# ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

## FACULTAD DE CIENCIAS

### SOLUCIONES VISCOSAS A UN PROBLEMA PARABÓLICO CON UN OPERADOR NO LOCAL

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO**

**FRANCO ISRAEL HERRERA GRANDA**

franco.herrera@epn.edu.ec

**DIRECTOR: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA**

miguel.yangari@epn.edu.ec

**DMQ, ENERO 2022**

## CERTIFICACIONES

Yo, FRANCO ISRAEL HERRERA GRANDA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Franco Israel Herrera Granda

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Franco Israel Herrera Granda, bajo mi supervisión.

Miguel Ángel Yangari Sosa
**DIRECTOR**

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Franco Israel Herrera Granda

Miguel Ángel Yangari Sosa

## RESUMEN

En el presente componente nos enfocamos en la existencia, unicidad y estabilidad de soluciones viscosas para un problema parabólico que involucra operadores no locales de tipo Lévy. Empezamos desarrollando la noción de solución viscosa para nuestro problema de interés y estableciendo sus primeras propiedades, las cuales serán suficientes para obtener un resultado de estabilidad. Posteriormente, a través de la noción de solución viscosa discontinua demostramos el Método de Perron, el cual nos dará las condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones viscosas discontinuas. Tras esto nos centramos en el Principio de Comparación, un resultado que estudiamos, primero, para un problema sin dependencia explícita del tiempo, y luego para el caso general. Este resultado nos permite garantizar la unicidad y la continuidad de las soluciones viscosas obtenidas a través del Método de Perron. Finalmente, construimos sub y super-soluciones viscosas para el problema de interés y aplicamos los resultados obtenidos anteriormente. De esta manera, aseguramos que existe una única solución continua para el problema que hemos estudiado.



***Palabras clave:*** operador de Lévy, solución viscosa, estabilidad, método de Perron, principio de comparación.

**ABSTRACT**

In this paper we study existence, uniqueness and stability results for a parabolic problem involving non-local operators of Lévy type. We begin developing the notion of viscosity solution in our context and stating its first properties, from which we can deduce a stability result. Later, via the concept of discontinuous viscosity solution, we prove the Perron's Method, which give us sufficient conditions to obtain a discontinuous viscosity solutions for our problem. After that, we focus in the Comparison Principle, for what we divide the study in two cases: without considering an explicit dependence on time variable, and doing it. This result helps us to recover continuity and ensure uniqueness of the viscosity solutions given by Perron's Method. Finally, we construct sub and super-viscosity solutions to our problem and proceed to apply results obtained before. In this way, we ensure there exist an unique continuous viscosity solution for the problem we are interested in.

***Keywords:*** Lévy type operators, viscosity solution, stability, Perron's method, comparison principle.

# Índice general

# Capítulo 1

## Descripción del componente desarrollado

En este trabajo estudiaremos la existencia, unicidad y estabilidad de un tipo de solución débil, llamada *solución viscosa*, para el siguiente problema parabólico con condiciones de Cauchy en la frontera

$$\begin{cases} \partial_t u + H(x,t,u,Du,\mathcal{I}u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $u\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es una función desconocida, $Du$ denota el gradiente de $u$ con respecto a su variable espacial $x$, $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ acotada, $H\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el operador Hamiltoniano, e $\mathcal{I}$ es un operador no local de tipo Lévy en variable espacial definido por

$$\mathcal{I}u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} [u(x+y,t) - u(x,t) - \mathbb{1}_B(y)\langle Du(x,t), y\rangle]\, \nu(dy),$$

donde $\mathbb{1}_B$ representa la función característica de la bola unitaria en $\mathbb{R}^N$ y $\nu$ es una medida de Borel positiva que cumple la *condición de integrabilidad de Lévy*, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^N} \min\{1, |z|^2\}\, \nu(dz) < +\infty.$$

Para esto, la hipótesis principal que imponemos sobre $H$ es que es una función continua que verifica la siguiente condición de *elipticidad* *degenerada*: para todo $x, t, u, p$ y $l_1 \geq l_2$ se verifica

$$H(x,t,u,p,l_1) \leq H(x,t,u,p,l_2). \tag{H1}$$

Es importante mencionar que problemas de este tipo han sido estudiados con anterioridad en el caso elíptico como puede verse en [2, 7]. Además, el problema (1.1) es un caso particular del estudiado en [9], por lo que nuestro estudio se centrará en desarrollar de manera prolija las demostraciones presentadas en dicha referencia.

## 1.1. Objetivo general

Estudiar la teoría de soluciones viscosas y demostrar, con detalle, la existencia y unicidad de soluciones viscosas continuas para el problema (1.1).

## 1.2. Objetivos específicos

1. Estudiar el comportamiento del operador $\mathcal{I}$.
2. Comprender la teoría de soluciones viscosas para problemas parabólicos no lineales.
3. Demostrar el método de Perron para garantizar la existencia de soluciones viscosas.
4. Demostrar el Principio de Comparación para la unicidad y continuidad de las soluciones viscosas.
5. Construir sub y super-soluciones viscosas al problema (1.1).

## 1.3. Alcance

El alcance del proyecto es que podamos aprender la teoría concerniente a la formulación viscosa de un problema, que involucre operadores tanto locales, como no locales. Además, que realicemos a detalle las demostraciones de existencia y unicidad de soluciones continuas para problemas que involucren operadores de Lévy.

## 1.4. Marco teórico

En esta sección expondremos los conceptos que fueron necesarios para comprender, de manera precisa, la formulación viscosa para el problema en el que estamos interesados. No haremos un desarrollo detallado de los temas, sino únicamente daremos las definiciones y los resultados principales que necesitaremos.

También, establezcamos una notación que será utilizada a lo largo de todo el trabajo. Si $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$, denotamos por $B_r(x)$ a la bola abierta de centro $x$ y radio $r$; en el caso que $x = 0$ escribimos $B_r$; y si además $r = 1$ solamente escribimos $B$.

### Resultados clásicos de integración de Lebesgue

La teoría de la integración en el sentido de Lebesgue es muy amplia, y existen muchos resultados importantes que podrían mencionarse. Sin embargo, en el presente trabajo solo necesitamos algunos que nos permitan realizar argumentos de paso a límite y también uno concerniente a la continuidad de la integral con respecto a un parámetro. Para un desarrollo detallado revisar [4, 5].

**Teorema 1.1** (Lema de Fatou)**.** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $X$ con valores en $[0, +\infty]$. Entonces*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**Corolario 1.2** (Lema de Fatou - Versión dominada)**.** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $X$ con valores en $[-\infty, +\infty]$. Si existe una función integrable $g\colon X \to [0, +\infty]$ tal que $f_n \leq g$ para todo $n$, entonces*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to+\infty} f_n \, d\mu.$$

**Teorema 1.3** (Convergencia Dominada)**.** *Sean* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido,* $g\colon X \to [0, +\infty]$ *integrable, y sean* $f, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *medibles definidas en* $X$ *con valores en* $[-\infty, +\infty]$ *tales que las proposiciones*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{y} \quad |f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

*se satisfacen* $\mu-$*casi todas partes. Entonces* $f$ *y todas las* $f_n$ *son integrables, y además*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

**Teorema 1.4.** *Sean* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido y* $(E, d)$ *un espacio métrico. Además, consideremos* $f\colon X \times E \to \mathbb{R}$ *una función que satisface las siguientes condiciones*

1. *Para todo* $t \in E$*, la función* $x \mapsto f(x,t)$ *es medible,*
2. *Para* $\mu-$*casi todo* $x \in X$*, la función* $t \mapsto f(x,t)$ *es continua en* $t_0$*.*
3. *Existe una función integrable* $g\colon X \to \mathbb{R}$ *de manera que para todo* $t \in E$ *y* $\mu-$*casi todo* $x$ *se verifica que*

$$|f(x,t)| \leq g(x).$$

*Entonces, la siguiente función*

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x) \end{array}$$

*es continua en* $t_0$*.*

### Límites superior e inferior de funciones

En esta sección daremos la definición y algunas características del *límite superior e inferior* de funciones definidas en un espacio métrico $(X, d)$. Así podremos estudiar y entender de una mejor manera el concepto de *semicontinuidad*, el cual es clave al momento de trabajar con las soluciones viscosas de una ecuación en derivadas parciales. Para una exposición más detallada y auto-contenida, revisar [6, 8].

**DEFINICIÓN 1.1.** *Sean $(X,d)$ un espacio métrico y $E \subseteq X$. Supongamos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $p$ es un punto límite de $E$. Entonces, definimos el* límite superior *y el* límite inferior *de $f$ en $p$ como*

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to p} f(x) &= \lim_{\delta\to 0} \sup\{f(x) \mid x \in E \cap B_\delta(p) \setminus \{p\}\} \\
&= \inf_{\delta>0} \sup\{f(x) \mid x \in E \cap B_\delta(p) \setminus \{p\}\}, \\
\liminf_{x\to p} f(x) &= \lim_{\delta\to 0} \inf\{f(x) \mid x \in E \cap B_\delta(p) \setminus \{p\}\} \\
&= \sup_{\delta>0} \inf\{f(x) \mid x \in E \cap B_\delta(p) \setminus \{p\}\}.
\end{aligned}$$

Ahora, establezcamos algunas de las propiedades básicas de estos límites.

**PROPOSICIÓN 1.5.** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $E \subseteq X$. Supongamos que $f,g\colon E \to \mathbb{R}$ y $p$ es un punto límite de $E$. Entonces*

1. $\liminf_{x\to p}(-f(x)) = -\limsup_{x\to p} f(x)$.
2. $\liminf_{x\to p} f(x) \le \limsup_{x\to p} f(x)$.
3. *Si $f \le g$ en la intersección de una vecindad de $p$ con $E$, se verifica*

$$\liminf_{x\to p} f(x) \le \liminf_{x\to p} g(x) \quad \text{y} \quad \limsup_{x\to p} f(x) \le \limsup_{x\to p} g(x).$$

Además, también podemos dar algunas caracterizaciones.

**PROPOSICIÓN 1.6.** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $E \subseteq X$. Supongamos que $f\colon E \to \mathbb{R}$, $p$ es un punto límite de $E$ y $A \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. $\limsup_{x\to p} f(x) \le A$ *si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \le A + \varepsilon$ si $x \in E \cap B_\delta(p)$ y $x \ne p$.*
2. $\limsup_{x\to p} f(x) \ge A$ *si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\delta > 0$ existe $x \in E \cap B_\delta(p)$ con $x \ne p$ que verifica $f(x) \ge A - \varepsilon$.*

*Y análogamente para el límite inferior.*

Notese que combinando ambos resultados del teorema anterior puede darse una caracterización para la proposición $\limsup_{x\to p} f(x) = A$.

**PROPOSICIÓN 1.7.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $E \subseteq X$. Supongamos que $f\colon E \to \mathbb{R}$, $p$ es un punto límite de $E$ y $\limsup_{x \to p} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E \setminus \{p\}$ converge a $p$, entonces $\limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \leq A$.*
2. *Existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $E \setminus \{p\}$ que converge a $p$ tal que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A$.*

*Y análogamente para el límite inferior.*

**OBSERVACIÓN.** Usando esta última proposición, podemos dar una interpretación al límite superior para una función $f$. De esta manera, $\limsup_{x \to p} f(x)$ es el valor límite más grande de $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre todas las sucesiones de puntos en $E \setminus \{p\}$ que convergen a $p$. Y en el caso del límite inferior este será el valor límite más pequeño de dicha sucesión.

### Funciones semicontinuas

A continuación presentaremos el concepto de *semicontinuidad*, el cual nos permite estudiar máximos y mínimos de funciones que no necesariamente son continuas, por lo que serán una herramienta importante a la hora de realizar una formulación viscosa a nuestro problema. Además, esto nos permitirá exigir muy poca regularidad a las funciones candidatas a soluciones viscosas, pues pediremos algo menos que continuidad.

Aunque es posible dar este concepto en un contexto más general como es de los espacios topológicos, para el presente trabajo nos centraremos en un espacio métrico $(X, d)$, pues siempre trabajaremos sobre $\mathbb{R}^N$. Una exposición más detallara puede encontrarse en [8].

**DEFINICIÓN 1.2.** *Sean $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ y $x_0 \in X$. Decimos que la función $f$ es* semicontinua superior (SCS) en $x_0$ *si para todo $y > f(x_0)$ existe una vecindad $U$ de $x_0$ tal que*

$$f(x) < y \quad \forall\, x \in U.$$

*De la misma forma, decimos que $f$ es* semicontinua inferior (SCI) en $x_0$ *si* *para todo $y < f(x_0)$ existe una vecindad $U$ de $x_0$ tal que*

$$y < f(x) \quad \forall\, x \in U.$$

*Además, diremos solamente que la función es semicontinua superior (resp. semicontinua inferior) si lo es en cada punto de su dominio.*

La noción se semicontinuidad superior (resp. inferior) entonces nos dice que cerca del punto $x_0$ los valores de la función se acercan por arriba (resp. por abajo) tanto como queramos al valor de la función en ese punto. Ahora, podemos establecer algunas caracterizaciones para las funciones semicontinuas a través de los conceptos de límite superior e inferior, tanto para funciones como para sucesiones.

**Proposición 1.8.** *Sea $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ y $x_0 \in X$. Entonces $f$ es SCS en $x_0$ si y solo si alguna de las siguientes condiciones se verifica*

1. $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.
2. *Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ que converge a $x_0$ se verifica*

$$\limsup_{n \to +\infty} f(x_n) \leq f(x_0)$$

*Y de la misma manera $f$ es SCI en $x_0$ si y solo si alguna de las siguientes condiciones se verifica*

1. $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.
2. *Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ que converge a $x_0$ se verifica*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

A partir de estas caracterizaciones es fácil ver que una función es continua si y solo si es tanto SCS como SCI. Además, observamos fácilmente que una función $f$ es SCS si y solo si $-f$ es SCI. También, podemos ver que si $f, g\colon X \to [-\infty, +\infty]$ son SCS (resp. SCI) y $k > 0$, entonces $f + kg$ es SCS (resp. SCI).

A continuación, presentamos uno de los resultados más importantes para el estudio de máximos y mínimos de funciones semicontinuas.

**Proposición 1.9.** *Sea* $(X,d)$ *un espacio métrico compacto y* $f\colon X \to [-\infty,+\infty]$ *una función SCS (resp. SCI). Entonces,* $f$ *alcanza su máximo (resp. mínimo) dentro de* $X$*; es decir, existe* $\bar{x} \in X$ *tal que*

$$f(\bar{x}) = \max_{X} f \quad \textit{(resp. } min\textit{).}$$

Luego, también debemos remarcar el comportamiento de este tipo de regularidad con respecto al supremo o ínfimo de una familia de funciones.

**Proposición 1.10.** *El supremo de una familia arbitraria de funciones SCI es también SCI. Es decir, si* $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ *es una familia de funciones SCI, entonces*

$$f(x) = \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} f_\alpha(x)$$

*es SCI.*

De la proposición anterior se obtiene un resultado análogo para funciones SCS cambiando el supremo por el ínfimo. También, es necesario mencionar que cuando la familia es finita, entonces también el ínfimo de funciones SCI es SCI, y análogamente para las funciones SCS.

Antes de finalizar esta sección, mostremos como construir una función SCS a partir de una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ acotada. Para ello, definamos $f^*\colon X \to \mathbb{R}$ como

$$f^*(x) = \limsup_{x'\to x} f(x'),$$

con lo que tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.11.** *Usando las notaciones anteriores, tenemos que la función* $f^*$ *es SCS.*

Además, gracias a las propiedades del límite superior es fácil ver que si $f$ es SCS entonces $f = f^*$, lo que combinado con lo desarrollado en la sección anterior implica que $f^*$ es la función SCS más pequeña que mayora a $f$. Se tienen resultados análogos para el caso de $f_*$ definida como

$$f_*(x) = \liminf_{x'\to x} f(x')$$

la cual es SCI.

Finalmente, por esta nueva interpretación que le hemos dado a $f^*$ y $f_*$, se puede mostrar que dadas dos funciones $g, h \colon X \to \mathbb{R}$ y $f = \max\{g, h\}$ tenemos

$$f^* = \max\{g^*, h^*\}.$$

# Capítulo 2

## Metodología

Para el desarrollo de este componente, en primer lugar fue necesario un análisis documental de la bibliografía disponible en los tópicos de soluciones viscosas para ecuaciones de Hamilton-Jacobi; de manera que podamos familiarizarnos con este tipo de soluciones débiles y luego podamos adaptar los resultados al problema de nuestro interés. Para ello, estudiamos la teoría general de soluciones viscosas para ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden tal como se expone en las referencias [3, 1].

Antes de construir una formulación viscosa para nuestro problema, también debimos hacer un breve estudio del operador de Lévy $\mathcal{I}$, con el fin de conocer sobre qué tipo de funciones actúa y así determinar las condiciones de regularidad que debemos exigirle a nuestras candidatas a soluciones viscosas. Este estudio fue realizado directamente por el autor.

Tras realizar estos pasos previos, podemos lanzarnos a establecer una formulación viscosa para el problema (1.1). Para ello, se siguieron las ideas expuestas en [9] junto con algunas de las consideraciones dadas en [2]. De esta manera, se estableció la formulación viscosa adecuada que nos permitió obtener un resultado de estabilidad para las soluciones viscosas, el método de Perron y el Principio de Comparación; este último para una versión simplificada de (1.1) donde $H$ no depende explícitamente del tiempo.

