ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE DECISIÓN EN LA ASIGNACIÓN DE RECURSOS PARA LOGRAR EL BIENESTAR SOCIAL

RELACIÓN ENTRE EL MÁXIMO BIENESTAR DE NASH (MNW) Y LAS ASIGNACIONES LIBRES DE ENVIDIA HASTA CUALQUIER BIEN VALORADO POSITIVAMENTE (EFX) Y LIBRES DE ENVIDIA HASTA CUALQUIER BIEN (EFX_0).

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

ALEXANDER RAFAEL PERACHIMBA GARCÍA

alexander.perachimba@epn.edu.ec

DIRECTOR: IGSIL AUGUSTO DÁVILA MONTENEGRO

igsil.davila@epn.edu.ec

DMQ, AGOSTO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, ALEXANDER RAFAEL PERACHIMBA GARCÍA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Alexander Rafael Perachimba García

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Alexander Rafael Perachimba García, bajo mi supervisión.

Igsil Augusto Dávila Montenegro
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Alexander Rafael Perachimba García

Igsil Augusto Dávila Montenegro

RESUMEN

En este trabajo examinaremos el problema de la asignación justa y eficiente de un conjunto de bienes indivisibles a un conjunto de agentes con preferencias individuales representadas por funciones de valoración aditivas y exploramos la relación entre dos nociones destacadas de equidad: el Máximo Bienestar de Nash (MNW) y la ausencia de envidia hasta cualquier bien valorado positivamente (EFX). Establecemos que una asignación de MNW es siempre EFX en todos los casos que haya como máximo dos valores posibles para los bienes, pero esta implicación no se cumple cuando hay tres o más valores distintos. Resultado de esto, se demuestra la existencia de asignaciones EFX para este tipo de funciones de valoración restringidas. Aunque el problema de calcular de manera eficiente una asignación de MNW para funciones de valoración de dos valores sigue siendo un problema abierto, presentamos un algoritmo novedoso para construir directamente asignaciones EFX en estas instancias [2]. Para concluir, analizamos la iterrogante de si una asignación de MNW implica alguna garantía de EFX para las instancias con funciones de valoración aditivas generales bajo la interpretación de las asignaciones de EFX aproximadas.

Palabras clave: asignación, función de valoración, máximo bienestar de Nash, libre de envidia, aproximación.

ABSTRACT

In this paper we will examine the problem of fair and efficient allocation of a set of indivisible goods to a set of agents with individual preferences represented by additive valuation functions and we will explore the relationship between two prominent notions of fairness: the Nash Maximum Welfare (MNW) and the absence of envy to any positively valued good (EFX). We state that an assignment of MNW is always EFX in all cases where there are at most two possible values for the goods, but this implication does not hold when there are three or more different values. As a result of this, the existence of EFX assignments for this type of restricted valuation functions is demonstrated. Although the problem of efficiently computing an MNW mapping for two-valued valuation functions remains an open problem, we present a novel algorithm to directly construct EFX mappings in these instances [2]. To conclude, we discuss the question of whether an MNW assignment implies any EFX guarantee for instances with general additive valuation functions under the interpretation of approximate EFX assignments.

Keywords: allocation, valuation function, maximum Nash walfare, envy-free, approximation.

Índice general

1. Descripción del componente desarrollado **1**

1.1. Objetivo general 2

1.2. Objetivos específicos 2

1.3. Alcance 2

1.4. Marco teórico 2

1.4.1. Definiciones y notación 4

2. Metodología **16**

2.1. Instancias de 2 valores 34

2.2. Instancias de valor de intervalo 40

3. Resultados, conclusiones y recomendaciones **43**

3.1. Resultados 43

3.2. Conclusiones y recomendaciones 49

Bibliografía **51**

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

Para el desarrollo de este proyecto se considera la siguiente estructura:

- Introducción al problema de asignación de recursos a agentes.
- Presentación de las definiciones y propiedades básicas que intervienen en el problema de asignación de recursos a agentes.
- Presentación y demostración de los teoremas, lemas y proposiciones necesarias para comprender el análisis de las propiedades que tiene el concepto de asignación.
- Análisis de la relación entre el concepto de Máximo bienestar de Nash (MNW) y las propiedades del tipo libre de envidia (EFX) y sus relajaciones aditivas.
- Presentación de algoritmos para el cálculo de asignaciones que cumplen la propiedad libre de envidia para dominios restringidos.
- Finalizamos presentando las conclusiones del análisis realizado así como también algunas preguntas abiertas como indicio para futuras investigaciones.

1.1. Objetivo general

Determinar las relaciones existentes entre asignaciones de Máximo bienestar de Nash (MNW) y los criterios de equidad del tipo libre de envidia (EFX).

1.2. Objetivos específicos

1. Proporcionar una base teórica detallada para el planteamiento del problema y explicación de las definiciones.
2. Desarrollar a detalle los resultados de asignaciones justas, equitativas y libres de envidia de Máximo bienestar de Nash.
3. Reproducir de forma detallada los resultados principales de [2].

1.3. Alcance

Entender y desarrollar en forma detallada las demostraciones de la teoría de asignación de recursos utilizando el máximo bienestar de Nash y los criterios de equidad del tipo libre de envidia. Usaremos como referencia principal [2] y [18].

1.4. Marco teórico

En la vida cotidiana el ser humano afronta cierto tipo de problemas que ameritan tomar una decisión, por ejemplo el que consiste en encontrar cómo repartir un conjunto de trabajos en una empresa a sus colaboradores, o cómo asignar un conjunto de vehículos disponibles para un gobierno a instituciones que requieren de ellos.

El problema de asignar unos recursos a un conjunto de individuos es bastante común, además de que puede ser planteado fácilmente pero no es sencillo darle solución o al menos no una que sea óptima en cierto sentido que se detallará posteriormente.

Por lo general este problema tiene tres componentes que son: un conjunto finito de agentes, un conjunto finito de recursos y las preferencias individuales de los agentes. En este contexto, el grupo de agentes va a hacer referencia a individuos, instituciones, objetos, empresas, entre otros, esto dependerá de la aplicación del problema.

Por otra parte, los recursos disponibles para repartir podrían ser divisibles o indivisibles. En el caso de un recurso divisible, se trataría, por ejemplo, de un terreno, el cual es posible que se reparta a uno o más agentes, en cambio, un recurso indivisible, por ejemplo un auto o una casa, podrá asignarse, a lo sumo, a un agente.

Para resolver el problema es necesario conocer las necesidades, los gustos, los intereses o requerimientos que tienen los agentes sobre los recursos, que son características que están definidas por la última componente del problema, las preferencias individuales. Las preferencias pueden establecerse desde un enfoque cuantitativo o cualitativo. Cuando se establecen desde el enfoque cuantitativo, estas preferencias se definen mediante funciones numéricas denominadas funciones de utilidad. En este trabajo vamos a considerar un efoque cuantitativo de estas preferencias.

Una manera óptima de dar solución al problema es la de buscar la satisfacción tanto individual como grupal. La satisfacción grupal, que se la conoce como eficiencia, busca establecer una solución que beneficie al grupo, garantizando que no existe otra solución que beneficie a un agente sin perjudicar a otro. La satisfacción individual, conocida como justicia, busca soluciones con la propiedad de que cada agente esté conforme con lo que se le ha asignado y no prefiera, no envidie, lo que se le ha asignado a otro. Esta propiedad es conocida como libre de envidia (EF, por sus siglas en inglés). Debido a que la propiedad EF no siempre se satisface, como nos indica [2], se tiene una versión débil de esta propiedad conocida como libre de envidia de hasta un recurso (EF1).

Para capturar la satisfacción grupal se hace uso de las denominadas funciones de bienestar social, que son índices que clasifican todas las asignaciones. En el caso de querer comparar el bienestar social de cada par de soluciones para analizar los criterios de justicia y eficiencia, puede ser complicado debido a que el conjunto de todas las posibles soluciones

puede tener una cardinalidad muy grande. Para facilitar esta búsqueda se requiere reducir el tamaño del espacio de búsqueda y considerar el conjunto que contiene todas las asignaciones que maximizan algunas de estas funciones de bienestar social.

1.4.1. Definiciones y notación

A continuación se definen los conceptos que intervienen en el problema de división de recursos a agentes.

Definición 1.4.1 (Agentes)**.** Es un conjunto finito usualmente denotado por N y hace referencia a individuos, instituciones, objetos, empresas, entre otros, esto dependerá de la aplicación del problema. Se usa la notación $N = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$ donde i representa al agente i y $n = |N|$.

Ejemplo 1.4.1. Son ejemplos de conjuntos de agentes los siguientes:

1. $N = \{1, 2, 3\}$ ={Juan, Pedro, Sofía} donde 1 representa al agente Juan, 2 al agente Pedro y 3 al agente Sofía.

2. $N = \{1, 2, 3, 4\}$ ={Hospital, Escuela, UPC, Municipio} donde 1 representa al agente Hospital, 2 al agente Escuela, 3 al agente UPC y 4 al agente Municipio.

3. $N = \{1, ..., n\} = \{i : i$ es un ministerio de un estado o país$\}$ donde n es el número de estados que tiene el estado o país.

Definición 1.4.2 (Recursos)**.** Es un conjunto finito usualmente denotado por M y hace referencia a bienes, tareas, órdenes, entre otros, que van a ser repartidos. Estos recursos pueden ser divisibles, indivisibles o mixtos. Se usa la notación $M = \{1, 2, ..., j, ..., m\}$ donde j representa el recurso j y $m = |M|$.

Hablamos de un recurso divisible cuando puede asignarse a uno o más agentes, en cambio un recurso indivisible es aquel que puede asignarse, a lo sumo, a un agente. Por otro lado tenemos recursos que pueden ser divisible e indivisibles dependiendo del contexto del problema que se esté tratando, como por ejemplo, el dinero.

Ejemplo 1.4.2. Son ejemplos de conjuntos de recursos los siguientes:

1. El conjunto de parcelas de terreno disponibles para repartir en una herencia a los agentes, es un conjunto de recursos divisibles. En este caso $M = \{1, ..., j, ..., m\}$ donde existen m parcelas disponibles y j representa la parcela j-ésima.

2. El conjunto de autos disponibles para ser repartidos a los agentes, es un conjunto de recursos indivisibles. En este caso $M = \{1, ..., j, ..., m\}$ donde hay m autos disponibles y j representa el auto número j.

3. El conjunto de tareas destinadas a la fabricación de un artículo es un conjunto de recursos indivisibles. En este caso $M = \{1, ..., j, ..., m\}$ donde hay m tareas y j representa la tarea j-ésima.

Definición 1.4.3 (Asignación)**.** Una asignación es una partición de los recursos que puede escribirse como un vector $A = (A_i)_{i \in N}$, que enumera el conjunto A_i de recursos (también llamado paquete de recursos) que recibe el agente i, tal que:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i, j \in N$, y
2. $\bigcup_{i \in N} A_i = M$.

Este vector será la solución a nuestro problema de asignación y se buscará que cumpla con ciertas propiedades referentes a justicia y eficiencia.

Ejemplo 1.4.3. El padre de Juan, Pedro y Sofía ha fallecido por causas naturales y su última voluntad ha sido que sus bienes materiales sean repartidos de manera justa y eficiente entre sus hijos.

Consideramos el conjunto de agentes definido por N={Juan, Pedro, Sofía} y el conjunto de recursos indivisibles, correspondientes a los bienes de la herencia, definido por M={auto, casa, departamento, negocio}. Para abreviar denotaremos a los elementos del conjunto de agentes como N={1,2,3}, donde 1 representa al agente Juan, 2 al agente Pedro y 3 al agente Sofía, y a los elementos del conjunto de recursos por sus iniciales, M={a,c,d,n}.

Son asignaciones posibles las siguientes:

$$A = (A_1, A_2, A_3) = (\{a\}, \{c, d\}, \{n\})$$
$$B = (B_1, B_2, B_3) = (\{n\}, \{a\}, \{c, d\})$$
$$C = (C_1, C_2, C_3) = (\{a, c\}, \{n\}, \{d\})$$
$$D = (D_1, D_2, D_3) = (\emptyset, \{a, c, d, n\}, \emptyset)$$

es decir, la asignación A es la que otorga al agente Juan el recurso auto, al agente Pedro los recursos casa y departamento, y al agente Sofía el recurso negocio. De manera análoga para las asignaciones B y C.

Por otra parte, la asignación D es aquella que otorga al agente 2, es decir al agente Pedro, todos los recursos y no otorga ningún recursos a los dos agentes restantes.

Para este ejemplo podemos hallar $|N|^{|M|} = 3^4 = 81$ combinaciones posibles de los recursos, es decir existen 81 asignaciones posibles.

Observación: El conjunto formado por todas las asignaciones se denota por N^M, es decir un problema puede presentar $|N|^{|M|}$ asignaciones posibles. Uno de los objetivos es seleccionar la asignación que cumpla con criterios de eficiencia y justicia.

Definición 1.4.4 (Preferencias individuales)**.** Son las necesidades, los gustos, los intereses o requerimientos que tienen los agentes sobre los recursos, estas preferencias pueden establecerse desde un enfoque cuantitativo o cualitativo. Cuando se establecen desde el enfoque cuantitativo, estas preferencias se definen mediante funciones numéricas denominadas funciones de utilidad.

Ejemplo 1.4.4. Supongamos que se quiere repartir un tractor y un automóvil, $M = \{$tractor, automóvil$\}$, a dos individuos, un agricultor y un oficinista, $N = \{1, 2\}$ donde 1 es el agente agricultor y 2 el agente oficinista. El agricultor va a preferir el tractor ante el automóvil debido a sus necesidades, de igual manera, el oficinista preferirá el automóvil antes que el tractor.

