



# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

### **ALGUNOS DETALLES RELEVANTES DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESIBLES**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO**

**ALEJANDRO DAVID QUIROGA ESCOBAR**

[alejandro.quiroga@epn.edu.ec](mailto:alejandro.quiroga@epn.edu.ec)

**DIRECTOR: DR. MANUEL FERNANDO CORTEZ ESTRELLA**

[manuel.cortez@epn.edu.ec](mailto:manuel.cortez@epn.edu.ec)

**QUITO, 21 DE FEBRERO DE 2022**



## **CERTIFICACIONES**

Yo, ALEJANDRO DAVID QUIROGA ESCOBAR, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

---

Alejandro David Quiroga Escobar

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Alejandro David Quiroga Escobar, bajo mi supervisión.

---

Dr. Manuel Fernando Cortez Estrella  
**DIRECTOR**



## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Alejandro David Quiroga Escobar

Dr. Manuel Fernando Cortez Estrella



## RESUMEN

En el presente trabajo se estudia el problema clásico de Cauchy para la ecuación de Navier-Stokes incompresible con velocidad inicial con velocidad inicial  $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y fuerza externa  $\vec{f} : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , descrito como

$$(\widehat{NS}) \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \Delta \vec{u} - \mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), & \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

donde  $\vec{u} : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la velocidad y  $p : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es la presión.

Presentaremos, detalladamente, que cuando  $\vec{f} \in L^2((0, T), L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$  y  $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , el problema  $(\widehat{NS})$  admite una única solución mild  $(\vec{u}, p)$  en el espacio  $[L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) \cap L^2((0, T_0), \dot{H}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))] \times L^2((0, T_0), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$  para algún  $T_0 \in (0, T)$  (Teorema de Fujita-Kato [6], 1964). Además, hablaremos de la regularidad y estabilidad (con respecto a los datos) de dicha solución, las cuales son obtenidas utilizando herramientas del análisis armónico.

**Palabras clave:** ecuaciones de Navier-Stokes, solución *mild*, espacios de Sobolev, Teorema del punto fijo de Banach, proyector de Leray, transformada de Fourier.

## ABSTRACT

In the present work we study the incompressible classical Navier-Stokes Cauchy problem with initial velocity  $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  and external force  $\vec{f} : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , described as

$$(\widehat{NS}) \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \Delta \vec{u} - \mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where  $\vec{u} : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  is the velocity and  $p : [0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  is the pressure.

When  $\vec{f} \in L^2((0, T), L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$  and  $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  we show in detail that the (P) problem has a unique mild solution  $(\vec{u}, p)$  in the space  $[L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) \cap L^2((0, T_0), \dot{H}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))] \times L^2((0, T_0), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ , for some  $T_0 \in (0, T)$  (Fujita-Kato Theorem [6], 1964). Moreover, we talk about regularity and stability (with respect to the data) of this solution, which are obtained with harmonic analysis tools.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, *mild* solution, Sobolev spaces, Banach fix point Theorem, Leray projector, Fourier transform.



---

# Índice general

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Descripción del componente desarrollado</b>                                    | <b>1</b>  |
| 1.1. Objetivo general . . . . .  | 1         |
| 1.2. Objetivos específicos . . . . .   | 1         |
| 1.3. Alcance . . . . .   | 2         |
| 1.4. Marco teórico . . . . .   | 2         |
| 1.4.1. Transformada de Fourier en la clase de Schwartz . . . . .                     | 2         |
| 1.4.2. Transformada de Fourier en distribuciones temperadas . . . . .                | 4         |
| 1.4.3. Espacios de Sobolev no homogéneos . . . . .                                   | 6         |
| 1.4.4. Espacios de Sobolev homogéneos . . . . .                                      | 9         |
| 1.5. Resultados de inmersión . . . . .   | 10        |
| <b>2. Metodología</b>  | <b>11</b> |
| 2.1. Etapa 1 . . . . .   | 12        |
| 2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .   | 12        |
| 2.1.2. Deducción del problema $(NS)$ . . . . .                                       | 13        |
| 2.1.3. Condiciones iniciales para la ecuación de Navier-Stokes . . . . .             | 16        |
| 2.1.4. Problema de Cauchy de la ecuación de Navier-Stokes<br>incompresible . . . . . | 17        |
| 2.1.5. Tipos de soluciones para $(\widehat{NS})$ . . . . .                           | 17        |
| 2.2. Etapa 2 . . . . .   | 18        |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.2.1. Transformada de Hilbert . . . . .   | 18        |
| 2.2.2. Transformada de Hilbert direccional . . . . .   | 20        |
| 2.2.3. Transformadas de Riesz . . . . .  | 21        |
| 2.2.4. Transformadas de Riesz en espacios de Sobolev ho-<br>mogéneos y no Homogéneos . . . . . | 25        |
| 2.2.5. Operador laplaciano $\Delta$ . . . . .  | 26        |
| 2.3. Etapa 3 . . . . .   | 29        |
| 2.3.1. Proyector de Leray . . . . .  | 29        |
| <b>3. Resultados, conclusiones y recomendaciones</b>   | <b>35</b> |
| 3.1. Formulación de Duhamel para $(\widehat{NS})$ . . . . .                                    | 35        |
| 3.2. Ideas y demostración del Teorema de Fujita-Kato . . . . .                                 | 37        |
| 3.3. Conclusiones . . . . .  | 50        |
| 3.4. Recomendaciones . . . . .   | 51        |
| <b>A. Notaciones</b>   | <b>52</b> |
| <b>B. Distribuciones temperadas</b>  | <b>55</b> |
| B.0.1. Funciones de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como elementos en $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .   | 55        |
| B.0.2. Topología para $S'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .   | 55        |
| <b>C. Integrales</b>   | <b>56</b> |
| <b>D. Transformada de Hilbert direccional</b>  | <b>58</b> |
| <b>E. Espacios de Sobolev homogéneos y no homogéneos</b>                                       | <b>60</b> |
| <b>F. Funciones vectoriales</b>  | <b>64</b> |
| <b>G. Núcleo del calor</b>   | <b>66</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>73</b> |

---

## Índice de figuras

---

|                      |    |
|----------------------|----|
| 2.1. Fluido. . . . . | 13 |
|----------------------|----|

# Capítulo 1

---

## Descripción del componente desarrollado

---

Se realizará un estudio detallado del proyector de Leray en espacios de Sobolev mediante la transformada de Fourier. Así mismo, se estudiarán sus propiedades principales, que serán de gran ayuda en la obtención de la formulación integral del problema  $(\widehat{NS})$ .

Finalmente, se demostrará existencia, unicidad, regularidad y estabilidad de la solución *mild* (solución que verifica la formulación integral y que es obtenida a partir de un argumento de punto fijo) del problema de Cauchy de Navier-Stokes incompresible en un tiempo pequeño, para lo cual se hará uso de estimaciones del núcleo del calor en espacios de Sobolev.

### 1.1. Objetivo general

Estudiar el problema de Cauchy de Navier-Stokes incompresible para demostrar en detalle el Teorema de Fujita-Kato.

### 1.2. Objetivos específicos

1. Exponer rápidamente las herramientas de la teoría de distribuciones y propiedades de los espacios de Sobolev tanto homogéneos como no Homogéneos.

2. Estudiar rigurosamente varias propiedades la transformada de Hilbert y propiedades de las transformadas de Riesz.
3. Definir adecuadamente el proyector de Leray y demostrar rigurosamente varias de sus propiedades.

### 1.3. Alcance

Nuestras herramientas principales son la transformada de Fourier en variable espacial y el proyector de Leray. Ambos operadores son no locales, ya que son operadores integrales sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Por lo cual, son de poca utilidad para abordar el problema

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (t, \vec{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \quad \vec{x} \in \Omega, \\ \vec{u}|_{\partial\Omega} = g(x), \end{array} \right.$$

donde  $\partial\Omega$  es suficientemente regular y  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una función dada. En este caso, nuestro método de resolución del problema  $(P)$  es nulo.

### 1.4. Marco teórico

El estudio que vamos a realizar sobre la existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Navier-Stokes tiene un enfoque netamente matemático. En esta sección presentaremos las herramientas matemáticas que vamos a emplear, que son: la transformada de Fourier y los espacios de Sobolev, tanto los homogéneos como los no homogéneos.

#### 1.4.1. Transformada de Fourier en la clase de Schwartz

**DEFINICIÓN 1.1.** *Definimos la clase de Schwartz como*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

A  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  le dotamos de la topología más pequeña que deja continua a la familia de semi-normas  $(\rho_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n}$ , notada por  $\tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ . Y como esta familia es contable,  $\tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$  es metrizable.

**DEFINICIÓN 1.2** (Transformada de Fourier). *Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos su transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mediante la fórmula*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

*siempre que tenga sentido. Como notación, también usaremos  $\widehat{f}$  para  $\mathcal{F}(f)$ .*

En el caso particular de funciones en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  la transformada de Fourier está bien definida, ya que estas funciones continuas son de decaimiento rápido y, por tanto, integrables. Para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , definimos su reflexión como  $\widetilde{f}(x) := f(-x)$ .

Los siguientes dos resultados que enunciaremos pueden encontrarse en detalle en la Sección 2.2.2 de [7] y en la Sección 3.2 de [15].

**PROPOSICIÓN 1.1.** *Sean  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Entonces*

1.  $\widehat{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{\varphi}}$ ,  $\widehat{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{\varphi}}$ ,  $\widehat{\varphi} = (2\pi)^n \widetilde{\varphi}$ ,  $\widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$
2.  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $(\partial^\alpha \widehat{\varphi})(\xi) = \mathcal{F}([-ix]^\alpha \varphi(x))(\xi)$

**PROPOSICIÓN 1.2.** *Sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $\varphi \cdot \psi, \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y además*

1.  $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$ ,
2.  $\widehat{\varphi \cdot \psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \widehat{\psi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi$
4.  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\widehat{\psi}(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi$  (Identidad de Parseval).
5.  $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  (Identidad de Plancherel).

**OBSERVACIÓN 1.** 1. La transformada de Fourier  $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)})$  es un operador lineal y continuo (ver página 21 de [1]),

2.  $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)})$  es invertible, con inversa continua dada por  $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \widetilde{\widehat{\varphi}}(x)$ .

3. En el marco de los espacios de Lebesgue, la transformada de Fourier está bien definida de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  en  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , ya que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-i\xi \cdot x}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} < +\infty.$$

4. De la identidad de Plancherel y la densidad de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , podemos extender unívocamente  $\mathcal{F} : \left( \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \rightarrow \left( L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)$  a un operador lineal y continuo definido sobre  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , notado de la misma forma, mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}_k, \end{aligned}$$

donde  $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es una sucesión que converge a  $f$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Se recomienda ver la Sección 4.3.1. de [5] (página 189) o a la página 113 de [15].

Usando argumentos de densidad, podemos replicar varios resultados de la transformada de Fourier en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  para  $L^2(\mathbb{R}^n)$  como el siguiente (ver el Remark 3.29 de [15], en la página 113).

**PROPOSICIÓN 1.3.** *La transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \left( L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \rightarrow \left( L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)$  es un isomorfismo.*

**OBSERVACIÓN 2.** Las propiedades enunciadas en la Proposición 1.2 se verifican para el caso de funciones en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Además, si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \widetilde{f}$ .

### 1.4.2. Transformada de Fourier en distribuciones temperadas

**DEFINICIÓN 1.3** (Distribuciones temperadas). *Al dual topológico de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  le llamamos espacio de las distribuciones temperadas, y lo notamos por  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Es decir,*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ es lineal y continua}\}.$$

Si  $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , decimos que  $u$  y  $v$  son iguales en el sentido de las distribuciones temperadas si  $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$  para todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , que simbólicamente escribiremos:  $u = v$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Con respecto a la continuidad de un funcional lineal en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , tenemos el siguiente resultado (ver la página 44 de [8])

**PROPOSICIÓN 1.4.** *Sea  $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional lineal. Entonces,  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ssi se satisface cualquiera de las siguientes dos condiciones:*

1.  $(\exists C > 0) (\exists k, l \in \mathbb{N}) \left( |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \rho_{\alpha, \beta}(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right),$
2.  $(\exists C > 0) (\exists k, l \in \mathbb{N}) \left( |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq k \\ 0 \leq j \leq l}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|)^j \partial^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \right).$

**EJEMPLO 1.** Definimos la masa de Dirac en el punto 0,  $\delta_0 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ , como  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ . Entonces  $|\langle \delta_0, \varphi \rangle| \leq \rho_{0,0}(\varphi)$ . Así, la Proposición 2 nos dice que  $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**EJEMPLO 2.** (Ver Subsección B.0.1) La función  $f : x \mapsto e^{|x|^2}$ , está en  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  porque es globalmente continua, pero no está en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Por lo tanto,  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \not\subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

El ejemplo anterior nos muestra que no toda función localmente integrable puede verse como una distribución temperada; sin embargo, este sí es el caso para funciones en espacios de Lebesgue.

**PROPOSICIÓN 1.5.**  $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}) \hookrightarrow (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)})$

*Demostración.* Basta usar la definición de continuidad en espacios topológicos y la definición de  $\tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$  dada en la Subsección B.0.2.  $\square$

**DEFINICIÓN 1.4.** Sean  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multi-índice, definimos las siguientes distribuciones temperadas:

1. La reflexión de  $u$ ,  $\tilde{u}$ , como  $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle := \langle u, \tilde{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ;
2. La derivada parcial de  $u$  de orden  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial^\alpha u$ , como  $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ;
3. El producto entre  $u$  y  $\psi$ ,  $u\psi$ , como  $\langle u\psi, \varphi \rangle := \langle u, \psi\varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ;



4. La convolución de  $u$  con  $\psi$ ,  $u * \psi$ , como  $\langle u * \psi, \varphi \rangle := \langle u, \tilde{\psi} * \varphi \rangle$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ;
5. La transformada de Fourier de  $u$ , notada por  $\mathcal{F}(u)$  o  $\widehat{u}$ , como  $\langle \widehat{u}, \varphi \rangle := \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**EJEMPLO 3.** Encontremos la transformada de Fourier de  $\delta_0$  en el sentido de las distribuciones temperadas. Notemos que:  $\langle \widehat{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-0} \varphi(x) dx$ . Por tanto,  $\delta_0 = 1$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**OBSERVACIÓN 3.** 1. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es una función Lebesgue medible, entonces  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si verifica una de las dos propiedades siguientes (ver la página 119 de [15]):

- (a) Existe  $m \in \mathbb{R}$  (positivo, negativo o cero) tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^m f(x) dx < +\infty$ ,
- (b) Existen  $R > 0$  y  $m \in [0, \infty)$  tales que  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^m} |f(x)| dx < +\infty$ .
2. Con frecuencia vamos a tener distribuciones temperadas  $u$  cuya transformada de Fourier  $\widehat{u}$  está en  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Usando la observación previa, se podría dar sentido a  $|\cdot|^s \widehat{u}$  y  $(1+|\cdot|^2)^s \widehat{u}$ , para ciertos valores de  $s \in \mathbb{R}$ , para que estén en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Con respecto a la transformada de Fourier para las distribuciones temperadas, podemos hallar resultados similares a los que presentamos para la transformada de Fourier para funciones de la clase de Schwartz (Capítulo 4 de [15] y/o la Sección 1.2 de [1]).

**PROPOSICIÓN 1.6.** Sean  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

1.  $\widehat{\widehat{u}} = \widetilde{u}$ ;  $\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$ ;  $\partial^\alpha \widehat{u} = \mathcal{F}((-ix)^{|\alpha|} u)$ ;  $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \widetilde{u}$ ;
2.  $\widehat{u * \psi} = \widehat{u} \widehat{\psi}$ ;  $\widehat{u\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{u} * \widehat{\psi}$ .

**PROPOSICIÓN 1.7.**  $\mathcal{F} : (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}) \rightarrow (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)})$  es un operador lineal, continuo, biyectivo y con inversa continua.

### 1.4.3. Espacios de Sobolev no homogéneos

Una de nuestras herramientas principales para abordar el problema de Navier-Stokes incompresible es la transformada de Fourier, es por ello

que es natural enmarcarnos en espacios funcionales que estén definidos a partir de la transformada de Fourier. Por tal motivo es que empezaremos por definir los espacios de Sobolev homogéneos y no homogéneos.

**DEFINICIÓN 1.5** (Espacios de Sobolev no homogéneos). Sea  $s \in \mathbb{R}$ . Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo de orden  $s$  como

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{u} \text{ es Lebesgue medible} \wedge \|u\|_{H^s} < +\infty\}.$$

donde  $\|u\|_{H^s} := \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}$ .

**OBSERVACIÓN 4.** 1. Dado  $s \in \mathbb{R}$ , no es muy difícil mostrar que  $H^s(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Hilbert con producto interno dado por (ver la página 38 de [1])

$$(u, v)_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi, \forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

2. Usando la identidad de Plancherel para  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , se puede concluir que  $W^{k,2}(\mathbb{R}^n) \cong H^k(\mathbb{R}^n)$  a través de una equivalencia de normas en  $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ . En particular  $H^0(\mathbb{R}^n) \cong L^2(\mathbb{R}^n)$ .

De la definición de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  y del hecho de que además es un espacio normado, se desprende de manera directa lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 1.8.** Si  $s_1 \leq s_2$ , entonces  $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ .

En ocasiones es difícil trabajar directamente con elementos de  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , por lo que se opta por trabajar con un subconjunto denso y con buenas propiedades. Afortunadamente tenemos un resultado de densidad de funciones regulares en  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**PROPOSICIÓN 1.9.** Para  $s \in \mathbb{R}$ , la clase de Schwartz es densa en  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* La idea es aprovechar la estructura de espacio de Hilbert de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  (ver Proposición 1.57 de [1], página 40).  $\square$

**TEOREMA 1.10.** Para  $s \in \mathbb{R}$ ,  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  es el dual topológico de  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Debemos encontrar una isometría  $T : H^{-s}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$  sobreyectiva. La idea es usar la Proposición 1.58 de [1] (página 40), la

cual nos dice que para  $L \in (H^s(\mathbb{R}^n))^*$  existe un único  $u_L \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\bar{\mathcal{B}}(u, \varphi) = \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

donde  $\bar{\mathcal{B}} : H^{-s}(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  es la (única) extensión bilineal y continua de

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{H^{-s}}) \times (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{H^s}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\phi, \varphi) &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Luego, basta tomar  $T$  como

$$\begin{aligned} T : (H^s(\mathbb{R}^n))^* &\longrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n) \\ L &\longmapsto u_L \end{aligned}.$$

□

**OBSERVACIÓN 5.** 1. Podemos hablar más sobre este resultado de dualidad. Tomemos  $s > 0$ . Sabemos que gracias al Teorema de Representación de Riesz  $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot, \cdot)_{H^s})$  es isomorfo a su dual; sin embargo, dado que  $H^s(\mathbb{R}^n)$  es un subconjunto de  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ , podemos considerar a  $H^s(\mathbb{R}^n)$  con el producto escalar heredado de  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ . Finalmente, la densidad de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  en  $(H^{-s}(\mathbb{R}^n), (\cdot, \cdot)_{H^{-s}})$  nos permite obtener  $(H^s(\mathbb{R}^n), (\cdot, \cdot)_{H^{-s}})^* \cong (H^{-s}(\mathbb{R}^n), (\cdot, \cdot)_{H^{-s}})$  (ver la página 20 de [9] o la página 136 de [2]).

