estas hipótesis es necesario comprender la definición de módulo de continuidad dado por

DEFINICIÓN 2.7. *Sea $w : [0, +\infty[\longrightarrow [0., +\infty[$, decimos que w es un módulo de continuidad si $\lim_{x\to o} w(x) = w(0) = 0$*

Además, dada una sub-solución u es indispensable estudiar el comportamiento en el marco de las soluciones viscosas de las funciones dadas por $u_\eta(x,t) = u(x,t) - \eta t$ y $\mu u(x,t)$ con $\eta, \mu > 0$.

La demostración del Principio de Comparación es abordado por razonamiento al absurdo, encontrando convergencias que permiten aplicar el Lema de matrices de Ishii- Jensen encontrado en [1] para posteriormente aplicar las condiciones de [10, 9].

Para la existencia y unicidad

Agregando una condición adicional que se puede encontrar en [9] buscamos una relación del tipo $u \leq v$ para aplicar el Teorema de Perror, y una relación $u(x,0) \leq v(x,0)$ para aplicar el Principio de Comparación. Esto, con el propósito de encontrar una solución w y recuperar su continuidad. Las funciones que se espera cumplan las condiciones necesarias son $u_0(x,t) - Ct$ y $u_0(x,t) + C$.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Estabilidad, paso al límite

Lema 3.1. *Puede ser reemplazada la expresión "máximo local" por "máximo local estricto" en la definición de sub-solución viscosa.*

Demostración. Supongamos que u es una función SCS, y que para todo $\psi \in C^2(Q)$ tal que $u - \psi$ alcanza un máximo local estricto en un punto (x_0, t_0), se verifica

$$\psi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\psi(x_0, t_0), D^2\psi(x_0, t_0)\right) \leq 0$$

Mostremos que u es una sub-solución, para ello, supongamos $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u - \phi$ alcanza un máximo local en un punto (x_0, t_0).

Tomemos $\psi(x,t) = \phi(x,t) - ||(x,t) - (x_0, t_0)||^4$ y mostremos que $u - \psi$ alcanza un máximo local estricto en el punto (x_0, t_0). Notemos que se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\phi(x_0, t_0) &= \psi(x_0, t_0) \\
\phi_t(x_0, t_0) &= \psi_t(x_0, t_0) \\
D\phi(x_0, t_0) &= D\psi(x_0, t_0) \\
D^2\phi(x_0, t_0) &= D^2\psi(x_0, t_0)
\end{aligned}$$

Además, como $u - \phi$ alcanza un máximo local, existe $r > 0$ tal que

$$(u-\phi)(x,t) \leq (u-\phi)(x_0,t_0), \quad \forall (x,t) \in B_r((x_0,t_0))$$

Como $||(x,t)-(x_0,t_0)||^4 > 0$ para todo (x,t) distinto de (x_0,t_0), se tiene que

$$(u-\phi)(x,t) - ||(x,t)-(x_0,t_0)||^4 < (u-\phi)(x_0,t_0),\ \forall (x,t) \in B_r((x_0,t_0)) - \{(x_0,t_0)\}$$

Reescribiendo, y aprovechando la igualdad $\phi(x_0,t_0) = \psi(x_0,t_0)$ tenemos que

$$(u-\psi)(x,t) < (u-\psi)(x_0,t_0), \quad \forall (x,t) \in B_r((x_0,t_0)) - \{(x_0,t_0)\}$$

Por tanto, $u - \psi$ alcanzan un máximo local estricto en el punto (x_0,t_0).

Utilizando la hipótesis del principio de la demostración, tenemos que

$$\psi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\psi(x_0,t_0),D^2\psi(x_0,t_0)\right) \leq 0,$$

Como $\phi_t(x_0,t_0) = \psi_t(x_0,t_0)$, $D\phi(x_0,t_0) = D\psi(x_0,t_0)$ y $D^2\phi(x_0,t_0) = D^2\psi(x_0,t_0)$, tenemos que

$$\phi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) \leq 0$$

Por tanto, u es sub-solución viscosa. □

Lema 3.2. *Puede ser reemplazada la expresión "mínimo local" por "mínimo local estricto" en la definición de súper-solución viscosa.*

Demostración. Supongamos que u es una función SCI, y que para todo $\psi \in C^2(Q)$ tal que $u - \psi$ alcanza un mínimo local estricto en un punto (x_0,t_0), se verifica

$$\psi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\psi(x_0,t_0),D^2\psi(x_0,t_0)\right) \geq 0$$

Mostremos que u es una súper-solución, para ello, supongamos $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u - \phi$ alcanza un mínimo local en un punto (x_0,t_0).

Tomemos $\psi(x,t) = \phi(x,t) + ||(x,t)-(x_0,t_0)||^4$ y mostremos que $u - \psi$ alcanza un mínimo local estricto en el punto (x_0,t_0). Notemos que se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\phi(x_0,t_0) &= \psi(x_0,t_0)\\
\phi_t(x_0,t_0) &= \psi_t(x_0,t_0)\\
D\phi(x_0,t_0) &= D\psi(x_0,t_0)\\
D^2\phi(x_0,t_0) &= D^2\psi(x_0,t_0)
\end{aligned}$$

Además, como $u-\phi$ alcanza un mínimo local, existe $r>0$ tal que

$$(u-\phi)(x,t) \geq (u-\phi)(x_0,t_0), \quad \forall (x,t) \in B_r((x_0,t_0))$$

Como $||(x,t)-(x_0,t_0)||^4 > 0$ para todo (x,t) distinto de (x_0,t_0), se tiene que

$$(u-\phi)(x,t) - ||(x,t)-(x_0,t_0)||^4 > (u-\phi)(x_0,t_0), \ \forall (x,t) \in B_r((x_0,t_0)) - \{(x_0,t_0)\}$$

Reescribiendo, y aprovechando la igualdad $\phi(x_0,t_0) = \psi(x_0,t_0)$ tenemos que

$$(u-\psi)(x,t) > (u-\psi)(x_0,t_0), \quad \forall (x,t) \in B_r((x_0,t_0)) - \{(x_0,t_0)\}$$

Por tanto, $u-\psi$ alcanzan un mínimo local estricto en el punto (x_0,t_0).

Utilizando la hipótesis del principio de la demostración, tenemos que

$$\psi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\psi(x_0,t_0),D^2\psi(x_0,t_0)\right) \geq 0,$$

Como $\phi_t(x_0,t_0) = \psi_t(x_0,t_0)$, $D\phi(x_0,t_0) = D\psi(x_0,t_0)$ y $D^2\phi(x_0,t_0) = D^2\psi(x_0,t_0)$, tenemos que

$$\phi_t(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)\right) \geq 0$$

Por tanto, u es súper-solución viscosa.

□

Lema 3.3. *Sea $v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que posee un máximo local estricto en (x_0,t_0) y sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas que convergen localmente uniforme en v. Entonces existe una sucesión $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a (x_0,t_0) tal que cada (x_n,t_n) es máximo local de v_n.*

Demostración. Como v posee un máximo local estricto en (x_0,t_0) podemos tomar un $r>0$ tal que $B_{2r}(x_0,t_0)\subseteq Q$ y

$$v(x_0,t_0)>v(x,t),\quad \forall(x,t)\in B_{2r}(x_0,t_0)$$

De esta ecuación se sigue:

$$v(x_0,t_0)=\max_{B_r(x_0,t_0)} v>\max_{\partial B_r(x_0,t_0)} v.$$

Como $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniforme a v, entonces

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x_0,t_0)=\max_{B_r(x_0,t_0)}\lim_{n\to\infty} v_n>\max_{\partial B_r(x_0,t_0)}\lim_{n\to\infty} v_n$$

Por tanto, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$v_n(x_0,t_0)>\max_{\partial B_r(x_0,t_0)} v_n,\quad \forall n\geq n_0. \tag{3.1}$$

Puesto que v_n es continua en $\overline{B_r(x_0,t_0)}$ un conjunto compacto, esta función alcanza un máximo en un punto en $\overline{B_r(x_0,t_0)}$ al que denotaremos por (x_n,t_n). Ahora, veamos que $(x_n,t_n)\in B_r(x_0,t_0)$. En efecto, si asumimos que $(x_n,t_n)\in\partial B_r(x_0,t_0)$, por (3.1) se sigue que $v_n(x_0,t_0)>v_n(x_n,t_n)$, contradiciendo el hecho de que (x_n,t_n) es máximo de v_n en $\overline{B_r(x_0,t_0)}$.

Para finalizar, como $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, éxito una subsucesión $(x_{n_k},t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto (x_1,t_1).

Como, v_{n_k} alcanza un máximo local en (x_{n_k},t_{n_k}), se tiene que

$$v_{n_k}(x_{n_k},t_{n_k})\geq v_{n_k}(x,t),\quad \forall(x,t)\in\overline{B_r(x_0,t_0)}$$

Como $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniforme a v. Tomando limites en la desigualdad anterior tenemos que

$$v(x_1,t_1)\geq v(x,t),\quad \forall(x,t)\in\overline{B_r(x_0,t_0)}$$

Como v alcanza un máximo estricto en (x_0,t_0) en $\overline{B_r(x_0,t_0)}$. Por unicidad, se sigue ue $(x_0,t_0)=(x_1,t_1)$. Tomando cualquier otro punto de adherencia de la sucesión $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llega a la misma conclusión. Por tanto, $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un único valor de adherencia, así, $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a

(x_0, t_0). □

LEMA 3.4. *Sea $v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que posee un mínimo local estricto en (x_0, t_0) y sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas que convergen localmente uniforme en v. Entonces existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a (x_0, t_0) tal que cada (x_n, t_n) es mínimo local de v_n.*

Demostración. Tenemos que $-v$ alcanza un mínimo local estricto en (x_0, t_0) y $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniforme a $-v$.

Por el lema anterior, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a (x_0, t_0) tal que cada (x_n, t_n) es máximo local de $-v_n$. Es decir, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a (x_0, t_0) tal que cada (x_n, t_n) es máximo local de v_n.

