ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS NO LINEALES DE TIPO AMBROSETTI-PRODI.

TEOREMAS CLÁSICOS DE MINIMAX, APLICACIONES EN PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO LINEALES CON PESO Y CONDICIONES DE FRONTERA TIPO DIRICHLET HOMOGÉNEAS.

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

GUSTAVO PAÚL REAL ORTIZ

gustavo.real@epn.edu.ec

DIRECTOR: PH. D. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE

marco.calahorrano@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, GUSTAVO PAÚL REAL ORTIZ, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Gustavo Paúl Real Ortiz

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Gustavo Paúl Real Ortiz, bajo mi supervisión.

Ph. D. Marco Vinicio Calahorrano Recalde

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Gustavo Paúl Real Ortiz

Ph. D. Marco Vinicio Calahorrano Recalde

RESUMEN

En el presente trabajo se estudian las hipótesis de ciertas aplicaciones de los teoremas de Paso de Montaña y de linking para demostrar la existencia de una solución no trivial para un problema tipo Ambrosetti-Prodi. Para lo cual, se realizará un repaso de los teoremas clásicos de minimax y del análisis no lineal. Luego, se estudiarán las demostraciones de los distintos teoremas y de las aplicaciones que se proponen. Finalmente, se realizará el estudio de las hipótesis donde se propondrán distintas hipótesis para el estudio de un problema tipo Ambrosetti-Prodi con discontinuidades no lineales con peso y condiciones de frontera tipo Dirichlet homogeneas.

Palabras clave: ambrosetti-prodi, paso de montaña, linking, minimax

ABSTRACT

In the present work, the hypotheses of certain applications of the Mountain Pass and linking theorems are studied to demonstrate the existence of a non-trivial solution for an Ambrosetti-Prodi problem. For which, a review of the classic minimax theorems and nonlinear analysis will be carried out. Then, the proofs of the different theorems and their proposed applications will be studied. Finally, the study of the hypotheses will be carried out where different hypotheses will be proposed for the study of an Ambrosetti-Prodi type problem with nonlinear weighted discontinuities and homogeneous Dirichlet type boundary conditions.

Keywords: ambrosetti-prodi, mountain pass, linking, minimax

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

Para el desararrollo de este proyecto se tuvo la siguiente estructura:

Empezamos con una introducción a los Teoremas Clásicos de Minimax, presentamos definiciones necesarias para abordar estos Teoremas y también una aplicación para el Teorema de Paso de Montaña, y una aplicación para el Teorema de Linking, las mismas que se encuentran en Badiale, M., & Serra, E. [6] y Struwe, M. [14] respectivamente.

Luego, presentamos un problema general de tipo Ambrosetti-Prodi, en el cual consideraremos una función peso, también presentamos dos problemas los cuales nacen de las aplicaciones del Teorema de Paso de Montaña y del Teorema de Linking, realizamos un análisis de las hipótesis y obtenemos resultados de existencia de soluciones no triviales para dichos problemas.

Finalmente, retomamos el problema tipo Ambrosetti-Prodi con peso y presentamos una equivalencia para las hipótesis de Ambrosetti-Prodi, trabajamos con esta equivalencia pues es compatible con las hipótesis de los dos problemas anteriores. Conluimos el trabajo presentado un resultado de existencias para un problema tipo Ambrosetti-Prodi con peso y que cumple ciertas hipótesis, que nos permiten usar el Teorema de Linking.

1.1. Objetivo general

Determinar la existencia de soluciones para un problema tipo Ambrosetti-Prodi con discontinuidades no lineales con peso y condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas.

1.2. Objetivos específicos

1. Analizar y revisar los resultados que aparecen en la bibliografía, principalmente en Badiale, M., & Serra, E. [6] y Struwe, M. [14], sobre teoremas de tipo minimax y aplicaciones.
2. Analizar las hipótesis para problemas donde es posible aplicar teoremas de linking en la obtención de la existencia de soluciones.
3. Analizar y revisar técnicas existentes que permitan resolver problemas con discontinuidades no lineales.
4. Determinar la existencia de soluciones para un problema tipo Ambrosetti-Prodi con discontinuidades no lineales con peso y condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, usando los teoremas de tipo linking

1.3. Alcance

Determinar la existencia de soluciones no triviales para un problema tipo Ambrosetti-Prodi, con discontinuidades no lineales con peso y condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, aplicando el Teorema de Linking.

1.4. Marco teórico

En el estudio de existencia, unicidad o multiplicidad de soluciones para problemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se han desarrollado varias técnicas, tales como la teoría de puntos críticos (teoremas de minimax, por ejemplo). Los teoremas clásicos de tipo minimax que se han desarrollado y estudiado son: Teorema de Paso de Montaña y Teoremas de Linking. El Teorema de Paso de Montaña es el teorema más estudiado y, por ende, el más usado, y por tanto se puede hallar una variedad de aplicaciones muy amplia como se muestra en Badiale, M., & Serra, E. [6] y A. Ambrosetti [2], mientras que para los Teoremas de Linking, las aplicaciones que se pueden encontrar en Struwe, M. [14] y A. Ambrosetti [2] son menos en comparación. Problemas donde las no linealidades presentan discontinuidades de salto han sido estudiadas por muchos autores, entre los cuales se destacan Marino Badiale, David Arcoya, Robert Turner, Marco Calahorrano, Kung-Ching Chang. Las hipótesis impuestas a las funciones dato de los problemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales han permitido de alguna manera usar los teoremas de mínimo y de paso de montaña para obtener resultados en la multiplicidad de soluciones e incluso unicidad en ciertos casos. Pretendemos generalizar las hipótesis impuestas sobre estos datos de tal forma que usemos los teoremas de linking, y de esta manera determinar la existencia y posible multiplicidad de soluciones para problemas con discontinuidades no lineales. Los textos Badiale, M., & Serra, E. [6] y Struwe, M. [14] presentan demostraciones más didácticas que aquellas mostradas en los artículos originales (A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz [1] y P.H. Rabinowitz [12]), además presentan aplicaciones que son de interés en este trabajo. En este trabajo se busca analizar qué tanto se pueden relajar algunas de las hipótesis sobre la regularidad de los datos, para conseguir resultados similares a los resultados que se obtienen de aplicar el Teorema de Paso de Montaña, aplicando los Teoremas de Linking.

- **Justificación Teórica:** Una modificación en las hipótesis de los datos no lineales puede producir resultados inesperados, como pasar de unicidad en la existencia de soluciones a la multiplicidad de soluciones e incluso, en el peor de los casos, que no sea posible asegurar la existencia de alguna solución, y en tal virtud, las técnicas a utilizarse en el análisis pueden variar. En los estudios clásicos (Ambrosetti, P.H. Rabinowitz [1], P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato [7], P. H. Rabinowitz [12], entre otros) se puede notar que, bajo ciertas hipótesis, se obtienen resultados de existencia y unicidad, en otros casos usando el teorema de paso de montaña se obtiene resultados de existencia de al menos una solución. Existen problemas en los cuales no es aplicable el teorema de paso de montaña, sin embargo, los Teoremas de Linking pueden ser utilizados para estudiar la existencia de soluciones. Se busca aportar en el estudio de problemas donde aparecen no linealidades discontinuas, para las cuales no es posible aplicar el Teorema de Paso de Montaña a sus regularizaciones.

- **Justificación Metodológica**: En los textos de Badiale, M., & Serra, E. [6] y Struwe, M. [14] se trabajan aplicaciones para los teoremas de paso de montaña y los teoremas de linking, en los cuales la hipótesis más destacada es que los datos sean al menos Lipschitz continuos, estas hipótesis sirven de guía para notar como se han relajado las hipótesis en ciertas aplicaciones. En el trabajo de Elves Alves de B. e Silva [13] se pueden ver aplicaciones para los teoremas de linking y las hipótesis que cumplen los datos.

  Varios resultados en la teoría de puntos críticos de autores como P.H. Rabinowitz, A. Ambrosetti, P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato y entre otros, muestran que los Teoremas de Linking resultan ser más generales que el teorema de paso de montaña, por lo cual si se realiza una modificación en las hipótesis de los datos en las aplicaciones del teorema de paso de montaña se espera que se puedan aplicar los Teoremas de Linking para obtener resultados similares.