El estudio de dicho problema simplificado se hizo para poder fijar las ideas subyacentes en la demostración del Principio de Comparación, y también identificar la complicación de involucrar al tiempo en el operador $H$. Pero luego, estudiando las ideas de [10], se demostró una versión de este principio para el problema original (1.1), terminando así esta parte.

Una vez que contamos con los resultados fuertes de este componente: método de Perron y Principio de Comparación; finalizamos construyendo sub y super soluciones viscosas al problema (1.1), y a su versión sin dependencia del tiempo, de manera que aplicando los resultados fuertes podemos garantizar la existencia y unicidad de una solución viscosa continua para dicho problema. Para esta última parte se detallaron las técnicas aplicadas en [9, 10].

A continuación, detallamos los pasos mencionados anteriormente que nos permitieron llegar a los resultados principales de esta componente, teniendo en cuenta que el trabajo siguiente es un desarrollo detallado de las ideas presentadas en las referencias antes citadas. Para ello, introduzcamos una notación que será utilizada a lo largo del trabajo. Si $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}_+$ y $\delta_1, \delta_2 > 0$, notaremos como $C_{\delta_1,\delta_2}(x,t)$ al “cilindro” en espacio-tiempo; es decir,

$$C_{\delta_1,\delta_2}(x,t) = B_{\delta_1}(x) \times B_{\delta_2}(t),$$

y cuando $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ escribimos simplemente $C_\delta(x,t)$.

## 2.1. Estudio breve del operador $\mathcal{I}$

Primero estudiaremos las propiedades que debe tener una función para que el operador $\mathcal{I}$ pueda actuar sobre ella. Introduzcamos una notación para el operador no local. Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ no vacío, una función $\phi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $x, p \in \mathbb{R}^N$, escribimos

$$\mathcal{I}[A](\phi, x, p) = \int_A [\phi(x+y) - \phi(x) - \mathbb{1}_B(y)\langle p, y\rangle]\, \nu(dy),$$

y en el caso que $p = D\phi(x)$ escribimos solamente $\mathcal{I}[A](\phi, x)$. De esta manera, podemos escribir al operador $\mathcal{I}$ como

$$\mathcal{I}u(x,t) = \mathcal{I}[B_\delta](u(\cdot,t),x) + \mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot,t),x), \tag{2.1}$$

para cada $\delta > 0$.

La idea tras una formulación viscosa es sustituir la función $u$ por una función test $\phi$ en cada parte del problema donde se necesite cierta regularidad de $u$. Teniendo esto en cuenta, de (2.1) podemos observar que la regularidad en $u$ es absolutamente necesaria en el primer término del lado derecho de la igualdad, por lo que deberíamos reemplazar $u$ por una función test; mientras que en el segundo término esta regularidad no es necesaria en todo $B_\delta^c$, pues fuera de $B$ el gradiente de $u$ desaparece debido a la función característica que aparece en al definición de $\mathcal{I}$.

Por lo anterior mencionado, para cada $\delta > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ y $u, \phi \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definimos

$$\mathcal{I}_\delta(u,\phi,x,t) = \mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot,t),x) + \mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot,t),x,D\phi(x,t)),$$

y de manera similar

$$H_\delta[u,\phi,x,t] = H(x,t,u(x,t),D\phi(x,t),\mathcal{I}_\delta(u,\phi,x,t));$$

en el caso cuando $\delta = 0$ y $u = \phi$ únicamente escribimos $H[\phi,x,t]$.

A continuación, estudiemos las condiciones que deben satisfacer las funciones $u$ y $\phi$ para garantizar que el operador $\mathcal{I}_\delta$ está bien definido. Para esto, consideremos dos casos.

- Caso 1: $\delta \leq 1$. Es claro que

  $$|\mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot,t),x)| \leq \int_{|y|<\delta} |\phi(x+y,t) - \phi(x,t) - \langle D\phi(x,t), y\rangle| \, \nu(dy),$$

  si asumimos que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ entonces $\phi$ admite un desarrollo en serie de Taylor al rededor de $x$, por lo que podemos acotar la integral anterior como

$$|\mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot,t),x)| \leq \int_{|y|<\delta} C|y|^2\,\nu(dy),$$

para alguna constante $C$. La última integral es finita gracias a la propiedad de integrabilidad de Lévy y el caso que estamos considerando.

Procedamos con el siguiente término de la definición de $\mathcal{I}_\delta$. Tenemos

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot,t),x,D\phi(x,t))| \leq & \int_{|y|\geq\delta} |u(x+y,t)-u(x,t)|\,\nu(dy)\\ &+\int_{\delta\leq|y|\leq 1} |\langle D\phi(x,t),y\rangle|\,\nu(dy),\end{aligned}$$

y si asumimos que $u$ es acotada entonces, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$|\mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot,t),x,D\phi(x,t))| \leq 2\|u\|_{L^\infty}\int_{|y|\geq\delta}\nu(dy) + |D\phi(x,t)|\int_{\delta\leq|y|\leq 1}|y|\,\nu(dy).$$

Ahora, probemos que estas dos integrales son finitas.

$$\begin{aligned}\int_{|y|\geq\delta}\nu(dy) &= \int_{\delta\leq|y|\leq 1}\frac{|y|^2}{|y|^2}\,\nu(dy) + \int_{|y|>1}\nu(dy)\\ &\leq \frac{1}{\delta^2}\int_{\delta\leq|y|\leq 1}|y|^2\,\nu(dy) + \int_{|y|>1}\nu(dy),\end{aligned}$$

y estas dos últimas integrales son finitas por la propiedad de integrabilidad de Lévy. De igual manera, tenemos que

$$\int_{\delta\leq|y|\leq 1}|y|\,\nu(dy) \leq \frac{1}{\delta}\int_{\delta\leq|y|\leq 1}|y|^2\,\nu(dy) < +\infty.$$

De esta forma hemos demostrado que $I_\delta(u,\phi,x,t)$ está bien definido cuando $u$ es acotada y $\phi$ es de clase $C^2$.

- Caso 2: $\delta > 1$. En este caso podemos escribir

$$|\mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot,t),x)| \leq |\mathcal{I}[B](\phi(\cdot,t),x)| + \int_{1\leq|y|<\delta}|\phi(x+y,t)-\phi(x,t)|\,\nu(dy).$$

Si $\phi$ es de clase $C^2$ entonces el primer término es finito por el caso anterior; además, esta función estaría acotada en el anillo $\{y\colon 1 \leq |y| \leq \delta\}$, por lo que el segundo término también sería finito gracias a la propiedad de integrabilidad de Lévy. Igual al caso anterior, el término $\mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot,t),x,D\phi(x,t))$ está bien definido si $u$ es acotada.

Por tanto, hemos encontrado que es suficiente que $u$ sea una función acotada y que $\phi$ sea de clase $C^2$ para que el operador $\mathcal{I}_\delta$ exista para todo $\delta > 0$.

**OBSERVACIÓN.** El estudio anterior también nos muestra que la propiedad de integrabilidad de Lévy nos permite integrar funciones de la forma $|y|^n$, con $n \geq 0$, dentro de anillos; es decir, dentro de conjuntos de la forma $\{y\colon a < |y| < b\}$ con $0 < a \leq b < +\infty$.

## 2.2. Noción de solución viscosa y primeras propiedades

Para lograr nuestro objetivo de estudiar el problema (1.1) es más fácil, sobre todo para la demostración del Principio de Comparación, trabajar en el contexto de horizonte finito. Con esto en mente, para $T > 0$ definimos $Q_T := \mathbb{R}^N \times (0,T]$, y desarrollaremos la teoría de soluciones viscosas en torno al siguiente problema

$$\partial_t u + H(x,t,u,Du,\mathcal{I}u) = 0 \quad \text{en } Q_T. \tag{2.2}$$

**DEFINICIÓN 2.1.** *Decimos que una función $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ es una* sub-solución viscosa *de (2.2) si es SCS, acotada, y, para cada función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0) \in Q_T$ (digamos dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$), se verifica*

$$\partial_t \phi(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0] \leq 0,$$

*donde, en caso que $t_0 = T$, se entiende $\partial_t \phi(x_0,t_0)$ como la derivada lateral.*

*De manera análoga, decimos que $u$ es una* super-solución viscosa *de (2.2) si es SCI, acotada, y, para cada función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u - \phi$ tiene un mínimo local en $(x_0,t_0) \in Q_T$ (digamos dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$),* *se verifica*

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0] \geq 0,$$

*con la misma consideración de antes en caso que* $t_0 = T$

*Adicionalmente, decimos que* $u$ *es una solución viscosa si es tanto una sub-solución como una super-solución viscosa.*

*En caso que el problema tenga una condición de Cauchy en el borde, como en* (1.1)*, adicionalmente exigimos que* $u(\cdot,0) \leq u_0$ *en* $\mathbb{R}^N$ *(resp.* $u(\cdot,0) \geq u_0$*) para ser sub-solución viscosa (resp. super-solución viscosa).*

**Observación.** Notemos que, tanto en la definición de sub-solución como super-solución viscosa, es posible tomar las funciones test de manera que $\phi(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$, ya que basta reemplazar $\phi$ por $\phi - \phi(x_0,t_0) + u(x_0,t_0)$.

La siguiente proposición establece que esta noción de solución viscosa es una buena generalización de las soluciones clásicas del problema, pues para una función suficientemente regular ambas son equivalentes.

**Proposición 2.1.** *Sea* $u \in C^2(\overline{Q}_T)$*. Se tiene que* $u$ *es una sub-solución viscosa de* (2.2) *si y solo si*

$$\partial_t u + H(x,t,u,Du,\mathcal{I}u) \leq 0 \quad \text{en } Q_T. \tag{2.3}$$

*Demostración.* Primero supongamos que $u$ es un sub-solución viscosa y tomemos $(x,t) \in Q_T$ cualquiera. Dado que $u \in C^2(\overline{Q}_T)$ podemos usarla como función test, y es claro que $(x,t)$ es un máximo local de $u - u$ en $C_\delta(x,t) \cap \overline{Q}_T$, para cada $\delta > 0$. En particular, de la definición de sub-solución viscosa, esto implica que

$$\partial_t u(x,t) + H_\delta[u,u,x,t] \leq 0,$$

pero

$$H_\delta[u,u,x,t] = H(x,t,u(x,t),Du(x,t),\mathcal{I}u(x,t)),$$

lo que termina la demostración en este sentido.

Recíprocamente, supongamos que (2.3) se verifica y tomemos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ una función test tal que $(x_0,t_0) \in Q_T$ es un máximo local de $u - \phi$ en $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$. Dado que $u - \phi \in C^2(\overline{Q}_T)$, de las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, considerando el posible caso que $t_0 = T$, sabemos que

$$Du(x_0, t_0) - D\phi(x_0, t_0) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_t u(x_0, t_0) - \partial_t \phi(x_0, t_0) \geq 0.$$

Además,

$$u(x, t) - \phi(x, t) \leq u(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0) \quad \forall (x, t) \in C_{\delta_1, \delta_2}(x_0, t_0),$$

lo que puede reescribirse como

$$u(x_0 + y, t) - u(x_0, t_0) \leq \phi(x_0 + y, t) - \phi(x_0, t_0) \quad \forall (y, t) \in C_{\delta_1, \delta_2}(0, t_0),$$

y en particular

$$u(x_0 + y, t_0) - u(x_0, t_0) \leq \phi(x_0 + y, t_0) - \phi(x_0, t_0) \quad \forall y \in B_{\delta_1},$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}u(x_0, t_0) &= \mathcal{I}[B_{\delta_1}](u(\cdot, t_0), x_0) + \mathcal{I}[B_{\delta_1}^c](u(\cdot, t_0), x_0) \\
&= \mathcal{I}[B_{\delta_1}](u(\cdot, t_0), x_0, D\phi(x_0, t_0)) + \mathcal{I}[B_{\delta_1}^c](u(\cdot, t_0), x_0, D\phi(x_0, t_0)) \\
&\leq \mathcal{I}[B_{\delta_1}](\phi(\cdot, t_0), x_0) + \mathcal{I}[B_{\delta_1}^c](u(\cdot, t_0), x_0, D\phi(x_0, t_0)) \\
&= \mathcal{I}_{\delta_1}(u, \phi, x_0, t_0),
\end{aligned}$$

y aplicando la elipticidad degenerada de $H$, (H1), obtenemos

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H_{\delta_1}[u, \phi, x_0, t_0] \leq \partial_t u(x_0, t_0) + H[u, x_0, t_0] \leq 0,$$

es decir, $u$ es una sub-solución viscosa de (2.2). $\square$

Ahora, enunciemos un par de lemas que nos permitirán caracterizar a las soluciones viscosas.

**Lema 2.2.** *Sean $u \colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ acotada y $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$. Si $(x_0, t_0) \in Q_T$ es un máximo (resp. mínimo) de $u - \phi$ dentro de $C_{\delta_1, \delta_2}(x_0, t_0)$, entonces para cualquier $0 < \sigma_1 \leq \delta_1$ se satisface*

$$H_{\delta_1}[u, \phi, x_0, t_0] \leq \text{ (resp. } \geq \text{) } H_{\sigma_1}[u, \phi, x_0, t_0].$$

*Demostración.* Como $(x_0, t_0)$ es un punto máximo de $u - \phi$ tenemos

$$u(x,t) - \phi(x,t) \leq u(x_0,t_0) - \phi(x_0,t_0) \quad \forall (x,t) \in C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0),$$

lo que implica que

$$u(x_0+y,t_0) - u(x_0,t_0) \leq \phi(x_0+y,t_0) - \phi(x_0,t_0) \quad \forall\, y \in B_{\delta_1}.$$

Así, como $\sigma_1 \leq \delta_1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\delta_1}(u,\phi,x_0,t_0) &= \mathcal{I}[B_{\sigma_1}](\phi(\cdot,t_0),x_0) + \mathcal{I}[B_{\sigma_1}^c \cap B_{\delta_1}](\phi(\cdot,t_0),x_0) \\
&\quad + \mathcal{I}[B_{\delta_1}^c](u(\cdot,t_0),x_0,D\phi(x_0,t_0)) \\
&\geq \mathcal{I}[B_{\sigma_1}](\phi(\cdot,t_0),x_0) + \mathcal{I}[B_{\sigma_1}^c \cap B_{\delta_1}](u(\cdot,t_0),x_0,D\phi(x_0,t_0)) \\
&\quad + \mathcal{I}[B_{\delta_1}^c](u(\cdot,t_0),x_0,D\phi(x_0,t_0)) \\
&= \mathcal{I}_{\sigma_1}(u,\phi,x_0,t_0),
\end{aligned}$$

y aplicando la elipticidad degenerada de $H$, (H1), se sigue el resultado. □

**LEMA 2.3.** *En la definición de sub-solución (resp. super-solución) viscosa podemos reemplazar el "máximo local" (resp. "mínimo local") por "máximo local estricto" (resp. "mínimo local estricto").*

*Demostración.* Supongamos que $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ es una función SCS acotada y que para cada función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local estricto en $(x_0,t_0) \in Q_T$ (digamos dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$) se tiene

$$\partial_t \phi(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0] \leq 0. \tag{2.4}$$

Ahora, tomemos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0) \in Q_T$ (digamos dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$), y demostremos que

$$\partial_t \phi(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0] \leq 0.$$

Para ello, con $\varepsilon > 0$ definimos $\phi_\epsilon(x,t) = \phi(x,t) + \varepsilon|x-x_0|^2 + (t-t_0)^2$, y notamos que $\phi_\varepsilon \in C^2(\overline{Q}_T)$. Como $u - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0)$

dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0)\cap\overline{Q}_T$ se sigue que

$$u-\phi_\varepsilon < u-\phi \le u(x_0,t_0)-\phi_\varepsilon(x_0,t_0) \quad \text{en } C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0),$$

es decir $u-\phi_\varepsilon$ tiene un máximo local estricto dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0)\cap\overline{Q}_T$. Por (2.4) esto nos permite deducir que

$$\partial_t\phi_\varepsilon(x_0,t_0)+H_{\delta_1}[u,\phi_\varepsilon,x_0,t_0]\le 0. \tag{2.5}$$

Ahora, por la definición de $\phi_\varepsilon$ vemos que

$$D\phi_\varepsilon(x_0,t_0)=D\phi(x_0,t_0) \quad \text{y} \quad \partial_t\phi_\varepsilon(x_0,t_0)=\partial_t\phi(x_0,t_0).$$

También, como $\phi_\varepsilon(x_0,t_0)=\phi(x_0,t_0)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\delta_1}(u,\phi_\varepsilon,x_0,t_0) &= \int_{B_{\delta_1}}[\phi_\varepsilon(x_0+y,t_0)-\phi_\varepsilon(x_0,t_0)-\mathbb{1}_B(y)\langle D\phi_\varepsilon(x_0,t_0),y\rangle]\,\nu(dy)\\
&\quad+\mathcal{I}[B^c_{\delta_1}](u(\cdot,t_0),x_0,D\phi_\varepsilon(x_0,t_0))\\
&= \int_{B_{\delta_1}}[\phi(x_0+y,t_0)-\phi(x_0,t_0)+\varepsilon|y|^2-\mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_0,t_0),y\rangle]\,\nu(dy)\\
&\quad+\mathcal{I}[B^c_{\delta_1}](u(\cdot,t_0),x_0,D\phi(x_0,t_0))\\
&= \mathcal{I}[B_{\delta_1}](\phi(\cdot,t_0),x_0)+\mathcal{I}[B^c_{\delta_1}](u(\cdot,t_0),x_0,D\phi(x_0,t_0))\\
&\quad+\varepsilon\int_{B_{\delta_1}}|y|^2\,\nu(dy)\\
&= \mathcal{I}_{\delta_1}(u,\phi,x_0,t_0)+\varepsilon\int_{B_{\delta_1}}|y|^2\,\nu(dy),
\end{aligned}$$

pero la última integral es finita por el la propiedad de integrabilidad de Lévy, por lo que podemos escribir

$$\mathcal{I}_{\delta_1}(u,\phi_\varepsilon,x_0,t_0)=\mathcal{I}_{\delta_1}(u,\phi,x_0,t_0)+\varepsilon C,$$

para alguna constante $C>0$. Luego, gracias a la continuidad del Hamiltoniano deducimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_{\delta_1}[u,\phi_\varepsilon,x_0,t_0]=H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0],$$

y junto a (2.5) concluimos que

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\partial_t\phi_\varepsilon(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi_\varepsilon,x_0,t_0]\right] \leq 0;$$

es decir, $u$ es una sub-solución viscosa de (2.2). □

A continuación, presentamos un lema que nos permite establecer una definición equivalente a la de sub y super-soluciones viscosas pero en un contexto global, a diferencia del contexto local en el que se enmarca la Definición 2.1. La técnica aquí presentada se debe a Arisawa y fue adaptada por Yangari y Topp en [9]

**Lema 2.4.** *La Definición 2.1 es equivalente a:*

*1) Tomar $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.*

*2) Exigir que para cada función test $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ acotada tal que $u - \phi$ tiene un máximo global en $(x_0,t_0) \in Q_T$ se verifique*

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + H[\phi,x_0,t_0] \leq 0.$$

*Y análogamente para el caso de super-soluciones.*

*Demostración.* Demostraremos únicamente el caso de las sub-soluciones ya que el de super-soluciones es análogo.