Lo anterior puede representarse de manera cuantitativa introduciendo la definición de función de valoración.

Definición 1.4.5 (Funciones de valoración o utilidad)**.** En el contexto del problema de asignación de recursos a agentes, cada agente $i \in N$ tiene una función de valoración $v_i : \mathscr{P}(M) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ que le asigna un número real no negativo $v_i(A)$ a cada paquete de recursos $A \subseteq M$ y representa el valor que da el agente i al paquete de recursos A. Estas funciones de valoración cumplen con las siguientes propiedades:

1. No negativa si $v_i(A) \geq 0, \quad \forall A \subseteq M, \forall i \in N$.
2. Positiva si $v_i(A) > 0, \quad \forall A \subseteq M, \forall i \in N$.
3. Aditiva si $v_i(A) = \sum_{g \in A} v_i(g) \quad \forall i \in N$ y $v_i(\emptyset) = 0$, $\forall i \in N$..
4. Tiene presupuesto k, con $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ si $v_i(M) = k$.

Ejemplo 1.4.5. En el contexto del problema planteado en el Ejemplo 1.4.3, definimos las siguientes funciones de utilidad o valoración:

$$v_1(\{a\}) = 1, v_1(\{c\}) = 2, v_1(\{d\}) = 3, v_1(\{n\}) = 0$$
$$v_2(\{a\}) = 4, v_2(\{c\}) = 1, v_2(\{d\}) = 6, v_2(\{n\}) = 3$$
$$v_3(\{a\}) = 0, v_3(\{c\}) = 2, v_3(\{d\}) = 7, v_3(\{n\}) = 1$$

Es decir, el agente 1 valora con 1 al paquete de recursos conformado por el recurso a, con 2 al paquete conformado por el recurso c, con 3 al paquete conformado por el recurso d y con 0 al paquete conformado por el recurso n. Para el resto de agentes se tiene una interpretación similar.

Por abuso de notación consideramos $v_i(\{g\}) = v_i(g), \quad \forall i \in N, \forall g \in M$.

Definición 1.4.6 (Libre de envidia)**.** Cuando buscamos asignaciones justas nos referimos a buscar asignaciones que cumplan con la propiedad libre de envidia. Una asignación $A = (A_i)_{i \in N}$ es libre de envidia (EF) si

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j), \quad \forall i, j \in N.$$

Es decir, el agente i da mayor o igual valor a lo que se le ha asignado a él que a lo que se le ha asignado al agente j.

Ejemplo 1.4.6. En el contexto del problema planteado en el Ejemplo 1.4.3, consideremos que:

$$v_1(a) = 4, v_1(c) = 1, v_1(d) = 3, v_1(n) = 5$$
$$v_2(a) = 7, v_2(c) = 2, v_2(d) = 4, v_2(n) = 3$$
$$v_3(a) = 3, v_3(c) = 8, v_3(d) = 3, v_3(n) = 4$$

y haciendo uso de las asignaciones definidas en el Ejemplo 1.4.3, podemos notar que la valuación de los agentes sobre la asignación A es:

$$\begin{aligned} v_1(A_1) &= v_1(a) \\ &= 4 \\ v_2(A_2) &= v_2(\{c, d\}) \\ &= v_2(c) + v_2(d) \\ &= 6 \\ v_3(A_3) &= v_3(n) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Y el resto de valuaciones:

$$v_1(A_2) = 4,\ v_1(A_3) = 5$$
$$v_2(A_1) = 7,\ v_2(A_3) = 3$$
$$v_3(A_1) = 3,\ v_3(A_2) = 11$$

Notamos que el agente 1 evalúa con 4 lo que se le asigna a través de A, mientras que él evalúa con 5 lo que se le asigna al agente 3 a través de A, es decir, el agente Juan da más utilidad a lo asignado al agente Sofía, pues $v_1(A_3) > v_1(A_1)$, decimos entonces que Juan envidia a Sofía. Se tiene que la asignación A no es libre de envidia.

Por otra parte, tenemos para la asignación B:

$$\begin{aligned} v_1(B_1) = 5, &\quad v_1(B_2) = 4, \quad v_1(B_3) = 4 \\ v_2(B_1) = 3, &\quad v_2(B_2) = 7, \quad v_2(B_3) = 6 \\ v_3(B_1) = 4, &\quad v_3(B_2) = 3, \quad v_3(B_3) = 11 \end{aligned}$$

Se tiene que la asignación B es libre de envidia, pues

$$v_1(B_1) = 5 > v_1(B_2) = v_1(B_3) = 4$$
$$v_2(B_2) = 7 > v_2(B_3) = 6 > v_2(B_1) = 3$$
$$v_3(B_3) = 11 > v_3(B_1) = 4 > v_3(B_2) = 3.$$

Como mencionamos anteriormente, se busca que las asignaciones cumplan con ciertos criterios, uno de ellos es el de eficiencia.

La eficiencia es una característica de una asignación que se mide comparando un par de asignaciones A y B, haciendo uso de las preferencias individuales dadas por las funciones de valoración. Debido al gran número de asignaciones que puede tener un problema, se busca maximizar una relación de satisfacción social sobre todas las asignaciones para seleccionar las "mejores".

Se dice que "A es socialmente preferida a B si existe un agente que mejore la utilidad de su valuación en la asignación B con respecto a lo asignado por A y ningún agente empeora su evaluación en B con respecto a A". Esto está determinado por la definición siguiente.

Definición 1.4.7 (Asignación Pareto dominada)**.** Dadas dos asignaciones A,B $\in N^M$ e $i, j \in N$. A es Pareto dominada por B si:

$$v_i(A_i) \leq v_i(B_i) \text{ y existe al menos un agente, } j\text{, donde } v_j(A_j) < v_j(B_j).$$

Es decir, A es Pareto dominada por B si el agente i da mayor o igual valor a lo que se le asigna en B con respecto a lo que se le asigna en A y además existe al menos un agente, j, que da un valor estrictamente mayor a lo asignado en B con respecto a lo asignado en A. Es decir, por lo menos un agente mejora su valor de lo asignado con B.

Ejemplo 1.4.7. Haciendo uso de las asignaciones definidas en el Ejemplo 1.4.6, notamos que A es Pareto dominada por B, pues todos los agentes mejoran su valuación en B con respecto de A:

$$\begin{array}{rcl} v_1(A_1) = 4 & < & v_1(B_1) = 5 \\ v_2(A_2) = 6 & < & v_2(B_2) = 7 \\ v_3(A_3) = 4 & < & v_3(B_3) = 11 \end{array}$$

Por otra parte, para la asignación C tenemos que:

$$v_1(C_1) = 5$$
$$v_2(C_2) = 3$$
$$v_3(C_3) = 3$$

Es claro ver que la asignación A no es Pareto dominada por la asignación C, pues a pesar que el agente 1 mejora su valuación en C respecto de A, $v_1(C_1) = 5 > v_1(A_1) = 4$, las valuaciones de los agentes 2 y 3 empeoran en C con respecto de A, $v_2(C_2) = 3 < v_2(A_2) = 6$ y $v_3(C_3) = 3 < v_3(A_3) = 4$.

Con el objetivo de obtener la satisfacción social, se busca asignaciones que no sean dominadas por ninguna otra, en el sentido de Pareto.

Definición 1.4.8 (Asignación óptima de Pareto)**.** Dadas dos asignaciones A,B $\in N^M$, decimos que B es óptima de Pareto, PO, si no es Pareto dominada por otra asignación A.

Ejemplo 1.4.8. Consideremos la asignación $D = (D_1, D_2, D_3) = (\emptyset, \emptyset, M)$, i.e., la asignación que reparte todos los recursos al agente 3, y las funciones de valoración definidas en el Ejemplo 1.4.6.

En este caso:

$$\begin{aligned} v_1(D_1) =& 0 \\ v_2(D_2) =& 0 \\ v_3(D_3) =& v_3(a) + v_3(c) + v_3(d) + v_3(n) \\ =& 3 + 8 + 3 + 4 \\ =& 18 \end{aligned}$$

Como la función de utilidad del agente 3 es aditiva, cualquier asignación que mejore a los agentes 1 o 2 perjudicará al agente 3, entonces tenemos que D es PO.

Debido a que un problema puede tener un número elevado de posibles asignaciones y con la finalidad de ordenar las asignaciones haciendo uso de las preferencias individuales de los agentes definiremos relaciones binarias $\succeq$ sobre $\mathscr{P}(M)$, para ello se definen las funciones de bienestar social.

Definición 1.4.9 (Función de bienestar social)**.** Una función de bienestar sobre $\mathscr{P}(M)$ es cualquier función $SW : \mathscr{P}(M) \mapsto \mathbb{R}$, donde el número $SW(A)$ representa el bienestar social de la asignación A. Usamos la notación SW por su siglas en inglés de Social Walfare.

Algunas funciones de bienestar social conocidas son:

- **Bienestar social utilitario:** para todo $A \in \mathscr{P}(M)$, el bienestar social utilitario de A, denotado por $SW_U(A)$, está definido como:

  $$SW_U(A) = \sum_{i \in N} v_i(A_i)$$

  donde, para todo $i \in N$, v_i es la función de utilidad.

  Consideremos las funciones de valoración y asignaciones definidas en el Ejemplo 1.4.6 para plantear los ejemplos de algunas funciones de bienestar social.

  Ejemplo 1.4.9. El bienestar social utilitario para las asignaciones A, B y C es:

  $$\begin{aligned} SW_U(A) &= v_1(A_i) + v_2(A_2) + v_3(A_3) = 14 \\ SW_U(B) &= v_1(B_1) + v_2(B_2) + v_3(A_3) = 22 \\ SW_U(C) &= v_1(C_1) + v_2(C_2) + v_3(C_3) = 11 \end{aligned}$$

  Observamos que la asignación B tiene mayor bienestar social utilitario que las asignaciones A y C.

  Podemos notar que el bienestar social utilitario tiene la desventaja de que ignora por completo las consideraciones de equidad: una asignación en la que un agente valora lo que se le da con 101 y otro valora lo suyo con 0 se puede considerar mejor socialmente que una asignación en la que ambos agentes valoran lo que se les asigna con 50.

- **Bienestar social igualitario:** Se denota por $SW_{egal}(A)$ y se define como la utilidad mínima individual de la asignación A:

  $$SW_{egal}(A) = \min_{i \in N}\{v_i(A_i)\}$$

Ejemplo 1.4.10. En este caso el bienestar social igualitario para las asignaciones A, B y C es:

$$\begin{aligned} SW_{egal}(A) = & \quad \text{mín}\{4,6,4\} = & 4 \\ SW_{egal}(B) = & \quad \text{mín}\{5,7,11\} = & 5 \\ SW_{egal}(C) = & \quad \text{mín}\{5,3,3\} = & 3 \end{aligned}$$

Observamos que la asignación B tiene mayor bienestar social igualitario que las asignaciones A y C.

Notamos que bienestar social igualitario solamente considera al miembro más desfavorecido para determinar que asignación tiene mayor bienestar social.

- **Bienestar social elitista:** se define como la utilidad máxima individual de la asignación A:

$$SW_{elit}(A) = \underset{i \in N}{\text{máx}}\{v_i(A_i)\}$$

Ejemplo 1.4.11. El bienestar social elitista para las asignaciones A, B y C es:

$$\begin{aligned} SW_{elit}(A) = & \quad \text{máx}\{4,6,4\} = & 6 \\ SW_{elit}(B) = & \quad \text{máx}\{5,7,11\} = & 11 \\ SW_{elit}(C) = & \quad \text{máx}\{5,3,3\} = & 5 \end{aligned}$$

Observamos que la asignación B tiene mayor bienestar social elitista que las asignaciones A y C.

Notamos que el bienestar social elitista solamente considera al miembro más favorecido para determinar que asignación tiene mayor bienestar social.

- **Dictador de rango k:** sea $k \leq |N| = n$. Dada una asignación $A = (A_1, ...A_n)$, definamos $v(A) = (v_1, ..., v_n) = (v_1(A_1), ..., v_n(A_n))$. La función de bienestar social dictador de rango k, denotada por $SW_k(A)$, proporciona el valor correspondiente al k-ésimo elemento de la tupla $v(A)$ ordenada, $v^*(A) = (v_1^*, ..., v_n^*)$:

$$SW_k(A) = v_k^*$$

Ejemplo 1.4.12. Notemos que

$$v(A) = (4, 6, 4)$$
$$v(B) = (5, 7, 11)$$
$$v(C) = (5, 3, 3)$$

Las correspondientes tuplas ordenadas serán:

$$v^*(A) = (4, 4, 6)$$
$$v^*(B) = (5, 7, 11)$$
$$v^*(C) = (3, 3, 5)$$

El bienestar social dictador de rango 2 para las asignaciones A, B y C es:

$$SW_2(A) = v_2^*(A) = 4$$
$$SW_2(B) = v_2^*(B) = 7$$
$$SW_2(C) = v_2^*(C) = 3$$

Podemos observar que la asignación B tiene mayor bienestar social dictador de rango 2 que las asignaciones A y C.