2. Cuando  $s > 0$  y  $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ , podemos caracterizar la norma de  $u$  en  $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$  como sigue

$$\|u\|_{H^{-s}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{H^s} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx \right|. \quad (1.1)$$

Concluimos esta sección mencionando que si estimamos adecuadamente la expresión  $(1 + |\xi|^s)^2$ , se pueden obtener normas equivalentes sobre  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , hecho que se ve reflejado en el siguiente enunciado.

**PROPOSICIÓN 1.11.** Dado  $s \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\|\cdot\|_{H^s} \approx \|\cdot\|_{L^2} + \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{(\cdot)}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2}$$

*Demostración.* Ver la Proposición 3.1 de [14], página 74. □

### 1.4.4. Espacios de Sobolev homogéneos

**DEFINICIÓN 1.6.** Sea  $s \in \mathbb{R}$ . Definimos el espacio de Sobolev homogéneo de orden  $s$  como

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \wedge \|u\|_{\dot{H}^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

**OBSERVACIÓN 6.** 1. Todos los espacios de Sobolev  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  homogéneos son espacios vectoriales normados, con norma  $\|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}$ .

2. A diferencia de los espacios de Sobolev no homogéneos, los espacios de Sobolev homogéneos no son comparables mediante la inclusión, es decir: si  $s_1 \neq s_2$ , entonces  $\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \not\subseteq \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$  y  $\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n) \not\subseteq \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ .

3. Por la identidad de Plancherel, se concluye que  $\dot{H}^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ .

4. El conjunto  $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ , de las funciones de la clase de Schwartz cuya transformada de Fourier se anula en una vecindad del cero, es densa en  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  para todo  $s < n/2$ .

5.  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  es un espacio de Hilbert si y solo si  $s < n/2$  (ver Proposición 1.36. de [1], página 26).

**PROPOSICIÓN 1.12.** 1. Para  $s > -n/2$  tenemos que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .

2. Para  $s \leq -n/2$  se tiene que  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \not\subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Ver [Apéndice E](#). □

**PROPOSICIÓN 1.13.** Si  $|s| < n/2$ , entonces el dual topológico de  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  es  $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Es análoga a la demostración de la Proposición 1.10 (ver página 27 de [1]). □

**OBSERVACIÓN 7.** Análogamente al caso no homogéneo, se puede mostrar que si  $s \in [0, n/2)$  y  $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces,

$$\|u\|_{\dot{H}^{-s}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{\dot{H}^s} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx \right|. \quad (1.2)$$

## 1.5. Resultados de inmersión

De las definiciones de  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  y  $H^s(\mathbb{R}^n)$  se sigue directamente lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 1.14.** a) Para todo  $s \geq 0$ , se tiene que  $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .

b) Para todo  $s \leq 0$ , se tiene que  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ .

La demostración de los siguientes tres resultados puede verse en el [Apéndice E](#).

**TEOREMA 1.15.** Sea  $s \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $s \in [0, n/2)$ , entonces  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{2-2s}}(\mathbb{R}^n)$  y  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{2-2s}}(\mathbb{R}^n)$ .

2. Si  $s > n/2$ , entonces  $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

A continuación damos resultados referentes al producto de dos elementos en  $H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**TEOREMA 1.16.** Para  $s > n/2$ , el espacio  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , con el producto usual de funciones, es un álgebra de Banach conmutativa. Además, existe una constante finita  $C_{n,s} > 0$  tal que

$$\|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,s} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Por último, presentamos cotas más finas para el producto de dos funciones en  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , para ciertos casos particulares.

**TEOREMA 1.17.** Sean  $s \geq 0$  y  $\delta \in (0, n/2)$ . Sean  $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^n)$ , cualesquiera. Se tiene que  $uv \in H^{s+\delta-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s+\delta-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  y

$$1. \|uv\|_{H^{s+\delta-\frac{n}{2}}} \leq C_n (\|u\|_{H^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} + \|v\|_{H^s} \|u\|_{\dot{H}^\delta}),$$

$$2. \|uv\|_{\dot{H}^{s+\delta-\frac{n}{2}}} \leq C_n (\|u\|_{\dot{H}^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} + \|v\|_{\dot{H}^s} \|u\|_{\dot{H}^\delta}).$$

donde  $C_n = 2^{s+1} \sqrt{|S^{n-1}|}$  ( $|S^{n-1}|$  la superficie de la esfera unidad de dimensión  $n$ ) para  $n \geq 2$  y  $C_n = 2^{s+1}$  para  $n = 1$ .

# Capítulo 2

---

## Metodología

---

Para el desarrollo del componente se ha empleado el método deductivo e hipotético-deductivo. Deductivo porque en ocasiones realizamos observaciones o conclusiones a partir de resultados que aparecen en la literatura. Mientras que el método hipotético deductivo lo usamos cuando es necesario desarrollar resultados o herramientas matemáticas por cuenta propia porque que no se encontraron directamente en la bibliografía usada.

La metodología se desarrolla en cuatro etapas:

**Etapas 1:** Empezamos estudiando, de forma breve, la parte física detrás de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre  $\mathbb{R}^3$ , la deducción de las mismas, comentamos sobre las condiciones iniciales asociadas para obtener el problema de Cauchy a estudiar. Finalmente, se definen algunos tipos de solución para la ecuaciones de Navier-Stokes que son ampliamente usadas en la comunidad matemática, y nos enfocamos en el concepto de solución *mild*.

**Etapas 2:** Hacemos un estudio rápido de la transformada de Hilbert y de Riesz en espacios de Lebesgue y Sobolev.

**Etapas 3:** Desarrollamos el estudio del proyector de Leray en espacios de Sobolev homogéneos. Luego, a través de una caracterización del proyector de Leray con la transformada de Riesz, se extiende la definición de dicho proyector a espacios de Sobolev no homogéneos.

## 2.1. Etapa 1

### 2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Empezamos dando un breve estudio físico de las ecuaciones de Navier-Stokes (el lector interesado puede revisar los capítulos 1, 3, 5, 6 y 9 de [3] y el Capítulo 2 de [13]).

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen la evolución de fluidos, tanto compresibles como incompresibles, además de homogéneos, isotrópicos, isotérmicos y newtonianos. A grandes rasgos, un fluido es incompresible si su volumen no varía en el tiempo; es homogéneo si, para cada instante fijo, la densidad  $\rho$  es constante en cada punto; es isotrópico si sus propiedades físicas son las mismas en cualquier dirección; y es newtoniano cuando el tensor de esfuerzo viscoso  $\tau$  (definido más adelante) cumple la relación constitutiva  $\tau = \nu/2\text{sym}(\vec{\nabla}\vec{u})$ , con  $\nu$  una función (conocida como viscosidad) y  $\vec{u}$  la velocidad del fluido. Algunos ejemplos de estos fluidos son el aceite, agua, gasolina, etc.

Si el fluido es isotrópico, tenemos:

$$\text{incompresible} + \text{homogéneo} \implies \rho = \rho(t, x, y, z) = \text{cte}, \quad (2.1)$$

$$\text{incompresible} + \text{newtoniano} + \text{isotérmico} \implies \nu = \nu(t, x, y, z) = \text{cte}. \quad (2.2)$$

Escribimos de manera compacta las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles como

$$(NS) \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \end{cases}$$

donde  $\vec{f} : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la fuerza externa dada, a la que se somete el fluido en cuestión;  $\vec{u} : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el campo de velocidades del fluido;  $p : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la presión interna del fluido; y  $\nu, \rho$  son la viscosidad y densidad del fluido respectivamente, las cuales son constantes en nuestro caso.

La primera ecuación en  $(NS)$  expresa la conservación del *momentum*, mientras que la segunda ecuación describe la conservación de la masa, a partir del hecho de la incompresibilidad del fluido.

### 2.1.2. Deducción del problema $(NS)$

Consideremos un fluido en 3 dimensiones, homogéneo, isotrópico, isotérmico y newtoniano.

**Conservación del *momentum*:** dentro del fluido, tomemos arbitrariamente un volumen  $V$  con superficie  $S$  (ver Figura 2.1a).

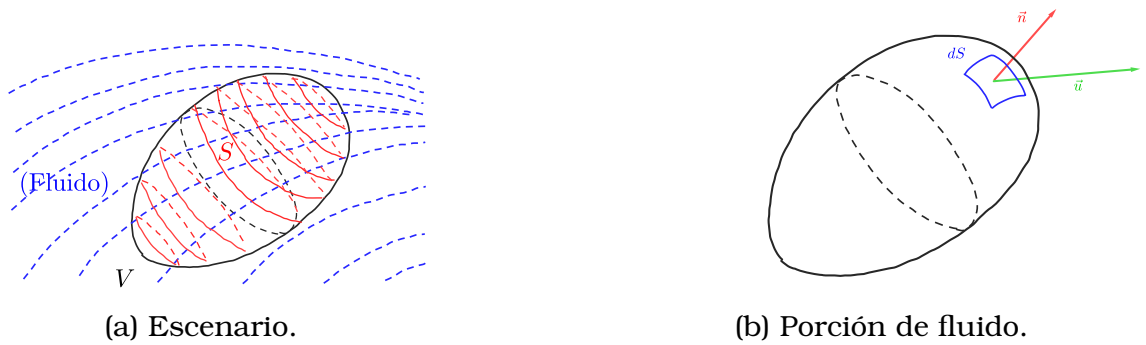


Figura 2.1: Fluido.

De la segunda ley de Newton tenemos que la fuerza total  $\vec{f}_T$  que ejerce el fluido fuera de  $V$  sobre  $V$  es

$$\vec{f}_T = \int_V \vec{a} dm = \int_V \rho \vec{a} dV, \quad (2.3)$$

donde  $\vec{a} = \vec{a}(t, x, y, z)$  es el campo de aceleración de las partículas que conforman el fluido. Utilizando la regla de la cadena obtenemos que

$$\vec{a} = \vec{a}(t, x, y, z) = \frac{d\vec{u}}{dt}(t, x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u},$$

y reemplazando esto en (2.3), tenemos que

$$\vec{f}_T = \int_V \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) dV. \quad (2.4)$$

Por otro lado, notemos  $\vec{f}_T$  puede descomponerse en la suma vectorial de dos fuerzas: la primera es la fuerza  $\vec{f}_1$  que ejerce la gravedad sobre  $V$ ,



mientras que la segunda fuerza, notada por  $\vec{f}_2$ , es debida a la acción que ejercen las partículas del fluido, fuera de  $V$ , sobre la superficie  $S$ .

$$\vec{f}_T = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \quad (2.5)$$

Si  $\vec{g}$  es la aceleración de la gravedad, la expresión de  $\vec{f}_1$  viene dada por:

$$\vec{f}_1 = \int_V \vec{g} dm = \int_V \rho \vec{g} dV, \quad (2.6)$$

mientras que para obtener una expresión para  $f_2$  será imprescindible utilizar las propiedades físicas que hemos establecido sobre el fluido. Tomemos un diferencial de superficie  $dS$  sobre  $S$  y  $\vec{n}$  un vector unitario normal a  $dS$ . Sea  $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  el tensor de esfuerzos, definido como en la Sección 6-3 de [3]. El tensor  $\sigma$  es tal que  $\sigma \cdot \vec{n} dS$  es la fuerza que el fluido, fuera de  $V$ , ejerce sobre  $dS$ , por tanto gracias, al teorema de la divergencia para tensores

$$\vec{f}_2 = \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \sigma dV. \quad (2.7)$$

Definimos el tensor de esfuerzo viscoso como  $\tau := \sigma + pI_3$  ( $I_3$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ ). Entonces, se sigue que

$$\sigma = -pI_3 + \frac{\mu}{2} \left[ \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{u})^T \right]. \quad (2.8)$$

De (2.6), (2.7), (2.8) y, además, utilizando (2.2) y la igualdad (2.5)

$$\begin{aligned} \vec{f}_T &= \int_V \rho \vec{g} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \left[ -pI_3 + \frac{\nu}{2} \left( \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{u})^T \right) \right] dV \\ &= \int_V \left[ \rho \vec{g} dV - \vec{\nabla} P + \nu \Delta u \right] dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por último, comparando (2.4) y (2.9) obtenemos que

$$\int_V \left[ \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u \right) - \rho \vec{g} dV + \vec{\nabla} P - \nu \Delta u \right] dV = 0,$$

y dado que  $V$  es arbitrario, concluimos que  $\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u \right) - \rho \vec{g} dV + \vec{\nabla} P - \nu \Delta u = 0$ , que reacomodando términos obtenemos la primera ecuación de (NS).

**Conservación de la masa** Consideremos  $V, S$  como antes.

Si  $m_{\text{ent}}$  es la masa del fluido que entra en  $V$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ ;  $m_{\text{sal}}$  la masa del fluido que sale de  $V$  durante  $\Delta t$ ; y  $\Delta m$  la variación de masa en  $V$  durante  $\Delta t$ , entonces, el balance de masa es  $m_{\text{ent}} - m_{\text{sal}} = \Delta m$ , que como razón de cambio llega a ser

$$\frac{dm_{\text{ent}}}{dt} - \frac{dm_{\text{sal}}}{dt} = \frac{dm}{dt}. \quad (2.10)$$

Como  $m = \int_V \rho dV$  es la masa de  $V$ , y  $\rho$  es constante, tenemos que

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (2.11)$$

Por otra parte, tomemos un diferencial  $dS$  de la superficie  $S$ , entonces el caudal (razón de cambio de volumen) sobre  $dS$  es la componente normal de la velocidad del fluido  $\vec{u}$  que atraviesa  $dS$  multiplicada por la medida de área de  $dS$ , esto es  $\vec{u} \cdot \vec{n}$ , con  $\vec{n}$  el vector normal unitario saliente de  $S$  (como en la Figura 2.1b). Como este caudal multiplicado por la densidad del fluido es la tasa de cambio de masa que atraviesa  $dS$ , al sumar todas las contribuciones de estas tasas de cambio de masa sobre toda la superficie  $S$  obtenemos  $dm_{\text{ent}}/dt - dm_{\text{sal}}/dt$ , es decir

$$\frac{dm_{\text{ent}}}{dt} - \frac{dm_{\text{sal}}}{dt} = \int_S \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA. \quad (2.12)$$

Reemplazando (2.11) y (2.12) en (2.10) se tiene que

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV = \int_S \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = 0, \quad (2.13)$$

donde la primera igualdad se debe al teorema de la divergencia de Gauss. Luego, dado que  $V$  fue tomado de manera arbitraria, de (2.13) se tiene que  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0$ , y como  $\rho$  es constante, concluimos que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ , como queríamos.

**OBSERVACIÓN 8.** 1. Es importante mencionar que la deducción del problema ( $NS$ ) presentada, usa resultados conseguidos de manera experimental para fluidos que aparecen en la vida cotidiana, como los mencionados al inicio de esta sección.

2. La fuerza  $\vec{g}$  puede, sin ningún problema, ser reemplazada por cualquier otro tipo de fuerza externa  $\vec{f}$  que actúe sobre el fluido.

### 2.1.3. Condiciones iniciales para la ecuación de Navier-Stokes

Para poder resolver  $(NS)$  es importante tener que, en efecto, es un problema bien planteado en el sentido de Hadamard (exista una única solución que dependa continuamente de los datos). Para lo cual, podemos pensar en imponer a  $(NS)$  condiciones iniciales para la velocidad y la presión .

En [10] se estudia  $(NS)$ , sobre todo  $\mathbb{R}^n$ , con la condición inicial

$$\vec{u}(0, \vec{x}) = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

donde  $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la velocidad inicial del fluido, la cual es una función que solo depende de la variable espacial. Se obtiene que el problema  $(NS)$ , con la condición (2.14), está bien planteado en el sentido de Hadamard en el contexto de los espacios de Lebesgue.

De otro lado, en [11] se aborda el problema  $(NS)$  en un dominio espacial acotado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ). En este caso, además de incluir la condición inicial

$$\vec{u}(0, \vec{x}) = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad x \in \Omega, \quad (2.15)$$

con  $\vec{u}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se impone la condición de frontera

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

En este escenario también tenemos el buen planteamiento del problema  $(NS)$ , con las condiciones (2.15) y (2.16).

La moraleja es que para establecer el problema de Cauchy para la ecuación de Navier-Stokes incompresible, sobre todo el espacio, es importante establecer una condición inicial solo para la velocidad. A continuación tratamos dicho problema.

### 2.1.4. Problema de Cauchy de la ecuación de Navier-Stokes incompresible

El problema de Cauchy de Navier-Stokes incompresible en  $\mathbb{R}^n$  viene dado de la siguiente forma: dadas dos funciones (datos)  $\vec{u}_0 : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\text{div}(\vec{u}_0) = 0$ , y  $\vec{f} : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , hallar  $u : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $p : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$(Q) \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{f}, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ \vec{u}(0, \vec{x}) = \vec{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde sin pérdida de generalidad vamos a suponer que las constantes positivas  $\nu$  y  $\rho$  son iguales a 1. Y notando que  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \text{div}(u \otimes \vec{u})$  (pues  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ), el problema (Q) se convierte en:

$$(\widehat{NS}) \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \Delta \vec{u} - \text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ \vec{u}(0, \vec{x}) = \vec{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Para resolver  $(\widehat{NS})$  vamos a introducir el concepto de solución *mild* y trabajar sobre espacios funcionales que se adecúen a tales soluciones.

### 2.1.5. Tipos de soluciones para $(\widehat{NS})$

A continuación presentamos algunos tipos de soluciones para  $(\widehat{NS})$  (el lector interesado puede revisar el Capítulo 4 y la Subsección 5 del Capítulo 6 de [13]).