1.4.1. Definiciones y notación

La notación que usaremos en este trabajo será la estándar vista a lo largo de la carrera. Haremos mención de ciertas consideraciones de la notación a continuación, usando como referencia la notación usada en [6].

Consideraremos al espacio $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) dotado de la medida de Lebesgue usual dx, todas las integrales se considerarán en el sentido de la integral de Lebesgue. Notaremos $|E|$ por la medida de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$. Diremos que una propiedad se cumple *casi todo punto* (o abreviado c.t.p.)

en Ω si existe $E \subset \Omega$ tal que $|E| = 0$ y la propiedad se cumpla en todo punto del conjunto $\Omega \setminus E$. Denotaremos el producto escalar de vectores $x, y \in \mathbb{R}^N$ por $x \cdot y$ y a su norma la notaremos por $|x|^2 = x \cdot x$ mientras que al producto excalar de vectores $u, v \in H$, con H un espacio de Hilbert lo denotaremos por $(u \mid v)$.

Consideraremos los siguientes espacios funcionales:

- $C^k(\Omega)$, para $k = 1, 2, \dots$ el espacio de funciones $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ que son k veces diferenciables en Ω y cuya $k-$ésima derivada es continua en Ω.

- $C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio de todas las funciones $u \in C^\infty(\Omega)$ tales que

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : \ u(x) \neq 0\}} \text{ es compacto en } \mathbb{R}^N.$$

- $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, \infty)$, es el espacio de funciones Lebesgue medibles $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty$$

  y denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones Lebesgue medibles tales que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty$$

  donde $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf\{C > 0 : \ |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$. Sabemos que las normas que hacen a $L^p(\Omega)$ espacios de Banach son

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p \in [1, \infty)$$

  y

$$|u|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \quad \text{si } p = \infty.$$

- $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2 \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ i = 1, \dots, N \right\}$$

  donde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada en el sentido de las distribuciones. Este es un espacio de Hilbert cuando esta dotado por el producto escalar dado por

$$(u \mid v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx$$

el cual induce la norma

$$\|u\| = \sqrt{(u \mid u)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

- $H_0^1(\Omega)$ es la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Denotaremos la norma en $H^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ por $\|u\|$.

Consideraremos las siguientes definiciones también

- Para $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definimos $u^+(x) = \text{máx}\{u(x), 0\}$ como la parte positiva de u y $u^-(x) = \text{máx}\{-u(x), 0\}$ como la parte negativa de u. Tenemos entonces $u = u^+ - u^-$.
- $2^* = \frac{2N}{N-2}$ para $N \geq 3$. A este número se le conoce como el exponenete crítico de Sobolev.

El espacio en el cual trabajaremos es $H_0^1(\Omega)$ pues las *soluciones* de los problemas que consideramos se encuentra en este espacio. En este espacio tenemos resultados y definiciones las cuales nos ayudarán en el desarrollo de este trabajo, estos pueden ser encontrados de forma detallada en [6] y los más relevantes los encontraremos en A.1.

Definiremos tabién lo que denominaremos diferenciable en espacios de Banach.

Definición 1.1. *Sean X un espacio de Banach, $U \subset X$ abierto y $I \colon U \to R$ un funcional. Decimos que I es Fréchet diferenciable o diferenciable en $u \in U$ si existe $A \in X'$ (X' espacio dual de X) tal que*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

Así, para un funcional diferenciable $I \colon U \to R$, tenemos que

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|)$$

cuando $\|v\| \to 0$, donde $\frac{o(s)}{s} \to 0$ cuando $s \to 0$.

Para poder definir lo que trataremos como una *solución* en este trabajo, es necesario introducir un problema general del cual se derivan los problemas que estudiaremos más adelante, el cual es: hallar u (en cierto espacio funcional o conjunto) solución de la formulación variacional (o formulación débil) de

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $h\colon \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $q\colon \Omega \to \mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades que precisaremos más adelante, la formulación variacional de (1.1) es: hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx = \int_\Omega h(x,u)v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

A las soluciones de (1.2) se las conoce como *soluciones débiles*, y en este trabajo nos referiremos a estas como *soluciones* (precisaremos el problema del que son soluciones si trabajamos con más de un problema a la vez), pues no estamos interesados en el estudio de lo que se conocen como *soluciones clásicas* o la regularidad de las soluciones débiles.

1.4.2. Teoremas clásicos de minimax

Cuando se buscan las soluciones de un problema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales aparece el *Principio de Dirichlet*, el cual busca minimizar un funcional y sus mínimos globales son las soluciones al problema, pero ¿qué sucede si el funcional no está acotado inferiormente? si esto sucede no podemos aplicar el Principio de Dirichlet, pues mínimos globales no existen, pero el funcional puede poseer puntos críticos como puntos silla, o mínimos locales, para estudiar estos puntos nacen los métodos de minimax y con esto los Teoremas clásicos de minimax.

1.4.2.1. Deformaciones y enlazamiento

En esta sección introduciremos definiciones necesarias para abordar el algunos de los Teoremas clásicos de minimax. Estas son traducciones libres de [6] y [14].

DEFINICIÓN 1.2 (Definición 4.1.1 [6]). *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional. Para $a \in \mathbb{R}$, definimos*

$$J^a\{u \in X : \; J(u) \leq a\},$$

estos conjunto son llamados subniveles de J.

DEFINICIÓN 1.3 (Definición 4.1.4 [6]). *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Un sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X tal que*

1. *$(J(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$ y,*
2. *$J'(u_k) \to 0$ en X' cuando $k \to \infty$,*

es llamada una sucesión de Palais-Smale para J. Para $c \in \mathbb{R}$. Si

1. *$J(u_k) \to c$ en $\mathbb{R}$ y,*
2. *$J'(u_k) \to 0$ en X' cuando $k \to \infty$.*

entonces es llamada una sucesión de Palais-Smale para J al nivel c. Y se dice que c es un nivel de Palais-Smale para J.

DEFINICIÓN 1.4 (Definición 4.1.7 [6]). *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Decimos que J satisface la condición de Palais-Smale si toda sucesión de Palais-Smale para J posee al menos una subsucesión convergente en X. Decimos que J satisface la condición de Palais-Smale al nivel $c \in \mathbb{R}$ si toda sucesión de Palais-Smale para J al nivel c posee al menos una subsucesión convergente en X. Diremos que J satisface (PS) si J satisface la condición de Palais-Smale y que J satisface $(PS)_c$ si J satisface la condición de Palais-Smale al nivel $c \in \mathbb{R}$.*

LEMA 1.1 (Lema 4.1.8 [6]). *Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional tal que $J \in C^1(X)$. Si existe una sucesión de Palais-Smale para J y J satisface (PS), entonces J posee al menos un punto crítico. Si existe una sucesión de Palais-Smale para J en el nivel $c \in \mathbb{R}$ y J satisface $(PS)_c$, entonces J posee al menos un punto crítico al nivel c.*

DEFINICIÓN 1.5 (Definición 4.1.10 [6]). *Sean X un espacio de Banach y $B \subset X$. Una deformación de B es una función continua $\eta : [0,1] \times B \to B$ tal que $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in B$.*

DEFINICIÓN 1.6 (Definición 4.1.11 [6]). *Sean X un espacio de Banach y $A \subset B \subset X$. Decimos que B es deformable en A si existe una deformación η de B, tal que*

$$\begin{aligned} &\eta(t,u) \in A \quad \forall u \in A \text{ y } \forall t \in [0,1], \\ &\eta(1,u) \in A \quad \forall u \in B. \end{aligned} \tag{1.3}$$

El siguiente ejemplo esta basado en el ejemplo 4.1.12 de [6].

EJEMPLO 1. En un espacio de Banach X, para todo radio $r > 0$, $B_{2r}(0)$ es deformable en $B_r(0)$. Para mostrar esto se puede definir la función $\eta(t,u) = (1 - \frac{t}{2})u$ la cual es continua.