- **Bienestar social de Nash:** para todo $A \in \mathscr{P}(M)$, el bienestar social de Nash de A, denotado por $NW(A)$, se define como:

$$SW_{Nash}(A) = NW(A) = \prod_{i \in N} v_i(A_i)$$

Ejemplo 1.4.13. El bienestar social de Nash para las asignaciones A, B y C es:

$$\begin{aligned} NW(A) = &\quad v_1(A_1) \cdot v_2(A_2) \cdot v_3(A_3) = \quad 96 \\ NW(B) = &\quad v_1(B_1) \cdot v_2(B_2) \cdot v_3(B_3) = \quad 385 \\ NW(C) = &\quad v_1(C_1) \cdot v_2(C_2) \cdot v_3(C_3) = \quad 45 \end{aligned}$$

El bienestar social de Nash combina consideraciones de eficiencia y equidad, puesto que se toma en cuenta las valoraciones de todos los agente para tener un bienestar social alto y al mismo tiempo distingue entre las

distintas valoraciones de cada agente.

Estas funciones de bienestar social se usan para clasificar al conjunto N^M que, como mencionamos anteriormente, es el conjunto de todas las posibles asignaciones de un problema, que tiene cardinalidad $|N|^{|M|}$, lo cual nos permite elegir la mejor asignación en base a las preferencias individuales de los agentes.

Definición 1.4.10. Dada una función de bienestar social SW se define la relación de bienestar social $\succeq$ de la siguiente manera:

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(M), \quad A \succeq B \Leftrightarrow SW(A) \geq SW(B)$$

lo cual se interpreta como "la asignación A es más o igualmente preferida que la asignación B si y solo si A tiene mejor o igual bienestar social que B".

Con este criterio podemos observar diferentes tipos de relaciones de bienestar social que son definidas por las distintas funciones de bienestar social.

Ejemplo 1.4.14. Haciendo uso de las asignaciones definidas en el Ejemplo 1.4.6 y considerando los ejemplos 1.4.9-1.4.13, se puede notar que:

$$SW_U(B) > SW_U(A) > SW_U(C) \Rightarrow B \succ A \succ C$$

Es decir, B es más (de manera estricta) preferida que las asignaciónes A y C, lo cual se cumple también para los otros tipos de función de bienestar social que hemos presentado. Por lo tanto decimos que la asignación B es socialmente preferida que las asignaciones A y C.

Definición 1.4.11. Una relación binaria R se llama preorden total sobre un conjunto $X \neq \emptyset$ si cuenta con las siguientes propiedades:

- (Total) $\forall x, y \in X : \quad xRy \vee yRx$
- (Transitiva) $\forall x, y, z \in X : \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRZ$

Proposición 1.4.1. La relación $\succeq$ es un preorden total sobre $\mathscr{P}(M)$.

Demostración.
Sean $A, B, C \in \mathscr{P}(M)$ y una función de bienestar social cualquiera, $SW : \mathscr{P}(M) \mapsto \mathbb{R}$.

- Totalidad: Vamos a probar que $A \succeq B \vee B \succeq A$.

  Como $A, B \in \mathscr{P}(M)$, entonces $SW(A), SW(B) \in \mathbb{R}$, así, por la tricotomía de los números reales, se tiene que:

  $$SW(A) \geq SW(B) \vee SW(B) \geq SW(A)$$

  Entonces, por definición de relación de bienestar social se tiene:

  $$A \succeq B \vee B \succeq A$$

  Por lo tanto $\succeq$ es total.

- Transitividad: Supongamos que $A \succeq B$ y $B \succeq C$. Probemos que $A \succeq C$.

  En efecto, por hipótesis y por definición tenemos que:

  $$SW(A) \geq SW(B) \wedge SW(B) \geq SW(C)$$

  y por transitivad en los números reales:

  $$SW(A) \geq SW(C)$$

  entonces, por definición de relación de bienestar social $A \succeq C$. Por lo tanto $\succeq$ es transitiva y en conclusión es un preorden total sobre $\mathscr{P}(M)$. $\square$

Capítulo 2

Metodología

El método que usaremos es el inductivo-deductivo. En este trabajo abordaremos el problema de asignación de recursos a agentes desde un enfoque cuantitativo, debido a que establecemos las preferencias individuales de los agentes a través de las funciones de valoración.

Definición 2.1 (Función de valoración aditiva)**.** Una función de valoración $v_i : \mathscr{P}(M) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ para el agente $i \in N$, es aditiva si $v_i(A) = \sum_{g \in A} v_i(g)$ para cada conjunto de recursos $A \subset M$.

En este trabajo se prestará particular atención a las siguientes subclases de funciones de valoración aditivas:

- Binarias: $v_i(g) \in \{0, 1\}$ para cada $i \in N$ y $g \in M$.

  Es decir, los agentes solo pueden valorar los recursos con 0 o 1.

- $k-$valor: existe un conjunto V que consiste de $|V| = k$ números reales no negativos tales que $v_i(g) \in V$ para cada $i \in N$ y $g \in M$.

  En este caso el valor que da cualquier agente a los recursos es un número que pertenece al conjunto V.

- Valor de intervalo: para cada agente $i \in N$ existen dos números reales no negativos x_i y y_i tales que $x_i < y_i$, y $v_i(g) \in [x_i, y_i]$ para cada $g \in M$.

Es decir, el valor que da cualquier agente a los recursos es un número que se encuentra en el intervalo $[x_i, y_i]$.

Notar que cualquier función de valoración $2-$valor es una función de valoración binaria.

Ejemplo 2.1. Consideremos el conjunto de agentes $N = \{1, ..., |N|\}$ y el conjunto de recursos $M = \{$auto,casa,departamento,negocio$\} = \{a, c, d, n\}$. Son ejemplos de funciones de valoración aditivas, para el agente 1, los siguientes:

- Binaria: $v_1(a) = 0, v_1(c) = 1, v_1(d) = 1, v_1(n) = 0$
- 4-valor: $v_1(a) = 1, v_1(c) = 4, v_1(d) = 3, v_1(n) = 2$

  En este caso $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- Valor de intervalo: $v_1(a) = 3.5, v_1(c) = 6.7, v_1(d) = 8.9, v_1(n) = 9.2$.

  En este caso $v_1(g) \in [3.5, 9.2] \quad \forall g \in M$

Debido a la dificultad de obtener asignaciones como solución al problema de asignación de recursos a agentes, que cumplan estrictamente con la propiedad libre de envidia (EF), surge la necesidad de considerar relajaciones aditivas de esta propiedad como son las siguientes.

Definición 2.2 (Relajaciones aditivas de EF)**.**

Una asignación $A = (A_i)_{i \in N}$ es:

- Libre de envidia hasta en un bien (EF1) si para cada par $i, j \in N$ con $A_j \neq \emptyset$ existe un recurso $g \in A_j$, tal que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g\})$;
- Libre de envidia hasta cualquier bien (valorado positivamente) (EFX) si para cada par $i, j \in N$ y para cada recurso $g \in A_j$ para cual $v_i(g) > 0$, se cumple que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g\})$;
- Libre de envidia hasta cualquier bien (EFX$_0$) si para cada par $i, j \in N$ y cada recurso $g \in A_j$, se sigue que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g\})$. Esta relajación aditiva de la propiedad libre de envidia admite funciones de valoración cuya imagen pertenece al conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.2. Consideremos el conjunto de agentes $N = \{\text{Juan, Pedro, Sofía}\} = \{1, 2, 3\}$ y el conjunto de recursos definido en el Ejemplo 2.1 $M = \{a, c, d, n\}$.

- Consideremos la asignación $A = (A_1, A_2, A_3) = (\{a\}, \{c, d\}, \{n\})$ y las funciones de valoración definidas en el Ejemplo 1.4.6.

$$v_1(a) = 4, v_1(c) = 1, v_1(d) = 3, v_1(n) = 5$$
$$v_2(a) = 7, v_2(c) = 2, v_2(d) = 4, v_2(n) = 3$$
$$v_3(a) = 3, v_3(c) = 8, v_3(d) = 3, v_3(n) = 4$$

  Podemos observar que el agente 1 envidia al agente 3 ($v_1(A_1) = 4 < 5 = v_1(A_3)$), el agente 2 envidia al agente 1 ($v_2(A_2) = 6 < 7 = v_2(A_1)$), y el agente 3 envidia al agente 2 ($v_3(A_3) = 4 < 11 = v_3(A_2)$). Por lo tanto A no es libre de envidia.

  Sin embargo, se cumple que:

$$v_1(A_1) = 4 > 0 = v_1(A_3 \backslash \{n\})$$
$$v_2(A_2) = 6 > 0 = v_2(A_1 \backslash \{a\})$$
$$v_3(A_3) = 4 > 3 = v_3(A_2 \backslash \{c\})$$

  Es decir, A es libre de envidia hasta en un bien (EF1).

- Consideremos la asignación $A = (A_1, A_2, A_3) = (\{c, n\}, \{d\}, \{a\})$ con las siguientes valoraciones de los agentes a los respectivos paquetes de recursos:

$$v_1(A_1) = 6, \quad v_1(A_2) = 3, \quad v_1(A_3) = 4$$
$$v_2(A_1) = 5, \quad v_2(A_2) = 4, \quad v_2(A_3) = 7$$
$$v_3(A_1) = 9, \quad v_3(A_2) = 3, \quad v_3(A_3) = 5$$

  Notamos que en esta asignación el agente 2 envidia al agente 3 y al agente 1 y el agente 3 envidia al agente 1. Por lo tanto A no es libre de envidia. Además consideramos que $v_i(g) > 0 \ \forall i \in N$ y $\forall g \in M$.

Sin embargo, podemos observar que:

$$v_2(A_2) = 4 > 3 = v_2(A_1 \backslash \{c\})$$
$$v_2(A_2) = 4 > 2 = v_2(A_1 \backslash \{n\})$$
$$v_2(A_2) = 4 > 0 = v_2(A_3 \backslash \{a\})$$
$$v_3(A_3) = 5 > 4 = v_3(A_1 \backslash \{c\})$$
$$v_3(A_3) = 5 \geq 5 = v_3(A_1 \backslash \{n\})$$

Se tiene entonces que A es libre de envidia hasta cualquier bien valorado positivamente (EFX).

- Consideremos la asignación A definida previamente para ejemplificar EFX y las siguientes valoraciones de los agentes a los respectivos paquetes de recursos:

$$\begin{array}{lll} v_1(A_1) = 6, & v_1(A_2) = 3, & v_1(A_3) = 4 \\ v_2(A_1) = 2, & v_2(A_2) = 5, & v_2(A_3) = 7 \\ v_3(A_1) = 9, & v_3(A_2) = 3, & v_3(A_3) = 5 \end{array}$$

  Además, suponemos que el agente 2 valora el recurso n con 0, es decir, $v_2(\{n\}) = 0$.

  De manera similar al caso anterior, esta asignación no es libre de envidia, pero es libre de envidia hasta cualquier bien (EFX_0), ya que existe al menos un bien que es valorado cero y $v_2(A_2) = 5 > 2 = v_2(A_1 \backslash \{n\})$.

Podemos observar que si una asignación $A = (A_1, ..., A_n)$ es EF entonces $\forall i, j \in N$:

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j) \geq v_i(A_j \backslash \{g\}), \quad \forall g \in M$$

Además, para cualquier recurso $g' \in M$ tal que $v_i(g') > 0 \ \forall i \in N$, se tiene que:

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j) > v_i(A_j \backslash \{g'\}).$$

Entonces, por definición, tenemos que EF$\Rightarrow$$\text{EFX}_0$ $\Rightarrow$EFX$\Rightarrow$EF1, pero no se da la implicación en el sentido contrario, pues si A es EF1 no necesariamente se cumple que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g\})$ para cualquier recurso $g \in M$.

Por simplicidad diremos que el agente i es ε hacia j cuando el criterio de $\varepsilon \in \{EF, EF1, EFX, EFX_0\}$ se cumpla para el par ordenado (i, j).

Estamos interesados en identificar las subclases de funciones de valoración para las cuales las asignaciones de máximo bienestar de Nash (MNW) son siempre libres de envidia hasta cualquier bien (EFX_0). Con este propósito se presenta a continuación dos instancias especiales del problema con respecto al bienestar de Nash.

Instancias con bienestar de Nash cero. Cuando hablamos de las asignaciones de máximo bienestar de Nash de una instancia, la interpretación estándar seria incluir todas las asignaciones completas que logran el máximo bienestar de Nash. Cuando es posible lograr un bienestar de Nash positivo esto es cierto. Sin embargo, para el caso extremo de instancias donde todas las asignaciones tiene un bienestar de Nash cero se necesitará un refinamiento.

Definición 2.3 (Asignación de MNW)**.** En este caso, según [13], llamamos asignación de MNW a una asignación que:

1. maximiza el número de agentes con valor positivo, y
2. maximiza el producto de los valores de dichos agentes

Podemos notar que estos requisitos se cumplen por defecto para asignaciones de máximo bienestar de Nash en instancias con bienestar de Nash positivo. También son necesarios estos requisitos porque cuando el bienestar de Nash es cero, la idea de maximizarlo claramente no logra distinguir las asignaciones ”buenas“ en ningún sentido.

Ejemplo 2.3. Considere la instancia definida por la siguiente tabla, en la que se indica la valoración que el agente i da al bien g_j respectivamente.

	g_1	g_2	g_3
agente 1	1	0	0
agente 2	1	0	0
agente 3	0	1	1

Observamos que las funciones de valoración están definidas de la si-

guiente manera:

$$v_1(g_1) = 1, v_1(g_2) = 0, v_1(g_3) = 0$$
$$v_2(g_1) = 1, v_2(g_2) = 0, v_2(g_3) = 0$$
$$v_3(g_1) = 0, v_3(g_2) = 1, v_3(g_3) = 1$$

Notemos que a los dos primeros agentes solo les gusta el bien g_1, y por lo tanto, el bienestar de Nash de cualquier asignación será 0. Sin embargo, no todas las asignaciones son EFX$_0$.