Sean $H_n, H : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones elípticas □

TEOREMA 3.5 (Estabilidad para sub-soluciones)**.** *Supongamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de sub-soluciones continuas de*

$$u_t(x,t) + H_n\left(x, t, u(x,t), Du(x,t), D^2u(x,t)\right) = 0, \quad (x,t) \in Q \tag{3.2}$$

que converge uniformemente a $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ en todos los compactos de Q y H_n converge uniformemente a H en todos los compactos de $Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S_n$. Entonces u es sub-solución de (2.1).

Demostración. Sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u-\phi$ alcanza un máximo local estricto en el punto (x_0, t_0). Como $u_n - \phi$ convergen localmente uniforme a $u - \phi$, usando el Lema 3.3, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a (x_0, t_0) tal que $u_n - \phi$ tiene un máximo local en el punto (x_n, t_n). Como u_n es sub-solución de (3.2), entonces

$$\phi_t(x_n, t_n) + H_n\left(x_n, t_n, u_n(x_n, t_n), D\phi(x_n, t_n), D^2\phi(x_n, t_n)\right) \leq 0$$

Como H_n converge uniformemente a H y u_n converge uniformemente a u y (x_n, t_n) converge a (x_0, t_0), también, aprovechando la continuidad de ϕ y sus derivadas podemos tomar el limite cuando n tiende a $+\infty$ de la desigualdad anterior y tenemos que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)\right) \leq 0$$

Al verificarse esta desigualdad podemos concluir que u es sub-solución viscosa de (2.1). □

TEOREMA 3.6 (Estabilidad para súper-soluciones). *Supongamos que* (u_n) *es una sucesión de súper-soluciones viscosas continuas de (3.2) que converge uniformemente a la función* $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *en todos los compactos de* Q *y* H_n *converge uniformemente a* H *en todos los compactos de* $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_n$. *Entonces* u *es sub-solución viscosa de (2.1).*

Demostración. Sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u - \phi$ alcanza un mínimo local estricto en el punto (x_0, t_0). Como $u_n - \phi$ convergen localmente uniforme a $u - \phi$, usando el Lema 3.3, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a (x_0, t_0) tal que $u_n - \phi$ tiene un mínimo local en el punto (x_n, t_n). Como u_n es sub-solución de (3.2), entonces

$$\phi_t(x_n, t_n) + H_n\left(x_n, t_n, u_n(x_n, t_n), D\phi(x_n, t_n), D^2\phi(x_n, t_n)\right) \geq 0$$

Como H_n converge uniformemente a H y u_n converge uniformemente a u y (x_n, t_n) converge a (x_0, t_0), también, aprovechando la continuidad de ϕ y sus derivadas podemos tomar el limite cuando n tiende a $+\infty$ de la desigualdad anterior y tenemos que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)\right) \geq 0$$

Al verificarse esta desigualdad podemos concluir que u es súper-solución viscosa de (2.1). □

TEOREMA 3.7 (Estabilidad para soluciones viscosas). *Supongamos que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de soluciones viscosas continuas de (3.2) que converge uniformemente a la función* $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *en todos los compactos de* Q *y* H_n *converge uniformemente a* H *en todos los compactos de* $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_n$. *Entonces* u *es solución viscosa de (2.1).*

Demostración. Este teorema es resultado directo de los dos teoremas anteriores y la definición de solución viscosa. □

Para relajar las hipótesis de los teoremas de estabilidad aprovecharemos las definiciones de semi-límites relajados descritos en la Definición

2.4 y la Definición 2.5, recordando que $u^\star(x,t)$ y $u_\star(x,t)$ denotan los semi-límites superior e inferior respectivamente.

Lema 3.8. *Si una función SCS $v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo local estricto en un punto (x_0, t_0) y si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones SCS tal que*

$$v(x_0,t_0) = \limsup_{(z_n,w_n)\to(x,t)} v_n(z_n,w_n)$$

entonces, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que v_n alcanza un máximo local en (x_n, t_n) y $(v_n(x_n, t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v(x_0, t_0)$.

Demostración. Puesto que v alcanza un máximo local estricto en (x_0, t_0), podemos tomar un $r > 0$ tal que

$$v(x_0,t_0) > v(x,t), \quad \forall (x,t) \in B_{2r}(x_0,t_0)$$

Como v_n es SCS se tiene que v_n es acotada superiormente y alcanza un máximo local en algún punto $x_n \in \overline{B_r(x_0,t_0)}$.Notemos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones localmente uniformemente mayoradas en el compacto $B_r(x_0,t_0)$. Además, tomando una sucesión $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a (x_0, t_0) en $B_r(x_0, t_0)$, tenemos

$$v_n(x_n,t_n) \geq v_n(z_n,w_n).$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto (x_1, t_1). Además,

$$v_{n_k}(x_{n_k},t_{n_k}) \geq v_{n_k}(z_{n_k},w_{n_k}).$$

Tomando el limite superior tenemos

$$\begin{gathered}
\limsup_{k\to\infty} v_n(x_{n_k},t_{n_k}) \geq \limsup_{k\to\infty} v_{n_k}(z_{n_k},w_{n_k}) \\
\limsup_{(x_{n_k},t_{n_k})\to(x_1,t_1)} v_{n_k}(x_{n_k},t_{n_k}) \geq \limsup_{(z_{n_k},w_{n_k})\to(x_0,t_0)} v_{n_k}(z_{n_k},w_{n_k}) \\
v(x_1,t_1) \geq v(x_0,t_0)
\end{gathered}$$

Como (x_0, t_0) es máximo local estricto de v entonces $(x_1, t_1) = (x_0, t_0)$. Con cualquier valor de adherencia de la sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llega a la misma conclusión por tanto (x_n, t_n) converge a (x_0, t_0).

Como $v(t_0, x_0) \leq v(t_n, x_n)$ y v un función SCS se tiene que

$$v(t_0, x_0) = \lim_{n\to\infty}\sup v_n(x_n, t_n) \geq \lim_{n\to\infty}\sup v(x_n, t_n)$$

.

Equivalentemente,

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} v_n(x_n, t_n) \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} v(x_n, t_n)$$

Además, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} v_n(x_n, t_n) \geq \sup_{n\geq k} v(x_n, t_n)$$

Por tanto,

$$\sup_{n\geq k} v_n(x_n, t_n) \geq \sup_{n\geq k} v(x_n, t_n)$$

Finalmente, tenemos $v(x_0, t_0) \leq v_n(x_n, t_n)$, tomando el límite inferior se sigue que

$$v(x_0, t_0) \leq \lim_{n\to\infty}\inf v_n(t_n, x_n) \leq \lim_{n\to\infty}\sup v_n(t_n, x_n) \leq v(x_0, t_0)$$

Lo que nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x_n, t_n) = v(x_0, t_0).$$

$\square$

LEMA 3.9. *Si una función SCI $v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo local estricto en un punto (x_0, t_0) y si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones SCI tal que*

$$v(x_0, t_0) = \liminf_{(z_n, w_n)\to(x,t)} v_n(z_n, w_n)$$

entonces, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que v_n alcanza un mínimo local en (x_n, t_n) y $(v_n(x_n, t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v(x_0, t_0)$.

Demostración. Como v es SCI entonces $-v$ es SCS, Además,

$$-v(x_0, t_0) = \limsup_{(z_n, w_n) \to (x,t)} -v_n(z_n, w_n)$$

. Por el lema anterior se sigue que existe $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $-v_n$ alcanza un máximo local en (x_n, t_n) y $(-v_n(x_n, t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $-v(x_0, t_0)$ Podemos reescribir esta conclusión de tal manera que existe $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que v_n alcanza un mínimo local en (x_n, t_n) y $(v_n(x_n, t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $v(x_0, t_0)$. $\square$

TEOREMA 3.10. *Supongamos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de sub-soluciones localmente uniformemente mayoradas de (3.2) y $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a H en todos los compactos de $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N$. Entonces, $u^\star$ es una sub-solución de (2.1).*

De manera análoga, Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de súper-soluciones localmente uniformemente minoradas de (3.2) y $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a H en todos los compactos de $Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N$. Entonces, $u_\star$ es una súper-solución de (2.1).

Demostración. Sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u^\star - \phi$ alcanza un máximo local en el punto (x_0, t_0). Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones localmente uniformemente mayoradas se sigue que

$$(u^\star - \phi)(x_0, t_0) = \limsup_{(x_n, t_n) \to (x_0, t_0)} (u_n - \phi)(x_0, t_0)$$

Por el Lema 3.8, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n - \phi$ alcanza un máximo local en el punto (x_n, t_n), así,

$$\phi_t(x_n, t_n) + H_n\left(x_n, t_n, u_n(x_n, t_n), D\phi(x_n, t_n), D^2\phi(x_n, t_n)\right) \le 0$$

y $u_n(x_n.t_n)$ converge a $u_\star(x_0, t_0)$. Así,tendiendo n al $+\infty$ la desigualdad anterior se sigue que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u_\star(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)\right) \le 0$$

Para la segunda parte sea $\phi \in C^2(Q)$ tal que $u^\star - \phi$ alcanza un mínimo local en el punto (x_0, t_0). Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones localmente uniformemente minoradas se sigue que

$$(u_\star - u)(x_0, t_0) = \liminf_{(x_n,t_n)\to(x_0,t_0)} (u_n - \phi)(x_0, t_0).$$

Por el Lema 3.9, existe una sucesión $(x_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n - \phi$ alcanza un mínimo local en el punto (x_n, t_n), así,

$$\phi_t(x_n, t_n) + H_n\left(x_n, t_n, u_n(x_n, t_n), D\phi(x_n, t_n), D^2\phi(x_n, t_n)\right) \geq 0$$

y $u_n(x_n.t_n)$ converge a $u_\star(x_0, t_0)$. Así,tendiendo n al $+\infty$ la desigualdad anterior se sigue que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H\left(x_0, t_0, u_\star(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)\right) \geq 0$$

3.2. Existencia de soluciones por el método de Perron

En esta sección explicaremos la construcción de una solución viscosa a partir de una sub-solución y una súper-solución con el método de Perron y las nociones de soluciones discontinuas viscosas.