DEFINICIÓN 1.7 (Definición 4.1.15 [6]). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional. Decimos que $J \in C^{1,1}(H)$ si $J \in C^1(H)$ y su gradiente $\nabla J : H \to H$ es localmente Lipschitz continua en H.*

LEMA 1.2 (Lema 4.1.17 (Lema de deformación) [6]). *Supongamos que H es un espacio de Hilbert, y que $J \in C^{1,1}(H)$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Supongamos que no existe $c \in [a,b]$ tal que c es un nivel de Palais-Smale para J. Entonces J^b es deformable en J^a.*

Este resultado también se puede obtener de forma local de la siguiente forma:

LEMA 1.3 (Lema 4.1.18 [6]). *Supongamos que H es un espacio de Hilbert, y que $J \in C^{1,1}(H)$. Sea $c \in \mathbb{R}$, supongamos que c no es un nivel de Palais-Smale para J. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, $J^{c+\varepsilon}$ es deformable en $J^{c-\varepsilon}$ con una deformación que fija $J^{c-2\varepsilon}$.*

DEFINICIÓN 1.8 (Definición 4.2.1 [6]). *Sean H un espacio de Hilbert y $\eta : [0,1] \times H \to H$ una deformación de H. Una familia Γ de subconjuntos de H se dice invariante para η si para todo $A \in \Gamma$ y para todo $t \in [0,1]$, $\eta(t,A) \in \Gamma$.*

DEFINICIÓN 1.9 (Definición 4.2.2 [6]). *Sean H un espacio de Hilbert y $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional. A una familia Γ de subconjuntos de H se le dice* *una clase minimax. El valor*

$$c = \inf_{A\in\Gamma} \sup_{u\in A} J(u)$$

es denominado el nivel minimax asociado a Γ.

DEFINICIÓN 1.10 (Definición 4.2.3 [6]). *Sean H un espacio de Hilbert, $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional, Γ una clase minimax y c su nivel minimax. Decimos que Γ es admisible con respecto a J si*

1. *$c \in \mathbb{R}$,*
2. *para todo $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, Γ es invariante para todas las deformaciones que fijan $J^{c-2\varepsilon}$.*

Los siguientes conceptos son necesarios para introducir el Teorea de Linking, para estos usaremos *enlazamiento* como traduccón de linking, pero seguiremos refiriéndos al Teorema de Linking sin la traducción.

DEFINICIÓN 1.11 (Definición 8.1 [14]). *Sea E un espacio de Banach. Sean $S \subset E$ un conjunto cerrado en E, Q una subvariedad de E con frontera relativa ∂Q. Decimos que S y ∂Q se enlazan si*

1. *$S \cap \partial Q = \emptyset$,*
2. *Para todo $h \in C^0(E, E)$ tal que $h_{\partial Q} = id$, se tiene que $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.*

De forma mas general, si Γ es un subconjunto de $C^0(E, E)$, entonces S y ∂Q estan enlazados con respecto a Γ, si se cumple 1. y 2. se cumple para todo $h \in \Gamma$.

Podemos ver algunos ejemplos de enlazamiento. para el cual consideraremos que E es un espacio de Banach el cual puede ser descompuesto en dos subespacios cerrados $E_1,\ E_2$, es decir, $E = E_1 \oplus E_2$, supondremos tambien que $\dim(E_2) < \infty$.

EJEMPLO 2 (Ejemplo 8.2 [14]). Consideremos $S = E_1$, $Q = B_R(0; E_2)$ con frontera relativa $\partial Q = \{u \in E_2 :\ \|u\| = R\}$. Entonces S y ∂Q se enlazan.

EJEMPLO 3 (Ejemplo 8.3 [14]). Consideremos $\bar{u} \in E_1$ fijo y tal que $\|\bar{u}\| = 1$. Supongamos que $0 < \rho < R_1$, $0 < R_2$ y consideremos

$$S = \{u \in E_1 : \ \|u\| = \rho\},$$
$$Q = \{u + s\bar{u} : \ 0 \leq s \leq R_1, \ u \in E_2, \ \|u\| \leq R_2\},$$

con frontera relativa $\partial Q = \{u + s\bar{u} \in Q : \ s \in \{0, R_1\}$ o $\|u\| = R_2\}$. Entonces S y ∂Q se enlazan.

1.4.2.2. Teoremas clásicos de minimax

TEOREMA 1.4 (Teorema 4.2.4 (Principio de minimax) [6]). *Sean H un espacio de Hilbert y $J \in C^{1,1}(H)$. Sea Γ una clase minimax admisible al nivel c. Entonces existe una sucesión de Palais-Smale para J al nivel c. Si J satisface $(PS)_c$, entonces existe un punto crítico para J al nivel c.*

Usaremos la versión del Teorema de Paso de Montaña con la que se trabaja en [6], pero el lector puede referirse a [1] para revisar la versión original de este teorema.

TEOREMA 1.5 (Teorema 4.3.1 (Paso de Montaña) [6]). *Sean H un espacio de Hilbert y $J \in C^{1,1}(H)$ tal que $J(0) = 0$. Supongamos que existen $\rho, \alpha > 0$ tales que*

1. *$J(u) \geq \alpha$ si $\|u\| = \rho$;*
2. *Existe $v \in H$ tal que $\|v\| > \rho$ y $J(v) < \alpha$.*

Entonces existe una sucesión de Palais-Smale para J al nivel $c \geq \alpha$. Si J satisface $(PS)_c$, entonces existe un punto crítico para J al nivel c.

TEOREMA 1.6 (Teorema 4.3.6 (Brouwer) [6]). *Sean $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ y $\varphi \colon B_R \to B_R$ una función continua. Entonces φ posee un punto fijo.*

Este Teorema se puede enunciar de una forma equivalente.

TEOREMA 1.7 (Teorema 4.3.7 [6]). *Sean $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ y $\varphi \colon B_R \to B_R$ una función continua tal que $\varphi(x) = x$ si $|x| = R$. Entonces existe $x \in B_R$ tal que $\varphi(x) = 0$.*

Teorema 1.8 (Teorema 4.3.9 (Punto de silla) [6]). *Sean H un espacio de Hilbert y $J \in C^{1,1}(H)$. Sean $E_n \subset H$ un subespacio vectorial de H, de dimensión n y $V \subset H$ su complemento ortogonal en H, es decir, $H = E_n \oplus V$. Para $R > 0$ consideremos $B_R^n = B_R \cap E_n$. Supongamos que para algún $R > 0$,*

$$\max_{u \in \partial B_R^n} J(u) < \inf_{u \in V} J(u)$$

Entonces existe una sucesión de Palais-Smale para J al nivel $c \geq \inf_V J$. Si J satisface $(PS)_c$, entonces existe un punto crítico para J al nivel c.

Usaremos la versión del Teorema de Linking que se trabaja en [14], el lector puede referirse a [12] para la versión origilan de este teorema.

Teorema 1.9 (Teorema 8.4 (Linking) [14]). *Supongamos que $J \in C^1(E)$ y satisface $(PS)_c$. Consideremos S subconjunto cerrado de E y $Q \subset E$ una subvariedad con frontera relativa ∂Q. Supongamos que*

1. *S y ∂Q se enlazan,*
2. *$\alpha = \inf_{u \in S} J(u) > \sup_{u \in \partial Q} J(u) = \alpha_0$.*

Sea

$$\Gamma = \{h \in C^0(E; E);\ h|_{\partial Q} = id\}.$$

Entonces el número

$$\beta = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} J(h(u))$$

define un punto crítico

1.4.2.3. Aplicaciones

Presentaremos ahora una aplicación del Teorema de Paso de Montaña y otra del Teorema de Linking, las mismas que pueden ser encontradas con sus demostraciones en [6] y [14] respectivamente.

Para la applicación del Teorema de Paso de Montaña consideremos el siguiente problema: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado, $N \geq 3$, encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ solución de

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Consideraremos las siguientes hipótesis.

(h_1) $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $q(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω.

(h_2) Existen $p \in (2, 2^*)$ y $C > 0$ tales que para todo $s, t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t) - f(s)| \leq C|t - s|(|s| + |t| + 1)^{p-2}.$$

(h_3) $f(0) = 0$ y

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

(h_4) Existen $M > 0$ y $\mu > 2$ tales que $f(t)t \geq \mu F(t)$ cuando $|t| \geq M$.

(h_5) Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ con $|t_0| \geq M$ tal que $F(t_0) > 0$.

Donde $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$.