Consideremos las asignaciónes

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) = (\emptyset, \emptyset, \{g_1, g_2, g_3\})$$
$$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) = (\{g_1, g_2\}, \emptyset, \{g_3\})$$
$$\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3) = (\{g_1\}, \emptyset, \{g_2, g_3\})$$

Notemos que los agentes 1 y 2 envidian al agente 3 pues:

$$v_1(A_1) = 0 < v_1(A_3) = 1$$
$$v_2(A_2) = 0 < v_2(A_3) = 1$$

Al eliminar el bien g_2 o g_3 de lo asignado al agente 3 tenemos:

$$v_1(A_3 \backslash \{g_2\}) = v_1(g_1) + v_1(g_3) = 1$$
$$v_2(A_3 \backslash \{g_2\}) = v_2(g_1) + v_2(g_3) = 1$$
$$v_1(A_3 \backslash \{g_3\}) = v_1(g_1) + v_1(g_2) = 1$$
$$v_2(A_3 \backslash \{g_3\}) = v_2(g_1) + v_2(g_2) = 1$$

Claramente la asignación **A** no es EFX$_0$, puesto que los primeros dos agentes envidian al agente 3 incluso luego de remover el bien g_2 o g_3.

Por otra parte, para la asignación **B** tenemos que:

$$v_1(B_1) = 1$$
$$v_2(B_2) = 0$$
$$v_3(B_3) = 1$$

es decir, maximiza el número de agentes con valor positivo.

Sin embargo, no es EFX$_0$ ya que luego de remover el bien g_2 de lo

asignado al agente 1 tenemos que:

$$v_2(B_2) = 0 < v_2(B_1 \backslash \{g_2\}) = 1$$

Es decir, el agente 2 envidia al agente 1 incluso luego de remover el bien g_2.

Para el caso de la asignación C, que maximiza el número de agentes con valor positivo así como el producto de sus valores,

$$\begin{aligned} v_1(C_1) &= 1 \\ v_2(C_2) &= 0 \\ v_3(C_3) &= 1 \\ v_1(C_1) \cdot v_3(C_3) &= 1 \end{aligned}$$

tenemos que es de hecho EFX_0 puesto que la envidia del agente 2 hacia el agente 1 se elimina mediante la eliminación del bien g_1,

$$v_2(C_2) = 0 \geq v_2(C_1 \backslash \{g_1\}) = 0.$$

Instancias con bienes de valor cero. Podemos notar que los bienes de valor cero no afectan el bienestar de Nash de una asignación, sin embargo, estos bienes juegan un papel importante al determinar si una asignación es EFX_0.

Para asignar estos bienes, primero los ignoramos por completo, y calculamos el bienestar de Nash que maximiza la asignación parcial $\mathbf{B}^*$ solo para los bienes restantes (los que son valorados positivamente por algún agente), esto sujeto a los requisitos (1) y (2) en caso de que el bienestar de Nash sea cero. Finalmente asignamos todos los bienes de valor cero a uno de los agentes con el menor valor según la asignación $\mathbf{B}^*$ y obtenemos la asignación completa de MNW $\mathbf{A}^*$.

Nótese que, por definición, $NW(\mathbf{A}^*) = \mathbf{B}^*$.

Ejemplo 2.4. Consideramos el Ejemplo 2.3, pero con un bien g_4 de valor cero , tal que:

	g_1	g_2	g_3	g_4
agente1	1	0	0	0
agente2	1	0	0	0
agente3	0	1	1	0

Donde las funciones de valoración son las mismas que en el Ejemplo 2.3 incluyendo:

$$v_1(g_4) = v_2(g_4) = v_3(g_4) = 0$$

Como en el Ejemplo 2.3, todas las asignaciones tienen bienestar de Nash cero, y por lo tanto necesitamos una asignación que satisfaga (1) y (2). Consideremos las asignaciones:

$$\mathbf{A} = (\{g_1, g_4\}, \emptyset, \{g_2, g_3\})$$
$$\mathbf{B} = (\{g_1\}, \{g_4\}, \{g_2, g_3\})$$

De donde:

$$\begin{aligned} v_1(A_1) &= 1, & v_1(B_1) &= 1 \\ v_2(A_2) &= 0, & v_2(B_2) &= 0 \\ v_3(A_3) &= 1, & v_3(B_3) &= 1 \\ v_1(A_1) \cdot v_3(A_3) &= 1, & v_1(B_1) \cdot v_3(B_3) &= 1 \end{aligned}$$

Tenemos que la asignación **A** es de hecho una asignación que satisface (1) (se maximiza el número de agentes con valor positivo) y (2) (maximiza el valor del producto de los valores). Sin embargo, debido a que se le ha otorgado el bien g_4 al agente 1 (el cual tiene valor 1) en lugar de al agente 2 (que tiene valor 0), el agente 2 envidia al agente 1 incluso luego de su asignación, $v_2(A_2) = 0 < v_2(A_1 \backslash \{g_4\}) = 1$ y, por lo tanto, la asignación no es EFX_0.

Al mover el bien g_4 al agente 2, obtenemos la asignación B, que maximiza el número de agentes con valor positivo, el producto de sus valores, y da el bien g_4 de valor cero al agente con el menor valor entre todos los agentes, y es de hecho EFX_0 ya que el agente 1 solo tiene un bien, $v_2(B_2) = 0 \geq v_2(B_1 \backslash \{g_1\}) = 0$.

A continuación presentamos algunos teoremas para explorar la relación que tienen las propiedades máximo bienestar de Nash (MNW) y libre de envidia y sus relajaciones aditivas.

Teorema 2.1. Para toda instancia binaria, (instancia con funciones de valoración binarias), cualquier asignación de máximo bienestar de Nash (MNW) es libre de envidia hasta cualquier bien (EFX_0).

Demostración.
Considere cualquier instancia binaria
$I = (N, M, (v_i)_{i \in N})$, y sea $\mathbf{B}^* = (B_i)_{i \in N}$ la asignación que maximiza el bienestar de Nash (maximizando el número de agentes con valor positivo y luego el producto de sus valores en caso de que el MNW sea cero) para la subinstancia $I_{>0}$ la cual está compuesta únicamente por los bienes que son valorados positivamente por algún agente. Entonces $\mathbf{A}^*$ se obtiene de $\mathbf{B}^*$ asignando los bienes restantes (que son valorados como cero para todos los agentes) a uno de los agentes con el menor valor para sus propios paquetes.

Observe que en $I_{>0}$, $\mathbf{B}^*$ debe ser tal que todos los agentes con valor positivo obtienen bienes que valoran como 1 y todos los agentes con valor cero obtienen un conjunto vacío. Supongamos de otro modo que algún agente i obtiene un bien g tal que $v_i(g) = 0$. Entonces, al mover g a algún agente $j \neq i$ con $v_j(g) = 1$ podemos incrementar estrictamente el producto de los valores de los agentes que tienen un valor positivo o el número de agentes que obtienen un valor positivo, una contradicción. Por tanto, tenemos que $v_i(B) = |B_i|$.

A continuación mostramos que al asignar todos los bienes de valor cero a algún agente $i^* \in arg \min_{i \in N} v_i(B_i)$ tenemos que $\mathbf{A}^*$ es EFX_0. Distinguimos entre dos casos dependiendo de si $NW(\mathbf{B}^*) > 0$ o $NW(\mathbf{B}^*) = 0$.

<u>Caso I:</u> $NW(\mathbf{B}^*) > 0$.

Considere un par de agentes i y j. Si $\min_{g \in B_j} v_i(g) = 1$, entonces i debe ser EFX_0 hacia j ya que i es EF1 hacia j, y las dos nociones coinciden. Entonces, de ahora en adelante asumimos que existe un bien en B_j que i valora como 1, ya que de otro modo i sería trivialmente EFX_0 hacia j, y por lo tanto, $|B_j| \geq 2$.

Mostraremos que i es de hecho libre de envidia hacia j, y por lo tanto, $v_i(B_i) \geq v_i(B_j)$. Supongamos por absurdo que $v_i(B_i) < v_i(B_j)$. Como existe un bien $g \in B_j$ tal que $v_i(g) = 0$, tenemos que $v_i(B_j) < v_j(B_j)$. Por el hecho de que $v_i(B_i) = |B_i|$ y $v_j(B_j) = |B_j|$, obtenemos así que $|B_j| \geq |B_i|+2$. Ahora, defina una nueva asignación moviendo un bien en B_j que i valore como 1 de j a i. El producto de los valores de los dos agentes en la nueva asignación es igual a:

$$(|B_i| + 1)(|B_j| - 1) = |B_i||B_j| + |B_j| - |B_i| - 1 \geq |B_i||B_j| + 1.$$

Dado que los paquetes de los agentes restantes no han cambiado, la nueva asignación tiene un bienestar de Nash estrictamente más alto comparado con $\mathbf{B}^*$, lo cual es una contradicción.

<u>Caso II:</u> $NW(\mathbf{B}^*) = 0$.

Considere un par de agentes i y j. Si $B_i = \emptyset$ y $B_j = \emptyset$, entonces están trivialmente libres de envidia entre si. También, si $B_i \neq \emptyset$ y $B_j \neq \emptyset$, podemos mostrar que son EFX_0 entre si adaptando nuestros argumentos para el caso anterior. Por lo tanto, ahora nos enfocamos en el caso donde $B_i = \emptyset$ y $B_j \neq \emptyset$. Si $|B_j| = 1$, entonces i es trivialmente EFX_0 hacia j. Por lo tanto, asuma que $|B_j| \geq 2$. Decimos que $\max_{g \in B_j} v_i(g) = 0$, y por lo tanto i es libre de envidia hacia j. Supongamos de otra manera que existe un bien $g \in B_j$ tal que $v_i(g) = 1$. Entonces, al mover g de j hacia i podemos obtener un bienestar de Nash positivo si i es el único agente con valor cero, o podemos incrementar el número de agentes con valor positivo en caso de que el bienestar de Nash permanezca igual a 0; ya que $v_j(B_j) = |B_j| \geq 2$, j todavía tiene valor positivo incluso luego de perder g.

En cualquier caso, concluimos que $\mathbf{B}^*$ es EFX_0, y en consecuencia $\mathbf{A}^*$ también es EFX_0. □

Teorema 2.2. Toda asignación de máximo bienestar de Nash (MNW) es libre de envidia hasta un bien (EF1) para instancias con funciones de valoración aditivas y bienes indivisibles.

Demostración.
Sea A una asignación de MNW. Primero vamos a suponer que $NW(\mathbf{A}) > 0$. Supongamos por absurdo que A no es EF1, y que el agente i envidia al agente j incluso luego de remover cualquier bien del paquete de recursos

asignado a j.

Sea $g^* = \underset{g \in A_j, v_i(g)>0}{\arg\min} \left\{ \frac{v_j(g)}{v_i(g)} \right\}$. Notemos que g^* está bien definido pues que el agente i envidie al agente j implica que el agente i tiene al menos un bien valorado positivamente en A_j. Sea $\mathbf{A}'$ la asignación obtenida luego de mover g^* de lo asignado al agente j en $\mathbf{A}$ al agente i. Vamos a mostrar ahora que $NW(\mathbf{A}') > NW(\mathbf{A})$, lo que implica la contradicción de que la asignación $\mathbf{A}$ es de MNW.

Específicamente, vamos a mostrar que $\frac{NW(\mathbf{A}')}{NW(\mathbf{A})} > 1$. Este cociente está bien definido porque hemos supuesto que $NW(\mathbf{A}) > 0$.

Notemos que $v_k(A'_k) = v_k(A_k) \quad \forall k \in N \backslash \{i, j\}$, $v_i(A'_i) = v_i(A_i) + v_i(g^*)$, y $v_j(A'_j) = v_j(A_j) - v_j(g^*)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{NW(\mathbf{A}')}{NW(\mathbf{A})} > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left[1 - \frac{v_j(g^*)}{v_j(A_j)}\right]\left[1 + \frac{v_i(g^*)}{v_i(A_i)}\right] > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{v_j(g^*)}{v_i(g^*)}(v_i(A_i) + v_i(g^*)) < v_j(A_j) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la última implicación se obtiene aplicando operaciones algebraicas simples. Por nuestra elección de g^*, tenemos que

$$\frac{v_j(g^*)}{v_i(g^*)} \leq \frac{\sum_{g \in A_j} v_j(g)}{\sum_{g \in A_j} v_i(g)} = \frac{v_j(A_j)}{v_i(A_j)} \tag{2.2}$$

Ahora, debido a que el agente i envidia al agente j incluso luego de remover el bien g^* del paquete otorgado a j, tenemos que

$$v_i(A_i) + v_i(g^*) < v_i(A_j) \tag{2.3}$$

Multiplicando las ecuaciones (2.2) y (2.3) se obtiene la inecuación (2.1) deseada, y por lo tanto se tiene la contradicción.

Ahora abordamos el caso especial en el que $NW(\mathbf{A}) = 0$. Sea S el conjunto de agentes con valor positivo en la asignación $\mathbf{A}$. Entonces, por definición de MNW, S es el conjunto con el mayor número de agentes que se les puede dar una valoración positiva.

Por la demostración para el caso de $NW(\mathbf{A}) > 0$, sabemos que no existe envidia hasta un bien entre los agentes en S porque $\mathbf{A}$ es una asignación

de MNW sobre estos agentes, y bajo **A** el producto de las valoraciones para los agentes en S es positiva.

