ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TÓPICOS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES
MÉTRICAS DE RIEMANN

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

ANDREO FRANCISCO CAZARES MAYORGA

andreo.cazares@epn.edu.ec

DIRECTOR: M. SC. ZULY LEONELA SALINAS PILLAJO

zuly.salinas@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, ANDREO FRANCISCO CAZARES MAYORGA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Andreo Francisco Cazares Mayorga

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Andreo Francisco Cazares Mayorga, bajo mi supervisión.

M. Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Andreo Francisco Cazares Mayorga

M. Sc. Zuly Leonela Salinas Pillajo

RESUMEN

La finalidad del presente trabajo de integración curricular es describir propiedades geométricas en el contexto de las variedades de Riemann como ángulos, longitudes, distancias, geodésicas y curvas minimizantes. Para ello, primero definimos y enunciamos propiedades asociadas al fibrado cotangente, teoría de tensores y campos de tensores. Luego, definimos las métricas de Riemann, lo que nos permitió presentar las variedades de Riemann. Enseguida, definimos propiedades geométricas como ángulos, longitudes y distancias, y demostramos resultados que involucran estos conceptos. En la Sección 2.3, presentamos las definiciones de geodésicas y de curvas minimizantes. Finalmente, en las Subsecciones 2.3.7 y 2.3.8, disertamos y demostramos la relación entre una geodésica y una curva minimizante.

Palabras clave: Variedades Diferenciables, Mapas Diferenciables entre Variedades, Curvas Suaves, Tensores, Campos de Tensores, Métricas de Riemann, Variedades de Riemann.

ABSTRACT

The purpose of this curricular integration work is to describe geometric properties in the context of Riemann manifolds like angles, lengths, distances, geodesics and minimizing curves. In order to achive that, we first defined and stated the properties associated with the cotangent bundle, tensor theory, and tensor fields. Next, we defined Riemannian metrics, which allowed us to introduce Riemannian manifolds. We immediately defined geometric properties such as angles, lengths and distances, and showed results related to these concepts. In the Section 2.3, we presented the definitions of geodesics and minimizing curves. Finally, in Subsections 2.3.7 and 2.3.8, we discussed and proved the connection between a geodesic and a minimizing curve.

Keywords: Smooth Manifolds, Smooth Maps between Manifolds, Smooth Curves, Tensors, Tensor Fields, Riemann Metrics, Riemann Manifolds.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del Componente Desarrollado

En el presente proyecto se discuten y revisan conceptos básicos de la *Teoría de Variedades Diferenciables*, a la vez que se formulan y demuestran resultados conocidos de la misma, con el propósito de investigar, examinar y desarrollar las métricas de Riemann y, posteriormente, las geodésicas en el contexto de las *variedades de Riemann*.

En esta componente se repasa una breve introducción de la *Teoría de Variedades Diferenciables*. Incluimos conceptos y resultados básicos de topología. Además, se discuten y desarrollan las estructuras de las variedades topológicas y diferenciables mencionadas a lo largo del texto. Se define el concepto de espacio tangente, fibrado tangente y la noción de diferenciabilidad de los mapas definidos entre variedades diferenciables. Se continúa con un breve repaso de los campos de vectores, fibrados vector y fibrados cotangente. Adicionalmente, definimos las curvas, los segmentos de curvas y la velocidad de una curva. Y culminamos presentando los tensores, los campos de tensores y pullbacks sobre campos de tensores.

Posteriormente, se define la métrica de Riemann y se establece su relación con las variedades de Riemann. Esto permite construir y analizar conceptos geométricos como longitudes, ángulos y distancias sobre *variedades de Riemann*, además de comparar la topología inducida por una métrica con la topología propia de la variedad de Riemann. Más adelante, se define la geodésica y se analiza su conexión con las curvas minimizantes (o curvas de menor longitud).

1.1. Objetivo General

Describir propiedades geométricas en el contexto de las variedades de Riemann como ángulos, longitudes, distancias, geodésicas y curvas minimizantes.

1.2. Objetivos Específicos

1. Definir y enunciar propiedades asociadas al fibrado cotangente, la teoría de tensores y campo de tensores.
2. Definir las métricas de Riemann y las variedades de Riemann.
3. Definir y analizar las propiedades geométricas como ángulos, longitudes, distancias y geodésicas sobre las variedades de Riemann.
4. Demostrar que toda curva minimizante es una geodésica de Riemann.
5. Demostrar que toda geodésica de Riemann es localmente minimizante.

1.3. Alcance

En este componente vamos a describir algunas propiedades geométricas en el contexto de las variedades diferenciables como ángulos, longitudes y distancias, además vamos a definir las geodésicas en el contexto de las *variedades diferenciables* y analizar su conexión con las curvas minimizantes. Para ello, presentamos los conceptos básicos relacionados con las variedades topológicas y diferenciables, y algunos ejemplos de cada tipo. Adicionalmente, definimos las curvas, los segmentos de curvas y la velocidad de una curva. A continuación, definimos el espacio tangente a una variedad diferenciable, el cual usamos para extender el concepto de diferenciabilidad a un mapa entre variedades diferenciables. Esto nos permite definir el fibrado tangente, que empleamos para introducir los campos de vectores y el fibrado cotangente para finalmente incluir los tensores.

En la subsección de tensores nos concentramos en la teoría de los campos de tensores covariantes simétricos suaves, pues nos prepara para definir las métricas de Riemann. Con las métricas de Riemann construimos nociones geométricas como ángulos, longitudes y distancias sobre las variedades diferenciables. Luego, con apoyo de los anteriores conceptos, describimos propiedades geométricas sobre las variedades de Riemann.

Posteriormente, definimos las conexiones lineales y las derivaciones covariantes de un campo vectorial a lo largo de una curva, lo que nos permite introducir la definición de una geodésica Luego, abordamos el concepto de conexión de Riemann y de geodésica de Riemann. Definimos el mapa exponencial y presentamos algunos resultados y definiciones asociados al mismo. Después demostramos que toda curva minimizante es una geodésica de Riemann. Y finalmente que toda geodésica de Riemann es localmente minimizante.

La metodología sigue el siguiente esquema. Se investiga y repasa toda la teoría básica de variedades diferenciables. Luego de completar la discusión con los conocimientos previos como fibrado tangente, campos de vectores y el fibrado cotangente; se continúa con la definición de la métrica de Riemann y los conceptos geométricos que induce: ángulos, longitudes y distancias. Además, se discuten y estudian resultados contenidos en [3] sobre las propiedades geométricas de las *variedades de Riemann*. Luego, presentamos las definiciones de conexión lineal, geodésica, geodésica de Riemann y mapa exponencial. Enunciamos y desarrollamos algunos resultados de los anteriores conceptos y demostramos que toda curva minimizante es una geodésica de Riemann. Y finalmente, luego de incluir otros resultados que son necesarios, demostramos que toda geodésica de Riemann es localmente minimizante.

1.4. Marco Teórico

El problema del *quinto postulado de Euclides* es bastante conocido en nuestros días. De este surgieron nuevas ramas y en general, una nueva concepción sobre que son las matemáticas. El debate estuvo abierto por más de dos milenios, sin embargo, gracias a esto en la actualidad podemos hablar sobre *Geometrías No Euclidianas*, *Geometría de Riemann* y en general sobre *Geometría Diferencial*.

Entre los pioneros que incorporaron y desarrollaron la teoría general sobre estas *Geometrías No Euclidianas* figuran los matemáticos Farkas Bolyai, János Bolyai, Nikolai Lobachevsky, Carl Friedrich Gauss y Bernhard Riemann. El propósito del presente trabajo es introducirnos en las *variedades de Riemann*, y estudiar los distintos conceptos geométricos que se pueden desarrollar en esta. Las *variedades de Riemann* son una rama de la Geometría Diferencial moderna en la cual las ideas geométricas cotidianas tienen lugar. En este sentido, es un descendiente directo de la geometría básica del plano y de los cuerpos solidos.

El principal interés de la *geometría de Riemann* es encontrar propiedades que sean intrínsecas en las superficies. Las propiedades intrínsecas son aquellas que se conservan bajo isometrías locales. El ejemplo más conocido es el declarado por el *Teorema Egregium de Gauss*, que afirma que la *curvatura Gaussiana* de una superficie se preserva bajo isometrías. Otro ejemplo de una propiedad intrínseca es la longitud de curva. De particular interés, son las geodésicas, que no son más que curvas que unen dos puntos sobre la superficie, pero mantienen una relación con las curvas de longitud mínima de esos puntos.

1.4.1. Geometría Esférica

En esta subsección discutimos uno de los ejemplos más simples de *Geometría Diferencial*, esta es la *Geometría Esférica*.

Notamos por $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera de radio uno centrada en cero, es decir, $\mathbb{S}^2$ es el conjunto de todos los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$. La superficie $\mathbb{S}^2$ es una superficie diferenciable. Primero vamos a definir el mapa *proyección* *estereográfica.* Sea $q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Al punto

$$n = (0,0,1)$$

le llamamos *polo norte.* La linea recta que conecta n y q interseca al plano xy en un único punto, digamos $p \in \mathbb{R}^3$. Al mapa

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{n\} &\to \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ q &\mapsto p \end{aligned}$$

le llamamos *proyección estereográfica* de $\mathbb{S}^2$ sobre el plano xy. Esta es una transformación conforme, lo que significa que preserva los ángulos entre las curvas, y puede extenderse sobre todo $\mathbb{S}^2$. Escribimos

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

al cual llamamos el *plano complejo extendido.* Si identificamos a cada punto $(x,y,0) \in \mathbb{R}^3$ con el número complejo $x + yi$ y a n con ∞, el mapa

$$\Pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}_\infty$$

es una biyección. Por tanto, para cada $q \in \mathbb{S}^2$, existe un único $w \in \mathbb{C}_\infty$ tal que

$$p = \Pi^{-1}(w).$$

Vamos a desarrollar la *geometría esférica* de manera análoga a la *geometría del plano Euclidiano.* Lo primero que debemos definir son las lineas rectas. En el espacio Euclidiano, las lineas rectas son las curvas más cortas que unen dos puntos, en este sentido, las correspondientes lineas rectas de las esferas deben satisfacer esta propiedad.

Definimos un *gran círculo* sobre $\mathbb{S}^2$ como la intersección de $\mathbb{S}^2$ con un plano que contiene al origen. Así, los *grandes círculos* no son más que círculos centrados en cero y de radio uno. Los *círculos pequeños* se definen como la intersección de $\mathbb{S}^2$ con un plano que no pasa por el origen. Si $p, q \in \mathbb{S}^2$, decimos que p y q son *antipodales* cuando

$$p \neq q \quad \text{y} \quad p = -q.$$

Todo par de puntos distintos de $\mathbb{S}^2$ está contenido en un gran círculo. En el caso en el que los puntos no son antipodales, el gran círculo es único. Y si son antipodales, existe una cantidad infinita de grandes círculos que une a tales puntos.

Proposición 1.1. *Sean $p, q \in \mathbb{S}^2$ tal que $p \neq q$.*

(a) Si $p \neq -q$, el arco de menor longitud es el gran círculo que une p y q.

(b) Si $p = -q$, cualquier gran círculo que contiene a p y q es un arco de menor longitud.

Demostración. Ver [5, Proposición 6.5.1]. □

Así, los grandes círculos funcionan en la *geometría esférica* como lo hacen las lineas rectas en la *geometría Euclidiana.* Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en el plano Euclidiano, en la *geometría esférica* no existen lineas paralelas pues todo par de grandes círculos se interseca.

Lo siguiente que vamos a hacer es definir una métrica sobre $\mathbb{S}^2$. Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 &\to \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto d_{\mathbb{S}^2}(p, q), \end{aligned}$$

donde $d_{\mathbb{S}^2}(p, q)$ es la longitud del arco más pequeño del gran círculo que une p y q. En otras palabras, $d_{\mathbb{S}^2}(p, q)$ es el ángulo entre los vectores p y q contenido en el intervalo $[0, \pi]$, así, se tiene que

$$\cos d_{\mathbb{S}^2}(p, q) = p \cdot q.$$

Recordemos que, la *proyección estereográfica extendida* es una biyección. Por tanto, para cada $p, q \in \mathbb{S}^2$, existen $w, v \in \mathbb{C}_\infty$ únicos tales que

$$p = \Pi^{-1}(w) \quad \text{y} \quad q = \Pi^{-1}(v).$$

Con esta identificación, definimos

$$d_{\mathbb{S}^2}(w, v) := d_{\mathbb{S}^2}(\Pi^{-1}(w), \Pi^{-1}(v)) = d_{\mathbb{S}^2}(p, q),$$

para todo $p, q \in \mathbb{S}^2$. Así, podemos formular $d_{\mathbb{S}^2}$ en términos de la *proyección estereográfica extendida* a través del siguiente resultado.

Proposición 1.2. *Para todo* $v, w \in \mathbb{C}$, *se tiene que*

$$\tan\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{S}^2}(v,w)\right) = \frac{|v-w|}{|1+\bar{v}w|}.$$

Demostración. Ver [5, Proposición 6.5.2]. □

Otro resultado destacable es que $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ es un espacio métrico. Este hecho es interesante pues $d_{\mathbb{S}^2}$ no mide cualquier distancia, sino que es aquella que calcula la curva más corta sobre la esfera para cualquier par de puntos, y esto es lo que intuitivamente esperaríamos de una métrica definida sobre la esfera.

Por último, un objeto de la *geometría Euclidiana* que se puede replicar en la *geometría esférica* es el triangulo (ver [5, Geometría Esferica, sección 6.5]). Estos se conocen como *triángulos esféricos* y se pueden recrear formulas trigonométricas equivalentes a las que se tienen en la *geometría Euclidiana*.

