ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCIONES VISCOSAS ECUACIÓN PARABÓLICA NO LINEAL

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

KEVIN STEVEN GUERRERO ARIAS

kevin.guerrero@epn.edu.ec

DIRECTOR: MIGUEL ANGEL YANGARI SOSA

miguel.yangari@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, KEVIN STEVEN GUERRERO ARIAS, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Kevin Steven Guerrero Arias

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Kevin Steven Guerrero Arias, bajo mi supervisión.

Miguel Angel Yangari Sosa

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Kevin Steven Guerrero Arias

Miguel Angel Yangari Sosa

RESUMEN

Como base principal para nuestro documento usamos [5] y [12]. Presentamos un problema parabólico, en el cual interviene un operador no local llamado derivada fraccionaria de Caputo. Damos un contexto previo para las definiciones que son usuales en este tema. Conceptualizamos las definiciones de soluciones viscosas. Presentamos y probamos resultados necesarios para facilitar la demostración de un teorema que asegura existencia de soluciones discontinuas y otro que nos ayudara con la unicidad y continuidad. Respectivamente los teoremas se los llama método de Perron y principio de comparación, finalmente gracias a lo anterior obtenemos un resultado que nos asegura existencia y unicidad de soluciones para el problema planteado.

Palabras clave: problema parabólico, operador no local, derivada fraccionaria de Caputo, soluciones viscosas, método de Perron, principio de comparación.

ABSTRACT

As the main basis for our document we use [5] and [12].We present a parabolic problem, in which a non-local operator called Caputo's fractional derivative is involved. We give a previous context for the definitions that are usual in this subject. We conceptualize the definitions of viscous solutions. We present and prove results required to facilitate the proof of a theorem that assures existence of discontinuous solutions and another that will help us with uniqueness and continuity. The theorems are called Perron's method and comparison principle respectively, and finally thanks to the previous we obtain a result that assures existence and uniqueness of solutions for our problem.

Keywords: parabolic problem, nonlocal operator, Caputo fractional derivative, viscous solutions, Perron's method, comparison principle.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

En el presente trabajo usaremos la teoría de soluciones viscosas para estudiar el problema parabólico

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u(x,t) + H(x,t,u(x,t),Du(x,t)) = 0, \quad \forall (x,t) \in Q \\ u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $Q := \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$, u_0 es una función continua y acotada, ∂_t^α representa la derivada fraccionaria de Caputo, Du es el gradiente de u respecto a x y H es una función continua sobre todas sus variables y no decreciente respecto a u, llamada *Hamiltoniano*.

En primera instancia omitiremos las condiciones iniciales y estudiaremos el problema

$$\partial_t^\alpha u(x,t) + H(x,t,u(x,t),Du(x,t)) = 0, \qquad \forall (x,t) \in Q. \tag{1.2}$$

En el capitulo de metodología, presentaremos la definición y resultados que nos serán de utilidad acerca de la derivada fraccionaria de Caputo.

1.1. Objetivo General

Demostrar con detalle la existencia y unicidad de soluciones viscosas discontinuas para el problema (1.1).

1.2. Objetivos específicos

1. Definiremos las soluciones viscosas para el problema (1.2) .
2. Demostraremos el método de Perron asociado a (1.2).
3. Demostraremos el principio de comparación para (1.2).
4. En base a método de Perron y el principio de comparación probaremos existencia y unicidad de soluciones para (1.1).

1.3. Alcance

Entender y desarrollar de forma detallada las demostraciones de la teoría de soluciones viscosas, concernientes al problema (1.1), nos enfocaremos en resultados que nos serán de utilidad para cumplir los objetivos planteados del presente trabajo. Usaremos como referencia principal [5] y [12].

1.4. Marco teórico

En esta sección expondremos de manera breve las definiciones y resultados principales, que nos ayudaran al desarrollo de nuestro trabajo.

Funciones semi-continuas superior e inferior

Una herramienta primordial al definir las soluciones viscosas, son las funciones semi-continuas superior e inferior. Para introducir las definiciones y algunos resultados de estas, usaremos como referencia [9].

Consideraremos el conjunto de los reales extendido $\overline{\mathbb{R}}$, es decir infinito positivo e infinito negativo, son valores admisibles. Además debemos tener en cuenta la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. *Sea $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos las funciones,*

$$m_f(x) := \lim_{r\to 0^+} \inf\{f(t) : t \in (x-r, x+r) \cap [a,b]\};$$
$$M_f(x) := \lim_{r\to 0^+} \sup\{f(t) : t \in (x-r, x+r) \cap [a,b]\}.$$

Para cada $x \in [a,b]$, claramente $m_f(x) \leq f(x) \leq M_f(x)$.

En base a las consideraciones anteriores, tenemos las siguientes definiciones para las funciones semi-continuas superior e inferior.

DEFINICIÓN 1.2. *Sean $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ y $c \in [a,b]$. Decimos que f es semi-continua inferior en c si $f(c) = m_f(c)$, en cambio f es semi-continua superior en c si $f(c) = M_f(c)$. La función f es semi-continua superior (inferior) en $[a,b]$ si f es semi-continua superior (inferior) en cada punto de $[a,b]$.*

TEOREMA 1.1. *Sean $f, g : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, $c \in [a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$.*

1. *Si f es semi-continua inferior (superior) en c y $k > 0$, entonces la función kf es semi-continua inferior (superior) en c.*
2. *Si f es semi-continua inferior (superior) en c y $k < 0$, entonces la función kf es semi-continua superior (inferior) en c.*
3. *Supongamos que $f+g$ esta definida en c. Si f y g son semi-continuas inferior (superior) en c, entonces $f+g$ son semi-continuas inferior (superior) en c.*

TEOREMA 1.2. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas sobre $[a,b]$ tal que converge puntualmente a f en $[a,b]$.*

1. *Si la sucesión $\{f_n\}$ es no decreciente y cada f_n es semi-continua inferior en $[a,b]$, entonces f es semi-continua inferior en $[a,b]$.*
2. *Si la sucesión $\{f_n\}$ es no creciente y cada f_n es semi-continua superior en $[a,b]$, entonces f es semi-continua superior en $[a,b]$.*

En nuestro trabajo usaremos la abreviatura (SCS) para semi-continua superior y (SCI) para semi-continua inferior. El conjunto de funciones SCS, sobre algún Ω, lo representaremos por $SCS(\Omega)$, de forma similar el conjunto de funciones SCI, sobre algún Ω, lo representaremos por $SCI(\Omega)$.

Envolvente semi-continua

Como en [3], [10] y [12] definiremos, las envolventes semi-continua superior e inferior, de la siguiente forma. Podemos añadir que la definición siguiente juega un papel crucial en método de Perron.

Definición 1.3. *Sea $u : \overline{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos la envolvente semi-continua superior (SCS) de u, denotada por u^* como*

$$u^*(x,t) = \limsup_{(x',t')\to(x,t)} u(x',t'), \tag{1.3}$$

de manera similar la envolvente semi-continua inferior (SCI) de u, denotada por u_* como

$$u_*(x,t) = \liminf_{(x',t')\to(x,t)} u(x',t'). \tag{1.4}$$

Sup e inf-convoluciones

Para introducir las definiciones de sup e inf-convoluciones, podemos considerar como referencia [14], [5] y [12]. En particular usaremos [12] ya que su definición y resultados se adaptan a nuestro trabajo.

Podemos destacar, que las sup e inf-convoluciones son usadas para la regularización de soluciones viscosas y estas aproximaciones fueron utilizadas por primera vez por Jensen en [11].

Definición 1.4. *Consideremos $\gamma > 0$ y $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ una función acotada, definimos la sup-convolución de g con parámetro $\gamma > 0$ como*

$$g^\gamma(t) = \sup_{s\in[0,T]} \left\{ g(s) - \frac{(s-t)^2}{\gamma} \right\}, \quad t \in [0,T].$$

Propiedades:

- Notemos que $g^\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}$ es acotada y satisface que

$$g(t) \le g^\gamma(t) \le \|g\|_\infty \quad \forall t \in [0,T].$$

- g^γ es Lipschitz continua, con la estimación

$$|g^\gamma(t) - g^\gamma(s)| \leq 2T\gamma^{-1}|t-s|. \tag{1.5}$$

- Si suponemos que g es SCS en $[0,T]$, para cada t existe $t_\gamma \in [0,T]$ tal que

$$g^\gamma(t) = g(t\gamma) - \gamma^{-1}(t\gamma - t)^2.$$

- Además, usando la desigualdad $g(t) \leq g^\gamma(t)$ obtenemos

$$|t - t_\gamma| \leq (2\|g\|_\infty \gamma)^{1/2} \tag{1.6}$$

  y por lo tanto $t_\gamma \to t$ cuando $\gamma \to 0$, lo que implica que $g^\gamma \to g$ uniformemente en $[0,T]$ cuando g es SCS.

También podemos definir la inf-convolución de la función g, como

$$g_\gamma(t) := -(-g)^\gamma(t) \quad \text{para } t \in [0,T],$$

la cual tiene propiedades similares a la de la sup-convolución.

Definiciones soluciones viscosas

Aquí presentaremos las definiciones de soluciones viscosas que hemos tomado como base para nuestro planteamiento. Las definiciones y resultados presentados en esta sección han sido tomados de [5]. Cabe recalcar que la noción de soluciones viscosas fue introducida por Candall & Lions en [7].

En primer lugar se presentara el caso elíptico general, es decir, ecuaciones de la forma

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{1.7}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \to \mathbb{R}$. Asumiremos que H es “elíptica", es decir, H es decreciente con respecto a la ultima variable:

$$H(x, s, p, X) \geq H(x, s, p, Y) \text{ si } X \leq Y \tag{1.8}$$

para cada $(x, s, p, X, Y) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \times S_n$ (donde la desigualdad $X \leq Y$ es dada en el sentido de las matrices simétricas).

Definición 1.5. *Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una sub-solución viscosa de (1.7) si u es semi-continua superiormente (SCS) en Ω y si, para cada función test $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u-\phi$ tiene un máximo local en el punto $x_0 \in \Omega$, tenemos que*

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0.$$

De manera similar, decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una super-solución viscosa de (1.7) si u es semi-continua interiormente (SCI) en Ω y si, para cada función test $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ tiene un mínimo local en el punto $x_0 \in \Omega$, tenemos que

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0.$$

Finalmente, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución viscosa de (1.7) si u es una sub y super-solución de (1.7).

Consideraremos un problema parabólico, de la siguiente forma,

$$u_t(x,t) + H(x, t, u(x,t), Du(x,t), D^2u(x,t)) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega \times]0, T[. \tag{1.9}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $H : \Omega \times]0, T[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S_n \to \mathbb{R}$. Asumiremos que H es elíptico, es decir decreciente respecto a su última variable.

Definición 1.6. *Decimos que una función $u :]0, T[\times \Omega \to \mathbb{R}$ es una sub-solución viscosa de (1.9) si u es SCS en $]0, T[\times \Omega$ y si, para cada función test $\phi \in C^2(]0, T[)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en un punto $(t_0, x_0) \in]0, T[\times \Omega$, tenemos*

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, u(t_0.x_0), D\phi(t_0, x_0), D^2\phi(t_0, x_0)) \leq 0$$

De manera similar, decimos que una función $u :]0, T[\times \Omega \to \mathbb{R}$ es una super-solución viscosa de (1.9) si u es SCI en $]0, T[\times \Omega$ y si, para cada función test $\phi \in C^2(]0, T[\times \Omega)$ tal que $u - \phi$ tiene un mínimo local en el *punto* $(t_0, x_0) \in]0, T[\times\Omega$*, tenemos*

$$\phi_t(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0), D^2\phi(t_0, x_0)) \geq 0.$$

Finalmente, $u :]0, T[\times\Omega \to \mathbb{R}$ *es una solución viscosa de (1.9) si* u *es una sub-solución y sup-solución de (1.9).*

Capítulo 2

Metodología

El método que usaremos es el inductivo-deductivo. En primer lugar plantearemos cierta notación, hay que tener en cuenta que esta notación es usual en la teoría de soluciones viscosas, así podemos hacer referencia a [12]. Esta notación nos servirá en la obtención de resultados.

Notación

Para las nociones sobre el espacio donde trabajaremos, podemos considerar:

- $B_r(x)$ la bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ (Cuando $x = 0$ escribiremos B_r y si además $r = 1$ tendremos B);
- Llamaremos çilindro.ª,

$$\mathcal{C}_\delta(x,t) = B_\delta(x) \times B_\delta(t) = B_\delta(x) \times (t-\delta, t+\delta).$$

  Notaremos $C_{\delta,\delta'}(x,t) = B_\delta(x) \times B_{\delta'}(t)$.

- Para la representación del horizonte finito tenemos $Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T]$ para $T > 0$.
- Para dar una notación a la derivada fraccionaria de Caputo, recordemos la definición usual dada en [1].

Consideremos $\alpha \in (0,1)$, llamaremos a α el orden de la derivada fraccionaria de Caputo.

Consideremos una función $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ al menos C^1, definimos la derivada fraccionaria de Caputo como,

$$ {}_a^cD_t^\alpha u(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, $$

donde Γ representa la función Gamma. Como observación, podemos añadir que la representación anterior es la de mayor uso. Al igual que en [1], omitiremos el super-índice c el cual es para hacer referencia a la derivada de Caputo. Un resultado que debemos tener en cuenta es el siguiente, que se obtiene a partir de derivación por partes,

$$ \Gamma(1-\alpha)_a D_t^\alpha u(t) = \frac{u(t)-u(a)}{(t-a)^\alpha} + \alpha \int_a^t \frac{u(t)-u(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds. \qquad (2.1) $$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos presentar nuestra notación para este trabajo, así tenemos que,

$$ \partial^\alpha u(t) = \partial_t^\alpha u(t) = {}_0D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. $$

Omitiremos el sub-índice t. Además, gracias a la representación (2.1), tenemos que

$$ \partial^\alpha u(t) = c_\alpha \left(\frac{u(t)-u(0)}{\alpha} + \int_0^t \frac{u(t)-u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \right), $$

donde $c_\alpha = \alpha(\Gamma(1-\alpha))^{-1}$. Luego, extendiendo u como $u(t) = u(0)$ para $t \leq 0$, la expresión anterior toma la forma,

$$ \partial^\alpha u(t) = c_\alpha \int_{-\infty}^t \frac{u(t)-u(\tau)}{|t-\tau|^{\alpha+1}} d\tau. \qquad (2.2) $$

Además, dados $a \leq b$, tenemos,

$$ \partial^\alpha [a,b](u,t) = c_\alpha \int_a^b \frac{u(t)-u(\tau)}{|t-\tau|^{\alpha+1}} d\tau. $$

Consideremos $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$, tenemos,

$$\partial_\delta^\alpha(u,\phi,x,t) := \partial^\alpha[t-\delta](u(x,\cdot),t) + \partial^\alpha[t-\delta,t](\phi(x,\cdot),t). \tag{2.3}$$

A lo largo de nuestro trabajo, usaremos (2.2) y (2.3). La constante c_α será omitida ya que la misma no afecta el análisis y los cálculos.