**Solución Clásica:** Es un par  $(\vec{u}, \vec{p})$ , con  $\vec{u} : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\vec{p} : [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones suficientemente regulares tales que verifiquen  $(\widehat{NS})$  puntualmente. Claro, para tener este tipo de soluciones es necesario que también los datos sean suficientemente regulares.

**Solución débil:** Es un par de funciones  $\vec{u}$  y  $p$  (ya no necesariamente tan regulares) que verifican  $(\widehat{NS})$  en el sentido de las distribuciones.

Ahora, los datos ya no son regulares.

**Soluciones Mild:** Decimos que un par  $\vec{u}$ ,  $p$ , pertenecientes a un espacio funcional adecuado, es una solución *mild* para  $(\widehat{NS})$  si  $\vec{u}$  satisface  $(\widehat{NS})$  en su forma integral, es decir

$$\vec{u}(t, \cdot) = W_t * u_0 + \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P} \vec{f}(s, \cdot) ds - \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds, \quad t > 0,$$

y es obtenida a partir de un argumento de punto fijo. Mientras que  $p$  debe expresarse como

$$p = \frac{1}{\Delta} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) \right],$$

donde  $\mathbb{P}$  es el proyector de Leray,  $\frac{1}{\Delta}$  es el operador inverso del laplaciano  $\Delta$  (que lo estudiaremos más adelante) y  $W_t(\cdot) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}$ .

## 2.2. Etapa 2

Antes de abordar el estudio del proyector de Leray es importante revisar la transformada de Hilbert, las transformadas de Riesz y el operador laplaciano.

### 2.2.1. Transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert es una herramienta que nos facilitará el estudio de las transformadas de Riesz, mientras que las transformadas de Riesz nos permitirán definir y estudiar el proyector de Leray.

**DEFINICIÓN 2.1.** Para una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  suficientemente regular, definimos su transformada de Hilbert mediante la fórmula

$$\mathcal{H}(f)(x) := \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

**OBSERVACIÓN 9.** 1. El símbolo *p.v.* antepuesto al símbolo integral representa un límite de integrales dado por

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

2. Dado  $x \in \mathbb{R}$  fijo, es posible que  $y \rightarrow f(y)/(x - y)$  sea una función no Lebesgue integrable en  $\mathbb{R}$  pero sí integrable en los conjuntos  $\{|x| \geq \epsilon\}$ , para todo  $\epsilon > 0$ , y existir a la vez el límite *p.v.*  $\int_{\mathbb{R}} f(y)/(x - y) dy$ . Por ejemplo, para  $x \in \mathbb{R}$  fijo, podemos tomar  $f(y) := \chi_{[-1,1]}(x - y)$ , y así,

$$\mathcal{H}(f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{\chi_{[-1,1]}(x - y)}{x - y} dy = 0,$$

mientras que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{[-1,1]}(x - y)}{x - y} dy,$$

es indeterminado.

De lo hecho en la página 251 de [7] se obtiene inmediatamente que:

**PROPOSICIÓN 2.1.** *Todo elemento de la clase de Schwartz tiene bien definida su transformada de Hilbert, esto es:  $\mathcal{H}(\varphi)(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

Por otra parte, si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , nos preguntamos

¿A qué espacio/s funcionales pertenece la función  $x \rightarrow \mathcal{H}(f)(x)$ ?

A continuación respondemos a esta interrogante.

**TEOREMA 2.2.** *Para cada  $p \in (1, \infty)$  tenemos que*

$$\mathcal{H} : \left( \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})} \right) \rightarrow \left( L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})} \right)$$

*es un operador lineal y continuo.*

*Demostración.* Los detalles completos de la prueba de este resultado se encuentran en la demostración del Teorema 2.1 de [9], en la página 43. □

**COROLARIO 2.3.** *Para cada  $p \in (1, +\infty)$ , la transformada de Hilbert puede extenderse unívocamente hacia todo el espacio  $L^p(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Basta recordar que para  $p \in (1, +\infty)$ , el espacio  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  es denso en  $L^p(\mathbb{R})$ . □

**OBSERVACIÓN 10.** Para los casos  $p \in \{1, +\infty\}$  la transformada de Hilbert  $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$  no está bien definida mediante extensión. En efecto, si

consideramos la función  $f := \chi_{[a,b]}$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , tenemos que  $f$  está en  $L^1(\mathbb{R})$  y en  $L^\infty(\mathbb{R})$ , pero

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{|x-a|}{|x-b|}$$

no es una función integrable ni acotada (los detalles de este ejemplo pueden verse en la página 46 de [9]).

### 2.2.2. Transformada de Hilbert direccional

Hemos definido la transformada de Hilbert para funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Para el caso de funciones definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  a valores en  $\mathbb{C}$  se puede definir la transformada de Hilbert direccional de la siguiente manera.

**DEFINICIÓN 2.2** (Transformada de Hilbert direccional). *Sea  $\theta \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|\theta| = 1$ . Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función suficientemente regular. Definimos la transformada de Hilbert direccional de  $f$  en la dirección  $\theta$  mediante la fórmula*

$$\mathcal{H}_\theta(f)(x) := \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+t\theta)}{t} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De la Proposición 2.1 obtenemos que:

**PROPOSICIÓN 2.4.** *Para todo  $|\theta| = 1$  y todo  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{H}_\theta(\varphi)(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

**PROPOSICIÓN 2.5.** *Para cada  $p \in (1, +\infty)$  tenemos que*

$$\mathcal{H}_\theta : \left( \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \rightarrow \left( L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right),$$

*es un operador lineal y continuo.*

*Demostración.* Ver el [Apéndice D](#). □

Así, es inmediato el siguiente resultado.

**COROLARIO 2.6.** *Para todo  $p \in (1, +\infty)$  y todo  $\theta \in \mathbb{R}^n$ , con  $|\theta| = 1$ , podemos extender unívocamente  $\mathcal{H}_\theta$  a*

$$\mathcal{H}_\theta : \left( L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \rightarrow \left( L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)$$

preservando la linealidad y continuidad.

*Demostración.* Gracias a que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $p \in (1, \infty)$  y  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (espacio de llegada) es completo, el resultado previo nos permite concluir que  $\mathcal{H}_\theta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  puede extenderse unívocamente a un operador lineal y continuo a todo el espacio  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dicha extensión también se notará como  $\mathcal{H}_\theta$ .  $\square$

A continuación definimos las transformadas de Riesz, las cuales veremos que se puede definir en espacios de Lebesgue y Sobolev.

### 2.2.3. Transformadas de Riesz

**DEFINICIÓN 2.3.** Para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  suficientemente regular y  $j \in \{1, \dots, n\}$  definimos la transformada de Riesz en la componente  $j$ -ésima como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j(f)(x) &:= K_n \cdot p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy \\ &= K_n \cdot p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x - y) dy, \end{aligned}$$

donde la constante  $K_n$  está dada por  $K_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ , con  $\Gamma$  la función gamma.

Será útil adoptar la notación  $\mathcal{R}_j^\epsilon(f)(x) := K_n \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x - y) dy$ , y así,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{R}_j^\epsilon(f)(x) = \mathcal{R}_j(f)(x)$ .

A *grosso modo* podemos decir que para  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  suficientemente regular, se cumple que  $\mathcal{R}_j(f) = \frac{(\cdot)_j}{|\cdot|^{n+1}} * f$ . Más adelante veremos que esto es cierto en el sentido de las distribuciones temperadas cuando  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , por lo que es importante definir lo siguiente.

**DEFINICIÓN 2.4.** Para  $j \in \{1, \dots, n\}$  definimos la función

$$\begin{aligned} W_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \langle W_j, \varphi \rangle := K_n \cdot p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 2.7.** Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $W_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .



*Demostración.* Usaremos la Proposición 1.4. Es fácil ver que  $W_j$  es lineal. Ahora, sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , cualquiera. Tenemos que

$$|\langle W_j, \varphi \rangle| = K_n \underbrace{\left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon \leq |y| \leq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y) dy \right|}_{I_1} + K_n \underbrace{\int_{|y| \geq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(y) dy}_{I_2}.$$

Por una parte tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon \leq |y| \leq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} [\varphi(y) - \varphi(0)] dy \right| \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon \leq |y| \leq 1} \frac{|y_j|}{|y|^n} \left| \frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{|y|} \right| dy \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon \leq |y| \leq 1} \frac{1}{|y|^{n-1}} \left\| \vec{\nabla} \varphi \right\|_{\infty} dy \\ &= C_n \left\| \vec{\nabla} \varphi \right\|_{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 r^{-(n-1)+n-1} dr \\ &= C_n \left\| \vec{\nabla} \varphi \right\|_{\infty}, \end{aligned}$$

donde en la primera línea hemos usado el hecho de que  $\int_{\epsilon \leq |y| \leq 1} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(0) dy = 0$  porque el integrando es una función impar y el dominio de integración es un anillo centrado en el origen, mientras que la tercera línea se obtuvo con el Teorema de Incrementos Finitos.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{|y| > 1} \frac{|y| |\varphi(y)|}{|y|^{n+1}} dy \\ &\leq C_n \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |y|) |\varphi(y)|\} \int_1^{+\infty} r^{-(n+1)+n-1} dr \\ &= C_n \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |y|) |\varphi(y)|\}. \end{aligned}$$

Así,

$$|\langle W_j, \varphi \rangle| \leq C_n \left\| \vec{\nabla} \varphi \right\|_{\infty} + C_n \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |y|) |\varphi(y)|\},$$

y gracias a la Proposición 1.4, concluimos que  $W_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Estimaciones similares en la prueba de este resultado nos sirven para demostrar lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 2.8.** Para cada  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{R}_j(f)(x)$

existe en todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \|R_j(\varphi)\|_\infty < +\infty$ .

Como  $W_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , entonces existe su transformada de Fourier en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . En la Proposición 4.1.14. (página 260) se demuestra que:

**PROPOSICIÓN 2.9.**

$$\widehat{W_j} = -\frac{ix_j}{|x|} \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

En el siguiente lema caracterizamos a  $\mathcal{R}_j$  en función de  $W_j$ .

**LEMA 2.10.** Para  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se cumple la siguiente fórmula

$$\mathcal{R}_j(\varphi) = W_j * \varphi \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

*Demostración.* Para cualquier  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle W_j * \varphi, \psi \rangle &= \langle W_j, \tilde{\varphi} * \psi \rangle \\ &= K_n \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \tilde{\varphi} * \psi(y) dy \\ &= K_n \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(y-z) \psi(z) dz dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(z-y) dy dz \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \mathcal{R}_j^\epsilon(\varphi)(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{R}_j^\epsilon(\varphi)(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \mathcal{R}_j(\varphi)(z) dz = \langle \mathcal{R}_j(\varphi), \psi \rangle, \end{aligned}$$

donde en la cuarta línea hemos aplicado el Teorema de Fubini-Tonelli, mientras que en la sexta línea hemos usado el TCDL (posible gracias a que de la Proposición 2.8 se tiene que  $\mathcal{R}_j(\varphi)$  es acotada).  $\square$

**TEOREMA 2.11.** Para  $p \in (1, +\infty)$  y  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la función

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p}) &\longrightarrow (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p}) \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{R}_j(\varphi) \end{aligned}$$

está bien definida, es lineal y continua.

*Demostración.* Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Usaremos las mismas notaciones dadas en la transformada de Hilbert direccional. Para  $\theta \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$  definimos

$$\mathcal{H}_\theta^\epsilon(\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\epsilon} \frac{\varphi(x - t\theta)}{t} dt,$$

y así, de la Proposición 2.1 obtenemos que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\theta^\epsilon(\varphi)(x) = \mathcal{H}_\theta(\varphi)(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j^\epsilon(\varphi)(x) &= \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \varphi(x - y) dy \\ &= K_n \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^{+\infty} \rho^{n-1} \frac{\rho \theta_j}{\rho^{n+1} |\theta|^{n+1}} \varphi(x - \rho\theta) d\rho d\sigma(\theta) \\ &= K_n \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\theta_j}{\rho \cdot 1^{n+1}} \varphi(x - \rho\theta) d\rho d\sigma(\theta) \\ &= -K_n \int_{S^{n-1}} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\omega_j}{\rho} \varphi(x + \rho\omega) d\rho d\sigma(\omega) \\ &= K_n \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\omega_j}{\rho} \varphi(x - r\omega) dr d\sigma(\omega) \\ &= \frac{K_n}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{|\rho|>\epsilon} \frac{\theta_j}{\rho} \varphi(x - \rho\theta) d\rho d\sigma(\theta) \\ &= \frac{K_n}{\pi} \int_{S^{n-1}} \theta_j \mathcal{H}_\theta^\epsilon(\varphi)(x) d\sigma(\theta), \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde la segunda igualdad se debe a fórmula dada en la Proposición C.1, en la cuarta igualdad se hizo el cambio de variable  $\omega = -\theta$ , en la quinta línea se hace el cambio de variable  $r = -\rho$  y en la sexta línea se ha promediado las expresiones de las tercera y quinta línea. Ahora, hacemos tender  $\epsilon$  a  $0^+$  en (2.17) mediante el TCDL. Por tanto, se sigue que

$$\mathcal{R}_j(\varphi)(x) = \frac{K_n}{\pi} \int_{S^{n-1}} \theta_j \mathcal{H}_\theta(\varphi)(x) d\sigma(\theta),$$

de donde, gracias a la desigualdad integral de Mincowski y a la Proposición 2.5,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_j(\varphi)\|_{L^p} &\leq \frac{K_n}{\pi} \int_{S^{n-1}} \|\theta_j \mathcal{H}_\theta(\varphi)\|_{L^p} d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{K_n}{\pi} \int_{S^{n-1}} \|\mathcal{H}_\theta(\varphi)\|_{L^p} d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{K_n}{\pi} C_p \|\varphi\|_{L^p} \int_{S^{n-1}} d\sigma(\theta) \end{aligned}$$

$$= C_{n,p} \|\varphi\|_{L^p}. \quad \square$$

Así, para funciones en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $p \in (1, +\infty)$ , sus transformadas de Riesz están definidas en c.t.p.

**OBSERVACIÓN 11.** Dado que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $p \in (1, \infty)$ , y  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (espacio de llegada de  $\mathcal{R}_j$ ) es de Banach, existe una única extensión lineal y continua de  $\mathcal{R}_j$  a  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , que la notaremos de la misma manera:  $\mathcal{R}_j : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**PROPOSICIÓN 2.12.** Para cualquier  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se tiene que:

$$\widehat{\mathcal{R}_j(\varphi)}(x) = \left( -\frac{i(\cdot)_j}{|\cdot|} \widehat{\varphi}(\cdot) \right)(x), \quad \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Usando la Proposición 2.9 y el Lema 2.10 tenemos que

$$\widehat{\mathcal{R}_j(\varphi)} = \widehat{W_j * \varphi} = \widehat{W_j} \widehat{\varphi} = -\frac{i(\cdot)_j}{|\cdot|} \widehat{\varphi}.$$

□

## 2.2.4. Transformadas de Riesz en espacios de Sobolev homogéneos y no Homogéneos

Como en nuestro trabajo los espacios de Sobolev juegan un rol principal, necesitamos definir las transformadas de Riesz en dichos espacios. La siguiente proposición nos dirige a este punto.

**PROPOSICIÓN 2.13.** Sean  $s \in \mathbb{R}$  y  $j \in \{1, \dots, n\}$

1. La transformada de Riesz en la componente  $j$ -ésima  $\mathcal{R}_j : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$  está bien definida, es lineal y continua.
2. Si  $s < n/2$ , la transformada de Riesz en la componente  $j$ -ésima  $\mathcal{R}_j : \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  está bien definida, es lineal y continua.

*Demostración.* 1. Lo haremos por densidad, recordando que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es

denso en  $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . De la Proposición 2.12 tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_j(\varphi)\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| \widehat{\mathcal{R}_j(\varphi)}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| -\frac{i\xi_j}{|\xi|} \widehat{\varphi}^2(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \underbrace{\frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2}}_{\leq 1} |\widehat{\varphi}^2(\xi)|^2 d\xi \leq \|\varphi\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

2. Se muestra de manera análoga al caso no homogéneo, recordando que para  $s < n/2$  el espacio  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  es de Hilbert y además que  $S_0(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Usando el resultado anterior y la Proposición 2.12, un sencillo argumento de densidad nos permite concluir lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 2.14.** *Para todo  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$  se tiene que*

$$\mathcal{R}_j(u) = \mathcal{F}^{-1} \left( -\frac{i(\cdot)_j}{|\cdot|} \widehat{u} \right), \quad \text{en } H^s(\mathbb{R}^n).$$

Este resultado también es cierto para funciones  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$  si consideramos que  $s < n/2$ .

### 2.2.5. Operador laplaciano $\Delta$

Como hemos mencionado antes, para realizar un ilustrativo análisis del operador de Leray necesitamos introducir el operador laplaciano en los espacios de Sobolev.

Para una función regular  $\varphi$ , mediante las propiedades de la transformada de Fourier, podemos escribir  $\widehat{\partial_j f} = i\xi_j \widehat{f}$ , y así,  $\partial_j f = \mathcal{F}^{-1}(i\xi_j \widehat{f})$ . De hecho, se tiene el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 2.15.** *Sea  $s \in \mathbb{R}$  y  $j \in \{1, \dots, n\}$ . La derivada parcial  $j$ -ésima, definida como*

$$\begin{aligned} \partial_j : \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \mathcal{F}^{-1}(i\xi_j \widehat{u}) \end{aligned}$$

*es un operador lineal y continuo.*

*Demostración.* Es fácil ver que  $\partial_j$  es lineal. Ahora, sea  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $\widehat{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  y  $|\cdot|^s \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Probemos que  $\partial_j u \in \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ . De la primera parte de la Observación 3 tenemos que  $i\xi_j \widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y, por tanto,  $\partial_j u = \mathcal{F}^{-1}(i\xi_j \widehat{u}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

De otro lado, la estimación

$$\|\partial_j u\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2(s-1)} |i\xi_j \widehat{u}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi_j|^2}{|\xi|^2} |\xi|^{2s} |\widehat{u}|^2 d\xi \leq \|u\|_{\dot{H}^s}^2 < +\infty$$

nos muestra que  $\partial_j u \in \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$  y que  $\partial_j$  es continua.  $\square$

**OBSERVACIÓN 12.** La Definición 2.15 coincide con la derivada débil  $\partial_j$  en el espacio  $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ .

Para definir el laplaciano de manera análoga a la derivada parcial  $j$ -ésima, nos damos cuenta de lo siguiente: para una función regular  $\varphi$  se tiene que  $\widehat{\Delta\varphi} = -|\xi|^2 \widehat{\varphi}$ . Así mismo, tenemos que si  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\mathcal{F}(-|\cdot|^2 \widehat{u}) \in \dot{H}^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ . Esta última observación nos sugiere la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 2.5** (Laplaciano en espacios de Sobolev homogéneos). Sea  $s \in \mathbb{R}$ . El operador laplaciano se define como la siguiente función lineal

$$\begin{aligned} \Delta: \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \dot{H}^{s-2}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \mathcal{F}^{-1}(-|\xi|^2 \widehat{u}) \end{aligned}$$

**OBSERVACIÓN 13.** 1. Un cálculo sencillo nos permite concluir que el operador  $\Delta$  es una isometría ( $\|u\|_{\dot{H}^{s-2}} = \|u\|_{\dot{H}^s}$ , para todo  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ ), así, es continuo e inyectivo.

2. Es fácil mostrar que en este contexto  $\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u$ , para  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora, dado que  $\Delta$  es inyectivo, nos preguntamos si es sobreyectivo. La respuesta es afirmativa y lo enunciamos a continuación.

**TEOREMA 2.16.** Para  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s < n/2$  se tiene que  $\Delta: \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{H}^{s-2}(\mathbb{R}^n)$  es un isomorfismo isométrico.

*Demostración.* Solo nos falta mostrar que  $\Delta$  es sobreyectivo. Sea  $v \in \dot{H}^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ , definimos  $u := \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{|\cdot|^2} \widehat{v}\right)$ . Debemos mostrar que  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$

y  $\Delta u = v$ .

- Notemos que  $\frac{1}{|\cdot|^2}\widehat{v}$  es una función Lebesgue medible. De momento veamos que también es localmente integrable. Sea  $r > 0$ , cualquiera, entonces

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq r} \frac{1}{|\xi|^2} |\widehat{v}(\xi)| d\xi &= \int_{|\xi| \leq r} \frac{1}{|\xi|^s} |\xi|^{s-2} |\widehat{v}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left( \int_{|\xi| \leq r} \frac{1}{|\xi|^{2s}} d\xi \right)^{1/2} \|v\|_{\dot{H}^{s-2}} \\ &= C_n \|v\|_{\dot{H}^{s-2}} \left( \int_0^r r^{-2s+n-1} dr \right)^{1/2} \\ &= C_{n,r} \|v\|_{\dot{H}^{s-2}} < +\infty, \end{aligned}$$

donde la integral de la tercera línea es finita porque al ser  $s < n/2$ , se tiene que  $-2s + n > 0$ . Por tanto  $-\frac{1}{|\cdot|^2}\widehat{v} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Por otra parte, tomando  $m = n/2 - s + 1 > 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{x \geq 1} \frac{1}{|\xi|^m} \left( \left| -\frac{1}{|\xi|^2} \widehat{v}(\xi) \right| \right) d\xi &= \int_{x \geq 1} \frac{1}{|\xi|^{m+s}} |\xi|^{s-2} |\widehat{v}(\xi)| d\xi \\ &\leq \sqrt{\int_{|\xi| \geq 1} \frac{1}{|\xi|^{2(m+s)}} d\xi} \|v\|_{\dot{H}^{s-2}} \\ &= C_n \|v\|_{\dot{H}^{s-2}} \left( \int_1^{+\infty} r^{-2(m+s)+n-1} dr \right)^{1/2} < +\infty, \end{aligned}$$

donde la integral de la última línea es finita porque como  $m > n/2 - s$ , entonces  $-2(m+s) + n < 0$ , lo cual muestra la finitud de dicha integral. De la primera parte de la Observación 3 tenemos que  $-\frac{1}{|\cdot|^2}\widehat{v} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , por tanto,  $u = \mathcal{F}^{-1} \left( -\frac{1}{|\cdot|^2}\widehat{v} \right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora, notemos que

$$\|u\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \left| \frac{1}{|\xi|^2} \widehat{v}(\xi) \right|^2 d\xi = \|v\|_{\dot{H}^{s-2}} < +\infty.$$

Por todo lo hecho, se sigue que  $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .

- Finalmente,

$$\Delta u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}) = \mathcal{F}^{-1} \left( -|\cdot|^2 \left( -\frac{1}{|\cdot|^2} \widehat{v} \right) \right) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{v}) = v.$$

□

Al operador inverso de  $\Delta$  (el cual es lineal y continuo gracias al Teorema de Isomorfismos de Banach) lo notaremos por  $\frac{1}{\Delta}$ . De la demostración del resultado anterior obtenemos que:

**COROLARIO 2.17.** Para  $s < n/2$ , el operador lineal y continuo  $\frac{1}{\Delta}$  viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} : \dot{H}^{s-2}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \\ v &\longmapsto \mathcal{F}^{-1} \left( -\frac{1}{|\cdot|^2} \widehat{v} \right). \end{aligned}$$

## 2.3. Etapa 3

El lector puede ver fácilmente que el problema  $(\widehat{NS})$  es un sistema acoplado de  $\vec{u}$ , la velocidad del fluido, y  $p$ , su presión. Nuestro primer objetivo es transformar el problema  $(\widehat{NS})$  en un problema que únicamente tenga al campo de velocidad  $\vec{u}$  como incógnita sabiendo que  $p$  es una función explícita de  $\vec{u}$ . Para ello introducimos una herramienta nueva, el proyector de Leray.

### 2.3.1. Proyector de Leray

Una vez definidas las  $\partial_j$  sobre espacios de Sobolev homogéneos, es fácil definir la divergencia y el gradiente sobre el espacio

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) := \left\{ \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) : u_i \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, n \right\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Para  $s < n/2$ , el espacio  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} := \sum_{j=1}^n (u_j, v_j)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Así, la norma en  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  viene dada por

$$\|\vec{u}\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = \left( \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{1/2} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{\vec{u}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad \vec{u} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$



donde  $\widehat{\vec{u}}$ , la transformada de Fourier de  $\vec{u}$ , se define componente a componente como  $\widehat{\vec{u}} := (\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_n)$  para  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ . Se observa que la transformada de Fourier en  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  es lineal.

**OBSERVACIÓN 14.** De manera análoga definimos  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  y  $H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Si no hay lugar a confusión, usaremos las notaciones  $\dot{H}^s, H^s, L^p$  para  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , respectivamente.

Por otro lado, de la continuidad y linealidad de  $\partial_j : \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$  tenemos inmediatamente el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 2.18.** *Las dos siguientes funciones están bien definidas, son lineales y continuas.*

1. *Divergencia*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} : \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n) \\ \vec{u} &\longmapsto \partial_1 u_1 + \dots + \partial_n u_n. \end{aligned}$$

(También se usará la notación  $\vec{\nabla} \cdot := \operatorname{div}$ )

2. *Gradiente*

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} : \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)^T. \end{aligned}$$

Finalmente, estamos en la capacidad de definir el proyector de Leray, que no es más que un operador de proyección a los campos de divergencia nula.

**DEFINICIÓN 2.6** (Proyector de Leray). *Sea  $s < n/2$ . Denotamos por  $\mathbb{P}$  al proyector (u operador) de Leray, el cual está definido como*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \vec{u} &\longmapsto \mathbb{P}(\vec{u}) := \left( \operatorname{Id} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{u}. \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 2.19.** *El operador  $\mathbb{P}$  es lineal y continuo, con constante de continuidad igual a  $n + 1$ .*

De una forma equivalente, podemos expresar el proyector de Leray en términos de las transformadas de Riesz como sigue.

**TEOREMA 2.20.** *Si  $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})_{ij} := \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j$ . Entonces  $\mathbb{P}$ , como en la Definición*

## 2.6, verifica

$$\mathbb{P}(\vec{u}) = (Id - \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}) \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

*Demostración.* Usando la Proposición 2.14 y las definiciones de  $\text{div}$ ,  $\frac{1}{\Delta}$  y  $\vec{\nabla} \cdot$ , un calculo directo nos permite tener que para  $\vec{u} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}(u)} &= \widehat{u} - \sum_{j,k=1}^n \frac{i\xi_j}{|\xi|} \left[ -\frac{i\xi_k}{|\xi|} \widehat{u}_k \right] \vec{e}_j = \widehat{u} - \sum_{j,k=1}^n \frac{i\xi_j}{|\xi|} \widehat{R_k u_k} \vec{e}_j \\ &= \widehat{u} - \sum_{j,k=1}^n R_j(\widehat{R_k u_k}) \vec{e}_j = \mathcal{F}(\vec{u} + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \vec{u}). \end{aligned}$$

□

Una vez definido el proyector de Leray en los espacios  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ , es natural preguntarse si la Definición 2.6 se puede extender para los espacios de sobolev no homogéneos. La respuesta es negativa porque sobre  $H^s(\mathbb{R}^n)$  no contamos con la invertibilidad de  $\frac{1}{\Delta}$ , sin embargo, el Teorema 2.20 nos permite dar sentido al proyector de Leray en los espacios  $H^s(\mathbb{R}^n)$  con  $s \in \mathbb{R}$  del siguiente modo.

**PROPOSICIÓN 2.21** (Proyector de Leray en  $H^s(\mathbb{R}^n)$ ). *La función definida por*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}: H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \vec{u} &\longmapsto (Id + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}) \vec{u} \end{aligned}$$

es lineal y continua, con constante de continuidad igual a  $1 + n^{3/2}$ .

**OBSERVACIÓN 15.** La continuidad y linealidad de las transformadas de Riesz, y el hecho de que las transformadas de Riesz son funciones que van de  $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$  nos permiten concluir que  $\mathbb{P}$  es lineal y continuo.

De lo hecho en la demostración del Teorema 2.20 se pueden conseguir fácilmente las siguientes fórmulas.

**COROLARIO 2.22.** *Sea  $\mathbb{P} : E \rightarrow E$ , con  $E \in \{H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\}$ , con  $s \in \mathbb{R}$  si  $E = H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $s < n/2$  si  $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Si  $\vec{u} \in E$ , entonces*

$$1. \mathcal{F}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}(\vec{u})) = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{u}_k \vec{e}_j$$

$$2. \widehat{\mathbb{P}\vec{u}} = \widehat{\vec{u}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{u}_k \vec{e}_j$$

Algunas propiedades importantes del proyector de Leray, que usaremos adelante, son las siguientes.

**TEOREMA 2.23.** Sean  $s < n/2$  y  $\vec{f} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Consideremos el proyector de Leray definido sobre espacios de Sobolev no homogéneos, entonces

1. Si  $p \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\mathbb{P}(\vec{\nabla} p) = 0$ .
2.  $\mathbb{P}(\mathbb{P}\vec{f}) = \mathbb{P}\vec{f}$ .
3. Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$ , entonces  $\mathbb{P}\vec{f} = \vec{f}$ .
4.  $\vec{\nabla} \cdot (\mathbb{P}\vec{f}) = 0$ .
5. Sea  $g \in H^1([0, T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ . Entonces  $\frac{\partial \mathbb{P}\vec{g}}{\partial t} \in L^2([0, T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$  y  $\frac{\partial \mathbb{P}\vec{g}}{\partial t} = \mathbb{P}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$ .
6.  $\mathbb{P}(\Delta \vec{f}) = \Delta \mathbb{P}\vec{f}$ . Y en general  $\mathbb{P}(\partial^\alpha \vec{f}) = \partial^\alpha \mathbb{P}\vec{f}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
7. Si  $\mathbb{P}\vec{f} = 0$  y  $s + 1 < n/2$ , entonces existe  $q \in \dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\vec{f} = \vec{\nabla} q$ .

*Demostración.* Usaremos las fórmulas del Corolario 2.22.

1. Sea  $p \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}(\vec{\nabla} p)} &= \widehat{\vec{\nabla} p} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{\partial_k p} \vec{e}_j = \widehat{\vec{\nabla} p} + \sum_{j,k=1}^n \frac{i \xi_j^2 \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{p} \vec{e}_j = \widehat{\vec{\nabla} p} + \sum_{k=1}^n i \xi_k \widehat{p} \vec{e}_j \\ &= \widehat{\vec{\nabla} p} - \sum_{k=1}^n (-i \xi_k \widehat{p}) \vec{e}_j = \widehat{\vec{\nabla} p} - \sum_{k=1}^n \widehat{\partial_k p} \vec{e}_j = \widehat{\vec{\nabla} p} - \widehat{\vec{\nabla} p} = 0. \end{aligned}$$

2. Notar que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}(\mathbb{P}\vec{f})} &= \widehat{\mathbb{P}\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} (\widehat{\mathbb{P}\vec{f}})_k \vec{e}_j = \widehat{\mathbb{P}\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \left[ \widehat{\vec{f}} - \sum_{l,m=1}^n \frac{\xi_l \xi_m}{|\xi|^2} \widehat{f}_m \vec{e}_l \right]_k \vec{e}_j \\ &= \widehat{\mathbb{P}\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}_k \vec{e}_j + \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \sum_{m=1}^n \frac{\xi_k \xi_m}{|\xi|^2} \widehat{f}_m \vec{e}_j \\ &= \widehat{\mathbb{P}\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}_k \vec{e}_j + \sum_{j,m=1}^n \frac{\xi_j \xi_m}{|\xi|^2} \widehat{f}_m \vec{e}_j = \widehat{\mathbb{P}\vec{f}}. \end{aligned}$$

3. Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$ , tenemos que  $\sum_{j=1}^n \xi_j \widehat{f}_j = 0$ , por tanto,

$$\widehat{\mathbb{P}(\vec{f})} = \widehat{\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}_k \vec{e}_j = \widehat{\vec{f}} - \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{|\xi|^2} \sum_{k=1}^n \xi_k \widehat{f}_k \vec{e}_j = \widehat{\vec{u}} - 0 = \widehat{\vec{u}}$$

4.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\widehat{\mathbb{P}\vec{f}}) &= \sum_{l=1}^n \partial_l (\widehat{\mathbb{P}\vec{f}})_k = \sum_{l=1}^n -i\xi_l \left[ \widehat{\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}_k \vec{e}_j \right]_l \\ &= \sum_{l=1}^n -i\xi_l \widehat{f}_l + \sum_{k=1}^n i\xi_k \widehat{f}_k = 0 \end{aligned}$$

5. Sea  $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbb{P}\vec{g}}{\partial t}, \varphi(t) \right\rangle &= \left\langle \mathbb{P}\vec{g}, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \\ &= \int_0^T \mathbb{P}\vec{g}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt \\ &= \mathbb{P} \left( \int_0^T \vec{g}(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt \right) \\ &= \int_0^T \mathbb{P} \left( \frac{\partial \vec{g}(t)}{\partial t} \right) \varphi(t) dt \\ &= \left\langle \mathbb{P} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right), \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

donde en la tercera y cuarta línea se ha usado el hecho de que  $\mathbb{P}$  es lineal y continuo. Por tanto

$$\frac{\partial \mathbb{P}\vec{g}}{\partial t} = \mathbb{P} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right) \text{ en } \mathcal{D}(0, T).$$

Por hipótesis  $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \in L^2([0, T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ , y como el proyector de Leray va de un espacio de Sobolev en sí mismo, tenemos que  $\mathbb{P} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right) \in L^2([0, T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ .

6.

$$\widehat{\mathbb{P}(\Delta \vec{f})} = \widehat{\Delta \vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} (\widehat{\Delta \vec{f}})_k = -|\xi|^2 \widehat{\vec{f}} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} |\xi|^2 \widehat{f}_k$$

$$= -|\xi|^2 \left[ \widehat{f} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}_k \right] = -|\xi|^2 \widehat{\mathbb{P}f},$$

y tomando transformada de Fourier inversa a ambos lados, obtenemos lo requerido.

7. Supongamos que  $\mathbb{P}\vec{f} = 0$ . Basta definir  $q \in \dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^n)$  como

$$q := \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{i|\xi|^2} \xi \cdot \widehat{\vec{v}} \right)$$

Primero notemos que en efecto  $q$  está en el espacio mencionado. En la Observación 3 podemos tomar  $m$  suficientemente grande para mostrar que  $q$  está en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Notemos que  $\widehat{q}$  es Lebesgue medible. Es fácil realizar la estimación  $\|q\|_{\dot{H}^{s+1}} \leq C_n \|f\|_{\dot{H}^s}$ , por lo que  $q$  está en  $\dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora mostremos que  $\vec{\nabla} q = f$ . Sea  $l \in \{1, \dots, n\}$ , debemos probar que  $\partial_l q = f_l$ .

La hipótesis  $\mathbb{P}\vec{f} = 0$  significa que

$$\widehat{\vec{f}} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \widehat{f}_k \vec{e}_j = 0,$$

es decir, tenemos que  $\widehat{f}_l = \frac{\xi_l}{|\xi|^2} \left[ \sum_{k=1}^n \xi_k \widehat{f}_k \right] = \frac{\xi_l}{|\xi|^2} \xi \cdot \widehat{\vec{f}} = i \xi_l \widehat{q}$ , de donde

$$f_l = \mathcal{F}^{-1}(i \xi_l \widehat{q}) = \partial_l q,$$

como se quería. □

**OBSERVACIÓN 16.** Los seis primeros literales de este resultado son válidos para todos los espacios de Sobolev no homogéneos. La demostración es la misma.

Hasta aquí llega el estudio de las herramientas a utilizar en el objetivo principal de este proyecto. Dichas herramientas nos permitirán escribir con rigurosidad matemática la demostración del Teorema de Fujita-Kato.

# Capítulo 3

---

## Resultados, conclusiones y recomendaciones

---

Previo a la demostración del Teorema de Fujita-Kato, motivamos la definición de solución *mild*. Daremos la idea clave de la demostración del teorema principal, que se sustenta en un argumento de punto fijo. Al final ofrecemos una serie de conclusiones y recomendaciones de lo desarrollado.