Además, como los agentes en $N \backslash S$ no reciben ningún bien, solo necesitamos demostrar que el agente $i \in N \backslash S$ no envidia hasta un bien al agente $j \in S$. Supongamos hacia una contradicción que sí lo hace. Escogemos $g_j \in A_j$ tal que $v_j(g_j) > 0$. Tal bien existe porque sabemos que $v_j(A_j) > 0$. Debido a que el agente i envidia hasta en un bien al agente j, tenemos que $v_i(A_j \backslash \{g_j\}) > v_i(A_i) = 0$.

Por lo tanto, existe un bien $g_i \in A_j \backslash \{g_j\}$ tal que $v_i(g_i) > 0$. Sin embargo, en el este caso moviendo el bien g_i del agente j al agente i damos una valoración positiva al agente i mientras se conserva la valoración positiva del agente j (porque el agente j sigue teniendo el bien g_j con $v_j(g_j) > 0$. Esto contradice el hecho de que S es el conjunto con el mayor número de agentes para los que se puede dar valoración positiva. Por lo tanto, la asignación de MNW **A** es EF1.

A continuación presentamos otro resultado con el fin de mostrar que maximizar el bienestar de Nash produce una asignación EFX_0 para todas las instancias de 2 valores. Notar que la instancia de 2 valores con valores $a > 1$ y $b = 0$ es equivalente a una instancia binaria (mediante la normalización de los valores). Por lo tanto, debemos centrarnos solo en instancias con valores positivos. En este caso libre de envidia hasta cualquier bien (EFX_0) coincide con libre de envidia hasta cualquier bien valorado positivamente (EFX).

Para exponer el teorema que indica la relación entre el máximo bienestar de Nash y la propiedad EFX_0 presentamos la siguiente definición.

Definición 2.4. Bien de tipo T_{xy}] Decimos que un bien $g \in M$ es de tipo T_{xy} si i y j tienen valores $v_i(g) = x$ y $v_j(g) = y$ para $i, j \in N$, respectivamente.

Ejemplo 2.5. Sean un conjunto de agentes $N = \{1, 2\}$ y un conjunto de recursos $M = \{g_1, g_2\}$. Consideremos las funciones de valoración tales que:

$$v_1(g_1) = 3, \quad v_2(g_1) = 5$$

Observamos que el bien g_1 es valorado con 3 por el agente 1 y con 5 por

el agente 2, entonces g_1 es de tipo T_{35}.

Teorema 2.3. Para cualquier instancia de 2 valores con valores positivos (instancia con funciones de valoración de 2 valores positivos), cualquier asignación de máximo bienestar de Nash (MNW) es libre de envidia hasta cualquier bien definido positivamente (EFX).

Demostración.
Sea $a > b > 0$ y considere una instancia de 2 valores $I = (N, M, (v_i)_{i \in N})$ en donde $v_i(g) \in \{a, b\}$ para todo $i \in N$ y $g \in M$. Sean i y j dos agentes cualesquiera a los que se les dan los conjuntos de bienes A_i y A_j en una asignación de MNW $\mathbf{A}^*$; notemos que, por la Definición 2.4, hay cuatro tipos diferentes de bienes: T_{aa}, T_{ab}, T_{ba} y T_{bb}. Si $\min_{g \in A_j} v_i(g) = a$ o $\max_{g \in A_j} v_i(g) = b$, entonces i es EFX hacia j ya que i es EF1 hacia j, por el Teorema 2.2, y las dos nociones coinciden en este caso para el par (i, j). Por lo tanto, de ahora en adelante, supondremos que $\min_{g \in A_j} v_i(g) = b$ y $\max_{g \in A_j} v_i(g) = a$, lo que implica que $|A_j| \geq 2$ y A_j incluye al menos un bien de tipo T_{ba} o T_{bb}.

<u>Caso I:</u> Hay al menos un bien de tipo T_{bb} en A_j.

<u>Subcaso (a):</u> A_j no incluye ningún bien de tipo T_{ab}. Suponga, hacia una contradicción, que i no es EFX hacia j: $v_i(A_i) < v_i(A_j) - b$. Puesto que $v_j(g) \geq v_i(g)$ para todo $g \in A_j$, tenemos que $v_j(A_j) \geq v_i(A_j)$. Ahora definimos la nueva asignación $\mathbf{A}'$ moviendo un bien $h \in A_j$ de tipo T_{bb} de j a i. En esta nueva asignación, el producto de los valores de i y j es:

$$\begin{aligned}
(v_i(A_i) + b)(v_j(A_j) - b) &= v_i(A_i)v_j(A_j) + b(v_j(A_j) - v_i(A_i) - b) \\
&\geq v_i(A_i)v_j(A_j) + b(v_i(A_j) - v_i(A_i) - b) \\
&> v_i(A_i)v_j(A_j).
\end{aligned}$$

Dado que la asignación de todos los demás agentes no ha cambiado, $v_k(A'_k) = v_k(A_k) \quad \forall k \in N \backslash \{i, j\}$, la nueva asignación logra un bienestar de

Nash estrictamente mayor que $\mathbf{A}^*$,

$$\begin{aligned}
NW(\mathbf{A}') &= \prod_{k \in N} v_k(A'_k) \\
&= \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} v_k(A'_k) \cdot (v_i(A_i) + b)(v_j(A_j) - b) \\
&> \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} v_k(A_k) \cdot v_i(A_i) v_j(A_j) \\
&> \prod_{k \in N} v_k(A_k) \\
&= NW(\mathbf{A}^*)
\end{aligned}$$

lo que genera una contradicción.

<u>Subcaso(b):</u> A_j incluye al menos un bien g de tipo T_{ab}. Argumentaremos sobre la estructura del conjunto A_i. Si A_i incluye cualquier bien x de tipo T_{aa}, T_{ba} o T_{bb}, entonces al intercambiar g con x, obtenemos una asignación con un bienestar de Nash estrictamente mayor, lo que contradice la selección de $\mathbf{A}^*$. Por ejemplo, si x es de tipo T_{aa}, entonces en la nueva asignación (después de intercambiar x y g) el agente i tiene exactamente el mismo valor, pero el valor del agente j ha aumentado estrictamente en una cantidad $a - b > 0$. Se puede verificar que lo mismo vale para los otros dos tipos. Por lo tanto, A_i debe incluir solo bienes de tipo T_{ab}, lo que implica que $v_i(A_i) = |A_i|a$.

Hacia una contradicción, suponga que i no es EFX hacia j. Si $|A_j| \leq |A_i| + 1$, ya que A_j incluye algún bien h para la cual $v_i(h) = b$, tenemos que

$$v_i(A_j) \leq (|A_j| - 1)a + b \leq |A_i|a + b = v_i(A_i) + b,$$

i.e., el agente i es EFX hacia j. Entonces, debe ser $|A_j| \geq |A_i| + 2$. Creamos una nueva asignación moviendo un bien $g \in T_{ab}$ de j a i. El producto de los valores de i y j se convierte en

$$(v_i(A_i) + a)(v_j(A_j) - b) = v_i(A_i)v_j(A_j) + av_j(A_j) - bv_i(A_i) - ab.$$

Dado que $v_j(A_j) \geq |A_j|b \geq (|A_i| + 2)b$ y $v_i(A_i) = |A_i|a$, tenemos que

$$av_j(A_j) - bv_i(A_i) - ab \geq (|A_i| + 2)ab - |A_i|ab - ab = ab > 0.$$

Dado que los paquetes de los demás agentes no han cambiado, tenemos que la nueva asignación tiene un bienstar de Nash estrictamente mayor que $\mathbf{A}^*$, lo que contradice su elección.

<u>Caso II:</u> No hay bienes de tipo T_{bb} en A_j.

Entonces A_j incluye al menos un bien de tipo T_{ba}. Si A_j incluye al menos un bien de tipo T_{ab}, entonces, como argumentams en el Caso I(b) anteriro, para que $\mathbf{A}^*$ sea una asignación de MNW, A_i no puede incluir ningún bien de tipo T_{aa}, Tba o T_{bb}. Como resultado, A_i incluye solo bienes de tipo T_{ab} y, al reproducir el análisis usado en el Caso I(b), se deduce que $\mathbf{A}^*$ es EFX.

Por lo tanto, podemos suponer que A_j incluye solamente bienes de tipo T_{ba} y T_{aa}. Esto implica que $v_j(A_j) = |A_j|a$. Suponga hacia una contradicción que i no es EFX hacia j: $v_i(A_i) < v_i(A_j) - b$. Como A_j contiene al menos un bien que i valora como b, tenemos también que $v_i(A_j) \leq (|A_j| - 1)a + b$. Combinando las dos últimas expresiones, obtenemos que

$$v_i(A_i) + a < |A_j|a = v_j(A_j).$$

Ahora, considere la asignación $\mathbf{A}'$ que es obtenida de $\mathbf{A}^*$ moviendo un bien de tipo T_{aa} de j a i. Sabemos que tal elemento existe ya que $\max_{g \in A_j} v_i(g) = a$. Usando la última desigualdad, el producto de los valores de i y j en la nueva asignación es

$$\begin{aligned}(v_i(A_i) + a)(v_j(A_j) - a) &= v_i(A_i)v_j(A_j) + a(v_j(A_j) - v_i(A_i) - a) \\ &> v_i(A_i)v_j(A_j)\end{aligned}$$

lo que combinado con el hecho que los paquetes de los demás agentes no han cambiado,$v_k(A'_k) = v_k(A_k) \quad \forall k \in N \backslash \{i, j\}$, contradice la elección de $\mathbf{A}^*$ como asignación de MNW.

$$
\begin{aligned}
NW(\mathbf{A}') &= \prod_{k\in N} v_k(A'_k) \\
&= \prod_{k\in N\setminus\{i,j\}} v_k(A'_k)\cdot(v_i(A_i)+a)(v_j(A_j)-a) \\
&> \prod_{k\in N\setminus\{i,j\}} v_k(A_k)\cdot v_i(A_i)v_j(A_j) \\
&> \prod_{k\in N} v_k(A_k) \\
&= NW(\mathbf{A}^*)
\end{aligned}
$$

En cualquier caso, concluimos que $\mathbf{A}^*$ debe ser EFX. □

Según [13], existen instancias de 3 valores en las que ninguna asignación de MNW es EFX. Además, incluimos aquí una instancia más simple, que muestra que la implicación máximo bienestar de Nash implica una las relajaciones aditivas de libre de envidia EFX o EFX$_0$, ($MNW \Rightarrow \{EFX, EFX_0\}$), ya no es cierta incluso para instancias de valor de intervalo en las que la longitud del intervalo es casi cero.

Ejemplo 2.6. Sea ε una constante positiva pequeña y considere la instancia de 3 valores $I = (N, M, (v_i)_{i\in N})$ donde: $N = \{1, 2\}$, $M = \{g_1, g_2, g_3\}$ y con valores como se muestra en la siguiente tabla:

	g_1	g_2	g_3
agente1	1-ε	1	1+ε
agente2	1	1-ε	1+ε

Es una instancia de 3 valores $\{1-\varepsilon, 1, 1+\varepsilon\}$. Claramente, es también una instancia de valor de intervalo de longitud $1+\varepsilon-(1-\varepsilon) = 2\varepsilon$, que puede ser arbitrariamente cercana a cero seleccionando ε arbitrariamente pequeño.

Consideremos las asignaciones:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A_1} &= (\{g_2\}, \{g_1, g_3\}) \\
\mathbf{A_2} &= (\{g_2, g_3\}, \{g_1\})
\end{aligned}
$$

Notamos que estas asignaciones logran el máximo bienestar de Nash de

$$NW(\mathbf{A_1}) = v_1(g_2)v_2(\{g_1, g_3\}) = 1 \cdot (2+\varepsilon) = 2+\varepsilon$$
$$NW(\mathbf{A_2}) = v_1(\{g_2, g_3\})v_2(g_1) = (2+\varepsilon) \cdot 1 = 2+\varepsilon$$

cuando cualquier otra asignación tiene un bienestar de Nash de $(1-\varepsilon+1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = 2(1-\varepsilon)$ o $(2-\varepsilon)(1+\varepsilon) = 2+\varepsilon-\varepsilon^2$.

En $\mathbf{A_1}$ tenemos que el agente 1 no es EFX hacia 2 pues lo envidia incluso luego de remover el bien g_1, $v_1(g_2) = 1 < v_1(g_3) = 1+\varepsilon$.

Así mismo, en $\mathbf{A_2}$, el agente 2 no es EFX hacia 1 puesto que lo envidia incluso luego de eliminar el bien g_2, $v_2(g_1) = 1 < v_2(g_3) = 1+\varepsilon$.

Puesto que es de nuestro interés conocer las relaciones entre el máximo bienestar de Nash y la propiedad libre de envidia y sus relajaciones aditivas, es conveniente mencionar que solo son de importancia los algoritmos que logran calcular asignaciones con estas características en tiempo polinomial.

Definición 2.5 (Algoritmo de tiempo polinomial)**.** En computación, cuando el tiempo de ejecución de un algoritmo (mediante el cual se obtiene una solución al problema) es menor que un cierto valor calculado a partir del número de variables implicadas (generalmente variables de entrada) usando una fórmula polinómica, se dice que dicho problema se puede resolver en un tiempo polinómico P.

Teorema 2.4. Para instancias binarias, el cálculo de una asignación MNW (y, por lo tanto, una asignación EFX_0) se puede realizar en tiempo polinomial.

Demostración.
Considere una instancia binaria $I = (N, M, (v_i)_{i \in N})$ y sea $I_{>0}$ la subinstancia que consiste solo de los bienes que son valorados positivamente por algún agente. Dada la asignación B^* de MNW para $I_{>0}$, podemos obtener la asignación A^* de MNW para I aumentando B^* de modo que todos los bienes de valor cero se entreguen al agente con el mínimo valor de acuerdo a B^*. Entonces, queda por calcular B^* en I_0.