A continuación, estudiaremos bajo que condiciones la derivada fraccionaria de Caputo esta bien definida.

Tomando en cuenta (1.2), estudiemos cuando la derivada fraccionaria de Caputo esta bien definida, para ello supongamos que u es acotada, C^1 (es natural pedir que la función sea C^1 ya que en la definición usual de la derivada fraccionaria de Caputo interviene una primera derivada) y además para solventar la singularidad que se presenta cerca de t consideremos $\delta > 0$ y así podemos escribir,

$$\begin{aligned}\partial_\delta^\alpha u(t) &= \int_{-\infty}^{t-\delta} \frac{u(t)-u(\tau)}{|t-\tau|^{1+\alpha}} d\tau + \int_{t-\delta}^{t} \frac{u(t)-u(\tau)}{|t-\tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Para I_1, trabajaremos directamente con la hipótesis de que u es acotada, así tenemos

$$|I_1| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{t-\delta} \frac{1}{|t-\tau|^{1+\alpha}} d\tau,$$

para la integrar el lado derecho basta hacer el cambio de variable $w = t-\tau$, con lo que tenemos,

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\delta}^{\infty} w^{-1-\alpha} dw, \\ &= 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left. \frac{w^{-\alpha}}{-\alpha} \right|_{\delta}^{\infty}, \\ &= 2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{\delta^{-\alpha}}{\alpha}.\end{aligned}$$

Así, hemos obtenido que I_1 es finita.

Para I_2, usaremos la hipótesis de que u es C^1 con esto tenemos que es localmente Lipschitz, entonces existe $L > 0$ constante tal que,

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_{t-\delta}^{t} \frac{|u(t)-u(\tau)|}{|t-\tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\
&\leq L \int_{t-\delta}^{t} \frac{|t-\tau|}{|t-\tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\
&= L \int_{t-\delta}^{t} \frac{1}{|t-\tau|^{\alpha}} d\tau,
\end{aligned}$$

haciendo el mismo cambio de variable que consideramos antes obtenemos,

$$|I_2| \leq L \int_{0}^{\delta} w^{-\alpha} dw = L \left. \frac{w^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{0}^{\delta}.$$

Finalmente como $-\alpha + 1 > 0$ obtenemos que,

$$|I_2| \leq L \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

por tanto I_2, también es finita. Por el análisis anterior podemos concluir que bajo las condiciones que u sea acotada y C^1, la derivada fraccionaria de Caputo esta bien definida.

Ahora, procederemos a hacer una formulación viscosa para (1.2), es decir, adaptaremos la definición 1.6 a nuestro problema. Además presentaremos resultados en base a nuestra formulación, estos han sido adaptados de [5] y [12].

Formulación viscosa

Definición 2.1. *Decimos que una función $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ SCS y acotada es una sub-solución viscosa de (1.2) en un punto $(x_0, t_0) \in Q_T$, si para cada función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\delta > 0$ tal que (x_0, t_0) es un máximo para $u - \phi$ en $\mathcal{C}_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$ tenemos que*

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \leq 0. \tag{2.4}$$

De manera similar, decimos que una función $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ SCI y acotada es una super-solución viscosa de (1.2) en un punto $(x_0, t_0) \in Q_T$, si para *cada función test* $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ *tal que* (x_0, t_0) *es un mínimo para* $u - \phi$ *en* $\mathcal{C}_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$ *tenemos que*

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \geq 0.$$

Finalmente, $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ *es una solución viscosa de (1.2) si* u *es una sub-solución y super-solución de (1.2).*

Observaciones.

- Dado que en nuestro problema (1.2) no interviene la hessiana, no necesitamos considerar la condición (1.8).
- Como este trabajo, está dirigida a soluciones viscosas, en ciertas partes omitiremos la palabra “ viscosas ”, de ser necesario haremos las aclaraciones correspondientes.

Dada la definición anterior en la parte de resultados, probaremos que una solución clásica para nuestro problema es una solución viscosa.

El siguiente lema que nos ayudara a presentar una formulación alternativa de la definición 2.1.

Lema 2.1. *Sea* $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ *y* $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$*. Si* (x_0, t_0) *es un máximo para* $u - \phi$ *en* $C_\delta(x_0, t_0)$*, entonces para todo* $0 < \sigma \leq \delta$*, tenemos que*

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) \leq \partial_\sigma^\alpha(u, \phi, x_0, t_0). \tag{2.5}$$

De forma similar (x_0, t_0) *es un mínimo para* $u - \phi$ *en* $C_\delta(x_0, t_0)$*, entonces para todo* $0 < \sigma \leq \delta$*, tenemos que*

$$\partial_{\delta_2}^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) \geq \partial_{\sigma_2}^\alpha(u, \phi, x_0, t_0). \tag{2.6}$$

Demostración.

Sean $0 < \sigma \leq \delta$, cualesquiera. Como (x_0, t_0) es un máximo para $u - \phi$ en $C_\delta(x_0, t_0)$ tenemos que

$$u(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0) \geq u(x, t) - \phi(x, t) \quad \forall (x, t) \in C_\delta(x_0, t_0),$$

así,

$$u(x_0,t_0) - u(x,t) \geq \phi(x_0,t_0) - \phi(x,t) \quad \forall (x,t) \in C_\delta(x_0,t_0). \tag{2.7}$$

En la anterior desigualdad consideraremos $x = x_0$, y además notemos que,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha_\sigma(u,\phi,x_0,t_0) &= \partial^\alpha[t_0-\sigma](u(x_{00},\cdot),t_0) + \partial^\alpha[t_0-\sigma,t_0](\phi(x_0,\cdot),t_0)\\
&= \int_{-\infty}^{t_0-\sigma} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&+ \int_{t_0-\sigma}^{t_0} \frac{\phi(x_0,t_0)-\phi(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau.
\end{aligned}$$

Luego, como $t_0 - \delta \leq t_0 - \sigma$ y de (2.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha_\sigma(u,\phi,x_0,t_0) \quad &= \int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&+ \int_{t_0-\delta}^{t_0-\sigma} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&+ \int_{t_0-\sigma}^{t_0} \frac{\phi(x_0,t_0)-\phi(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&= \partial^\alpha[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \partial^\alpha[t_0-\delta,t_0-\sigma](u(x_0,\cdot),t_0)\\
&+\partial^\alpha[t_0-\sigma,t_0](\phi(x_0,\cdot),t_0)\\
&\geq \partial^\alpha[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \partial^\alpha[t_0-\delta,t_0-\sigma](\phi(x_0,\cdot),t_0)\\
&+\partial^\alpha[t_0-\sigma,t_0](\phi(x_0,\cdot),t_0)\\
&= \partial^\alpha[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \partial^\alpha[t_0-\delta,t_0](\phi(x_0,\cdot),t_0)\\
&= \partial^\alpha_\delta(u,\phi,x_0,t_0).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\partial^\alpha_\sigma(u,\phi,x_0,t_0) \geq \partial^\alpha_\delta(u,\phi,x_0,t_0)$$

así, hemos demostrado (2.5). Para demostrar (2.6), el proceso es el mismo considerando la desigualdad contraria para (2.7).

□

En el desarrollo del trabajo omitimos en ciertos resultados, la noción de máximo local o máximo local estricto en la definición 2.1, el resultado que nos ayuda a hacer esto es el siguiente.

Lema 2.2. *Podemos sustituir "máximo local" por "máximo local estricto"* *en la definición 2.1. De forma similar se tiene para "mínimo local".*

Demostración.

Sean $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ SCS, acotada y $\delta > 0$, tales que, para cualquier función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$, $(x_0, t_0) \in Q_T$ es un máximo local estricto de $u - \phi$ en $C_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$. De manera directa obtenemos que

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \leq 0.$$

Por otro lado, consideremos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $(x_0, t_0) \in Q_T$ es un máximo local de $u - \phi$ en $C_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$. Ahora tomemos $\epsilon > 0$ y definamos

$$\phi_\epsilon(x, t) = \phi(x, t) + \epsilon|x - x_0|^2 + |t_0 - t|^2,$$

así, $\phi_\epsilon \in C^2(\overline{Q}_T)$. Luego, como $u - \phi$ tiene un máximo local en $C_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$, se sigue que,

$$u(x, t) - \phi_\epsilon(x, t) \leq u(x, t) - \phi(x, t) \leq u(x_0, t_0) - \phi_\epsilon(x_0, t_0) \quad \forall (x, t) \in C_\delta(x_0, t_0).$$

La desigualdad anterior nos permite inferir que $u - \phi_\epsilon$ tiene un máximo local estricto en $C_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$, por tanto,

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi_\epsilon, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi_\epsilon(x_0, t_0)) \leq 0. \tag{2.8}$$

Por como definimos ϕ_ϵ, tenemos que,

$$D\phi_\epsilon(x_0, t_0) = D\phi(x_0, t_0) \quad \text{y} \quad \phi_\epsilon(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0).$$

Ahora, analicemos que sucede con la derivada fraccionaria de Caputo,

$$
\begin{aligned}
\partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi_{\epsilon},x_0,t_0) &= \partial^{\alpha}[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \partial^{\alpha}[t_0-\delta,t_0](\phi_{\epsilon}(x_0,\cdot),t_0),\\
&= \partial^{\alpha}[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\phi_{\epsilon}(x_0,t_0)-\phi_{\epsilon}(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau,\\
&= \partial^{\alpha}[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \partial^{\alpha}[t_0-\delta,t_0](\phi(x_0,\cdot),t_0)\\
&+ \int_{t_0-\delta}^{t_0} |t_0-\tau|^{1-\alpha}d\tau,\\
&= \partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi,x_0,t_0) + \frac{\delta^{2-\alpha}}{2-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{\delta^{2-\alpha}}{2-\alpha} > 0$, obtenemos que,

$$\partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi_{\epsilon},x_0,t_0) \geq \partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi,x_0,t_0).$$

Finalmente, de la desigualdad anterior junto con (2.8), se sigue que

$$\partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi,x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi_{\epsilon}(x_0,t_0)) \leq 0,$$

y por tanto, u es sub-solución viscosa de 1.2.

□

Otro resultado que veremos es el de estabilidad, para ello, consideremos el siguiente lema.

Lema 2.3. *Si una función continua $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tiene un máximo local estricto en x_0 y si una sucesión de funciones continuas (v_n) converge localmente de manera uniforme a v, entonces existe una sucesión (x_n), con x_n máximo local de v_n, que converge a x_0.*

Demostración.

Dado que la función continua v tiene un máximo estricto en x_0, existe $r > 0$ tal que $B_{2r}(x_0)$, es una bola abierta centrada en x_0 y de radio $2r$, contenida en Ω y además,

$$v(x_0) = \max_{B_r(x_0)} v > \max_{\partial B_r(x_0)} v.$$

como (v_n) converge localmente uniformemente a v, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_n(x_0) > \max\limits_{\partial B_r(x_0)} v_n$ para todo $n \geq n_0$. Pero entonces v_n tiene un máximo local en un punto x_n de $B_r(x_0)$.

Resta mostrar que (x_n) converge a x_0. Sea y un punto de adherencia de sucesión acotada (x_n).

Como para todo $z \in \overline{B_r(x_0)}$,

$$v_n(x_n) \geq v_n(z),$$

y como v_n converge localmente uniformemente a v, pasando al limite, tenemos que

$$v(y) \geq v(z).$$

Entonces y es un punto máximo de v en $B_r(x_0)$, lo que prueba que $y = x_0$ ya que x_0 es el único máximo de v en $B_r(x_0)$. La sucesión acotada (x_n) que tiene un solo punto de adherencia, x_0, es decir, converge a x_0.

□

En el capitulo 3, en la sección de resultados, veremos la estabilidad.

A continuación, presentaremos definiciones y resultados que nos ayudaran a la demostración del método de Perron. Estas ideas son usuales en la demostración de dicho resultado, nos hemos basado en [5] y [12]. Aquí, es importante recordar la definición 1.3, en la cual presentamos las envolventes semi-continuas.

Definición 2.2. *Una función acotada $u : \overline{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sub-solución (super-solución) viscosa discontinua de (1.2) si u^* es una sub-solución (u_* es una super-solución) de (1.2) siguiendo la definición 2.1.*

Decimos que u es una solución viscosa discontinua de (1.2) si es sub-solución y super-solución discontinua.

Lema 2.4. *Consideremos S_0 una familia no vacía de sub-soluciones viscosas uniformemente acotadas en $\overline{Q}_T$ del problema (1.2). Entonces, la función*

$$u(x,t) = \sup_{v \in S_0} \{v(x,t)\}$$

es una sub-solución viscosa discontinua de (1.2).

Demostración.