Para la equivalencia con 1) notemos que la primera implicación es directa ya que la Definición 2.1 es más general. Recíprocamente, supongamos que se verifica 1), y tomemos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0) \in Q_T$ dentro de $C_{\delta_1,\delta_2}(x_0,t_0)$. Si fijamos $0 < \delta \leq \min\{\delta_1,\delta_2\}$, entonces $u - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0)$ dentro de $C_\delta(x_0,t_0)$, y por la hipótesis se sigue

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + H_\delta[u,\phi,x_0,t_0] \leq 0,$$

lo que junto al Lema 2.2 nos permite deducir

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + H_{\delta_1}[u,\phi,x_0,t_0] \leq 0;$$

es decir, $u$ es una sub-solución viscosa de (2.2).

Para demostrar la equivalencia con 2) notemos nuevamente que la primera implicación es directa gracias a la observación que sigue de la definición de solución viscosa y a la hipótesis (H1). Ahora, supongamos que se verifica 2), y tomemos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u-\phi$ tiene un máximo local estricto en $(x_0, t_0) \in Q_T$ dentro de $C_\delta(x_0, t_0)$, y $u(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$. Notemos que estas condiciones implican que $u \leq \phi$ en $C_\delta(x_0, t_0)$.

Luego, podemos tomar $(\tilde{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de funciones suaves en $\overline{Q}_T$ tales que $\tilde{\phi}_n = \phi$ en $C_\delta(x_0, t_0)$, $\tilde{\phi}_n \geq u$ en $\overline{Q}_T$ y $\tilde{\phi}_n \to u$ localmente uniformemente en $C_\delta(x_0, t_0)^c$. Así, $u - \tilde{\phi}_n$ tiene un máximo global en $(x_0, t_0)$, por lo que podemos aplicar 2) y deducir que

$$\partial_t \tilde{\phi}_n(x_0, t_0) + H[\tilde{\phi}_n, x_0, t_0] \leq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pero sabemos que $\tilde{\phi}_n(x_0+y, t_0) \to u(x_0+y, t_0)$ para cada $y \in B_\delta^c$, y usando el hecho que la sucesión $(\tilde{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y recordando que la propiedad de integrabilidad de Lévy nos permite integrar constantes fuera de vecindades del 0, por el Teorema de Convergencia Dominada tenemos que

$$\mathcal{I}\tilde{\phi}_n(x_0, t_0) = \mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot, t_0), x_0) + \mathcal{I}[B_\delta^c](\tilde{\phi}_n(\cdot, t_0), x_0) \longrightarrow \mathcal{I}_\delta(u, \phi, x_0, t_0).$$

Una aplicación como esta, hecha a detalle, del Teorema de Convergencia Dominada se verá en la demostración del Teorema 3.1.

Finalmente, como $\tilde{\phi}_n(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0) = u(x_0, t_0)$, $D\tilde{\phi}_n(x_0, t_0) = D\phi(x_0, t_0)$, $\partial_t\tilde{\phi}_n(x_0, t_0) = \partial_t\phi(x_0, t_0)$, y el operador $H$ es continuo concluimos

$$\partial_t\phi(x_0, t_0) + H_\delta[u, \phi, x_0, t_0] = \lim_{n\to+\infty} \left[\partial_t\tilde{\phi}_n(x_0, t_0) + H[\tilde{\phi}_n, x_0, t_0]\right] \leq 0.$$

□

Para terminar esta sección daremos dos resultados clásicos dentro de la teoría de soluciones viscosas, los cuales muestran la forma en que se comportan este tipo de soluciones cuando son multiplicadas por un escalar.

**Proposición 2.5.** *Sea $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ una sub-solución viscosa del problema*

(2.2). *Entonces, $-u$ es una super-solución viscosa del problema*

$$\partial_t u - H(x, t, -u, -Du, -\mathcal{I}u) = 0 \quad \text{en } Q_T,$$

*y análogamente para el caso en que $u$ es una super-solución*

*Demostración.* Claramente, $-u$ es SCI en $\overline{Q}_T$. Ahora, sea $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $-u - \phi$ tiene un mínimo local en $(x_0, t_0) \in Q_T$, digamos dentro de $C_\delta(x_0, t_0)$. Entonces, $u - (-\phi)$ tiene un máximo local en ese punto, por lo que aplicando las propiedades viscosas de $u$ tenemos

$$-\partial_t \phi(x_0, t_0) + H_\delta[u, -\phi, x_0, t_0] \leq 0,$$

pero

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\delta(u, -\phi, x_0, t_0) &= \mathcal{I}[B_\delta](-\phi(\cdot, t_0), x_0) + \mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot, t_0), x_0, -D\phi(x_0, t_0)) \\
&= -\mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot, t_0), x_0) - \mathcal{I}[B_\delta^c](-u(\cdot, t_0), x_0, D\phi(x_0, t_0)) \\
&= -\mathcal{I}_\delta(-u, \phi, x_0, t_0),
\end{aligned}$$

lo que nos da

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - H(x_0, t_0, -(-u(x_0, t_0)), -D\phi(x_0, t_0), -\mathcal{I}_\delta(-u, \phi, x_0, t_0)) \geq 0;$$

es decir, $-u$ es una super-solución viscosa del problema mencionado. $\square$

**Proposición 2.6.** *Sean $u \colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ una sub-solución viscosa de* (2.2), *$\lambda > 0$ y definamos $\bar{u} = \lambda u$. Entonces, $\bar{u}$ es una sub-solución viscosa al problema*

$$\partial_t u + \lambda H(x, t, \lambda^{-1}u, \lambda^{-1}Du, \lambda^{-1}\mathcal{I}u) = 0 \quad \text{en } Q_T.$$

*Demostración.* Sea $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $\bar{u} - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0, t_0) \in Q_T$, digamos dentro de $C_\delta(x_0, t_0)$. Esto significa que la función $\lambda(u - \lambda^{-1}\phi)$ tiene un máximo local en $(x_0, t_0)$, y dado que $\lambda > 0$ esto también implica que $u - \lambda^{-1}\phi$ tiene un máximo local en este punto. Luego, aplicando el hecho que $u$ es una sub-solución viscosa tenemos

$$\partial_t \left[\lambda^{-1}\phi\right](x_0, t_0) + H_\delta[u, \lambda^{-1}\phi, x_0, t_0] \leq 0,$$

lo que combinado con $u = \lambda^{-1}\bar{u}$ implica

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + \lambda H(x_0,t_0,\lambda^{-1}\bar{u}(x_0,t_0),\lambda^{-1}D\phi(x_0,t_0),\lambda^{-1}\mathcal{I}_\delta(\bar{u},\phi,x_0,t_0)) \le 0,$$

y esto termina la demostración. $\square$

## 2.3. Preliminares al resultado de estabilidad

Adicional a las propiedades que demostramos en la sección anterior, en la demostración del resultado de estabilidad para las soluciones viscosas, es necesario poder relacionar los máximos de una sucesión de funciones que convergen hacia otra función, con el máximo de dicha función límite. Para ello, establecemos el siguiente resultado.

**Lema 2.7.** *Sean $v\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ una función SCS que posee un máximo local estricto en $(x_0,t_0) \in Q_T$ dentro de $C_\delta(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones SCS que convergen localmente uniformemente hacia $v$, y $0 < \sigma < \delta$. Entonces, existe una sucesión $\{(x_n,t_n)\}$, con $(x_n,t_n)$ máximo local de $v_n$ dentro de $C_\sigma(x_0,t_0)$, tal que $(x_n,t_n) \to (x_0,t_0)$ cuando $n \to +\infty$.*

*Demostración.* Dado que $v$ posee un máximo local estricto en $(x_0,t_0)$ dentro del cilindro $C_\delta(x_0,t_0) \cap \overline{Q}_T$, y $\sigma < \delta$, se sigue que

$$v(x_0,t_0) = \max_{C_\sigma(x_0,t_0)} v > \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} v,$$

el último máximo existe ya que la función $v$ es SCS y $\partial C_\sigma(x_0,t_0)$ es un conjunto compacto. Fijemos $\alpha = v(x_0,t_0) - \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} v > 0$.

Ahora, como $(v_n)$ converge localmente uniformemente hacia $v$ y $\partial C_\sigma(x_0,t_0)$ es compacto, deducimos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge N_1$ se verifica

$$|v_n(x,t) - v(x,t)| < \frac{\alpha}{2} \quad \forall (x,t) \in \partial C_\sigma(x_0,t_0);$$

asimismo, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge N_2$

$$|v_n(x_0,t_0) - v(x_0,t_0)| < \frac{\alpha}{2},$$

y fijamos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos puntos $(y_n, s_n) \in \partial C_\sigma(x_0, t_0)$ tales que

$$v_n(y_n, s_n) = \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} v_n,$$

al igual que antes, estos puntos existen ya que las funciones $v_n$ son SCS.

Con esto, para cada $n \geq N$ tenemos

$$v(y_n, s_n) - v_n(y_n, s_n) > -\frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad v_n(x_0, t_0) - v(x_0, t_0) > -\frac{\alpha}{2},$$

de donde

$$v_n(x_0, t_0) - v_n(y_n, s_n) > v(x_0, t_0) - v(y_n, s_n) - \alpha \geq 0;$$

es decir

$$v_n(x_0, t_0) > \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} v_n.$$

Dado que $v_n$ tiene un máximo local, denotado por $(x_n, t_n)$, en la clausura del cilindro, lo anterior nos dice que este máximo no puede ocurrir en el borde, por lo que $(x_n, t_n) \in C_\sigma(x_0, t_0)$. Esto en particular nos muestra que esta sucesión de máximos locales está acotada.

Ahora, debemos probar que esta sucesión converge hacia $(x_0, t_0)$. Para ello, consideremos $(y, s)$ un punto límite de una sub-sucesión de $\{(x_n, t_n)\}$. Además, consideremos $(z, r) \in C_\sigma(x_0, t_0)$, por lo que $v_n(x_n, t_n) \geq v_n(z, r)$; y como la sucesión de funciones converge localmente uniformemente hacia $v$, tomando el límite (a través de una sub-sucesión) obtenemos $v(y, s) \geq v(z, r)$. Esto implica que $(y, s)$ es un máximo de $v$ en $C_\sigma(x_0, t_0)$, lo cual solo puede ocurrir si $(y, s) = (x_0, t_0)$, pues este es un máximo estricto.

De esta manera, hemos probado que todas las sub-sucesiones convergentes de $(x_n, t_n)$ convergen hacia $(x_0, t_0)$, y como la sucesión es acotada podemos concluir que $(x_n, t_n) \to (x_0, t_0)$. $\square$

## 2.4. Preliminares al método de Perron

Para poder demostar el método de Perron necesitamos de un concepto que nos permitirá definir la noción de solución viscosa *discontinua*. A continuación expondremos dicha noción y su relación con el supremo de sub-soluciones y el ínfimo de super-soluciones viscosas.

Dada una función $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ acotada, definimos su *envolvente semi-continua superior* y su *envolvente semi-continua inferior*, $u^*$ y $u_*$ respectivamente, como

$$u^*(x,t) = \limsup_{(x',t')\to(x,t)} u(x',t') \quad \text{y} \quad u_*(x,t) = \liminf_{(x',t')\to(x,t)} u(x',t').$$

**Definición 2.2.** *Decimos que una función $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ acotada es una* sub-solución viscosa discontinua *de* (2.2) *si $u^*$ es una sub-solución viscosa. De igual manera, decimos que es una* super-solución viscosa discontinua *de* (2.2) *si $u_*$ es una super-solución viscosa. Finalmente, $u$ es una* solución viscosa discontinua *si es tanto sub-solución como super-solución viscosa discontinua.*

Ahora, daremos un lema que nos permite tomar el supremo de una familia de sub-soluciones viscosas discontinuas, un paso clave en la demostración del Método de Perron.

**Lema 2.8.** *Sea $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una familia de sub-soluciones viscosas discontinuas, la cual está acotada uniformemente por arriba en $\overline{Q}_T$. Entonces, la función*

$$u(x,t) = \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} u_\alpha(x,t)$$

*es una sub-solución viscosa discontinua de* (2.2).

*Demostración.* Sea $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $u^*-\phi$ posee un máximo local estricto en $(x_0,t_0) \in Q_T$, digamos dentro de $C_\delta(x_0,t_0)$; además, fijemos $0 < \sigma < \delta$. De esta forma, existe $\eta > 0$ tal que

$$(u^* - \phi)(x_0,t_0) \geq \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} (u^* - \phi) + \eta.$$

Por la definición de $u^*$, existe $\{(x_n,t_n)\}$ una sucesión de puntos que converge hacia $(x_0,t_0)$ y tal que $u(x_n,t_n) \to u^*(x_0,t_0)$. Adicionalmente, por la definición de $u$ y la caracterización del supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \in \mathscr{A}$ tal que

$$u_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq u(x_n,t_n) - \frac{1}{n}.$$

Además, $u^*$ es SCS por lo que

$$u^*(x_0,t_0) \geq \limsup_{n\to+\infty} u^*(x_n,t_n).$$

Luego, como $u^*$ es la función SCS más pequeña que mayora a $u$ se sigue que $u^* \geq u \geq u_{\alpha_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $u^* \geq u^*_{\alpha_n}$, y de esto

$$\limsup_{n\to+\infty} u^*(x_n,t_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n);$$

de manera similar, como $u^*_{\alpha_n} \geq u_{\alpha_n}$ deducimos que

$$\liminf_{n\to+\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} u_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \lim_{n\to+\infty}\left[u(x_n,t_n) - \frac{1}{n}\right] = u^*(x_0,t_0),$$

y concatenando todas estas desigualdades nos da

$$u^*(x_0,t_0) \geq \limsup_{n\to+\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \geq u^*(x_0,t_0),$$

es decir, $u^*_{\alpha_n}(x_n,t_n) \to u^*(x_0,t_0)$.

A partir de esta convergencia colegimos la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica

$$(u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n,t_n) - (u^* - \phi)(x_0,t_0) \geq -\frac{\eta}{2},$$

de donde, gracias a que $u^* \geq u^*_{\alpha_n}$,

$$\begin{aligned}(u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n,t_n) &\geq (u^* - \phi)(x_0,t_0) - \frac{\eta}{2}\\ &\geq \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} (u^* - \phi) + \frac{\eta}{2}\\ &> \max_{\partial C_\sigma(x_0,t_0)} (u^*_{\alpha_n} - \phi),\end{aligned}$$

lo que muestra que el máximo local de $u^*_{\alpha_n} - \phi$ ocurre dentro de $C_\sigma(x_0,t_0)$. Denotemos a este punto por $(y_n,s_n)$ y observemos que esta sucesión es acotada. Dado que $u_{\alpha_n}$ es una sub-solución viscosa discontinua, esto implica que

$$\partial_t\phi(y_n,s_n) + H_{\sigma_1}[u^*_{\alpha_n},\phi,y_n,s_n] \leq 0.$$

Seguidamente, probemos que $(y_n,s_n) \to (x_0,t_0)$ y que $u^*_{\alpha_n}(y_n,s_n) \to u^*(x_0,t_0)$.

Para ello, observemos que por la maximalidad de los puntos $(x_0, t_0)$, $(y_n, s_n)$ y porque $u^* \geq u^*_{\alpha_n}$, tenemos

$$(u^* - \phi)(x_0, t_0) \geq (u^* - \phi)(y_n, s_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(y_n, s_n) \geq (u^*_{\alpha_n} - \phi)(x_n, t_n),$$

donde el lado derecho de la última desigualdad converge hacia $(u^* - \phi)(x_0, t_0)$. Ahora, consideremos $(y, s)$ el límite de una sub-sucesión de $\{(y_n, s_n)\}$. Gracias a que la función $u^*$ es SCS, por las desigualdades anteriores tenemos que

$$(u^* - \phi)(y, s) \geq \limsup_{k \to +\infty} (u^* - \phi)(y_{n_k}, s_{n_k}) \geq (u^* - \phi)(x_0, t_0),$$

lo que significa que $(y, s)$ es un máximo local de $u^* - \phi$ en $C_\sigma(x_0, t_0)$, y dado que $(x_0, t_0)$ es un máximo local estricto sobre este conjunto, se verifica $(y, s) = (x_0, t_0)$. Así, hemos probado que toda sub-sucesión convergente de $\{(y_n, s_n)\}$ converge hacia $(x_0, t_0)$ y por tanto colegimos que $(y_n, s_n) \to (x_0, t_0)$. Conociendo esto, y aplicando nuevamente las desigualdades anteriores, también deducimos que $u^*_{\alpha_n}(y_n, s_n) \to u^*(x_0, t_0)$.