Teorema 1.10 (Teorema 4.4.3 [6]). *Supongamos que se cumplen* $(h_1), (h_2), (h_3), (h_4)$ *y* (h_5). *Entonces el Problema* (1.4) *posee al menos una solución no trivial.*

Ahora, para la aplicación del Teorema de Linking tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.11 (Teorema 8.5 [14]). *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *abierto y acotado con* $N \geq 3$ *y* $g \colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *medible en* Ω *y diferenciable en* $\mathbb{R}$ *con derivada* g_u *y primitiva* G. *Supongamos que*

(g_1) $g(x, 0) = 0$, *y*

$$\frac{g(x,u)}{u} \geq g_u(x, 0), \qquad \textit{c.t.p. } x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(g_2) Existen $p < 2^*$ *y* $C > 0$ *tal que*

$$|g_u(x, u)| \leq C(1 + |u|^{p-2}), \qquad \textit{c.t.p. } x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R}$$

g_3 *Existen* $q \in (2, 2^*)$ *y* $R_0 > 0$*, tales que*

$$0 < qG(x,u) \leq g(x,u)u, \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega, \ \text{si } |u| \geq R_0$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

posee una solución no trivial.

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo vamos a tratar un problema del tipo Ambrosetti-Prodi, para el cual buscamos hipótesis que nos permitan, mediante el uso del Teorema de Linking, obtener un resultado de existencia de soluciones no triviales.

Para hacer esto abordaremos primero dos problemas. El primero será un problema en el que cambiaremos las hipótesis que se impusieron para (3.20) en el Teorema 1.10, para usar el Teorema de Linking y así demostraremos que este problema admite una solución no trivial. En el segundo problema agregaremos una función peso a (3.20) y deduciremos que hipótesis debe cumplir esta función para demostrar que admite una solución no trivial como lo hicimos anteriormente. Finalmente, al problema con peso le impondremos hipótesis para que este se vuelva del tipo Ambrosetti-Prodi, pero para hacer esto estudiaremos las equivalencias e implicaciones de estas hipótesis y buscaremos una compatabilidad con las hipótesis que obtuvimos en el segundo problema, para poder generar un resultado de existencia de una solución no trivial.

2.1. Existencia de soluciones

Para que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = h(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

sea de tipo Ambrosetti-Prodi se debe cumplir que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{h(x,t)}{t} > \lambda_1, \quad \text{y} \quad \limsup_{t\to-\infty} \frac{h(x,t)}{t} < \lambda_1 \quad \text{c.t.p. en } \Omega \tag{2.2}$$

en este trabajo consideraremos que h es de la forma $h(x,t) = w(x)f(t)$ con $w \in L^\infty(\Omega)$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, por el momento solo consideraremos estas hipótesis pero luego impondremos algunas otras.

2.1.1. Primer problema

En este problema queremos analizar que hipótesis se deben cumplir para que podamos usar el Teorema de Linking en la búsqueda de soluciones no triviales de (1.4). Si comparamos las hipótesis que se requieren para los teoremas tenemos lo siguiente.

1. La hipótesis (h_1) nos permite considerar

   $$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega q(x)u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

   como una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la usual, (véase A.11), pues nos indica que $\lambda_1(-\Delta + q(x)) > 0$ (véase A.2 y A.12).

2. Las hipótesis (h_2) y (g_2) nos indican primero que si tomamos $s = 0$, entonces existe $K > 0$ tal que

   $$|f(t)| \leq K(1 + |t|^{p-1}),$$

   además nos indica que f es localmente Lipschitz continua en $\mathbb{R}$ y por tanto continua, lo cual nos permite demostrar que los funcionales

$I_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $I_2 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$I_1(u) = \int_\Omega F(u)\,dx, \quad I_2(u) = \int_\Omega G(x,u)\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

son diferenciables en $H_0^1(\Omega)$ (véase A.8), y gracias a que g es diferenciable en $\mathbb{R}$, entonces I_2 es dos veces diferenciable en $H_0^1(\Omega)$ (véase A.9).

3. Las hipótesis (h_4) y (g_3) nos permiten mostrar que los funcionales $J_1 \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $J_1 \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2\,dx - \int_\Omega F(u)\,dx,$$
$$J_2(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega G(x,u)\,dx$$

satisfacen $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

4. Las hipótesis (h_3) (h_5) y (g_3) nos ayudan a mostrar que J_1 y J_2 admiten como solución a $u \equiv 0$, además de ser necesarias en las demostraciones de sus respectivos teoremas como en la geometría que se debe cumplir para poder aplicar los Teoremas de Paso de Montaña y Linking respectivamente.

Con esto vemos que las hipótesis que podemos suponer sobre f son

(f_1) $f(0) = 0$, y
$$\frac{f(t)}{t} \geq f'(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(f_2) Existen $p \in (2, 2^*)$ y $C, K > 0$ tales que

$$|f'(t)| \leq C(1 + |t|^{p-2}) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
$$|f(t) - f(s)| \leq K|t-s|(|s| + |t| + 1)^{p-2} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

(f_3) Existen $M > 0$ y $\mu > 2$ tales que

$$0 < qF(t) \leq f(t)t \quad \text{si } |t| \geq M$$

para obtener un resultado similar al Teorema 1.11.

Consideraremos el problema: hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ solución de

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Recordemos que si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución de (2.3), entonces

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx = \int_\Omega f(u)v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.4}$$

y recordemos que buscamos un funcional $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ diferenciable y cuyos puntos críticos cumplan (2.4), es decir, necesitamos que

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx - \int_\Omega f(u)v \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

y hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Notemos que gracias a que q satisface (h_1), podemos dotar a $H_0^1(\Omega)$ de la norma generada por el producto escalar

$$(u \mid v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x)uv \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.5}$$

la cual es equivalente a la usual. Por lo tanto tenemos que

$$J'(u)v = (u \mid v) - \int_\Omega f(u)v \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

por lo cual podemos considerar que J esta definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u) \, dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

y con las hipótesis sobre f probaremos que el funcional J satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y que $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$. Con esto probaremos que el problema (2.3) admite una solución no trivial utilizando el Teorema de Linking y las ideas de la demostración del Teorema 1.11.

2.1.2. Segundo Problema

En esta sección vamos a realizar un desarrollo parecido a la sección anterior, pero se considerará el peso $w \in L^\infty(\Omega)$, es decir, consideramos

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = w(x)f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Para este problema supondremos las mismas hipótesis que antes sobre f y buscaremos que hipótesis debe cumplir w.

Consideraremos $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega w(x)F(u)\,dx$$

pues si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución de 2.6 entonces

$$0 = (u \mid v) - \int_\Omega w(x)f(u)v\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y por tanto u es un punto crítico de J.

Para ver que hipótesis debe cumplir w estudiaremos la demostración del Teorema 1.11, el cual adaptamos para demostrar el Teorema 3.1, y notamos que necesitamos

$$J(u) \leq 0 \quad \forall u \in V^-$$

y para esto usamos que $J(u) \leq J''(0)(u,u) \leq 0$ pero para que esto suceda con el peso w necesitamos primero ver que forma tiene V^- para 2.6, tomaremos $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ los valores propios del operador $-\Delta + q(x) - w(x)f'(0)$ y $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ las funciones propias asociadas, definiremos $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} :\ \lambda_k \geq 0\}$, ahora veamos que debe cumplir w,

$$\begin{aligned} J(\varphi_k) &= \frac{1}{2}\|\varphi_k\|^2 - \int_\Omega w(x)F(\varphi_k)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi_k\|^2 - \int_\Omega (w^+(x) - w^-(x))F(\varphi_k)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi_k\|^2 - \int_\Omega w^+(x)F(\varphi_k)\,dx + \int_\Omega w^-(x)F(\varphi_k)\,dx \end{aligned}$$

como $w^+(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω entonces de (f_1)

$$\frac{w^+(x)f(t)}{t} \geq w^+(x)f'(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ c.t.p. en } \Omega,$$

e integrando obtenemos que

$$w^+(x)F(t) \geq w^+(x)f'(0)\frac{t^2}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

además,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k\|^2 &= \int_\Omega w(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx + \lambda_k \int_\Omega \varphi_k^2\,dx \\
&= \int_\Omega w^+(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx - \int_\Omega w^-(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx + \lambda_k \int_\Omega \varphi_k^2\,dx \\
&\leq \int_\Omega w^+(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx - \int_\Omega w^-(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx
\end{aligned}$$

reemplazando esto y gracias a (2.7) tenemos

$$\begin{aligned}
J(\varphi_k) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega w^+(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w^-(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx - \int_\Omega w^+(x)F(\varphi_k)\,dx + \int_\Omega w^-(x)F(\varphi_k)\,dx \\
&\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega w^-(x)f'(0)\varphi_k^2\,dx + \int_\Omega w^-(x)F(\varphi_k)\,dx \\
&= \int_\Omega w^-(x)\left(F(\varphi_k) - \frac{1}{2}f'(0)\varphi_k^2\right)\,dx
\end{aligned}$$

de donde, por (f_1) tenemos que si $w^-(x) = 0$ c.t.p. en Ω, entonces $J(\varphi_k) \leq 0$ para todo $k < k_0$. Gracias a esto supondremos que

(f_4) $w \in L^\infty$ y $w(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω

y con estas hipótesis probaremos que el problema (2.6) posee una solución no trivial, utilizando las mismas ideas que se usaron en el *primer problema.*

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

En este capítulo presentaremos primero los resultados para los problemas que se mencionaron en el Capítulo 2 y luego usaremos estos resultados para demostrar la existencia de una solución no trivial de un problema tipo Ambrosetti-Prodi.