Con todo esto, hemos logrado nombrar y desarrollar algunos conceptos geométricos de la *geometría Euclidiana* en la *geometría esférica*. Todos estos son bastante intuitivos y, como notamos en esta subsección, comprenden una nueva geometría, que no necesariamente funciona de la manera en que lo hace la *geometría Euclidiana*.

1.4.2. Geodésicas sobre Superficies

La principal motivación para definir las geodésicas es para intentar generalizar la concepción de lineas rectas de la *geometría Euclidiana*, o al menos obtener objetos que compartan sus mismas características. Por esto es interesante estudiar que propiedades en realidad terminan teniendo las *geodésicas*, pues no podemos definirlas exactamente como lineas rectas. En esta subsección vamos a estudiar si una geodésica sigue siendo una curva de longitud mínima (o, lo que es lo mismo, una curva minimizante) entre dos puntos, como lo es una recta en el plano.

Recordemos que una curva γ sobre una superficie S se llama una *geodésica* cuando $\gamma''(t)$ es cero o es perpendicular al plano tangente de la superficie en el punto $\gamma(t)$, para todo t en el dominio de la curva.

Entre las propiedades de las geodésicas tenemos que siempre son rapidez unitaria y, para cada punto p en una superficie cualquiera y para cada vector tangente v en p, existe una única geodésica que pasa por p con vector tangente v en ese punto. El ejemplo más simple de una geodésica es cualquier linea recta del *plano euclidiano*, pues su segunda derivada es cero. Otro ejemplo de geodésica es un gran círculo de la *Geometría Esférica*. Comprobemos que en efecto los grandes círculos son geodésicas. Sabemos que todo gran círculo es la intersección de la esfera con un plano P que pasa por el origen, así, si p pertenece al gran circulo, la linea recta del origen a p está contenida en el plano P y es perpendicular al plano tangente de la esfera en p. Por tanto, el plano P es perpendicular al plano tangente en p, y como p es un punto cualquiera del gran círculo, se tiene que todo gran circulo es una geodésica.

Notemos que los dos ejemplos de geodésicas que acabamos de mencionar son curvas minimizantes en sus respectivas geometrías. De hecho, existe una "conexión" entre una geodésica y una curva minimizante. Formalicemos esta conexión. Si γ es una curva de rapidez unitaria y de longitud mínima entre dos puntos sobre una superficie S, entonces γ también es una curva minimizante entre cualquier par de puntos dentro de cualquier carta de coordenadas donde esté contenida. Por tanto, consideremos curvas que estén completamente contenidas en parches. Supongamos una carta de coordenadas (σ, U), y $p, q \in U$, cualesquiera. Denotemos por γ^τ a una familia de curvas sobre U de p a q, donde τ recorre un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$, tal que:

1. Existe $\delta > 0$ tal que $\gamma^\tau(t)$ está definido para todo $t \in (-\delta, \delta)$ y para todo $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$.

2. Para algún $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $-\delta < a < b < \delta$, se cumple que

$$\gamma^\tau(a) = p \quad \text{y} \quad \gamma^\tau(b) = q,$$

para todo $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$.

3. El mapa

$$\begin{array}{rcl}(-\epsilon,\epsilon)\times(-\delta,\delta) & \to & \mathbb{R}^3\\ (\tau,t) & \mapsto & \gamma^\tau(t)\end{array}$$

es suave.

4. Para $\tau = 0$, se tiene que
$$\gamma^0 = \gamma.$$

Además, la *longitud de la parte de γ^τ entre p y q* está denotada por

$$\mathcal{L}(\tau) = \int_a^b \|(\gamma^\tau)'\| dt.$$

Teorema 1.1. *Con la notación anterior, una curva de rapidez unitaria γ es una geodesica si y solo si*
$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L}(\tau)\bigg|_{\tau=0} = 0,$$
para toda familia de curvas γ^τ, donde $\gamma^0 = \gamma$.

Demostración. Ver [5, Teorema 9.4.1]. □

Discutamos acerca de lo que implica este último resultado. Si γ es una curva de minimizante sobre σ de p a q, entonces $\mathcal{L}$ debe tener un mínimo absoluto en $\tau = 0$. Por tanto,

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L}(\tau)\bigg|_{\tau=0} = 0,$$

y por el Teorema 1.1, γ es una geodésica. Ahora supongamos que γ es una geodésica sobre de p a q, entonces $\mathcal{L}(\tau)$ tiene un punto crítico en $\tau = 0$, pero esto no significa que $\tau = 0$ sea un mínimo absoluto o relativo. Por ejemplo, la curva de menor longitud entre dos puntos cercanos de una esfera es el arco menor del gran círculo que los une, sin embargo, el otro arco también es una geodésica que une a ambos puntos pero no es de longitud mínima. De hecho, en general no existe una curva minimizante para cualquier par de puntos sobre una superficie dada.

Por último, es interesante señalar que, en el caso que una superficie sea cerrada, todo par de puntos que estén conectados por una curva, tiene una curva de menor longitud.

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo vamos a describir propiedades geométricas en el contexto de las variedades de Riemann como ángulos, longitudes, distancias, geodésicas y curvas minimizantes. Para tal fin dividimos el capítulo en tres secciones. En la primera sección, nombrada como *Resultados preliminares* (ver 2.1), abordamos definiciones y resultados básicos que son necesarios para poder presentar las siguientes dos secciones. Aquí revisamos conceptos básicos de *Variedades Topológicas*, *Variedades Diferenciables* y *Teoría de Tensores sobre Variedades Diferenciables*. En las Secciones 2.2 y 2.3 se encuentran los resultados principales y donde cumplimos el *Objetivo General* y el propósito del presente trabajo. Recomendamos al lector ya familiarizado con los conceptos expuestos en la Sección 2.1 saltarse la misma y dirigirse a la siguiente sección.

2.1. Resultados preliminares

En esta sección incluimos algunos resultados y conceptos que van a ser necesarios para presentar y desarrollar las Secciones 2.2 y 2.3. En su mayoría estos son conceptos básicos de *Variedades Topológicas*, *Variedades Diferenciables* y *Teoría de Tensores sobre Variedades Diferenciables*.

2.1.1. Variedad Topológica

A lo largo del documento usamos el concepto de *vecindad* y de *conjunto abierto* como sinónimos. En otras palabras, decimos que un conjunto es una *vecindad* cuando es *abierto*.

Definición 2.1 (Variedad Topológica)**.** Sea M un espacio topológico. Decimos que M es una **variedad topológica sin frontera de dimensión n** (o simplemente una **n-variedad topológica**) cuando se satisfacen los siguientes enunciados:

- M es un *espacio de Hausdorff*: para cada par de puntos $p, q \in M$, existen conjuntos disjuntos abiertos $U, V \subseteq M$ tales que $p \in U$ y $q \in V$.
- M es *segundo contable*: existe una base contable para la topología de M.
- M es un *espacio localmente euclidiano de dimensión* n: cada punto de M admite una vecindad que es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Si, adicionalmente, permitimos que la propiedad de *espacio localmente euclidiano de dimensión* n tome ya sea subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ o abiertos (relativos) de $\mathbb{H}^n$, conocido como *espacio medio*, con

$$\mathbb{H}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R} : x^n \geq 0\right\},$$

y decimos que M es una **variedad topológica con frontera de dimensión n**.

Nota 2.1. En general, escribiremos "*M es una variedad topológica de dimensión n*" para referirnos, en concreto, a una variedad topológica sin frontera, a menos que se precise lo contrario. A la dimensión de M la denotamos por $dim\, M$.

Denotaremos por $\partial\mathbb{H}^n$ a la frontera de $\mathbb{H}^n$ y por $\operatorname{Int}\mathbb{H}^n$ al interior de $\mathbb{H}^n$.

Esto significa que

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}, \\ \partial \mathbb{H}^n &= \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}. \end{aligned}$$

Definición 2.2 (Cartas coordenadas)**.** Sea M una variedad topológica de dimensión n. Una **carta de coordenadas** (o solamente carta) sobre M es un par $(U,\ \varphi)$, donde $U \subseteq M$ es un conjunto abierto y

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \widehat{U} \\ p &\longmapsto \varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo de U a un conjunto abierto $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. A U nos referimos como **dominio de coordenadas,** mientras que el mapa φ es llamado un **mapa de coordenadas local** y sus funciones componentes $(x^1, \ldots, x^n)$, a veces denotadas simplemente por (x^i), son llamadas **coordenadas locales** sobre U. A menudo escribimos "$(U,\ \varphi)$ es una carta que contiene p" como una abreviatura de "$(U,\ \varphi)$ es una carta de coordenadas cuyo dominio U contiene al punto p". Para el caso de las variedades con frontera, cuando sea necesario hacer una distinción, decimos que $(U,\ \varphi)$ es una **carta interior** cuando $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y una **carta frontera** cuando $\varphi(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{H}^n$ tal que $\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \neq 0$.

Un punto $p \in M$ se dice un **punto interior de M** cuando está en el dominio de una carta interior y un **punto frontera de M** en el caso que está en el dominio de una **carta frontera** cuya imagen en p pertenece a $\partial \mathbb{H}^n$. Se define la **frontera de M** (denotado por ∂M) como el conjunto de todos sus puntos frontera y el **interior de M** (denotado por $\operatorname{Int} M$ como el conjunto de todos sus puntos interiores.

Cuando (U, φ) es una carta tal que $\varphi(p) \notin \partial \mathbb{H}^n$, entonces p es un punto interior para la carta $(U \cap \varphi^{-1}(\operatorname{int} \mathbb{H}^n), \varphi)$.

Definición 2.3 (Espacio topológico conexo)**.** Decimos que un espacio topológico X es **conexo** cuando no existen dos abiertos disjuntos y no vacíos cuya unión es X.

2.1.2. Variedad Diferenciable

Definición 2.4 (Difeomorfismo)**.** Sean U y V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Una función $F : U \to V$ es **suave** si cada una de sus funciones componentes tiene derivadas parciales continuas de todos los ordenes. Si U es un abierto de $\mathbb{H}^n$, el mapa $F : U \to \mathbb{R}^m$ es **suave** cuando para cada $x \in U$, existe un conjunto abierto $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a x y un mapa suave $\widetilde{F} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^m$ que coincide con F sobre $\widetilde{U} \cap \mathbb{H}^n$. Si, en cambio, V es un abierto de $\mathbb{H}^m$, decimos que $F : U \to V$ es **suave** cuando $F : U \to \mathbb{R}^m$ es suave. En cualquier caso, una función suave $F : U \to V$ es un **difeomorfismo** cuando es biyectiva y tiene inversa suave.

Proposición 2.1. *Si $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ es un difeomorfismo, entonces su primera derivada es o siempre positiva ($\varphi' > 0$) o siempre negativa ($\varphi' < 0$).*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que existen $x, y \in [c, d]$ tales que

$$\varphi'(x) \leq 0 \text{ y } \varphi'(y) \geq 0.$$

Así, como φ' es continua, existe $v \in [\text{mín}\{x, y\}, \text{máx}\{x, y\}]$ tal que $\varphi'(v) = 0$. Sin embargo, esto último contradice que

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

para todo $t \in [c, d]$, pues existe una división entre cero en $v \in [c, d]$. Por tanto, por reducción al absurdo, concluimos que, en efecto, su primera derivada es o siempre positiva o siempre negativa. $\square$

Definición 2.5 (Atlas diferenciable)**.** Sea M una variedad topológica de dimensión n. Dadas dos cartas (U, φ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$, el mapa $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es llamado el **mapa de transición de φ a ψ.** Las dos cartas (U, φ) y (V, ψ) se dicen **compatibles suavemente** cuando $U \cap V = \emptyset$ o el mapa de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo. Un **atlas** para M se define como la colección de cartas cuyo dominio recubre M. Así mismo, un atlas $\mathscr{A}$ se dice **diferenciable (o suave)** si todo par de cartas de $\mathscr{A}$ son compatibles suavemente. Para el caso de variedades topológicas sin frontera se tienen las mismas definiciones, con la excepción de que sus mapas de transición son suaves. y por tanto difeomorfismos, en el sentido adecuado.

Definición 2.6 (Maximal)**.** Sea M una variedad topológica con o sin frontera de dimensión n. Un atlas diferenciable $\mathscr{A}$ sobre M se dice **maximal** cuando no está estrictamente contenido en otro atlas diferenciable.

Definición 2.7 (Variedad diferenciable)**.** Sea M una variedad topológica de dimensión n. Una **estructura diferenciable** sobre M es un atlas diferenciable maximal. Definimos una **n-variedad diferenciable (o suave)** como un par $(M, \mathscr{A})$, donde M es una variedad topológica de dimensión n y $\mathscr{A}$ es una estructura diferenciable sobre M. Las cartas contenidas en el atlas diferenciable maximal se llaman **cartas diferenciables** y sus correspondientes mapas de coordenadas, **mapas de coordenadas diferenciables**. En el caso que M sea una variedad topológica con frontera, nos referiremos al par $(M, \mathscr{A})$ como **n-variedad diferenciable (o suave) con frontera.**

Notemos que toda variedad diferenciable es por defecto una variedad diferenciable con frontera. El siguiente resultado estudia las condiciones en las que podemos inducir un atlas maximal a partir de atlas.

Proposición 2.2. *Sea M una variedad topológica.*

(a) Cada atlas diferenciable $\mathscr{A}$ para M está contenida en un único atlas diferenciable maximal.

(b) Dos atlas diferenciables para M determinan la misma estructura suave si y solo si su unión es un atlas diferenciable.

Demostración. Ver [3, Proposición 1.17]. □

2.1.3. Ejemplos de Variedades Diferenciables

A continuación incluimos algunos ejemplos de variedades diferenciables.