Consideremos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$, $(x_0, t_0) \in Q_T$ y $0 < \delta < t_0$. Además supongamos que $u^* - \varphi$ tiene un máximo estricto en (x_0, t_0) sobre $C_\delta(x_0, t_0)$. Fijemos $\sigma \in (0, \delta)$, como (x_0, t_0) es un máximo, existen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S_0$ y $(y_k, s_k) \to (x_0, t_0)$, tales que

$$u_k^*(y_k, s_k) = \max_{C_\delta(y_k,s_k)} \{u_k^*\} \to u^*(x_0, t_0). \tag{2.9}$$

Como $(u_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq S_0$, es una sub-solución viscosa de (1.2) en el punto (y_k, s_k), entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ de la definición de sub-solución viscosa podemos escribir

$$\partial_\delta^\alpha(u_k^*, \phi, y_k, s_k) + H(y_k, s_k, u_k^*(y_k, s_k), D\phi(y_k, s_k)) \leq 0. \tag{2.10}$$

Ahora, tenemos que

$$\partial_\sigma^\alpha(u_k^*, \phi, y_k, s_k) = \partial^\alpha[s_k - \sigma](u_k^*(y_k, \cdot), s_k) + \partial^\alpha[s_k - \sigma, s_k](\phi(y_k, \cdot), s_k),$$

dado que $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ podemos usar el Teorema de Convergencia Dominada y obtener

$$\partial^\alpha[s_k - \sigma, s_k](\phi(y_k, \cdot), s_k) \to \partial^\alpha[t_0 - \sigma, t_0](\phi(x_0, \cdot), t_0).$$

Ahora, por como esta definida u tenemos $u^* \geq u_k^*$ para k suficientemente grande y por la propiedad (2.9) escribimos

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha[s_k - \sigma](u_k^*(y_k, \cdot), s_k) &= \int_{-\infty}^{s_k-\sigma} \frac{u_k^*(y_k, s_k) - u_k^*(y_k, \tau)}{|s_k - \tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\
&= \int_{-\infty}^{s_k-\sigma} \frac{u_k^*(y_k, s_k) - u^*(x_0, t_0) + u^*(x_0, t_0) - u_k^*(y_k, \tau)}{|s_k - \tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\
&= (u_k^*(y_k, s_k) - u^*(x_0, t_0)) \int_{-\infty}^{s_k-\sigma} \frac{d\tau}{|s_k - \tau|^{1+\alpha}} \\
&+ \int_{-\infty}^{s_k-\sigma} \frac{u^*(x_0, t_0) - u_k^*(y_k, \tau)}{|s_k - \tau|^{1+\alpha}} d\tau.
\end{aligned}$$

Tomemos $w := s_k - \tau$, así

$$\int_{-\infty}^{s_k-\sigma} \frac{d\tau}{|s_k-\tau|^{1+\alpha}} = \int_{\sigma}^{+\infty} w^{-1-\alpha} dw,$$
$$= \frac{\sigma^{-\alpha}}{\alpha}.$$

de las dos últimas igualdades, tenemos que,

$$\partial^{\alpha}[s_k-\sigma](u_k^*(y_k,\cdot),s_k) \geq o_k(1)\sigma^{-\alpha} + \int_{-\infty}^{s_k-\sigma} \frac{u^*(x_0,t_0)-u_k^*(y_k,\tau)}{|s_k-\tau|^{1+\alpha}} d\tau,$$

donde $o_k \to 0$ cuando $k \to +\infty$. Ahora, para k suficientemente grande respecto a σ, podemos notar que,

$$u^*(x_0,t_0) - u_k^*(y_k,\tau)\mathbf{1}_{(-\infty,s_k-\sigma)}(\tau) \geq \frac{-2\|u^*\|_{\infty}}{|\tau-(t_0-\sigma/4)|^{1+\alpha}}\mathbf{1}_{(-\infty,t_0-\sigma/2)}(\tau),$$

para $\tau \in (-\infty, t_0-\sigma/2)$. Si $\sigma > 0$ entonces

$$\frac{-2\|u^*\|_{\infty}}{|\tau-(t_0-\sigma/4)|^{1+\alpha}}\mathbf{1}_{(-\infty,t_0-\sigma/2)}(\tau), \quad \tau \in (-\infty, t_0-\sigma/2)$$

es integrable, con lo que podemos aplicar Lema de Fatou en su versión dominada junto con el hecho de que $y_k \to x_0$, $s_k \to t_0$ y la semicontinuidad superior de u^* para obtener,

$$\liminf_{k\to\infty} \partial^{\alpha}[s_k-\sigma](u_k^*(y_k,\cdot),s_k) \geq \partial^{\alpha}[t_0-\sigma](u^*(x_0,\cdot),t_0),$$

por tanto,

$$\partial_{\sigma}^{\alpha}(u_k^*,\phi,y_k,s_k) \geq o_k(1) + \partial_{\sigma}^{\alpha}(u^*,\phi,x_0,t_0). \tag{2.11}$$

Ahora, analicemos la Hessiana. Cuando $k \to \infty$ de la continuidad de ϕ y (2.9), se sigue que,

$$D\phi(y_k,s_k) \to D\phi(x_0,t_0) \quad \text{y} \quad u_k^*(y_k,s_k) \to u^*(x_0,t_0),$$

además dado que $u^* - \phi$ tiene un máximo en (x_0,t_0)

$$D\phi(x_0,t_0) = Du^*(x_0,t_0).$$

Considerando la continuidad de H y lo anterior, tenemos que,

$$H(y_k, s_k, u_k^*(y_k, s_k), D\phi(y_k, s_k)) \to H(x_0, t_0, u^*(x_0, t_0), Du^*(x_0, t_0)). \qquad (2.12)$$

Finalmente de (2.10), (2.11), (2.12) y tomando limite cuando $k \to \infty$ se sigue,

$$\partial_\sigma^\alpha(u^*, \phi, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u^*(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \le 0$$

por tanto u^* es una sub-solución viscosa de (1.2) y en consecuencia u es una sub-solución viscosa discontinua de (1.2).

□

Lema 2.5. *Consideremos* $(x_0, t_0) \in Q_T$*,* $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ *acotada y* $\theta > 0$ *tal que*

$$\partial^\alpha \phi(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \phi(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) < -\theta. \qquad (2.13)$$

Entonces, existe $r_0 > 0$ *(depende solo de* ϕ *y* θ*) tal que, para cada* $r \in (0, r_0)$*,* $|\overline{x} - x_0|, |\overline{t} - t_0| < r$ *y* $\delta' > 0$*, existe* $\epsilon_0 > 0$ *pequeño en términos de* δ' *tal que para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$*, la función* $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_{\overline{x}, \overline{t}, \delta', \epsilon}$ *definida por*

$$\tilde{\phi}(x,t) = \begin{cases} \phi(x,t) + \varepsilon & \text{en } C_{\delta'}(\overline{x}, \overline{t}) \\ \phi(x,t) & \text{en } C_{\delta'}(\overline{x}, \overline{t})^c, \end{cases} \qquad (2.14)$$

satisface la desigualdad,

$$\partial^\alpha \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) + H(\overline{x}, \overline{t}, \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}), D\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t})) < 0.$$

Demostración.

Como $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$, la función

$$(x,t) \to \partial^\alpha \phi(x, \cdot)(t),$$

es continua. De este hecho, la continuidad de H y de (2.13), existe $r_0 > 0$ pequeño respecto a θ tal que para todo $r \in (0, r_0)$, tenemos,

$$\partial^\alpha \phi(x,t) + H(x, t, \phi(x,t), D(x,t)) \le -\frac{\theta}{2}, \quad \forall (x,t) \in C_r(x_0, t_0). \qquad (2.15)$$

Fijemos $\epsilon > 0$, consideremos $r \in (0, r_0)$, $\delta' > 0$ y $(\overline{x}, \overline{t}) \in C_r(x_0, t_0)$. Definimos $\tilde{\phi} := \tilde{\phi}_{\overline{x},\overline{t},\delta',\epsilon}$ como en (2.14). Así podemos notar,

$$D\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) = D\phi(\overline{x}, \overline{t}).$$

Ahora, para la derivada fraccionaria de Caputo, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha[\overline{t} - \delta', \overline{t}](\tilde{\phi}(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) &= \int_{\overline{t}-\delta'}^{\overline{t}} \frac{\overline{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) - \overline{\phi}(\overline{x}, \overline{\tau})}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \\
&= \int_{\overline{t}-\delta'}^{\overline{t}} \frac{\phi(\overline{x}, \overline{t}) + \epsilon - \phi(\overline{x}, \overline{\tau}) - \epsilon}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \\
&= \partial^\alpha[\overline{t} - \delta', \overline{t}](\phi(\overline{x}, \cdot), \overline{t})
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha[\overline{t} - \delta'](\tilde{\phi}(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) &= \int_{-\infty}^{\overline{t}-\delta'} \frac{\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) - \tilde{\phi}(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\overline{t}-\delta'} \frac{\phi(\overline{x}, \overline{t}) + \epsilon - \phi(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \\
&= \partial^\alpha[\overline{t} - \delta'](\phi(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) + \int_{-\infty}^{\overline{t}-\delta'} \frac{\epsilon}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \\
&= \partial^\alpha[\overline{t} - \delta'](\phi(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) + C\epsilon\delta'^{-\alpha}
\end{aligned}$$

para algún $C > 0$ que depende de α.

Del anterior análisis, reemplazando en (2.15), gracias a la continuidad de H y tomando ε lo suficientemente pequeño en términos de δ' y θ, obtenemos que,

$$\partial^\alpha \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) + H(\overline{x}, \overline{t}, \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}), D\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t})) < 0,$$

como queríamos demostrar.

□

Observación. El lema 2.5 nos da las pautas necesarias para obtener la contradicción, en la demostración del método de Perron, la cual haremos por reducción al absurdo.

Después, demostraremos el principio de comparación asociado a nuestro problema. Para ello, supondremos que H no depende directamente de de la variable temporal, además añadiremos las siguientes hipótesis sobre nuestro Hamiltoniano. Para esta parte consideraremos las ideas tanto de [5] y [12].

(M1) Existe una constante $\lambda_0 \geq 0$ tal que para todo x, t, p y u, v con $u \geq v$ tenemos

$$H(x,t,u,p) - H(x,t,v,p) \geq \lambda_0(u-v).$$

Cuando H cumple (M1), se le suele llamar función propia.

(M2) Para cada $R > 0$, existen módulos de continuidad ω, ω_R tales que para todo $|x|, |y| \leq R$, $|v| \leq R$, $l \in \mathbb{R}$ se cumple que para algún $\epsilon > 0$, entonces si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ tenemos

$$H(y,v,\epsilon^{-1}(x-y)) - H(x,v,\epsilon^{-1}(x-y)+s(\beta)) \leq \omega(\beta) + \omega_R(|x-y| + \epsilon^{-1}|x-y|^2). \tag{2.16}$$

(M3) Esta condición conlleva términos del gradiente coercivo. Existe $m > 1$ tal que, para cada $R > 0$ y $\mu \in (0,1)$ existen módulos de continuidad ω_R, ω tales que para todo $|x|, |y| \leq R$, $l \in \mathbb{R}$ cumple que para algún $\epsilon > 0$, entonces si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$ tenemos

$$\begin{aligned} &H(y,v,\epsilon^{-1}(x-y)+s(\beta)) - \mu H(x,\mu^{-1}v,\mu^{-1}\epsilon^{-1}(x-y)) \\ &\leq \omega_R(|x-y|)(1+|p|^m) + \omega(\beta)|p|^{m-1} + C_R(1-\mu) + (1-\mu)|p|^m \end{aligned}$$

Dadas las hipótesis anteriores, separaremos la demostración del principio de comparación en casos relacionados con la no-linealidad de H sobre el gradiente, es decir, dividiremos la demostración en dos casos, el primero considerando (M2) y el segundo (M3).

En esta parte es importante recordar la definición 1.4 dada en el Marco Teórico, esta se refiere a las sup e inf convoluciones. Además, añadiremos la siguiente notación.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $\xi\in\mathbb{R}$ consideraremos la función

$$g_{[\xi]}(t)=\begin{cases} g(t) & \text{si } t\geq\xi \\ g(\xi) & \text{si } t<\xi. \end{cases}$$

Esta es importante al analizar de la derivada fraccionaria de Caputo, ya que para $t>0$ podemos escribir

$$\partial^{\alpha}g(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{g(t)-g_{[0]}(\tau)}{|t-\tau|^{1+\alpha}}d\tau. \tag{2.17}$$

Como resultados preliminares, para la demostración del principio de comparación tenemos los siguientes.

Lema 2.6. *Sean u una sub-solución viscosa de (1.2) y $\mu\in(0,1)$. Si denotamos $\overline{u}=\mu u$, entonces $\overline{u}=\mu\overline{u}$ es sub-solución viscosa de*

$$\partial^{\alpha}\overline{u}+\mu H(x,t,\mu^{-1}\overline{u},\mu^{-1}D\overline{u})=0 \quad \textit{en } Q_T.$$

Demostración.

Sean $\phi\in C^2(\overline{Q}_T)$, $(x_0,t_0)\in Q_T$ y $\delta>0$ cualesquiera, tales que (x_0,t_0) es un máximo de $\overline{u}-\phi$ en $C_\delta(x_0,t_0)$.

Tomemos $\phi_1=\mu^{-1}\phi$, entonces $u-\phi_1$ tiene un máximo en (x_0,t_0) y como μ es sub-solución, se sigue que,

$$\partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi_1,x_0,t_0)+H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi_1(x_0,t_0))\leq 0, \tag{2.18}$$

Ahora, para la derivada fraccionaria de Caputo, observemos que,

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi_1,x_0,t_0)\geq{}&\mu\partial^{\alpha}_{\delta}(u,\phi_1,x_0,t_0),\\ ={}&\mu(\partial^{\alpha}[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0)+\partial^{\alpha}[t_0-\delta,t_0](\phi_1(x_0,\cdot),t_0)),\\ ={}&\partial^{\alpha}[t_0-\delta](\overline{u}(x_0,\cdot),t_0)+\partial^{\alpha}[t_0-\delta,t_0](\phi(x_0,\cdot),t_0),\\ ={}&\partial^{\alpha}_{\delta}(\overline{u},\phi,x_0,t_0).\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que, $u=\mu^{-1}\overline{u}$, lo que junto con la última desigualdad y 2.18 nos permite colegir que,

$$\partial_\delta^\alpha(\overline{u}, \phi, x_0, t_0) + \mu H(x_0, t_0, \mu^{-1}u\overline{u}(x_0, t_0), \mu^{-1}D\phi(x_0, t_0)) \leq 0,$$

y por tanto se sigue el resultado.

$\square$

Lema 2.7. *Sea $u \in SCS(\overline{Q}_T)$ una sub-solución viscosa de (3.12). Entonces, para todo $\gamma > 0$ suficientemente pequeño, existe una constante $a_\gamma > 0$ tal que la función,*

$$u^\gamma(x,t) = \sup_{s\in[0,T]} \{u(x,s) - \gamma^{-1}(s-t)^2\}, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T$$

es una sub-solución viscosa del problema

$$\partial^\alpha u + H(x, u, Du) = a_\gamma \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times]a_\gamma, T]. \tag{2.19}$$

Además, $a_\gamma \to 0$ cuando $\gamma \to 0$, depende solamente de los datos y $\|u\|_{L^\infty(\overline{Q}_T)}$.

Por otro lado, si $v \in SCI(\overline{Q}_T)$ es una super-solución viscosa de (3.12), entonces v_γ definido de manera similar a u^γ es una super-solución viscosa de (2.19).

Demostración.

De (1.6) denotemos

$$\theta_\gamma = (2\|u\|_{L^\infty(\overline{Q}_T)}\gamma)^{1/2},$$

consideremos a_γ tal que

$$a_\gamma^{-(1+\alpha)}\theta_\gamma \to 0 \text{ cuando } \gamma \to 0. \tag{2.20}$$

Esta selección siempre es posible y en particular tomando γ suficientemente pequeño (respecto a $\|u\|_\infty$ y T), podemos asumir que

$$2\theta_\gamma < a_\gamma \leq \frac{T}{8}. \tag{2.21}$$

Ahora mostraremos que u^γ es una sub-solución de (2.19).

Sea $(\overline{x}, \overline{t}) \in \mathbb{R}^n \times]a_\gamma, T]$ y $\phi : \mathbb{R}^n \times]-\infty, T] \to \mathbb{R}$ suave tal que $(\overline{x}, \overline{t})$ es un máximo estricto para $u^\gamma - \phi$ en $C_\delta(\overline{x}, \overline{t})$ para algún $0 < \delta \leq \overline{t}$.