Finalmente, gracias a que la familia $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ está acotada uniformemente por arriba, siguiendo un razonamiento similar al que se hará Teorema 3.1, obtenemos

$$\limsup_{n \to +\infty} \mathcal{I}_\sigma(u^*_{\alpha_n}, \phi, y_n, s_n) \leq \mathcal{I}_\sigma(u^*, \phi, x_0, t_0),$$

lo que a su vez nos permite concluir que

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H_\delta[u^*, \phi, x_0, t_0] \leq 0,$$

es decir $u$ es una sub-solución viscosa discontinua de (2.2). □

Este resultado se puede extender de manera inmediata para el caso de super-soluciones, como lo mostramos a continuación.

**Corolario 2.9.** *Sea $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ una familia de super-soluciones viscosas discontinuas, la cual está acotada uniformemente por abajo en $\overline{Q}_T$. Entonces, la función*

$$u(x, t) = \inf_{\alpha \in \mathscr{A}} u_\alpha(x, t)$$

*es una super-solución viscosa discontinua de* (2.2).

*Demostración.* Notemos que

$$\inf_{\alpha\in\mathscr{A}} u_\alpha(x,t) = -\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{-u_\alpha(x,t)\},$$

pero por la Proposición 2.5 sabemos que cada $-u_\alpha$ es sub-solución discontinua a una variación del problema (2.2). Aplicando el lema anterior a esta familia de funciones deducimos que la función definida por

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{-u_\alpha(x,t)\} \quad \forall (x,t)\in \overline{Q}_T$$

es una sub-solución a este problema, y aplicando nuevamente la Proposición 2.5 se sigue el resultado. □

Para terminar esta sección, como veremos en la demostración del Método de Perron es necesario construir, a partir de una función dada, una función test adecuada que nos permita derivar una contradicción. Es decir, una función test que pueda ser aplicada en la definición de sub-solución viscosa. Dado que esta construcción no es trivial, la presentamos en el siguiente resultado.

**LEMA 2.10.** *Sean* $(x_0,t_0)\in Q_T$, $\phi\in C^2(\overline{Q}_T)$ *acotada y* $\theta>0$ *tales que*

$$\partial_t\phi(x_0,t_0) + H[\phi,x_0,t_0] < -\theta. \tag{2.6}$$

*Entonces, existe* $r_0>0$ *tal que para todo* $0<r<r_0$, $(\bar{x},\bar{t})\in C_r(x_0,t_0)$ *y todo* $\delta'>0$, *existe* $\varepsilon_0>0$ *pequeño en términos de* $\delta'$ *de manera que, para todo* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, *la función* $\tilde{\phi}$ *definida como*

$$\tilde{\phi}(x,t) = \begin{cases} \phi(x,t)+\varepsilon & \text{en } C_{\delta'}(\bar{x},\bar{t}) \\ \phi(x,t) & \text{en } C_{\delta'}(\bar{x},\bar{t})^c \end{cases}$$

*satisface la desigualdad*

$$\partial_t\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) + H[\tilde{\phi},\bar{x},\bar{t}] < 0.$$

*Demostración.* Gracias a que la función $\phi$ es suave y acotada, por la continuidad de la integral respecto a un parámetro deducimos que la función $(x,t) \mapsto \mathcal{I}\phi(x,t)$ es continua. Luego, por la continuidad de $H$ y (2.6) existe $r_0 > 0$ (en función de $\theta$) tal que para todo $0 < r < r_0$ se verifica

$$\partial_t \phi(x,t) + H[\phi, x, t] \leq -\frac{\theta}{2} \quad \forall (x,t) \in C_r(x_0,t_0). \tag{2.7}$$

Ahora, fijemos $0 < r < r_0$, $(\bar{x},\bar{t}) \in C_r(x_0,t_0)$ y $\delta' > 0$, y para $\varepsilon > 0$ por determinar consideramos la función $\tilde{\phi}$ definida como en el enunciado del lema. De esta forma,

$$\partial_t \tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = \partial_t \phi(\bar{x},\bar{t}) \quad \text{y} \quad D\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = D\phi(\bar{x},\bar{t}),$$

y estudiando la primera componente del operador no local obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}[B_{\delta'}](\tilde{\phi}(\cdot,\bar{t}),\bar{x}) &= \int_{B_{\delta'}} [\tilde{\phi}(\bar{x}+y,\bar{t}) - \tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}),y\rangle]\,\nu(dy) \\
&= \int_{B_{\delta'}} [\phi(\bar{x}+y,\bar{t}) + \varepsilon - \phi(\bar{x},\bar{t}) - \varepsilon - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(\bar{x},\bar{t}),y\rangle]\,\nu(dy) \\
&= \mathcal{I}[B_{\delta'}](\phi(\cdot,\bar{t}),\bar{x}).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
I[B^c_{\delta'}](\tilde{\phi}(\cdot,\bar{t}),\bar{x}) &= \int_{B^c_{\delta'}} [\phi(\bar{x}+y,\bar{t}) - \phi(\bar{x},\bar{t}) - \varepsilon - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(\bar{x},\bar{t}),y\rangle]\,\nu(dy) \\
&= \mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot,\bar{t}),\bar{x}) - \epsilon \int_{B^c_{\delta'}} \nu(dy),
\end{aligned}$$

pero la última integral es finita por la propiedad de integrabilidad de Lévy, entonces podemos escribir

$$I[B^c_{\delta'}](\tilde{\phi}(\cdot,\bar{t}),\bar{x}) = I[B_{\delta'}](\phi(\cdot,\bar{t}),\bar{x}) - \varepsilon C_{\delta'}$$

para cierta $C_{\delta'} > 0$, y con esto tenemos

$$\mathcal{I}\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = \mathcal{I}\phi(\bar{x},\bar{t}) - \varepsilon C_{\delta'}.$$

Al reemplazar todo lo obtenido en (2.7) se sigue que

$$\partial_t \tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) + H(\bar{x},\bar{t},\phi(\bar{x},\bar{t}), D\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{y}), \mathcal{I}\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) + \varepsilon C_{\delta'}) \leq -\frac{\theta}{2},$$

lo que combinado con la continuidad de $H$ y tomando $\varepsilon$ pequeño en términos de $\delta'$ y $\theta$ nos da

$$\partial_t\tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) + H[\tilde{\phi},\bar{x},\bar{t}] < 0.$$

□

## 2.5. Preliminares al Principio de Comparación

En esta última sección presentamos algunos resultados que nos serán útiles en la demostración del Principio de Comparación. Estos nos permitirán realizar perturbaciones adecuadas a las sub y super-soluciones viscosas, de manera que podamos asegurar la existencia de un máximo global de dichas soluciones. Así, podremos aplicar sus propiedades viscosas para poder derivar una contradicción.

Llegados a este punto, debemos incluir una hipótesis adicional sobre $H$. A partir de aquí, asumimos que $H$ es un *función propia*; es decir, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $x, t, p, l$ y $u \geq v$ se cumple

$$H(x,t,u,p,l) - H(x,t,v,p,l) \geq \lambda_0(u-v). \tag{H2}$$

**LEMA 2.11.** *Sea $u$ una sub-solución viscosa del problema* (2.2). *Entonces, para cada $\eta > 0$, la función $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \eta t$ es una sub-solución viscosa del problema*

$$\partial_t u + H(x,t,u,Du,\mathcal{I}u) = -\eta \quad \text{en } Q_T.$$

*Demostración.* Consideremos $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $\tilde{u} - \phi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0) \in Q_T$, digamos dentro de $C_\delta(x_0,t_0)$. Si definimos $\psi(x,t) = \phi(x,t) + \eta t$, entonces $\psi \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\tilde{u} - \phi = u - \psi$, lo que implica que $u - \psi$ tiene un máximo local en $(x_0,t_0)$ dentro de $C_\delta(x_0,t_0)$. Así, como $u$ es subsolución viscosa deducimos que

$$\partial_t\psi(x_0,t_0) + H_\delta[u,\psi,x_0,t_0] \leq 0.$$

Por otro lado, también tenemos

$$\mathcal{I}[B_\delta](\psi(\cdot,t_0),x_0)=\mathcal{I}[B_\delta](\phi(\cdot,t_0),x_0),$$

y

$$\mathcal{I}[B_\delta^c](\tilde{u}(\cdot,t_0),x_0,D\phi(x_0,t_0))=\mathcal{I}[B_\delta^c](u(\cdot,t_0),x_0,D\psi(x_0,t_0)),$$

lo que implica que $\mathcal{I}_\delta(u,\psi,x_0,t_0)=\mathcal{I}_\delta(\tilde{u},\phi,x_0,t_0)$. Además, por (H2) y dado que $\tilde{u}(x_0,t_0)\le u(x_0,t_0)$ obtenemos

$$H_\delta[u,\psi,x_0,t_0]-H(x_0,t_0,\tilde{u}(x_0,t_0),D\psi(x_0,t_0),\mathcal{I}_\delta(u,\psi,x_0,t_0))\ge 0,$$

lo que combinado con lo anterior y, el hecho que $D\psi=D\phi$, puede escribirse como

$$H_\delta[\tilde{u},\phi,x_0,t_0]\le H_\delta[u,\psi,x_0,t_0].$$

Pero también tenemos que $\partial_t\psi=\partial_t\phi+\eta$, y así

$$\partial_t\phi(x_0,t_0)+H_\delta[\tilde{u},\phi,x_0,t_0]\le \partial_t\psi(x_0,t_0)-\eta+H_\delta[u,\psi,x_0,t_0]\le -\eta,$$

como queríamos. $\square$

**Lema 2.12.** *Sea $\psi\in C^2(\mathbb{R}^N)$ acotada tal que $\|\psi\|_{C^2(\mathbb{R}^N)}\le\Lambda$ para algún $\Lambda>0$. Para $\beta>0$ definimos la función*

$$\psi_\beta(x)=\psi(\beta x)\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^N.$$

*Entonces, $\psi_\beta$ satisface las siguientes acotaciones*

$$\|D\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\le\Lambda\beta,\quad \|D^2\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\le\Lambda\beta^2,\quad \|\mathcal{I}\psi_\beta(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\le\Lambda o_\beta(1),$$

*donde $o_\beta(1)\to 0$ cuando $\beta\to 0$.*

*Demostración.* Primero recordemos que

$$\|\psi\|_{C^2(\mathbb{R}^N)}=\max_{|\alpha|\le 2}\|\partial^\alpha\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

donde hemos usado la notación con multi-índices para las derivadas.

Además, también

$$\|D\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \max_{1\leq i\leq N} \|\partial_j\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

donde $\partial_j\psi$ denota la derivada parcial de $\psi$ con respecto a la $j$-ésima variable.

Luego, observemos

$$\partial_j[\psi_\beta](x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\big[\psi(\beta x)\big] = \beta\partial_j\psi(\beta x),$$

lo que implica

$$\|D\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \beta\|D\psi(\beta\,\cdot\,)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \beta\|D\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \beta\|\psi\|_{C^2(\mathbb{R}^N)} \leq \beta\Lambda,$$

y de manera análoga se obtiene que $\|D^2\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda\beta^2$

Por otro lado, como la función $\psi$ es de clase $C^2$, a través de una expansión en serie de Taylor de segundo orden obtenemos

$$|\mathcal{I}[B](\psi_\beta, x)| \leq \int_B |y|^2\|D^2\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\,\nu(dy) \leq \Lambda\beta^2\int_B |y|^2\,\nu(dy);$$

de la misma manera, por una expansión en serie de Taylor de primer orden se sigue que

$$|\mathcal{I}[B_{1/\sqrt{\beta}}\setminus B](\psi_\beta, x)| \leq \int_{B_{1/\sqrt{\beta}}\setminus B} |y|\|D\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\,\nu(dy) \leq \Lambda\beta\int_{B_{1/\sqrt{\beta}}\setminus B}|y|\,\nu(dy),$$

y por el conjunto sobre el cual estamos integrando deducimos

$$|\mathcal{I}[B_{1/\sqrt{\delta}}\setminus B](\psi_\beta, x)| \leq \Lambda\sqrt{\beta}\int_{B_{1/\sqrt{\beta}}\setminus B}\nu(dy) \leq \Lambda\sqrt{\beta}\int_{B^c}\nu(dy);$$

luego, usando el hecho que $\|\psi_\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\psi_\beta\|_{C^2(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda$, conseguimos

$$|\mathcal{I}[B^c_{1/\sqrt{\beta}}](\psi_\beta, x)| \leq 2\Lambda\int_{B^c_{1/\sqrt{\beta}}}\nu(dy) = 2\Lambda o_\beta(1).$$

Por todo lo encontrado anteriormente y la propiedad de integrabilidad de Lévy, para cierta constante $C > 0$ podemos afirmar que

$$|\mathcal{I}\psi_\beta(x)| \leq C\Lambda\beta^2 + C\Lambda\sqrt{\beta} + 2\Lambda o_\beta(1) \quad ,\forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

de donde concluimos que $\|\mathcal{I}\psi_\beta(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda o_\beta(1)$. □

El lema anterior nos permite afirmar que la función $\psi_\beta$ ahí definida verifica $D\psi_\beta, D^2\psi_\beta, \mathcal{I}\psi_\beta = o_\beta(1)$, donde $o_\beta(1) \to 0$ cuando $\beta \to 0$.

Finalmente, como veremos más adelante serán necesarias hipótesis adicionales para la demostración del principio de comparación, y para establecer dichas hipótesis debemos contar con otro concepto, el de *módulo de continuidad*.

**DEFINICIÓN 2.3.** *Un* módulo de continuidad *es una función* $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *continua en 0 y que se anula en este punto. Es decir, cumple la condición*

$$\lim_{x\to 0} \omega(x) = \omega(0) = 0.$$

# Capítulo 3

## Resultados, conclusiones y recomendaciones

### 3.1. Resultados

En esta sección presentaremos los cuatro resultados más fuertes que se obtuvieron durante el desarrollo de este componente. El primero corresponde a un resultado de estabilidad de las soluciones viscosas al problema (2.2), el cual nos permite realizar argumentos de paso al límite en este tipo de soluciones. Este resultado procede de una adaptación del Teorema 2.6 presentado en [3].

Luego presentamos el método de Perron que nos asegura la existencia de una solución viscosa discontinua a partir de una sub y una super-solución viscosa discontinua. Este teorema se encuentra en [9] y fue desarrollado en detalle tras un estudio de la bibliografía disponible

Tras esto, precisamos la noción de un principio de comparación y enunciamos y demostramos dicho principio en dos contextos. Primero lo hacemos para una versión simplificada del problema (2.2) en la cual el Hamiltoniano no depende del tiempo explícitamente; en este caso nos basamos en el resultado presentado en [9]. Después de entender bien este problema simplificado, establecemos un principio de comparación para el caso general que nos interesa, y para lo cual nos basamos en lo expuesto en [10].

Finalmente, dado que para poder aplicar el método de Perron necesitamos de una sub y una super-solución viscosa para el problema (2.2), mostramos cómo construir dichas soluciones. Así, haciendo uso del método de Perron y el Principio de Comparación, aseguraremos la existencia y unicidad de soluciones viscosas continuas para el problema en horizonte finito. Y para terminar, tras hacer $T \to +\infty$ concluiremos la existencia de este tipo de soluciones para nuestro problema objetivo (1.1).

### 3.1.1. Estabilidad de las soluciones

**TEOREMA 3.1** (Estabilidad). *Supongamos que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de sub - soluciones viscosas del problema* (2.2), *tal que está uniformemente acotada por arriba y converge localmente uniformemente hacia una función SCS* $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ *acotada. Entonces,* $u$ *también es una sub-solución viscosa de este problema.*

*Demostración.* Supongamos que $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ es tal que $u - \phi$ tiene un máximo local estricto en $(x_0, t_0) \in Q_T$, digamos dentro de $C_\delta(x_0, t_0)$, y fijemos $0 < \sigma < \delta$. Como $(u_n - \phi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge locamente uniformemente hacia $u - \phi$, por el Lema 2.7 sabemos que existe una sucesión $\{(x_n, t_n)\}$ de máximos locales de $u_n - \phi$ dentro de $C_\sigma(x_0, t_0)$, tales que $(x_n, t_n) \to (x_0, t_0)$.