TEOREMA 3.1 (Primer problema). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, abierto y acotado con $N \geq 3$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Supongamos que f satisface (f_1), (f_2) y (f_3), y que q satisface (h_1), entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

posee una solución no trivial.

Para la demostración de este teorema usaremos las ideas que se usaron en [14] para la demostración del Teorema 1.11 y la adaptaremos para que podamos usar resultados de [6]. Además, haremos uso de algunos lemas que nos permitan desarrollar la demostración de una manera mas sencilla, debemos aclarar que estos lemas estarán bajo todas las hipótesis del Teorema 3.1.

Lema 3.2. *El funcional* $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{3.2}$$

es un elemento de $C^2(H_0^1(\Omega))$.

Demostración. Notemos que integrando (f_2) obtenemos que existen $a, b > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{p-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y por tanto obtenemos que $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$, esto por la aplicación directa de A.7 y A.8, obtenemos también que

$$J'(u)v = (u \mid v) - \int_\Omega f(u)v\,dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$
$$J''(u)(v,w) = (v \mid w) - \int_\Omega f'(u)vw\,dx \quad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)$$

□

Ahora veamos que J también satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Lema 3.3. *El funcional* $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido en* (3.2) *satisface* $(PS)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Palais-Smale para J al nivel c, es decir,

$$J(u_k) \to c \quad \text{y} \quad J'(u_k) \to 0$$

Como $\{J(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces existe $C_1 > 0$ tal que

$$|J(u_k)| \leq C_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y como $J'(u_k) \to 0$, entonces existe $C_2 >$ tal que

$$|J'(u_k)u_k| \leq C_2\|u_k\| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

tomando $\hat{C} = \text{máx}\{C_1, C_2\} > 0$ tenemos que

$$|J(u_k)| \leq \hat{C} \quad \text{y} \quad |J'(u_k)u_k| \leq \hat{C}\|u_k\| \tag{3.3}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (3.4) tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\hat{C}(1+\|u_k\|) &\geq J(u_k) - \frac{1}{\mu}J'(u_k)u_k \\
&= \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_\Omega F(u_k)\,dx - \frac{1}{\mu}\|u_k\|^2 + \int_\Omega f(u_k)u_k\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx.
\end{aligned}$$

De (f_3) tenemos que para $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\{x\in\Omega:\, |u_k(x)|>M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \geq 0$$

y por tanto

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \geq \int_{\{x\in\Omega:\, |u_k(x)|\leq M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx.$$

Notemos que integrando (f_2) existen $a, b > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{p-1} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

y por tanto

$$|f(t)t| \leq a|t|^2 + b|t|^p \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

además integrando (3.4) tenemos que existen $a', b' > 0$ tales que

$$|F(t)| \leq a'|t|^2 + b'|t|^p \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

por tanto, si consideramos $\{|u_k(x)| \leq M\} = \{x \in \Omega :\ |u_k(x)| \leq M\}$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\int_{\{|u_k(x)|\leq M\}} \left(\frac{1}{\mu}f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx &\geq \int_{\{|u_k(x)|\leq M\}} \left(-\frac{aM^2+bM^p}{\mu} - (a'M^2+b'M^p)\right) \\
&= -\left(\frac{aM^2+bM^p}{\mu} + a'M^2 + b'M^p\right)|\{|u_k(x)| \leq M\}| \\
&\geq -\left(\frac{aM^2+bM^p}{\mu} + a'M^2 + b'M^p\right)|\Omega| =: -\hat{M}
\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$C(1+\|u_k\|) \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 - \hat{M}_1$$

es decir,

$$0 \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 - \hat{M}_1 - C(1+\|u_k\|)$$

y como $\mu > 2$ entonces es claro que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada. Como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, gracias a A.7 existen una subsucesión, la cual seguiremos denotando $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, tales que

1. $u_k \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, cuando $k \to \infty$;
2. $u_k \to u$ en $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*)$, cuando $k \to \infty$;
3. $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω;

Recordemos que no podemos asegurar que $u_k \to u$ en $L^{2^*}(\Omega)$ pues el operador no es compacto. Además, como se muestra en [6], tenemos las siguientes convergencias:

$$\int_\Omega f(u_k)u_k\,dx \to \int_\Omega f(u)u\,dx, \quad \text{y} \quad \int_\Omega f(u_k)u\,dx \to \int_\Omega f(u)u\,dx,$$

y tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|u_k - u\| = (J'(u_k) - J'(u))(u_k - u) + \int_\Omega (f(u_k) - f(u))(u_k - u)\,dx$$

de donde $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. Esto muestra que J satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. □

Ahora podemos continuar con la demostración de 3.1.

Demostración del Teorema 3.1 . Consideramos $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido en (3.2), el cual satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ por el Lema 3.3 y por el Lema 3.2 $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$.

Notemos que por la hipótesis (f_1), el problema (3.1) admite como una solución a $0 \in H_0^1(\Omega)$. Sean $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ los valores propios del operador $-\Delta + q(x) - f'(0)$ y $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ las funciones propias asociadas (véase

A.2 y A.10). Tenemos entonces que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$(\varphi_k \mid v) - \int_\Omega f'(0)\varphi_k v\, dx = \lambda_k \int_\Omega \varphi_k v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Definimos $k_0 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k > 0\}$, pues no sabemos si $q(x) - f'(0) \geq 0$ c.t.p. en Ω y por esto no podemos garantizar que $\lambda_1 > 0$. Definimos también $V^+ = \text{span}\{\varphi_k : k \geq k_0\}$ y $V^- = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_0-1}\}$.

Notemos que de (f_1) tenemos que

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds \geq \int_0^t f'(0)s\, ds = \frac{1}{2}f'(0)t^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2\, dx - \int_\Omega F(u)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f'(0)u^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}J''(0)(u,u). \end{aligned}$$

Ahora, si $\varphi_k \in V^-$, entonces por (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} J''(0)(\varphi_k,\varphi_k) &= \int_\Omega |\nabla \varphi_k|^2\, dx + \int_\Omega q(x)\varphi_k^2\, dx - \int_\Omega f'(0)\varphi_k^2\, dx \\ &= \lambda_k \int_\Omega \varphi_k^2 \leq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, si tomamos $u \in V^-$, donde $u = \sum_{i=1}^{k_0-1} \alpha_i\varphi_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, k_0 - 1$, y gracias a que $J''(0)$ es bilineal y $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es ortogonal en $H_0^1(\Omega)$,

$$J''(0)(u,u) = J''(0)\left(\sum_{i=1}^{k_0-1}\alpha_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{k_0-1}\alpha_j\varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{k_0-1}\alpha_i^2 J''(0)(\varphi_i,\varphi_i) \leq 0$$

es decir,

$$J(u) \leq \frac{1}{2}J''(0)(u,u) \leq 0 \quad \forall u \in V^-. \tag{3.8}$$

Si tomamos $t = 0$ en (f_2) tenemos

$$|f'(0)| \leq C,$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\varphi_k|^2\,dx + \int_\Omega q(x)\varphi_k^2\,dx &= \lambda_k\int_\Omega \varphi_k^2\,dx + \int_\Omega f'(0)\varphi_k^2\,dx\\ &\geq \lambda_k\int_\Omega\varphi_k^2\,dx - C\int_\Omega \varphi_k^2\,dx\end{aligned}$$