Además, consideremos $\bar{t}_\gamma \in [0, T]$ tal que alcanza el supremo definido por $u^\gamma(\overline{x}, \bar{t})$. Por (1.6) podemos ver que ,

$$\bar{t}_\gamma \geq \bar{t} - \theta_\gamma,$$

así,

$$\bar{t}_\gamma \geq \bar{t} - \theta_\gamma > a_\gamma - \theta_\gamma.$$

Luego, por como escogimos a_γ y θ_γ podemos concluir que $\bar{t}_\gamma > 0$. Entonces del lema (2.1) podemos suponer que $0 < \delta \leq \bar{t}_\gamma$.

Usando la definición de u^γ y $\bar{t}_\gamma$, podemos escribir la desigualdad del máximo como

$$u(\overline{x}, \bar{t}_\gamma) - \gamma^{-1}(\bar{t} - \bar{t}_\gamma)^2 - \phi(\overline{x}, \bar{t}) \geq \sup_{\tau \in [0,T]} \{u(x, \tau) - \gamma^{-1}(\tau - t)^2\} - \phi(x, t)$$

para cada $(x, t) \in C_\delta(\overline{x}, \bar{t})$. Ahora, realicemos el cambio de variable $t = s - \bar{t}_\gamma + \bar{t}$ para escribir,

$$u(\overline{x}, \bar{t}_\gamma) - \gamma^{-1}(\bar{t} - \bar{t}_\gamma)^2 - \phi(\overline{x}, \bar{t}) \geq \sup_{\tau \in [0,T]} \{u(x, \tau) - \gamma^{-1}(\tau - (s - \bar{t}_\gamma + \bar{t}))^2\} - \phi(x, s - \bar{t}_\gamma + \bar{t}),$$

para $(x, s) \in C_\delta(\overline{x}, \bar{t}_\gamma)$. Ahora, definamos

$$\tilde{\phi}(x, s) := \phi(x, s - (\bar{t}_\gamma - \bar{t})) \quad \text{para } (x, s) \in C_\delta(\overline{x}, \bar{t}_\gamma).$$

Observemos que

$$\tilde{\phi}(\overline{x}, \bar{t}_\gamma) = \phi(\overline{x}, \bar{t}_\gamma - (\bar{t}_\gamma - \bar{t})) = \phi(\overline{x}, \bar{t}).$$

Luego, dado que $\delta \leq \bar{t}_\gamma$ tenemos $s \geq 0$ y podemos escoger $\tau = s$ para eliminar el supremo de la desigualdad anterior con lo que obtenemos

$$u(\overline{x}, \bar{t}_\gamma) - \tilde{\phi}(\overline{x}, \bar{t}_\gamma) \geq u(x, s) - \tilde{\phi}(x, s), \quad \text{para } (x, s) \in C_\delta(\overline{x}, \bar{t}_\gamma)$$

por lo tanto $\tilde{\phi}$ es función test para u en $(\overline{x}, \bar{t}_\gamma)$. Como u es sub-solución viscosa tenemos

$$\partial_\delta^\alpha(u, \tilde{\phi}, \overline{x}, \bar{t}_\gamma) + H(\overline{x}, \bar{t}_\gamma, u(\overline{x}, \bar{t}_\gamma), D\tilde{\phi}(\overline{x}, \bar{t}_\gamma)) \leq 0 \tag{2.22}$$

a continuación, analizaremos la derivada fraccionaria de Caputo. Por definición de $\tilde{\phi}$ podemos escribir

$$\delta^\alpha[\bar{t}_\gamma-\delta,\bar{t}_\gamma](\tilde{\phi}(\overline{x},\cdot),\bar{t}_\gamma)=\int_{\bar{t}_\gamma-\delta}^{\bar{t}_\gamma}\frac{\phi(\overline{x},\bar{t})-\phi(\overline{x},\tau-(\bar{t}_\gamma-\bar{t}))}{|\bar{t}_\gamma-\tau|^{1+\alpha}}d\tau,$$

luego, haciendo el cambio $\xi=\tau-\bar{t}_\gamma+\bar{t}$ obtenemos

$$\delta^\alpha[\bar{t}_\gamma-\delta,\bar{t}_\gamma](\tilde{\phi}(\overline{x},\cdot),\bar{t}_\gamma)=\int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}}\frac{\phi(\overline{x},\bar{t})-\phi(\overline{x},\xi)}{|\bar{t}-\xi|^{1+\alpha}}d\xi,$$

y por tanto,

$$\partial^\alpha[\bar{t}_\gamma-\delta,\bar{t}_\gamma](\tilde{\phi}(\overline{x},\cdot),\bar{t}_\gamma)=\partial^\alpha[\bar{t}-\delta,\bar{t}](\phi(\overline{x},\cdot),\bar{t}). \tag{2.23}$$

Por otro lado, de la notación (2.17) y la definición de $\bar{t}_\gamma$ se sigue

$$\begin{aligned}\partial^\alpha[\bar{t}_\gamma-\delta](u(\overline{x},\cdot),\bar{t}_\gamma)&=\int_{-\infty}^{\bar{t}_\gamma-\delta}\frac{u(\overline{x},\bar{t}_\gamma)-u(\overline{x},\tau)}{|\bar{t}_\gamma-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\bar{t}_\gamma-\delta}\frac{u^\gamma(\overline{x},\bar{t})+\gamma^{-1}(\bar{t}_\gamma-\bar{t})^2-u_{[0]}(\overline{x},\tau)}{|\bar{t}_\gamma-\tau|^{1+\alpha}}d\tau,\end{aligned}$$

del cambio de variable anterior podemos escribir,

$$\partial^\alpha[\bar{t}_\gamma-\delta](u(\overline{x},\cdot),\bar{t}_\gamma)=\int_{-\infty}^{\bar{t}-\delta}\frac{u^\gamma(\overline{x},\bar{t})+\gamma^{-1}(\bar{t}_\gamma-\bar{t})^2-u_{[0]}(\overline{x},\xi+\bar{t}_\gamma-\bar{t})}{|\bar{t}-\xi|^{1+\alpha}}d\xi \tag{2.24}$$

Por facilidad, definamos,

$$\Psi(\xi):=u^\gamma(\overline{x},\bar{t})+\gamma^{-1}(\bar{t}_\gamma-\bar{t})^2-u_{[0]}(\overline{x},\xi+\bar{t}_\gamma-\bar{t}),\quad \xi\in(-\infty,\bar{t}-\delta),$$

ignoraremos los parámetros de integración que se aplican sobre esta función.

Ahora, de la definición de θ_γ tenemos que $|\bar{t}-\bar{t}_\gamma|\leq\theta_\gamma$.

Si $\xi\leq-\theta_\gamma$, entonces

$$u_{[0]}(\overline{x},\xi+\bar{t}_\gamma-\bar{t})=u(\overline{x},0)\leq u^\gamma(\overline{x},0),$$

y por lo tanto,

$$\Psi(\xi) \geq u^{\gamma}(\overline{x}, \overline{t}) - u^{\gamma}(\overline{x}, 0) \text{ para } \xi \in (-\infty, -\theta_{\gamma}).$$

Como $\|u^{\gamma}\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}$ notemos que

$$\Psi(\xi) \geq u^{\gamma}(\overline{x}, \overline{t}) - u^{\gamma}(\overline{x}, 0) - 2\|u\|_{\infty} \text{ para } \xi \in (-\theta_{\gamma}, 0],$$

de forma similar, obtenemos

$$\Psi(\xi) \geq u^{\gamma}(\overline{x}, \overline{t}) - u^{\gamma}(\overline{x}, \xi) - 2\|u\|_{\infty} \text{ para } \xi \in (0, \theta_{\gamma}].$$

finalmente si $\xi \geq \theta_{\gamma}$,

$$u_{[0]}(\overline{x}, \xi + \overline{t}_{\gamma} - \overline{t}) = u(\overline{x}, \xi + \overline{t}_{\gamma} - \overline{t}),$$

y entonces podemos escribir

$$\Psi(\xi) = u^{\gamma}(\overline{x}, \overline{t}) - (u(\overline{x}, \xi + \overline{t}_{\gamma} - \overline{t}) - \gamma^{-1}(\xi - (\xi + \overline{t}_{\gamma} - \overline{t}))^2) \geq u^{\gamma}(\overline{x}, \overline{t}) - u^{\gamma}(\overline{x}, \xi),$$

para cada $\xi \in (\theta_y, \overline{t} - \delta)$. Combinando la desigualdad anterior con (2.24) tenemos que

$$\partial^{\alpha}[\overline{t}_{\gamma} - \delta](u(\overline{x}, \cdot), \overline{t}_{\gamma}) \geq \partial^{\alpha}[\overline{t} - \delta](u^{\gamma}(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) - 2\|u\|_{\infty} \int_{-\theta_y}^{\theta_y} \frac{d\xi}{|\overline{t} - \xi|^{1+\alpha}}.$$

Usando la relación entre a_{γ} y θ_{γ}, como $\overline{t} \geq a_{\gamma}$, por (2.21) observemos que $|\xi - \overline{t}| \geq a_{\gamma}/2$ para todo $\xi \in (-\theta_{\gamma}, \theta_{\gamma})$. Entonces

$$\int_{\theta_{\gamma}}^{\theta_{\gamma}} \frac{d\xi}{|\overline{t} - \xi|^{1+\alpha}} \leq \int_{\theta_{\gamma}}^{\theta_{\gamma}} \left(\frac{2}{a_{\gamma}}\right)^{1+\alpha} d\xi = \left(\frac{2}{a_{\gamma}}\right)^{1+\alpha} 2\theta_{\gamma} \leq 8a_{\gamma}^{-(1+\alpha)}\theta_{\gamma},$$

luego, aplicando (2.20) podemos concluir,

$$\partial^{\alpha}[\overline{t}_{\gamma} - \delta](u(\overline{x}, \cdot), \overline{t}_{\gamma}) \geq \partial^{\alpha}[\overline{t} - \delta](u^{\gamma}(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) - o_{\gamma}(1).$$

Para algún $o_{\gamma}(1) \to 0$ cuando $\gamma \to 0$ dependiente solamente de $\|u\|_{\infty}$. Entonces de la desigualdad y (2.23) tenemos

$$\partial_{\delta}^{\alpha}(u, \tilde{\phi}, \overline{x}, \overline{t}_{\gamma}) \geq \partial_{\delta}^{\alpha}(u^{\gamma}, \phi, \overline{x}, \overline{t}) - o_{\gamma}(1). \tag{2.25}$$

Por otro lado, como los operadores diferenciales dependientes solamente de x son invariantes bajo traslaciones del tiempo obtenemos,

$$D\tilde{\phi}(\overline{x},\overline{t}_\gamma) = D\phi(\overline{x},\overline{t}),$$

por la definición de sup-convolución, $\overline{t}_\gamma$ y la continuidad de H tenemos que

$$H(\overline{x},\overline{t},u^\gamma(\overline{x},\overline{t}_\gamma),D\phi(\overline{x},\overline{t})) = H(\overline{x},\overline{t},u(\overline{x},\overline{t}_\gamma),D\tilde{\phi}(\overline{x},\overline{t}_\gamma))$$

lo que junto con (2.25) y (2.22) nos ayuda obtener la desigualdad viscosa, que muestra que u^γ es una sub-solución viscosa.

De forma similar al proceso anterior se obtiene el resultado para súper-solución.

□

Lema 2.8. *Sean u una sub-solución viscosa del problema (1.2). Entonces para cada $\eta > 0$, la función*

$$\tilde{u}(x,t) := u(x,t) - \eta t^\alpha \tag{2.26}$$

es una sub-solución viscosa de

$$\partial^\alpha u + H(x,t.u(x,t),Du(x,t)) \leq -\tilde{c}_\alpha \eta \text{ en } Q_T$$

para alguna constante $\tilde{c}_\alpha > 0$ que no depende de η.

Demostración.

Sea $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\delta > 0$ tales que (x_0,t_0) es un máximo estricto para $\tilde{u} - \phi$ en $C_\delta(x_0,t_0)$.

Consideremos $\phi_1 := \phi + \eta t^\alpha$, luego como (x_0,t_0) es un máximo estricto para $\tilde{u} - \phi$, entonces $u - \eta t^\alpha - \phi$ tiene un máximo en (x_0,t_0) y por como definimos ϕ_1, se tiene que (x_0,t_0) es un máximo para $u - \phi_1$.

Luego, como u es sub-solución de (1.2), se sigue que

$$\partial_\delta^\alpha(u,\phi_1,x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi_1(x_0,t_0)) \leq 0.$$

Analicemos la derivada fraccionaria de Caputo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_\delta^\alpha(u,\phi_1,x_0,t_0) &= \partial^\alpha[t_0-\delta](u(x_0,\cdot),t_0) + \partial^\alpha[t_0-\delta,t_0](\phi_1(x_0,\cdot),t_0),\\
&= \int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau + \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\phi_1(x_0,t_0)-\phi_1(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&+ \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\phi(x_0,t_0)-\phi(x_0,\tau)+\eta(t_0^\alpha-\tau^\alpha)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau - \eta\int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{t_0^\alpha-\tau^\alpha}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&+ \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\phi(x_0,t_0)-\phi(x_0,\tau)}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau + \eta\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{t_0^\alpha-\tau^\alpha}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&+ \eta\int_{-\infty}^{t_0-\delta} \frac{t_0^\alpha-\tau^\alpha}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&= \partial_\delta^\alpha(\tilde{u},\phi,x_0,t_0) + \eta\int_{-\infty}^{t_0} \frac{t_0^\alpha-\tau^\alpha}{|t_0-\tau|^{1+\alpha}}d\tau\\
&= \partial_\delta^\alpha(\tilde{u},\phi,x_0,t_0) + \partial^\alpha t^\alpha(t_0)\\
&= \partial_\delta^\alpha(\tilde{u},\phi,x_0,t_0) + \eta\tilde{c_\alpha}
\end{aligned}$$

Finalmente, de la igualdad anterior considerando $D\phi_1(x_0,t_0) = D\phi(x_0,t_0)$ y las propiedades de H, tenemos que

$$\partial_\delta^\alpha(\tilde{u},\phi,x_0,t_0) + \eta\tilde{c_\alpha} + H(x_0,t_0,\tilde{u}(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0)) \leq 0.$$

lo que nos permite concluir el resultado.

$\square$

Lema 2.9. *Sea $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ acotada, tal que*

$$\|\psi\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda,$$

para algún $\Lambda > 0$. Para $\beta > 0$, definimos

$$\psi_\beta(x) = \psi(\beta x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.27}$$

entonces, ψ_β cumple

$$\|D\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda\beta.$$

Demostración.

Notemos lo siguiente,

$$\|D\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{1\leq j\leq n} \|D_j\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

donde D_j es la derivada parcial respecto a la j-ésima componente. Por otro lado, tenemos que

$$\|\psi\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k\leq 2} \|D^k\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

donde, D^k es la derivada parcial k-ésima, con k como multi-índice. Con base a lo anterior, podemos ver que

$$\|D\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \beta\|D\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \beta\|\psi\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq \beta\Lambda.$$

Como queríamos demostrar.