### 3.1. Formulación de Duhamel para $(\widehat{NS})$

En primer lugar observemos que la presión puede ser expresada en términos de  $\vec{u}$ . En efecto, si suponemos a  $\vec{u}$  y  $p$  suficientemente regulares y aplicamos el operador divergencia a ambos miembros de la primera ecuación de  $(\widehat{NS})$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\partial_t \vec{u}) &= \operatorname{div}(\Delta \vec{u}) - \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \operatorname{div}(\vec{\nabla} p) + \operatorname{div}(\vec{f}). \\ &= \operatorname{div}(\Delta \vec{u}) - \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \Delta p + \operatorname{div}(\vec{f}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Como  $\Delta \vec{u} = \nabla(\operatorname{div}(\vec{u})) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u})$ , utilizando que  $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ , tenemos que  $\operatorname{div}(\Delta \vec{u}) = 0$ . Por tanto, de (3.1) se llega a que

$$\begin{aligned}\Delta p &= \operatorname{div}(\vec{f}) - \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) \\ \implies p &= \frac{1}{\Delta} \left( \operatorname{div}(\vec{f}) - \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) \right).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Esto demuestra que si conocemos  $\vec{u}$ , automáticamente tenemos  $p$ . Es así que nuestro siguiente paso es obtener una ecuación solamente de incógnita  $\vec{u}$ , para lo cual, regresando a la primera ecuación de  $(\widehat{NS})$  y utilizando las propiedades del operador de Leray, dadas en el Teorema 2.23, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\partial_t \vec{u}) &= \mathbb{P}(\Delta \vec{u}) - \mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \mathbb{P}(\vec{\nabla} p) + \mathbb{P}(\vec{f}) \\ \implies \partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) + \mathbb{P}(\vec{f}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para resolver la ecuación (3.3) aplicamos la transformada de Fourier (en variable espacial) a ambos lados y obtenemos

$$\partial_t \mathcal{F}(\vec{u}) = -|\xi|^2 \mathcal{F}(\vec{u}) - \mathcal{F}(\mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))) + \mathcal{F}(\mathbb{P}(\vec{f})). \quad (3.4)$$

Ahora fijamos  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y consideramos a  $t$  como variable. Entonces (3.4) se transforma en la siguiente EDO vectorial

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(\vec{u})(t, \xi) + |\xi|^2 \mathcal{F}(\vec{u})(t, \xi) = -\mathcal{F}(\mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})))(t, \xi) + \mathcal{F}(\mathbb{P}(\vec{f}))(t, \xi). \quad (3.5)$$

Utilizando la teoría clásica de EDO's, tenemos que  $\mathcal{F}(\vec{u}) = \vec{u}_h + \vec{u}_p$ , donde  $\vec{u}_h$  es solución del problema homogéneo asociado a (3.5) y  $\vec{u}_p$  es una solución particular. De manera sencilla tenemos que

$$\vec{u}_h = e^{-|\xi|^2 t} \widehat{\vec{u}}_0,$$

mientras que  $\vec{u}_p$  se obtiene mediante el método de variación de parámetros, y se expresa como

$$\vec{u}_p = - \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \mathcal{F}(\mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})))(s, \xi) ds + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \mathcal{F}(\mathbb{P}(\vec{f}))(s, \xi) ds,$$

por lo que mediante la aplicación de la transformada de Fourier inversa a  $\mathcal{F}(\vec{u}) = \vec{u}_h + \vec{u}_p$ , llegamos a

$$\vec{u}(t, \cdot) = W_t * \vec{u}_0 - \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, \xi) ds + \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \xi) ds, \quad (3.6)$$

donde  $W_t$  es como en la Subsección 2.1.5.

Es así que hemos motivado la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 3.1** (Solución *mild*). Decimos que un par  $(\vec{u}, p)$  es una solución *mild* del problema  $(\widehat{NS})$  si existe un espacio funcional para  $\vec{u}$  y uno para  $p$  tales que  $\vec{u}$  satisface la formulación integral 3.6 y es obtenido a partir de un argumento de punto fijo y la presión  $p$  verifica 3.2.

**OBSERVACIÓN 17.** Por argumento de punto fijo nos referimos a que se debe hacer uso de algún resultado de punto fijo de Banach.

## 3.2. Ideas y demostración del Teorema de Fujita-Kato

Para encontrar la solución *mild* de  $(\widehat{NS})$ , empezaremos por enunciar el teorema del punto fijo de Banach adecuado para nuestro objetivo (ver el Teorema 13.2 de [12], página 124).

**TEOREMA 3.1** (Teorema del punto fijo de Banach para aplicaciones bilineales). Sean  $E$  un espacio de Banach,  $U_0 \in E$  y  $B : E \times E \rightarrow E$  una aplicación bilineal y continua con constante de continuidad  $C_B$  (i.e  $\forall v, w \in E : \|B(v, w)\|_E \leq C_B \|v\|_E \|w\|_E$ ).

Si  $\|U_0\|_E \leq \delta$  para algún  $\delta \in (0, \frac{1}{4C_B})$ , entonces existe un único  $u \in E$  tal que

$$u = U_0 - B(u, u) \wedge \|u\|_E \leq 2\delta.$$

**OBSERVACIÓN 18.** 1. El resultado anterior nos dice que la ecuación  $u = U_0 - B(u, u)$  tiene una única solución  $u$  en la bola cerrada  $\overline{B}_E(2\delta)$ , pero fuera de dicha bola podría existir otra solución.

2. Consideremos las mismas hipótesis del Teorema 3.1. Supongamos que  $V_0 \in E$  verifica que  $\|V_0\| \leq \delta$ , y sea  $v$  la única solución en  $\overline{B}_E(2\delta)$  de la ecuación  $v = V_0 + B(v, v)$  (que existe gracias al Teorema 3.1). Entonces se tiene la siguiente estimación

$$\|u - v\|_E \leq \frac{1}{1 - 4C_B\delta} \|U_0 - V_0\|_E.$$



3. La observación previa y el Teorema 3.1 nos dicen que el problema

$$\begin{cases} \text{Resolver} \\ u = U_0 - B(u, u) \\ u \in B_E(2\delta) \end{cases} \quad (3.7)$$

está bien planteado en el sentido Hadamard, es decir, es estable y admite una única solución.

En este punto se sugiere dar una lectura completa de los resultados del Apéndice G, donde se presentan estimaciones a usar en la demostración del Teorema de Fujita-Kato.

Continuando con nuestra exposición, enunciamos el teorema de Fujita-Kato.

**TEOREMA 3.2** (Fujita-Kato). Sean  $T \in [0, +\infty]$ ,  $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  tal que  $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$  y  $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$ , con  $\vec{f}, \vec{u}_0$  datos del problema  $(\widehat{NS})$ . Entonces existen  $T_0 \in (0, T)$ ,

$$\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$$

y

$$p \in L^2([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$$

tales que  $(\vec{u}, p)$  es solución mild de  $(\widehat{NS})$ .

**Idea de la demostración:** Reescribir la formulación integral 3.6 como  $u = U_0 - B(u, u)$  para eventualmente, utilizando el Teorema 3.1, encontrar la velocidad  $\vec{u}$ . Esto lo hacemos de la siguiente manera

$$\vec{u} = \underbrace{W_t * \vec{u}_0}_{:=U_0} + \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds - \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, \cdot) ds, \quad (3.8)$$

donde ponemos  $B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot) := \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot) ds$ , para todo  $\vec{v}, \vec{w} \in E_{T_0}$ , por lo que (3.8) se puede escribir como

$$\vec{u} = U_0 - B(\vec{u}, \vec{u}). \quad (3.9)$$

Por otro lado, el espacio de Banach adecuado para obtener  $\vec{u}$  de la solución *mild* de  $(\widehat{NS})$ , es

$$E_{T_0} := L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \cap L^2\left([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)\right),$$

$$\|\vec{v}\|_{E_{T_0}} := \|\vec{v}\|_{L^\infty L^2} + \|\vec{v}\|_{L^2 \dot{H}^2}, \quad \forall \vec{v} \in E_{T_0}, \quad \text{con } T_0 \in (0, T).$$

De esta manera, la demostración del Teorema de Fujita-Kato se reduce a verificar las hipótesis del Teorema 3.1. En otras palabras, para demostrar el Teorema de Fujita-Kato basta mostrar que existe  $T_0 \in (0, T)$  tal que se verifiquen los siguientes tres enunciados:

(\*) La aplicación

$$\begin{aligned} B: E_{T_0} \times E_{T_0} &\longrightarrow E_{T_0} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longmapsto \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot) ds \end{aligned}$$

es bilineal y continua. Denotamos  $C_B$  a la constante de continuidad de  $B$ .

(\*\*)  $U_0 \in E_{T_0}$  y existe  $\delta \in \left(0, \frac{1}{4C_B}\right)$  tal que  $\|U_0\|_E < \delta$ .

(\*\*\*)  $p \in L^2\left([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\right)$

Y esto es justo lo que haremos a continuación.

*Demostración.* (Teorema 3.4) Dividimos el trabajo en tres etapas.

**Etapas 1:** Veamos que cualquier  $T_0 \in (0, T)$  satisface (\*).

Sea  $T_0 \in (0, T)$ . Probaremos (\*) en dos pasos.

*Paso 1:* Ver que  $B$  está bien definida y es bilineal. La bilinealidad es trivial. Ahora, sean  $\vec{v}, \vec{w} \in E_{T_0}$ . Debemos mostrar que  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in E_{T_0}$ , es decir debemos probar que  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in L^\infty H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  y  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in L^2_{T_0} \dot{H}^2$ . Primero veamos que  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in L^\infty H^1$ . Para c.t.p.  $t \in [0, T_0]$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{H^1} &\leq (2\pi)^{3/2} (\|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{L^2} + \|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}) \\ \implies \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L^\infty H^1} &\leq (2\pi)^{3/2} \underbrace{\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L^\infty L^2}}_{I_1} + \underbrace{\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L^\infty \dot{H}^1}}_{I_2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

pues se tiene la equivalencia de normas  $\|\cdot\|_{H^1} \approx \|\cdot\|_{L^2} + \|\cdot\|_{\dot{H}^1}$ .

Empecemos por trabajar en una estimación para  $I_1$ . Del Lema G.5 y el hecho de que el proyector de Leray es continuo de  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  en  $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})(t, \cdot) &\in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \\ \implies \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})(t, \cdot)) &\in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

que junto con la desigualdad de Young para espacios de Lebesgue, la continuidad de  $\mathbb{P}$  (note que, de los Teoremas 2.19 y 2.21, para  $n = 3$  se puede considerar que la constante de continuidad de  $\mathbb{P}$  es igual a 7 para todos los espacios de Sobolev) y que  $\|W_{t-s}\|_{L^1} = 1$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{L^2} &= \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} \\ &\leq \int_0^t \|W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot)\|_{L^2} ds \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \|W_{t-s}\|_{L^1} \|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot)\|_{H^0} ds \\ &\leq 7 \int_0^t \|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})(s, \cdot)\|_{L^2} ds \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cahuchy-Schwartz en variable temporal en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{L^2} &\leq 7 \sqrt{\int_0^t 1^2 ds} \sqrt{\int_0^t \|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds} \\ &\leq 7 T_0^{1/2} \sqrt{\int_0^{T_0} \|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds}, \end{aligned}$$

que junto con la estimación dada en el Lema G.5 y las desigualdades evidentes  $\|\vec{v}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq \|\vec{v}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}$ ,  $\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq \|\vec{w}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq 49 \cdot 2T_0 \int_0^{T_0} [\|\vec{v}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \|w(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} \|w(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} + \\ &\quad \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \|v(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} \|v(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}] dt. \\ &\leq 98T_0 \left[ \|\vec{v}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{w}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} \int_0^{T_0} \|w(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} dt + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \|\vec{w}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{v}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} \int_0^{T_0} \|v(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} dt \right] \\
& \leq 98T_0 \left[ \|\vec{v}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{w}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} T_0^{1/2} \|w\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} + \right. \\
& \quad \left. \|\vec{w}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{v}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} T_0^{1/2} \|v\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} \right]. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

De la definición de  $\|\cdot\|_E$  tenemos

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} &\leq \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} < +\infty, & \|\vec{w}\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} &\leq \|w\|_{E_{T_0}} < +\infty, \\
\|w\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} &\leq \|w\|_{E_{T_0}} < +\infty, & \|v\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} &\leq \|v\|_{E_{T_0}} < +\infty,
\end{aligned}$$

y son finitas porque por hipótesis  $\vec{v}, \vec{w} \in E_{T_0}$ . Por tanto, de (3.11) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq 98 T_0^{1+1/2} [\|\vec{v}\|_{E_{T_0}}^2 \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} + \|\vec{w}\|_{E_{T_0}}^2 \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}}] \\
&= 196 T_0^{3/2} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}}^2 \|\vec{w}\|_{E_{T_0}}^2,
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$I_1 = \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^2 L^2} \leq 14T_0^{3/4} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} < +\infty. \quad (3.12)$$

Notemos que también hemos demostrado que

$$\|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})\|_{L_{T_0}^2 L^2} \leq 2 T_0^{1/4} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} < +\infty. \quad (3.13)$$

Para estimar  $I_2$ , la idea es usar la primera parte del Lema G.3, para lo cual primero requerimos que  $\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})) \in L_{T_0}^2 L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , que es cierto gracias a (3.13) y la continuidad de  $\mathbb{P} : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , así,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))\|_{L_{T_0}^2 L^2}^2 &\leq 49 \int_0^{T_0} \|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \\
&= 49 \|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})\|_{L_{T_0}^2 L^2}^2 \\
&\leq 49 \cdot 4 T_0^{1/2} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}}^2 \|\vec{w}\|_{E_{T_0}}^2 < +\infty, \quad (3.14)
\end{aligned}$$

por tanto, la primera parte del Lema G.3 nos asegura que

$$\|B(\vec{v}, \vec{w})(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (49 \cdot 4)^{1/2} T_0^{1/4} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}}, \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T_0]$$

$$\implies I_2 = \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} \leq \frac{14}{\sqrt{2}} T_0^{1/4} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} < +\infty. \quad (3.15)$$

Usando las desigualdades (3.12) y (3.15) en (3.10), obtenemos que

$$\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1} \leq 14 (2\pi)^{3/2} \cdot (T_0^{3/4} + T_0^{1/4}) \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} < +\infty, \quad (3.16)$$

lo cual muestra que  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in L_{T_0}^\infty \dot{H}^1$ .

Ahora mostremos que  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in L_{T_0}^\infty \dot{H}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Como  $\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})) \in L_{T_0}^2 L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , podemos aplicar la segunda parte del Lema G.3 y obtener la estimación

$$\begin{aligned} \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} &= \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} \\ &\leq (2\pi)^{3/2} \|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))\|_{L_{T_0}^2 L^2}, \end{aligned}$$

que junto con (3.14) se sigue que

$$\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} \leq 14 (2\pi)^{3/2} T_0^{1/4} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} < +\infty, \quad (3.17)$$

lo cual muestra que  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in L_{T_0}^2 \dot{H}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

De (3.16) y (3.17) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{E_{T_0}} &= \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^\infty L^2} + \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} \\ &\leq 28 (2\pi)^{3/2} (T_0^{3/4} + T_0^{1/4}) \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} \\ &\leq 441 (T_0^{3/4} + T_0^{1/4}) \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} \\ &\leq 441 (T_0^{3/4} + T_0^{1/4}) \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \|\vec{w}\|_{E_{T_0}} < +\infty, \end{aligned} \quad (3.18)$$

es decir  $B(\vec{v}, \vec{w}) \in E_{T_0}$ .

*Parte 2: Ver la continuidad de  $B$ .*

Dado que  $B$  es bilineal, la acotación dada en (3.18) muestra que  $B$  es continua con constante de continuidad

$$C_B := 441 (T_0^{3/4} + T_0^{1/4}).$$

Así, hemos mostrado que (\*) se verifica para todo  $T_0 \in (0, T)$ .

**Etapa 2:** Buscar  $T_0 \in (0, T)$  adecuado tal que se cumpla (\*\*). Lo haremos en dos pasos.

*Paso 1:* Veamos que  $U_0 \in E_{T_0}$  para cualquier  $T_0 \in (0, T)$ .

$$U_0 = \underbrace{W_t * \vec{u}_0}_{=: A_1} + \underbrace{\int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds}_{=: A_2}$$

Primero mostremos que  $A_1 \in E_{T_0}$ . Observemos que

$$\|A_1\|_{E_{T_0}} = \|W_t * \vec{u}_0\|_{L_{T_0}^\infty H^1} + \|W_t * \vec{u}_0\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2}.$$

Por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} \|W_t * \vec{u}_0\|_{L_{T_0}^\infty H^1}^2 &= \sup_{t \in [0, T_0]} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2) |\widehat{W_t * \vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sup_{t \in [0, T_0]} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2) |e^{-t|\xi|^2} \widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{t \in [0, T_0]} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2) |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi = \|\vec{u}_0\|_{H^1}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

pues por hipótesis  $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|W_t * \vec{u}_0\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2}^2 &= \int_0^{T_0} \|W_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}^2}^2 dt \\ &= \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 \left[ \int_0^{T_0} e^{-2t|\xi|^2} dt \right] d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 \left[ \frac{1}{2|\xi|^2} \right] d\xi \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H^1}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

donde en la tercera línea se ha usado el Teorema de Fubini-Tonelli. Por tanto,

$$\|A_1\|_{E_{T_0}} \leq \|u\|_{H^1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1} \leq 2 \|u\|_{H^1} < +\infty, \quad (3.19)$$

es decir,  $A_1 \in E_{T_0}$ .

Bien, ahora veamos que  $A_2 \in E_{T_0}$ .

$$\|A_2\|_{E_{T_0}} = \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^\infty H^1} + \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2}.$$

Por una parte, de la equivalencia de normas  $\|\cdot\|_{H^1} \approx \|\cdot\|_{L^2} + \|\cdot\|_{\dot{H}^1}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^\infty H^1} &\leq (2\pi)^{3/2} \sup_{t \in [0, T_0]} \int_0^t \left\| W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) \right\|_{L^2} ds + \\ &(2\pi)^{3/2} \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^\infty \dot{H}^1}. \end{aligned}$$

En el lado derecho de la desigualdad anterior, el primer término puede ser estimado usando la desigualdad de Young en espacios de Lebesgue y la continuidad del proyector de Leray, mientras que para estimar el segundo término vamos a usar la primera parte del Lema G.3 (que es posible ya que  $\vec{f} \in L_{T_0}^2 L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , lo cual implica que  $\mathbb{P}(\vec{f}) \in L_{T_0}^2 L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ), y obtenemos lo siguiente

$$\left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^\infty H^1} \leq (2\pi)^{\frac{3}{2}} \left[ \sup_{t \in [0, T_0]} \int_0^t \left\| \vec{f}(s, \cdot) \right\|_{L^2} ds + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \mathbb{P}(\vec{f}) \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \right],$$

de donde, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la variable de tiempo y la continuidad de  $\mathbb{P}$ , se sigue

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^\infty H^1} &\leq 7(2\pi)^{3/2} \left[ \sup_{t \in [0, T_0]} t^{1/2} \left\| \vec{f}^\dagger \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} + \frac{7}{\sqrt{2}} \left\| \vec{f}^\dagger \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \right] \\ &= 7(2\pi)^{3/2} (T_0^{1/2} + 1) \left\| \vec{f}^\dagger \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, como  $\mathbb{P}(\vec{f}) \in L_{T_0}^2 L^2$ , podemos aplicar la segunda parte del Lema G.3 y obtener que

$$\left\| \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L_{T_0}^2 \dot{H}^2} \leq (2\pi)^{3/2} \left\| \mathbb{P}(\vec{f}) \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \leq 7(2\pi)^{3/2} \left\| \vec{f}^\dagger \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} < +\infty.$$

Por lo tanto

$$\|A_2\|_{E_{T_0}} \leq 14 (2\pi)^{3/2} (T_0^{1/2} + 1) \left\| \vec{f}^\dagger \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} < +\infty, \quad (3.20)$$

y así  $A_2 \in E_{T_0}$ . En resumen  $U_0 = A_1 + A_2 \in E_{T_0}$ .