si tomamos k_1 lo suficientemente grande tal que $\lambda_{k_1} > C$ entonces

$$\frac{1}{\lambda_k - C}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi_k|^2\,dx + \int_\Omega q(x)\varphi_k^2\,dx\right) \geq \int_\Omega \varphi_k^2\,dx \quad \forall k\geq k_1$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}J''(0)(\varphi_k,\varphi_k) &= \int_\Omega |\nabla\varphi_k|\,dx + \int_\Omega q(x)\varphi_k^2\,dx - \int_\Omega f'(0)\varphi_k^2\,dx\\ &\geq \|\varphi_k\|^2 - C\int_\Omega \varphi_k^2\,dx\\ &\geq \|\varphi_k\|^2 - \frac{C}{\lambda_k - C}\int_\Omega |\nabla\varphi_k|^2\,dx\\ &= \left(1-\frac{C}{\lambda_k - C}\right)\|\varphi_k\|^2\\ &\geq \frac{1}{2}\|\varphi_k\|^2 \qquad \forall k\geq k_2\end{aligned}$$

donde $k_2 \geq k_1$ es tal que $\lambda_{k_2}\geq 3C$. Podemos concluir entonces que

$$J''(0)(u,u)\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 \qquad \forall u\in \operatorname{span}\{\varphi_k:\ k\geq k_2\}$$

y como $\operatorname{span}\{\varphi_k:\ k_0\leq k\leq k_2\}$ es de dimensión finita, entonces sabemos que existe $\lambda>0$ tal que

$$J''(0)(u,u)\geq \lambda\|u\|^2 \qquad \forall u\in V^+$$

Ahora, como $J\in C^2(H_0^1(\Omega))$, entonces tenemos que

$$J(u) = J(0) + J'(0)u + \frac{1}{2}J''(0)(u,u) + o(\|u\|^2)$$

donde $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{o(s)}{s} = 0$. Notemos que $J(0)=0$ y que $J'(0)u = 0$ para todo $u\in H_0^1(\Omega)$, por lo cual, la expresión anterior resulta en

$$J(u) = \frac{1}{2}J''(0)(u,u) + o(\|u\|^2)$$

con lo cual, si consideramos $S_\rho^+ = \{u \in V^+ : \|u\| = \rho\}$ tenemos que

$$J''(0)(u,u) \geq \frac{\lambda\rho^2}{2} \qquad \forall u \in S_\rho^+$$

de donde

$$\inf_{u \in S_\rho^+} J(u) \geq \frac{\lambda\rho^2}{4} > 0 \tag{3.9}$$

Ahora, si ponemos $S = S_\rho^+$ y

$$Q = \{u + s\varphi_{k_0} : u \in V^-, \|u\| \leq R, 0 \leq s \leq R\}$$

para $R > \rho > 0$, lo suficientemente grande, tenemos que por el Ejemplo 3, S y ∂Q se enlazan y junto con (3.16), (3.17) se cumplen las hipótesis del Teorema 1.9, dando como resultado la existencia de un punto crítico al nivel $c \geq \frac{\lambda\rho^2}{4}$, es decir, existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $J(u) = c > 0$ $\square$

Teorema 3.4 (Segundo problema)**.** *Supongamos que* (h_1), (f_1), (f_2), (f_3) *y* (f_4) *se cumplen. Entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = w(x)f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

admite una solución no trivial.

Para demostrar este teorema, similar a como demostramos el Teorema 3.1, lo realizaremos con ayuda de algunos lemas.

Lema 3.5. *El funcional* $J \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega w(x)F(u)\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{3.11}$$

es un elemento de $C^2(H_0^1(\Omega))$.

Demostración. Para mostrar que $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$, basta con demostrar que $I \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \int_\Omega w(x)F(u)\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.12}$$

es un elemento de $C^2(H_0^1(\Omega))$. Notemos que por el Lema 3.2, tenemos que

$\hat{I} \in C^2(H_0^1(\Omega))$, donde $\hat{I}$ esta definido por

$$\hat{I}(u) = \int_\Omega F(u)\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.13}$$

Ahora, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\left| I(u+v) - I(u) - \int_\Omega w(x) f(u) v\,dx \right| &= \left| \int_\Omega w(x)(F(u+v) - F(u) - f(u)v\,dx \right| \\ &\le |w|_\infty \left| \int_\Omega (F(u+v) - F(u) - f(u)v)\,dx \right| \\ &= |w|_\infty |\hat{I}(u+v) - \hat{I}(u) - \hat{I}'(u)v|\end{aligned}$$

y por tanto

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\left| I(u+v) - I(u) - \int_\Omega w(x) f(u) v\,dx \right|}{\|v\|} = 0$$

con lo que podemos concluir que

$$I'(u)v = \int_\Omega w(x) f(u) v\,dx \quad \forall u, v \in$$

de manera similar obtenemos que

$$I''(u)(v,z) = \int_\Omega w(x) f'(u) v z\,dx \quad \forall u, v, z \in H_0^1(\Omega)$$

además que I' e I'' son continuas pues $\hat{I}'$ e $\hat{I}''$ son continuas, con lo que $I \in C^2(H_0^1(\Omega))$ y por tanto $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$. □

Veamos que J también satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Lema 3.6. *El funcional $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido en (3.11) satisface (PS_c) para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Palais-Smale para J al nivel c, es decir,

$$J(u_k) \to c \quad \text{y} \quad J'(u_k) \to 0.$$

por tanto, existe $\hat{C} > 0$ tal que

$$|J(u_k)| \le \hat{C} \quad \text{y} \quad |J'(u_k)u_k| \le \hat{C}\|u_k\| \tag{3.14}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (3.14) tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\hat{C}(1 + \|u_k\|) &\geq J(u_k) - \frac{1}{\mu} J'(u_k)u_k \\
&= \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_\Omega w(x)F(u_k)\,dx - \frac{1}{\mu}\|u_k\|^2 + \int_\Omega w(x)f(u_k)u_k\,dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} w(x)f(u_k)u_k - w(x)F(u_k)\right)\,dx.
\end{aligned}$$

De (f_3) tenemos que para $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\{x\in\Omega:\,|u_k(x)|>M\}} \left(\frac{1}{\mu} f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \geq 0$$

y por tanto, por (f_2), tenemos que existe $\hat{M} > 0$ tal que

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \geq \int_{\{x\in\Omega:\,|u_k(x)|\leq M\}} \left(\frac{1}{\mu} f(u_k)u_k - F(u_k)\right)\,dx \geq \hat{M}$$

con lo cual obtenemos

$$C(1 + \|u_k\|) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 - \hat{M}$$

es decir,

$$0 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_k\|^2 - \hat{M} - C(1 + \|u_k\|)$$

y como $\mu > 2$ entonces es claro que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada. Como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, gracias a A.7 existen una subsucesión, la cual seguiremos denotando $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, tales que

1. $u_k \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, cuando $k \to \infty$;
2. $u_k \to u$ en $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2^*)$, cuando $k \to \infty$;
3. $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω;

Y similar al Lema 3.3 podemos concluir que $u_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, con lo cual J satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Con la ayuda de estos lemas podemos proceder con la demostración del Teorema 3.4, esta demostración será similar a la del Teorema 3.1, puesto que las hipótesis que usamos son las mismas a excepción de (f_4).

Demostración del Teorema 3.4. Consideramos $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido en (3.11), el cual por el Lema 3.6 satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ y por el Lema 3.5 $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$.

Notemos que por la hipótesis (f_1), el problema (3.10) admite como una solución a $0 \in H_0^1(\Omega)$. Sean $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ los valores propios del operador $-\Delta + q(x) - w(x)f'(0)$ y $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ las funciones propias asociadas. Tenemos entonces que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$(\varphi_k \mid v) - \int_\Omega w(x)f'(0)\varphi_k v\,dx = \lambda_k \int_\Omega \varphi_k v\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Definimos $k_0 = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k > 0\}$, $V^+ = \text{span}\{\varphi_k : \; k \geq k_0\}$ y $V^- = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_0-1}\}$.