Ejemplo 2.1 (Espacios Euclidianos)**.** Para todo $n \in \mathbb{N}$, el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una n-variedad diferenciable con la estructura diferenciable determinada por el atlas $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$. A esta estructura diferenciable la llamamos **estructura diferenciable estándar** de $\mathbb{R}^n$ y a su correspondiente mapa de coordenadas, **coordenadas estándar.** Siempre usaremos esta estructura diferenciable al trabajar con $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.2. (Espacios vectoriales de dimensión finita) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Con la topología inducida por una norma cualquiera sobre V, el espacio vectorial V es una n-variedad topológica. Definamos una estructura diferenciable sobre V. Sea $(E_1, \ldots, E_n)$ una base sobre V, definimos una carta (V, E^{-1}), donde E es el homeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} E: \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \ V \\ x &\longmapsto \ E(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i E_i. \end{aligned}$$

Si $(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n)$ es otra base para V, de manera similar definimos una carta $(V, \tilde{E}^{-1})$. El mapa de transición entre las cartas anteriores es un difeomorfismo , así estas son compatibles suavemente. De esta manera, la colección de todas las cartas definidas similarmente forman una estructura diferenciable sobre V, a la que llamaremos **estructura diferenciable estándar**.

Ejemplo 2.3. (Subvariedades Abiertas) Sea M una n-variedad diferenciable y sea $U \subseteq M$ un conjunto abierto. Definimos un atlas diferenciable sobre U por

$$\mathscr{A}_U = \{(V, \varphi) : \ (V, \varphi) \text{ es una carta diferenciable de M tal que } V \subseteq U\}.$$

De donde, U es una n-variedad diferenciable. Los conjuntos abiertos U con esta estructura diferenciable se llaman **subvariedades abiertas** de M.

Definición 2.8 (Bola de coordenadas regular)**.** Sean M una n-variedad topológica y (U, φ) una carta de coordenadas. El conjunto U es una **bola de coordenadas** cuando $\varphi(U)$ es una bola abierta de $\mathbb{R}^n$, y en el caso que φ es un mapa de coordenadas suave, U es una **bola de coordenadas suave.**

Decimos que un conjunto $B \subseteq M$ es una **bola de coordenadas regular** cuando existe una bola de coordenadas suave B' tal que $\bar{B} \subseteq B'$, un mapa de coordenadas suave $\varphi : B' \to \mathbb{R}^n$ y dos números reales positivos $r < r'$, tales que

$$\varphi(B) = B_r(0), \quad \varphi(\bar{B}) = \hat{B}_r(0), \text{ y } \varphi(B') = B'_r(0).$$

Proposición 2.3. *Toda variedad diferenciable tiene una base contable de bolas de coordenadas regulares.*

Demostración. Ver [2, Proposición 4.60]. □

2.1.4. Mapas Diferenciables

Definición 2.9 (Funciones diferenciables)**.** Sean M una variedad diferenciable de dimensión n, k un entero no negativo y $f : M \to \mathbb{R}^k$ una función. La función f se dice **diferenciable (o suave)** cuando para cada $p \in M$, existe una carta diferenciable (U, φ) para M, cuyo dominio contiene p y tal que la composición $f \circ \varphi^{-1}$ es suave (infinitamente diferenciable) para el conjunto abierto $\widehat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Si M es una variedad diferenciable con frontera, la definición es exactamente la misma, con la diferencia que $\varphi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$. En el caso que $\varphi(U)$ sea un abierto del espacio medio, la suavidad de la composición $f \circ \varphi^{-1}$ significa que cada punto de $\varphi(U)$ tiene un abierto de $\mathbb{R}^n$ en el que $f \circ \varphi^{-1}$ se extiende a una función suave en el sentido usual.

Particularmente, el conjunto de todas las funciones suaves real valuadas $f : M \to \mathbb{R}$ es denotado por $C^\infty(M)$. La función $\widehat{f} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ definida por $\widehat{f} = f \circ \varphi^{-1}$, se llama la **representación en coordenadas de f.**

Definición 2.10 (Mapas diferenciables entre variedades)**.** Sean M y N variedades diferenciables con o sin frontera y $F : M \to N$ un mapa. Decimos que F es **un mapa diferenciable (o suave)** cuando para cada $p \in M$, existen cartas diferenciables (U, φ), conteniendo al punto p, y (V, ψ), conteniendo a $F(p)$, tales que:

- $F(U) \subseteq V$.
- La composición $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es suave de $\varphi(U)$ a $\psi(V)$.

2.1.5. Espacio y Fibrado Tangente

Definición 2.11 (Espacio y fibrado tangente)**.** Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera y sea p un punto de M. Una función lineal

$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ se dice una **derivación en** p cuando esta satisface la regla

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

El conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(M)$ en el punto p se denotan por T_pM y es llamado el **espacio tangente a** M **en** p. A sus elementos nos referimos como **vectores tangentes en** p**.** A la vez, definimos el **fibrado tangente de** M, denotado por TM, como la unión disjunta de todos los espacios tangentes:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM.$$

Definición 2.12 (Vector tangente geométrico)**.** Dado $a \in \mathbb{R}^n$, definimos el **espacio tangente geométrico a** $\mathbb{R}^n$ **en** a**,** denotado por $\mathbb{R}^n_a$, como el conjunto

$$\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : \, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

A un elemento $(a, v) \in \mathbb{R}^n_a$ lo llamaremos **vector tangente geométrico** y a menudo lo denotaremos como v_a (o veces como $v|_a$). El conjunto $\mathbb{R}^n_a$ es un espacio vectorial real bajo las operaciones:

$$v_a + w_a = (v + w)_a, \qquad c(v_a) = (cv)_a,$$

para todo v_a, $w_a \in \mathbb{R}^n_a$. Para cada vector $v_a \in \mathbb{R}^n_a$, definimos el mapa $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, el cual evalúa la derivada direccional en la v en a :

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(a + tv). \tag{2.1}$$

Proposición 2.4. *Sea* $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) Para cada vector $v_a \in \mathbb{R}^n_a$*, el mapa* $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *definido en* (2.1) *es una derivación en* a.

(b) El mapa $v_a \mapsto D_v|_a$ *es un isomorfismo de* $\mathbb{R}^n_a$ *a* $T_a\mathbb{R}^n$.

Demostración. Ver [3, Proposición 3.2].

□

Proposición 2.5. *Para cada* $a \in \mathbb{R}^n$, *las* n *derivaciones (son los operadores* *de las derivadas parciales usuales)*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_a,$$

definidas por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, *forman una base para* $T_a\mathbb{R}^n$. *Así, el espacio es de dimensión* n.

Demostración. Ver [3, Corolario 3.3]. □

2.1.6. El Diferencial de un Mapa Diferenciable

Definición 2.13 (El diferencial de un mapa diferenciable)**.** Si M y N son variedades diferenciables con o sin frontera y $F : M \to N$ es un mapa diferenciable, para cada $p \in M$ definimos el mapa

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

llamado el **diferencial de** F **en** p, como sigue: Dado $v \in T_pM$, permitimos que $dF_p(v)$ actué como una derivación en el punto $F(p)$ sobre $f \in C^\infty(N)$ a través de la asignación

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F).$$

Observemos que el operador $dF_p(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ es lineal pues v lo es, y es una derivación en $F(p)$ porque, para todo $f, g \in C^\infty(N)$, tenemos que,

$$\begin{aligned} dF_p(v)(fg) &= v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= f \circ F(p)v(g \circ F) + g \circ F(p)v(f \circ F) \\ &= f(F(p))dF_p(v)(g) + g(F(p))dF_p(v)(f). \end{aligned}$$

Proposición 2.6 (Propiedades del diferencial)**.** *Sean M, N y P variedades diferenciables con o sin frontera,* $F : M \to N$ *y* $G : N \to P$ *mapas suaves, y* $p \in M$, *se cumplen los siguientes propiedades:*

(a) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \longrightarrow T_{(G\circ F)(p)}P.$

(b) Si F es un difeomorfismo, entonces $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es un difeomorfismo, y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

(c) Si $Id : M \to M$ denota el mapa identidad sobre M, se tiene que $d(Id_M)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$.

Demostración. En [6, Teorema 8.5] y [6, Corolario 8.6] se pueden consultar las demostraciones de los primeros dos literales. El último literal es un caso particular del segundo, y por tanto, se sigue que el resultado se cumple. □

Proposición 2.7 (TM como variedad suave)**.** *Para cualquier n-variedad diferenciable con o sin frontera M, el fibrado tangente TM tiene una estructura suave que hace de M una $2n$ variedad diferenciable y a la proyección natural $\pi : TM \to M$ un mapa suave.*

Demostración. Ver [3, Proposición 3.18]. □

Proposición 2.8 (El espacio tangente de un conjunto abierto)**.** *Sean M una n-variedad diferenciable con o sin frontera, $U \subseteq M$ un conjunto abierto y $\iota : U \to M$ el mapa de inclusión. Para cada $p \in U$, el diferencial $d_{\iota_p} : T_pU \to T_pM$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Ver [3, Proposición 3.9]. □

Proposición 2.9. *Sea $\iota : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$ el mapa de inclusión. Para cada $a \in \partial\mathbb{H}^n$, el diferencial $d_{\iota_{\varphi(p)}} : T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Ver [3, Lema 3.11]. □

2.1.7. Cálculos en Coordenadas

Supongamos M una n-variedad diferenciable y (U, φ) una carta de coordenadas suave de algún $p \in M$. Sabemos φ es un difeomorfismo de U a un conjunto abierto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, así, por las Proposiciones 2.6 y 2.8, tenemos que el mapa $d_{\varphi_p} : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Por la Proposición 2.5, las derivaciones

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\varphi(p)}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{\varphi(p)}$$

formar una base para $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Por tanto, las preimagenes de estos vectores bajo el isomorfismo $d\varphi_p$ forman una base para T_pM. Notemos a tales vectores por $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$, y tienen la siguiente caracterización:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = (d\varphi_p)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}\right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}\right).$$

Para una función $f \in C^\infty(U)$, tenemos que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} f = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^j}(\hat{p}),$$

donde $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ es la *representación de coordenadas* de f, y $\hat{p} = \varphi(p)$ es la **representación de coordenadas de** p. Los vectores $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ son llamados **vectores de coordenadas en p** asociados al sistema de coordenadas dado.

Cuando M es una variedad diferenciable con frontera y p es un punto interior, las discusiones anteriores se mantienen literalmente. Para $p \in \partial M$, solo se debe sustituir $\mathbb{H}^n$ por $\mathbb{R}^n$, teniendo en cuenta que la notación $\partial/\partial x^i|_{\varphi(p)}$ puede ser utilizada para denotar ya sea un elemento de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ como de $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n$ por el isomorfismo $\iota_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ (ver el Lema 2.9). El enésimo vector coordenada $\partial/\partial x^n|_p$ debe ser interpretado como una derivación lateral.

La siguiente proposición sintetiza todo lo discutido en este apartado.

Proposición 2.10. *Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera, y sea $p \in M$. El espacio T_pM es un espacio vectorial de dimensión n, y para cada carta diferenciable (U, φ) que contiene a p, los vectores coordenadas*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

forman una base para T_pM.

Demostración. La demostración corresponde a la Subsección *Cálculo en Coordenadas*. $\square$

En este sentido, todo vector $v \in T_pM$ puede escribirse por medio de una única combinación lineal

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p .$$

La base ordenada $(\partial/\partial x^i)$ se llama **base de coordenadas para** T_pM, y los números $(v^1, \ldots, v^n)$ se llaman **componentes de** v con respecto a la base de coordenadas. Los componentes de v se calculan reemplazando las coordenadas locales, es decir,

$$v(x^j) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^j,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2.1.8. El Diferencial en Coordenadas

Sea un mapa suave $F : U \to V$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos abiertos. Sea $p \in M$, cualquiera. Vamos a estudiar la matriz del diferencial $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ en términos de la base de coordenadas estándar. Denotemos las coordenadas en el dominio y codominio por $(x^1, \ldots, x^n)$ y $(y^1, \ldots, y^m)$, respectivamente. Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) f &= \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f \circ F) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{F(p)}\right) f \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Por tanto,

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{F(p)},$$

y la matriz de dF_p en términos de la base de coordenadas es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la matriz Jacobiana de F en p. Por tanto, el diferencial dF_p coincide con la derivada total de F, $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, bajo la identificacíon de los espacios Euclidianos con sus espacios tangentes. El mismo tipo de cálculos se tiene cuando U y V son conjuntos abiertos de $\mathbb{H}^n$ y $\mathbb{H}^m$, respectivamente.

Estudiemos el caso general. Sea $F : M \to N$ un mapa suave entre variedad diferenciables con o sin frontera M y N de dimensión m y n, respectivamente. Sean $p \in M$, (U, φ) una carta de coordenadas de M que contiene a p y (V, ψ) otra carta de coordenadas de N que contiene a $F(p)$. Consideremos la representación de coordenadas

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V).$$

Denotemos por $\hat{p} = \varphi(p)$ la representación de coordenadas de p. Notemos que $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \hat{F}$, de donde, tenemos que

$$\begin{aligned} dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = dF_p\left(d(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)\right) &= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})}\left(d\hat{F}(\hat{p})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\hat{p}}\right)\right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\hat{F}(\hat{p})}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\hat{F}(\hat{p})}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial x^i}(\hat{p}) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{F(p)}, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, en este caso, el diferencial dF_p está representado por la matriz Jacobiana de $\hat{F}$.