□

Observación. En particular la demostración del lema 2.7, nos presenta ideas importantes que serán replicadas en la demostración del principio de comparación.

Finalmente, presentaremos el resultado de existencia y unicidad de la solución de (1.1). Para ello necesitaremos la siguiente hipótesis sobre el Hamiltoniano.

(M4) Para cada $R > 0$, existe una constante $C_H(R)$ tal que

$$|H(x,u,p)| \leq C_H(R)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $|u|, |p| \leq R$.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Con lo presentado en la metodología, nos resta presentar y demostrar los resultados centrales de nuestro trabajo, hemos dividido por secciones los resultados, cabe tener en cuenta que el desarrollo de la metodología encaja de manera directa con la presentación de los resultados.

3.1.1. Solución clásica, formulación alternativa y estabilidad.

El siguiente resultado, es la demostración de que una solución clásica es una solución viscosa.

Proposición 3.1. *Sea $u \in C^2(\overline{Q}_T)$. Entonces u es una sub-solución viscosa en un punto $(x_0, t_0) \in Q_T$ si y sólo si $u(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$ para cada $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ y además*

$$\partial^\alpha u(x,t) + H(x,t,u(x,t), Du(x,t)) \leq 0, \tag{3.1}$$

para cada $(x,t) \in Q_T$.

Demostración.

Supongamos que u es una sub-solución viscosa en el punto $(x_0, t_0) \in Q_T$ y demostremos que u verifica (3.1).

Como u es una sub-solución viscosa en el punto $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$, entonces para cada función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\delta > 0$ tales que (x_0, t_0) es un máximo para $u - \phi$ en $\mathcal{C}_\delta(x_0, t_0) \cap \overline{Q}_T$, tenemos

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, u(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \leq 0.$$

En particular tomando $\phi := u$ se sigue que $u - \phi$ tiene un máximo para todo $(x, t) \in Q_T$ y por tanto

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x, t) + H(x, t, u(x, t), D\phi(x, t)) \leq 0, \quad \forall (x, t) \in Q_T.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x, t) &= \partial^\alpha[t - \delta](u(x, \cdot), t) + \partial^\alpha[t - \delta, t](\phi(x, \cdot), t), \\
&= \partial^\alpha[t - \delta](u(x, \cdot), t) + \partial^\alpha[t - \delta, t](u(x, \cdot), t), \\
&= \partial^\alpha[t](u(x, \cdot), t) = \partial^\alpha u(x, t)
\end{aligned}$$

combinando la desigualdad e igualdad anterior se sigue (3.1).

Ahora, supongamos que u verifica (3.1) y mostremos que u es una sub-solución viscosa.

Sean $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\delta > 0$ cualesquiera, tales que (x_0, t_0) es un máximo para $u - \phi$. De (3.1), y como $u(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$ tenemos

$$\partial^\alpha u(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \phi(x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \leq 0,$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha u(x_0, t_0) &= \partial^\alpha(u(x_0, \cdot), t_0) \\
&= \partial^\alpha[t_0 - \delta](u(x_0, \cdot), t_0) + \partial^\alpha[t_0 - \delta, t_0](u(x, \cdot), t) \\
&= \partial^\alpha[t_0 - \delta](u(x_0, \cdot), t_0) + \partial^\alpha[t_0 - \delta, t_0](\phi(x_0, \cdot), t_0) \\
&= \partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0).
\end{aligned}$$

Por tanto se concluye,

$$\partial_\delta^\alpha(u,\phi,x_0,t_0) + H(x_0,t_0,\phi(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0)) \leq 0,$$

lo que implica que u es una sub-solución viscosa.

□

El resultado anterior se tiene de forma similar para super-soluciones viscosas.

Ahora, procederemos a presentar y demostrar formulaciones alternativas para la definición 2.1. En el lema 3.2, debemos tener presente lo realizado por Arisawa en [2] y la adaptación de Yangary & Topp en [12], este lema dará una formulación mas amplia de la definición 2.1. Luego, en la proposición 3.3, obtenemos una forma de reducir términos en la derivada fraccionaria de Caputo haciendo consideraciones extras sobre la función u.

Lema 3.2. *La definición 2.1 puede ser formulada de forma equivalente si suponemos*

La función test $\phi : \overline{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ puede ser tomada acotada y suave, con (x_0,t_0) máximo global de $u-\phi$ en $\overline{Q}_T$ y en lugar de (2.4) escribimos

$$\partial^\alpha\phi(x_0,t_0) + H(t_0,x_0,\phi(t_0,x_0),D\phi(t_0,x_0)) \leq 0$$

de manera similar se tiene el resultado para super-soluciones viscosas.

Demostración.

La visión general del problema implica el caso mencionado en el lema. Demostraremos lo contrario enfocado en el caso de la sub-solución.

Sea ϕ una función suave con $\phi(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$ y tal que (x_0,t_0) es un máximo estricto para $u-\phi$ en $C_\delta(x_0,t_0)$, con $\delta > 0$. Entonces existe una sucesión de funciones $\{\tilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada y suave en $\overline{Q}_T$ tal que

a) $\tilde{\phi}_n = \phi$ en $C_\delta(x_0,t_0)$;

b) $\tilde{\phi}_n \geq u$ en $\overline{Q}_T$;

c) $\tilde{\phi}_n$ converge uniformemente y localmente a u en $(\overline{C}_\delta(x_0,t_0))^c$.

De la noción de sub-solución se sigue

$$\partial_\delta^\alpha(\tilde{\phi}_n,\tilde{\phi}_n,x_0,t_0) + H(x_0,t_0,\tilde{\phi}_n(x_0,t_0),D\tilde{\phi}_n(x_0,t_0)) \leq 0.$$

luego, por las hipótesis a),b),c) sobre $\tilde{\phi}_n$, aplicando el teorema de convergencia dominada y pasando al limite sobre la derivada fraccionaria de Caputo se tiene,

$$\partial_\delta^\alpha(\tilde{\phi}_n,\tilde{\phi}_n,x_0,t_0) \to \partial_\delta^\alpha(u,\phi,x_0,t_0).$$

Además,

$$H(x_0,t_0,\tilde{\phi}_n(x_0,t_0),D\tilde{\phi}_n(x_0,t_0)) \to H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0))$$

juntando lo anterior,

$$\partial_\delta^\alpha(u,\phi,x_0,t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0)) \leq 0$$

la cual es la definición de sub-solución viscosa 2.1.

La demostración, para super-soluciones viscosas se sigue de manera análoga.

□

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea u una sub-solución viscosa de (1.2) en un punto $(x_0,t_0) \in Q_T$ en el sentido de la definición 2.1, supongamos*

$$|u(x_0,t) - u(x_0,s)| \leq C|t-s|^{\alpha'} \qquad \forall s,t \in (t_0-\delta',t_0+\delta'), \tag{3.2}$$

para algún $\alpha' \in (\alpha,1]$ y $\delta' > 0$. Entonces,

$$\partial^\alpha(u(x_0,\cdot),t_0),$$

esta bien definida y es finita. Además, si existe $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que (x_0,t_0) es un punto máximo de $u-\phi$ en $C_\delta(x_0,t_0)$ para algún $\delta > 0$, entonces

$$\partial^\alpha(u(x_0,\cdot),t_0) + H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0)) \leq 0.$$

Demostración.

Mostremos que $\partial^\alpha(u(x_0,\cdot),t_0)$ está bien definido. Tenemos,

$$\begin{aligned}\partial^\alpha(u(x_0,\cdot),t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{(t_0-s)^{1+\alpha}}ds,\\ &= \left(\int_{-\infty}^{t_0-\delta'} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{(t_0-s)^{1+\alpha}}ds + \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{(t_0-s)^{1+\alpha}}ds\right).\end{aligned}$$

Denotemos,

$$I_1 := \int_{-\infty}^{t_0-\delta'} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{|t_0-s|^{1+\alpha}}ds \quad \text{y} \quad I_2 := \int_{t_0-\delta'}^{t_0} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{|t_0-s|^{1+\alpha}}ds,$$

para I_1 tenemos que,

$$\begin{aligned}|I_1| &= \left|\int_{-\infty}^{t_0-\delta'} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{|t_0-s|^{1+\alpha}}ds\right|\\ &\leq \int_{-\infty}^{t_0-\delta'} \left|\frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{|t_0-s|^{1+\alpha}}\right| ds\\ &\leq \int_{-\infty}^{t_0-\delta'} \frac{|u(x_0,t_0)|+|u(x_0,s)|}{|t_0-s|^{1+\alpha}}ds\\ &\leq 2\|u\|_\infty \int_{-\infty}^{t_0-\delta'} \frac{1}{|t_0-s|^{1+\alpha}}ds\end{aligned}$$

tomando el cambio de variable $w=t_0-s$ e integrando se tiene,

$$|I_1| \leq \frac{2\tilde{C}}{\delta'^\alpha}\|u\|_\infty < +\infty$$

donde $\tilde{C} = \frac{1}{\alpha}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left|\int_{t_0-\delta'}^{t_0} \frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{|t_0-s|^{1+\alpha}}ds\right|\\ &\leq \int_{t_0-\delta'}^{t_0} \left|\frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,s)}{|t_0-s|^{1+\alpha}}\right| ds\end{aligned}$$

de la desigualdad anterior y la hipótesis (3.2) tenemos,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \int_{t_0-\delta'}^{t_0} \frac{|t_0 - s|^{\alpha'}}{|t_0 - s|^{1+\alpha}} ds \\ &= C \int_{t_0-\delta'}^{t_0} |t_0 - s|^{\alpha'-(1+\alpha)} ds \end{aligned}$$

integrando se sigue,

$$|I_2| \leq K \delta'^{\alpha'-\alpha} < +\infty$$

donde $K = C\frac{1}{\alpha'-\alpha}$. De nuestro I_1 e I_2 tenemos que

$$\partial^\alpha(u(x_0,\cdot),t_0) \leq +\infty$$

por tanto esta bien definida.

Ahora, como u es una sub-solución viscosa en (x_0, t_0), se sigue que,

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \leq 0.$$

Luego, como $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$, aplicando el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$\partial^\alpha[t_0 - \delta, t_0](\phi(x_0, \cdot), t_0) \to 0 \quad \text{cuando } \delta \to 0$$

por otro lado

$$\partial^\alpha[t_0 - \delta](u(x_0,), t_0) \to \partial^\alpha(u(x_0, \cdot), t_0) \quad \text{cuando } \delta \to 0$$

finalmente si $\delta \to 0$ se tiene

$$\begin{aligned} &\partial_\delta^\alpha(u, \phi, x_0, t_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \to \\ &\quad \partial^\alpha(u(x_0, \cdot), t_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), Du(t_0, x_0)), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\partial^\alpha(u(x_0, \cdot), t_0) + H(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \leq 0.$$

□

A continuación, analizaremos la estabilidad de (1.2), para ello seguiremos las ideas de [5].

TEOREMA 3.4 (Estabilidad)**.** *Supongamos que* (u_n) *es una sucesión de sub-soluciones continuas de*

$$\partial^\alpha u(x,t) + H_n(x,t,u(x,t),Du(x,t)) = 0 \qquad (x,t) \in Q_T \tag{3.3}$$

que converge uniformemente a una función $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ *y* (H_n) *converge uniformemente a* H*. Entonces* u *es una sub-solución de (1.2).*

Este resultado anterior se tiene de forma equivalente para super-soluciones.

Demostración.

Sean $\varphi \in C^2(\overline{Q}_T)$ una función test, $\delta > 0$ y $(x_0,t_0) \in Q_T$ un máximo de $u - \phi$ en $C_\delta(x_0,t_0)$.

Como (u_n) converge uniformemente a u, entonces $(Du_n - D\varphi)$ converge uniformemente a $(Du - D\varphi)$, así por el Lema 2.3, existe una sucesión $((x_n,t_n))$ tal que (x_n,t_n) es un máximo para $u_n - \varphi$ que converge a (x_0,t_0) para cada $n \in \mathbb{N}$.

Luego, como u_n es una sub-solución de (3.3), tenemos que

$$\partial_\delta^\alpha(u_n,\phi,x_n,t_n) + H_n(x_n,t_n,u_n(x_n,t_n),Du_n(x_n,t_n)) \leq 0, \tag{3.4}$$

por las convergencias de (H_n), (u_n) y $((x_n,t_n))$, se sigue directamente que

$$H_n(x_n,t_n,u_n(x_n,t_n),Du_n(x_n,t_n)) \to H(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0)), \tag{3.5}$$

cuando $n \to \infty$.

Por otro lado, para nuestra derivada fraccionaria de Caputo, usando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se sigue que

$$\partial_\delta^\alpha(u_n,\phi,x_n,t_n) \to \partial_\delta^\alpha(u,\phi,x_0,t_0)$$

cuando $n \to \infty$. Finalmente de la convergencia anterior junto con

(3.4), (3.5) y (3.3), obtenemos la desigualdad con la que podemos concluir que u es una sub-solución de (1.2).

De manera análoga se demuestra el caso para super-soluciones.

$\square$

3.1.2. Método de Perron

TEOREMA 3.5 (Perron). *Asumamos que $\Psi_- \in SCI(\overline{Q}_T)$ y $\Psi_+ \in SCS(\overline{Q}_T)$ son sub y super-soluciones acotadas discontinuas de (1.2) respectivamente, tales que*

$$\Psi_- \leq \Psi_+ \qquad \textit{en } \overline{Q}_T,$$

entonces, existe una solución viscosa discontinua $u : \overline{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ para (1.2) con

$$\Psi_- \leq u \leq \Psi_+.$$

Demostración.

Para funciones $z : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ consideremos la condición

$$\Psi_-(x,t) \leq z(x,t) \leq \Psi_+(x,t) \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T \tag{3.6}$$

y el conjunto

$$\Lambda := \{z : \overline{Q}_T \to \mathbb{R} : z^* \text{ es una sub-solución de (1.2) y verifica (3.6)}\}.$$

Ahora, definamos

$$u(x,t) = \sup_{z \in \Lambda} z(x,t)$$

del Lema 2.4 y (3.6) tenemos que u es una sub-solución viscosa discontinua de (1.2) y así $u \in \Lambda$.

A continuación, mostraremos que u_* es una super-solución de (1.2), para ello seguiremos la argumentación estándar dada en [[10],[6]] la cual es adaptable a nuestro trabajo.

Por reducción al absurdo y usando el Lema 3.2 suponemos que existen $(x_0, t_0) \in Q_T$, $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ acotada tales que (x_0, t_0) es un mínimo global estricto para $u_* - \phi$ en $\overline{Q}_T$ con $u_*(x_0,t_0) = \phi(x_0,t_0)$ y

$$\partial^\alpha(\phi, x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \phi(x_0,t_0), D\phi(x_0,t_0)) < -\theta, \tag{3.7}$$

para algún $\theta > 0$.