Notemos que de (f_1) tenemos que

$$F(t) = \int_0^t f(s)\; ds \geq \int_0^t f'(0)s\; ds = \frac{1}{2}f'(0)t^2$$

y como $w(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω,

$$w(x)F(t) \geq \frac{1}{2}w(x)f'(0)t^2 \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\; dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2\; dx - \int_\Omega w(x)F(u)\; dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\; dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2\; dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w(x)f'(0)u^2\; dx \\ &= \frac{1}{2}J''(0)(u,u). \end{aligned}$$

y de manera similar a como se hizo en la demostración del Teorema 3.1, tenemos que

$$J(u) \leq \frac{1}{2}J''(0)(u,u) \leq 0 \quad \forall u \in V^-. \tag{3.16}$$

Si tomamos $t = 0$ en (f_2) tenemos

$$|f'(0)| \leq C$$

y por (f_4), y de manera similar a como se realizó en la demostración del

Teorema 3.1, tenemos que para k_1 lo suficientemente grande

$$J''(0)(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 \qquad \forall u \in \mathrm{span}\{\varphi_k : \; k \geq k_1\}$$

y como $\mathrm{span}\{\varphi_k : \; k_0 \leq k \leq k_1\}$ es de dimensión finita, entonces sabemos que existe $\lambda > 0$ tal que

$$J''(0)(u,u) \geq \lambda\|u\|^2 \qquad \forall u \in V^+$$

Ahora, como $J \in C^2(H_0^1(\Omega))$, entonces tenemos que

$$J(u) = J(0) + J'(0)u + \frac{1}{2}J'(0)(u,u) + o(\|u\|^2)$$

Notemos que $J(0) = 0$ y que $J'(0)u = 0$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, por lo cual, la expresión anterior resulta en

$$J(u) = \frac{1}{2}J''(0)(u,u) + o(\|u\|^2)$$

con lo cual, si consideramos $S_\rho^+ = \{u \in V^+ : \; \|u\| = \rho\}$ tenemos que

$$J''(0)(u,u) \geq \frac{\lambda\rho^2}{2} \qquad \forall u \in S_\rho^+$$

de donde

$$\inf_{u \in S_\rho^+} J(u) \geq \frac{\lambda\rho^2}{4} > 0 \tag{3.17}$$

Ahora, si ponemos $S = S_\rho^+$ y

$$Q = \{u + s\varphi_{k_0} : \; u \in V^-, \; \|u\| \leq R, \; 0 \leq s \leq R\}$$

para $R > \rho > 0$, lo suficientemente grande, tenemos que por el Ejemplo 3, S y ∂Q se enlazan y junto con (3.16), (3.17) se cumplen las hipótesis del Teorema 1.9, dando como resultado la existencia de un punto crítico al nivel $c \geq \frac{\lambda\rho^2}{4}$, es decir, existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $J(u) = c > 0$ $\square$

Presentaremos ahora el resultado para un problema de tipo Ambrosetti-Prodi, para el cual usaremos las hipótesis (f_1), (f_2), (f_3) y (f_4) y veremos como modificarlas y que otras hipótesis añadir para que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = w(x)f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

sea de tipo Ambrosetti-Prodi y podamos demostrar la existencia de una solución no trivial usando el Teorema 3.4.

Como habíamos mencionado en el Capítulo 2, para que el problema 3.18 sea de tipo Ambrosetti-Prodi, debemos tener que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{w(x)f(t)}{t} > \lambda_1 \text{ y } \limsup_{t\to-\infty} \frac{w(x)f(t)}{t} < \lambda_1 \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \tag{3.19}$$

en [10] nos indica que 3.19 es equivalente a que existan $a, b \in L^\infty(\Omega)$ y $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$w(x)f(t) \geq a(x)t - \alpha \quad \text{c.t.p. en } \Omega,\ \forall t \leq 0, \tag{3.20}$$

$$w(x)f(t) \geq b(x)t - \beta \quad \text{c.t.p. en } \Omega,\ \forall t \geq 0 \tag{3.21}$$

y además $\lambda_1(-\Delta + q(x) - a(x)) < 0$ y $\lambda_1(-\Delta + q(x) - b(x)) > 0$. Si suponemos que se cumplen (f_1) y (f_4), tenmos que

$$\frac{w(x)f(t)}{t} \geq w(x)f'(0) \quad \text{c.t.p. en } \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

y por tanto

$$w(x)f(t) \geq w(x)f'(0)t \quad \text{c.t.p. en } \Omega,\ \forall t \geq 0$$

si queremos asegurar que $\lambda_1(-\Delta + q(x) - w(x)f'(0)) > 0$ necesitamos que $f'(0) \leq 0$, bajo estas suposiciones tenemos que (3.21) es una implicación de (f_1), (f_4) y

- $f'(0) \leq 0$,

o bien podemos reemplazar (f_1) por

(f_1') $f(0) = 0$, $f'(0) \leq 0$ y

$$\frac{f(t)}{t} \geq f'(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con lo cual tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.7. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado, con* $N \geq 3$. *Si suponemos*

(f_1') $f(0) = 0$, $f'(0) \leq 0$ *y*
$$\frac{f(t)}{t} \geq f'(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(f_2) *Existen* $p \in (2, 2^*)$ *y* $C, K > 0$ *tales que*

$$|f'(t)| \leq C(1 + |t|^{p-2}) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$
$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|(|s| + |t| + 1)^{p-2} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

(f_3) *Existen* $M > 0$ *y* $\mu > 2$ *tales que*

$$0 < qF(t) \leq f(t)t \quad \textit{si } |t| \geq M.$$

(f_4) $w \in L^\infty(\Omega)$ *y* $w(x) \geq 0$ *c.t.p. en* Ω.

(f_5) *Existen* $a \in L^\infty(\Omega)$ *y* $\alpha > 0$ *tal que*

$$w(x)f(t) \geq a(x)t - \alpha \quad \textit{c.t.p. en } \Omega, \forall t \leq 0$$

y $\lambda_1(-\Delta + q(x) - a(x)) < 0$.

Entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = w(x)f(u) & \textit{en } \Omega, \\ u = 0 & \textit{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.22}$$

posee una solución no trivial.

Notemos que el problema (3.3) es de tipo Ambrosetti-Prodi pues se cumplen (f_1'), (f_4) y (f_5), lo cual implica que se cumple (3.19).

Para demostrar este último resultado nos basta con aplicar el Teorema (3.2), con lo que conluimos el desarrollo de este problema.

3.2. Conclusiones

- El problema 3.3 bajo las hipótesis del Teorema 3.7, es un problema tipo Ambrosetti-Prodi gracias a la equivalencia de las hipotesis, las que nos indican que se cumple 3.19.

- La forma en que determinamos las propiedades del peso nos ayuda a no desviarnos de la demostración del Teorema 1.11, algo que no podríamos haber hecho si las propiedades del peso hubieran sido asignadas desde el principio.

3.3. Recomendaciones

- Las hipótesis con las que se trabajó el problema nacen del estudio de las aplicaciones de los Teoremas de Paso de Montaña y Linking, lo cual limita el alcance de la aplicación. Recomendamos que se revisen otras aplicaciones para comparar las distintas hipótesis.
- En este trabajo consideramos al peso w para que seguir con el mismo esquema de la primera aplicación, recomendamos buscar una demostración distinta si se busca trabajar con un peso más general.
- Las técnicas que usamos en este trabajo son limitadas pues trabajamos con un [6] el cual es introductorio al estudio de ecuaciones diferenciales no lineales, por lo mismo recomendamos revisar libros más avanzados para futuros proyectos relacionados.
- La hipótesis en (f_2) nos permite demostrar que J satisface $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ de forma más precisa, recomendamos trabajar con la derivada para simplificar esta hipótesis.
- El material que revisamos para este trabajo, en particular [6], fueron de gran ayuda en el entendimiento de los distintos Teoremas de minimax, por lo cual recomendamos que revisen estos para futuros trabajos relacionados.

Capítulo A

Anexos

En este capítulo presentaremos los resultados que hemos utilizado en el desarrollo de este trabajo, los cuales se encuentran en sus respectivos artículos o libros con sus demostraciones por lo cual no las abordaremos. Estos resultados pueden ser revisados en [6].

A.1. Anexo I

Al trabajar en espacios de Lebesgue necesitamos dos resultados de *Teoría de la medida* que son muy bien conocidos.