2.1.9. Funciones Test

Las *funciones test* son muy usadas en demostraciones de distintas ramas de la matemática: Teoría de la Medida, Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales Parciales, etc. Estas funciones son bastante útiles por su versatilidad y libertad al momento de definir nuevos mapas u otras funciones (la mayoría de las veces obtenidas multiplicándolas por otras), y por su característica de anularse fuera de un compacto. En esta Subsección, presentamos que existe una generalización de las funciones test en el contexto de las variedades diferenciables. Sin embargo, no usamos estas funciones hasta llegar al apartado de *Geodésicas*.

Definición 2.14. El **soporte** de una función suave, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se define como el conjunto cerrado

$$spt\, f = \{p \in \mathbb{R}^n : \; f(p) \neq 0\}.$$

En el caso que M es un espacio topológico y $f : M \to \mathbb{R}$, entonces definimos el soporte de f como el conjunto cerrado

$$spt\, f = \{\overline{p \in M : \; f(p) \neq 0}\}.$$

Definición 2.15 (Funciones test)**.** Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se dice una **función test** cuando su soporte es compacto. Al conjunto de todas las funciones test lo denotamos por $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nota 2.2. La siguiente proposición es la razón por la que las funciones test son tan usadas. Posteriormente, damos una generalización de la misma.

Proposición 2.11. *Para todo conjunto cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y para todo conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que D está contenido en U, existe una función test f tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ sobre D, y $spt\, f \subseteq U$.*

Demostración. Caso particular de la demostración de [3, Proposición 2.25]. □

Definición 2.16 (Funciones test)**.** Sea M un espacio topologico. Supongamos $A \subseteq M$ un conjunto cerrado y $U \subseteq M$ un conjunto abierto tal que $A \subseteq U$. Una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ se dice **función test para** A **con soporte en** U cuando $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$ sobre A, y $spt\, f \subseteq U$.

Proposición 2.12. *Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Para todo conjunto cerrado $D \subseteq M$ y para todo conjunto abierto $U \subseteq M$ tal que D está contenido en U, existe una función test suave para D con soporte en U.*

Demostración. Ver [3, Proposición 2.25]. □

2.1.10. Conjuntos de Nivel

Definición 2.17. Sea M y N variedades diferenciables con o sin frontera. Dado un punto $p \in M$ y un mapa suave $F : M \to N$, definimos el **rango de** F **en** p como la dimensión de la imagen de dF_p. En el caso que el rango sea el mismo en todo punto de M, decimos que F tiene **rango constate.**

Definición 2.18 (Subvariedad incrustada)**.** Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Una **subvariedad incrustada de** M es un conjunto $U \subseteq M$ que es una variedad topológica con la topología de subespacio y está dotada de una estructura suave respecto a la cual el mapa de inclusión $U \hookrightarrow M$ es suave y de rango constante igual a la dimensión de U, i.e, el diferencial del mapa de inclusión es inyectivo en U. En el caso que el mapa de inclusión sea un mapa propio, decimos que U es una **incrustación propia.**

Definición 2.19. Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Si U es una *subvariedad incrustada* de M, definimos la **codimensión de** U **en** M como el número $dim\, M - dim\, U$.

Definición 2.20 (Conjunto de nivel)**.** Sean M y N variedades diferenciables con o sin frontera. Para todo mapa $\Psi : M \to N$ y para todo $x \in N$, el **conjunto de nivel de** Ψ **en** x es el conjunto $\Psi^{-1}(x)$.

Proposición 2.13. *Sean M y N variedades diferenciables, y sea $\Psi : M \to N$ un mapa suave con rango constante m. Todo conjunto de nivel es una subvariedad incrustada propia de codimensión m en M.*

Demostración. Ver [3, Teorema 5.12]. □

Proposición 2.14. *Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera, y sea $U \subseteq M$ un conjunto de nivel de un mapa suave $\Psi = (\Psi^1, \ldots, \Psi^k) : M \to \mathbb{R}^k$ tal que el diferencial $d_p\Psi$ es sobreyectivo en todo $p \in M$. Si $q \in M$, un vector $X \in T_qM$ es tangente a U si y solo si $X\Psi^1 = \cdots = X\Psi^n = 0$.*

Demostración. Es una consecuencia de [3, Proposición 5.18]. □

2.1.11. Fibrado Vectorial

Definición 2.21. En el contexto de las variedades diferenciables con o sin frontera, si $\pi : M \to N$ es un mapa continuo, una **sección de** π es un mapa inverso derecho continuo para π, i.e., un mapa continuo $\sigma : N \to M$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_N$.

Definición 2.22 (Campo vectorial suave)**.** Si M es una n-variedad diferenciable con o sin frontera, un **campo vectorial sobre M** es una sección del mapa $\pi : TM \to M$. Más concretamente, un campo vectorial es un mapa continuo

$$\begin{aligned} X : \ M &\to \ TM \\ p &\mapsto \ X(p) = X_p, \end{aligned}$$

tal que

$$\pi \circ X = Id_M,$$

o equivalentemente, $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$. Decimos que el campo vectorial es **suave** cuando el mapa X lo es. El espacio de todos los campos vectoriales suaves lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Nota 2.3. En el contexto de la definición anterior, si X es un campo vectorial sobre M y $(U, (x^i))$ es una carta de coordenadas suave, entonces tenemos que

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p,$$

para todo $p \in U$. En este sentido, tenemos n funciones $X^1, \ldots, X^n : U \to \mathbb{R}$, llamadas **funciones componente de X.**

Proposición 2.15. *Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera, y $X : M \to TM$ un campo vectorial. Si $(U, (x^i))$ es una carta de coordenadas suave sobre M, entonces sus funciones componentes son suaves si y solo si X es suave en U.*

Demostración. Ver [3, Proposición 8.1]. □

Ejemplo 2.4. Dado M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Si $(U, (x^i))$ es una carta de coordenadas suave sobre M, entonces la asignación

$$p \longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$

define un campo vectorial sobre U, denominado el **i-ésimo campo vectorial coordenada** y denotado por $\partial/\partial x^i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, el cual, por la Proposición 2.15, es suave pues sus funciones componente son constantes. Al conjunto de todos los campos vectoriales coordenadas $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n\}$ lo denotamos por $(\partial/\partial x^i)$.

Definición 2.23 (Fibras Locales y Globales)**.** Sea M es una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Un grupo ordenado de k elementos de campos vectoriales $(X_1, \ldots, X_k)$ definidos sobre algún conjunto $A \subseteq M$ se dice **linealmente independiente** cuando $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$ es linealmente independiente en T_pM, para todo $p \in A$. Y decimos que $(X_1, \ldots, X_k)$ **genera el fibrado** cuando $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$ genera T_pM, para todo $p \in A$. Una **fibra local** es un grupo ordenado de campos vectoriales $\{E_1, \ldots, E_n\}$ definidos sobre algún conjunto abierto $U \subseteq M$ tal que es *linealmente independiente* y *genera el fibrado*, es decir, $\{E_1|_p, \ldots, E_n|_p\}$ es una base de T_pM, para todo $p \in U$. El grupo ordenado $\{E_1, \ldots, E_n\}$ se dice una **fibra global** cuando $U = M$, y es una **fibra suave** (o **fibra diferenciable**) cuando sus campos vectoriales integrantes son mapas suaves. A menudo denotamos por (E_i) a una fibra local (o global) $(E_1, \ldots, E_n)$.

Ejemplo 2.5. Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Si $(U, (x^i))$ es una carta de coordenadas suave, entonces el grupo de campos vectoriales de coordenadas forman una fibra local suave $(\partial/\partial x^i)$ sobre U, llamada **fibra coordenada.**

Nota 2.4. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, obtenemos una nueva función $Xf : M \to \mathbb{R}$, definida por

$$(Xf)(p) = X_p(f),$$

para todo $p \in M$.

El siguiente resultado caracteriza la suavidad de Xf.

Proposición 2.16. *Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera, y sea $X : M \to TM$ un campo vectorial. Se tienen las siguientes equivalencias:*

(a) X es suave.

(b) Para todo $f \in C^\infty(M)$, la función Xf es suave sobre M.

Demostración. Ver [3, Proposición 8.14] □

Nota 2.5. De la Proposición 2.16, un campo vectorial suave $X \in \mathfrak{X}(M)$ induce un mapa de $C^\infty(M)$ sobre si mismo y cumple la siguiente regla del producto:

$$X(fg) = fXg + gXf \tag{2.2}$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$. Más aun, el mapa inducido es lineal sobre $\mathbb{R}$.

Definición 2.24. Sea M una variedad con o sin frontera. Decimos que un mapa $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ es una **derivación** cuando es lineal sobre $\mathbb{R}$ y satisface la regla (2.2).

El siguiente resultado muestra que toda derivación de $C^\infty(M)$ puede ser identificada con un campo vectorial suave y, por tanto, a ambos los identificamos con la misma letra.

Proposición 2.17. *Sea M una variedad con o sin frontera. Un mapa $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ es una derivación si y solo si D es de la forma $Df = Xf$ para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$ y para todo $f \in C^\infty(M)$.*

Demostración. Ver [3, Proposición 8.15] □

Definición 2.25. Sea M una variedad diferenciable. Un mapa $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ se dice una derivación cuando se cumple

Definición 2.26 (Bracket de Lie)**.** Sean X y Y campos vectoriales suave sobre M. Sea $f \in C^\infty(M)$, por la Proposición 2.16, tenemos que $YXf = Y(Xf) \in C^\infty(M)$. En este sentido, definimos un operador $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, llamado el **Bracket de Lie de X y Y,** definido por

$$[X, Y]f = XYf - YXf,$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

Nota 2.6. Un hecho importante del operador $[X, Y]$ es que es un campo vectorial.

Lema 2.1. *El bracket de Lie de un par de campos vectoriales suaves es un campo vectorial suave.*

Demostración. Ver [3, Lema 8.25] □

El valor del campo vectorial $[X, Y]$ en un punto $p \in M$ es la derivación en p dada por la formula:

$$[X, Y]|_p = f = X_p(Yf) - Y_p(Xf),$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

Definición 2.27. [Fibrado vectorial suave] Sea M un espacio topológico. Un **fibrado vectorial de rango k sobre M** es un espacio topológico E junto con un mapa sobreyectivo continuo $\pi : E \to M$ que satisface los siguientes enunciados:

- Para cada $p \in M$, la *fibra* $E_p = \pi^{-1}(p)$ sobre p está dotada con la estructura de un espacio vectorial real de dimensión k.
- Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p y un homeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (conocida como una **trivialización local de E sobre U**), tal que
  1. $\pi_U \circ \Phi = \pi$ (donde $\pi_U : U \times \mathbb{R} \to U$ es la proyección).
  2. Para cada $q \in U$, la restriccón de Φ a E_q, $\Phi : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$, es un isomorfismo.

En el contexto de la Definición 2.27, cuando M y E son variedades diferenciables con o sin frontera, π es un mapa suave, y las trivializaciones locales son difeomorfismos, E es llamado **fibrado vectorial suave** y las trivializaciones se llaman **trivializaciones locales suaves.** El espacio E es llamado el **espacio total del fibrado,** M es conocida como **base del fibrado** y π como la **proyección** de E en M.

En algunas ocasiones, omitiremos todos los detalles de la definición y llanamente nos referimos a un fibrado vectorial por “$\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial”.

Definición 2.28 (Secciones suaves de fibrados vectoriales)**.** Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial. Una **sección de E** es una sección de el mapa π, esto es, un mapa continuo $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$. En este caso, $\sigma(p)$ es un elemento de el fibrado E_p, para cada $p \in M$.

En cambio, una **sección local de E** es un mapa continuo $\sigma : U \to E$ definido sobre algún subconjunto abierto $U \subseteq M$, tal que $\pi \circ \sigma = Id_U$. En el caso $U = M$, la sección se llama **global**. Si M es una variedad diferenciable y E es un fibrado vectorial suave, una sección (global o local) se dice **suave** cuando es un mapa suave de dominio a E.

El conjunto de todas las secciones suaves de E, denotado por $\mathscr{T}(M)$, es un espacio vectorial de dimensión finita bajo las operaciones de suma y multiplicación por constantes punto por punto.

2.1.12. Espacio y Fibrado Cotangente

Definición 2.29 (Covectores)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Definimos un **covector sobre** V como una funcion lineal real valuada sobre V, es decir, una función lineal $\omega : V \to \mathbb{R}$. El espacio de todos los covectores sobre V es denotado por V^* y lo llamamos **espacio dual (algebraico) de** V.

Definición 2.30. [Espacio cotangente] Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Para cada $p \in M$, definimos el **espacio cotangente en** p, denotado por T_p^*M, como el espacio dual de T_pM, es decir,

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Los elementos de T_p^*M son llamados **covectores tangentes en** p**,** o solo **covectores en** p. Dadas unas coordenadas locales suaves (x^i) sobre un conjunto abierto $U \subseteq M$, para cada $p \in U$ la base de coordenadas $(\partial/\partial x^i|_p)$ genera una base (conocida como **base dual**) para T_p^*M, la cual denotaremos por $(\lambda^i|_p)$, y sus elementos están definidos por:

$$\lambda^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j|_p} \right) = \delta^i_j \text{ para todo } i, j \in \{1, \ldots, n, \},$$

donde δ^i_j es el símbolo de la *delta de Kronecker* que cumple

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Definición 2.31 (Fibrado cotangente)**.** En el mismo contexto de la definición 2.30, definimos el **fibrado cotangente de** M como la unión disjunta

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T^*_p M.$$

Esto define n mapas $\lambda_1, \dots, \lambda_n : U \to T^*M$, llamados **campos de covectores coordenadas.**

Definición 2.32 (El diferencial de f)**.** Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Sea $f \in C^\infty(M)$. Definimos el **diferencial de f**, denotado por df, por

$$df_p(v) = vf \quad \text{para todo } v \in T_pM.$$

Así, si X es un campo vectorial, tenemos que

$$df_pX = X_pf \quad \text{para todo } p \in M.$$

Por tanto,

$$dfX = Xf,$$

para todo campo vectorial X. En particular, para todo $j \in \{1, \dots, n, \}$, tenemos que $dx^j|_p = \lambda^j|_p$, para todo $p \in M$, lo que implica que $dx^j = \lambda^j$.