*Parte 2:* Para verificar (\*\*\*) solo nos resta hallar  $T_0 \in (0, T)$  y  $\delta > 0$  tales

que

$$\delta < \frac{1}{4C_B} \quad \wedge \quad \|U_0\|_{E_{T_0}} \leq \delta. \quad (\text{A})$$

De (3.19), (3.20) y que  $14(2\pi)^{3/2} \leq 221$ , se obtiene que

$$\|U_0\|_{E_{T_0}} \leq 2 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + 221(T_0^{1/2} + 1) \left\| \vec{f} \right\|_{L_{T_0}^2 L^2}, \quad (3.21)$$

así, recordando que  $C_B = 441(T_0^{3/4} + T_0^{1/4})$ , para tener (A) basta encontrar  $\delta > 0$  y  $T_0 \in (0, T)$  tales que

$$2 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + 221(T_0^{1/2} + 1) \left\| \vec{f} \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \leq \delta < \frac{1}{1764(T_0^{3/4} + T_0^{1/4})}. \quad (3.22)$$

Si escogemos  $T_0 \in (0, T)$  tal que  $T_0 \leq 1$ , tenemos que  $T_0^{3/4} + T_0^{1/4} \leq T_0^{1/4} + T_0^{1/4} = 2T_0^{1/4}$  y, por tanto,

$$(T_0^{1/2} + 1) \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{1}{1764 \cdot 2T_0^{1/4}} \leq \frac{1}{88(T_0^{3/4} + T_0^{1/4})},$$

por lo que, para encontrar un par  $\delta > 0$  y  $T_0 \in (0, T)$  que satisfaga (3.22), es suficiente que se tenga que  $\delta > 0$ ,  $T_0 \in (0, \min\{T, 1\})$  y

$$2 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + 2 \cdot 221 \left\| \vec{f} \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \leq \delta < \frac{1}{3528T_0^{1/4}}. \quad (3.23)$$

Así, si  $\vec{u}_0 = 0$  y  $\vec{f} = 0$ , basta tomar cualquier  $T_0 \in (0, \min\{T, 1\})$  y  $\delta := 1/(3528 \cdot 2T_0^{1/4})$ . Si al menos uno de los datos ( $\vec{u}_0$  o  $\vec{f}$ ) no es cero, podemos tomar  $\delta := 2 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + 442 \left\| \vec{f} \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} > 0$  y un  $T_0 \in (0, \min\{T, 1\})$  tal que

$$T_0^{1/4} < \frac{1}{3528 \left( 2 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + 442 \left\| \vec{f} \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \right)},$$

por ejemplo, basta tomar  $T_0$  como

$$T_0 := \min \left\{ 1, T, \frac{1}{2 \cdot 3528^4 \left( 2 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + 442 \left\| \vec{f} \right\|_{L_{T_0}^2 L^2} \right)^4} \right\}. \quad (3.24)$$



Con dichas elecciones de  $T_0$  y  $\delta$ , (\*\*) se verifica.

**Etapa 3:** Veamos que  $p \in L^2\left([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\right)$ , con  $T_0$  escogido como en la etapa anterior.

Notemos que

$$\|p\|_{L^2_{T_0} \dot{H}^1} \leq \underbrace{\left\| \frac{1}{\Delta} \operatorname{div}(f) \right\|_{L^2_{T_0} \dot{H}^1}}_{J_1} + \underbrace{\left\| \frac{1}{\Delta} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) \right\|_{L^2_{T_0} \dot{H}^1}}_{J_2}.$$

Por una parte,

$$\begin{aligned} J_1^2 &= \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \left| -\frac{1}{|\xi|^2} \widehat{\operatorname{div}(\vec{f})}(s, \xi) \right|^2 d\xi ds \\ &\leq \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^2} \left| \sum_{j=1}^n i\xi_j \widehat{f}_j \right|^2 d\xi ds \\ &\leq \|f\|_{L^2_{T_0} L^2}^2 + \infty. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} J_2^2 &\leq \|\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{L^2_{T_0} L^2}^2 \leq C_n \|u\|_{E_{T_0}}^4 < +\infty \\ \implies \|p\|_{L^2_{T_0} \dot{H}^1} &\leq C_n [\|f\|_{L^2_{T_0} L^2} + \|u\|_{E_{T_0}}^2] < +\infty. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como ya probamos que (\*) se verifica para cualquier  $T_0 \in (0, T)$ , se verifica en particular para el escogido en la Etapa 2, y la Etapa 3 funciona con el mismo  $T_0$ . Luego, por lo que habíamos explicado, se ha demostrado el Teorema de Fujita-Kato.  $\square$

Ahora, con respecto a la regularidad de la solución *mild* de  $(\widehat{NS})$  tenemos lo siguiente.

**PROPOSICIÓN 3.3.** *Con las hipótesis del Teorema 3.4, la velocidad  $\vec{u}$  dada en (3.8) pertenece al espacio  $C([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$ .*

*Demostración.* Notemos que la función  $t \rightarrow \vec{u}(t, \cdot)$  es la suma de tres funciones

$$\vec{u} = \underbrace{W_t * \vec{u}_0}_{g_1(t)} + \underbrace{\int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds}_{g_2(t)} - \underbrace{\int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, \cdot) ds}_{g_3(t)}. \quad (3.26)$$

Como  $\mathbb{P}(\vec{f}), \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) \in L^2_{T_0} L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , usando el Lema G.4 (ver Apéndice), componente a componente, concluimos que  $g_2$  y  $g_3$  son continuas.

No es muy difícil mostrar la continuidad de  $t \rightarrow W_t * \vec{u}_0$ . El proceso es como en la demostración del Lema G.4, verificando la continuidad por la izquierda y derecha.

Como  $t \rightarrow \vec{u}(t, \cdot)$  es la suma de tres funciones continuas, entonces es continua.  $\square$

El Teorema 3.1 nos dice que la velocidad  $\vec{u}$  de la solución *mild* de  $(\widehat{NS})$  es única en la bola  $B_{E_{T_0}}$ , pero en realidad, en nuestro caso es posible probar la unicidad de la solución  $\vec{u}$  sobre todo  $E_{T_0}$ .

Notemos que la unicidad de la solución *mild*  $(\vec{u}, p)$  de  $(\widehat{NS})$  se da con la unicidad de  $\vec{u}$ . Y este es el caso, como lo muestra el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 3.4** (Unicidad de la solución *mild* de  $(\widehat{NS})$ ). Sean  $T_0 \in [0, +\infty)$ ,  $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  tal que  $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$  y  $\vec{f} \in L^2([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$ , con  $\vec{f}, \vec{u}_0$  datos del problema  $(\widehat{NS})$ . Si

$$\vec{u}, \vec{v} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) = E_{T_0}$$

son soluciones *mild* de  $(\widehat{NS})$ , entonces  $\vec{u} = \vec{v}$  en  $E_{T_0}$ .

*Demostración.* De la Proposición 3.3 tenemos que

$$\vec{u}, \vec{v} \in C([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)),$$

y también

$$\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0 \quad \wedge \quad \vec{v}(0, \cdot) = \vec{u}_0.$$

Definimos  $\vec{w} := \vec{u} - \vec{v}$ . Entonces  $\vec{w}(0, \cdot) = 0$  y  $\vec{w} \in E_{T_0}$ .

Para ver que  $\vec{u} = \vec{v}$  en  $E$  debemos mostrar que  $\vec{w}(t, \cdot) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .

Dado que  $t \rightarrow \vec{w}(t, \cdot)$  es continua y  $\vec{w}(0, \cdot) = 0$ , existe el número  $T_* \in [0, T_0)$  que es el tiempo maximal para el cual  $\vec{w}(t, \cdot) = 0$  sobre  $[0, T_*)$ , que escrito matemáticamente

$$T_* := \sup \{ \bar{T} \in [0, T_0) : \vec{w}(t, \cdot) = 0, \quad \forall t \in [0, \bar{T}) \}.$$

Por tanto, lo que debemos mostrar es que  $T_* = T_0$ .

Argumentando por el absurdo, supongamos que  $0 \leq T_* < T$ . Sea  $T_1 \in (T_*, T)$ , cualquiera.

De momento estimemos  $\|\vec{w}\|_{E_{T_1}}$ .

$$\begin{aligned}
\|\vec{w}\|_{E_{T_1}} &= \|\vec{u} - \vec{v}\|_{E_{T_1}} \\
&= \left\| W_t * \vec{u}_0 + \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P} ds - B(\vec{u}, \vec{u}) \right. \\
&\quad \left. - W_t * \vec{u}_0 + - \int_0^t W_{t-s} * \mathbb{P} ds + B(\vec{v}, \vec{v}) \right\|_{E_{T_1}} \\
&= \|B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})\|_{E_{T_1}} \\
&= \underbrace{\|B(\vec{w}, \vec{u})\|_{E_{T_1}}}_{I_1} + \underbrace{\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{E_{T_1}}}_{I_2}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$I_2 = \|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{E_{T_1}} \leq \underbrace{\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_1}^\infty L^2}}_{J_1} + \underbrace{\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1}}_{J_2} + \underbrace{\|B(\vec{v}, \vec{w})\|_{L_{T_1}^2 \dot{H}^2}}_{J_3}.$$

Seguimos líneas similares a las realizadas en la obtención de (3.12) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \sup_{t \in [0, T_1]} \int_0^t \|W_{t-s}\|_{L^1} \|\mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot)\|_{L^2} ds \\
&= \sup_{t \in [0, T_1]} \int_0^t \|\mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{v} \otimes \chi_{[T_*, T]}(t) \vec{w}(t, \cdot)))(s, \cdot)\|_{L^2} ds \\
&= \sup_{t \in [T_*, T_1]} \int_{T_*}^t \|\mathbb{P}(\mathbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot)\|_{L^2} ds \\
&= C \sup_{t \in [T_*, T_1]} \left[ \int_{T_*}^t 1^2 \right]^{1/2} \left[ \int_{T_*}^{T_1} \|\mathbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}))(s, \cdot)\|_{L^2} ds \right]^{1/2} \\
&\leq C(T_1 - T_*)^{1/2} \left[ \|\vec{v}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{w}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1} \int_{T_*}^{T_1} \|w(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} dt + \right. \\
&\quad \left. \|\vec{w}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{v}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1} \int_{T_*}^{T_1} \|v(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} dt \right] \\
&\leq C(T_1 - T_*)^{1/2} \left[ \|\vec{v}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{w}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1} (T_1 - T_*)^{1/2} \|w\|_{L_{T_1}^2 \dot{H}^2} + \right. \\
&\quad \left. \|\vec{w}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1}^2 \|\vec{v}\|_{L_{T_1}^\infty \dot{H}^1} (T_1 - T_*)^{1/2} \|v\|_{L_{T_1}^2 \dot{H}^2} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq C(T_1 - T_*)^{3/4} \|v\|_{E_{T_1}} \|w\|_{E_{T_1}} < +\infty.$$

De manera análoga, siguiendo líneas similares para llegar a (3.15)

$$J_2 \leq C(T_1 - T_*)^{1/4} \|\vec{v}\|_{E_{T_1}} \|\vec{w}\|_{E_{T_1}} < \infty.$$

Así mismo, de lo realizado en (3.17) se sigue que

$$J_3 \leq C((T_1 - T_*)^{3/4} + (T_1 - T_*)^{1/4}) \|\vec{v}\|_{E_{T_1}} \|\vec{w}\|_{E_{T_1}} < +\infty.$$

Para  $I_1$  se obtiene la misma cota que para  $I_2$ . Así, las estimaciones de  $J_1, J_2$  y  $J_3$  nos permiten escribir

$$\|w\|_{E_{T_1}} \leq C((T_1 - T_*)^{3/4} + (T_1 - T_*)^{1/4}) \left( \|\vec{u}\|_{E_{T_1}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_1}} \right) \|\vec{w}\|_{E_{T_1}}$$

Ahora, consideremos solo aquellos  $T_1$  tales que además  $0 < T_1 - T_* \leq 1$ . Entonces  $(T_1 - T_*)^{3/4} \leq (T_1 - T_*)^{1/4}$ , por lo que, de la estimación anterior obtenemos que

$$\|w\|_{E_{T_1}} \leq C(T_1 - T_*)^{1/4} \left( \|\vec{u}\|_{E_{T_1}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_1}} \right) \|\vec{w}\|_{E_{T_1}}, \quad (3.27)$$

De la definición de  $T_*$ , y dado que  $T_1 > 0$ , podemos concluir que  $\vec{u} \neq \vec{v}$  en  $E_{T_1}$ , es decir,  $\|\vec{u}\|_{E_{T_1}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_1}} > 0$ . Y notando que

$$\|\vec{u}\|_{E_{T_1}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_1}} \leq \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} = cte < +\infty,$$

de (3.2) obtenemos

$$\|w\|_{E_{T_1}} \leq (T_1 - T_*)^{1/4} C \left( \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \right) \|\vec{w}\|_{E_{T_1}};$$

si  $T_1 \in (T_*, \min\{T_* + 1, T_0\})$  y

$$\underbrace{(T_1 - T_*)^{1/4} C \left( \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} + \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \right)}_a < 1, \quad (3.28)$$

entonces tenemos que  $\|\vec{w}\|_{E_{T_1}} \leq a \|\vec{w}\|_{E_{T_1}}$ , con  $a \in (0, 1)$ , lo que implica que  $\|\vec{w}\|_{E_{T_1}} = 0$ , y así,

$$\vec{w}(t, \cdot) = 0, \quad \forall t \in [0, T_1),$$

lo cual contradice el hecho de que  $T_*$  es el tiempo maximal para el cual  $\vec{w}(t, \cdot) = 0$  sobre  $[0, T_*)$ , pues  $T_1 > T_*$ . Por tanto,  $T_* = T_0$ , como queríamos.  $\square$

### 3.3. Conclusiones

#### 1. Tamaño de los datos de $(\widehat{NS})$

El tiempo de existencia de la velocidad de la solución *mild* de  $(\widehat{NS})$  dada en (3.24) de la demostración del Teorema de Fujita-Kato nos muestra que cuando la norma de los datos es grande, el tiempo de existencia de  $\vec{u}$  es pequeño.

Mientras que cuando los datos tienen norma pequeña, la expresión (3.22) nos dice que  $T_0$  puede ser tomado grande. Esto sugiere que si los datos son suficientemente pequeños entonces el tiempo de existencia de la solución es arbitrariamente grande.

#### 2. Buen planteamiento del problema

El problema de hallar una solución *mild* para  $(\widehat{NS})$ , como vimos, es resoluble con solución única en un tiempo pequeño.

Además, dicho problema también es estable cuando los datos de  $(\widehat{NS})$  se toman en una bola fija, esto es: para  $r \in (0, \infty)$  fijo, existe  $T_r \in (0, T)$  suficientemente pequeño de tal manera que se puede definir la función continua  $\gamma : B_{H^1}(r) \times B_{L^2_T, L^2}(r) \rightarrow E_{T_r} \times L^2_{T_r} \dot{H}^1$  que a cada par (de datos)  $(\vec{u}_0, \vec{f})$  le corresponde la solución *mild*,  $(\vec{u}, p)$ , del problema  $(\widehat{NS})$  de datos  $\vec{u}, \vec{f}$ .

La continuidad de  $\gamma$  se concluye de la segunda parte de la Observación 18 y la estimación (3.25) para  $p$ . Por tanto, nuestro problema es bien planteado en el sentido de Hadamard.

#### 3. Regularidad y extensión de la solución *mild* de $(\widehat{NS})$

La solución *mild*  $\vec{u}$  obtenida en la demostración del Teorema 3.4 pertenece espacio  $E_{T_0}$ , y la Proposición 3.3 nos asegura que  $\vec{u} \in C([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ , lo cual nos permite abordar la siguiente idea: considerar  $\vec{u}_1 := \vec{u}(T_0, \cdot)$  como condición inicial en  $(\widehat{NS})$  y resolver el

problema integral

$$\vec{u} = W_t * \vec{u}_1 + \int_{T_0}^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds - \int_{T_0}^t W_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, \cdot) ds$$

repetiendo de manera análoga la demostración del teorema de Fujita-Kato para encontrar  $T_1 \in (T_0, T)$  y una extensión de  $\vec{u}$  a  $[0, T_1]$  (notada de la misma forma) tal que  $\vec{u} \in E_{T_1}$ .

Reiterando varias veces este proceso, se podría pensar que el tiempo maximal de existencia siempre puede ser tomado arbitrario, sin embargo, el proceso descrito de extensión del tiempo de vida de la solución de  $(\widehat{NS})$  es limitado ya que cada vez que prolongamos el tiempo de existencia, esta prolongación es pequeña y la siguiente mucho más. Así, estas prolongaciones del tiempo tienden a cero. Por tanto, el argumento de punto fijo de Banach es insuficiente para asegurar que: o existe  $T_1 > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow T_1} \|\vec{u}(t)\|_{H^1} = +\infty$  o que el tiempo de vida es arbitrariamente grande. Este es uno de los siete problemas del milenio propuestos por el Instituto *Clay* de Matemáticas.