Debemos probar la existencia de $\epsilon, r > 0$ suficientemente pequeños, para obtener que la función definida como

$$w = \begin{cases} \max\{u, \phi + \epsilon\} & \text{en } C_r(x_0,t_0) \\ u & \text{en } C_r(x_0,t_0)^C, \end{cases}$$

pertenece a Λ, es una sub-solución viscosa y tal que $w > u$ en algún punto de $\overline{Q}_T$, lo cual es una contradicción con el hecho de que u es máximo del conjunto.

Usando (3.7) consideremos $r_0 > 0$ como en el Lema 2.5 e inicialmente tomaremos $r, \delta' \in (0, r_0/2)$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos escribir

$$\partial^\alpha \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) + H(\overline{x}, \overline{t}, \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}), D\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t})) < 0 \quad \forall (\overline{x}, \overline{t}) \in C_r(x_0,t_0). \tag{3.8}$$

Donde $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_{\overline{x}, \overline{t}, \delta', \epsilon}$ viene dado como en (2.14).

Por otro lado, de la desigualdad (3.7) y dado que Ψ_+ es una super-solución de (1.2) obtenemos que

$$u_*(x_0,t_0) < (\Psi_+)_*(x_0,t_0).$$

Luego, considerando $r, \epsilon > 0$ tan pequeños como sea necesario, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\phi(x,t) + \epsilon < (\Psi_+)_*(x,t) \quad \forall (x,t) \in C_r(x_0,t_0), \tag{3.9}$$

y como (x_0,t_0) es un mínimo estricto para $u_* - \phi$, podemos asumir que

$$\phi(x,t) + \epsilon < u_*(x,t) \quad \forall (x,t) \in C_{r_0}(x_0,t_0) \setminus C_r(x_0,t_0), \tag{3.10}$$

tomando ϵ tan pequeño como sea necesario. Ahora fijamos δ', r, ϵ

cumpliendo con los requerimientos dados, además ya que

$$\Psi_- \leq u \leq \Psi_+ \text{ en } \overline{Q}_T \quad \text{y} \quad \Psi_+ > \phi + \epsilon \text{ en } C_r(x_0, t_0),$$

entonces w cumple (3.6).

Resta demostrar que w^* es una sub-solución viscosa de (1.2), para ello, consideraremos $(\overline{x}, \overline{t}) \in \overline{Q}_T$, $0 < \delta < \overline{t}$ y una función $\varphi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que

$$w^*(\overline{x}, \overline{t}) = \varphi(\overline{x}, \overline{t}) \quad \text{y} \quad w^*(x, t) < \varphi(x, t),$$

para cada $(x, t) \in C_\delta(\overline{x}, \overline{t}) \setminus \{(\overline{x}, \overline{t})\}$.

Analicemos en dos casos, primero supongamos que

$$w^*(\overline{x}, \overline{t}) = u^*(\overline{x}, \overline{t}),$$

entonces $(\overline{x}, \overline{t})$ es máximo estricto de $u^* - \varphi$ en $C_\delta(\overline{x}, \overline{t})$ y como u^* es una sub-solución, tenemos

$$\partial_\delta^\alpha(u^*, \varphi, \overline{x}, \overline{t}) + H(\overline{x}, \overline{t}, u^*(\overline{x}, \overline{t}), D\varphi(\overline{x}, \overline{t})) \leq 0.$$

Dada nuestra suposición para este caso, observemos que

$$\partial_\delta^\alpha(u^*, \varphi, \overline{x}, \overline{t}) = \partial_\delta^\alpha(w^*, \varphi, \overline{x}, \overline{t})$$

además,

$$H(\overline{x}, \overline{t}, w^*(\overline{x}, \overline{t}), D\varphi(\overline{x}, \overline{t})) = H(\overline{x}, \overline{t}, u^*(\overline{x}, \overline{t}), D\varphi(\overline{x}, \overline{t})).$$

Por tanto,

$$\partial_\delta^\alpha(w^*, \varphi, \overline{x}, \overline{t}) + H(\overline{x}, \overline{t}, w^*(\overline{x}, \overline{t}), D\varphi(\overline{x}, \overline{t})) \leq 0.$$

así, obtenemos que w^* es una sub-solución viscosa en $(\overline{x}, \overline{t})$.

Para el segundo caso, supongamos que

$$w^*(\overline{x}, \overline{t}) > u^*(\overline{x}, \overline{t}),$$

luego, por (3.10) tenemos $(\overline{x}, \overline{t}) \in C_r(x_0, t_0)$, en consecuencia

$$w^*(\overline{x}, \overline{t}) = \phi(\overline{x}, \overline{t}) + \epsilon.$$

Ahora, sea $0 < \delta'' < \min\{\delta', \delta\}$ suficientemente pequeño tal que

$$C_{\delta''}(\overline{x}, \overline{t}) \subset C_r(x_0, t_0).$$

Observemos,

$$\varphi(x, t) \geq \phi(x, t) + \epsilon \quad \text{en } C_{\delta''}(\overline{x}, \overline{t})$$

con $\varphi(\overline{x}, \overline{t}) = \phi(\overline{x}, \overline{t}) + \epsilon$. Además, como φ es suave,

$$D\phi(\overline{x}, \overline{t}) = D\varphi(\overline{x}, \overline{t}),$$

con lo que tenemos que,

$$H(\overline{x}, \overline{t}, w^*(\overline{x}, \overline{t}), D\varphi(\overline{x}, \overline{t})) = H(\overline{x}, \overline{t}, \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}), D\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t})). \tag{3.11}$$

Por otro lado, como $w^* \geq \phi + \epsilon$ en $C_{\delta''}(\overline{x}, \overline{t})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha_{\delta''}(w^*, \varphi, \overline{x}, \overline{t}) &= \partial^\alpha[\overline{t} - \delta''](w^*(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) + \partial^\alpha[\overline{t} - \delta'', \overline{t}](\varphi(\overline{x}, \cdot), \overline{t}) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\overline{t} - \delta''} \frac{w^*(\overline{x}, \overline{t}) - w^*(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{\alpha+1}} d\tau + \int_{\overline{t} - \delta''}^{\overline{t}} \frac{\varphi(\overline{x}, \overline{t}) - \varphi(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \right) \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\overline{t} - \delta''} \frac{(\phi(\overline{x}, \overline{t}) + \epsilon) - (\phi(\overline{x}, \tau) + \epsilon)}{|\overline{t} - \tau|^{\alpha+1}} d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_{\overline{t} - \delta''}^{\overline{t}} \frac{(\phi(\overline{x}, \overline{t}) + \epsilon) - (\phi(\overline{x}, \tau) + \epsilon)}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \right)
\end{aligned}$$

luego dado que definimos $\tilde{\phi}$ como en (2.14), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha_{\delta''}(w^*, \varphi, \overline{x}, \overline{t}) &\leq \left(\int_{-\infty}^{\overline{t} - \delta''} \frac{\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) - \tilde{\phi}(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{\alpha+1}} d\tau + \int_{\overline{t} - \delta''}^{\overline{t}} \frac{\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) - \tilde{\phi}(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\overline{t}} \frac{\tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}) - \tilde{\phi}(\overline{x}, \tau)}{|\overline{t} - \tau|^{\alpha+1}} d\tau \\
&= \partial^\alpha \tilde{\phi}(\overline{x}, \overline{t}).
\end{aligned}$$

Usando la hipótesis para este caso, la anterior desigualdad y (3.11) obtenemos que

$$\partial^{\alpha}_{\delta''}(w^*,\varphi,\overline{x},\overline{t})+H(\overline{x},\overline{t},w^*(\overline{x},\overline{t}),D\varphi(\overline{x},\overline{t}))\leq\partial^{\alpha}\tilde{\phi}(\overline{x},\overline{t})+H(\overline{x},\overline{t},\tilde{\phi}(\overline{x},\overline{t}),D\tilde{\phi}(\overline{x},\overline{t})).$$

Aplicando la desigualdad (3.8) tenemos la desigualdad que prueba que w^* es una sub-solución viscosa asociada a δ'', luego usando el Lema 2.1, w^* es una sub-solución viscosa asociada a δ.

Finalmente, para $w \geq u$ con $w \neq u$ se sigue usando la definición de w^* cerca de (x_0,t_0) y la no negatividad de ϵ. Gracias a lo anterior se cumple el Teorema.

□

3.1.3. Principio de comparación

En esta subsección probaremos el principio de comparación para sub y super-soluciones acotadas de nuestro problema.

TEOREMA 3.6 (Principio de Comparación.). *Sea $T>0$ fijo, consideremos el problema*

$$\partial^{\alpha}u+H(x,u,Du)=0, \qquad \text{en } Q_T, \tag{3.12}$$

y supongamos se cumplen (M1),(M2) y (M3).

Sean $u:\overline{Q}_T\to\mathbb{R}$ una sub-solución viscosa SCS acotada de (3.12) y $v:\overline{Q}_T\to\mathbb{R}$ una super-solución viscosa SCI acotada de (3.12), tales que $u(x,0)\leq v(x,0)$ para cada $x\in\mathbb{R}^n$. Entonces, $u\leq v$ en $\overline{Q}_T$.

Demostración.

Caso (M2)

De forma usual, la demostración del principio de comparación, consiste en usar el método de reducción al absurdo, así empezaremos suponiendo que

$$M:=\sup_{(x,t)\in\overline{Q}_T}\{u(x,t)-v(x,t)\}>0. \tag{3.13}$$

Siguiendo la idea del Lema 2.9, consideremos $\psi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ acotada tal que $\psi\leq 0$, $\psi=0$ en B_1 y $\psi\geq\|u\|_\infty+\|v\|_\infty$ en B_2^c. Definimos ψ_β con

$\beta > 0$ como en (2.27).

Por otro lado denotemos por

$$u_\eta^\gamma := u^\gamma - \eta t^\alpha,$$

donde por definición de sup e inf-convolución $u_\eta^\gamma \to u$ cuando $\gamma, \eta \to 0$ y de manera similar $v_\gamma \to v$ cuando $\gamma \to 0$, uniformemente sobre $\overline{Q}_T$. Podemos considerar $\gamma, \eta, \beta > 0$ suficientemente pequeños.

Por caracterización del supremo, existen $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$ tales que

$$u(x_0, t_0) - v(x_0, t_0) \geq \frac{M}{2},$$

con lo que para γ, η pequeños, tenemos que,

$$u_\eta^\gamma(x_0, t_0) - v_\gamma(x_0, t_0) \geq \frac{M}{2}.$$

Así,

$$u_\eta^\gamma - v_\gamma - \psi_\beta = u_\eta^\gamma - v_\gamma \quad \text{en } B_{1/\beta}$$

y como,

$$M \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \leq \psi_\beta \quad \text{en } B_{2/\beta}^c$$

obtenemos que,

$$u_\eta^\gamma - v_\gamma - \psi_\beta \leq u - v - M \leq 0 \quad \text{en } B_{2/\beta}^c \times [0, T].$$

Con lo que si tomamos β suficientemente pequeño $(x_0, t_0) \in B_{1/\beta} \times [0, T]$.

Recordemos que u es SCS, v es SCI entonces u_η^γ es SCS y $-v_\gamma$ es SCS lo que junto con las propiedades de ψ, nos indica que $u_\eta^\gamma - v_\gamma - \psi_\beta$ es SCS por tanto existe $(x_1, t_1) \in \overline{Q}_T$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \leq M_{\beta,\gamma,\eta}^1 = M^1 \quad &:= (u_\eta^\gamma - v_\gamma - \psi_\beta)(x_1, t_1) \\ &= \sup_{(x,t)\in\overline{Q}_T} \{(u_\eta^\gamma - v_\gamma - \psi_\beta)(x, t)\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por facilidad y dada la convergencia uniforme, de ahora en adelante escribiremos u para u_η^γ y v para v_γ.

De las propiedades de sup e inf-convoluciones tenemos que u y v son Lipschitz continuas.

Por el Lema 2.7 v es super-solución de (2.19) y de igual forma por el mismo Lema y el 2.8 u es sub-solución de

$$\partial_t^\alpha u + H(x,u,Du) = a_\gamma - \tilde{c}_\alpha \eta, \text{ en } \mathbb{R}^n \times]a_\gamma, T]. \tag{3.15}$$

A continuación usaremos la técnica de duplicación de variables, la cual se usa de forma usual en este tipo de demostraciones.

Dado $\epsilon > 0$ definimos

$$\Phi(x,y,s,t) = u(x,s) - v(y,t) - \phi(x,y,s,t),$$

donde,

$$\phi(x,y,s,t) = \epsilon^{-1}|x-y|^2 + \epsilon^{-1}(s-t)^2 + \psi_\beta(x).$$

Analicemos Φ, para nuestro análisis consideraremos las referencias [5], [3] donde se estudian casos similares.

Empezaremos por notar que,

$$\Phi(x_0,x_0,t_0,t_0) = u(x_0,t_0) - v(x_0,t_0) - \psi_\beta(x_0),$$

entonces $\Phi(x_0,x_0,t_0,t_0) > 0$. Ahora, para cada $(x,y,s,t) \in \overline{Q}_T$, con $x \in B^2_{2/\beta}$ tenemos

$$\Phi(x,y,s,t) \leq u(x_0,t_0) - v(x_0,t_0) - (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \leq 0,$$

así, podemos observar que Φ es SCS con lo que existe $(\overline{x},\overline{y},\overline{s},\overline{t}) \in \overline{Q}_T$ máximo global con $\overline{x} \in \overline{B}_{2/\beta}$ tal que

$$\Phi(\overline{x},\overline{y},\overline{s},\overline{t}) \geq \Phi(x_1,x_1,t_1,t_1).$$

(Bajo nuestras hipótesis consideremos el Lema 3.7 que presentaremos y probaremos al terminar esta demostración). De la desigualdad anterior, se sigue que

$$u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t}) - \psi_\beta(\overline{x}) \geq M^1. \tag{3.16}$$

Del Lema 3.7, obtenemos que

$$\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2, \epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t})^2 \to 0, \tag{3.17}$$

cuando $\epsilon \to 0$. Además, $\overline{x}, \overline{y} \to x_1$ y $\overline{s}, \overline{t} \to t_1$ cuando $\epsilon \to 0$.

Ahora, usaremos ϕ como función test, si fijamos $\overline{y}, \overline{t}$ y derivando con respecto a x, se sigue que

$$D\phi(x, \overline{y}, s, \overline{t}) = 2\epsilon^{-1}(x-\overline{y}) + D\psi_\beta(x)$$

luego, $u-\phi$ tiene un máximo en $(\overline{x}, \overline{s})$ y como u es sub-solucion de (3.15) para cada $\delta > 0$ tenemos que

$$\partial_\delta^\alpha(u, \phi(\cdot, \overline{y}, \cdot, \overline{t}), \overline{x}, \overline{s}) + H(\overline{x}, u(\overline{x}, \overline{s}), \overline{p}) \leq o_\gamma(1) - \tilde{c}_\alpha \eta, \tag{3.18}$$

donde $\overline{p} = 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + D\psi_\beta(\overline{x})$.