Nota 2.7. El diferencial de toda función suave $f \in C^\infty(M)$ es un campo de covectores suave (ver [3, Proposición 11.18]). Además, este operador *diferencial* es el mismo que el definido en las subsecciones anteriores: en el primer caso tenemos un mapa lineal $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ y en el segundo un covector $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ en $p \in M$, y ambos son el mismo objeto usando la identificación canónica de $\mathbb{R}$ con $T_{f(p)}\mathbb{R}$. Por este motivo en ambas definiciones se usa la misma notación, pues definen el mismo objeto.

Proposición 2.18 (El fibrado cotangente como un fibrado vectorial)**.** *Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Con su mapa de proyec-*

ción natural y la estructura de espacio vectorial natural en cada fibra, el fibrado cotangente T^*M tiene una topología y estructura diferenciable única que la hace un fibrado vectorial suave de rango n sobre M y los campos de covectores coordenadas son secciones locales suaves.

Demostración. Ver [3, Proposición 11.9].

□

Definición 2.33 (Campos de covectores)**.** Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Una sección (local o global) de T^*M es llamada un **campo de covectores** (o **campo covector**) y se dice **suave** cuando la sección lo es.

2.1.13. Velocidad de una Curva

Definición 2.34 (Diferenciabilidad sobre subconjuntos cerradas)**.** Sean M y N variedades diferenciables con o sin frontera, y $A \subseteq M$ un subconjunto cerrado. Decimos que el mapa $F : A \to N$ es **diferenciable (o suave) sobre A** cuando para cada punto $p \in A$ existe un abierto $W \subseteq M$ que contiene a p y un mapa suave $\tilde{F} : W \to N$ que coincide con F en el conjunto $W \cap A$.

Definición 2.35 (Velocidad de una curva)**.** Sea M una variedad topológica con o sin frontera. Definimos una **curva en M** como el mapa continuo $\gamma : J \to M$, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo (en el caso que J contenga uno o ambos puntos extremos, la definiciónes de esta sección tienen sentido por considerar a J como una variedad con frontera o por interpretar a sus derivaciones en tales puntos como derivaciones laterales). Si en adición M es una variedad diferenciable con o sin frontera, dada una curva suave $\gamma : J \to M$ y $t_0 \in J$, definimos la **velocidad de** γ **en** t_0, denotada por $\gamma'(t_0)$, como el vector

$$\gamma'(t_0) = d\gamma_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{\gamma(t_0)}M,$$

donde $d/dt|_{t_0}$ es el vector base de coordenadas estándar de $T_{t_0}\mathbb{R}$. (Como ocurre en el cálculo elemental, usamos la notación $d/dt|_{t_0}$ en lugar de $\partial/\partial|_{t_0}$ cuando trabajamos en una variedad de dimensión una).

En otras palabras, este vector tangente actúa de la siguiente manera:

$$\gamma'(t_0)(f) = d\gamma_{t_0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}(f\circ\gamma)$$
$$= (\gamma\circ f)'(t_0) \qquad \text{para todo } f\in C^\infty(J).$$

En el caso que $t_0 \in J$ es un punto extremo, la derivación con respecto a t_0 la interpretamos como una derivación lateral, o equivalentemente como la derivación de cualquier extensión suave de $f\circ\gamma$ de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a t_0. Denotamos a las derivaciones laterales por:

$$\gamma'(a_i^+) = \lim_{t\to a_i^+}\gamma'(t);$$
$$\gamma'(a_i^-) = \lim_{t\to a_i^-}\gamma'(t).$$

A veces usamos las siguientes notaciones para referirnos al vector velocidad:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0), \quad \left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Nota 2.8. En el contexto de la definición anterior. Si (U,φ) es una carta diferenciable con funciones coordenadas (x^i) y $\gamma(t_0)\in U$, podemos denotar, al menos para t lo suficientemente cercanos a t_0, el mapa de coordenadas de γ por:

$$\gamma^i(t) = (x^i\circ\gamma)(t),$$

para todo $i\in\{1,\dots,n\}$. Y tenemos que

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}\left.\frac{d}{dx^i}\right|_{\gamma(t_0)}.$$

Definición 2.36 (Vectores de velocidad)**.** En el contexto de la Definición 2.35, a los vectores de tipo $\gamma'(t_0)$ nos referiremos como **vectores de velocidad** y en el caso que t_0 es un punto extremo de J, como **vectores de velocidad lateral**.

2.1.14. Segmento de Curva Suave por Partes

Definición 2.37 (Segmento de curva suave por partes)**.** Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Un **segmento de curva en M** es una curva continua $\gamma : [a, b] \to M$ cuyo dominio es un intervalo compacto. La curva γ se dice un **segmento de curva suave** cuando es suave considerando a $[a, b]$ como una variedad con frontera (o, equivalentemente, interpretando la suavidad justo como en la definición 2.34), y se dice un **segmento de curva suave por partes** cuando existe una partición finita $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ de $[a, b]$ tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es suave, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

En este último caso, la continuidad de γ significa que $\gamma(t)$ se aproxima al mismo valor cuando t se aproxima a cualquiera de los puntos a_i (distintos de a_0 y a_k) por la derecha o izquierda. La suavidad de γ en cada subintervalo significa que γ tiene un vector de velocidad lateral en cada punto a_i cuando nos aproximamos por la izquierda o por la derecha, sin la necesidad que sean iguales.

Siempre supondremos que una curva es suave, a menos que se especifique lo contrario.

Proposición 2.19. *Si M es una variedad diferenciable conexa con o sin frontera, cualquier par de puntos de M pueden ser unidos por un segmento de curva suave por partes.*

Demostración. Ver [3, Proposición 11.33]. □

2.1.15. Pullback

Definición 2.38 (Mapa dual)**.** Sean V y W espacios vectoriales, y sea $A : V \to W$ un mapa lineal. Definimos un mapa lineal $A^* : W^* \to V^*$, llamado el **mapa dual de A**, por

$$(A^* w)(v) = w(A(v)) \text{ para todo } w \in W^{,} \; v \in W.$$

Definición 2.39 (Pullback)**.** Sea $F : M \to N$ un mapa suave entre variedades diferenciables con o sin frontera, y sea $p \in M$ un punto arbitrario.

El diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ induce el mapa dual lineal

$$dF_p^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM,$$

llamado **pullback punto por punto de F en p**. Recordemos que l mapa dF_p^* está caracterizado por:

$$dF_p^*(w)(v) = w(dF_p(v)) \text{ para todo } w \in T^*_{F(p)}N,\ v \in T_pM.$$

Si ω es un campo covector sobre N, definimos el campo covector $F^*\omega$, llamado **pullback de ω por F,** por

$$(F^*\omega)_p = (F^*\omega)(p) = dF_p^*(\omega(F(p))),$$

Explícitamente, para un vector $v \in T_pM$, se tiene que

$$(F^*\omega)_p(v) = \omega_{(F(p))}(dF_p(v)).$$

Proposición 2.20. *Sea $F : M \to N$ un mapa suave entre variedades diferenciables con o sin frontera, y sea ω un campo covector sobre M. Entonces $F^*\omega$ es un campo covector continuo sobre M. Si ω es suave, $F^*\omega$ también lo es.*

Demostración. Ver [3, Proposición 11.26]. □

2.1.16. Tensores y Producto Tensorial

Definición 2.40 (Funciones multilineales)**.** Sean $V, V_1, \dots, V_k$ espacios vectoriales. Un mapa

$$\begin{aligned} f: \quad V_1 \times \cdots \times V_k &\longrightarrow \quad V \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto \quad f(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

se dice **multilineal** cuando es lineal en cada una de sus variables por separado. El espacio de todas las funciones multilineales de $V_1, \dots, V_k$ a V es denotado por $L(V_1, \dots, V_k; V)$.

Definición 2.41 (Producto tensorial de covectores)**.** Sean $V_1, \dots, V_k$,

$W_1, \ldots, W_l$ espacios vectoriales y supongamos que $A \in L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ y $B \in L(W_1, \ldots, W_l; \mathbb{R})$. Definimos la función

$$A \otimes B : V_1 \times \cdots \times V_k \times W_1 \times \cdots \times W_l \to \mathbb{R},$$

por la asignación

$$A \otimes B(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l) = A(v_1, \ldots, v_k)B(w_1, \ldots, w_l),$$

y lo llamamos **producto tensorial de A y B.** Se sigue, de la multilinealidad de A y B, que $A \otimes B$ es un elemento de $L(V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_l; \mathbb{R})$.

En particular, si $\omega^j \in V_j^*$, para cada $j = 1, \ldots, k$, entonces $\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k \in L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$ es la función multilineal dada por

$$\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k(v_1, \ldots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k). \tag{2.3}$$

Definición 2.42 (Espacio vectorial libre)**.** Sea S un conjunto cualquiera. Una **combinación lineal formal de elementos de** S es una función $f : S \to \mathbb{R}$ tal que $f(s) = 0$ para todo $s \in S$, salvo un conjunto finito. El **espacio vectorial libre sobre** S, denotado por $F(S)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales formales de elementos de S. Bajo la adición y multiplicación por escapar punto por punto, $F(S)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Notemos que cada elemento $f \in F(S)$ puede ser escrito en la forma $f = \sum_{i=1}^m a_i x_i$, donde $x_1, \ldots, x_m$ son los elementos de S para los cuales $f(x_i) = a_i \neq 0$.

Definición 2.43 (Producto tensorial)**.** Sean $V_1, \ldots, V_k$ espacios vectoriales reales. Consideremos el espacio vector libre $F(V_1 \times \cdots \times V_k)$, el cual es el conjunto de todas las combinaciones lineales formales finitas de las k-tuplas $(v_1, \ldots, v_k)$, con $v_i \in V_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Sea R el subespacio vectorial de $F(V_1 \times \cdots \times V_k)$ generado por todos los elementos de la forma:

$$(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) - a(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k),$$

$$(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) - (v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) - (v_1, \ldots, av_i', \ldots, v_k),$$

con $v_i, v_i' \in V_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $a \in \mathbb{R}$. Definimos el **producto tensorial de**

los espacios $V_1, \ldots, V_k$, denotado por $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, al espacio cociente

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k = F(V_1 \times \cdots \times V_k)/R.$$

Adicionalmente, si $\Pi : F(V_1 \times \cdots \times V_k) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ es la proyección natural, la clase de equivalencia de un elemento $(v_1, \ldots, v_k)$ de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ es denotado por

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = \Pi(v_1, \ldots, v_k), \tag{2.4}$$

y lo llamamos el **producto tensorial (abstracto) de** $v_1, \ldots, v_k$. Se sigue de la definición que el producto tensorial satisface las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
(v_1 \otimes \cdots \otimes av_i \otimes \cdots \otimes v_k) &= a(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k), \\
(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i + v_i' \otimes \cdots \otimes v_k) &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_k) \\
&\quad + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_k).
\end{aligned}$$

con $v_i, v_i' \in V_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $a \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.21. *[Producto tensorial concreto vs. abstracto] Si* $V_1, \ldots, V_k$ *son espacios vectoriales de dimensión finita, entonces existe un isomorfismo canónico*

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^* \cong L(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{R})$$

bajo el cual el producto tensorial definido por 2.4 corresponde al producto tensor de covectores definido por 2.3.

Demostración. Ver [3, Proposición 12.10]. □

Definición 2.44 (Tensores covariantes y contravariantes sobre un Espacio Vectorial)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Cuando k es un entero positivo, un **k-tensor covariante sobre** V es un elemento del *producto tensorial* de V consigo mismo, k veces, el cual, gracias a la Proposición 2.21 sabemos que puede ser considerada como una función multilineal real valuada de k elementos de V :

$$\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{k veces}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El numero k es llamado el **el rango de** α. Por conveción, un 0-tensor es solo un número real. Denotamos el espacio vectorial de todos los k-tensores covariantes sobre V

$$T^k(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{\text{k veces}}.$$

2.1.17. Tensor Simétrico

Definición 2.45 (Tensor simétrico)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un k-tensor covariante α sobre V es **simétrico** cuando su valor no se altera al intercambiar cualquier par de sus argumentos, es decir, cuando

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para cualquier $1 \leq i < j \leq k$, y cualquier $v_1, \dots, v_k \in V$. El espacio de todos los k-tensores covariantes y simétricos es un subespacio lineal de $T^k(V^*)$, al cual denotamos por $\Sigma^k(V^k)$.

Definición 2.46 (Simetrización)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Denotemos por S_k el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, k\}$. Dado un k-tensor α y una permutación $\sigma \in S_k$, definimos un k-tensor ${}^\sigma\alpha$ por

$${}^\sigma\alpha(v_1 \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)} \dots, v_{\sigma(k)})$$

para todo $v_1 \dots, v_k \in V$. Denotamos por $\tau\sigma$ a la composición de τ y σ, es decir,

$$\tau\sigma(j) = \tau(\sigma(j)), \text{ para todo } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Definimos un mapa proyección $Sym : T^k(V^*) \to \Sigma^k(V^*)$ por

$$Sym\, \alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^\sigma\alpha.$$

En otras palabras,

$$(Sym\, \alpha)(v_1 \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \alpha(v_{\sigma(1)} \dots, v_{\sigma(k)})$$

para todo $v_1 \ldots, v_k \in V$.

Proposición 2.22. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Para todo $\alpha \in T^k(V^*)$, se tiene que*

(a) $Sym\,\alpha$ es simétrico.