### 3.4. Recomendaciones

1. En la parte de la teoría de distribuciones, asegurarse de manejar adecuadamente la transformada de Fourier de acuerdo al dominio en el cual sea considerada, para poder trabajar fluidamente. Por ejemplo, definimos la transformada de Fourier sobre  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ; como  $L^2(\mathbb{R}^n), L^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , hay que asegurarse de que la transformada de Fourier definida sobre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  es una extensión de la transformada de Fourier definida sobre  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .
2. Aprender los conceptos físicos subyacentes en la mecánica de fluidos, pues son muy mencionados, no solo en la física e ingeniería, si no también en la literatura matemática relativa a las ecuaciones de Navier-Stokes.

# Apéndice A

---

## Notaciones

---

### Notaciones generales

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $\mathbb{N}$          | Conjunto de los números naturales (incluido el cero).   |
| $\mathbb{Q}$          | Conjunto de los números racionales.   |
| $\mathbb{R}$          | Conjunto de los números reales.   |
| $\mathbb{C}$          | Conjunto de los número complejos.   |
| $\mathbb{R}^n$        | $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  |
| $\mathbb{N}^n$        | $\{(k_1, \dots, k_n) : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}\}$ , conjunto de multi-índices.               |
| $x \cdot y$           | $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ , para $x, y \in \mathbb{R}^n$ .   |
| $\bar{z}$             | Conjugado de $z \in \mathbb{C}$ .   |
| $\mathbb{R}^+$        | Conjunto de los números reales positivos unión $\{0\}$ .  |
| $ x $                 | $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , norma euclideana de $x \in \mathbb{R}^n$ .                            |
| $ \alpha $            | $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ , para $\alpha$ multi-índice.   |
| $\text{sgn}(\lambda)$ | signo de $\lambda \in \mathbb{R}$ .   |
| $\vec{e}_i$           | $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , donde el valor 1 va en la $i$ -ésima componente. |
| $\chi_A(x)$           | 0 si $x \notin A$ , y 1 si $x \in A$ .  |
| $\tilde{f}(x)$        | $f(-x)$ , donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .   |

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $f * g(y)$                        | $\int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)g(x)dx$ , para $y \in \mathbb{R}^n$ , $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . |
| $X \hookrightarrow Y$             | $X$ se inyecta continuamente en $Y$ , con $X, Y$ espacios vectoriales topológicos.                              |
| $\ w\ _E$                         | Norma de $w \in E$ en el espacio de normado $E$ .   |
| $\ \cdot\ _1 \approx \ \cdot\ _2$ | Las normas $\ \cdot\ _1$ y $\ \cdot\ _2$ son equivalentes.  |
| $E \cong F$                       | $E$ y $F$ son isomorfos como espacios normados.   |
| $B_E(r)$                          | $\{x \in E : \ x\ _E < r\}$ , con $E$ un espacio normado.   |
| $\overline{B}_E(r)$               | $\{x \in E : \ x\ _E \leq r\}$ , con $E$ un espacio normado.  |
| $(u, v)_H$                        | Producto escalar entre dos elementos $u, v$ de un espacio de Hilbert $H$ .                                      |
| $\mathcal{L}(E, F)$               | Espacio de las funciones lineales y continuas entre los espacios vectoriales topológicos $E$ y $F$ .            |

## Operadores

|   |   |
|---|---|
| $\partial_i^k f, \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$     | Derivada parcial $i$ -ésima de $f = f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a la variable $x_k$ .  |
| $\partial^\alpha f$                                       | $\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_n} f$ , con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   |
| $\Delta f$  | $\sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$ , laplaciano de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .   |
| $\vec{\nabla} f$  | $(\partial_1 f, \dots, \partial_n f)^T$ , gradiente de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  |
| $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}, \operatorname{div}(\vec{f})$ | $\sum_{i=1}^n \partial_i f_i$ , divergencia de $f = f(f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .   |
| $\vec{\nabla} \times \vec{f}$                             | $(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) \vec{e}_1 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) \vec{e}_2 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \vec{e}_3$ , rotacional de $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . |



## Espacios de funciones

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $C^k(\mathbb{R}^n)$              | Espacio de las funciones $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que todas sus derivadas de orden $\alpha$ , con $ \alpha  \leq k$ , existen y son continuas.     |
| $C^\infty(\mathbb{R}^n)$         | $\bigcap_{k \geq 1} C^k(\mathbb{R}^n)$ .  |
| $C_c^\infty(\Omega)$             | Funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que tienen soporte compacto en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .   |
| $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$      | Es el espacio $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , con topología del límite inductivo.  |
| $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$     | Dual topológico de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .  |
| $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ | Espacio de las funciones localmente integrables. A sus elementos les llamaremos <i>funciones clásicas</i> .   |
| $L^p(\mathbb{R}^n)$              | Espacio de las funciones Lebesgue medibles $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que son $p$ -integrables.  |
| $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$          | Espacio de las funciones $f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tales que (las derivadas distribucionales) $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $ \alpha  \leq k$ . |

## Abreviaciones

|        |   |
|--------|---|
| c.t.p. | Casi todo punto.                              |
| TCDL   | Teorema de convergencia dominada de Lebesgue. |
| ssi    | Si y solo si.                                 |
| cte    | constante.                                    |

# Apéndice B

---

## Distribuciones temperadas

---

### B.0.1. Funciones de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ como elementos en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

La función

$$\begin{aligned}\Lambda : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto u_f := (f, \cdot)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva. No es sobreyectiva porque la masa de Dirac  $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  no tiene pre-imagen. La inyectividad de  $\Lambda$  nos permite escribir (abuso de notación)  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , diremos que  $u_f$  es su representante en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . El representante de  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  se define análogamente, sin embargo, en este caso el representante no siempre existe en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Siempre que no haya lugar a confusión, escribiremos  $f$  en lugar de  $u_f$ .

### B.0.2. Topología para $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Con la suma y producto por escalar usual para funciones,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  es un espacio vectorial complejo. Al espacio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  le dotamos de la topología débil \*, notada por  $\tau_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$ , que es la topología (definida sobre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ) más pequeña que deja continua la familia proyecciones  $(\rho_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ , donde

$$\begin{aligned}\rho_\varphi : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto u(\varphi).\end{aligned}$$

# Apéndice C

---

## Integrales

---

Vamos a denotar por  $S^{n-1}$  y  $\omega_{n-1}$  a la superficie y al volumen de la bola unidad  $n$ -dimensional, respectivamente.

**PROPOSICIÓN C.1.** Sean  $0 \leq a < b \leq \infty$  y  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n - \{0\})$ . Se tiene la siguiente fórmula de integración

$$\int_{a \leq |x| \leq b} f(x) dx = \int_a^b \int_{S^{n-1}} f(r\omega) r^{n-1} d\sigma(w) dr,$$

donde  $d\sigma$  es el diferencial de superficie de la bola  $n$  dimensional y  $w$  es su variable canónica.

A partir de este resultado se puede mostrar lo siguiente.

**COROLARIO C.2** (Integral de funciones radialmente simétricas). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $\int_{\mathbb{R}} r^{n-1} f(r) dr$  es finito, y sean  $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ . Entonces, se cumple la fórmula

$$\int_{\{r_1 \leq |x| \leq r_2\}} f(|x|) dx = C_n \int_{r_1}^{r_2} f(r) r^{n-1} dr,$$

donde  $C_n = \int_{S^{n-1}} d\sigma(w)$ .

**PROPOSICIÓN C.3.** Si  $s \in \mathbb{R}$  y  $s > n/2$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi < +\infty.$$

*Demostración.* Si realizamos el cambio de variables a coordenadas esféricas generalizadas, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi &= C_n \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr \\ &= C_n \int_1^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr + C_n \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr \\ &\leq C_n \int_1^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{2s}} dr + C_n \int_0^1 r^{n-1} dr \\ &= \frac{C_n}{n} + C_n \int_1^{+\infty} r^{n-1-2s} dr \\ &= C_n + \frac{C_n}{n-2s} \left[ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{n-2s} - 1 \right] \\ &= C_n + \frac{C_n}{2s-n} < +\infty. \end{aligned}$$

□

# Apéndice D

---

## Transformada de Hilbert direccional

---

*Demostración.* (Teorema 2.5) La linealidad de  $\mathcal{H}_\theta$  es trivial.

Para el caso  $n = 1$ , la actual proposición es la misma que el Teorema 2.2, pues  $\theta = 1$ . Supongamos que  $n \geq 2$ . Tomemos  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Tenemos dos casos.

**Caso 1:**  $\theta = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

Sea  $(x_2, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , cualquiera. Definimos la función  $g(x_2, \dots, x_n)$  como

$$\begin{aligned} g(x_2, \dots, x_n): \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Entonces  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Así, podemos aplicar el Teorema 2.2 y obtener que

$$\|\mathcal{H}(g(x_2, \dots, x_n))\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|g(x_2, \dots, x_n)\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (\text{D.1})$$

Pero notemos que para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{H}(g(x_2, \dots, x_n))(x_1) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x_1 - t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x_1 - t\vec{e}_1)}{t} dt = \mathcal{H}_{\vec{e}_1}(f)(x_1),$$

y usando esto en (D.1), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{H}_{\vec{e}_1}(f)(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \\ \implies \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{H}_{\vec{e}_1}(f)(x_1, \dots, x_n)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx \end{aligned}$$

$$\implies \|\mathcal{H}_{\vec{e}_1}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**Caso 2:**  $\theta \in \mathbb{R}^n$  cualquiera tal que  $|\theta| = 1$ .

Notemos que existe una matriz invertible  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\theta = Ae_1$ , y así,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\theta(f)(x) &= \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - t\theta)}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(A(A^{-1}x - te_1)\theta)}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f \circ A(A^{-1}x - te_1)\theta)}{t} dt \\ &= \mathcal{H}_{\vec{e}_1}(f \circ A)(A^{-1}x), \end{aligned}$$

que junto con el primer caso, llegamos a

$$\begin{aligned} \|H_\theta(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |H_{e_1}(f \circ A)(A^{-1}x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |H_{e_1}(f \circ A)(y)|^p \det(A) dy \\ &= \det(A) \|H_{e_1}(f \circ A)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\ &\leq C_p^p \det(A) \|f \circ A\|^p \\ &= C_p^p \det(A) \frac{1}{\det(A)} \|A\|^p \\ &= C_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned} \tag{D.2}$$

□

# Apéndice E

---

## Espacios de Sobolev homogéneos y no homogéneos

---

*Demostración.* (Proposición 1.12)

1. Supongamos que  $s > -n/2$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Notemos que

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\dot{H}^s}^2 &\leq C_\varphi \left[ \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2s} d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2s} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right] \\ &\leq C_\varphi \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2s} d\xi + C_{\varphi,s} \\ &= C_{n,\varphi,s} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2s+n} \Big|_r^1 + C_{\varphi,s} < +\infty,\end{aligned}$$

pues  $s > -n/2$ .

2. Supongamos que  $s \leq -n/2$ . Tomemos una función  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que su transformada de Fourier tome el valor de 1 en  $\{|x| \leq 1\}$ . Entonces,

$$\|\varphi\|_{\dot{H}^s}^2 \geq \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2s} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{2s} 1 d\xi = +\infty,$$

pues  $s \leq -n/2$ . Así,  $\varphi \notin \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ .

□

*Demostración.* (Teorema 1.15)

1. Ver las páginas 29 y 44 de [1].

2. Argumentando por densidad, mostremos que  $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq C \|\varphi\|_{H^s}$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\widehat{\varphi}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\widehat{\varphi}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{-s/2} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \\ &= C_{n,s} \|\varphi\|_{H^s}, \end{aligned} \tag{E.1}$$

donde esta última línea se sigue del hecho de que la integral  $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi$  es finita si  $s > n/2$  (ver Proposición C.3). Puesto que  $\|\widehat{\varphi}\|_{L^1} \leq C_{n,s} \|\varphi\|_{H^s}$ , del hecho de que  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$  es continua, obtenemos lo que queríamos mostrar. □

*Demostración.* (Teorema 1.16) Sean  $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y, por tanto, su producto está bien definido. Luego,

$$\begin{aligned} \|uv\|_{H^s}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u} * \widehat{v}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi - \eta) \widehat{v}(\eta) d\eta \right|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{E.2}$$

Notemos que para cualquier  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$|\xi|^2 = |\xi - \eta + \eta|^2 \leq 2(|\xi - \eta|^2 + |\eta|^2),$$

entonces,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|^2)^{s/2} &\leq 2^{s/2} (1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)^{s/2} \\ &\leq C_s \left[ (1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} + (1 + |\eta|^2)^{s/2} \right], \end{aligned}$$

pues  $s > 0$  (Lema 4.2.1 de [4], página 218), por lo que de (E.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|uv\|_{H^s}^2 &\leq C_{s,n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[ (1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} + (1 + |\eta|^2)^{s/2} \right] |\widehat{u}(\xi - \eta)| |\widehat{v}(\eta)| d\eta \right|^2 d\xi \\ &= C_{s,n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} |\widehat{u}(\xi - \eta)| |\widehat{v}(\eta)| d\eta \right]^2 d\xi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + C_{s,n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2)^{s/2} |\widehat{u}(\xi - \eta)| |\widehat{v}(\eta)| d\eta \right]^2 d\xi \\
= & C_{s,n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left[ (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{u}| \right] * |\widehat{v}(\xi)| \right|^2 d\xi \\
& + C_{s,n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left[ (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{v}| \right] * |\widehat{u}(\xi)| \right|^2 d\xi. \tag{E.3}
\end{aligned}$$

Ahora, procediendo como en la demostración del teorema anterior (para obtener (E.1)), el hecho de que  $s > n/2$  nos permite concluir que  $|\widehat{u}|, |\widehat{v}| \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y que

$$\|\widehat{u}\|_{L^1} \leq C_{s,n} \|u\|_{H^s}, \quad \|\widehat{v}\|_{L^1} \leq C_{s,n} \|v\|_{H^s}. \tag{E.4}$$

Por otro lado, dado que  $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , tenemos que

$$(1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{u}|, (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{v}| \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Así, gracias a la desigualdad de Young para espacios de Lebesgue

$$\left[ (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{u}| \right] * |\widehat{v}|, \left[ (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{v}| \right] * |\widehat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

$$\left\| \left[ (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{u}| \right] * |\widehat{v}(\xi)| \right\|_{L^2} \leq \left\| (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{u}| \right\|_{L^2} \|\widehat{v}\|_{L^1} = \|u\|_{H^s} \|\widehat{v}\|_{L^1},$$

$$\left\| \left[ (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{v}| \right] * |\widehat{u}(\xi)| \right\|_{L^2} \leq \left\| (1 + |\cdot|^2)^{s/2} |\widehat{v}| \right\|_{L^2} \|\widehat{u}\|_{L^1} = \|v\|_{H^s} \|\widehat{u}\|_{L^1},$$

y usando esto en (E.3), llegamos a que

$$\|uv\|_{H^s}^2 \leq C_s \|u\|_{H^s}^2 \|\widehat{v}\|_{L^1}^2 + C_s \|v\|_{H^s}^2 \|\widehat{u}\|_{L^1}^2,$$

que junto con (E.4), obtenemos lo que queríamos.  $\square$

*Demostración.* (Teorema 1.17)

Vamos a dividir la demostración en dos casos.

**Caso 1:**  $s + \delta - n/2 \leq 0$ .

Podemos observar que en este caso se tiene que  $s, \delta, (n/2 - s - \delta) \in [0, n/2)$ , por lo que es posible aplicar el Teorema 1.15 para concluir que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\mathbb{R}^n), \tag{E.5}$$

$$\dot{H}^\delta(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2\delta}}(\mathbb{R}^n), \tag{E.6}$$

$$H^{\frac{n}{2}-s-\delta}(\mathbb{R}^n), \dot{H}^{\frac{n}{2}-s-\delta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{2(s+\delta)}}(\mathbb{R}^n). \tag{E.7}$$

Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Notemos que los índices que aparecen en los espacios de Lebesgue en (E.5)-(E.7) verifican

$$\frac{1}{\frac{2n}{n-2s}} + \frac{1}{\frac{2n}{n-2\delta}} + \frac{1}{\frac{2n}{2(s+\delta)}} = 1,$$

lo cual nos permite aplicar la desigualdad de Hölder a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2s}}} \|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2\delta}}} \|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{2(s+\delta)}}},$$

y que junto con (E.5)-(E.7) obtenemos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|u\|_{H^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} \|\varphi\|_{H^{\frac{n}{2}-s-\delta}}, \quad (\text{E.8})$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|u\|_{H^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} \|\varphi\|_{\dot{H}^{\frac{n}{2}-s-\delta}}. \quad (\text{E.9})$$

Puesto que  $-(s + \delta - n/2) \geq 0$ , por la equivalencia de normas dada en la segunda parte de la Observación 5, tenemos que

$$\|uv\|_{H^{s+\delta-\frac{n}{2}}} \leq \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{H^{\frac{n}{2}-s-\delta}} \leq 1} \|u\|_{H^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta} \|\varphi\|_{H^{\frac{n}{2}-s-\delta}} \leq \|u\|_{H^s} \|v\|_{\dot{H}^\delta},$$

lo cual prueba (1). Para probar (2), lo hacemos de manera análoga, usando ahora (E.9) y equivalencia de normas dada en la Observación 1.2.

**Caso 2:**  $s + \delta - n/2 > 0$ . A partir de este punto se puede seguir la prueba, sin mayor problema, en la demostración del Lema 7.3 de [13] (página 130).  $\square$

# Apéndice F

---

## Funciones vectoriales

---

El propósito de esta sección es introducir nociones como el laplaciano, gradiente y divergencia de campos vectoriales, los cuales son de amplio uso al momento de trabajar con la ecuación de Navier-Stokes.