Como $u_n$ es sub-solución viscosa de (2.2) sabemos que

$$\partial_t \phi(x_n, t_n) + H_\sigma[u_n, \phi, x_n, t_n] \leq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

y por la regularidad de $\phi$ y el hecho que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localmente uniformemente hacia $u$, sabemos que

$$u_n(x_n, t_n) \longrightarrow u(x_0, t_0), \quad \partial_t \phi(x_n, t_n) \longrightarrow \partial_t \phi(x_0, t_0) \quad \text{y} \quad D\phi(x_n, t_n) \longrightarrow D\phi(x_0, t_0).$$

Ahora, estudiemos si existe algún tipo de convergencia para la sucesión $\{I_\sigma(u_n, \phi, x_n, t_n)\}$. Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\sigma(u_n, \phi, x_n, t_n) = &\int_{B_\sigma} [\phi(x_n + y, t_n) - \phi(x_n, t_n) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_n, t_n), y\rangle]\, \nu(dy) \\ &+ \int_{B_\sigma^c} [u_n(x_n + y, t_n) - u_n(x_n, t_n) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_n, t_n), y\rangle]\, \nu(dy). \end{aligned}$$

Gracias a que $\phi$ es de clase $C^2$ y la sucesión $\{(x_n, t_n)\}$ está acotada, a través de un desarrollo en serie de Taylor obtenemos la siguiente mayoración

$$|\phi(x_n + y, t_n) - \phi(x_n, t_n) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_n, t_n), y\rangle| \leq C|y|^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, y \in B_\sigma,$$

y esta última función es integrable en $B_\sigma$. De esta manera, aplicando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{I}[B_\sigma](\phi(\cdot, t_n), x_n) = \mathcal{I}[B_\sigma](\phi(\cdot, t_0), x_0).$$

Por otro lado, gracias a que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada uniformemente por arriba existe $M_1 > 0$ tal que $u_n \leq M_1$ en $B_\sigma^c$, y aplicando el Lema de Fatou en su forma dominada se sigue que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_\sigma^c} u_n(x_n + y, t_n)\, \nu(dy) &\leq \int_{B_\sigma^c} \limsup_{n\to+\infty} u_n(x_n + y, t_n)\, \nu(dy)\\ &= \int_{B_\sigma^c} u(x_0 + y, t_0)\, \nu(dy);\end{aligned}$$

además, como $\{u_n(x_n, t_n)\}$ y $\{D\phi(x_n, t_n)\}$ convergen, existe $M_2 > 0$ tal que

$$|-u_n(x_n, t_n) - \mathbb{1}_B(\cdot)\langle D\phi(x_n, t_n), \cdot\rangle| \leq M_2 \quad \text{en } B_\sigma^c,\, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

y por el Teorema de convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} \int_{B_\sigma^c} [-u_n(x_n, t_n) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_n, t_n), y\rangle]\, \nu(dy)\\ &\quad = \int_{B_\sigma^c} [-u(x_0, t_0) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_0, t_0), y\rangle]\, \nu(dy).\end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to+\infty} \mathcal{I}[B_\sigma^c](u_n(\cdot, t_n), x_n, D\phi(x_n, t_n))\\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{B_\sigma{}^c} u_n(x_n + y, t_n)\, \nu(dy)\\ &\quad + \lim_{n\to+\infty} \int_{B_\sigma^c} [-u_n(x_n, t_n) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_n, t_n), y\rangle]\, \nu(dy)\\ &\leq \int_{B_\sigma^c} u(x_0 + y, t_0)\, \nu(dy) + \int_{B_\sigma^c} [-u(x_0, t_0) - \mathbb{1}_B(y)\langle D\phi(x_0, t_0), y\rangle]\, \nu(dy)\\ &= \mathcal{I}[B_\sigma^c](u(\cdot, t_0), x_0, D\phi(x_0, t_0)),\end{aligned}$$

y combinado con lo anterior colegimos

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathcal{I}_\sigma(u_n,\phi,x_n,t_n) \le \mathcal{I}_\sigma(u,\phi,x_0,t_0).$$

Luego, aplicando la elipticidad degenerada de $H$, (H1), el Lema 2.2, y la continuidad de $H$ conseguimos

$$\begin{aligned}
&\partial_t\phi(x_0,t_0) + H_\delta[u,\phi,x_0,t_0] \\
&\le \partial_t\phi(x_0,t_0) + H_\sigma[u,\phi,x_0,t_0] \\
&\le \partial_t\phi(x_0,t_0) + H\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),D\phi(x_0,t_0),\limsup_{n\to+\infty} I_\sigma(u_n,\phi,x_n,t_n)\right) \\
&= \partial_t\phi(x_0,t_0) + \lim_{n\to+\infty} H\left(x_n,t_n,u_n(x_n,t_n),D\phi(x_n,t_n),\sup_{k\ge n} I_\sigma(u_k,\phi,x_k,t_k)\right) \\
&\le \lim_{n\to+\infty}\left[\partial_t\phi(x_n,t_n) + H_\sigma[u_n,\phi,x_n,t_n]\right] \le 0,
\end{aligned}$$

es decir, hemos probado que $u$ es una sub-solución viscosa de (2.2). □

### 3.1.2. Método de Perron

**Teorema 3.2** (Perron). *Sean $u,v\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ tales que $u$ es una sub-solución viscosa discontinua y $v$ es una super-solución viscosa discontinua de (2.2). Además, supongamos que $u \le v$ en $\overline{Q}_T$. Entonces, existe una solución viscosa discontinua $w\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ tal que $u \le w \le v$ en $\overline{Q}_T$.*

*Demostración.* Definamos el conjunto

$$\Lambda = \{z\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R} \,|\, z^* \text{ es sub-solución viscosa de (2.2) y } u \le z \le v \text{ en } \overline{Q}_T\}$$

y notemos que $\Lambda \ne \varnothing$ ya que $u \in \Lambda$. Para cada $(x,t) \in \overline{Q}_T$ tomamos

$$w(x,t) = \sup_{z\in\Lambda} z(x,t),$$

y demostremos que esta es la solución buscada.

Primero, observemos que $w$ es una sub-solución viscosa discontinua del problema gracias al Lema 2.8, y además $u \le w \le v$ en $\overline{Q}_T$, por lo que $w \in \Lambda$. Ahora, debemos demostrar que esta es una super-solución viscosa discontinua, para lo cual procederemos por reducción al absurdo.

Entonces, por el Lema 2.4, supongamos que existe una función $\phi \in C^2(\overline{Q}_T)$ acotada tal que $w_* - \phi$ tiene un mínimo global en $(x_0, t_0) \in Q_T$, con $w_*(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$, y se verifica

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H[\phi, x_0, t_0] < -\theta, \tag{3.1}$$

para cierto $\theta > 0$.

Así, podemos considerar $r_0 > 0$ como en el Lema 2.10 y fijar $r, \delta' \in (0, r_0/2)$. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ se verifica que

$$\partial_t \tilde{\phi}(\bar{x}, \bar{t}) + H[\tilde{\phi}, \bar{x}, \bar{t}] < 0 \quad \forall (\bar{x}, \bar{t}) \in C_r(x_0, t_0), \tag{3.2}$$

donde $\tilde{\phi}$ es definida como en dicho lema.

Por otro lado, como $w \leq v$ se sigue que $w_* \leq v_*$. Si $w_*(x_0, t_0) = v_*(x_0, t_0)$, entonces, dado que $w_* - \phi$ tiene un mínimo global estricto en $(x_0, t_0)$ obtenemos

$$(v_* - \phi)(x_0, t_0) < w_* - \phi \leq v_* - \phi \quad \text{en } \overline{Q}_T,$$

es decir que $v_* - \phi$ tiene un mínimo global estricto en $(x_0, t_0)$, y por las propiedades viscosas de $v$ deducimos

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H[\phi, x_0, t_0] \geq 0,$$

lo que contradice (3.1). Por tanto, $w_*(x_0, t_0) < v_*(x_0, t_0)$ y así $\phi(x_0, t_0) < v_*(x_0, t_0)$.

Luego, como la función $v_*$ es SCI sabemos que, tomando $r, \varepsilon$ más pequeños si es necesario, se verifica

$$\phi(x, t) + \varepsilon < v_*(x, t) \leq v(x, t) \quad \forall (x, t) \in C_r(x_0, t_0);$$

además, como $0 = (w_* - \phi)(x_0, t_0) < w_* - \phi$ en $\overline{Q}_T$,tomando $\varepsilon$ más pequeño si es necesario, podemos asumir que

$$\phi(x, t) + \varepsilon < w_*(x, t) \quad \forall (x, t) \in C_{r_0}(x_0, t_0) \setminus C_r(x_0, t_0). \tag{3.3}$$

Ahora, definimos la función $z\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ como

$$z = \begin{cases} \max\{w, \phi + \varepsilon\} & \text{en } C_r(x_0, t_0) \\ w & \text{en } C_r(x_0, t_0)^c, \end{cases}$$

y dado que $u \le w \le v$ en $\overline{Q}_T$ y $\phi + \varepsilon < v$ en $C_r(x_0, t_0)$, tenemos que $u \le z \le v$.

Demostremos que $z^*$ es una sub-solución viscosa de (2.2). Para ello, consideramos $\psi \in C^2(\overline{Q}_T)$ tal que $z^* - \psi$ tiene un máximo local estricto en $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T$, digamos dentro de $C_\delta(\bar{x}, \bar{t})$, con $z^*(\bar{x}, \bar{t}) = \psi(\bar{x}, \bar{t})$. A partir de esto, separamos el análisis en dos casos.

Primero, supongamos que $z^*(\bar{x}, \bar{t}) = w^*(\bar{x}, \bar{t})$. Como $w^* \le z^*$, se sigue que $w^* - \psi$ tiene un máximo local estricto en $(\bar{x}, \bar{t})$ dentro de $C_\delta(\bar{x}, \bar{t})$, y aplicando las propiedades viscosas de $w^*$ tenemos

$$\partial_t \psi(\bar{x}, \bar{t}) + H_\delta[w^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}] \le 0,$$

pero gracias a que $w^* \le z^*$ y al caso que estamos considerando se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\delta(w^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}) &= \mathcal{I}[B_\delta](\psi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}) + \mathcal{I}[B_\delta^c](w^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\psi(\bar{x}, \bar{t})) \\ &\le \mathcal{I}[B_\delta](\psi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}) + \mathcal{I}[B_\delta^c](z^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\psi(\bar{x}, \bar{t})) \\ &= \mathcal{I}_\delta(z^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}), \end{aligned}$$

y aplicando la hipótesis (H1) obtenemos

$$\partial_t \psi(\bar{x}, \bar{t}) + H_\delta[z^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}] \le \partial_t \psi(\bar{x}, \bar{t}) + H_\delta[w^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}] \le 0,$$

lo que demuestra que $z^*$ es una sub-solución viscosa para (2.2).

Con respecto al caso cuando $w^*(\bar{x}, \bar{t}) < z^*(\bar{x}, \bar{t})$, notemos que esto implica que $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{C_r(x_0, t_0)}$, y por la definición de $z$ tenemos que

$$z^* = \max\{w^*, \phi + \varepsilon\} \quad \text{en } \overline{C_r(x_0, t_0)}. \tag{3.4}$$

Así, $(\bar{x}, \bar{t}) \in C_r(x_0, t_0)$ ya que por (3.3) sabemos que $\phi + \varepsilon < w_* \le w^*$ en la frontera del cilindro. Además, de esto también obtenemos $z^*(\bar{x}, \bar{t}) = \phi(\bar{x}, \bar{t}) + \varepsilon$.

Fijemos $0 < \delta'' < \min\{\delta', \delta\}$ de manera que $C_{\delta''}(\bar{x}, \bar{t}) \subseteq C_r(x_0, t_0)$. Así, tenemos $\psi(\bar{x}, \bar{t}) = \phi(\bar{x}, \bar{t}) + \varepsilon$ y por el hecho que $z^* - \psi$ tiene un máximo local en $(\bar{x}, \bar{t})$ también sabemos que

$$\psi > z^* \geq \phi + \varepsilon \quad \text{en } C_{\delta''}(\bar{x}, \bar{t}),$$

lo que implica que la función $\phi + \varepsilon - \psi$ tiene un máximo local en $(\bar{x}, \bar{t})$. Aplicando las condiciones necesarias de optimalidad, considerando que puede darse el caso $\bar{t} = T$, deducimos

$$D\phi(\bar{x}, \bar{t}) = D\psi(\bar{x}, \bar{t}) \quad \text{y} \quad \partial_t \phi(\bar{x}, \bar{t}) \geq \partial_t \psi(\bar{x}, \bar{t}).$$

A partir de esto se sigue que

$$\mathcal{I}[B_{\delta''}](\psi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}) = \mathcal{I}[B_{\delta''}](\psi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\phi(\bar{x}, \bar{t})) \geq \mathcal{I}[B_{\delta''}](\phi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}).$$

También recordemos que $r, \delta' \in (0, r_0/2)$, lo que conlleva a $C_{\delta'}(\bar{x}, \bar{t}) \subseteq C_{r_0}(x_0, t_0)$, y combinando esto con (3.3) y (3.4) colegimos que $z^* \geq \phi + \varepsilon$ en $C_{\delta'}(\bar{x}, \bar{t})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}[B^c_{\delta''}](z^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\psi(\bar{x}, \bar{t})) &= \mathcal{I}[B^c_{\delta'}](z^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\psi(\bar{x}, \bar{t})) \\
&\quad + \mathcal{I}[B_{\delta'} \setminus B_{\delta''}](z^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\psi(\bar{x}, \bar{t})) \\
&\geq \mathcal{I}[B^c_{\delta'}](z^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\phi(\bar{x}, \bar{t})) + \mathcal{I}[B_{\delta'} \setminus B_{\delta''}](\phi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}),
\end{aligned}$$

y con la desigualdad anterior se sigue que

$$\mathcal{I}_{\delta''}(z^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}) \geq \mathcal{I}[B^c_{\delta'}](z^*(\cdot, \bar{t}), \bar{x}, D\phi(\bar{x}, \bar{t})) + \mathcal{I}[B_{\delta'}](\phi(\cdot, \bar{t}), \bar{x}).$$

Luego, recordemos que $\phi \leq w_*$ en $\overline{Q}_T$ pues $w_* - \phi$ tiene un mínimo global en $(x_0, t_0)$, y dado que $w^* \leq z^*$ se sigue $\phi \leq z^*$, lo que junto a la definición de $\tilde{\phi}$ y a que $z^*(\bar{x}, \bar{t}) = \phi(\bar{x}, \bar{t}) + \varepsilon$ implica

$$\mathcal{I}_{\delta''}(z^*, \psi, \bar{x}, \bar{t}) \geq \mathcal{I}[B^c_{\delta'}](\tilde{\phi}(\cdot, \bar{t}), \bar{x}) + \mathcal{I}[B_{\delta'}](\tilde{\phi}(\cdot, \bar{t}), \bar{x}) = \mathcal{I}\tilde{\phi}(\bar{x}, \bar{t}).$$

Tras todo lo realizado anteriormente, por el Lema 2.2, (H1) y (3.2) obtenemos

$$\partial_t \psi(\bar{x},\bar{t}) + H_\delta[z^*,\psi,\bar{x},\bar{t}] \leq \partial_t \psi(\bar{x},\bar{t}) + H_{\delta''}[z^*,\psi,\bar{x},\bar{t}] \leq \partial_t \tilde{\phi}(\bar{x},\bar{t}) + H[\tilde{\phi},\bar{x},\bar{t}] < 0,$$

lo que demuestra que $z^*$ es una sub-solución viscosa.

Hasta este punto hemos demostrado que $z$ es, en efecto, una sub-solución viscosa discontinua que verifica $u \leq z \leq v$, por lo que podemos decir que $z \in \Lambda$. Tras esto, observemos que claramente $z \geq w$, por lo que finalmente demostraremos que $z \neq w$. Para ello, tomemos $\{(x_n, t_n)\}$ una sucesión que converge hacia $(x_0, t_0)$ y es tal que $\{w(x_n, t_n)\}$ converge a $w_*(x_n, t_n)$. Por la definición de $z$, para $n$ suficientemente grande se tiene que $z(x_n, t_n) \geq \phi(x_n, t_n) + \varepsilon$. Sumado a esto, por la regularidad de $\phi$ sabemos que $\phi(x_n, t_n) + \varepsilon \to \phi(x_0, t_0) + \varepsilon$. Entonces, sabemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|w(x_n, t_n) - w_*(x_0, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq N_1 \quad \text{y} \quad |\phi(x_n, t_n) - \phi(x_0, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq N_2,$$

tomando $N = \text{máx}\, N_1, N_2$ y recordando que $\phi(x_0, t_0) = w_*(x_0, t_0)$ colegimos que para cada $n \geq N$ se tiene

$$w(x_n, t_n) - \phi(x_n, t_n) < \varepsilon,$$

de donde $w(x_n, t_n) < z(x_n, t_n)$. Por tanto, las funciones $z$ y $w$ son diferentes, lo cual contradice la construcción de $w$.

De esta forma, concluimos que la función $w_*$ sí es una super-solución viscosa del problema, y por tanto $w$ es una solución viscosa discontinua de (2.2). □

### 3.1.3. Principio de Comparación

Primero, debemos saber a qué nos referimos con un Principio de Comparación. En la teoría de soluciones viscosas, esto no es más que un resultado que nos permite extender la relación existente en el borde entre una sub-solución y una super-solución a todo el dominio $\overline{Q}_T$. De manera más formal, presentamos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 3.1.** *Decimos que le problema* (2.2) *verifica un* principio de comparación *en* $\overline{Q}_T$ *si para todo par de funciones* $u, v\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R})$ *acotadas tales que* $u$ *es una sub-solución viscosa,* $v$ *es una super-solución viscosa del problema y* $u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$ *en* $\mathbb{R}^N$*, se verifica* $u \leq v$ *en* $\overline{Q}_T$*.*

La obtención de un principio de comparación puede dividirse en dos casos, uno en el que el Hamiltoniano $H$ no depende explícitamente del tiempo y otro en el que esta dependencia es considerada. Esto lo haremos para hacer notar la dificultad que envuelve la variable temporal en el problema.