De forma similar, fijando $\overline{x}, \overline{s}$ y derivando para y, obtenemos

$$D\phi(\overline{x}, y, \overline{s}, t) = 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-y)$$

entonces, $v-(-\phi)$ tiene un mínimo en $(\overline{y}, \overline{t})$ y como v es super-solución de (2.19) tenemos

$$\partial_\delta^\alpha(v, -\phi(\overline{x}, \cdot, \overline{s}, \cdot), \overline{y}, \overline{t}) + H(\overline{y}, v(\overline{y}, \overline{t}), \overline{q}) \geq -o_\gamma(1) \tag{3.19}$$

Por nuestra hipótesis de reducción al absurdo, podemos aplicar la condición (M1), junto con (3.16) y la Proposición 3.3 en (3.18) se sigue que

$$\partial^\alpha(u(\overline{x}, \cdot), \overline{s}) + \lambda_0 M^1 + H(\overline{x}, v(\overline{y}, \overline{t}), \overline{p}) \leq o_\gamma(1) - \tilde{c}_\alpha \eta.$$

De manera similar, por la Proposición 3.3 en (3.19), se sigue que

$$\partial^\alpha(v(\overline{y}, \cdot), \overline{t}) + H(\overline{y}, v(\overline{y}, \overline{t}), \overline{q}) \geq -o_\gamma(1).$$

Restando las desigualdades anteriores, obtenemos

$$A + \lambda_0 M^1 \leq -\tilde{c}_\alpha \eta + o_\gamma(1) + B, \tag{3.20}$$

donde,

$$A := \partial^\alpha(u(\overline{x},\cdot),\overline{s}) - \partial^\alpha(v(\overline{y},\cdot),\overline{t}) \quad \text{y} \quad B := H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}),\overline{q}) - H(\overline{x}, v(\overline{y},\overline{t}),\overline{p}).$$

Para B usemos (M2), así tenemos que

$$\begin{aligned} B &= H(\overline{y}, v(\overline{y},\overline{t}),\overline{q}) - H(\overline{x}, v(\overline{y},\overline{t}),\overline{p}), \\ &\leq \omega(\beta) + \omega_R(|\overline{x}-\overline{y}| + \epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2), \\ &\leq o_\beta(1) + o_\epsilon(1). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Luego, para A supongamos que $\overline{t} \geq \overline{s}$ para cada ϵ pequeño y usemos (2.17), podemos escribir

$$\begin{aligned} A &= \partial^\alpha(u(\overline{x},\cdot),\overline{s}) - \partial^\alpha(v(\overline{y},\cdot),\overline{t}), \\ &= \int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{u(\overline{x},\overline{s}) - u_{[0]}(\overline{x},\tau)}{|\overline{s}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau - \int_{-\infty}^{\overline{t}} \frac{v(\overline{y},\overline{t}) - u_{[0]}(\overline{y},\tau)}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{u(\overline{x},\overline{s}) - u_{[0]}(\overline{x},\tau)}{|\overline{s}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau - \left(\int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{v(\overline{y},\overline{t}) - v_{[0]}(\overline{y},\tau)}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau \right. \\ &\left. + \int_{\overline{s}}^{\overline{t}} \frac{v(\overline{y},\overline{t}) - v_{[0]}(\overline{y},\tau)}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau \right), \\ &= \int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{u(\overline{x},\overline{s}) - u_{[0]}(\overline{x},\tau)}{|\overline{s}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau - \left(\int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{v(\overline{y},\overline{t}) - v_{[0]}(\overline{y},\tau)}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau \right. \\ &\left. + \partial^\alpha[\overline{s},\overline{t}](v(\overline{y},\cdot),\overline{t}) \right) + \int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{u(\overline{x},\overline{s}) - u_{[0]}(\overline{x},\tau)}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau - \int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{u(\overline{x},\overline{s}) - u_{[0]}(\overline{x},\tau)}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^{\overline{s}} \frac{u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t}) - (u_{[0]}(\overline{x},\tau) - v_{[0]}(\overline{y},\tau))}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau - \partial^\alpha[\overline{s},\overline{t}](v(\overline{y},\cdot),\overline{t}) \\ &+ \int_{-\infty}^{\overline{s}} (u(\overline{x},\overline{s}) - u_{[0]}(\overline{x},\tau)) \left(\frac{1}{|\overline{s}-\tau|^{1+\alpha}} - \frac{1}{|\overline{t}-\tau|^{1+\alpha}} \right) d\tau, \\ &= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

El tratamiento anterior se sigue de manera similar cuando $\overline{s} \geq \overline{t}$, basta realizar cambios al separar las integrales y sumar, restar la integral

$$\int_{-\infty}^{\overline{t}} \frac{v(\overline{y},\overline{t}) - v_{[0]}(\overline{y},\tau)}{|\overline{s}-\tau|^{1+\alpha}} d\tau.$$

A continuación, estimaremos A en términos de ϵ.

Empecemos por analizar A_1, por como esta definida $u_{[0]}$, basta estudiar cuando $\tau \in [0, \overline{s}]$. Recordemos que

$$\Phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{s}, \overline{t}) \geq \Phi(\overline{x}, \overline{y}, \tau, \tau),$$

para $\tau \in [0, s]$, así

$$u(\overline{x}, \overline{s}) - v(\overline{y}, \overline{t}) \geq u_{[0]}(\overline{x}, \tau) - v_{[0]}(\overline{y}, \tau) \quad \text{ para } \tau \in [0, \overline{s}],$$

con lo que podemos afirmar que A_1 es positiva.

Luego, para A_2 usando la Lipschitz continuidad de v como en (1.5), obtenemos que

$$\begin{aligned} A_2 &= -\partial^\alpha[\overline{s}, \overline{t}](v(\overline{y}, \cdot), \overline{t}), \\ &\geq -2T\gamma^{-1} \int_{\overline{s}}^{\overline{t}} \frac{|\overline{t} - \tau|}{|\overline{t} - \tau|^{1+\alpha}} d\tau, \\ &\geq -\frac{2T\gamma^{-1}}{1-\alpha}(\overline{t} - \overline{s})^{1-\alpha}, \\ &= -o_\epsilon(1), \end{aligned}$$

con $o_\epsilon(1) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$ y $\gamma > 0$ fijo.

Finalmente, de la Lipschitz continuidad de u y usando el Teorema de Convergencia Dominada se tiene que $A_3 = o_\epsilon(1)$ con $\gamma > 0$ fijo.

Del análisis anterior podemos concluir que

$$A \geq o_\epsilon(1). \tag{3.22}$$

Si comparamos (3.20) con (3.21), (3.22) y (3.14), se sigue que

$$-o_\epsilon(1) + \lambda_0 \frac{M}{2} \leq -\tilde{c}_\alpha \eta + o_\gamma(1) + o_\beta(1) + o_\epsilon(1),$$

ahora, fijando $\eta > 0$ y tomando $\epsilon \to 0$, $\gamma \to 0$ y $\beta \to 0$ obtenemos que $M \leq 0$ lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis. Por tanto se sigue el resultado.

$\square$

Lema 3.7. *Si definimos*

$$\overline{M} := \sup_{\overline{Q}_T} \Phi(x,y,s,t) = \Phi(\overline{x},\overline{y},\overline{s},\overline{t}),$$

se sigue los siguientes resultados

1. $\overline{M} \to M^1$ *cuando* $\epsilon \to 0$*; (Recordemos que* M^1 *viene dado en* (3.14)*)*

2. $\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2, \epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t})^2 \to 0$ *cuando* $\epsilon \to 0$.

   Además, $\overline{x},\overline{y} \to x_1$ *y* $\overline{s},\overline{t} \to t_1$ *cuando* $\epsilon \to 0$.

Demostración.

Podemos observar que $\overline{M} \geq M^1$. Por otro lado como u, v son acotadas, definimos $K := \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$, así

$$M^1 \leq \overline{M} \leq 2K - \epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2 - \epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t})^2,$$

luego, como $M^1 > 0$, tenemos

$$\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2 + \epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t}) \leq 2K.$$

En particular $|\overline{x}-\overline{y}|, (\overline{s}-\overline{t}) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, de la desigualdad (3.16), tenemos

$$M \leq u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t}). \tag{3.23}$$

Sin perdida de generalidad, como $\overline{Q}$ es un compacto y $|\overline{x}-\overline{y}|, (\overline{s}-\overline{t}) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, supondremos que $(\overline{x},\overline{s})$ y $(\overline{y},\overline{t})$ convergen al mismo punto.

De la suposición anterior y (3.23), tenemos que

$$M^1 \leq \liminf(u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t})) \leq \limsup(u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t})) \leq M^1,$$

por tanto

$$\lim(u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t})) = M^1.$$

Usando nuevamente (3.23) y el análisis anterior, se sigue que

$$\overline{M} = u(\overline{x},\overline{s}) - v(\overline{y},\overline{t}) - \epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}| - \epsilon^{-1}(s-t)^2 - \psi_\beta(\overline{x}) \to M^1,$$

cuando $\epsilon \to 0$. Recordemos que $M^1 = u(x_1, t_1) - v(x_1, t_1) - \psi_\beta(x_1)$, por tanto el punto al cual $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{s}, \overline{t})$ converge es (x_1, x_1, t_1, t_1). De forma similar de la convergencia anterior tenemos que,

$$\epsilon^{-1}|x-y|^2 + \epsilon^{-1}(s-t)^2 \to 0$$

cuando $\epsilon \to 0$, dado que ambos términos son positivos se tiene que $\epsilon^{-1}|\overline{x}-\overline{y}|^2, \epsilon^{-1}(\overline{s}-\overline{t})^2 \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, concluyendo la demostración.

□

Demostración.

Caso (M3)

En esta demostración existen procesos similares a los hechos en el Caso (M2), razón por la cual los omitiremos.

Como en el caso anterior, supondremos por reducción al absurdo (3.13). Para $\mu \in (0,1)$ cercano a 1, definiremos $\overline{u} := \mu u$, así usando las ideas previas tenemos,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}_T} \{(\overline{u}-v)(x,t)\} \geq \frac{2}{3}M.$$

Luego, del Lema 2.6, $\overline{u}$ es solución del problema

$$\partial^\alpha \overline{u} + \mu H(x, \mu^{-1}\overline{u}, \mu^{-1}D\overline{u}) \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T].$$

Ahora, introduciremos los parámetros $\gamma, \eta, \beta > 0$ y la función de penalización ψ que describimos en el análisis anterior y siguiendo el mismo proceso para (3.14) remplazando u con $\overline{u}$, nuestra función $\overline{u}_\eta^\gamma$ resuelve en sentido viscoso, la desigualdad

$$\partial^\alpha \overline{u} + \mu H(x, \mu^{-1}\overline{u}, \mu^{-1}D\overline{u}) \leq a_\alpha - \overline{c}_\alpha \eta \quad \text{en } Q_T.$$

Igual que en el caso anterior, por facilidad, seguiremos usando la notación $\overline{u}$ y v en lugar de $\overline{u}_\eta^\gamma$ y v_γ respectivamente.

Procedemos con la duplicación de variables, bajo los argumentos anteriores existe un máximo $(\overline{x},\overline{y},\overline{s},\overline{t}) \in \overline{Q}_T$ para la función

$$\Phi(x,y,s,t) := \overline{u}(x,s) - v(y,t) - \phi(x,y,s,t)$$

donde, $\phi(x,y,s,t) = \epsilon^{-1}|x-y|^2 + \epsilon^{-1}(s-t)^2 + \psi_\beta(y)$. Aquí, podemos notar que existe una diferencia con la función ϕ del primer caso, la cual no afecta a los resultados, pero nos ayuda al momento de aplicar la hipótesis (M3). Por el cambio en la función de penalización, bajo las mismas ideas del caso anterior, obtenemos lo siguiente

$$D\phi(x,\overline{y},s,\overline{t}) = 2\epsilon^{-1}(x-\overline{y}) \quad \text{y} \quad D\phi(\overline{x},y,\overline{s},t) = 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-y) + D\psi_\beta(y)$$

con las cuales podemos definir, $\overline{p} := 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y})$ y $\overline{q} := 2\epsilon^{-1}(\overline{x}-\overline{y}) + D\psi_\beta(y)$.

Recordemos que μ es cercano a 1, además depende de β. Ya que $u \leq u_0 \leq v$ en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ tenemos que $\overline{t},\overline{s}$ son positivos uniformemente con respecto a los otros parámetros.

Remplazando nuestro $\overline{u}$ por u como el primer caso, obtenemos las desigualdades (3.16) y (3.17) para nuestro $\overline{u}$, de igual manera, si usamos ϕ como función test, para cada $\delta > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\partial_\delta^\alpha(\overline{u},\phi(\cdot,\overline{y},\cdot,\overline{t}),\overline{x},\overline{s}) + \mu H(\overline{x},\mu^{-1}\overline{u}(\overline{x},\overline{s}),\mu^{-1}\overline{p}) \leq o_\gamma(1) - \tilde{c}_\alpha\eta \\
y& \\
&\partial_\delta^\alpha(v,-\phi(\overline{x},\cdot,\overline{s},\cdot),\overline{y},\overline{t}) + H(\overline{y},v(\overline{y},\overline{t}),\overline{q}) \geq -o_\gamma(1).
\end{aligned}$$

Ahora, como en el primer caso, a la primera desigualdad le aplicaremos la hipótesis (M1), la Proposición 3.3 y la segunda desigualdad, simplemente aplicamos la misma proposición, entonces

$$\begin{aligned}
&\partial_\delta^\alpha(\overline{u}(\overline{x},\cdot)\overline{s}) + \lambda_0 M^1 + \mu H(\overline{x},\mu^{-1}\overline{v}(\overline{y},\overline{t}),\mu^{-1}\overline{p}) \leq o_\gamma(1) - \tilde{c}_\alpha\eta, \\
&\partial_\delta^\alpha(v(\overline{y},\cdot),\overline{t}) + H(\overline{y},v(\overline{y},\overline{t}),\overline{q}) \geq -o_\gamma(1).
\end{aligned}$$

Luego, restando las anteriores desigualdades se sigue que

$$A + \lambda_0 M^1 \leq -\tilde{c}_\alpha\eta + o_\gamma(1) + B.$$

Dado que A es la misma expresión del caso anterior, tenemos que

$A \geq o_\epsilon(1)$. Mientras que,

$$B = H(\overline{y}, v(\overline{y}, \overline{t}), \overline{q}) - \mu H(\overline{x}, \mu^{-1} v(\overline{y}, \overline{t}), \mu^{-1}\overline{p}),$$

lo que al aplicarle (M3), nos da como resultado,

$$B \leq \omega_R(|\overline{x} - \overline{y}|)(1 + |\overline{p}|^m) + \omega(\beta)|\overline{p}|^{m-1} + C_R(1 - \mu) + (\mu - 1)|\overline{p}|^m.$$

Ahora, de (3.17) podemos escribir,

$$B \leq o_\epsilon(1) + o_\beta(1)|\overline{p}|^{m-1} + C_R(1 - \mu) + (\mu - 1)|\overline{p}|^m,$$

en la anterior expresión se nos presenta, una complicación respecto a $\overline{p}$ por lo que su análisis la dividiremos en dos casos.