3.2.1. Soluciones viscosas discontinuas

Para $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, recordemos que la envolvente SCS de u esta dada por

$$u^*(x_o, t_o) = \limsup_{(x,t)\to(x_o,t_o)} u(x, t).$$

Y la envolvente SCI de u por

$$u_*(x_o, t_o) = \liminf_{(x,t)\to(x_o,t_o)} u(x, t)$$

.

Definición 3.1. *Decimos que $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es*

- *Una sub-solución viscosa discontinua de (2.1) si u^* es una sub-solución de (2.1).*

- *Una súper-solución viscosa discontinua de (2.1) si u^* es una súper-solución de (2.1).*
- *Una solución viscosa discontinua de (2.1) si u^* es una sub-solución y u_* es una súper-solución de (2.1).*

3.2.2. Supremo de sub-soluciones

Sea $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de funciones localmente mayoradas de Q en $\mathbb{R}$. Definimos

$$u(x,t) = \sup_{\alpha\in A} u_\alpha(x,t)$$

.

Lema 3.11. *Supongamos que para todo $\alpha \in A$ se tiene que $(u_\alpha)^*$ es una sub-solución de (2.1). Entonces u^* es una sub-solución de (2.1).*

Demostración. Sea $\phi \in C^2(Q)$ y $(x_o,t_o) \in Q$ tal que $u^* - \phi$ tiene un máximo local estricto en (x_o,t_o).Probemos que

$$\phi_t(x_o,t_o) + H(x_o,t_o,u^*(x_o,t_o), D\phi(x_o,t_o), D^2\phi(x_o,t_o)) \leq 0$$

Como $u^* - \phi$ tiene un máximo local estricto en (x_o,t_o), entonces existen $r > 0$ y $\eta > 0$ tales que

$$(u^* - \phi)(x_0,t_0) \geq \max_{\partial B_r(x_0,t_0)} (u^* - \phi) + \eta \tag{3.3}$$

Por otro lado, por la definición de envolvente SCS existe una sucesión $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B_r(x_0,t_0)$ convergente a (x_0,t_0) tal que $(u(x_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u^*(x_0,t_0)$. Por la definición de u existe $\alpha_n \in A$ tal que

$$u_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq u(x_n,t_n) - \frac{1}{n} \tag{3.4}$$

Como $u \geq u_\alpha$, por la definición de envoltura SCS se tiene que

$$u^*(x_n,t_n) \geq u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq u_{\alpha_n}(x_n,t_n) \tag{3.5}$$

Tomando el límite superior tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} u^*(x_n,t_n) \geq \limsup_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n)$$

Como u^* es SCS, se tiene

$$u^*(x_0,t_0) \geq \limsup_{n\to\infty} u^*(x_n,t_n)$$

Por tanto,

$$u^*(x_0,t_0) \geq \limsup_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \tag{3.6}$$

Tomando el límite inferior en (3.4) y (3.5), y, puesto que $u(x_n.t_n) \to u^*(x_0,t_0)$, y $1/n \to 0$ se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to\infty} u_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq u^*(x_0,t_0)$$

Junto a (3.5) se tiene que

$$u^*(x_0,t_0) \geq \limsup_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq u^*(x_0,t_0)$$

Entonces, $(u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u^*(x_0,t_0)$.

Tenemos que $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x_0,t_0) y ϕ es continua, entonces, para n suficientemente grande tenemos $|\phi(x_n,t_n) - \phi(x_0,t_0)| < \eta/4$, y se sigue

$$-\phi(x_0,t_0) < \frac{\eta}{4} - \phi(x_n,t_n) \tag{3.7}$$

Además, $|u^*(x_0,t_0) - u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n))| < \eta/4$ siguiendo

$$u^*(x_0,t_0) < \frac{\eta}{4} + u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \tag{3.8}$$

Usando (3.7) y (3.8) se tiene que

$$(u^* - \phi)(x_0,t_0) < \frac{\eta}{2} + (u_{\alpha_n} - \phi)^*(x_n,t_n)$$

Por la desigualdad en (3.3) y $u^* \geq u^*_\alpha$ se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{2} + (u_{\alpha_n} - \phi)^*(x_n,t_n) &> \max_{\partial B_r(x_0,t_0)} (u^* - \phi) + \eta \\ &> \max_{\partial B_r(x_0,t_0)} (u^*_{\alpha_n} - \phi) + \eta\end{aligned}$$

Teniendo así,

$$(u_{\alpha_n} - \phi)^*(x_n, t_n) > \max_{\partial B_r(x_0,t_0)} (u^*_{\alpha_n} - \phi) + \frac{\eta}{2} \tag{3.9}$$

Así, tenemos que $u^*_{\alpha_n} - \phi$ tiene un máximo local en un punto (z_n, w_n) de $B_r(x_0, t_0)$. Mostremos que $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x_0, t_0).

Como $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta acotada, existe una subsucesión a la que denotaremos igual, y que converge a un punto (x_1, t_1). Como $u > u_\alpha$ y $u^*_{\alpha_n} - \phi$ tiene un máximo local en (z_n, w_n), se tiene que

$$(u^* - \phi)(z_n, w_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(z_n, w_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n, t_n)$$

Como $u^* - \phi$ es SCS, y $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x_1, t_1). Se tiene que

$$\begin{aligned}(u^* - \phi)(x_1, t_1) &= \limsup_{n\to\infty} (u^* - \phi)(z_n, w_k)\\ &\geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n, t_n)\\ &= (u^* - \phi)(x_0, t_0)\end{aligned}$$

Como (x_0, t_0) es máximo local estricto, se tiene que $(x_1, t_1) = (x_0, t_0)$. Como cualquier valor de adherencia nos dirige a la misma conclusión, es decir, (x_0, t_0) es el único valor de adherencia de $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x_0, t_0).

Ahora, mostremos que $(u^*_{\alpha_n}(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u^*(x_0, t_0)$. Notemos que

$$(u^* - \phi)(x_0, t_0) \geq (u^* - \phi)(w_n, z_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(w_n, z_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n, t_n)$$

Se sigue,

$$(u^* - \phi)(x_0, t_0) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(w_n, z_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n, t_n)$$

Tomando el limite cuando n tiende a ∞ se tiene que $((u^*_{\alpha_n} - \phi)(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(u^* - \phi)(x_0, t_0)$. Como ϕ es continuo y $(z_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a (x_0, t_0) se sigue que $(\phi(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\phi(x_0, t_0)$. Sumando sucesiones convergente se sigue que, $(u^*_{\alpha_n}(z_n, w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u^*(x_0, t_0)$

Como $u^*_{\alpha_n} - \phi$ tiene un máximo local en un punto (z_n, w_n) de $B_r(x_0, t_0)$ y

$u^*_{\alpha_n}$ es sub-solución de (2.1) entonces,

$$\phi_t(z_n, w_n) + H(z_n, w_n, u^*_\alpha(z_n, w_n), D\phi(z_n, w_n), D^2\phi(z_n, w_n)) \leq 0$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se tiene que

$$\phi_t(x_o, t_o) + H(x_o, t_o, u^*(x_o, t_o), D\phi(x_o, t_o), D^2\phi(x_o, t_o)) \leq 0$$

Por tanto, u^* es sub-solución viscosa de (2.1) $\square$

3.2.3. Método de Perron

En este punto para reducir la extensión de las expresiones usaremos la siguiente notación

$$H[x, t, u, \phi] = H(x, t, u(x, t), D\phi(x, t), D^2\phi(x, t))$$

TEOREMA 3.12. *Dadas las funciones $u, v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ sub-solución y súper-solución viscosa de (2.1) respectivamente, tales que $u \leq v$ en Q. Entonces existe una solución viscosa discontinua $w : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \leq w \leq v$ en Q.*

Demostración. Definamos el siguiente conjunto

$$\Lambda := \{z : Q :\to \mathbb{R} \,|\, z^* \text{ es una sub-solución viscosa de (2.1) y } u \leq z \leq v\}$$

Notemos que $\Lambda \neq \emptyset$ pues $u \in \Lambda$. Consideremos para $(x, t) \in Q$

$$w(x, t) = \sup_{z \in \Lambda} z(x, t),$$

y probemos que w es una solución viscosa discontinua.

Notemos que $u \leq w \leq v$, además, por el Lema 3.11 w^* es una sub-solución viscosa de (2.1).

Ahora, probemos que w_* es una súper-solución viscosa de (2.1). Por absurdo, supongamos que existe una función test $\phi \in C^2(Q)$ y un punto

(x_0, t_0) tal que $w_* - \phi$ tiene un mínimo local estricto en (x_0, t_0) y

$$\phi_t(x_0, t_0) + H[x_0, t_0, u_*, \phi] < 0 \tag{3.10}$$

Además, podemos asumir $w_*(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$, fácilmente, remplazando ϕ por $\phi - \phi(x_0, t_0) + w_*(x_0, t_0)$ de ser necesario.