Para lograr demostrar los dos resultados principales de esta sección, además de las hipótesis (H1) y (H2), añadimos una que nos permitirá el término $u$ y $l$ del Hamiltoniano.

(F1) $H$ es Lipschitz continua con respecto a su variable $l$, y uniformemente continua con respecto a las variables $(x, u, p)$.

**Hamiltoniano sin dependencia del tiempo**

En este primer caso consideraremos una versión del problema donde $H$ no depende explícitamente del tiempo; es decir, es de la forma $H(x, u, p, l)$. Para ello, necesitamos de una hipótesis adicional sobre la nolinealidad de este operador, en términos del gradiente a evaluar. Dicha hipótesis puede tener varias formas y en este trabajo presentamos dos de estas.

Así, consideramos los dos casos siguientes.

(F2) Para cada $R > 0$ existen módulos de continuidad $\omega, \omega_R$ tales que, para todo $|x|, |y|, |v| \leq R$, todo $l \in \mathbb{R}$, y si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces se verifica

$$H(y, v, p, l) - H(x, v, p + s(\beta), l) \leq \omega(\beta) + \omega_R((1 + |p|)|x - y|)$$

para todo $\varepsilon > 0$, donde $p = \varepsilon^{-1}(x - y)$.

(F3) Existe $m > 1$ tal que, para todo $R > 0$ y todo $\mu \in (0, 1)$ existen módulos de continuidad $\omega, \omega_R$ tales que para todo $|x|, |y|, |v| \leq R$ y todo $l \in \mathbb{R}$;

entonces, si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, tenemos

$$\begin{aligned}&H(y, v, p + s(\beta), l) - \mu H(x, \mu^{-1}v, \mu^{-1}p, \mu^{-1}l)\\&\quad\leq \omega_R(|x-y|)(1+|p|^m) + \omega(\beta)|p|^{m-1} + C_R(1-\mu) + (\mu-1)|p|^m\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $C_R > 0$, donde $p = \varepsilon^{-1}(x-y)$.

Con estas nuevas hipótesis y los resultados anteriores, podemos enunciar y demostrar uno de los resultados principales de esta sección.

**Teorema 3.3** (Principio de Comparación). *Sea $T > 0$ y consideremos el problema* (2.2) *(sin la dependencia en tiempo), asumiendo que se verifican* (H1), (H2), *(F1), y (F2) o (F3). Sean $u, v\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ una sub-solución y una super-solución viscosa al problema* (2.2)*, respectivamente, tales que $u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$ en $\mathbb{R}^N$. Entonces $u \leq v$ en $\overline{Q}_T$.*

Para este resultado dividiremos la demostración en dos casos en base a la hipótesis que consideremos.

*Demostración del Teorema 3.3 - Caso (F2).* Seguiremos el camino clásico para demostrar un principio de comparación, que es a través de un razonamiento por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que

$$M := \sup_{\overline{Q}_T}\{u - v\} > 0, \tag{3.5}$$

y consideremos una función $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ acotada que verifique la hipótesis del Lema 2.12 tal que $\psi \geq 0$, $\psi = 0$ en $B$ y $\psi \geq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ en $B_2^c$, y definimos $\psi_\beta$ como en el lema anterior, para $\beta > 0$.

Ahora, también definimos $u_\eta\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ como $u_\eta(x,t) = u(x,t) - \eta t$. Por la caracterización del supremos sabemos que existe $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$ tal que $(u-v)(x_0,t_0) > M/2$, por lo que para $\eta$ suficientemente pequeño tenemos que

$$(u_\eta - v)(x_0, t_0) > \frac{M}{2};$$

además, observemos que $u_\eta - v - \psi_\beta = u_\eta - v$ en $B_{1/\beta} \times [0,T]$ y dado que $M \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \leq \psi_\beta$ en $B^c_{2/\beta}$

$$u_\eta - v - \psi_\beta \leq u - v - M \leq 0 \quad \text{en } B^c_{2/\beta} \times [0,T].$$

De esta forma, si tomamos $\beta$ suficientemente pequeño podemos afirmar que $(x_0,t_0)\in B_{1/\beta}\times[0,T]$. Luego, como $u_\eta-v-\psi_\beta$ es SCS sabemos que existe $(x_1,t_1)\in \overline{B}_{2/\beta}\times[0,T]$ tal que

$$(u_\eta-v-\psi_\beta)(x_1,t_1)=\sup_{\overline{B}_{2/\beta}\times[0,T]}\{u_\eta-v-\psi_\beta\}>\frac{M}{2},$$

y dado que $u(\cdot,0)\leq v(\cdot,0)$ deducimos que $t_1>0$. Sumado a esto, como la función no es positiva en $B^c_{2/\beta}\times[0,T]$, colegimos que este es un máximo de la función en todo el dominio; es decir, $(x_1,t_1)\in\bar{B}_{2/\beta}\times(0,T]$ y

$$(u_\eta-v-\psi_\beta)(x_1,t_1)=\sup_{\overline{Q}_T}\{u_\eta-v-\psi_\beta\}=:\tilde{M}=\tilde{M}_{\beta,\eta}>\frac{M}{2}. \tag{3.6}$$

Y gracias al Lema 2.11 sabemos que $u_\eta$ es una sub-solución viscosa del problema

$$\partial_t u+H(x,u,Du,\mathcal{I}u)=-\eta \quad \text{en } Q_T. \tag{3.7}$$

Llegados a este punto, usamos una de las técnicas que aparece en la mayoría de demostraciones de principios de comparación, la duplicación de variables. Para ello, dado $\varepsilon>0$ definimos la siguiente función

$$\Phi_\varepsilon(x,s,y,t)=u_\eta(x,s)-v(y,t)-\phi_\varepsilon(x,s,y,t),$$

donde

$$\phi_\varepsilon(x,s,y,t)=\varepsilon^{-1}|x-y|^2+\varepsilon^{-1}(s-t)^2+\psi_\beta(x);$$

en este momento, estudiaremos varias propiedades con respecto a los máximos de está función $\Phi_\varepsilon$.

Por lo desarrollado anteriormente es claro que $\Phi_\varepsilon(x_0,t_0,x_0,t_0)>0$; mientras que, por las condiciones dadas sobre $\psi$, para cada $(x,s,y,t)\in\overline{Q}_T\times\overline{Q}_T$ con $x\in B^c_{2/\beta}$ se verifica

$$\Phi_\varepsilon(x,s,y,t)\leq u(x,s)-v(y,t)-\|u\|_\infty-\|v\|_\infty\leq 0.$$

Por otro lado, si tomamos $R>0$ suficientemente grande podemos asegurar que

$$\varepsilon^{-1}|x-y|^2\geq\|u\|_\infty+\|u\|_\infty \quad \forall(x,y)\in B_{2/\beta}\times B^c_R,$$

y así, para cada $(x,s,y,t) \in \overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$ con $(x,y) \in B_{2/\beta} \times B_R^c$ se verifica

$$\Phi_\varepsilon(x,s,y,t) \leq u(x,s) - v(y,t) - \|u\|_\infty - \|v\|_\infty \leq 0.$$

Luego, como la función $\Phi_\varepsilon$ es SCS existe $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \bar{B}_{2/\beta} \times [0,T] \times \bar{B}_R \times [0,T]$ en el que esta función alcanza su máximo dentro de este conjunto. Como fuera de dicho conjunto la función no es positiva deducimos que

$$\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon) = \sup_{\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T} \Phi_\varepsilon =: \tilde{M}_\varepsilon,$$

donde $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$ con $x_\varepsilon \in B_{2/\beta}$ y $y_\varepsilon \in \overline{B}_R$, es decir, la sucesión está acotada. Además, como $\Phi_\varepsilon(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon) \geq \Phi_\varepsilon(x_1, t_1, x_1, t_1)$ se sigue que $\tilde{M} \leq \tilde{M}_\varepsilon$, y si tomamos $K > 0$ tal que $u \leq K$ y $v \geq -K$ obtenemos

$$\tilde{M} \leq \tilde{M}_\varepsilon \leq 2K - \varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 - \varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon)^2,$$

lo que implica que las sucesiones $\varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2$ y $\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon)^2$ están acotadas, de donde $|x_\varepsilon - y_\varepsilon|, s_\varepsilon - t_\varepsilon \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Analicemos los puntos de acumulación de esta sucesión. Sea $(x,s,y,t) \in \overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$ un punto de acumulación de esta sucesión. A partir de aquí, y hasta el final de la demostración, trabajaremos con una sub-sucesión cuyo límite cuando $\varepsilon \to 0$ es este punto, pero usaremos la misma notación por simplicidad. Entonces, tenemos

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} |x - y| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \big[|x - x_\varepsilon| + |x_\varepsilon - y_\varepsilon| + |y_\varepsilon - y|\big] = 0,$$

es decir, $x = y$; y de manera análoga obtenemos que $s = t$. También podemos obtener una convergencia para el valor de $\tilde{M}_\varepsilon$, pues como la función $u_\eta - v - \psi_\beta$ es SCS

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \tilde{M}_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \big[u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) - \psi_\beta(x_\varepsilon)\big] \leq u_\eta(x,t) - v(x,t) - \psi_\beta(x), \tag{3.8}$$

de donde

$$\tilde{M} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \tilde{M}_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \tilde{M}_\varepsilon \leq \tilde{M};$$

igualmente, tenemos que

$$u_\eta(x,t) - v(x,t) - \psi_\beta(x) \le \tilde{M} \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{M}_\varepsilon \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \left[u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) - \psi_\beta(x_\varepsilon)\right]$$

lo que combinado con (3.8) muestra que $u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) - \psi_\beta(x_\varepsilon)$ converge a $u_\eta(x,t) - v(x,t) - \psi_\beta(x)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Así, hemos probado que $\tilde{M}_\varepsilon \to \tilde{M}$, y que todo valor de adherencia de la sucesión $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon)$ es de la forma $(x_1, t_1, x_1, t_1)$, con $(x_1, t_1)$ un máximo global de la función $u_\eta - v - \psi_\beta$. Dado que el máximo en esta función solo pude ocurrir con $t_1 > 0$, para $\varepsilon$ suficientemente pequeño podemos afirmar que $s_\varepsilon, t_\varepsilon > 0$. también, por la desigualdad triangular inversa tenemos

$$\begin{aligned}|\varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 + \varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon)^2| - |u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) - \psi_\beta(x_\varepsilon) - (u_\eta - v - \psi_\beta)(x,t)| \\ \le |\tilde{M} - \tilde{M}_\varepsilon|,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2 + \varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon)^2 \\ &\quad \le |\tilde{M} - \tilde{M}_\varepsilon| + |u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) - \psi_\beta(x_\varepsilon) - (u_\eta - v - \psi_\beta)(x,t)|,\end{aligned}$$

y por las convergencias anteriores deducimos que

$$\varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2, \varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon)^2 \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{3.9}$$

Después de haber estudiado las propiedades de la función $\Phi_\varepsilon$, el siguiente paso es tratar de usar las propiedades viscsoas de $u$ y $v$. Para ello, primero consideremos la función test $\varphi_1(x,s) = v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) + \phi_\varepsilon(x, s, y_\varepsilon, t_\varepsilon)$, por lo que $D\varphi_1(x,s) = 2\varepsilon^{-1}(x - y_\varepsilon) + D\psi_\beta(x)$ y $\partial_s\varphi_1(x,s) = 2\varepsilon^{-1}(s - t_\varepsilon)$. Puesto que la función $\Phi_\varepsilon$ tiene un máximo global en $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon)$ se sigue que $u_\eta - \varphi_1$ tiene un máximo global en $(x_\varepsilon, s_\varepsilon)$, y como $u_\eta$ es sub-solución viscosa de (3.7), para cada $\delta > 0$ tenemos

$$2\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon) + H_\delta[u_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon] \le -\eta. \tag{3.10}$$

De la misma manera, tomando la función test $\varphi_2(y,t) = u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y, t)$ tenemos $D\varphi_2(y,t) = 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - y)$ y $\partial_t\varphi_2(y,t) = 2\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t)$. Dado que $v - \varphi_2$ tiene un mínimo global en $(y_\varepsilon, t_\varepsilon)$ y $v$ es super-solución viscosa de (2.2), para cada $\delta > 0$ se verifica

$$2\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon) + H_\delta[v, \varphi_2, y_\varepsilon, t_\varepsilon] \geq 0;$$

a partir de aquí notaremos $q_\varepsilon = D\varphi_2(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)$ y $p_\varepsilon = D\varphi_1(x_\varepsilon, s_\varepsilon) = q_\varepsilon + D\psi_\beta(x_\varepsilon)$.

Posteriormente, como $\tilde{M}_\varepsilon > 0$ sabemos que $u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) > 0$, y gracias a la hipótesis H2 observamos que

$$\begin{aligned} H_\delta[u_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon] &\geq \lambda_0[u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon)] + H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon, t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)) \\ &\geq \lambda_0 \tilde{M} + H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon, t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)), \end{aligned}$$

reemplazando esto en (3.10) nos da

$$2\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon) + \lambda_0 \tilde{M} + H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon, t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)) \leq -\eta,$$

y restando a esto la desigualdad obtenida para $v$ se sigue

$$\lambda_0 \tilde{M} \leq -\eta + H_\delta[v, \varphi_2, y_\varepsilon, t_\varepsilon] - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon, t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)), \tag{3.11}$$

por lo que ahora trataremos de obtener una cota para la última resta, a la cual notaremos por $\mathcal{B}$, en términos de $\varepsilon$.

Primeramente, por la maximalidad de $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon)$, para cada $z \in B_\delta^c$ se verifica

$$\begin{aligned} u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon) \geq u_\eta(x_\varepsilon + z, s_\varepsilon) - v(y_\varepsilon + z, t_\varepsilon) \\ - \phi_\varepsilon(x_\varepsilon + z, s_\varepsilon, y_\varepsilon + z, t_\varepsilon), \end{aligned}$$

de donde

$$v(y_\varepsilon + z, t_\varepsilon) - v(y_\varepsilon, t_\varepsilon) \geq u_\eta(x_\varepsilon + z, s_\varepsilon) - u_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon) - \psi_\beta(x_\varepsilon + z) + \psi_\beta(x_\varepsilon);$$

usando esto tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}[B_\delta^c](v(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon,q_\varepsilon) \geq & \int_{B_\delta^c} [u_\eta(x_\varepsilon+z,s_\varepsilon)-u_\eta(x_\varepsilon,s_\varepsilon)-\mathbb{1}_B(z)\langle p_\varepsilon,z\rangle]\,\nu(dz) \\
& - \int_{B_\delta^c} [\psi_\beta(x_\varepsilon+z)-\psi_\beta(x_\varepsilon)-\mathbb{1}_B(z)\langle D\psi_\beta(x_\varepsilon),z\rangle]\,\nu(dz) \\
= & \, \mathcal{I}[B_\delta^c](u_\eta(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon,p_\varepsilon)-\mathcal{I}[B_\delta^c](\psi_\beta,x_\varepsilon) \\
\geq & \, \mathcal{I}[B_\delta^c](u_\eta(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon,p_\varepsilon)-\mathcal{I}\psi_\beta(x_\varepsilon),
\end{aligned}
$$

lo que combinado con el Lema 2.12 nos da

$$
\mathcal{I}[B_\delta^c](v(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon,q_\varepsilon) \geq \mathcal{I}[B_\delta^c](u_\eta(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon,p_\varepsilon)-o_\beta(1). \tag{3.12}
$$

Por otro lado, como $D^2\varphi_1(x,s)=2\varepsilon^{-1}I+D^2\psi_\beta(x)$, con $I$ la matriz identidad de orden $N$, por el Lema 2.12 y a través de un desarrollo de orden 2 para la función $\varphi_1$ al rededor del punto $(x_\varepsilon,s_\varepsilon)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}[B_\delta](\varphi_1(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon)| \leq & \int_{B_\delta} |\varphi_1(x_\varepsilon+z,s_\varepsilon)-\varphi_1(x_\varepsilon,s_\varepsilon)-\mathbb{1}_B(z)\langle p_\varepsilon,z\rangle|\,\nu(dz) \\
\leq & \, (2\varepsilon^{-1}+o_\beta(1))\int_{B_\delta} |z|^2\,\nu(dz);
\end{aligned}
$$

y de la misma forma, como $D^2\varphi_2(y,t)=2\varepsilon^{-1}I$,

$$
|\mathcal{I}[B_\delta](\varphi_2(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon)| \leq 2\varepsilon^{-1}\int_{B_\delta} |z|^2\,\nu(dz).
$$

Por estas dos desigualdades y la propiedad de integrabilidad de Lévy, se sigue

$$
\mathcal{I}[B_\delta](\varphi_1(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon)=(\varepsilon^{-1}+o_\beta(1))o_\delta(1) \quad \text{y} \quad \mathcal{I}[B_\delta](\varphi_2(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon)=\varepsilon^{-1}o_\delta(1), \tag{3.13}
$$

donde $o_\delta(1)\to 0$ cuando $\delta\to 0$ uniformemente con respecto a las demás variables.