Para ello, utilizamos el algoritmo voraz *ALG-BINARY* de [9] que genera una asignación que maximiza el bienestar de Nash para la instancia

binaria. Sea B la asignación que genera *ALG-BINARY* cuando se da como entrada $I_{>0}$. Si $NW(\mathrm{B}) > 0$, entonces $\mathrm{B}^* = \mathrm{B}$ es también EFX_0 por el Teorema 2.1.

Sin embargo, si $NW(\mathrm{B}) = 0$, en el caso de que todas las asignaciones tienen bienestar de Nash cero, B podría no ser una asignación de MNW en nuestro sentido, i.e., una asignación que maximiza el número de agentes con valor positivo y luego el producto de sus valores. Por lo tanto, B puede no ser EFX_0. Para evitar esto, definimos un grafo bipartito que consta de nodos correspondientes a los agentes en la izquierda y nodos correspondientes a los bienes en la derecha, mientras que existe una arista entre un agente y un bien si el agente tiene un valor de 1 para el bien.

Al calcular una coincidencia bipartita máxima en este grafo, se garantiza que el número de agentes con valor positivo es maximizado. Luego, ejecutamos *ALG-BINARY* sobre la subinstancia restringida de I_0 donde el conjunto de agentes incluye solo los que participan en la coincidencia máxima, de modo que el producto de sus valores (que ahora será positivo) también se maximiza. Esto produce la asignación deseada B^* que maximiza el bienestar de Nash para $I_{>0}$ en la que los agentes que no participaron en el emparejamiento máximo obtienen un conjunto vacío.□

Hemos mostrado que cualquier asignación de Máximo bienestar de Nash es también EFX_0 para instancias en la que los agentes tienen funciones de valoración aditivas de 2 valores. Sin embargo, más allá del caso binario, es aún un problema abierto el determinar si es posible calcular asignaciones de este tipo.

En este trabajo eludimos esos casos y procedemos a analizar los algoritmos que logran calcular asignaciones EFX_0 (que podrían o no alcanzar el Máximo bienestar de Nash) para instancias de 2 valores e instancias de valor de intervalo.

2.1. Instancias de 2 valores

Consideramos instancias de 2 valores con valores $\{a, b\}$ tales que $a > b \geq 0$. El algoritmo propuesto por [2] denominado MATCH&FREEZE procede en rondas y mantiene un conjungo L de agentes *activos*, que inicialmente contiene a todos los agentes.

En cada ronda, cada uno de los agentes activos recibe exactamente uno de los bienes restantes, con la posible excepción de la última ronda en que pueda que no queden suficientes bienes disponibles para todos los agentes. El algoritmo termina cuando todos los bienes han sido asignados.

Para determinar que bien obtiene cada agente activo durante una ronda, creamos un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$ con los nodos correspondientes a los agentes activos L por un lado y los bienes disponibles R por otro lado. Un arco entre un agente activo i y un bien g, existe si y solo si $v_i(g) = a$. Primero calculamos una coincidencia máxima sobre este grafo. Luego cada agente obtiene el bien con el que está emparejado. Si hay agentes que no están emparejados con ningún bien y todavía hay bienes disponibles, los agentes no emparejados reciben un bien disponible arbitrariamente cada uno (sujeto a disponibilidad).

Hay dos razones posibles por las que un agente i no es emparejado con ningún bien en una ronda: (1) no tiene valor a ara ningún bien (solo b), o (2) la coincidencia máxima es tal que todos los bienes para los que su valor es a se dan a otros agentes. El caso (1) no afecta si la asignación final será EFX_0, pero el caso (2) es crucial. Esto se debe a que el agente i ahora podría tener un valor mucho menor para su propio paquete en comparación con el valor de los paquetes de algunos agentes que *acaban de recibir* un bien cada uno que i valora como a. Sea Z el conjunto de estos agentes. Para compensar la distancia, el agente i posiblemente debería recibir múltiples bienes de valor b mientras que todos los agentes en Z deben *congelarse* durante una serie de rondas subsiguientes dependiendo de la relación a/b.

Algorithm 1 MATCH&FREEZE $(N, M, (v_i)_{i \in N})$

Input: Una instancia de 2 valores usando los valores $a, b (a > b \geq 0)$

```
L ← N
R ← M
l = (1, 2, ..., n)
while R ≠ ∅ do
    Construya el grafo bipartito G = (L ∪ R, E).
    Calcule un emparejamiento máximo en G.
    for cada para emparejado (i, j) do
        Asignar el bien g al agente i.
        Remover g de R.
    end for
    for cada agente activo sin emparejar i w.r.t. l do
        Asignar un bien arbitrario sin asignar g a i.
        Remover g de R.
    end for
    Construya el conjunto F de agentes que necesitan congelarse.
    Remueva los agentes de F de L para las siguientes ⌊a/b−1⌋ rondas.
    Colocar los agentes de F al final de l.
end while
return la asignación resultante A.
```

Definimos el conjunto F de agentes que necesitan congelarse al final de la ronda r para que esté formado por todos aquellos agentes que deben quedar inactivos porque han obtenido demasiado valor desde la perspectiva de otros agentes (similar al Caso (2) anterior). Formalmente, para cada agente activo i, sea g_i el bien que obtiene en la ronda r. Comenzamos estableciendo $F = \{i \in L | \exists j \in L : v_j(g_i) = a, v_j(g_j) = b\}$. Entonces, iterativamente, siempre que haya un agente $i \in L \backslash F$ tal que existe $j \in F$ con $v_j(g_i) = a$, también agregamos i a F. Cada agente en F permanecerá *congelado* durante las siguientes $\lfloor a/b - 1 \rfloor$ rondas. En el caso que $b = 0$, usamos la interpretación $\lfloor a/b - 1 \rfloor = +\infty$ en cuyo caso los agentes en F permanecen congelados para siempre. Aprovechando las propiedades de las coincidencias máximas utilizadas para asignar bienes podemos mostrar que ningún agente en F se volverá envidioso mientras esté congelado, y que F es siempre un subconjunto estricto de L. Esto último significa que hay al menos un agente activo (no congelado) en cualquier momento y, por lo tanto, el algoritmo terminará después de un máximo de m rondas.

Teorema 2.5. Para cualquier instancia de 2 valores, MATHC&FREEZE calcula una asignación EFX_0 en tiempo polinomial.

Demostración.
Sea $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in N}$ la asignación generada por
MATCH&FREEZE cuando se da como entrada una instancia de 2 valores $I = (N, M, (v_i)_{i \in N})$ tal que $v_i(g) \in \{a, b\}, a > b \geq 0$, para todo $i \in N$ y $g \in M$. Para cualquier agente i, sea r_i la ronda en la que se asignaron los últimos bienes de valor a al agente i. Necesitaremos los dos lemas siguientes.

Lema 2.1. Para todo agente i, se cumple que:

- Se le asignó un bien por el cual tiene valor a en cada una de las rondas $1, 2, ..., r_i - 1$.
- Puede congelarse solo al final de la ronda r_i y solo si durante esa ronda obtiene un bien para el cual tiene un valor de a.
- Puede congelarse como máximo una vez. Después de la congelación, tiene un valor b para cada uno de los bienes restantes.

Demostración del Lema 2.1. Para la primera parte del lema, suponga que al agente i se le asignó un bien que valora como b en alguna ronda $r < r_i$. Esto significaría que el agente i quedó sin emparejar en la ronda r. Sin embargo, en la ronda $r_i > r$ todavía había bienes disponibles que i valoraba como a. En consecuencia, el agente i también podría haber sido emparejado en la ronda r, lo que significa que no usamos una coincidencia máxima, una contradicción.

Para la segunda y tercera parte del lema, considere un agente i que se congeló al final de alguna ronda r. Dado que el agente $i = i_0$ se congeló, existen distintos agentes $i_1, ..., i_k, (k \leq n)$ tales que $v_{i_l}(g_{i_{l-1}}) = a$ para $l \in [k]$, y $v_{i_k}(g_{i_k}) = b$. Note que el agente i_k no fue emparejado en la ronda r. Veamos ahora que los siguientes casos son imposibles:

- $v_i(g_i) = b$. Esto significa que el agente $i = i_0$ tampoco fue emparejado en la ronda r, y fuera de los agentes $i_0, ..., i_k$ como máximo $k - 1$ fueron emparejados en la ronda r. Sin embargo, dado que $v_{i_l}(g_{i_{l-1}}) = a$

para todo $l \in [k]$, podríamos emparejar el agente i_l al bien g_{l-1}, y obtenemos un emparejamiento de tamaño k en lugar de como máximo $k-1$, una contradicción. Por lo tanto, debe ser $v_i(g_i) = a$.

- $r > r_i$. Por la definición de r_i, al agente i se le debe haber asignado un bien que valora como b en la ronda r, lo cual es imposible como mostramos anteriormente. Por lo tanto, debe ser $r \leq r_i$.

- $r < r_i$. Según la definición de r_i, al final de la ronda r existe un bien no asignado g^* tal que $v_i(g^*) = a$. Dado que $v_{i_k}(g_{i_k}) = b$, k de los agentes $i_0, ..., i_k$ fueron emparejados en la ronda r. Sin embargo, al emparejar el agente i_l al bien g_{l-1} para cada $l \in [k]$, e $i = i_0$ para g^*, podemos obtener un mayor emparejamiento de tamaño k_1 en lugar de k, una contradicción. Por lo tanto, debe ser $r \leq r_i$.

Para los dos últimos casos, tenemos que el agente i puede solo congelarse en la ronda $r = r_i$, y por la definición de r_i, el valor de i para cualquiera de los bienes restantes es b.

Lema 2.2. Si al comienzo de alguna ronda $r > r_i$ un agente activo i es libre de envidia hacia el agente j, entonces el agente i será EFX_0 hacia el agente j al final del algoritmo.

Demostración del Lema 2.2. Por la segunda parte del Lema 2.1, el agente i está activo durante todas las rondas después de $r > r_i$ hasta el final del algoritmo, e i tiene valor de b para todos los bienes restantes. En consecuencia, al agente i se le asignará un bien que valora como b en cada ronda subsiguiente, excepto potencialmente en la última ronda (durante la cual es posible que no obtenga ningún bien), mientras que el valor de i para el paquete del agente j puede incrementarse como máximo a b también en cada ronda subsiguiente. En consecuencia, cuando el algoritmo termina, $v_i(A_j)$ puede ser como máximo b más que $v_i(A_i)$.

Es fácil ver que el algoritmo termina en tiempo polinomial. Si nunca se congela ningún agente, entonces el algoritmo termina después de un máximo de $\lceil m/n \rceil$ rondas. De lo contrario, sea r la primera ronda en la cual un agente es congelado, i.e., existe algún agente j con $v_j(g_j) = b$ y algún agente i con $v_j(g_i) = a$. Por la definición de r_j y el Lema 2.1, se sigue que $r = r_j$. Además, nuevamente por el Lema 2.1, sabemos que el agente

j no se congeló en la ronda $r = r_j$ (porque $v_j(g_j) = b$), lo que significa que nunca se congeló. Dado que j obtiene un bien en cada ronda, el algoritmo termina después de un máximo de m rondas.

Ahora vamos a mostrar que el algoritmo construye una asignación EFX_0. Si algún agente i tieen valor de b para todos los bienes, entonces por el argumento en la demostración del Lema 2.2, el agente i será EFX_0 al final del algoritmo. Si hay al menos un bien que i valora como a, entonces r_i está bien definido. Recuerde que por el Lema 2.1, se cumple que al agente i se la asigna un bien que valora como a en cada una de las rondas $1, 2, ..., r_i - 1$. En la ronda r_i hay dos casos:

Caso I: Al agente i se le asigna un bien que valora como a. Entonces, al final de la ronda r_i, el agente i tiene un valor total de ar_i para su paquete y un valor total de como máximo ar_i para el paquete de cualquier otro agente. Si el agente i no se congeló al final de la ronda r_i (que significa que nunca lo hará), entonces será EFX_0 hacia todos los agentes al final del algoritmo por el Lema 2.2. Ahora considere el caso donde el agente i se congeló al final de la ronda r_i.

- Cualquier agente j que obtuvo un bien que i valora como a en la ronda r_i será también congelado al final de la ronda r_i (por la definición del conjunto F de agentes congelados), y tanto i como j volverán a entrar en la misma ronda luego. Por lo tanto, dado que i es libre de envidia hacia j hasta la ronda r_i y ambos agentes nunca volverán a congelarse, i será EFX_0 hacia j al final del algoritmo por el Lema 2.2.

- Para cualquier agente j que obtuvo un bien que i valora como b, el valor de i para el paquete de j al final de la ronda r_i es como máximo $a(r_i - 1) + b$. Por lo tanto, cuando el agente i vuelve a entrar (después del final de la ronda $r_i + \lfloor a/b - 1 \rfloor$), su valor para el paquete de j puede ser como máximo $a(r_i - 1) + b_b \lfloor a/b - 1 \rfloor \leq ar_i$. Por lo tanto, el agente i será libre de envidia hacia el agente j en este punto, y EFX_0 hacia j al final del algoritmo por el Lema 2.2. Si el algoritmo termina antes que el agente i vuelva a entrar (lo que podría suceder si $b = 0$), entonces el agente i es libre de envidia hacia j.

<u>Caso II:</u> Al agente i se le asigna un bien que valora como b. Al final de la ronda r_i su valor total es $a(r_i - 1) + b$, y nunca se congelará por el Lema 2.1.