Primero, probemos que $w_*(x_0, t_0) < v(x_0, t_0)$. En efecto, como $w \leq v$ se sigue que $w_* \leq v$, si asumimos que $w_*(x_0, t_0) = v(x_0, t_0)$ se sigue que

$$(v - \phi)(x_0, t_0) = (w_* - \phi)(x_0, t_0) < (w_* - \phi)(x, t) \leq (v - \phi)(x, t)$$

en algun abierto $D \subseteq Q$, por tanto $v - \phi$ alcanza un mínimo local en (x_0, t_0) y puesto que v es súper-solución de (2.1) se sigue que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H[x_0, t_0, u_*, \phi] = \phi_t(x_0, t_0) + H[x_0, t_0, v, \phi] \geq 0$$

Lo que contradice (3.10). Por tanto, $w_*(x_0, t_0) < v(x_0, t_0)$. Ahora, tomemos $r > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que $B_r(x_0, t_0) \subseteq Q$ y

1. $\phi_t(x, t) + H[x, t, \phi + \epsilon, \phi] \leq 0, \quad \forall (x, t) \in B_r(x_0, t_0)$

En efecto, como $w_*(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$ por (3.10) existe θ tal que

$$\phi_t(x_0, t_0) + H[x_0, t_0, \phi, \phi] \leq -\theta$$

Como H, ϕ y sus derivadas son continuas, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\phi_t(x, t) + H[x, t, \phi + \epsilon, \phi] - \phi_t(x_0, t_0) - H[x_0, t_0, \phi, \phi]| \leq \epsilon, \quad \forall (x, t) \in B_\delta(x_0, t_0)$$

Así, si tomamtos $\epsilon \leq \theta$

$$\phi_t(x, t) + H[x, t, \phi + \epsilon, \phi] \leq \phi_t(x_0, t_0) + H[x_0, t_0, \phi, \phi] + \epsilon \leq -\theta + \epsilon \leq 0$$

2. $(w_* - \phi)(x, t) > \epsilon$ para todo $(x, t) \in \partial B_r(x_0, t_0)$

Ya que al tener $w_* - \phi$ un mínimo local estricto en (x_0, t_0) existe un $r > 0$

tal que $r \leq \delta$ y

$$0 = (w_* - \phi)(x_0, t_0) = \min_{B_r(x_0,t_0)} w_* - \phi < \min_{\partial B_r(x_0,t_0)} w_* - \phi$$

Por tanto existe ϵ tal que $(w_* - \phi)(x,t) > \epsilon$, y esperamos que verifique $\epsilon \leq \theta$.

3. $\phi(x,t) < v(x,t) - \epsilon$ para todo $x \in B_r(x_0, t_0)$.

Ahora, definamos

$$z(x,t) = \begin{cases} w(x,t), & si \quad (x,t) \in Q \setminus B_r(x_0,t_0) \\ \max\{w(x,t), \phi(x,t) + \epsilon\} & si \quad (x,t) \in B_r(x_0,t_0) \end{cases}$$

Notemos que por el literal 3 se tiene $u \leq w \leq z \leq v$, Probemos que z^* es sub-solución de (2.1) para poder concluir que $z \in \Lambda$.

Sea $\psi \in C^2(Q)$ tal que $z^* - \psi$ alcanza un máximo local en un punto (x_1, t_1).

Como $w \leq z$ entonces $w^*(x_1,t_1) \leq z^*(x_1,t_1)$.

Asumamos $w^*(x_1,t_1) = z^*(x_1,t_1)$ entonces $w^* - \psi$ alcanza un máximo local en (x_1,t_1) y como w^* es sub-solución viscosa de (2.1) entonces

$$\psi_t(x_1,t_1) + H[x_1,t_1,z^*,\psi] = \psi_t(x_1,t_1) + H[x_1,t_1,w^*,\psi] \leq 0$$

esta desigualdad nos permite concluir que para el caso abordado w^* es sub-solución.

Ahora, supongamos $w^*(x_1,t_1) < z^*(x_1,t_1)$, por la definición de z se tiene que $(x_1,t_1) \in \overline{B_r(x_0,t_0)}$ y además, por la continuidad de ψ se tiene que

$$z^*(x_1,t_1) = \phi(x_1,t_1) + \epsilon \tag{3.11}$$

Supongamos que $(x_1,t_1) \in \partial B_r(x_0,t_0)$ y notemos que por el literal 2 se producen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} (z^* - \phi)(x_1,t_1) &> (w^* - \phi)(x_1,t_1) \\ &> (w_* - \phi)(x_1,t_1) \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto $z^*(x_1,t_1) > \phi(x_1,t_1)+\epsilon$ contradiciendo (3.11). Así, $(x_1,t_1) \in B_r(x_0,t_0)$.

Ahora, veamos que $\phi + \epsilon - \psi$ tienen un máximo local en (x_1,t_1). En efecto, como $z^* - \psi$ tienen un máximo local en (x_1,t_1) se sigue que

$$\begin{aligned}(\phi + \epsilon - \psi)(x_1,t_1) &= (z^* - \psi)(x_1,t_1) &(3.12)\\ &\geq (z^* - \psi)(x,t) &(3.13)\\ &\geq (\phi + \epsilon - \psi)(x,t) &(3.14)\end{aligned}$$

En algún abierto subconjunto de $B_r(x_0,t_0)$. Así, por las condiciones de optimalidad se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\psi_t(x_0,t_0) &= \phi_t(x_0,t_0)\\ D\psi(x_0,t_0) &= D\phi(x_0,t_0)\\ D^2\phi(x_0,t_0) &\leq D^2\psi(x_0,t_0)\end{aligned}$$

Como $(x_1,t_1) \in B_r(x_0,t_0)$, por el literal 1, por las relaciones anteriores y las condiciones elípticas de H se sigue que

$$\begin{aligned}\psi_t(x_1,t_1) + H[x_1,t_1,z^*,\psi] &= \psi_t(x,t) + H[x_1,t_1,\phi+\epsilon,\psi]\\ &\leq \phi_t(x_1,t_1) + H[x_1,t_1,\phi+\epsilon,\phi] \leq 0\end{aligned}$$

Abordado este segundo caso, queda demostrado que z^* es sub-solución de (2.1) y por tanto $z \in \Lambda$.

Para finalizar, demostremos que $z \neq w$, notemos que

$$\phi(x_0,t_0) + \epsilon > \phi(x_0,t_0) = w_*(x_0,t_0)$$

De tal manera que podemos encontrar un $\eta > 0$ tal que

$$\phi(x_0,t_0) + \epsilon - \eta = w_*(x_0,t_0) + \eta \tag{3.15}$$

Por la definición de w_* podemos encontrar una sucesión $(x_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B_r(x_0,t_0)$ convergente a (x_0,t_0) tal que $(w(x_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w_*(x_0,t_0)$.

De estas convergencias y la continuidad de ϕ tenemos que para un n

suficientemente grande

$$|\phi(x_n,t_n)-\phi(x_0,t_0)|<\eta$$

$$|w(x_n,t_n)-x_*(x_0,t_0)|<\eta$$

de donde se desarrollan las siguientes desigualdades

$$\phi(x_n,t_n) > -\eta+\phi(x_0,t_0) \tag{3.16}$$

$$\eta + w_*(x_0,t_0) > w(x_n) \tag{3.17}$$

Como $(x_n,t_n)\in B_r(x_0,t_0)$, por la definición de z se tiene que

$$z(x_n,t_n)\geq \phi(x_n,t_n)+\epsilon$$

Utilizando (3.15), (3.16) y (3.17) se sigue

$$\begin{aligned} z(x_n,t_n) &\geq \phi(x_n,t_n)+\epsilon \\ &> -\eta+\phi(x_0,t_0)+\epsilon \\ &= w_*(x_0,t_0)+\eta \\ &> w(x_n,t_n) \end{aligned}$$

Por tanto $z\neq w$, $z\geq w$ y $z\in\Lambda$. Esto es absurdo, pues w es el supremo de Λ. Esto nos ayuda a concluir que w_* es una súper-solución.

Concluyendo, w es un solución viscosa discontinua de (2.1) □

3.3. Principio de Comparación

En esta sección nos limitaremos a un dominio $\mathbb{R}^N\times(0,T]$ con $T>0$ al que denotamos Q_T. Es necesario mencionar que los resultados previos a esta sección son validos para el problema

$$u_t(x,t)+H(x,t,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t))=0. \quad (x,t)\in Q_T \tag{3.18}$$

También precisamos ciertas condiciones que serán utilizadas en el teorema principal

(H1) H es elíptica, es decir que:

para todo $(x,t,s,p,X,Y) \in Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S_N \times S_N$ se verifica que

$$\text{Si} \;\; X \leq Y \;\; \text{entonces} \;\; H(x,t,s,p,X) \geq H(x,t,s,p,Y)$$

(H2) H es propia, es decir, existe una constante $\lambda_0 \geq 0$ tal que para todo x,t,s,p,X y u,v tales que $u \geq v$ se tiene que

$$H(x,t,u,p,X) - H(x,t,v,p,X) \geq \lambda_0(u-v)$$

Aún más, para esta primera parte asumiremos que H no depende directamente del tiempo, es decir,

$$u_t(x,t) + H(x,u(x,t),Du(x,t),D^2u(x,t)) = 0. \quad (x,t) \in Q_T \tag{3.19}$$

Para este caso particular, describimos las siguientes condiciones:

(F1) Para todo $R > 0$ existen módulos de continuidad ω, ω_R tales que para todo $|x|$, $|y| \leq R$, $|v| \leq R$, X y Y que satisface

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix} \leq \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} I_N & -I_N \\ -I_N & I_N \end{bmatrix} + r(\beta) \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

para algún $\epsilon > 0$, $r(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces, si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ tenemos que

$$H(y,v,\epsilon^{-1}(x-y),Y) - H(x,v,\epsilon^{-1}(x-y)+s(\beta),X) \leq \omega(\beta) + \omega_R(|x-y| + \epsilon^{-1}|x-y|^2)$$

(F2) Existe $m > 1$ tal que, para todo $R > 0$ y todo $\mu \in (0,1)$ existen módulos de continuidad ω, ω_R tales que para todo $|x|$, $|y| \leq R$, $|v| \leq R$, X y Y que satisface (3.20) para algún $\epsilon > 0$, $r(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces, si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} &H(y,v,\epsilon^{-1}(x-y)+s(\beta),Y) - \mu H(x,\mu^{-1}v,\mu^{-1}\epsilon^{-1}(x-y),\mu^{-1}X) \\ &\leq \omega_R(|x-y|)(1+|p|^m) + \omega(\beta)|p|^{m-1} + C_R(1-\mu) + (\mu-1)|p|^m \end{aligned}$$

donde $p = \epsilon^{-1}(x-y)$

(F3) $H(x,u,p,X)$ es uniformemente continuo.