(b) $Sym\,\alpha = \alpha$ si y solo si α es simétrico.

Demostración. Ver [3, Proposición 12.14]. $\square$

Nota 2.9. La Proposición anterior plasma que en efecto el mapa Sym es un mapa de proyección.

Definición 2.47 (Producto Simétrico)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$ y $\beta \in \Sigma^l(V^*)$, definimos el **producto simetrico** de α y β como el $(k+l)$-tensor $\alpha\beta$ dado por

$$\alpha\beta = Sym(\alpha \otimes \beta).$$

Proposición 2.23. *En el contexto de la definición anterior, todo producto simétrico es un tensor simétrico y bilineal. Además, si α y β son covectores de un espacio vectorial de dimensión finita V, tenemos que*

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

Demostración. Sean $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$ y $\beta \in \Sigma^l(V^*)$, sabemos que $\alpha \otimes \beta \in T^{(k+l)}(V^*)$. Por tanto, de la Proposición 2.22, $\alpha\beta = Sym(\alpha \otimes \beta)$ es simétrico. Dado que $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$ y $\beta \in \Sigma^l(V^*)$ son arbitrarios, concluimos que todo producto simétrico es un tensor simétrico. Adicionalmente, como el producto tensorial $\otimes$ es un operador bilineal, de la definición de Sym, se tiene que a la vez el producto simétrico es bilineal.

Si α y β son covectores, tenemos que

$$\alpha\beta(v, w) = \frac{1}{2}(\alpha(v)\beta(w) + \beta(w)\alpha(v))$$

para todo $v, w \in V$. Así,

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

$\square$

2.1.18. Campo de Tensores

Definición 2.48 (Fibrado tensorial y Campo de tensores sobre variedades)**.** Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Definimos el **fibrado de k-tensores covariantes sobre** M (o también es llamado **fibrado tensorial sobre** M**)** por la unión disjunta

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^* M).$$

Una sección de un fibrado tensorial es **campo de tensores sobre** M. Un **campo de tensores suave** es una sección que es suave en el sentido usual de secciones suaves de fibrados vectoriales.

El espacio de las secciones suaves de los fibrados tensoriales covariantes se denota por $\Gamma(T^k T^* M)$ (o también por $\mathscr{T}^k(M)$), y es un espacio vectorial de dimensión infinita. Dadas unas coordenadas locales (x^i), estas secciones pueden ser escritas como

$$A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} A_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k},$$

para todo $A \in \Gamma(T^k T^* M)$. Las funciones $A_{i_1,\ldots,i_k}$ se llaman **funciones componente de A** en las coordenadas dadas.

Proposición 2.24. *Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera, y sea $A : M \to T^k T^* M$ una sección. Se tienen las siguientes equivalencias:*

(a) A es suave.

(b) En todas las cartas de coordenadas suaves, las funciones componente son suaves.

(c) Todo punto de M está contenido en alguna carta de coordenadas en la cual A tiene funciones componente que son suaves.

Demostración. Ver [3, Proposición 12.19]. □

Un **campo de tensores simétrico** sobre una variedad es un campo de tensores covariantes, cuyos valores, en cada punto, son tensores simétricos. El producto simétrico de dos o mas campos de tensores simétricos es definido punto por punto, justo como el producto tensorial.

2.1.19. Pullback sobre Campos de Tensores

Definición 2.49. Sea $F : M \to N$ una función suave entre variedades diferenciables con o sin frontera. Para cada punto $p \in M$ y para cada $\alpha \in T^k(T^*_{F(p)}N)$, definimos el tensor $dF^*_p \in T^k(T^*_pM)$, llamado **pullback punto por punto de** α **por F en p**, por

$$dF^*_p(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)),$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in T_pM$. Si A es un k-campo tensorial covariante, definimos el k-campo tensorial F^*A sobre M, llamado **pullback de A por F,** por

$$(F^*A)_p = dF^*_p(A_{F(p)}).$$

En otras palabras, el campo F^*A, para cada grupo de vectores $v_1, \dots, v_k \in T_pM$, tiene la siguiente asignación:

$$(F^*A)_p(v_1, \dots, v_k) = A_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

Proposición 2.25. *Sea $F : M \to N$ una función suave entre variedades diferenciables con o sin frontera y sea A un campo tensorial covariante sobre N. Entonces el pullback F^*A es un campo tensorial continuo, y es suave en el caso que B sea suave.*

Demostración. Ver [3, Proposición 12.25]. □

2.2. Métricas de Riemann

En esta sección vamos a definir las *métricas de Riemann* y con esto las *variedades de Riemann*, además vamos a definir y examinar algunas propiedades geométricas en el contexto de las *variedades de Riemann*. En la Subsección 2.2.1 presentamos algunos conceptos geométricos como ángulos y normas sobre el espacio tangente y en la Subsección 2.2.3 definimos la longitud de una curva. Los resultados principales se exponen en la Subsección 2.2.5, donde definimos una métrica y demostramos que la topología inducida por la métrica coincide con la topología de la *variedad de Riemann*.

2.2.1. Métrica y Variedad de Riemann

En esta subsección definimos las *métricas de Riemann* y las *variedades de Riemann*. También inducimos el concepto de ángulo y una norma sobre el espacio tangente. Además, al finalizar la subsección, se incluye un ejemplo de *variedad de Riemann*.

Definición 2.50 (Métrica y variedad de Riemann)**.** Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Una **métrica de Riemann sobre M** es un 2-campo tensorial covariante, simétrico y suave sobre M, el cual es definido positivo en cada punto. Una **variedad de Riemann (con frontera)** es un par (M, g), donde M es una variedad diferenciable (con frontera) y g es una métrica de Riemann.

Nota 2.10. A pesar de que la definición de una *métrica de Riemann* sobre una variedad diferenciable con o sin frontera M exija bastantes condiciones, estas siempre existen. De hecho, toda variedad diferenciable con o sin frontera cuenta con al menos una *métrica de Riemann* (ver [3, Proposición 13.3]). En este marco, las *variedades de Riemann* son tan comunes como las *variedades diferenciables*.

A continuación, demostramos que el concepto de métrica de Riemann

g sobre M nos permite inducir un producto interno

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto g_p(v, w) \end{aligned}$$

sobre T_pM, para cada $p \in M$. Por este motivo, a menudo usamos la siguiente notación:

$$\langle v, w \rangle_g = g_p(v, w) \quad \text{para todo } v, w \in T_pM.$$

Proposición 2.26. *Sea (M, g) una variedad de Riemann con o sin frontera. El 2-tensor g_p define un producto interno sobre T_pM, para todo $p \in M$.*

Demostración. Sea $p \in M$, cualquiera. Demostremos que

$$g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

es un producto interno, es decir, debemos probar que se satisfacen los siguientes enunciados:

1. Simetría: $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ para todo $v, w \in T_pM$;
2. Bilinealidad: Para todo $v, v', w, w' \in T_pM$ y $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, se tiene que
   - $g_p(au + a'u', w) = ag_p(u, w) + a'g_p(u', w)$;
   - $g_p(u, bw + b'w') = bg_p(u, w) + b'g_p(u, w')$;
3. No negatividad: Se tiene que
   - $g_p(u, u) \geq 0$ para todo $v \in T_pM$;
   - $g_p(u, u) = 0$ si y solo si $u = 0$.

En efecto, por la definición de g, g_p es un 2-tensor simétrico, por tanto, se satisface la condición (1). A la vez, sabemos que g_p es un 2-tensor covariante sobre T_pM, por tanto, dado que considerados a los tensores como mapas multilineales, en este caso, se sigue la bilinealidad. Adicionalmente, el mapa g, al ser una métrica de Riemann, asegura que sus imágenes sobre M son definidas positivas, así, en particular, g_p es definida positiva y se satisface (3).

Por tanto, dado que $p \in M$ es fijo y arbitrario, se concluye el resultado.

$\square$

El producto interno g_p induce una **norma** sobre T_pM, a través del mapa $\|\cdot\|_g$ definido por

$$\|v\|_g = \langle v, v\rangle_g^{1/2} = g_p(v,v)^{1/2},$$

para todo $v \in T_pM$ y todo $p \in M$. Dado cualquier $p \in M$, definimos el **ángulo** entre dos vectores tangentes no nulos $v, w \in T_pM$ como el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle_g}{\|v\|_g \|w\|_g}. \tag{2.5}$$

El concepto de ángulo entre vectores tangentes nos permite agregar la noción de ortogonalidad. Decimos que dos vectores tangentes $v, w \in T_pM$ son **ortogonales** cuando

$$\langle v, w\rangle_g = 0,$$

lo cual, gracias a (2.5), significa que el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

Notemos que para cualquier coordenada local suave (x^i), una métrica de Riemann puede ser escrita por:

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j,$$

donde (g_{ij}) es una matriz simétrica definida positiva de funciones suaves. Además, por la simetría de la métrica de Riemann g, obtenemos que

$$\begin{aligned} g &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ji} dx^i \otimes dx^j\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ji} dx^j \otimes dx^i\right) \\ &= g_{ij} dx^i\, dx^j. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6. La *métrica Euclidiana* $\bar{g}$ sobre $\mathbb{R}^n$ es el ejemplo más simple de una métrica de Riemann, la cual, en las coordenadas estándar, está dada por

$$\bar{g} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \, dx^i \otimes dx^j,$$

donde δ_{ij} es la *delta de Kronecker* (ver 2.30). Esta métrica evaluada en los vectores tangentes $v = (v^1, \dots, v^n)$, $w = (w^1, \dots, w^n) \in T_p\mathbb{R}^n$, para un $p \in M$ cualquiera, da como resultado la cantidad:

$$\bar{g}_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \, v^i w^j = \sum_{i=1}^{n} v^i w^j = v \cdot w.$$

En otras palabras, $\bar{g}$ es el 2-campo tensorial cuya evaluación en cada punto es el producto punto de $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Métrica de Pullback

En esta subsección analizamos en que condiciones el pullback de una *métrica de Riemann* es también una *métrica de Riemann.*

Definición 2.51 (Métrica de pullback)**.** Supongamos que M y N son variedades diferenciables con o sin frontera, g es una métrica de Riemann sobre N y $F : M \to N$ es un mapa suave. El pullback F^*g es un 2-campo tensorial covariante, simétrico y suave sobre M. Si en adición F^*g es definido positivo, F^*g es una métrica de Riemann y es llamada la **métrica de pullback de F.**

Comprobemos que en efecto F^*g tiene las características previamente descritas.

Proposición 2.27. *En el contexto de la Definición 2.51, se tiene que F^*g es un 2-campo tensorial covariante, simétrico y suave sobre M.*

Demostración. Por la Proposición 2.25, dado que $F : M \to N$ es un mapa suave, sabemos que F^*g es un 2-campo tensorial covariante suave sobre M. Nos hace falta comprobar que F^*g es simétrico. Para ello, sea $p \in M$, demostremos que el tensor $(F^*g)_p$ es simétrico.

Sean $v,\, w \in T_pM$, debemos demostrar que

$$(F^*g)_p(v,w) = (F^*g)_p(w,v),$$

es decir,

$$g_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w)) = g_{F(p)}(dF_p(w), dF_p(v)). \tag{2.6}$$

Pero el tensor $g_{F(p)}$ es simétrico pues g es un 2-campo tensorial simétrico, por tanto, (2.6) se cumple. En consecuencia, como los vectores $v,\, w \in T_pM$ son arbitrarios, concluimos que el pullback $(F^*g)_p$ es simétrico. □

El siguiente resultado nos indica bajo que condiciones F^*g es una métrica de pullback. Antes de presentar dicho resultado recordemos que un mapa suave $F : M \to N$ se dice una **inmersión suave** cuando su diferencial es inyectivo en cada punto.

Proposición 2.28. *Sean $F : M \to N$ un mapa suave entre variedades diferenciables con o sin frontera y g una métrica de Riemann sobre N. Se tiene que F^*g es una métrica de Riemann sobre M si y solo si F es una inmersión suave.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que F es una inmersión suave y probemos que F^*g es una métrica de Riemann sobre M. Por la Proposición 2.6, basta demostrar que, para cada $p \in M$, el tensor $(F^*g)_p$ es definido positivo, es decir, que

$$(F^*g)_p(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad (F^*g)_p(v,v) \geq 0,$$

para todo vector no nulo $v \in T_pM$. Sea $p \in M$, cualquiera. Como los mapas dF_p y $g_{F(p)}$ son lineal y bilineal, respectivamente, tenemos que $dF(0) = 0$ y además

$$\begin{aligned}(F^*g)_p(0,0) &= g_{F(p)}(dF(0), dF(0)) \\ &= g_{F(p)}(0,0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, sea $v \in T_pM$ un vector no nulo, probemos que

$$(F^*g)_p(0, 0) > 0.$$

Por hipótesis F es una inmersión suave, esto significa que el mapa lineal dF_p es inyectivo. Por tanto, $dF_p(v) \neq 0$ pues $v \neq 0$. Así, del hecho que $g_{F(p)}$ es definida positiva, obtenemos que

$$(F^*g)_p(v, v) = g_{F(p)}(dF(v), dF(v)) > 0.$$

Luego, como $p \in M$ y $v \in T_pM$ son arbitrarios, concluimos que $(F^*g)_p$ es definido positivo, para todo $p \in M$.