- Para cualquier agente j que obtuvo un bien que i valora com b en la ronda r_i, el valor de i para el paquete de j puede ser como máximo $a(r_i - 1) + b$. Por lo tanto, el agente i es libre de envidia hacia j al final de r_i, y EFX_0 al final del algoritmo por el Lema 2.2.

- Cualquier agente j que obtuvo un bien que i valora como a en la ronda r_i debe haberse congelado al final de la ronda r_i. Si el algoritmo termina antes que el agente j vuelva a entrar (por ejemplo, si $b = 0$), el agente i es EFX_0 con respecto a j, porque el valor de i para el paquete de j es como máximo ar_i y el bien menos valioso desde la perspectiva de i es de valor a. De lo contrario, el agente j vuelve a entrar antes de que finalize el algoritmo después del final de la ronda $r_i + \lfloor a/b - 1 \rfloor$, y el valor de i para el paquete de j sigue siendo como máximo ar_i, ya que j no recibió ningún otro bien. Dado que el propio valor de aumentó a $a(r_i - 1) + b + b\lfloor a/b - 1 \rfloor > ar_i - b$, su envidia hacia el agente j es como máximo b en este punto. Además, i tiene valor b para los bienes restantes. Porque en la última ronda priorizamos a los agentes que nunca se congelaron (lo que significa que si hay menos bienes que agentes, i tiene prioridad en obtener un bien disponible en comparación con j), por un argumento similar al usado en la demostración del Lema 2.2, se sigue que la envidia seguirá siendo como máximo b al final del algoritmo. $\square$

Esto completa la demostración.

2.2. Instancias de valor de intervalo

Ahora mostraremos que la distancia entre el valor menor y el valor mayor también juega un papel muy importante: para rangos específicos, e independientemente de la cantidad de valores en ellos (que pueden ser infinitos), el cálculo de las asignaciones EFX se puede lograr por algoritmos muy simples. En particular, mostramos que las asignaciones EFX existen para instancias de intervalo en las que los valores de cada agente i están en algún intervalo $[x_i, 2x_i], x_i \in \mathbb{R}_{>0}$, usando una modificación simple de el *algoritmo Round-robin*.

De acuerdo con este algoritmo, fijamos un orden de los agentes y luego ellos simplemente seleccionan su bien no asignado favorito uno por uno, con respecto a ese orden. Esto continúa en rondas de n bienes cada uno, hasta que llegamos a un punto donde no hay suficientes bienes para todos. Para esta última ronda (si es que existe), los agentes seleccionan en orden inverso (ver Algoritmo 2).

Algorithm 2 Round-robin modificado

Input: Instancia con $m = kn + l, k \geq 0, 0 \leq l < n$

$S = M$
for $r = 1, ..., k$ **do**
    for $i = 1, ..., n$ **do**
        $g \in arg \max_{q \in S} v_i(q)$
        $A_i = A_i \cup \{g\}$
        $S = S \backslash \{g\}$
    end for
end for
for $i = n, ..., n - l + 1$ **do**
    $g \in arg \max_{q \in S} v_i(q)$
    $A_i = A_i \cup \{g\}$
    $S = S \backslash \{g\}$
end for
return $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$

Teorema 2.6. Dada una instancia de intervalo en la que los valores del agente i están en el intervalo $[x_i, 2x_i], x_i \in \mathbb{R}_{>0}$, Round-robin modificado calcula una asignación EFX en tiempo polinomial.

Demostración.
Sea $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ una asignación producida por el Algoritmo 2. Primero observe que si $m < n$ entonces el enunciado se cumple trivialmente. Por lo tanto, supongamos que $m = kn + l$ para algún $k \geq 1$ y $0 \leq l < n$. En este caso, los primeros $n - l$ agentes obtendrán k bienes y los últimos l agentes obtendrán $k + 1$ bienes. Ahora considere un agente i y sea g_{ir} el bien que obtiene en la ronda $1 \leq r \leq k + 1$. Mostraremos que i es EFX hacia cualquier otro agente j, distinguiendo los casos según i seleccione antes o después de j según el ordenamiento principal del algoritmo.

Caso I: $i < j$. El agente j tiene el mismo número de bienes que i, o un bien más que i.

- Si ambos agentes obtienen k bienes, dado que i siempre elige su bien más valioso antes que j, tenemos que $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{jr})$ para todo $r \in [k]$, y por lo tanto i no envidia a j.

- Si ambos agentes obtienen $k + 1$ bienes o el agente i tiene k bienes y el agente j tiene $k + 1$ bienes, sea $g_{jt} \in A_j$ el bien menos valioso según el agente i, el cual j obtiene durante la ronda $t \in [k + 1]$. Si $t = k + 1$, entonces como $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{jr})$ para todo $r \in [k]$, obtenemos inmediatamente que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g_{i,k+1}\})$. Si $t \leq k$, dado que $v_i(g_{it}) \geq v_i(g_{i,k+1})$ y $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{jr})$ para todo $r \in [k] \backslash \{t\}$, obtenemos de nuevo que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g_{it}\})$.

Caso II: $i > j$. El agente j tiene el mismo número de bienes que i o un bien menos que i. Una vez más, sea $g_{jt} \in A_j$ el bien menos valioso según el agente i. Ahora observe que en general tenemos que $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{j,r+1})$ para todo $r \in [k - 1]$. Si $t = 1$, entonces el enunciado se cumple trivialmente. Entonces, supongamos que $t \geq 2$.

- Si el agente j obtiene k bienes, entonces tenemos que $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{j,r+1})$ para todo $1 \leq r \leq t - 2$ y $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{j,r+2})$ para todo $t - 1 \leq r \leq k - 2$. Hasta ahora hemos acotado todos los bienes

en $A_j \backslash \{g_{it}\}$ además de g_{j1}, usando todos los bienes en A_i además de $g_{i,k-1}$ y $g_{i,k}$ (y también $g_{i,k+1}$ si es que existe). Como todos los valores se encuentran en el intervalo $[x_i, 2xi]$, tenemos que $v_i(\{g_{ik-1}\}) + v_i(\{g_{ik}\}) \geq v_i(\{g_{j1}\})$, lo que da como resultado que $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g_{it}\})$.

- Si ambos agentes obtienen $k+1$ bienes, entonces tenemos que $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{j,r+1})$ para todo $1 \leq r \leq t-2$ y $v_i(g_{ir}) \geq v_i(g_{j,r+2})$ para todo $t-1 \leq r \leq k-1$. Nuevamente, los valores de los bienes en $A_j \backslash \{g_{it}\}$ además de g_{j1} han sido acotados por los valores de los bienes en A_i además de g_{ik} y $g_{i,k+1}$. Dado que todos los valores se encuentran en el intervalo $[x_i, 2x_i]$, tenemos que $v_i(\{g_{ik}\}) + v_i(\{gi, k+1\}) \geq v_i(\{g_{j1}\})$, y por lo tanto $v_i(A_i) \geq v_i(A_j \backslash \{g_{it}\})$.

Esto completa la demostración $\square$

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

Como hemos visto en el Capítulo 2, el lograr maximizar el bienestar de Nash de una asignación no garantiza que cumpla, para cualesquiera funciones de valoración, con la propiedad libre de envidia hasta cualquier bien valorado positivamente (EFX). A continuación se aborda un enfoque distinto en el que no consideramos que las asignaciones deban ser EFX exactas, sino en lograr una aproximación de esta propiedad. Con esta finalidad, definimos la aproximación de EFX según [20].

Definición 3.1 (Asignación α-EFX)**.** Una asignación $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ es $\alpha-$EFX si para todo $i, j \in N$:

$$v_i(A_i) \geq \alpha \cdot v_i(A_j \backslash \{g\}), \quad \forall g \in A_j$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ejemplo 3.1. Sea $\omega > 1$ y $\varepsilon < \frac{1}{2\omega}$. Consideramos la siguiente instancia con tres bienes, dos agentes y valoraciones dadas por la siguiente tabla:

	g_1	g_2	g_3
agente1	ω	0	$\frac{1}{2}$
agente2	ω	1	ε

Definamos la asignación $\mathbf{A} = (A_1, A_2) = (\{g_1, g_3\}, \{g_2\})$ que logra el máximo bienestar de Nash:

$$NW(\mathbf{A}) = v_1(A_1) \cdot v_2(A_2) = \left(\omega + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \omega + \frac{1}{2}$$

Cualquier otra asignación que asigna el bien g_2 al agente 1, solo puede incrementar su bienestar de Nash removiendo g_2 del paquete de 1 y asignándolo al agente 2. Por otro lado, cualquier otra asignación B diferente de $\mathbf{A}$ que asigna el bien g_2 al agente 2, tiene bienestar de Nash $NW(B) = \dfrac{\omega + 1}{2}$ o $NW(B) = \omega \cdot (1 + \varepsilon)$.

Sin embargo, notamos que $\mathbf{A}$ no es EFX pues,

$$v_2(A_2) = 1 < \omega = v_2(A_1 \backslash \{g_3\}).$$

En este caso decimos que $\mathbf{A}$ es $\frac{1}{\omega}$–EFX, es decir, un factor de aproximación que puede ser arbitrariamente cercano a cero a medida que ω crece.

A pesar de esto, $\mathbf{A}$ no se encuentra tan lejos de llegar a ser una asignación EFX.

Consideremos la asignación $\mathbf{B} = (B_1, B_2) = (\{g_1\}, \{g_2, g_3\})$ que se obtiene de $\mathbf{A}$ moviendo el bien g_3 del agente 1 al agente 2. Notamos que esta asignación es EFX pues,

$$v_1(B_1) = \omega > \frac{1}{2} = v_1(B_2)$$
$$v_2(B_2) = 1 + \varepsilon > 0 = v_2(B_1 \backslash \{g_1\})$$

Es decir, la envidia del agente 2 hacia el agente 1 se corrige quitando su único bien al agente 1. Además, el valor que ahora tiene el agente 2 es $v_2(B_2) = 1 + \varepsilon$ que es bastante cercano al valor que tiene en la asignación $\mathbf{A}$, $v_2(A_2) = 1$. Entonces, $v_2(A_2)$ está en realidad muy cerca del valor que tendría en una asignación EFX "cercana". Decimos que el valor $v_2(B_2) = 1 + \varepsilon$ es el "valor EFX" que el agente 2 puede lograr aumentando su paquete con un subconjunto de bienes del agente 1 para crear la asignación $\mathbf{B}$, que 2 considera EFX, más cercana a $\mathbf{A}$, en términos de valor. Formalicemos estos conceptos para cualquier número de agentes.

Definición 3.2 (Valor EFX)**.** Sea $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ una asignación. Para todo par de agentes $i, j \in N$, sea $X_{ij} \subseteq A_j$ un conjunto de bienes tales que $v_i(A_i \cup X_{ij}) \geq v_i(A_j \backslash (X_{ij} \cup \{g\}))$, para todo $g \in A_j \backslash X_{ij}$ y $v_i(A_i \cup X_{ij})$, se minimiza. Entonces, el valor EFX del agente i es

$$\chi_i(\mathbf{A}) = \max_{j \in N \backslash \{i\}} v_i(A_i \cup X_{ij})$$

Ejemplo 3.2. Consideremos la instancia y asignación definidas en el Ejemplo 1.3. Notemos que:

$$X_{12} = \{\emptyset\} \subset A_2, \quad v_1(A_1 \cup X_{12}) = \omega + \frac{1}{2} \geq 0 = v_1(A_2 \backslash (X_{12} \cup \{g\}), \forall g \in A_2 \backslash X_{12}$$
$$X_{21} = \{g_3\} \subset A_1, \quad v_2(A_2 \cup X_{21}) = 1 + \varepsilon \geq 0 = v_2(A_1 \backslash (X_{21} \cup \{g\}), \forall g \in A_1 \backslash X_{21}$$

pues $A_1 \backslash X_{21}$ y $A_2 \backslash X_{12}$ están conformados por solamente un bien.

Por lo tanto, el valor EFX del agente 2 es:

$$\chi_2(\mathbf{A}) = \max_{j \in N \backslash \{2\}} v_2(A_2 \cup X_{2j}) = \max\{v_2(A_2 \cup X_{21})\} = 1 + \varepsilon$$

Con ayuda de este concepto, definimos otro tipo de asignación EFX aproximada.

Definición 3.3 (Asignación $\alpha-$vEFX)**.** Para $\alpha \in (0, 1]$, una asignación $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ es $\alpha-$vEFX si $v_i(A_i) \geq \alpha \chi_i(\mathbf{A})$ para todo $i \in N$.

Ejemplo 3.3. Consideremos la instancia y la asignación definidas en el Ejemplo 3.1. Podemos observar que $\mathbf{A}$ es una asignación $\frac{1}{1+\varepsilon}-$vEFX, puesto que:

$$v_1(A_1) = \omega + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \left(\omega + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}\chi_1(\mathbf{A})$$
$$v_2(A_2) = 1 \geq 1 = \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot (1+\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon}\chi_2(\mathbf{A})$$

Podemos notar que se puede usar EFX_0 en lugar de EFX en las definiciones 3.1 y 3.3, pues el caso en que algún bien sea valorado como cero no afecta al valor EFX.

A continuación presentamos nuestro primer resultado técnico que ilustra la conexión entre asignaciones aproximadas de EFX y vEFX.