Adicionalmente utilizaremos los siguientes teoremas:

Lema 3.13. *Sea u una sub-solución de (3.18), entonces para cada $\eta > 0$, la función dada por*

$$\overline{u}(x,t) = u(x,t) - \eta t$$

es sub-solución de

$$u_t(x,t) + H(x,t,u,Du,D^2u) = -\eta$$

Demostración. Sea $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $\overline{u} - \phi$ alcanza un máximo local en un punto (x_0,t_0).

Notemos que $\phi + \eta t \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\overline{u} - \phi = u - \eta t - \phi$ alcanzan un máximo local en (x_0,t_0). Como u es sub-solución de (3.18) se tiene que

$$(\phi+\eta t)_t(x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D(\phi-\eta t)(x_0,t_0),D^2(\phi-\eta t)(x_0,t_0)) \leq 0$$

Notemos que, como $u \geq \overline{u}$ se tiene

$$H(x,t,u,p,X) - H(x,t,\overline{u},p,X) \geq \lambda_0(u-\overline{u}) \geq 0,$$

se sigue que

$$H(x,t,u,p,X) \geq H(x,t,\overline{u},p,X)$$

Por tanto,

$$\eta + \phi_t(x_0,t_0) + H(x_0,t_0,\overline{u}(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),D^2\phi(x_0,t_0)) \leq 0$$

□

Lema 3.14. *Sea u una sub-solución de (3.18), entonces para cada $\mu > 0$, la función dada por*

$$\overline{u}(x,t) = \mu u(x,t)$$

es sub-solución de

$$u_t(x,t) + \mu H(x,t,\mu^{-1}u,\mu^{-1}Du,\mu^{-1}D^2u) = 0$$

Demostración. Sea Sea $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $\mu u - \phi$ alcanza un máximo local en un punto (x_0, t_0), es decir, $\mu(u - \mu^{-1}\phi)$ alcanza un máximo local en un punto (x_0, t_0). Como $\mu > 0$ se sigue que $u - \mu^{-1}\phi$ alcanza un máximo en (x_0, t_0).

Como u es sub-solución de (3.18) y $\mu^{-1}\phi$ una función test, se sigue que

$$\mu^{-1}\phi_t(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u, \mu^{-1}D\phi, \mu^{-1}D^2\phi) \leq 0$$

Multiplicando a la expresión el valor μ y cambiando $u = \mu\mu^{-1}u = \mu^{-1}\overline{u}$, tenemos

$$\phi_t(x_0, t_0) + \mu H(x_0, t_0, \mu^{-1}\overline{u}, \mu^{-1}D\phi, \mu^{-1}D^2\phi) \leq 0$$

□

Lema 3.15. *Sea $\psi \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $||\psi||_{C^2(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda$. Para $\beta > 0$ definimos la función dada por*

$$\psi_\beta(x) = \psi(\beta x), \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

Entonces. ψ_β satisface las siguientes desigualdades

$$||D\phi_\beta||_\infty \leq \Lambda\beta, \qquad ||D^2\phi_\beta||_\infty \leq \Lambda\beta^2$$

Demostración. Usando la definición de $||D\phi_\beta||_\infty$, $||D^2\phi_\beta||_\infty$ se sigue el resultado. □

Teorema 3.16. *Supongamos que para (3.19) se verifica (H1), (H2), (F3) y (F1) o (F2).*

Sean $u : \overline{Q}_T :\longrightarrow \mathbb{R}$ una función SCS acotada que es sub-solución viscosa de (3.19) y $v : \overline{Q}_T :\longrightarrow \mathbb{R}$ una función SCI acotada que es súper-solución viscosa de (3.19), tales que $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, $u \leq v$ en $\overline{Q}_T$.

Demostración para el caso (F1). Desarrollaremos esta demostración utilizando un razonamiento por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}_T} \{u(x, t) - v(x, t)\} =: M > 0 \tag{3.21}$$

Ahora tomemos una función $\psi \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi = 0$ en la bola unitaria

B_1 y $\psi \geq \sup_{\overline{Q}_T}\{u-v\}$ en B_2^c. Además, definamos ψ_β como en el Lema 3.15 para $\beta > 0$.

Ahora, definamos la función $u_\eta : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ tal que $u_\eta(x,t) = u(x,t) - \eta t$. De (3.30) y la caracterización del supremo existe un punto (x_0,t_0) que verifica $(u-v)(x_0,t_0) > M/2$, así, tomando η suficientemente pequeño tenemos que

$$(u_\eta - v)(x_0,t_0) > \frac{M}{2}$$

Notemos que $u_\eta - v - \psi_\beta = u_\eta - v$ en $B_{1/\beta} \times [0,T]$ y como $M \leq \psi_\beta$ en $B_{2/\beta}^c$, se tiene que

$$u_\eta - v - \psi_\beta \leq u - v - M \leq 0$$

en $B_{2/\beta}^c \times [0,T]$. Si tomamos β suficientemente pequeño de tal manera que $(x_0,t_0) \in B_{1/\beta} \times [0,T]$, y como $u_\eta - v - \psi_\beta$ es SCS, existe $(x_1,t_1) \in \overline{B}_{2/\beta}$ tal que

$$(u_\eta - v - \psi_\beta)(x_1,t_1) = \sup_{\overline{B}_{2/\beta} \times [0,T]} \{u_\eta - v - \psi_\beta\} > \frac{M}{2}$$

Como $u(x,0) \leq v(x,0)$ tenemos que $t_1 > 0$. Adicionalmente, como la función $u_\eta - v - \psi_\beta$ es negativa en $B_{2/\beta}^c$, entonces necesariamente se alcanza el máximo en todo el dominio, así,

$$(u_\eta - v - \psi_\beta)(x_1,t_1) = \sup_{\overline{Q}_T}\{u_\eta - v - \psi_\beta\} =: \tilde{M} > \frac{M}{2} \tag{3.22}$$

A partir de este punto utilizamos la técnica de duplicación de variables, para lo cual, definimos la función Φ_ϵ como

$$\Phi_\epsilon(x,s,y,t) = u_\eta(x,s) - v(y,t) - \phi_\epsilon(x,s,y,t)$$

donde

$$\phi_\epsilon(x,s,y,t) = \epsilon^{-1}|x-y|^2 + \epsilon^{-1}(s-t)^2 + \psi_\beta(x)$$

Notemos que $\Phi_\epsilon(x_0,t_0,x_0,t_0) > 0$, y además, por las condiciones dadas a ψ se tiene que para $x \in B_{2/\beta}^c$ se tiene que

$$\Phi_\epsilon(x,s,y,t) \leq u(x,s) - v(y,t) - M \leq 0$$

Por otro lado, si tomamos un $R > 0$ suficientemente grande que verifique

$$\epsilon^{-1}|x-y|^2 \geq M, \qquad \forall (x,y) \in B_{2/\beta} \times B_R^c$$

Por tanto, en el conjunto $B_{2/\beta} \times B_R^c$ se verifica

$$\Phi_\epsilon(x,s,y,t) \leq u(x,s) - v(y,t) - M \leq 0$$

Como Φ_ϵ es SCS existe un punto $(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon)$ en $B_{2/\beta} \times [0,T] \times B_R \times [0,T]$, punto en el que se alcanza un máximo dentro de dicho conjunto. Además, como fuera del conjunto la función no es positiva, se trata de un supremo sobre todo el dominio, es decir,

$$\Phi_\epsilon(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon) = \sup_{\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T} \Phi_\epsilon =: \tilde{M}_\epsilon$$

Adicionalmente, como $\Phi_\epsilon(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon) \geq \Phi_\epsilon(x_1, t_1, x_1, t_1)$ se tiene que $\tilde{M} \leq \tilde{M}_\epsilon$.

Si tomamos $K > 0$ tal que $u, -v \leq K$ se tiene que

$$\tilde{M} \leq \tilde{M}_\epsilon \leq 2K - \epsilon^{-1}|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 - \epsilon^{-1}(s_\epsilon - t_\epsilon)^2$$

Por tanto,$\epsilon^{-1}|x_\epsilon - y_\epsilon|^2$ y $\epsilon^{-1}(s_\epsilon - t_\epsilon)^2$ están acotados, lo que nos ayuda a concluir que $|x_\epsilon - y_\epsilon|$ y $s_\epsilon - t_\epsilon$ convergen a 0 cuando $\epsilon \to 0$.

Notemos que $x_\epsilon \in B_{2/\beta}$ y $y_\epsilon \in B_R$, por tanto $(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon)$ esta acotado, y por tanto existe un valor de adherencia (x,s,y,t). Para este punto tomaremos una subsucesión convergente cuando $\epsilon \to 0$, denotada con índices ϵ.

Como $|x_\epsilon - y_\epsilon|$ y $s_\epsilon - t_\epsilon$ convergen a 0, tenemos que $x = y$ y $s = t$ de la siguiente forma

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} |x-y| \leq \lim_{\epsilon \to 0} |x - x_\epsilon| + |x_\epsilon - y_\epsilon| + |y_\epsilon - y| = 0$$

Notemos también que, como $u_\eta - v - \phi_\beta$ es SCS se sigue que

$$\limsup \tilde{M} \leq \limsup (u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - v(y_\epsilon, t_\epsilon) - \phi_\beta(x_\epsilon) \leq u_\eta(x,t) - v(x,t) - \phi_\beta(x)$$

de manera similar,

$$u_\eta(x,t) - v(x,t) - \phi_\beta(x) \leq \limsup \tilde{M} \leq \limsup(u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - v(y_\epsilon, t_\epsilon) - \phi_\beta(x_\epsilon))$$

Por tanto, tenemos que $\tilde{M}_\epsilon$ converge a $\tilde{M}$ y $u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - v(y_\epsilon, t_\epsilon) - \phi_\beta(x_\epsilon)$ converge a $u_\eta(x,t) - v(x,t) - \phi_\beta(x)$.