Si $\overline{p}$ es acotado, sin dificultad tenemos que $o_\beta(1)|\overline{p}|^{m-1} = {}_\beta(1)$ para un β suficientemente pequeño, además para un ϵ pequeño en relación con $\mu - 1$, obtenemos

$$B \leq o_\epsilon(1) + o_\beta(1) + C_R(1 - \mu) + C(o_\epsilon(1) + (\mu - 1))|\overline{p}|^m,$$

para algún $C > 0$.

Por otro lado si $\overline{p}$ no es acotado, realizamos lo siguiente

$$\begin{aligned} B &\leq o_\epsilon(1) + o_\beta(1)|\overline{p}|^{m-1}\frac{|\overline{p}|}{\overline{p}} + C_R(1 - \mu) + (\mu - 1)|\overline{p}|^m \\ &= o_\epsilon(1) + C_R(1 - \mu) + \left(\frac{o_{\beta(1)}}{|\overline{p}|} + (\mu - 1)\right)|\overline{p}|^m, \end{aligned}$$

como $1/|\overline{p}| \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$, podemos escribir,

$$B \leq o_\epsilon(1) + C_R(1 - \mu) + C\left(o_{\beta(1)} o_\epsilon(1) + (\mu - 1)\right)|\overline{p}|^m$$

para algún $C > 0$ y ϵ pequeño en relación a $\mu - 1$.

Del análisis anterior basta considerar la ultima desigualdad para B y además como $\mu - 1 < 0$ para ϵ suficientemente pequeño tenemos

$$B \leq o_\epsilon(1) + C_R(1 - \mu) + o_\beta(1).$$

Finalmente relacionando, las desigualdades tanto para A, B y M^1 tenemos

$$\lambda_0 \frac{M}{2} \leq -\tilde{c}_\alpha \eta + o_\gamma(1) + o_\epsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1),$$

con lo que tomando $\epsilon, \gamma \to 0$, $\mu \to 1$ y $\beta \to 0$, obtenemos una contradicción con la hipótesis, y así concluimos el resultado.

□

3.1.4. Existencia y unicidad de Solución

Finalmente, en base a lo que hemos realizado, podemos obtener el resultado de existencia y unicidad de soluciones viscosas para nuestro problema. Debemos recordar la condición (M3), y además asumir se cumplen (M1) y (M2) para poder usar el principio de comparación.

TEOREMA 3.8. *Supongamos que las hipótesis del Teorema 3.6 se satisfacen, sea $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ acotada entonces existe una única solución viscosa $u \in C(\overline{Q}_T)$ para el problema de Cauchy (1.2). Además se verifica que*

$$|u(x,t)| \leq c_\alpha^{-1} \|H(\cdot,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} t^\alpha + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \forall (x,t) \in Q \tag{3.24}$$

Demostración.

Consideraremos $T > 0$ y demostraremos el resultado para el caso de horizonte finito.

Empecemos por estudia el caso $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u_0\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda$ para algún $\Lambda \in (0, +\infty)$.

Definamos la función,

$$\psi^+(x,t) := u_0(x) + Ct^\alpha,$$

posteriormente fijaremos C, notemos que

$$\psi^+(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Aquí podemos recordar, los cálculos realizados para el Lema 2.8, evaluar clásicamente ψ^+ en (1.2) y por (M4) existe una constante $C_H(\Lambda, T)$ tal que

$$\partial^\alpha \psi^+(x,t) + H(x,t,\psi^+(x,t), D\psi^+(x,t)) \geq c_\alpha C - C_H(\Lambda, T) \quad \forall (x,t) \in Q_T.$$

Tomando $C > 0$ suficientemente grande respecto a c_α y $C_H(\Lambda, T)$ obtenemos que ψ^+ es una super-solución viscosa del problema (1.2), sobre Q_T. De forma análoga, la función

$$\psi^-(x,t) := u_0(x,t) - Ct^\alpha$$

es una sub-solución del mismo problema para algún $C > 0$ suficientemente grande.

Luego, usando el Método de Perron (Teorema 3.5) existe una solución viscosa discontinua $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$, para nuestro problema. Por construcción sabemos que $\psi^- \leq u \leq \psi^+$, en $\overline{Q}_T$. Ahora, notemos que

$$u_0(x) = \psi^-(x,0) \leq u_*(x,0) \leq u^*(x,0) \leq \psi^+(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

así, $u^*(x,0) = u_*(x,0)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Como u^* y u_* son sub y super-soluciones viscosas respectivamente, podemos aplicar el Teorema 3.6 (Principio de Comparación) y obtener que $u^* \leq u_*$ en $\overline{Q}_T$, en adelante $u \in C(\overline{Q}_T)$.

Para la unicidad basta considerar nuevamente el Teorema 3.6, de la siguiente manera.

Primero suponemos que existe v otra solución viscosa de nuestro problema, así v es sub y super solución, luego como u también es sub y super solución, por el teorema mencionado obtenemos las desigualdades $u \leq v$ y $u \geq v$ por tanto $u = v$ en $\overline{Q}_T$, de donde se sigue la unicidad.

Ahora, supondremos que el dato inicial u_0 es únicamente continuo. Tomemos $\{u_0^\epsilon\}_\epsilon \subseteq C^2(\mathbb{R}^n)$ sucesión acotada, tal que

$$\|u_0^\epsilon\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq +\infty \quad \text{y} \quad \|u_0^\epsilon - u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$$

para cada $\epsilon > 0$. Como en el primer caso, podemos construir

$$\psi_\epsilon^+(x,t) = u_0^\epsilon(x) + \epsilon + C_\epsilon t^\alpha \quad \text{y} \quad \psi_\epsilon^-(x,t) = u_0^\epsilon(x) - \epsilon - C_\epsilon t^\alpha,$$

super y sub-solución de (1.2) respectivamente. Luego, definimos

$$\psi^-(x,t) = \sup_{\epsilon>0}\{\psi_\epsilon^-(x,t)\} \quad \text{y} \quad \psi^+(x,t) = \inf_{\epsilon>0}\{\psi_\epsilon^+(x,t)\}.$$

Ahora, por el Lema 2.4 tenemos que ψ^-, ψ^+ son sub y super-soluciones respectivamente de (1.2). Observemos que por las hipótesis sobre nuestra sucesión, se sigue que

$$u_0(x) - \frac{\rho}{2} < u_0^{\rho/2}(x)$$

para algún $\rho > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$u_0(x) - \rho < u_0^{\rho/2}(x) - \frac{\rho}{2} = \psi_{\rho/2}^-(x,0),$$

lo que aplicando la caracterización del supremo, nos da como resultado $\psi^-(x,0) = u_0(x)$, bajo un análisis similar se tiene que $\psi^+(x,0) = u_0(x)$ y por tanto $\psi^-(x,0) = \psi^+(x,0)$, con lo cual podemos seguir los pasos descritos en el caso anterior y obtener nuestra u solución viscosa para el problema (1.2) la cual es única.

Finalmente para (3.24), consideramos las funciones,

$$\psi^+(x,t) = Ct^\alpha + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \text{y} \quad \psi^-(x,t) = -Ct^\alpha - \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Empecemos por analizar ψ^+, se seguirá el mismo proceso para ψ^-. Si evaluamos clásicamente ψ^+ en (1.2), tenemos

$$\partial^\alpha \psi^+(x,t) + H(x, \psi^+(x,t), D\psi^+(x,t)) \geq c_\alpha C + H(x, \psi^+(x,t), 0),$$

de la expresión anterior es fácil deducir que nos conviene tomar $C := c_\alpha^{-1}\|H(x,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ y así

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \psi^+(x,t) + H(x, \psi^+(x,t), D\psi^+(x,t)) &\geq \|H(x,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + H(x, \psi^+(x,t), 0),\\ &\geq H(x, \psi^+(x,t), 0) - H(x,0,0)\end{aligned}$$

luego, de la hipótesis (M1)

$$\partial^{\alpha}\psi^{+}(x,t)+H(x,\psi^{+}(x,t),D\psi_{+}(x,t))\geq\lambda_0\psi^{+}(x,t)=\lambda_0(Ct^{\alpha}+\|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})})$$

para cada $(x,t)\in Q_T$. Así, tenemos que ψ^{+} es una super-solución viscosa de (1.2), tal que $u(x,0)\geq\psi^{+}(x,0)$ para cada $x\in\overline{Q}_T$, usando el Teorema 3.6, tenemos que

$$u(x,t)\leq c_{\alpha}^{-1}\|H(x,0,0)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}t^{\alpha}+\|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\quad\forall(x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Analizando de manera similar ψ^{-} obtenemos que

$$u(x,t)\geq -c_{\alpha}^{-1}\|H(x,0,0)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}t^{\alpha}-\|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}\quad\forall(x,t)\in\overline{Q}_T$$

y de estas dos desigualdades se sigue (3.24).

□

3.2. Conclusiones y recomendaciones

En referencia a los objetivos que planteamos y a los resultados obtenidos podemos presentar las siguientes conclusiones:

- Al considerar la teoría de las soluciones viscosas, obtenemos una suerte de soluciones débiles para nuestro problema (1.1), descargando hipótesis que debería tener una solución clásica, sobre funciones test.
- El teorema 3.4 es nuestro resultado de estabilidad, literalmente este nos indica que el limite de una sucesión de sub-soluciones viscosas es una solución viscosa, es decir, si para algún problema que tenga estructura similar a (1.2) encontramos una sucesión de sub-soluciones viscosas, al calcular el limite hemos hallado una sub-solución viscosa lo que es parte del camino para obtener una solución viscosa. Lo mismo para las super-soluciones.
- Demostramos el método de Perron (Teorema 3.5), este método es de ayuda al trabajar con ecuaciones parabólicas (véase [8]) que involucran operadores no locales como la derivada fraccionaria de Caputo.

La intención del mismo es la existencia de la solución viscosa discontinua al hallar una super y una sub-solución viscosa, es decir, se reduce nuestro problema de hallar una solución a simplemente hallar sub y super-soluciones.

- Probamos el principio de comparación (Teorema 3.6) para nuestro problema, este se relaciona fuertemente con el método de Perron ya que mediante una suposición de acotación nos da una relación entre sub y super soluciones viscosas.

  Otra conclusión que nos da este resultado es el poder recuperar la continuidad para la solución viscosa, gracias al uso de las envolventes semi-continuas. Cabe recalcar que para la demostración de este teorema necesitamos hipótesis referentes al Hamiltoniano, las cuales son (M1),(M2) y (M3) estas consideraciones en un principio pueden parecer algo fuertes, pero existen problemas de este tipo véase [6] y [8].

- A partir del método de Perron y el principio de comparación hemos demostrado la existencia y unicidad de soluciones viscosas (teorema 3.8) para el problema (1.1). Aquí hemos supuesto que se cumplen las hipótesis (M1),(M2),(M3) y (M4).

Las siguientes recomendaciones, se pueden aplicar con referencia al trabajo que hemos presentado generando nuevos caminos o ideas para un futuro.

- Como en Barles e Imbert [4], se puede realizar la demostración del Teorema 3.6 si suponemos que para cada $R > 1$, H es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n \times [R^{-1}, R] \times B_R$, existe ω_R modulo de continuidad, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|v| \leq R$, $l \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, tal que

$$F(y, v, \epsilon^{-1}(x-y)) - F(x, v, \epsilon^{-1}(x-y)) \leq \omega_R(\epsilon^{-1}|x-y|^2 + |x-y| + r(\beta)).$$

  La demostración se sigue de manera similar a la que ya realizamos.

- Al demostrar el principio de comparación hemos supuesto que H no depende explícitamente del tiempo, se puede recuperar la dependencia del tiempo al hacer consideraciones extras sobre el Lema 3.7, como se hace en [3], también se puede usar las ideas presentadas en [13].

- Una extensión adicional al problema presentado, seria el tratamiento para un sistema de ecuaciones, en tal caso el problema toma la forma

$$\partial^{\alpha_i} u_i + H_i(x, t, Du_i) = 0,$$

  donde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para tratar este problema se puede revisar [13].

- Se puede añadir un operador no local I llamado operador de Levi y una matriz Hessiana a nuestra problema obteniendo,

$$\partial^{\alpha} u + H(x, t, u, Du, D^2 u, Iu) = 0.$$

  Al tratar este problema, se necesitan hipótesis adicionales sobre el Hamiltoniano como se hizo en [12]. Se podría desglosar este problema, es decir, preguntarse que hipótesis se debería añadir al retirar el operador de Levi o la matriz Hessiana.

Referencias bibliográficas

[1] Mark Allen, Luis Caffarelli, and Alexis Vasseur. A parabolic problem with a fractional time derivative. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 221(2):603–630, 2016.

[2] Mariko Arisawa. A new definition of viscosity solutions for a class of second-order degenerate elliptic integro-differential equations. 23(5):695–711, 2006.

[3] Guy Barles. An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order hamilton–jacobi equations and applications. pages 49–109, 2013.

[4] Guy Barles and Cyril Imbert. Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited. 25(3):567–585, 2008.

[5] Pierre Cardaliaguet. Solutions de viscosité d'équations elliptiques et paraboliques non linéaires. *Notes de Cours, Université de Rennes*, 2004.

[6] Michael G Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1):1–67, 1992.

[7] Michael G Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1):1–42, 1983.

[8] Yoshikazu Giga. *Surface evolution equations*. Springer, 2006.

[9] Russell A Gordon. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Number 4. American Mathematical Soc., 1994.

[10] Hitoshi Ishii. Perron's method for hamilton-jacobi equations. *Duke Mathematical Journal*, 55(2):369–384, 1987.

[11] Robert Jensen. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 101(1):1–27, 1988.

[12] Erwin Topp and Miguel Yangari. Existence and uniqueness for parabolic problems with caputo time derivative. *Journal of Differential Equations*, 262(12):6018–6046, 2017.

[13] Erwin Topp and Miguel Yangari. Weakly coupled systems of parabolic hamilton–jacobi equations with caputo time derivative. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 25(5):1–24, 2018.

[14] Hung Vinh Tran. *Hamilton-Jacobi equations: theory and applications*, volume 213. American Mathematical Soc., 2021.