Ahora supongamos que F^*g es una métrica de Riemann M y demostremos que F es una inmersión suave. Para ello, dado cualquier $p \in M$, debemos probar que el mapa lineal $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es inyectivo, lo que equivale a probar que el núcleo de dF_p está conformado solo por el vector nulo. Sea $v \in T_pM$ tal que $dF_p(v) = 0$. Demostremos que

$$v = 0.$$

Dado que $g_{F(p)}$ es definida positiva, tenemos que

$$(F^*g)_p(v, v) = g_{F(p)}(dF(v), dF(v)) = g_{F(p)}(0, 0) = 0.$$

Luego, $v = 0$ pues por hipótesis F^*g es una métrica de Riemann y, por tanto, el tensor $(F^*g)_p$ es definido positivo. Como $v \in T_pM$ es arbitrario, concluimos que el núcleo de dF_p es el conjunto unitario que contiene al vector nulo. Así, dado que $p \in M$ es fijo y arbitrario, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es inyectivo, para todo $p \in M$, y, en consecuencia, F es una inmersión suave. □

2.2.3. Longitud de Curvas

En esta subsección vamos a definir la *longitud de una curva* y a estudiar sus propiedades.

Definición 2.52 (Rapidez de una curva)**.** Sea (M, g) una variedad de Riemann con o sin frontera y $\gamma : I \to M$ una curva cualquiera. Definimos la

rapidez de γ **en** $t \in I$ como el número escalar

$$\|\gamma'(t)\|_g.$$

.

Nota 2.11. na curva $\gamma : I \to M$ se dice de **rapidez unitaria** cuando

$$\|\gamma'(t)\|_g = 1,$$

para todo $t \in I$.

Definición 2.53 (Longitud de curvas)**.** Supongamos que (M, g) es una variedad de Riemann con o sin frontera y $\gamma : [a, b] \to M$ es un segmento de curva suave por partes. Definimos la **longitud de** γ **entre** $\gamma(a)$ **y** $\gamma(b)$ por la cantidad

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt.$$

Notemos que la integral está bien definida dado que $\|\gamma'(t)\|_p$ es continua, excepto en finitos puntos.

En el espacio Euclidiano, una propiedad geométrica intuitiva al momento de medir curvas es la de poder particionar la parametrización total en tramos más pequeños para luego sumarlos. El resultado enunciado a continuación, nos indica que esto también se sostiene para los segmentos de curva.

Proposición 2.29. *Sean M una variedad de Riemann con o sin frontera y $\gamma : [a, b] \to M$ un segmento de curva suave por partes. Para cualquier $c \in (a, b)$, se tiene que*

$$L_g(\gamma) = L_g(\gamma|_{[a,c]}) + L_g(\gamma|_{[c,b]}).$$

Demostración. Sea $c \in (a, b)$, cualquiera. Por la definición de la longitud de una curva, sabemos que

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt.$$

Luego, por las propiedades de la integral:

$$\begin{aligned} L_g(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt \\ &= \int_a^c \|\gamma'(t)\|_g dt + \int_a^c \|\gamma'(t)\|_g dt \\ &= L_g(\gamma|_{[a,c]}) + L_g(\gamma|_{[c,b]}). \end{aligned}$$

□

Definición 2.54 (Reparametrizaciones)**.** Sea $\gamma : [a,b] \to M$ un segmento de curva parametrizada sobre una variedad de Riemann M con o sin frontera. Definimos una reparametrización de γ como un segmento de curva $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, donde $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ es un difeomorfismo.

Proposición 2.30. *Supongamos que (M,g) es una variedad de Riemann con o sin frontera. Para cualquier segmento de curva $\gamma : [a,b] \to M$ y cualquier reparametrización $\tilde{\gamma}$ de γ, se tiene que*

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

Demostración. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva suave y $\tilde{\gamma}$ una reparametrizacón de γ. Sabemos que existe $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ un difeomorfismo tal que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Dado que φ es un difeomorfismo tenemos que su primera derivada es o siempre positiva ($\varphi' > 0$) o siempre negativa ($\varphi' < 0$) (ver Proposición 2.1). Supongamos que $\varphi'(x) > 0$, para todo $x \in [c,d]$. Luego, como φ es estrictamente creciente y es biyectiva, tenemos que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$. Así, por 2.6, tenemos que

$$\begin{aligned} L_g(\tilde{\gamma}) &= \int_c^d \|\tilde{\gamma}'(t)\|_g dt = \int_c^d \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\|_g dt \\ &= \int_c^d \left\| d(\gamma \circ \varphi) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \right\|_g dt = \int_c^d \left\| d\gamma \circ d\varphi \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \right\|_g dt, \end{aligned}$$

pero

$$d\varphi \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) f = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) (f \circ \varphi) = \varphi'(t) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{\varphi(t)} \right) f, \text{ para todo } f \in C^\infty([c,d]).$$

Por tanto, como $d\gamma$ es lineal y $\varphi' > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
L_g(\tilde{\gamma}) &= \int_c^d \left\| d\gamma \circ d\varphi \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t \right) \right\|_g dt \\
&= \int_c^d |\varphi'(t)| \left\| d\gamma \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{\varphi(t)} \right) \right\|_g dt \\
&= \int_c^d \varphi'(t) \left\| \gamma'(t)|_{t=\varphi(t)} \right\|_g dt,
\end{aligned}$$

y haciendo el cambio de variable $\varphi(t) \to t$, se sigue que

$$\begin{aligned}
L_g(\tilde{\gamma}) &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma'(t)\|_g \, dt \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, dt \\
&= L_g(\gamma).
\end{aligned}$$

En el caso $\varphi' < 0$ se tiene que $\varphi(c) = b$ y $\varphi(d) = a$, y de manera similar vemos que:

$$\begin{aligned}
L_g(\tilde{\gamma}) &= -\int_c^d \varphi'(t) \left\| \gamma'(t)|_{t=\varphi(t)} \right\|_g dt = -\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\gamma'(t)\|_g \, dt \\
&= -\int_b^a \|\gamma'(t)\|_g \, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, dt = L_g(\gamma).
\end{aligned}$$

Dado que las curvas γ y $\tilde{\gamma}$ son arbitrarias, concluimos que el valor de la longitud de una curva suave y el de su reparametrización siempre coinciden. Demostremos que la igualdad también se sostiene para segmentos de curvas. Supongamos $\gamma : [a, b] \to M$ un segmento de curva suave, $\tilde{\gamma}$ una reparametrización de γ y $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ su correspondiente difeomorfismo. Sabemos que existe una partición $a = a_0, \dots, a_k = b$ de $[a, b]$ tal que γ es una curva suave en cada subintervalo. Así, por la Proposición 2.29 y por lo previamente demostrado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
L_g(\gamma) &= \sum_{i=0}^{k-1} L_g(\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} L_g(\tilde{\gamma}|_{[(\varphi^{-1})(a_i),(\varphi^{-1})(a_{i+1})]}) \\
&= L_g(\tilde{\gamma}).
\end{aligned}
$$

Como los segmentos de curva γ y $\tilde{\gamma}$ son arbitrarios, concluimos que

$$L_g(\gamma) = L_g(\tilde{\gamma}),$$

para todo segmento de curva γ y para cualquier reparametrización $\tilde{\gamma}$. $\square$

2.2.4. Isometrías entre Variedades de Riemann

La *Geometría de Riemann* se encarga de estudiar las propiedades de las *variedades de Riemann* que son invariantes bajo isometrias locales o globales. Con esta motivación, en esta subsección definimos a que nos referimos con isometrias y analizamos si las curvas son en efecto objetos invariantes.

Definición 2.55 (Isometrías entre variedades de Riemann)**.** Si (M, g) y $(\tilde{M}, \tilde{g})$ son variedades de Riemann, el mapa $\varphi : M \to \tilde{M}$ es una **isometría de Riemann** cuando es un difeomorfismo y además:

$$\varphi^* \tilde{g} = g.$$

En general, decimos que φ es una **isometría local de Riemann** cuando para cada $p \in M$ existe un conjunto abierto $U \subseteq M$ tal que $\varphi|_U$ es una isometría sobre un abierto de $\tilde{M}$. Decimos que (M, g) y $(\tilde{M}, \tilde{g})$ son **isométricas (locales)** como variedades de Riemann cuando existe una isometría (local) de Riemann entre ellas.

Proposición 2.31. *Las longitudes de curvas son invariantes bajo isometrías locales. En otras palabras, si* (M, g) *y* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *son variedades con o sin* *frontera, y* $F : M \to \tilde{M}$ *es una isometría local, entonces*

$$L_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = L_g(\gamma),$$

para todo segmento de curva suave γ *en* M.

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ un segmento de curva suave y sea $t \in [a, b]$ un valor real, demostremos que

$$\|(F \circ \gamma)'(t)\|_{\tilde{g}} = \|\gamma'(t)\|_g.$$

Por hipótesis F es una isomería local, así, para $\gamma(t) \in M$, existen dos conjuntos, $U \subseteq M$ y $\tilde{U} \subseteq N$, que son abiertos en sus respectivas variedades, tales que $\gamma(t) \in M$, $F|_U : U \to \tilde{U}$ es un difeomorfismo y $F^*\tilde{g} = g$ sobre U. Por tanto, como $\gamma(t) \in U$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(F \circ \gamma)'(t)\|_{\tilde{g}} =& \|d(F \circ \gamma)_t\|_{\tilde{g}} \\
=& \left\| dF_{\gamma(t)} \left(d\gamma \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \right) \right\|_{\tilde{g}} \\
=& \tilde{g}_{F(\gamma(t))} \left(dF_{\gamma(t)} \left(d\gamma \left(d/dt|_t \right) \right), dF_{\gamma(t)} \left(d\gamma \left(d/dt|_t \right) \right) \right)^{1/2} \\
=& (F^*\tilde{g})_{\gamma(t)} \left(d\gamma \left(d/dt|_t \right), d\gamma \left(d/dt|_t \right) \right)^{1/2} \\
=& g_{\gamma(t)} \left(d\gamma \left(d/dt|_t \right), d\gamma \left(d/dt|_t \right) \right)^{1/2} \\
=& \|\gamma'(t)\|_g.
\end{aligned}$$

En consecuencia, recordando que $t \in [a, b]$ es arbitrario, tenemos que

$$\|(F \circ \gamma)'(t)\|_{\tilde{g}} = \|\gamma'(t)\|_g \qquad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Entonces, integrando sobre todo el intervalo, se obtiene que

$$\int_a^b \|(F \circ \gamma)'(t)\|_{\tilde{g}} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt,$$

es decir,

$$L_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = L_g(\gamma).$$

Luego, como la curva γ es arbitraria, concluimos que

$$L_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = L_g(\gamma)$$

se cumple para todo segmento de curva γ. $\square$

2.2.5. La Función de Distancia de Riemann

En esta subsección vamos a dotar de una métrica a las *variedades de Riemann*, y demostraremos que la topología inducida por la métrica coincide con la topología de la variedad.

Definición 2.56 (La función de distancia de Riemann)**.** Supongamos que (M, g) es una variedad de Riemann conexa. Para cada $p, q \in M$, la **función de distancia (de Riemann) de p a q,** se define por:

$$
\begin{aligned}
& d_g(p,q) \\
= \;& \inf \{L_g(\gamma) : \gamma \text{ es un segmento de curva suave por partes de } p \text{ a } q\},
\end{aligned}
$$

donde un segmento de curva de p a q es entendida como una curva

$$\gamma : [a,b] \to M,$$

tal que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Por la Proposición 2.19 existe al menos una curva que une cualquier par de puntos, y como el ínfimo de las longitudes de curvas esta acotado inferiormente por el cero, entonces existe el ínfimo de la definición de d_g y, por tanto, está bien definido.

Nota 2.12. La *función de distancia* solo está definida en *variedades de Riemann conexas*. En general, en una *variedad de Riemann conexa* no podemos asegurar que para todo par de puntos de la variedad exista una curva que los una.

Proposición 2.32. *Si $\bar{g}$ es la métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$ definida en el Ejemplo 2.6, la función de distancia $d_{\bar{g}}$ coincide con la distancia euclidiana usual, es decir,*

$$d_{\bar{g}}(x,y) = \|x - y\|.$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el siguiente segmento de curva suave que conecta x e y a través de una linea recta:

$$
\begin{aligned}
\gamma : [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\
t &\mapsto \gamma(t) = x + t(y - x).
\end{aligned}
$$

Por lo analizado en la subsección 2.1.8, tenemos que

$$\begin{aligned}|\gamma'(t)|_{\bar{g}} = \left| d\gamma\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right)\right|_{\bar{g}} &= \left|\sum_{i=1}^{n}[\gamma^i(t)]' \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}\right|_{\bar{g}} \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}(y^i - x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}\right|_{\bar{g}} = \|x-y\|, \end{aligned} \tag{2.7}$$

para todo $t \in [0,1]$. Por tanto,

$$L_{\bar{g}}(\gamma) = \int_0^1 \|x-y\|\, dt = \|x-y\|.$$

Sea $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un segmento de curva de x a y. Por medio del difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\to [a,b] \\ t &\mapsto \gamma(t) = a + t(b-a), \end{aligned}$$

definamos la reparametrización $\tilde{\psi}$ de ψ. Así, $\tilde{\psi} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ es una curva de x a y. De manera similar a (2.7), tenemos que

$$L_{\bar{g}}(\tilde{\psi}) = \int_0^1 |\tilde{\psi}'(t)|_{\bar{g}}\, dt = \int_0^1 \left\{\sum_{i=1}^{n}[\tilde{\psi}^{i\,\prime}(t)]^2\right\}^{1/2} dt = \int_0^1 \|\tilde{\psi}'(t)\|\, dt.$$

Supongamos que $x \neq y$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|\tilde{\psi}'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|\tilde{\psi}'(t)\| \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|}\, dt &\geq \int_0^1 \frac{\tilde{\psi}'(t)\cdot(x-y)}{\|x-y\|}\, dt \\ &= \frac{(\tilde{\psi}(1)-\tilde{\psi}(0))\cdot(x-y)}{\|x-y\|} = \|x-y\|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L_{\bar{g}}(\tilde{\psi}) \geq \|x-y\|.$$

Y como la longitud de una curva se conserva vía reparametrizaciones, tenemos que

$$L_{\bar{g}}(\psi) = L_{\bar{g}}(\tilde{\psi}) \geq \|x-y\|.$$

Así, dado que el segmento de curva ψ es arbitrario, concluimos que

$$L_{\bar{g}}(\psi) \geq L_{\bar{g}}(\gamma) = \|x - y\|,$$

para todo segmento de curva ψ de x a y. Luego, de la definición de la función de distancia y como γ es un segmento de curva que va de x a y, tenemos que

$$d_{\bar{g}}(x, y) = L_{\bar{g}}(\gamma) = \|x - y\|.$$

Cuando $x = y$, de la misma manera, de la definición de la función de distancia y como γ es un segmento de curva que va de x a y, tenemos que

$$0 = \|x - y\| = L_{\bar{g}}(\gamma) \geq d_{\bar{g}}(x, y) \geq 0.$$

Entonces,

$$0 = \|x - y\| = d_{\bar{g}}(x, y).$$

Como $x, y \in \mathbb{R}^n$ son arbitrarios, concluimos que

$$d_{\bar{g}}(x, y) = \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. □

El siguiente resultado simula la equivalencia de normas en un espacio vectorial de dimensión finita.