Además, todo valor de adherencia de $(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon)$ es (x_1, t_1, x_1, t_1), recordando que (x_1, t_1) es tal que $(u_\eta - v - \psi_\beta)(x_1, t_1) = \tilde{M}$

Utilizando desigualdad triangular inversa tenemos que

$$\epsilon^{-1}|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + \epsilon^{-1}(s_\epsilon - t_\epsilon)^2 - |(u_\eta - v - \phi_\beta)(x_\epsilon, t_\epsilon) - (u_\eta - v - \phi_\beta)(x,y)|$$

$$\leq |\tilde{M}_\epsilon - \tilde{M}|$$

Por tanto,

$$\epsilon^{-1}|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 + \epsilon^{-1}(s_\epsilon - t_\epsilon)^2$$

$$\leq |\tilde{M}_\epsilon - \tilde{M}| + |(u_\eta - v - \phi_\beta)(x_\epsilon, t_\epsilon) - (u_\eta - v - \phi_\beta)(x,y)|$$

tomando $\epsilon \to 0$ y aprovechando las convergencias antes demostradas tenemos

$$\epsilon^{-1}|x_\epsilon - y_\epsilon|^2,\ \epsilon^{-1}(s_\epsilon - t_\epsilon)^2 \to 0$$

Ahora, notemos que

$$D_{x,y}\Phi_\epsilon = \big(Du_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon) - \beta D\psi(\beta x), -Dv(y_\epsilon, t_\epsilon) + 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon)\big)$$

$$D^2_{x,y}\Phi_\epsilon = \begin{pmatrix} D^2u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) & 0 \\ 0 & -D^2v(y_\epsilon, t_\epsilon) \end{pmatrix} + 2\epsilon^{-1}\begin{pmatrix} -I - \beta^2 D^2\psi(\beta x) & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

Aprovechando estas igualdades y las convergencias antes probadas, gracias al Lema de las matrices de Ishii–Jensen, obtenido del Corolario 1 en [1], podemos asegurar que existe X, Y matrices simétricas que satisfacen (3.20), reemplazando ϵ^{-1} por $2\epsilon^{-1}$.

Recordemos que, por el Lema (3.13) u_η es sub-solución del problema

$$u_t(x,t) + H(x,t,u,Du,D^2u) = -\eta$$

Para aprovechar las propiedades de viscosidad de u_η tomemos la función test $\tau(x,s) = v(y_\epsilon, t_\epsilon) + \phi_\epsilon(x,s,y_\epsilon,t_\epsilon)$.

Notemos que $D\tau(x,s) = 2\epsilon^{-1}(x-y_\epsilon)+\beta D(\beta x)$ y $D^2\tau(x,s) = 2\epsilon^{-1}I+\beta^2 D^2(\beta x)$

Como Φ_ϵ tiene un máximo en el punto $(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon)$ entonces $u_\eta - \tau$ tienen un máximo en (x_ϵ, s_ϵ). Entonces,

$$2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + H(x_\epsilon, u_\eta, D\tau, D^2\tau) \leq -\eta$$

Utilizando (3.20) y la propiedad elíptica de H tenemos que

$$2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + H(x_\epsilon, u_\eta, 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon) + s(\beta), X) \leq -\eta \tag{3.23}$$

Análogamente, para v tomando la función test $\tau(y,t) = u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - \phi_\epsilon(x_\epsilon, s_\epsilon, y, t)$ tenemos que $v - \tau$ tiene un mínimo en (y_ϵ, t_ϵ) y se verifica

$$0 \leq 2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + H(y_\epsilon, v, 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon), Y) \tag{3.24}$$

Como $-\eta < 0$, juntando (3.23) y (3.24) tenemos

$$H(x_\epsilon, u_\eta, 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon) + s(\beta), X) - H(y_\epsilon, v, 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon), Y) \leq 0 \tag{3.25}$$

Por otro lado, notemos que

$$M_\epsilon \leq u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - v(y_\epsilon, t_\epsilon)$$

En este punto, utilizaremos $\overline{x}, \overline{y}, \overline{t}, \overline{s}$ para denotar $x_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon, s_\epsilon$ respectivamente. Como $u_\eta(\overline{x}, \overline{s}) \geq v(\overline{y}, \overline{t})$, gracias a **H2** y (3.25) tenemos

$$\begin{aligned}
&\lambda_0(u_\eta(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t})) \\
&\quad \leq H(\overline{x}, u_\eta(\overline{x},\overline{s}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + s(\beta), X) - H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + s(\beta), X) \\
&\quad = H(\overline{x}, u_\eta(\overline{x},\overline{s}) 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + s(\beta), X) - H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + s(\beta), X) \\
&\qquad + H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}), Y) - H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}), Y) \\
&\quad \leq H(\overline{x}, u_\eta(\overline{x},\overline{s}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + s(\beta), X) - H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}), 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}), Y) \\
&\qquad + \omega(\beta) + \omega_R(|\overline{x}-\overline{y}| + 2\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2) \\
&\quad \leq \omega(\beta) + \omega_R(|\overline{x}-\overline{y}| + 2\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2)
\end{aligned}$$

Así
$$\lambda_0 M_\epsilon \leq \omega(\beta) + \omega_R(|\overline{x}-\overline{y}| + 2\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2)$$
Como $M_\epsilon \to \tilde{M}$ y $|\overline{x}-\overline{y}| + 2\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2 \to 0$ cuando ϵ tiende a 0, tomando $\epsilon \to 0$ y $\beta \to 0$ tenemos que

$$\frac{\lambda_0}{2} M \leq \lambda_0 \tilde{M} \leq 0$$
Llegando a una contradicción, lo que nos permite concluir nuestro teorema. $\square$

Demostración para el caso (F2). Razonando nuevamente por el absurdo, supongamos se verifica (3.30). Adicionalmente, para $\mu \in (0,1)$ denotamos $\overline{u} = \mu u$ y podemos tomar μ suficientemente cercano a 1 tal que

$$\sup_{\overline{Q}_T}\{\overline{u} - v\} \leq \frac{2M}{3}$$

La demostración de este caso es análogo al anterior por lo que simplificaremos algunos detalles. Sin embargo, en esta parte aprovecharemos el Lema 3.14 que nos asegura que $\overline{u}$ es sub-solución de

$$u_t(x,t) + \mu H(x,t,\mu^{-1}u, \mu^{-1}Du, \mu^{-1}D^2u) = 0.$$

Utilizando β y η suficientemente pequeños tenemos que

$$(\overline{u}_\eta - v - \psi_\beta)(x_1,t_1) = \sup_{\overline{Q}_T}\{\overline{u}_\eta - v - \psi_\beta\} =: \tilde{M} > \frac{M}{2} \tag{3.26}$$

donde $\overline{u}_\eta$ es sub-solución de

$$u_t(x,t) + \mu H(x,t,\mu^{-1}u, \mu^{-1}Du, \mu^{-1}D^2u) = -\eta,$$

gracias al Lema 3.13.

Para la técnica de duplicación de variables definimos la función Φ_ϵ como
$$\Phi_\epsilon(x,s,y,t) = \overline{u}_\eta(x,s) - v(y,t) - \phi_\epsilon(x,s,y,t)$$
donde
$$\phi_\epsilon(x,s,y,t) = \epsilon^{-1}|x-y|^2 + \epsilon^{-1}(s-t)^2 + \psi_\beta(y).$$

Podemos notar que el cambio del valor a evaluar en ψ_β es intrascendente para obtener las convergencias esperadas, pero nos permite ubicar correctamente el valor $s(\beta)$ para utilizar la hipótesis **F2**.

Entre los resultados que se obtienen a partir de los detalles enunciados, destacamos la existencia de los puntos $(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon)$ que cumplen

$$\Phi_\epsilon(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon) = \sup_{\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T} \Phi_\epsilon =: \tilde{M}_\epsilon$$

Donde todo valor de adherencia de $(x_\epsilon, s_\epsilon, y_\epsilon, t_\epsilon)$ es (x_1, t_1, x_1, t_1), recordando que (x_1, t_1) es tal que $(u_\eta - v - \psi_\beta)(x_1, t_1) = \tilde{M}$. Además, podemos retomar las convergencias del caso anterior y utilizar el Lema de las matrices de Ishii–Jensen, obtenido del Corolario 1 en [1], que nos permite asegurar la existencia de X, Y matrices simétricas que satisfacen (3.20), reemplazando ϵ^{-1} por $2\epsilon^{-1}$.

Ahora, utilicemos las propiedades de viscosidad de $\overline{u}_\eta$ y v tenemos que para las funciones test $\tau_1(x, s) = v(y_\epsilon, t_\epsilon) + \phi_\epsilon(x, s, y_\epsilon, t_\epsilon)$ y $\tau_2(y, t) = u_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - \phi_\epsilon(x_\epsilon, s_\epsilon, y, t)$ respectivamente tal que

$$2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + \mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}\overline{u}_\eta, 2\epsilon^{-1}\mu^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon), \mu^{-1}D^2\tau_1) \leq -\eta$$

$$0 \leq 2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + H(y_\epsilon, v, 2\epsilon^{-1}D\tau_2, D^2\tau_2)$$

Utilizando (3.20) y la propiedad elíptica de H tenemos que

$$2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + \mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}\overline{u}_\eta, 2\epsilon^{-1}\mu^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon), \mu^{-1}X) \leq -\eta$$

$$0 \leq 2\epsilon^{-1}(s_t - t_\epsilon) + H(y_\epsilon, v, 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon) + s(\beta), Y)$$

Teniendo que

$$\mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}\overline{u}_\eta, \mu^{-1}p_\epsilon, \mu^{-1}X) \leq H(y_\epsilon, v, p_\epsilon + s(\beta), Y) \tag{3.27}$$

donde $p_\epsilon = 2\epsilon^{-1}(x_\epsilon - y_\epsilon)$.