Teorema 3.1. Para $\alpha \in (0,1)$, una asignación $\alpha-$EFX es también una asignación $\frac{\alpha}{1+\alpha}-$vEFX y esta garantía es estricta. Por otro lado, no se garantiza que una asignación $\alpha-$vEFX sea $\beta-$EFX , para cualesquiera $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Demostración.
Sea **A** una asignación $\alpha-$EFX tal que
$v_i(A_i) \geq \alpha \cdot v_i(A_j \backslash \{g\})$, donde $v_i(g) \in \min_{q \in A_j} v_i(q)$, para todo par de agentes $i, j \in N$. Equivalentemente podemos escribir esta desigualdad como:

$$(1+\alpha)v_i(A_i) \geq \alpha(v_i(A_i) + v_i(A_j \backslash \{g\})),$$

y como $\chi_i(\mathbf{A}) \leq v_i(A_i \cup A_j \backslash \{g\})$, obtenemos que:

$$\frac{v_i(A_i)}{\chi_i(\mathbf{A})} \geq \frac{v_i(A_i)}{v_i(A_i \cup A_j \backslash \{g\})} \geq \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Además, al mover todos los bienes en $A_j \backslash \{g\}$ de j a i, obtenemos una asignación en la que j obtiene solo un bien, y en consecuencia i es EFX hacia j. Por lo tanto, **A** es de hecho $\frac{\alpha}{1+\alpha}-$vEFX.

Para el límite superior, sea $\alpha \in (0,1)$ y considere una instancia en la que algún agente i tiene valores dados por la siguiente tabla:

	g_1	g_2	g_3
agente i	1	$1/\alpha$	$1/\alpha$

En la asignación **A** según la cual $A_i = \{g_1\}$ y $A_j = \{g_2, g_3\}$ para algún agente $j \neq i$, el agente i no es EFX hacia el agente j. Dado que $v_i(A_i) = 1$ y $v_i(A_j \backslash \{g_2\}) = 1/\alpha$, tenemos que **A** es $\alpha-$EFX. Ahora, al mover g_2 de j a i, i se vuelve EFX hacia j, y alcanza un valor total de $v_i(A_i) + v_i(g_2) = 1 + 1/\alpha$, dando una aproximación de $\frac{1}{1/\alpha+1} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ en su valor EFX.

Para la relación inversa, sea $\alpha \in (0,1)$ y $\gamma > \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Considere una instancia en la que los valores de algún agente i son:

	g_1	g_2	g_3
agente i	1	γ	$(1-\alpha)/\alpha$

Sea la asignación **A** según la cual $A_i = \{g_1\}$ y $A_j = \{g_2, g_3\}$ para algún agente $j \neq i$. Como $v_i(A_i) = 1$, el agente i puede convertirse en EFX hacia j, adquiriendo g_3, en cuyo caso alcanza un valor de $1/\alpha$.

Por lo tanto, **A** es $\alpha-$vEFX. Sin embargo, como $v_i(A_j \backslash \{g_3\}) = \gamma$, **A** es solo $1/\gamma-$EFX; la aproximación puede ser arbitrariamente cercana a 0 cuando γ se vuelve grande. $\square$

Hemos mostrado que el maximizar el bienestar de Nash no necesariamente produce un valor $\beta-$EFX para cualquier $\beta \in (0,1)$, sin embargo, se garantiza que se produce una asignación vEFX constante.

Teorema 3.2. Cualquier asignación de máximo bienestar de Nash $\mathbf{A}^*$ es $1/2-$vEFX, y esta cota es estricta.

Mediante el uso de argumentos similares a los de la prueba del Teorema 3.1., podemos mostrar que cualquier asignación EF1 es $1/2-$vEFX. Entonces, el Teorema 3.2 se deduce del resultado de [13] acerca de que MNW implica EF1. A continuación, presentamos una prueba directa e independiente del Teorema 3.2.

Demostración.
Considere un par de agentes i y j. Sea $A_i = \{a_1, ..., a_{|A_i|}\}$ y $A_j = \{b_1, ..., b_{|A_j|}\}$ los conjuntos de bienes asignados a i y j según $\mathbf{A}^*$, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq v_i(b_1) \leq ... \leq v_i(b_{|A_j|})$. Sea $S = \{b_1, ..., b_\lambda\}$, $\lambda < |A_j|$ el subconjunto de bienes de menor valor de A_j tal que i es EFX hacia j cuando se da el conjunto S (sobre A_i), pero no es EFX hacia j cuando se da solo el conjunto $S \backslash \{b_\lambda\}$. Vamos a demostrar que $v_i(A_i) \geq v_i(S) \Leftrightarrow 2v_i(A_i) \geq v_i(A_i \cup S)$. Si esto es cierto, entonces como $\chi_i(\mathbf{A}) \leq v_i(A_i \cup S)$, $\mathbf{A}^*$ debe ser $1/2-$vEFX.

Supongamos por absurdo que $v_i(A_i) < v_i(S)$. Por su definición, S es tal que

$$v_i(A_i) + v_i(S \backslash \{b_\lambda\}) < v_i(A_j \backslash (S \backslash \{b_\lambda\})) - v_i(b_\lambda)$$

o, equivalentemente,

$$v_i(A_i) + v_i(S \backslash \{b_\lambda\}) < v_i(A_j \backslash S).$$

También $v_i(S \backslash \{b_\lambda\}) \geq 0$ implica que $v_i(A_i) < v_i(A_j \backslash S)$. Dado que $v_j(S) + v_j(A_j \backslash S) = v_j(A_j)$, debe darse el caso de que uno de los $v_j(S)$ y $v_j(A_j \backslash S)$ sea al menos $\frac{v_j(A_j)}{2}$, mientras que el otro sea a lo sumo esta cantidad.

- Si $v_j(S) \geq \frac{v_j(A_j)}{2}$ y $v_j(A_j \backslash S) \geq \frac{v_j(A_j)}{2}$, entonces definimos una nueva asignación en la que todos los bienes en S son movidos del agente j

al agente i. Por nuestra suposición de que $v_i(A_i) < v_i(S)$, el producto de los nuevos valores de los dos agentes es

$$(v_i(A_i) + v_i(S)) \cdot v_j(A_j \backslash S) > 2v_i(A_i) \cdot \frac{v_i(A_j)}{2} = v_i(A_i) \cdot v_j(A_j).$$

Dado que los conjuntos de bienes dados a los demás agentes no han sido alterados, la nueva asignación tiene estrictamente mayor bienestar de Nash que $\mathbf{A}^*$, lo que es una contradicción.

- Si $v_j(S) \geq \frac{v_j(A_j)}{2}$ y $v_j(A_j \backslash S) \leq \frac{v_j(A_j)}{2}$, entonces definimos otra asignación en la que todos los bienes en $A_j \backslash S$ son movidos de j a i. Como $v_i(A_i) < v_i(A_j \backslash S)$, el producto de los nuevos valores de los dos agentes se convierte en

$$(v_i(A_i) + v_i(A_j \backslash S)) \cdot v_j(S) > 2v_i(A_i) \cdot \frac{v_j(A_j)}{2} = v_i(A_i) \cdot v_j(A_j),$$

nuevamente arrojando una contradicción.

En consecuencia, debe ser $v_i(A_i) \geq v_i(S)$, lo que significa que $\mathbf{A}^*$ es $1/2-$vEFX.

Para la cota superior, considere de nuevo la instancia usada en la Sección 3 para mostrar que una asignación de MNW puede no ser EFX para instancias de 3 valores. Para facilitar la referencia, repetimos la tabla que contienen los valores de los dos agentes para los tres bienes aquí:

	g_1	g_2	g_3
agente 1	$1-\varepsilon$	1	$1+\varepsilon$
agente 2	1	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$

Como argumentamos en la Sección 3, las asignaciones $\mathbf{A_1} = (\{g_2, g_3\}, \{g_1\})$ y
$\mathbf{A_2} = (\{g_2\}, \{g_1, g_3\})$ son las únicas que maximizan el bienestar de Nash. Ambas son $\frac{1}{2-\varepsilon}-$vEFX porque el agente envidioso puede obtener el bien de menor valor del otro agente (que vale $1-\varepsilon$) y convertirse en EFX. $\square$

3.2. Conclusiones y recomendaciones

La finalidad del presente trabajo de investigación es brindar al lector un acercamiento al problema de asignación de recursos a agentes, así como también las herramientas necesarias para comprender los conceptos, propiedades y características de las asignaciones (que son la solución al problema planteado) para poder interpretar las relaciones de estas propiedades. Mediante los teoremas y proposiciones expuestos se podrán identificar de manera inmediata si una asignación que ya cumple con se de máximo bienestar de Nash, es también libre de envidia o alguna de sus relajaciones aditivas (o aproximaciones), para determinadas instancias del problema.

En referencia a los objetivos planteados y a los resultados obtenidos se enumeran a continuación los principales hallazgos encontrados a lo largo del desarrollo del presente trabajo:

1. Se ha presentado a detalle las definiciones, teoremas y proposiciones que explican de manera completa el problema de la asignación de recursos a agentes.

2. En el contexto del problema de asignación de recursos a agentes, determinamos que cualquier asignación que logre el máximo bienestar de Nash es siempre EFX_0 para las instancias del problema en que las funciones de valoración son de 2 valores. Sin embargo, esta implicación no es cierta para instancias con funciones de valoración de k valores con $k \geq 3$.

3. Para las instancias del problema con funciones de valoración de 2 valores hemos determinado que existe un algoritmo de tiempo polinomial para calcular una asignación EFX_0.

4. Más allá de las asignaciones con máximo bienestar de Nash o que cumplen con la propiedad libre de envida hasta cualquier bien (EFX) de manera exacta, hemos analizado la conexión entre el máximo bienestar de Nash y las asignaciones aproximadas EFX. Pudimos observar que una asignación de MNW no proporciona necesariamente ninguna garantía de ser aproximadamente EFX de acuerdo con

la definición de aproximación comúnmente utilizada. Sin embargo, mostramos que sí lo hace bajo una interpretación de aproximación a través del valor EFX.

Una cuestión a tomar en cuenta para futuras investigaciones es si es posible diseñar algoritmos de tiempo polinomial con garantías fuertes de aproximación tanto para el valor EFX como para el bienestar de Nash.

Referencias bibliográficas

[1] Martin Aleksandrov and Toby Walsh. *Greedy algorithms for fair division of mixed manna*. CoRR, 2019.

[2] Georgios Amanatidis, Georgios Birmpas, Aris Filos-Ratsikas, Alexandros Hollender, and Alexandros A. Voudouris. *Maximum Nash Welfare and Other Stories About EFX*. , 2020.

[3] Georgios Amanatidis, Georgios Birmpas, and Vangelis Markakis. *Comparing approximate relaxations of envy-freeness*. In Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), pages 42–48, 2018.

[4] Georgios Amanatidis, Evangelos Markakis, Afshin Nikzad, and Amin Saberi. *Approximation algorithms for computing maximin share allocations*. ACM Trans. Algorithms, 2017.

[5] Georgios Amanatidis, Evangelos Markakis, and Apostolos Ntokos. *Multiple birds with one stone: Beating 1/2 for EFX and GMMS via envy cycle elimination*. In Proceedings of the Thirty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), 2020.

[6] Moshe Babaioff, Tomer Ezra, and Uriel Feige. *Fair and truthful mechanisms for dichotomous valuations*. CoRR, 2020.

[7] Siddharth Barman, Arpita Biswas, Sanath Kumar Krishna Murthy, and Yadati Narahari. *Groupwise maximin fair allocation of indivisible goods*. In Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI), pages 917–924, 2018.

[8] Siddharth Barman, Sanath Kumar Krishnamurthy, and Rohit Vaish. *Finding fair and efficient allocations*. In Proceedings of the 2018 ACM Conference on Economics and Computation (EC), pages 557–574, 2018.

[9] Siddharth Barman, Sanath Kumar Krishnamurthy, and Rohit Vaish. *Greedy algorithms for maximizing Nash social welfare*. In Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems (AAMAS), 2018.

[10] Siddharth Barman and Sanath Kumar Krishna Murthy. *Approximation algorithms for maximin fair division*. In Proceedings of the 2017 ACM Conference on Economics and Computation (EC), pages 647–664, 2017.

[11] Sylvain Bouveret, Yann Chevaleyre, and NicolasMaudet. *Fair allocation of indivisible goods*. In Handbook of Computational Social Choice, pages 284–310, 2016.

[12] Ioannis Caragiannis, Nick Gravin, and Xin Huang. *Envy-freeness up to any item with high Nash welfare: The virtue of donating items*. In Proceedings of the 2019 ACM Conference on Economics and Computation (EC), pages 527–545, 2019.

[13] Ioannis Caragiannis, David Kurokawa, Hervé Moulin, Ariel D. Procaccia, Nisarg Shah, , and Junxing Wang. *The unreasonable fairness of maximum Nash welfare*. ACM Trans. Economics and Comput, 2019.

[14] Hau Chan, Jing Chen, Bo Li, and Xiaowei Wu. *Maximin-aware allocations of indivisible goods*. In Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), pages 137–143, 2019.

[15] Bhaskar Ray Chaudhury, Jugal Garg, and Kurt Mehlhorn. *EFX exists for three agents*. CoRR, 2020.

[16] Bhaskar Ray Chaudhury, Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, and Alkmini Sgouritsa. *A little charity guarantees almost envy-freeness*.

In Proceedings of the Fourty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2020.

[17] Richard Cole and Vasilis Gkatzelis. *Approximating the nash social welfare with indivisible items*. SIAM J. Comput., 2018.

[18] Ulle Endriss. *Lecture Notes on Fair Division*. In Institute for logic, Language and Computation University of Amsterdam, 2010.

[19] Jugal Garg and Peter McGlaughlin. *Improving Nash social welfare approximations*. In Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence, (IJCAI), 2019.

[20] Benjamin Plaut and Tim Roughgarden. *Almost envy-freeness with general valuations*. In Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2018.