**DEFINICIÓN F.1.** Sean  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  y  $H = (H_{i,j})_{i,j=1}^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  funciones suficientemente regulares. Definimos

- La divergencia de  $H$ ,  $\text{div}(H) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\text{div}(\vec{h}) := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \partial_j h_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \partial_j h_{n,j} \end{pmatrix},$$

- El gradiente de  $\vec{f}$ ,  $\vec{\nabla} \vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ :

$$\vec{\nabla} \vec{f} := \begin{pmatrix} [\vec{\nabla} f_1]^T \\ \vdots \\ [\vec{\nabla} f_n]^T \end{pmatrix},$$

- El laplaciano de  $f$ ,  $\Delta \vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ :

$$\Delta \vec{f} := \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix},$$

- La integral de  $\vec{f}$  sobre  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\Omega} \vec{f}(x) dx := \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_n(x) dx \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

- Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . La convolución de  $g$  con  $\vec{f}$ ,  $g * \vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$g * \vec{f}(x) := \begin{pmatrix} g * f_1(x) \\ \vdots \\ g * f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

- El producto tensorial de  $\vec{f}$  con  $\vec{h}$ ,  $\vec{f} \otimes \vec{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\vec{f} \otimes \vec{h}(x) := \begin{pmatrix} g_1(x)f_1(x) & \cdots & g_1(x)f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_n(x)f_1(x) & \cdots & g_n(x)f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

**PROPOSICIÓN F.1.** (Desigualdad de Young) Sean  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\vec{f} \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , con  $p \in [1, \infty]$ . Entonces  $g * \vec{f} \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y

$$\|g * \vec{f}\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \|\vec{f}\|_{L^p}.$$

# Apéndice G

---

## Núcleo del calor

---

**Notación:** Para un espacio de Banach  $E$ ,  $p \in [1, \infty]$  y  $T \in [0, +\infty]$ , denotamos

$$L_T^p E := L^p((0, T), E).$$

Sabemos que para  $t > 0$  fijo:  $W_t(\cdot) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\widehat{W}_t(\cdot) = e^{-t|\cdot|^2}$  (ver Ejemplo 3.22 de [15], página 108).

**LEMA G.1.** Para cualquier  $t \in (0, +\infty)$  se tiene que  $\|W_t\|_{L^1} = 1$ .

*Demostración.* Sea  $t \in [0, T)$ .

$$\|W_t\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr \right]^n = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left[ \sqrt{4t\pi} \right]^n = 1$$

□

**LEMA G.2.** Si  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces se tienen las siguientes estimaciones:

1.  $\|W_t * u\|_{L_T^2 L^2} \leq \|u\|_{L^2}$ .
2.  $\|W_t * u\|_{L_T^2 \dot{H}^1} \leq \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2}$ .

*Demostración.* 1. Usando la desigualdad de Young para espacios de Lebesgue,

$$\|W_t * u\|_{L_T^2 L^2}^2 = \int_0^T \|W_s * u\|_{L^2}^2 ds \leq \int_0^T [\|W_s\|_{L^1} \|u\|_{L^2}]^2 ds = \|u\|_{L^2}^2.$$

2. Usando que  $\widehat{W}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ , tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|W_t * u\|_{L_T^2 \dot{H}^1}^2 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-2s|\xi|^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \int_0^T e^{-2s|\xi|^2} ds d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_{\dot{H}^0}^2 = \frac{1}{2} (2\pi)^n \|u\|_{L^2}^2. \quad \square \end{aligned}$$

**LEMA G.3.** Sean  $T \in [0, \infty]$  y  $\vec{f} \in L_T^2 L^2(\mathbb{R}^n)$ . Definimos  $F(t, x) := \int_0^t W_{t-s} * \vec{f}(s, x) ds$ . Entonces

1.  $\|F(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\vec{f}\|_{L_T^2 L^2}$ , para c.t.p.  $t \in [0, T)$ ,
2.  $\|F\|_{L_T^2 \dot{H}^2} \leq (2\pi)^{n/2} \|\vec{f}\|_{L_T^2 L^2}$ .

*Demostración.* 1. Notemos que

$$\begin{aligned} \|F(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} &= \left\| |\cdot| \widehat{F}(t, \cdot) \right\|_{L^2} \\ &= \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| \widehat{F}(t, \xi) g(\xi) d\xi \right| \\ &= \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\xi| g(\xi) \widehat{W}_{t-s}(\xi) \widehat{f}(s, \xi) ds d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1} \int_0^t \left\| |\cdot| g(\cdot) \widehat{W}_{t-s}(\cdot) \right\|_{L^2} \left\| \widehat{f}(s, \cdot) \right\|_{L^2} ds. \end{aligned}$$

Empleando las fórmulas de la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones,

$$g \widehat{W}_{t-s} = \mathcal{F} \left( \mathcal{F}^{-1}(g \widehat{W}_{t-s}) \right) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \mathcal{F} \left( \widetilde{g} * \widetilde{\widehat{W}_{t-s}} \right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} \left( \widetilde{g} * W_{t-s} \right),$$

y, por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \|F(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \int_0^t \left\| |\cdot| \mathcal{F}(\widetilde{g} * W_{t-s})(s, \cdot) \right\|_{L^2} \left\| \widehat{f}(s, \cdot) \right\|_{L^2} ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \int_0^t \left\| \widetilde{g} * W_{t-s}(s, \cdot) \right\|_{\dot{H}^1} \left\| \widehat{f}(s, \cdot) \right\|_{L^2} ds, \end{aligned}$$

que junto con la segunda parte del Lema G.3,

$$\|F(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sup_{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1} \left\{ \|\widehat{g} * W_{t-s}\|_{L_T^2 \dot{H}^1} \|\widehat{f}\|_{L_T^2 L^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L_T^2 L^2}.$$

2. Con el fin de evitar confusiones, vamos a adoptar las notaciones  $\mathcal{F}_t$  y  $\star$  para la transformada de Fourier y convolución, en la variable temporal, respectivamente. Notemos que

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_T^2 \dot{H}^2}^2 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left| \int_0^t \widehat{W}_{t-s}(\xi) \widehat{f}(s, \xi) ds \right|^2 d\xi dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0, T]}(t) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \chi_{[0, +\infty)}(t-s) \left| \widehat{W}_{t-s}(\xi) \right| \right] \left[ \chi_{[0, T]}(s) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left| \widehat{f}(s, \xi) \right| \right] ds \right)^2 d\xi dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left| \int_{\mathbb{R}} \left[ \chi_{[0, +\infty)}(t-s) \widehat{W}_{t-s}(\xi) \right] \left[ \chi_{[0, T]}(s) \left| \widehat{f}(s, \xi) \right| \right] ds \right|^2 d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left| \left[ \chi_{[0, +\infty)}(\cdot) \widehat{W}_{(\cdot)}(\xi) \right] \star \left[ \chi_{[0, T]}(\cdot) \left| \widehat{f}(\cdot, \xi) \right| \right] (t) \right|^2 d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left\| \left[ \chi_{[0, +\infty)}(\cdot) \widehat{W}_{(\cdot)}(\xi) \right] \star \left[ \chi_{[0, T]}(\cdot) \left| \widehat{f}(\cdot, \xi) \right| \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \left\| \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0, +\infty)}(\cdot) \widehat{W}_{(\cdot)}(\xi) \right] \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0, T]}(\cdot) \left| \widehat{f}(\cdot, \xi) \right| \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0, +\infty)}(\cdot) \widehat{W}_{(\cdot)}(\xi) \right] (r) \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0, T]}(\cdot) \left| \widehat{f}(\cdot, \xi) \right| \right] (r) \right|^2 \\ &\quad dr d\xi, \end{aligned}$$

donde en la tercera línea usamos que  $\chi_{[0, T]} \chi_{[0, +\infty)} \leq \chi_{[0, +\infty)}$ , mientras que en la sexta línea se aplicó la identidad de Plancherel en variable de tiempo. Usando que  $\widehat{W}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0, +\infty)}(\cdot) \widehat{W}_{(\cdot)}(\xi) \right] (r) &= \int_0^{+\infty} e^{-irt} e^{-t|\xi|^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(-ir - |\xi|^2)} dt \\ &= \frac{1}{-ir - |\xi|^2} e^{t(-ir - |\xi|^2)} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{|\xi|^2 + ir}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L_T^2 \dot{H}^2}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{|\xi|^2 + ir} \right|^2 \left| \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0,T]}(\cdot) \widehat{f}(\cdot, \xi) \right] (r) \right|^2 dr d\xi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F}_t \left[ \chi_{[0,T]}(\cdot) \widehat{f}(\cdot, \xi) \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T \left| \widehat{f}(t, \xi) \right|^2 dt d\xi = (2\pi)^n \|f\|_{L_T^2 L^2}^2. \quad \square
\end{aligned}$$

**LEMA G.4.** Con las mismas hipótesis del Lema G.3, si  $T_0 \leq T$  y  $T_0 < +\infty$ , entonces se tiene que  $t \rightarrow F(t, \cdot)$  está en  $C([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^n))$ .

*Demostración.* Primero veamos que  $t \rightarrow F(t, \cdot)$  es continua por la izquierda. Para ello tomemos  $t \in (0, T]$  y  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (0, t)$  una sucesión que converge a  $t$ , y probemos que  $F(t_k, \cdot) \rightarrow F(t, \cdot)$  en  $H^1(\mathbb{R}^n)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

$$\|F(t_k, \cdot) - F(t, \cdot)\|_{H^1} \leq \overbrace{\int_0^{t_k} \|(W_{t_k-s} - W_{t-s}) * f(s, \cdot)\|_{H^1} ds}^{A_k} + \underbrace{\int_{t_k}^t \|(W_{t-s}) * f(s, \cdot)\|_{H^1} ds}_{B_k}.$$

Debemos probar que  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergen a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por una parte

$$\begin{aligned}
A_k &\leq C_n \int_0^{T_0} \overbrace{\chi_{[0, t_k]}(s) \|(W_{t_k-s} - W_{t-s}) * f(s, \cdot)\|_{L^2}}^{g_k(s)} ds + \\
&\quad C_n \int_0^{T_0} \underbrace{\chi_{[0, t_k]}(s) \|(W_{t_k-s} - W_{t-s}) * f(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}}_{h_k(s)} ds.
\end{aligned}$$

La idea es usar el TCDL. Sea  $s \in (0, t_k)$  (si  $s > t_k$  tenemos que  $g_k(s) = 0$ ). Usando el Teorema del Valor Medio y el Teorema de Taylor, se puede probar que

$$\left| e^{-(t_k-s)|\xi|^2} - e^{-(t-s)|\xi|^2} \right| \leq |t_k - t| e^{-(t_k-s)|\xi|^2} |\xi|^2 \leq |t_k - t| \frac{2|\xi|^2}{1 + (t_k - s)^2 |\xi|^4},$$

y notando que la función real  $r \rightarrow \frac{r^2}{1 + (t_k - s)^2 r^4}$  puede maximizarse en  $r =$



$1/(t_k - s)^{1/2}$ , concluimos que

$$g_k(s) \leq \frac{|t_k - t|}{(t_k - s)} \|f(s, \cdot)\|_{L^2} \longrightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Para encontrar una función que domine a todas las  $g_k$ , usamos la desigualdad de Young para espacios de Lebesgue y obtenemos que

$$|g_k(s)| \leq \|W_{t_k-s} - W_{t-s}\|_{L^1} \|f(s, \cdot)\|_{L^2} \leq \underbrace{2 \|f(s, \cdot)\|_{L^2}}_{\in L^2(0, T_0) \leftrightarrow L^1(0, T_0)}.$$

Entonces el TCDL nos asegura que  $\int_0^{T_0} g_k(s) ds \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ .

Ahora probemos que  $\int_0^{T_0} h_k(s) ds \rightarrow 0$ . Nuevamente, usaremos el TCDL. Suponemos que  $0 < s < t_k < t \leq T_0$  y definimos  $t_1 := t - s$ ,  $t_2 := t_k - s$ . Entonces,

$$\begin{aligned} h_k^2(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-2t_2|\xi|^2} \left| e^{(t_2-t_1)|\xi|^2} - 1 \right|^2 |\widehat{f}(s, \xi)|^2 d\xi \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-2t_2|\xi|^2} \left| e^{(t_2-t_1)|\xi|^2} - 1 \right| |\widehat{f}(s, \xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Mediante el Teorema de Incrementos Finitos y el hecho de que  $t_2 - t_1 < 0$ , podemos concluir que  $\left| e^{(t_2-t_1)|\xi|^2} - 1 \right| \leq |t_2 - t_1| |\xi|^2$ , entonces,

$$h_k^2(s) \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 e^{-2t_2|\xi|^2} |t_2 - t_1| |\widehat{f}(s, \xi)|^2 d\xi.$$

Ahora, notemos que existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\epsilon < t_2 = t_k - s$ , por lo cual,  $e^{-t_2|\xi|^2} \leq e^{-\epsilon|\xi|^2}$ . Así, existe una constante  $C > 0$  tal que  $|\xi|^4 e^{-t_2|\xi|^2} \leq C$ , luego,

$$\begin{aligned} h_k(s) &\leq \sqrt{2C |t_2 - t_1| \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(s, \xi)|^2 d\xi} \\ &= C_2 |t_k - t| \left\| \widehat{f}(s, \cdot) \right\|_{L^2}, \end{aligned}$$

así  $h_k(s) \rightarrow 0$  c.t.p.  $s \in [0, T]$ , que junto con el hecho de que  $|t_k - t| \left\| \widehat{f}(s, \cdot) \right\|_{L^2} \in L^1(0, T_0)$ , el TCDL nos asegura que  $\int_0^{T_0} h_k(s) ds \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , como se quería.

En este punto, mostrar que  $B_k$  converge a cero no es mayor problema.

Por tanto, tenemos que  $t \rightarrow F(t, \cdot)$  es continua por la izquierda. La continuidad por la derecha se muestra de manera análoga, tomando  $t \in [0, T)$  y  $(t_k)_k \subseteq (t, T_0)$  tal que  $t_k \rightarrow t$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**LEMA G.5.** Sean  $\vec{v}, \vec{w} \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Entonces

1.  $\vec{u}, \vec{w} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,
2.  $\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , y si  $n = 3$ , se tiene la siguiente estimación:

$$\|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})\|_{L^2}^2 \leq 2 \left[ \|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{w}\|_{\dot{H}^2} \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1} + \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{v}\|_{\dot{H}^2} \|\vec{v}\|_{\dot{H}^1} \right].$$

*Demostración.* La primera parte se sigue directamente de las definiciones de  $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $\dot{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Para la segunda parte, notemos que

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{k,l=1}^n \partial_l (\vec{v} \otimes \vec{w})_{kl} \vec{e}_k \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{k,l=1}^n \|\partial_l (\vec{v} \otimes \vec{w})_{kl}\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k,l=1}^n \|i\xi_l \widehat{v_k w_l}\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k,l=1}^n \|v_k w_l\|_{\dot{H}^1}^2. \end{aligned} \tag{G.1}$$

Ahora consideremos  $n = 3$ . Aplicando la segunda fórmula del Teorema 1.17, con  $s = 3/2$  y  $\delta = 1$ , llegamos a

$$\|v_k w_l\|_{\dot{H}^1} \leq 4\sqrt{4\pi} \left[ \|v_k\|_{\dot{H}^1} \|w_l\|_{\dot{H}^{3/2}} + \|w_l\|_{\dot{H}^1} \|v_k\|_{\dot{H}^{3/2}} \right], \tag{G.2}$$

siempre y cuando  $v_k, w_l \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ , lo cual es cierto, ya que  $v_k, w_l \in H^1(\mathbb{R}^3)$  y

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{\dot{H}^{3/2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 |\widehat{v_k}|) (|\xi| |\widehat{v_k}|) d\xi \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\widehat{v_k}|^2 d\xi} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\widehat{v_k}|^2 d\xi} \\ &= \|v_k\|_{\dot{H}^2} \|v_k\|_{\dot{H}^1} \end{aligned} \tag{G.3}$$

$$\leq \|v_k\|_{\dot{H}^2} \|v_k\|_{\dot{H}^1} < +\infty,$$

es decir,  $v_k \in \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ . Análogamente se prueba que  $w_l \in \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ . Por tanto (G.2) se cumple.

Ahora, usando (G.3) en (G.2) y (G.2) en (G.1), arribamos a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{div}(\vec{v} \otimes \vec{w})\|_{L^2}^2 &\leq \frac{(4\sqrt{4\pi})^2}{(2\pi)^3} \sum_{k,l=1}^3 \left[ \|v_k\|_{\dot{H}^1} \sqrt{\|w_l\|_{\dot{H}^2} \|w_l\|_{\dot{H}^1}} + \|w_l\|_{\dot{H}^1} \sqrt{\|v_k\|_{\dot{H}^2} \|v_k\|_{\dot{H}^1}} \right]^2 \\ &\leq \frac{8}{\pi^2} \cdot 2 \cdot \left[ \|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}^2 \sum_{l=1}^3 \|w_l\|_{\dot{H}^2} \|w_l\|_{\dot{H}^1} + \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2 \sum_{k=1}^3 \|v_k\|_{\dot{H}^2} \|v_k\|_{\dot{H}^1} \right] \\ &\leq 2 \left[ \|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}^2 \|w\|_{\dot{H}^2} \|w\|_{\dot{H}^1} + \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2 \|v\|_{\dot{H}^2} \|v\|_{\dot{H}^1} \right] \end{aligned}$$

donde en la tercera línea hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz para vectores en  $\mathbb{R}^3$ . □

---

## Referencias bibliográficas

---

- [1] Bahouri, H., Chemin, J., y Danchin, R. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Springer, New York, Estados Unidos, 2011.
- [2] Brézis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer & Business Media, California, Estados Unidos, 2011.
- [3] Cengel, Y. y Cimbala, J. *MECÁNICA DE FLUIDOS FUNDAMENTOS Y APLICACIONES*. McGraw-Hill, México, Ciudad de México, cuarta edición, 2018.
- [4] Chamorro, D. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz: Teoría de la Medida y Teoría de la Integración*. Asociación Amarun, Francia, París, 2018.
- [5] Evans, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, California, Estados Unidos, segunda edición, 2010.
- [6] Fujita, H. y Kato, T. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16:269–315, 1964.
- [7] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*. Springer, New York, Estados Unidos, segunda edición, 2008.
- [8] Haroske, D. y Triebel, H. *Functional Analysis*. European Mathematical Society, Freiburg, Alemania, primera edición, 2008.
- [9] Heredia, D. *COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN VARIABLE ESPACIAL DE LA SOLUCIÓN DE UNA PERTURBACIÓN NO LOCAL DE LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-ONO*. Quito: EPN, 2021.

- [10] Kato, T. Strong  $L^p$  solutions of the Navier–Stokes equations in  $R^m$  with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187:471–480, 1984.
- [11] Kato, T. y Fujita, H. ON THE NONSTATIONARY NAVIER-STOKES SYSTEM. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 32:243–260, 1962.
- [12] Lemarié-Rieusset, P. *Recent developments in the Navier-Stokes Problem*. CRC Press, París, Francia, 2002.
- [13] Lemarié-Rieusset, P. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century*. CRC Press, París, Francia, 2016.
- [14] Loachamin, G. *Sobre el problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria*. Quito: EPN, 2020.
- [15] Mitrea, D. *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*. Springer, New York, Estados Unidos, segunda edición, 2018.