Como $\overline{u}_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) \geq v(y_\epsilon, t_\epsilon)$, gracias a **H2** y (3.27) tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_0 M_\epsilon &\leq \lambda_0\mu(\mu^{-1}\overline{u}_\eta(x_\epsilon, s_\epsilon) - \mu^{-1}v(y_\epsilon, t_\epsilon)) \\ &\leq \mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}\overline{u}_\eta, \mu^{-1}p_\epsilon, \mu^{-1}X) - \mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}v_\eta, \mu^{-1}p_\epsilon, \mu^{-1}X)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}\overline{u}_\eta, \mu^{-1}p_\epsilon, \mu^{-1}X) - \mu H(x_\epsilon, \mu^{-1}v_\eta, \mu^{-1}p_\epsilon, \mu^{-1}X) \\
&\quad + H(y_\epsilon, v, p_\epsilon + s(\beta), Y) - H(y_\epsilon, v, p_\epsilon + s(\beta), Y) \\
&\leq \omega_R(|x_\epsilon - y_\epsilon|)(1 + |p_\epsilon|^m) + \omega(\beta)|p_\epsilon|^{m-1} + C_R(1-\mu) + (\mu - 1)|p_\epsilon|^m
\end{aligned}
$$

Para tomar los límites necesarios debemos estudiar el comportamiento de p_ϵ. Si (p_ϵ) es acotado entonces es suficiente tomar $\epsilon \to 0$, $\beta \to 0$ y $\mu \to 1$ para tener

$$\frac{\lambda_0}{2} M \leq 0$$

Por otro lado, si (p_ϵ) no es acotado

$$\lambda_0 M_\epsilon \leq \left[\omega_R(|x_\epsilon - y_\epsilon|) + \omega(\beta)|p_\epsilon|^{-1} + (\mu - 1)\right] |p_\epsilon|^m + C_R(1-\mu) + \omega_R(|x_\epsilon - y_\epsilon|)$$

Tenemos que $\omega_R(|x_\epsilon - y_\epsilon|) + \omega(\beta)|p_\epsilon|^{-1}$ converge a 0 cuando $\epsilon \to 0$ y $\beta \to 0$. Así, podemos tomar ϵ suficientemente pequeño tal que

$$\omega_R(|x_\epsilon - y_\epsilon|) + \omega(\beta)|p_\epsilon|^{-1} < 1 - \mu$$

Finalmente tenemos que

$$\lambda_0 M_\epsilon \leq C_R(1-\mu) + \omega_R(|x_\epsilon - y_\epsilon|)$$

y tomando $\epsilon \to 0$ y $\mu \to 1$ tenemos

$$\frac{\lambda_0}{2} M \leq 0$$

Llegando a una contradicción y concluyendo el teorema. □

Ahora, abordemos el caso en el que H depende directamente del tiempo, es decir,

$$u_t(x,t) + H(x, t, u(x,t), Du(x,t), D^2u(x,t)) = 0. \quad (x,t) \in Q_T \tag{3.28}$$

Para el cual, deberemos cambiar las hipótesis para abordar el teorema del Principio de Comparación.

(F1') Para todo $R > 0$ y $T > 0$ existen módulos de continuidad ω, $\omega_{R,T}$

tales que para todo $|x|$, $|y| \leq R$, $|v| \leq R$, $s, t \in [0, T]$, X y Y que que satisface

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix} \leq \gamma^{-1} \begin{bmatrix} I_N & -I_N \\ -I_N & I_N \end{bmatrix} + r(\beta) \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

para algún $\gamma > 0$, $r(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces, si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ tenemos que

$$H(y, t, v, p, Y) - H(x, s, v, p + s(\beta), X) \leq \omega(\beta) + \omega_{R,T}((1 + |p|)(|x - y| + |s - t|))$$

donde $p = \gamma^{-1}|x - y|$.

(F2') Existe $m > 1$ tal que, para todo $R > 0$ y $T > 0$ y todo $\mu \in (0, 1)$ existen módulos de continuidad ω, $\omega_{R,T}$ tales que para todo $|x|$, $|y| \leq R$, $|v| \leq R$, $s, t \in [0, T]$, X y Y que satisface (3.29) para algún $\epsilon > 0$, $r(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces, si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} & H(y, t, v, p + s(\beta), Y) - \mu H(x, s, \mu^{-1}v, \mu^{-1}p, \mu^{-1}X) \\ & \leq \omega_{R,T}(|x - y| + |s - t|)(1 + |p|^m) + \omega(\beta)|p|^{m-1} + C_R(1 - \mu) + (\mu - 1)|p|^m \end{aligned}$$

donde $p = \gamma^{-1}(x - y)$. Finalmente, el principio de comparación para este caso esta dado por el siguiente teorema

Teorema 3.17. *Supongamos que para (3.28) se verifica (H1), (H2), (F3) y (F1') o (F2').*

Sean $u : \overline{Q}_T :\longrightarrow \mathbb{R}$ una función SCS acotada que es sub-solución viscosa de (3.18) y $v : \overline{Q}_T :\longrightarrow \mathbb{R}$ una función SCI acotada que es súper-solución viscosa de (3.18), tales que $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, $u \leq v$ en $\overline{Q}_T$.

Demostración. Hemos de retomar la siguiente notación

$$H[x, t, u, \phi] = H(x, t, u(x, t), D\phi(x, t), D^2\phi(x, t))$$

Para (F1') supongamos por reducción al absurdo que

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q}_T} \{u(x, t) - v(x, t)\} =: M > 0 \tag{3.30}$$

Tomando la función ψ como en el teorema anterior, con β y η suficientemente pequeños podemos proceder análogamente a lo realizado previamente, teniendo

$$\sup_{\overline{Q}_T}\{u_\eta - v - \psi_\beta\} =: \tilde{M} > \frac{M}{2} \tag{3.31}$$

Ahora, al involucrar explícitamente al tiempo en el hamiltoniano H podemos aplicar la técnica de duplicación de variables utilizando

$$\Phi_{\gamma,\epsilon}(x,s,y,t) = \overline{u}_\eta(x,s) - v(y,t) - \gamma^{-1}|x-y|^2 - \epsilon^{-1}(s-t)^2 - \psi_\beta(x)$$

Continuando con los detalles desarrollados previamente, podemos asegurar la existencia de puntos $(\overline{x},\overline{s},\overline{y},\overline{t})$ que dependerán de γ y ϵ y además,

$$= \Phi_{\gamma,\epsilon}(\overline{x},\overline{s},\overline{y},\overline{t}) = \sup_{\overline{Q}_T\times\overline{Q}_T} \Phi_{\gamma,\epsilon} =: \tilde{M}_{\gamma,\epsilon} \geq \tilde{M}.$$

Podemos decir que existe $K > 0$ que depende de u, v, ψ tal que

$$\gamma^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2 \leq K \quad \text{y} \quad \epsilon^{-1}(s-t)^2 \leq K$$

Y esto nos permite obtener, por medio de una subsucesión, la existencia de un punto $(x^*,t^*) \in \overline{Q}_T$ tal que $\overline{t},\overline{s} \to t^*$ y $\overline{x},\overline{y} \to x^*$ cuando $\gamma,\epsilon \to 0$, además,

$$\lim_{\gamma,\epsilon\to 0}\gamma^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\gamma,\epsilon\to 0}\epsilon^{-1}(s-t)^2 = 0$$

tal que $\overline{s},\overline{t} > 0$ para γ y ϵ suficientemente pequeños, ordenados como $\epsilon < \gamma$

Con estas convergencias y utilizando el Lema de las matrices de Ishii–Jensen, obtenido del Corolario 1 en [1], podemos asegurar que existe X, Y matrices simétricas que satisfacen (3.29), reemplazando γ^{-1} por $2\gamma^{-1}$.

Ahora, utilicemos las propiedades de viscosidad de $\overline{u}_\eta$ y v tenemos que para las funciones test

$$\tau_1(x,s) = v(\overline{y},\overline{t}) + \gamma^{-1}|x-\overline{y}|^2 + \epsilon^{-1}(s-\overline{t})^2 + \psi_\beta(x)$$

$$\tau_2(y,t) = u_\eta(|\overline{x},\overline{s}) - \gamma^{-1}|\overline{x}-y|^2 - \epsilon^{-1}(\overline{s}-t)^2 - \psi_\beta(\overline{x})$$

respectivamente tal que

$$2\epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t})+H[\overline{x},\overline{s},u_\eta,\tau_1]\leq -\eta$$

$$2\epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t})+H[\overline{y},\overline{t},v,\tau_2]\geq 0$$

Aprovechando (3.29) y las condiciones elípticas de H tenemos que

$$H(\overline{x},\overline{s},u_\eta,\overline{p}+s(\beta),X)-H(\overline{y},\overline{t},\overline{p},Y)\leq 0$$

Como $u_\eta(\overline{x},\overline{s})\geq v(\overline{y},\overline{t})$, gracias a **H2** tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_0 M_{\gamma,\epsilon}\leq \lambda_0(u_\eta(\overline{x},\overline{s})-v(\overline{y},\overline{t}))\\
&\leq H(\overline{x},\overline{s},u_\eta(\overline{x},\overline{s}),\overline{p}+s(\beta),X)-H(\overline{y},v(\overline{y},\overline{t}),2\overline{p}+s(\beta),X)\\
&= H(\overline{x},\overline{s},u_\eta(\overline{x},\overline{s}),\overline{p}+s(\beta),X)-H(\overline{y},v(\overline{y},\overline{t}),2\overline{p}+s(\beta),X)\\
&\qquad +H(\overline{y},\overline{t},v(\overline{y},\overline{t}),\overline{p},Y)-H(\overline{y},\overline{t},v(\overline{y},\overline{t}),\overline{p},Y)\\
&\leq \omega(\beta)+\omega_{R,T}((1+|\overline{p}|)(|\overline{x}-\overline{y}|+|\overline{s}-\overline{t}|))\end{aligned}$$

Notemos que

$$(1+|\overline{p}|)(|\overline{x}-\overline{y}|+|\overline{s}-\overline{t}|)=|\overline{x}-\overline{y}|+|\overline{s}-\overline{t}|+2\gamma^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2+2\gamma^{-1}|\overline{x}-\overline{y}||\overline{s}-\overline{t}|$$

Si tomamos $\epsilon\ll\gamma$ este termino converge a 0 cuando $\gamma\to 0$. Así, tomando $\gamma\to 0$ y $\beta\to 0$ tenemos

$$\frac{\lambda_0}{2}M\leq 0.$$

Para la condición (F2') notemos que el único termino que involucra a $\overline{s},\overline{t}$ es $\omega_{R,T}(|\overline{x}-\overline{y}|+|\overline{s}-\overline{t}|)$ que fácilmente converge a cero cuando tenemos $\epsilon<\gamma\to 0$, por lo que la demostración es muy similar al del teorema anterior agregando los nuevos detalles incluidos para este teorema. □

3.4. Existencia y Unicidad de la solución

Adicionamos una hipótesis que nos permita acotar a H y esta dada por:

(F4) Para todo $R > 0$ existe una constante $C_H(R) > 0$ tal que

$$|H(x, u, p, X)| \leq C_H(R)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y todo $|u|$, $|p|\,|X| \leq R$.