Teorema A.1 (Convergencia dominada, o de Lebesgue)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^1(\Omega)$ tal que*

1. *$u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω cuando $k \to \infty$.*
2. *existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|u_k(x)| \leq v(x)$ c.t.p. en Ω.*

Entonces $u \in L^1(\Omega)$ y $u_k \to u$ en $L^1(\Omega)$ cuando $k \to \infty$, es decir, $|u - u_k|_1 \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Teorema A.2. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, \infty]$, una sucesión tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $k \to \infty$. Entonces existen una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $v \in L^p(\Omega)$ tales que*

1. *$u_{k_j}(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω cuando $j \to \infty$.*

2. *para todo* $j \in \mathbb{N}$, $|u_{k_j}(x)| \leq v(x)$ *c.t.p. en* Ω.

Podemos abordar ahora los Teoremas y definiciones necesarios en el desarrollo del trabajo, alguno de estos Teoremas son bastante conocidos en el estudio de los espacios de Sobolev y otros son resultados que tomamos de [6].

DEFINICIÓN A.1. *Sean* X *y* Y *espacios de Banach. Decimos que* X *esta inmerso continuamente en* Y *denotado por* $X \hookrightarrow Y$, *si*

1. $X \subset Y$.

2. *la inyección canónica* $j\colon X \to Y$ *es un operador lineal y continuo.*

Y decimos que la inmersión es compacta si j *es un operador compacto.*

TEOREMA A.3. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado, con* $N \geq 3$. *Entonces*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, 2^*]$$

La inmersión es compacta si $q \in [1, 2^*)$.

TEOREMA A.4. *Para* $N \geq 3$ *se tiene que*

- $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $q \in [q, 2^*]$.
- $D^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$

Estas inmersiones nunca son compactas.

TEOREMA A.5 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un subconjunto abierto y acotado. Entonces existe* $C > 0$, *tal que*

$$\int_\Omega u^2\,dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Gracias a la Desigualdad de Poincaré tenemos que la cantidad $(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$, equivalente a la norma usual.

TEOREMA A.6 (Banach-Alaoglu)**.** *Sea* X *un espacio de Banach reflexivo. Si* $B \subset X$ *es acotado, entonces* B *es relativamente compacto en la topología débil de* X.

Teorema A.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y acotado. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx < \infty$$

entonces existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que via subsucesiones, las cuales seguiremos denotando $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que

1. *$u_k \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, cuando $k \to \infty$;*
2. *$u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, 2^*]$, cuando $k \to \infty$;*
3. *$u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. en Ω;*
4. *para todo $p \in [1, 2^*]$ existe $w \in L^p(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|u_k(x)| \leq w(x)$ c.t.p. en Ω*

Este Teorema se consigue por la aplicación de los Teoremas A.3, A.5, A.6, y A.2.

Teorema A.8. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, con $N \geq 3$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen $a, b > 0$ y $r \in [2, 2^*]$, tales que*

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{r-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si definimos

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

y consideramos el funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \int_\Omega F(u(x))\, dx$$

entonces $I \in C^1(H_0^1(\Omega))$ y

$$I'(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)\, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema A.9. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, con $N \geq 3$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua para la cual existen $a, b > 0$ y $r \in [2, 2^*]$, tales que*

$$|f(t)| \leq a|t| + b|t|^{r-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si definimos

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

y consideramos el funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$I(u) = \int_\Omega F(u(x))\, dx$$

entonces $I \in C^1(H_0^1(\Omega))$ *y*

$$I'(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)\, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Definición A.2. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *y* $q \in L^\infty(\Omega)$*. Decimos que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un valor propio del operador* $-\Delta + q(x)$ *bajo las condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas, si existe* $\varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ *solución de*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + q(x)\varphi = \lambda\varphi & \text{en } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

La función φ *es llamada función propia asociada a* λ*.*

El problema (A.1), como mencionamos a lo largo de este trabjo, se debe interpretar en su fomulación variacional, es decir,

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega q(x)\varphi v\, dx = \lambda \int_\Omega \varphi v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema A.10. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *y* $q \in L^\infty(\Omega)$*. Entonces existen* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* $\mathbb{R}$ *y* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* $H_0^1(\Omega)$ *tales que*

1. *cada* λ_k *es un valor propio de* $-\Delta + q(x)$ *y cada* φ_k *es una función propia asociada a* λ_k*;*
2. $\lambda_k \to \infty$ *cuando* $k \to \infty$*;*
3. $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es una base ortonormal de* $L^2(\Omega)$*;*
4. *para cada* $k \in \mathbb{N}$*,* $\varphi_k \in L^\infty(\Omega)$ *y* $\varphi_k(x) \neq 0$ *c.t.p. en* Ω*.*

Denotaremos $\lambda_k(-\Delta + q(x))$ al k-ésimo valor propio del operador $-\Delta + q(x)$, o solo lo denotaremos λ_k si siempre nos referimos al mismo operador. Es usual listar a los valores propios como una sucesión creciente

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$; pues los valores propios pueden repetirse de acuerdo a su multiplicidad. Dos funciones propias φ_i y φ_j con $i \neq j$ son siempre distintas, incluso si corresponden al mismo valor propio (por la multiplicidad).

PROPOSICIÓN A.11. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $q \in L^\infty(\Omega)$. Si $\lambda_1(-\Delta + q(x)) > 0$, entonces*

$$(u \mid v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega q(x) uv \, dx \tag{A.2}$$

define un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ que induce una norma equivalente a la usual. Además, $\{\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}$ es una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ con respecto al producto escalar definido en (A.2)*.*

TEOREMA A.12 (Caracterización variacional del primer valor propio)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y $q \in L^\infty(\Omega)$. Consideramos el funcional $Q \colon H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definido por*

$$Q(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega q(x) u^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx}.$$

Entonces

1. $\min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} Q(u) = \lambda_1$*;*
2. $Q(u) = \lambda_1$ *si y sólo si u es solución de*

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x) u = \lambda_1 u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega; \end{cases} \tag{A.3}$$

3. *toda solución no trivial de* (A.3) *tiene signo constante en Ω (en particular, es distinta de cero c.t.p. en Ω);*
4. *el valor propio λ_1 es simple, es decir, el conjunto de soluciones de* (A.3) *es de dimensión uno.*

Gracias a que el primer valor propio es simple, podemos expresar la sucesión de valores propios como $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, con la desigualdad estricta entre el primer y segundo valor propio. Gracias a esta caracterización tenemos que si $q(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω, entonces $\lambda_1 > 0$.

Referencias bibliográficas

[1] Aantonio Ambrosetti and Paul Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal*, 14:349–381, 1973.

[2] Antonio Ambrosetti. Critical points and nonlinear variational problems. *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série*, 49, 01 1992.

[3] Antonio Ambrosetti and Marino Badiale. The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications - J MATH ANAL APPL*, 140:363–373, 06 1989.

[4] Antonio Ambrosetti and Andrea Malchiodi. *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on* $\mathbb{R}^N$. 01 2006.

[5] Antonio. Ambrosetti and Robert Turner. Some discontinuous variational problems. *Differential and Integral Equations*, 1, 01 1988.

[6] Mariano Badiale and Enrico Serra. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach.* Springer London, London, 2011.

[7] P Bartolo, Vieri Benci, and Donato Fortunato. Abstract critical applications to some nonlinear problems with “strong” resonance at infinity. *Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications - NONLINEAR ANAL-THEOR METH APP*, 7:981–1012, 09 1983.

[8] Marco Calahorrano. Introducción al análisis no lineal. *Revista Matemática*, 14:18–32, 1992.

[9] Kung Chang. Variational methods for nondifferentiable functionals and applications to partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80:102–129, 03 1981.

[10] Djairo De Figueiredo and Boyan Sirakov. On the Ambrosetti-Prodi problem for nonvariational elliptic systems. *Journal of Differential Equations*, 240:357–374, 2007.

[11] Paul Rabinowitz. Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations. *Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich Röthe*, page 29, 06 1976.

[12] Paul Rabinowitz. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 65, 01 1986.

[13] Elves Silva. Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 16:455–477, 03 1991.

[14] Michael Struwe. *Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, volume 34. Springer, Berlin, fourth edition, 2008.