Ahora, aplicando la hipótesis (F2) podemos ver que

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), q_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), q_\varepsilon + o_\beta(1), \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) \\ &\quad + H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta,\varphi_1,x_\varepsilon,s_\varepsilon)) \\ &\le \omega(\beta) + \omega_R(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + 2\varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2) \\ &\quad + H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta,\varphi_1,x_\varepsilon,s_\varepsilon)),\end{aligned}$$

pero por (3.12) sabemos que

$$\mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon) \ge \mathcal{I}[B_\delta](\varphi_2(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon) + \mathcal{I}[B_\delta^c](u_\eta(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon,p_\varepsilon) - o_\beta(1),$$

aplicando la elipticidad degenerada de $H$, (H1),

$$\begin{aligned}&H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) \\ &\quad \le H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}[B_\delta](\varphi_2(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon) + \mathcal{I}[B_\delta^c](u_\eta(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon,p_\varepsilon) - o_\beta(1)),\end{aligned}$$

y gracias a (F1) y (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned}&H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) - H(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon, \mathcal{I}_\delta(u_\eta,\varphi_1,x_\varepsilon,s_\varepsilon)) \\ &\quad \le L_F|\mathcal{I}[B_\delta](\varphi_2(\cdot,t_\varepsilon),y_\varepsilon) - \mathcal{I}[B_\delta](\varphi_1(\cdot,s_\varepsilon),x_\varepsilon) - o_\beta(1)| \\ &\quad \le L_F(\varepsilon^{-1}o_\delta(1) + \varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\beta(1)o_\delta(1) + o_\beta(1)) \\ &\quad = L_F(\varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\beta(1)),\end{aligned}$$

donde hemos usado $o_\beta(1)o_\delta(1) = o_\beta(1)$ pues un parámetro no afecta a la convergencia del otro.

Combinando esta última desigualdad con la cota anteriormente obtenida para $\mathcal{B}$ se sigue que

$$\mathcal{B} \le \omega(\beta) + \omega_R(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + 2\varepsilon^{-1}|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2) + L_F(\varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\beta(1)),$$

pero gracias a (3.9) esto puede reescribirse como

$$\mathcal{B} \le o_\varepsilon(1) + \varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\beta(1),$$

lo que reemplazado en (3.11) nos da

$$\lambda_0 \frac{M}{2} \leq -\eta + o_\varepsilon(1) + \varepsilon^{-1} o_\delta(1) + o_\beta(1).$$

Finalmente, tomando $\delta \to 0, \varepsilon \to 0$ y $\beta \to 0$ se sigue que $\lambda_0 M/2 \leq -\eta < 0$, lo cual es absurdo. Esto termina la demostración. $\square$

*Demostración del Teorema 3.3 - Caso (F3).* Este caso sigue las mismas líneas que el anterior, por lo que únicamente señalaremos donde se encuentran las principales diferencias.

Al igual que antes, razonamos por el absurdo y asumimos (3.5). Para $\mu \in (0,1)$ definimos $\bar{u} = \mu u$, y tomando $\mu$ lo suficientemente cercano a $1$ podemos afirmar que

$$\sup_{\overline{Q}_T} \{\bar{u} - v\} \geq \frac{2}{3} M.$$

Por la Proposición 2.6 sabemos que $\bar{u}$ es una sub-solución viscosa del problema

$$\partial_t u + \mu H(x, \mu^{-1} u, \mu^{-1} Du, \mu^{-1} \mathcal{I} u) = 0 \quad \text{en } Q_T.$$

Luego, introduciendo el mismo proceso de penalización anterior con los parámetros $\beta, \eta > 0$ suficientemente pequeños, obtenemos una expresión parecida a (3.6) con $u_\eta$ reemplazada por $\bar{u}_\eta$. En este caso, la función $\bar{u}_\eta$ es una sub-solución viscosa del problema

$$\partial_t u + \mu H(x, \mu^{-1} u, \mu^{-1} Du, \mu^{-1} \mathcal{I} u) = -\eta \quad \text{en } Q_T.$$

En este momento, aplicando la técnica de duplicación de variables, podemos concluir la existencia de un punto máximo $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \overline{Q}_T$ para la función

$$\Phi_\varepsilon(x, s, y, t) = \bar{u}_\eta(x, s) - v(y, t) - \varepsilon^{-1} |x - y|^2 - \varepsilon^{-1} (s - t)^2 - \psi_\beta(y),$$

notemos que esta función es la misma que usamos anteriormente, únicamente cambiando el punto de evaluación para la función $\psi_\beta$; esto no provoca mayores cambios en los cálculos, únicamente se intercambian los valores de $p_\varepsilon$ y $q_\varepsilon$ que teníamos.

Al igual que antes podemos deducir que todo valor de adherencia de la sucesión $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon)$ es de la forma $(x_1, t_1, x_1, t_1)$ con $(x_1, t_1)$ un máximo global de la función $\bar{u}_\eta - v - \psi_\beta$; y asimismo tenemos que $s_\varepsilon, t_\varepsilon > 0$ para $\varepsilon$ suficientemente pequeño. Además, es posible recuperar las convergencias (3.9).

Luego, usando las mismas funciones test $\varphi_1$, $\varphi_2$, las notaciones $p_\varepsilon = D\varphi_1(x_\varepsilon, s_\varepsilon) = 2\varepsilon^{-1}(x_\varepsilon - y_\varepsilon)$ y $q_\varepsilon = D\varphi_2(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = p_\varepsilon - D\psi_\beta(y_\varepsilon)$, y las propiedades viscosas de las funciones $\bar{u}_\eta$ y $v$ obtenemos

$$2\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon) + \mu H(x_\varepsilon, \mu^{-1}\bar{u}_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(\bar{u}_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)) \leq -\eta,$$
$$2\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon - t_\varepsilon) + H_\delta[v, \varphi_2, y_\varepsilon, t_\varepsilon] \geq 0;$$

pero gracias a la hipótesis H2 sabemos que

$$\begin{aligned}&H(x_\varepsilon, \mu^{-1}\bar{u}_\eta(x_\varepsilon, s_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(\bar{u}_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon))\\ &\quad \geq \lambda_0\mu^{-1}\tilde{M} + H(x_\varepsilon, \mu^{-1}v(y_\varepsilon, t_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(\bar{u}_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)),\end{aligned}$$

lo que combinado con las dos desigualdades anteriores nos permite obtener

$$\lambda_0\tilde{M} \leq -\eta + \mathcal{B}, \tag{3.14}$$

con

$$\mathcal{B} = H_\delta[v, \varphi_2, y_\varepsilon, t_\varepsilon] - \mu H(x_\varepsilon, \mu^{-1}v(y_\varepsilon, t_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(\bar{u}_\eta, \varphi_1, x_\varepsilon, s_\varepsilon)).$$

Gracias a que $(x_\varepsilon, s_\varepsilon, y_\varepsilon, t_\varepsilon)$ es un punto máximo de la función $\Phi_\varepsilon$, podemos seguir las mismas líneas para obtener la desigualdad (3.12), reemplazando $u_\eta$ por $\bar{u}_\eta$, lo que implica que

$$\mathcal{I}_\delta(v, \varphi_2, y_\varepsilon, t_\varepsilon) \geq \mathcal{I}[B_\delta](\varphi_2(\cdot, t_\varepsilon), y_\varepsilon) + I[B_\delta^c](\bar{u}_\eta(\cdot, s_\varepsilon), x_\varepsilon, p_\varepsilon) - o_\beta(1).$$

También, como estamos trabajando con las mismas funciones test, es inmediato que se tienen las identidades (3.13), intercambiando las funciones $\varphi_1$, $\varphi_2$ y sus respectivos puntos de evaluación. Tras esto, aplicando las hipótesis (F3), (H1) y (F1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= H(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), p_\varepsilon + o_\beta(1), \mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) \\
&\quad - \mu H(x_\varepsilon, \mu^{-1}v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) \\
&\quad + \mu H(x_\varepsilon, \mu^{-1}v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(v,\varphi_2,y_\varepsilon,t_\varepsilon)) \\
&\quad - \mu H(x_\varepsilon, \mu^{-1}v(y_\varepsilon,t_\varepsilon), \mu^{-1}p_\varepsilon, \mu^{-1}\mathcal{I}_\delta(\bar{u}_\eta,\varphi_1,x_\varepsilon,s_\varepsilon)) \\
&\leq \omega_R(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|)(1+|p_\varepsilon|^m) + \omega(\beta)|p_\varepsilon|^{m-1} + C_R(1-\mu) + (\mu-1)|p_\varepsilon|^m \\
&\quad + L_F(\varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\beta(1)),
\end{aligned}$$

pero si recordamos las convergencias (3.9) entonces podemos reescribir esto como

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &\leq L_F(\varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\beta(1)) + o_\varepsilon(1) \\
&\qquad + C_R(1-\mu) + o_\beta(1)|p_\varepsilon|^{m-1} + (o_\varepsilon(1) + (\mu-1))|p_\varepsilon|^m.
\end{aligned}$$

Dado que no conocemos el comportamiento del término $p_\varepsilon$, debemos buscar una forma de acotarlo, para lo cual consideraremos dos casos. Si este término está acotado, entonces $o_\beta(1)|p_\varepsilon|^{m-1} = o_\beta(1)$, y tomando $\varepsilon$ suficientemente pequeño en término de $\mu$ (digamos, que $o_\varepsilon(1) < (1-\mu)/2$) se sigue que

$$\mathcal{B} \leq \varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\varepsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1) + C(\mu-1)|p_\varepsilon|^m,$$

para cierta $C > 0$. Por otro lado, si no es acotado, entonces $1/|p_\varepsilon|$ converge a 0, por lo que para cierta $C > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &\leq \varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\varepsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1) + \left(o_\beta(1)\frac{1}{|p_\varepsilon|} + o_\varepsilon(1) + (\mu-1)\right)|p_\varepsilon|^m \\
&= \varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\varepsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1) + C(o_\beta(1)o_\varepsilon(1) + (\mu-1))|p_\varepsilon|^m.
\end{aligned}$$

Tras analizar estos dos casos, y dado que $o_\beta(1)o_\varepsilon(1) \geq 0$, podemos afirmar que en general se verifica

$$\mathcal{B} \leq \varepsilon^{-1}o_\delta(1) + o_\varepsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1) + C(o_\beta(1)o_\varepsilon(1) + (\mu-1))|p_\varepsilon|^m,$$

y como $\mu - 1 < 0$, si tomamos $\varepsilon$ más pequeño de ser necesario, en término de $\mu$ y de $\beta$, vemos que el término que involucra a $p_\varepsilon$ no es positivo, por lo que

$$\mathcal{B} \leq \varepsilon^{-1} o_\delta(1) + o_\varepsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1).$$

Finalmente, juntando esta cota para $\mathcal{B}$ con (3.14) obtenemos

$$\lambda_0 \frac{M}{2} \leq -\eta + \varepsilon^{-1} o_\delta(1) + o_\varepsilon(1) + C_R(1-\mu) + o_\beta(1),$$

y tomando $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\beta \to 0$ y $\mu \to 1$ obtenemos $\lambda_0 M/2 \leq -\eta < 0$, que es una contradicción. □

### Hamiltoniano con dependencia explícita del tiempo

Una vez que hemos estudiado el caso del Hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo, podemos lanzarnos al estudio completo del problema que nos interesa principalmente. Para ello, debemos hacer ciertas modificaciones a las hipótesis que tomamos en el caso anterior, de manera que se adapten a este contexto, y también podremos observar donde aparecen las dificultades de este caso en relación al anterior.

Así, tenemos las siguientes hipótesis.

**(F2')** Para todo $R > 0$ y todo $T > 0$, existen módulos de continuidad $\omega, \omega_{R,T}$ tales que, para todo $|x|, |y|, |v| \leq R$, $s, t \in [0, T]$, $l \in \mathbb{R}$, y si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces se verifica

$$H(y,t,v,p,l) - H(x,s,v,p+s(\beta),l) \leq \omega(\beta) + \omega_{R,T}((1+|p|)(|x-y|+|s-t|))$$

para todo $\gamma > 0$, con $p = \gamma^{-1}|x-y|$.

**(F3')** Existen $m > 1$ y $C > 0$ tales que, para todo $R > 0$, $T > 0$ y todo $\mu \in (0,1)$, existen módulos de continuidad $\omega, \omega_{R,T}$ tales que para todo $|x|, |y|, |v| \leq R$, $s, t \in [0, T]$, $l \in \mathbb{R}$, y si $s(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$, entonces

$$\begin{aligned} &H(y,t,v,p+s(\beta),l) - \mu H(x,s,\mu^{-1}v,\mu^{-1}p,\mu^{-1}l) \\ &\quad \leq \omega_{R,T}(|x-y|+|s-t|)(1+|p|^m) + \omega(\beta)|p|^{m-1} + C(1-\mu) + (\mu-1)|p|^m \end{aligned}$$

para todo $\gamma > 0$, donde $p = \gamma^{-1}(x-y)$.

Observemos que en la hipótesis (F2') aparece un término de la forma $|p||s-t|$. Este es el término problemático en la demostración, ya que si seguimos exactamente las mismas líneas que en el Teorema 3.3, aunque sabemos que $|s_\varepsilon - t_\varepsilon| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, $|p_\varepsilon|$ puede explotar y no podemos aplicar un paso al límite. Esta es la dificultad en este caso, y por eso realizaremos una modificación a la demostración que nos permitirá lidiar con ella.

**Teorema 3.4.** *Sea $T > 0$ y consideremos el problema* (2.2)*, asumiendo que se verifican* (H1)*,H2,(F1) y (F2') o (F3'). Sean $u, v\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ una sub-solución y una super-solución viscosa al problema* (2.2)*, respectivamente, tales que $u(\cdot, 0) \le v(\cdot, 0)$ en $\mathbb{R}^N$. Entonces $u \le v$ en $\overline{Q}_T$.*

*Demostración del Teorema 3.4 - Caso (F2').* Al igual que en el Teorema de la sección anterior, procedemos por contradicción, por lo que asumimos

$$M = \sup_{\overline{Q}_T}\{u - v\} > 0, \tag{3.15}$$

y tomamos una función $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ como en la demostración anterior. Además, siguiendo los mismos pasos realizados ahí, podemos afirmar que para $\eta > 0$ y $\beta > 0$ suficientemente pequeños, se verifica que

$$\max_{\overline{Q}_T}\{u_\eta - v - \psi_\beta\} =: \tilde{M} \ge \frac{M}{2},$$

donde $u_\eta$ es definida como antes, por lo que también es sub-solución viscosa del problema

$$\partial_t u + H(x, t, u, Du, \mathcal{I}u) = -\eta \quad \text{en } Q_T.$$

En este momento procedemos a aplicar la técnica de duplicación de variables, pero debemos considerar que la dependencia del tiempo en el Hamiltoniano nos obliga a hacer una nueva consideración con respecto a esta variable. Teniendo esto en mente, para $\gamma, \varepsilon > 0$ definimos la función $\Phi_{\gamma,\varepsilon}\colon \overline{Q}_T \times \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ como

$$\Phi_{\gamma,\varepsilon}(x, s, y, t) = u_\eta(x, s) - v(y, t) - \gamma^{-1}|x - y|^2 - \varepsilon^{-1}(s - t)^2 - \psi_\beta(x).$$

Al igual que antes podemos deducir la existencia de un punto $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{y}, \bar{t})$ (que depende de $\gamma$ y $\varepsilon$) tal que

$$\Phi_{\gamma,\varepsilon}(\bar{x}, \bar{s}, \bar{y}, \bar{t}) = \sup_{\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T} \Phi_{\gamma,\varepsilon} =: \tilde{M}_{\gamma,\varepsilon},$$

y de la misma forma que $\tilde{M}_{\gamma,\varepsilon} \geq \tilde{M}$. Además, también podemos afirmar que existe $K > 0$ (que depende únicamente de $u$, $v$ y $\psi_\beta$) tal que

$$\gamma^{-1}|\bar{x} - \bar{y}|^2 \leq K \quad \text{y} \quad \varepsilon^{-1}(\bar{s} - \bar{t})^2 \leq K. \tag{3.16}$$

Luego, dado que esta sucesión de máximos es acotada, vía una subsucesión y de la misma forma que antes, sabemos que existe un punto $(x^*, t^*) \in \overline{Q}_T$ tal que $\bar{x}, \bar{y} \to x^*$ y $\bar{s}, \bar{t} \to t^*$ cuando $\varepsilon, \gamma \to 0$. También podemos colegir bajo los mismos argumentos que

$$\lim_{\gamma,\varepsilon \to 0} \gamma^{-1}|\bar{x} - \bar{y}|^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\gamma,\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}|\bar{s} - \bar{t}|^2 = 0, \tag{3.17}$$

y que $\bar{s}, \bar{t} > 0$ para $\gamma$ y $\varepsilon$ suficientemente pequeños.

Ahora, usando las funciones test $\phi_1$ y $\phi_2$ definidas como

$$\begin{aligned} \phi_1(x, s) &= v(\bar{y}, \bar{t}) + \gamma^{-1}|x - \bar{y}|^2 + \varepsilon^{-1}(s - \bar{t})^2 + \psi_\beta(x) \\ \phi_2(y, t) &= u_\eta(\bar{x}, \bar{s}) - \gamma^{-1}|\bar{x} - y|^2 - \varepsilon^{-1}(\bar{s} - t)^2 - \psi_\beta(\bar{x}), \end{aligned}$$

y gracias a las propiedades viscosas de $u_\eta$ y $v$, para cada $\delta > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^{-1}(\bar{s} - \bar{t}) + H_\delta[u_\eta, \phi_1, \bar{x}, \bar{s}] &\leq -\eta \\ 2\varepsilon^{-1}(\bar{s} - \bar{t}) + H_\delta[v, \phi_2, \bar{y}, \bar{t}] &\geq 0, \end{aligned}$$

notaremos $\bar{q} = 2\gamma^{-1}(\bar{x} - \bar{y})$ y $\bar{p} = \bar{q} + D\psi_\beta(\bar{x})$.