Teorema 3.18. *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 3.16 y (F4), además, $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ es acotada. Entonces existe una única solución viscosa y continua para el problema de Cauchy que verifica (3.19) con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.*

Además,

$$|u(x,t)| \leq ||H(\cdot, 0, 0, 0, 0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} t + ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \qquad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T$$

Demostración. Supongamos que $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ con $||u_0||_{C^2(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda$ con $\Lambda > 0$.

Para $C > 0$ definamos $\psi^+(x,t) = u_0(x) + Ct$. Notemos que $\phi^+ \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\psi^+(x, 0) = u_0(x)$ para $x \in \mathbb{R}^N$ y además, las derivadas con respecto a x coinciden para ψ^+ y u_0. Dado que las derivadas hasta el segundo orden de u están acotadas por Λ y t esta acotado por T, por (F4) se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_t^+(x,t) &+ H(x, \psi^+(x,t), D\psi^+(x,t), D^2\psi^+(x,t)) \\
&= C + H(x, \psi^+(x,t), Du_0(x,t), D^2u_0(x,t)) \\
&\geq C - C_H(\Lambda, T),
\end{aligned}$$

para todo $(x, t) \in Q_T$. Si C es suficientemente grande entonces ψ^+ es súper-solución de (3.19). Ahora, tomando $\psi^-(x,t) = u_0(x) - Ct$ tenemos que

$$\psi_t^-(x,t) + H(x, \psi^-(x,t), D\psi^-(x,t), D^2\psi^-(x,t)) \leq -C + C_H$$

Teniendo que ψ^- es sub-solución de (3.19). Como $\psi^- \leq \psi^+$ en $\overline{Q}_T$ entonces existe $u : \overline{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ solución viscosa discontinua.

Ahora, como $\psi^- \leq u \leq \psi^+$,notemos que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$u_0(x) = \psi^-(x, 0) \leq u_*(x, 0) \leq u^*(x, 0) \leq \psi^+(x,t) = u_0(x)$$

Por tanto $u_*(x, 0) = u^*(x, 0)$, y dado que u_* y u^* son sup y súper-soluciones respectivamente, por el Teorema de Perron tenemos que $u^* \leq u_*$ en $\overline{Q}_T$.

Recordemos que siempre se verifica $u^* \geq u_*$, lo que implica que $u^* = u_*$. Así, u es una solución viscosa continua.

Para el caso en el que u_0 no tiene derivadas de segundo orden continuas, tomemos una sucesión (u_0^ϵ) en $C^2(\mathbb{R}^N)$ acotadas, tal que $||u_0^\epsilon - u_0|| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Como en el caso previo, podemos construir super-soluciones viscosas $\psi_\epsilon^+(x,t) = u_0^\epsilon(x) + \epsilon + C_\epsilon t$ y sub-soluciones $\psi_\epsilon^-(x,t) = u_0^\epsilon(x) - \epsilon - C_\epsilon t$.

Definamos

$$\psi^+(x,t) = \inf_{\epsilon>0} \psi_\epsilon^+(x,t), \qquad \psi^-(x,t) = \sup_{\epsilon>0} \psi_\epsilon^-(x,t)$$

Utilizando el Lema 3.11, tenemos que $\psi^+(x,t)$ y $\psi^-(x,t)$ son super y sub-soluciones respectivamente, tales que $\psi^-(x,0) \leq \psi^+(x,t)$, siguiendo los resultado previos, con el Teorema de Perron podemos encontrar una solución discontinua u y con el Principio de Comparación podemos recuperar la continuidad.

Para demostrar la unicidad supongamos v es otra solución del problema, al cumplir la misma condición inicial tenemos que $u(x,0) = v(x,0)$ para todo $x \in \overline{Q}_T$. Como u y v son soluciones viscosas entonces son a la vez sup y súper-soluciones del problema. Aplicando el Teorema de Perron tenemos que $u \leq v$ y $v \leq u$, es decir, $u = v$ en $\overline{Q}_T$.

Finalmente, tomemos $\psi^+(x,t) = Ct + ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ con $C = ||H(\cdot,0,0,0,0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Gracias a (H2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi_t^+(x,t) + H(x,\psi^+(x,t), D\psi^+(x,t), D^2\psi^+(x,t)) &= C + H(x,\psi^+(x,t),0,0) \\
&\geq H(x,\psi^+(x,t),0,0) - H(x,0,0,0) \\
&\geq \lambda_0(Ct + ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \geq 0
\end{aligned}$$

Esto muestra que ψ_t^+ es súper-solución, y como $u(x,0) \leq \psi_t^+(x,0)$, por el Principio de Comparación se tiene que

$$u(x,t) \leq ||H(\cdot,0,0,0,0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} t + ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

A partir de $\psi^{-}(x,t) = -Ct - ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, de forma análoga tenemos que

$$u(x,t) \geq -||H(\cdot,0,0,0,0)||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}t - ||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

Teniendo la acotación que esperabamos para u. $\square$

3.5. Conclusiones y recomendaciones

El cumplimiento de lo propuesto en los objetivos se evidencia en las demostraciones de los teoremas principales, realizadas a lo largo del capítulo de Resultados.

- Se ha descrito la formulación viscosa para problemas parabólicos no lineales de segundo orden, el primer resultado destacable se encuentra en el Teorema 3.10, el teorema de estabilidad, el cual nos ayuda a encontrar soluciones viscosas a partir de la convergencia de una sucesión de soluciones. Esto en la práctica puede ser utilizado para un análisis numérico para encontrar soluciones a problemas con ecuaciones en derivadas parciales.

- Se demostró el Teorema de Perron en el Teorema 3.2.3. Este resultado sirve como herramienta para determinar la existencia de soluciones discontinuas, y aún más, se ha utilizado junto con el Principio de Comparación para determinar la existencia y unicidad de la solución. El inconveniente que se ha de cubrir en este teorema, es la necesidad de tener como hipótesis la comparación entre sub y súper-soluciones.

- Se ha desarrollado el Principio de comparación en los Teoremas 3.16 y 3.17 aprovechando las condiciones detalladas en [10, 9]. Este teorema complementa al Teorema de Perron permitiendo encontrar la comparación necesaria de ese teorema, sin embargo, a este se le añade el cumplimiento de las hipótesis (H1), (H2), (F1), (F2) y (F3) que se han de verificar dependiendo del comportamiento que tenga H. El conflicto que deja este teorema es que parte de una comparación sobre $\mathbb{R}^N \times \{0\}$.

- Para finalizar, aprovechando una cuarta condición donde se acota localmente a H, se ha mostrado la unicidad y continuidad de las soluciones. En el Teorema 3.18, se muestra un resultado final que aprovecha del Método de Perron y del Principio de Comparación para su demostración. Con respecto al conflicto presentado en el Principio de Comparación, fácilmente fue cubierto con detalles presentes en la condición inicial u_0.

Como recomendación, para futuros trabajos se puede evidenciar que en los Teoremas 3.16, 3.17 y 3.18 se abordo únicamente valores de en $[0, T]$. Por lo cual, un estudio de estos resultados a largo plazo donde $T \to +\infty$ podría mostrar interés.

Pese a que este proyecto desarrolla tres componentes distintas, donde se trabajan operadores no locales y en este caso, ecuaciones de segundo orden, sería interesante mostrar resultados donde estas características lleguen a combinarse. Como referencia se tiene [9] donde se trabaja la existencia de soluciones para ecuaciones con componentes integro-diferenciables y derivadas de Caputo en la variable t.

Referencias bibliográficas

[1] Guy Barles and Cyril Imbert. Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 25, pages 567–585, 2008.

[2] Pierre Cardaliaguet. Solutions de viscosité d'équations elliptiques et paraboliques non linéaires. 2004.

[3] Michael G Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1):1–67, 1992.

[4] Michael G Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1):1–42, 1983.

[5] Hitoshi Ishii. Perron's method for hamilton-jacobi equations. *Duke Mathematical Journal*, 55(2):369–384, 1987.

[6] Robert Jensen. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 101(1):1–27, 1988.

[7] Beatriz Lafferriere, Gerardo Lafferriere, and Nguyen Mau Nam. Introduction to mathematical analysis i. 2016.

[8] E.J. McShane. *Integration*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, 1944.

[9] Erwin Topp and Miguel Yangari. Existence and uniqueness for parabolic problems with caputo time derivative. *Journal of Differential Equations*, 262(12):6018–6046, 2017.

[10] Erwin Topp and Miguel Yangari. Weakly coupled systems of parabolic hamilton–jacobi equations with caputo time derivative. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 25(5):1–24, 2018.