Luego, aplicando la hipótesis H2 se sigue

$$\begin{aligned} H_\delta[u_\eta, \phi_1, \bar{x}, \bar{s}] &\geq \lambda_0(u_\eta(\bar{x}, \bar{s}) - v(\bar{y}, \bar{t})) + H(\bar{x}, \bar{s}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{p}, I_\delta(u_\eta, \phi_1, \bar{x}, \bar{s})) \\ &\geq \lambda_0 \tilde{M} + H(\bar{x}, \bar{s}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{p}, I_\delta(u_\eta, \phi_1, \bar{x}, \bar{s})), \end{aligned}$$

lo que reemplazado en la primera desigualdad anterior y restando ambas nos da

$$\lambda_0 \tilde{M} \leq -\eta + \mathcal{B}, \tag{3.18}$$

donde

$$\mathcal{B} = H_\delta[v, \phi_2, \bar{y}, \bar{t}] - H(\bar{x}, \bar{s}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{p}, I_\delta(u_\eta, \phi_1, \bar{x}, \bar{s})).$$

Usando la maximalidad del punto $(\bar{x}, \bar{s}, \bar{y}, \bar{t})$ deducimos nuevamente (3.12) y

$$\mathcal{I}[B_\delta](\phi_1(\cdot, \bar{s}), \bar{x}) = (\gamma^{-1} + o_\beta(1))o_\delta(1) \quad \text{y} \quad \mathcal{I}[B_\delta](\phi_2(\cdot, \bar{t}), \bar{y}) = \gamma^{-1} o_\delta(1),$$

donde $o_\delta(1) \to 0$ cuando $\delta \to 0$ uniformemente con respecto a las demás variables.

Ahora, aplicando las hipótesis (H1), (F2') y (F1).

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= H(\bar{y}, \bar{t}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{q}, \mathcal{I}_\delta(v, \phi_2, \bar{y}, \bar{t})) - H(\bar{x}, \bar{s}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{q} + o_\beta(1), \mathcal{I}_\delta(v, \phi_2, \bar{y}, \bar{t})) \\
&\quad + H(\bar{x}, \bar{s}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{p}, \mathcal{I}_\delta(v, \phi_2, \bar{y}, \bar{t})) - H(\bar{x}, \bar{s}, v(\bar{y}, \bar{t}), \bar{p}, I_\delta(u_\eta, \phi_1, \bar{x}, \bar{s})) \\
&\leq \omega(\beta) + \omega_{R,T}((1 + |\bar{q}|)(|\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{s} - \bar{t}|)) + L_H(\gamma^{-1} o_\delta(1) + o_\beta(1)) \\
&= \omega_{R,T}((1 + |\bar{q}|)(|\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{s} - \bar{t}|)) + \gamma^{-1} o_\delta(1) + o_\beta(1).
\end{aligned}$$

Fijemos $\alpha > 0$. Como $\omega_{R,T}$ es un módulo de continuidad sabemos que existe $\lambda > 0$ tal que para todo $0 < x < \lambda$ se verifica $\omega_{R,T}(x) < \alpha/2$. Luego, tomando $\beta$ suficientemente pequeño de manera que $o_\beta(1) < \alpha/2$, y gracias a (3.16) y (3.17) sabemos que para $\gamma$ y $\varepsilon$ suficientemente pequeños se verifica $|\bar{x} - \bar{y}|, |\bar{s} - \bar{t}|, \bar{q}|\bar{x} - \bar{y}| < \lambda/4$, y nuevamente aplicando (3.16) sabemos que si tomamos $\varepsilon$ más pequeño de ser necesario, se verifica $\bar{p}|\bar{s} - \bar{t}| < \lambda/4$, lo que nos permite colegir que

$$\omega_{R,T}((1 + \bar{q})(|\bar{x} - \bar{y}| + |\bar{s} - \bar{t}|)) < \frac{\alpha}{2}.$$

De esta forma, haciendo $\delta \to 0$ deducimos que $\mathcal{B} < \alpha$, lo que combinado con (3.18) implica que

$$\lambda_0 \frac{M}{2} \leq -\eta + \alpha,$$

y así, tomando $\alpha$ suficientemente pequeño se sigue que $\lambda_0 M/2 \leq 0$, lo que es una contradicción. $\square$

*Demostración del Teorema 3.4 - Caso (F3').* Si observamos la hipótesis (F3'), en esta no aparecen términos de la forma $p|s-t|$, por lo que no aparece el mismo problema que en el caso anterior. Así, esta demostración se sigue *mutatis mutandis* la del Teorema 3.3 para el caso de la hipótesis (F3). $\square$

### 3.1.4. Existencia y unicidad de soluciones viscosas

Ahora que sabemos cómo garantizar una de las hipótesis necesarias para aplicar el Método de Perron, solo nos falta construir efectivamente una sub-solución y una super-solución viscosa que verifiquen $u(\cdot,0) \leq v(\cdot,0)$ en todo $\mathbb{R}^N$. Además, debemos verificar que la solución que nos proporciona el Método de Perron es también continua, para lo cual usaremos las condiciones de tipo Dirichlet del problema (1.1).

Para poder realizar lo anterior mencionado, es necesario tener una hipótesis adicional sobre una acotación localmente uniforme para el Hamiltoniano; y, al igual que antes, trataremos de manera separada los casos en que este operador tiene dependencia explícita del tiempo y cuando no la tiene.

(F4) Para cada $R > 0$ existe una constante $C_H(R) > 0$ tal que $|H(x,u,p,l)| \leq C_H(R)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y todo $|u|, |p|, |l| \leq R$.

**TEOREMA 3.5.** *Asumimos que las hipótesis del Teorema 3.3 y (F4) se satisface, y además que $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ acotada. Entonces, existe una única solución viscosa $u \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ para el problema de Cauchy* (1.1).

*Además, se verifica*

$$|u(x,t)| \leq \|H(\cdot,0,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} t + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

*Demostración.* Primero consideremos $T > 0$ y demostremos este resultado para horizonte finito, es decir para (2.2).

Ahora, estudiemos en primera instancia el caso $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ con $\|u_0\|_{C^2(\mathbb{R}^N)} \leq \Lambda$ para cierto $\Lambda > 0$. Entonces, para cierta constante $C > 0$, que fijaremos luego, definimos la función $\psi^+(x,t) = u_0(x) + Ct$, la cual claramente satisface que $\psi^+ \in C^2(\overline{Q}_T)$ y $\psi^+(x,0) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, dado que las derivadas hasta el segundo orden de la función $u_0$ están acotadas, podemos aplicar la hipótesis (F4) y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\partial_t\psi^+(x,t) + H(x,\psi^+(x,t), D\psi^+(x,t), \mathcal{I}\psi^+(x,t))\\
&\quad = C + H(x,\psi^+(x,t), Du_0(x), \mathcal{I}u_0(x))\\
&\quad \geq C - C_H(\Lambda, T),
\end{aligned}$$

para cada $(x,t) \in Q_T$. Por tanto, si tomamos $C$ suficientemente grande podemos afirmar que $\psi^+$ es una super-solución viscosa del problema (2.2). De manera análoga podemos decir que la función $\psi^-(x,t) = u_0(x) - Ct$ es una sub-solución viscosa para este problema, para cierto $C > 0$ suficientemente grande.

Por consiguiente, aplicando el Método de Perron (Teorema 3.2) deducimos la existencia de una solución viscosa discontinua $u\colon \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ para este problema. Luego, como $\psi^- \leq u \leq \psi^+$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos

$$u_0(x) = \psi^-(x,0) \leq u_*(x,0) \leq u^*(x,0) \leq \psi^+(x,0) = u_0(x),$$

lo que implica que $u_*(\cdot,0) = u^*(\cdot,0)$ en $\mathbb{R}^N$. Así, dado que $u_*$ y $u^*$ son super y sub soluciones viscosas del problema, respectivamente, podemos aplicar el Principio de Comparación (Teorema 3.3) y deducir que $u^* \leq u_*$ en $\overline{Q}_T$. Pero la desigualdad $u_* \leq u^*$ siempre es verdadera, por lo que concluimos que $u_* = u^*$ en $\overline{Q}_T$, es decir, la solución viscosa $u$ es continua.

Para la unicidad, supongamos que $v$ es otra solución viscosa continua del problema. De esta forma, tenemos $u(\cdot,0) = u_0 = v(\cdot,0)$ en $\mathbb{R}^N$, pero tanto $u$ como $v$ son sub y super soluciones viscosas del problema, y aplicando dos veces el Principio de Comparación deducimos que $u \leq v$ y $v \leq u$ en $\overline{Q}_T$, es decir que ambas soluciones son iguales.

Una vez demostrado esto, podemos suponer que $u_0$ es solamente continua. En esta situación, tomamos $\{u_0^\varepsilon\}_\varepsilon \subseteq C^2(\mathbb{R}^N)$ una sucesión tal que $\|u_0^\varepsilon\|_{C^2(\mathbb{R}^N)} < +\infty$ y $\|u_0^\varepsilon - u_0\| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Así, al igual que en el caso anterior, construimos las funciones $\psi_\varepsilon^+(x,t) = u_0^\varepsilon(x) + \varepsilon + C_\varepsilon t$ y $\psi_\varepsilon^-(x,t) = u_0^\varepsilon(x) - \varepsilon - C_\varepsilon t$, de manera que estas son super y sub soluciones viscosas al problema. Además, por la forma en que fue tomada esta sucesión, es claro que $\psi_\varepsilon^+(x,0) > u_0(x)$ y $\psi_\varepsilon^-(x,0) < u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y todo $\varepsilon > 0$. Luego, definimos las funciones

$$\psi^+(x,t) = \inf_{\varepsilon>0} \psi_\varepsilon^+(x,t) \quad \text{y} \quad \psi^-(x,t) = \sup_{\varepsilon>0} \psi_\varepsilon^-(x,t),$$

y por el Lema 2.8 y su corolario vemos que estas funciones son super y sub soluciones del problema.

Probemos ahora que $\psi^+(\cdot,0) = u_0 = \psi^-(\cdot,0)$. Para ello, sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $\delta > 0$. Por la forma en que tomamos la sucesión $\{u_0^\varepsilon\}$ sabemos que

$$u_0(x) - \frac{\delta}{2} < u_0^{\delta/2},$$

lo que implica que

$$u_0(x) - \delta < u_0^{\delta/2}(x) - \frac{\delta}{2} = \psi_{\delta/2}^-(x,0),$$

lo que gracias a la caracterización del supremo nos permite deducir que $\psi^-(x,0) = u_0(x)$. De una forma similar, colegimos que $\psi^+(x,0) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

A partir de aquí, seguimos exactamente las mismas líneas que en el caso anterior, empezando por aplicar el Método de Perron que nos permite deducir la existencia de una solución viscosa discontinua, y tras aplicar el Principio de Comparación deducimos que esta es la solución viscosa $u \in C(\overline{Q}_T)$ buscada. La unicidad se sigue de la misma manera.

Finalmente, para el control dado en el enunciado para la solución $u$, consideremos la función $\varphi^+(x,t) = Ct + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, con $C = \|H(\cdot,0,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. De esta forma, por la hipótesis (H2) tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t\varphi^+(x,t) + H(x,\varphi^+(x,t), D\varphi^+(x,t), \mathcal{I}\varphi^+(x,t)) &= C + H(x,\varphi^+(x,t),0,0) \\
&\geq H(x,\varphi^+(x,t),0,0) - H(x,0,0,0) \\
&\geq \lambda_0(Ct + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})
\end{aligned}$$

para cada $(x,t) \in Q_T$. Esto muestra que $\varphi^+$ es una super-solución viscosa del problema, y claramente $u(\cdot,0) \leq \varphi^+(\cdot,0)$, por lo que aplicando el Principio de Comparación deducimos que

$$u(x,t) \leq \|H(\cdot,0,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} t + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

La otra desigualdad de sigue de manera análoga tomando la función $\varphi^-(x,t) = -Ct - \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ como sub-solución viscosa. $\square$

Ahora, para completar el estudio del problema objetivo que nos planteamos al inicio de este proyecto, enunciamos el siguiente resultado, del cual omitimos la demostración ya que sigue las mismas líneas que las del teorema anterior únicamente usando el Teorema 3.4 y cambiando la hipótesis (F4) por

(F4') Para cada $R > 0$ existe una constante $C_H(R) > 0$ tal que $|H(x,t,u,p,l)| \leq C_H(R)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, todo $t \in \mathbb{R}_+$ y todo $|u|, |p|, |l| \leq R$.

**Teorema 3.6.** *Asumimos que las hipótesis del Teorema 3.4 y (F4') se satisfacen, y además que $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ es acotada. Entonces, existe una única solución viscosa $u \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ para el problema de Cauchy* (1.1).

*Además, se verifica*

$$|u(x,t)| \leq \|H(\cdot,\cdot,0,0,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)} t + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

## 3.2. Conclusiones y trabajo futuro

En el componente desarrollado hemos presentados varios teoremas que aseguran el cumplimiento de los objetivos planteados. Específicamente, encontramos las siguientes resultados.

- La técnica de Arisawa usada en el Lema 2.4 nos permite presentar la definición solución viscosa en un contexto global y a través de una condición que no involucra, al menos explícitamente, a la función $u$, sino únicamente a la función test. Esto nos brinda un escenario adecuado para trabajar con un operador no local, lo cual se observa en la demostración del método de Perron.
- Usando el Teorema 3.1 y su respectiva versión para super-soluciones concluimos que el límite de una sucesión acotada de soluciones viscosas, también es una solución viscosa para el problema (1.1).

- El Teorema 3.2 corresponde al método de Perron, y es una herramienta para construir soluciones viscosas discontinuas al problema a partir de una sub y una super-solución viscosa discontinua, las mismas que deben verificar una condición de acotamiento. Esta última condición es un nuevo problema ya que comprobarla en todo el dominio es una tarea difícil, y para resolverla se establece el Principio de Comparación. Hasta este punto únicamente es necesaria la hipótesis (H1) sobre el Hamiltoniano

- Los Teoremas 3.3 y 3.4 nos muestran que, dado un acotamiento para las sub y super-soluciones viscosas en la frontera (es decir en $\mathbb{R}^N \times \{0\}$), podemos extrapolarlo a todo el dominio si el Hamiltoniano verifica ciertas hipótesis adicionales sobre la no-linealidad en el gradiente y también la continuidad uniforme en su variabel $l$. Estas hipótesis son las presentadas en (F1), (F2), (F3), (F2') y (F3'); las cuales pueden parecer complejas pero efectivamente existen operadores que las verifican, como puede verse en [9, 10].

- Una vez que contamos con el método de Perron para asegurar la existencia de soluciones viscosas, y con el Principio de Comparación para comprobar que las hipótesis de dicho método se verifican, en los Teoremas 3.5 y 3.6 los aplicamos para obtener una solución viscosa al problema. Además, pudimos observar que el Principio de Comparación también se puede aplicar para garantizar continuidad y unicidad de las soluciones; así como una cota para estas.

Finalmente, enunciamos algunos aspectos que no fueron desarrollados en el componente pero pueden usarse como puntos de partida para futuros trabajos.

- Generalizar el problema (1.1) considerando que el Hamiltoniano también depende de la matriz hessiana de la función $u$; es decir, es de la forma $H(x, t, y, p, X, l)$, donde $X$ es una matriz cuadrada de orden $N$. También, como hemos trabajado en el contexto de operadores no locales podemos reemplazar el operador $\partial_t$ por un operador no local en tiempo $D^\alpha$, el cual representa una *derivada de Caputo*.

- En el Teorema 3.1 vimos que fue necesario incluir la hipótesis de que la sucesión está acotada uniformemente por arriba para poder aplicar el Lema de Fatou en su versión dominada. Sin embargo, en [7] se muestra que esta hipótesis puede suavizarse y considerar únicamente que está acotada localmente uniformemente por arriba; por lo que se podría buscar una generalización de este resultado.

- En los Teoremas 3.5 y 3.6 encontramos que, para cada $T > 0$, la solución al problema (1.1) se encuentra acotada en $\overline{Q}_T$. Sin embargo, no conocemos el comportamiento de dicha solución a largo plazo, por lo que sería interesante estudiar si la solución mantiene algún tipo de acotamiento uniforme o si explota cuando $t \to +\infty$.

# Referencias bibliográficas


[1] Guy Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17. Springer, 1994.

[2] Guy Barles and Cyril Imbert. Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited. In *Annales de l'IHP Analyse non linéaire*, volume 25, pages 567–585, 2008.

[3] Pierre Cardaliaguet. Solutions de viscosité d'équations elliptiques et paraboliques non linéaires. *Notes de Cours, Université de Rennes*, 2004.

[4] Diego Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*. Asociación AMARUN, first edition, 2018.

[5] Donald L Cohn. *Measure theory*. Springer, 2013.

[6] Bruce K Driver. Undergraduate Analysis Tools. https://mathweb.ucsd.edu/~bdriver/140_F12-S13/Lecture%20Notes/140B_Versions/Math_140B_Ver9.pdf, 2013. Último acceso 4 de enero de 2022.

[7] Cyril Imbert. A non-local regularization of first order hamilton–jacobi equations. *Journal of Differential Equations*, 211(1):218–246, 2005.

[8] Beatriz Lafferriere, Gerardo Lafferriere, and Nguyen Mau Nam. Introduction to mathematical analysis i. 2016.

[9] M. Topp, E. y Yangari. Existence and uniqueness for parabolic problems with Caputo time derivative. *Journal of Differential Equations*, 262(12):6018–6046, 2017.

[10] M. Topp, E. y Yangari. Weakly coupled systems of parabolic Hamilton–Jacobi equations with Caputo time derivative. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 25(5):1–24, 2018.