Lema 2.2. *Sea g una métrica de Riemann sobre un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado un subconjunto compacto $K \subseteq U$, existen constantes positivas c y C tales que*

$$c\|v\|_{\bar{g}} \leq \|v\|_g \leq C\|v\|_{\bar{g}} \quad \textit{para todo } x \in K,\ v \in T_x\mathbb{R}^n.$$

Demostración. Sea $K \subseteq U$ un conjunto compacto. Definamos el conjunto

$$L = \{(x, v) \in T\mathbb{R}^n : x \in K,\ \|v\|_{\bar{g}} = 1\}.$$

Por la Proposición 2.4, podemos identificar $T\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y, dado que $\|\cdot\|_{\bar{g}}$ es el producto punto de $\mathbb{R}^n$ (ver Ejemplo 2.6), entonces

$$L = K \times \mathbb{S}^{n-1},$$

donde $\mathbb{S}^{n-1}$ es la esfera de centro 0 y radio 1 de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, L es un conjunto compacto al ser producto cartesiano de conjuntos compactos. Luego, como la norma $\|\cdot\|_g$ es continua y estrictamente positiva en L, su imagen en L es compacta y sus elementos son positivos, es decir, existen constantes positivas c y C tales que

$$c \leq \|v\|_g \leq C \text{ para todo } (x, v) \in L.$$

Sea $x \in K$ y sea $v \in T_x\mathbb{R}^n$ tal que $\|v\|_g \neq 0$, definamos $\alpha = \|v\|_g$. Así, por la definción de L, $(x, \alpha^{-1}v) \in L$, de donde, debido a la homogeneidad de la norma,

$$\|v\|_g = \alpha\|\alpha^{-1}v\|_g \leq \alpha\, C = C\,\|v\|_{\bar{v}}.$$

De manera similar,

$$\|v\|_g = \alpha\|\alpha^{-1}v\|_g \geq \alpha\, c = c\,\|v\|_{\bar{v}}.$$

Por tanto,

$$c\|v\|_{\bar{g}} \leq \|v\|_g \leq C|\|v\|_{\bar{g}}.$$

Si $\|v\|_g = 0$ la desigualdad se cumple trivialmente. Así, dado que $x \in K$ y $v \in T_x\mathbb{R}^n$ son arbitrarios, concluimos que

$$c\|v\|_{\bar{g}} \leq \|v\|_g \leq C\|v\|_{\bar{g}},$$

para todo $x \in K$ y $v \in T_x\mathbb{R}^n$.

□

Proposición 2.33. *Supongamos que (M, g) es una variedad de Riemann conexa. La función de distancia de Riemann d_g define una métrica sobre M.*

Demostración. Vamos a usar la siguiente notación $d = d_g$. Demostremos que d es una métrica sobre M. Para ello, debemos probar que para todo $p,\ q,\ r \in M$ se cumplen los siguientes enunciados:

1. $d(p, q) \geq 0$;

2. $d(p, q) = 0$ si y solo si $p = q$;

3. $d(p,q) = d(q,p)$;

4. $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$.

Sean $p,\ q,\ r \in M$. Demostremos que se cumple (1). Sabemos que

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g \, dt \geq 0,$$

para todo segmento de curva suave por partes $\gamma : [a,b] \to M$ que conecta p y q (por la Proposición 2.19 existe al menos un segmento de curva suave por partes de p a q, por tanto, la declaración tiene sentido). Así, tomando el ínfimo sobre todos los segmentos de curva por partes γ anteriores, se sigue que

$$d(p,q) \geq 0.$$

Probemos (3). Notemos que cualquier segmento de curva suave $\gamma : [a,b] \to M$ de p a q define una reparametrización de q a p por medio de la función

$$\begin{aligned} \varphi : [a,b] &\to [a,b] \\ x &\mapsto \varphi(x) = b + a - x. \end{aligned}$$

En efecto, la función φ es un difeomorfismo, pues es una función polinómica de primer grado, y define la reparametricación $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, la cual es suave al ser la composición de funciones suaves y sus evaluaciones en los puntos extremos son:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(a) &= (\gamma \circ \varphi)(a) = \gamma(b + a - a) = q \\ \tilde{\gamma}(b) &= (\gamma \circ \varphi)(b) = \gamma(b + a - b) = p. \end{aligned}$$

Así, dado que cualquier segmento de curva suave de p a q define una reparametrización suave de q a p y sus longitudes son iguales (ver proposición 2.30), por la definición de $d_g = d$ y por las propiedades del ínfimo, concluimos que

$$d(p,q) \geq d(q,p).$$

De manera similar obtenemos el otro lado de la desigualdad y, por tanto, concluimos que

$$d(p,q) = d(q,p).$$

Ahora demostremos (2). Supongamos que $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to M$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to M$ son segmentos de curvas suaves por partes de p a q y q a r, respectivamente. Consideremos el siguiente difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : [b_1, b_2 - a_2 + b_1] &\to [a_2, b_2] \\ x &\mapsto \varphi(x) = x + a_2 - b_1, \end{aligned}$$

mediante el cual definimos la reparametrización $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \circ \varphi$. Definamos la curva $\gamma : [a_1, b_2 - a_2 + b_1] \to M$ tal que para todo $x \in [a_1, b_2 - a_2 + b_1]$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) & si \quad x \in [a_1, b_1] \\ \\ \tilde{\gamma}_2(x) & si \quad x \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1]. \end{cases}$$

Notar que γ está bien definida en b_1 porque $\gamma_1(b_1) = \tilde{\gamma}_2(b_1) = q$. La curva γ es un segmento de curva suave por partes pues en los subintervalos $[a_1, b_1]$ y $[b_1, b_2 - a_2 + b_1]$ toma los valores de los segmentos de curva suave por partes γ_1 y $\tilde{\gamma}_2$, respectivamente. Por las Proposiciones 2.29 y 2.19, tenemos que

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= L(\gamma|_{[a_1,b_1]}) + L(\gamma|_{[a_1,b_1]}) \\ &= L(\gamma_1) + L(\tilde{\gamma}_2) \\ &= L(\gamma_1) + L(\gamma_2), \end{aligned}$$

y junto a la definición de la función de distancia, se sigue que

$$d(p, r) \leq L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Luego, tomando el ínfimo sobre todas las curvas γ_1 y γ_2, tenemos que

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

Demostremos (2). Supongamos que $p = q$ y verifiquemos que $d(p, q) = 0$. Notemos que la curva constante

$$\begin{aligned} \xi : [0, 1] &\to M \\ x &\mapsto \xi(x) = p, \end{aligned}$$

es en particular un segmento de curva suave por partes de p a p cuya velocidad es cero, por tanto,

$$L(\xi) = \int_a^b \|0\|_g dt = \int_a^b 0\, dt = 0.$$

Luego, como sabemos que

$$0 \leq d(p,p) \leq L(\xi) = 0,$$

concluimos que

$$d(p,q) = d(p,p) = 0.$$

Para demostrar la condición suficiente de (2), vamos a suponer que $p \neq q$ y probaremos que

$$d(p,q) > 0.$$

Dado que M es un espacio de Hausdorff, existe una carta de coordenadas (U,φ) cuyo dominio contiene a p pero no a q. Además, existe un conjunto abierto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que el mapa $\varphi : U \to \tilde{U}$ es un difeomorfismo. Así, de las Proposiciones 2.8 y 2.6, el diferencial $d\varphi_{\hat{p}} : T_{\hat{p}}M \to T_{\varphi(\hat{p})}\mathbb{R}^n$ también es un difeomorfismo, para todo $\hat{p} \in U$. Por tanto, φ es una inmersión suave y, por la Proposición 2.28, el pullback $\varphi^*\bar{g}$ (con $\bar{g}$ la métrica estándar sobre $\mathbb{R}^n$ definida en el Ejemplo 2.6) es una métrica de Riemann sobre U. De manera similar, el pullback $(\varphi^{-1})^*g$ es una métrica de Riemann sobre $\tilde{U}$.

Por la Proposición 2.3, existe una bola coordenada regular W de radio δ centrada en p tal que $\overline{W} \subseteq U$. Por el Lema 2.2, en particular para la bola cerrada $\overline{B_\delta}(\varphi(p)) = (\varphi^{-1})(\overline{W}) \subseteq \tilde{U}$ y para la métrica de Riemman $(\varphi^{-1})^*g$ sobre $\mathbb{R}^n$, existen $c, C > 0$ tales que para todo $x \in \overline{B_\delta}(\varphi(p))$ y para todo $v \in T_x\mathbb{R}^n$,

$$c\|v\|_{\bar{g}} \leq \|v\|_{(\varphi^{-1})^*g} \leq C\|v\|_{\bar{g}}.$$

Así, para todo $\hat{p} \in \overline{W} = \varphi(\overline{B_\delta}(\varphi(p)))$ y para todo $v \in T_{\hat{p}}M$

$$c\|d\varphi_{\hat{p}}(v)\|_{\bar{g}} \leq \|d\varphi_{\hat{p}}(v)\|_{(\varphi^{-1})^*g} \leq C\|d\varphi_{\hat{p}}(v)\|_{\bar{g}},$$

a la vez, esto puede escribirse como:

$$c\|v\|_{\varphi^*\bar{g}} \leq \|v\|_g \leq C\|v\|_{\varphi^*\bar{g}}. \tag{2.8}$$

Luego, para todo segmento de curva suave por partes γ cuya imagen en un subconjunto de $\overline{W}$, por (2.8), se tiene que

$$cL_{\varphi^*\bar{g}}(\gamma) \leq L_g(\gamma) \leq CL_{\varphi^*\bar{g}}(\gamma). \tag{2.9}$$

Supongamos un segmento de curva suave por partes $\gamma : [a,b] \to M$ de p a q y fijemos t_0 el ínfimo de todos los $t \in [a,b]$ tales que $\gamma(t) \notin \overline{W}$. Notar $\gamma(b) = q \notin \overline{W} \subseteq U$, así, la definición de t_0 tiene sentido porque existe al menos un punto t que no pertenece a $\overline{W}$. Demostremos que $\gamma(t_0) \in \partial W$, lo que por la definición de W, equivale a demostrar que

$$\|\varphi(\gamma(t_0)) - \varphi(p)\| = \delta.$$

Como $\overline{W}$ es cerrado y γ es continua pues es suave, entonces $\gamma^{-1}(\overline{W}) \subseteq [a,b]$ es cerrado. Así, dado que $[a,b]$ es un conjunto compacto, tenemos que $\gamma^{-1}(\overline{W})$ alcanza un máximo, digamos $t_1 \in \gamma^{-1}(\overline{W})$. Por otro lado, para todo $t \in [a,b]$ tal que $\gamma(t) \in \overline{W}$, se tiene que

$$a \leq t \leq t_0.$$

Así, en particular,

$$t_1 \leq t_0.$$

Si $t_1 < t_0$, entonces existe $\tilde{t} \in (t_1, t_0)$. Sabemos que $\gamma(\tilde{t}) \in \overline{W} \cup \overline{W}^c$. En el primer caso, si $\gamma(\tilde{t}) \in \overline{W}$, por la definición de t_1, tenemos que $\tilde{t} \leq t_1$, pero esto contradice el hecho que $\tilde{t} > t_1$. En el caso que $\gamma(\tilde{t}) \in \overline{W}^c$ de manera similar, por la definición de t_1 se llega a una contradicción. Por tanto, necesariamente $t_0 = t_1$, y luego, considerando sus definiciones, tenemos que $t_1 \in \partial W$. Por tanto, para todo $t \in [a, t_0]$, $\gamma(t) \in \overline{W}$. Luego, por Proposición 2.32 y la linea (2.9),

$$\begin{aligned} c\,\delta = c\,d_{\tilde{g}}(\varphi(p), \varphi(\gamma(t_0))) =& c\,d_{F^*\tilde{g}}(p, \gamma(t_0)) \\ \leq& c\,L_{F^*\tilde{g}}(\gamma|_{[a,t_0]}) \\ \leq&, L_g(\gamma|_{[a,t_0]}) \\ \leq& L_g(\gamma). \end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre todas las curvas γ, obtenemos que

$$d(p,q) \geq c\,\delta > 0.$$

En consecuencia, dado que los puntos p, q, $r \in M$ son arbitrarios, concluimos que el espacio $d = d_g$ define una métrica sobre M.

□

Proposición 2.34. *Sea (M,g) es una variedad de Riemann conexa, cuya topología la denotamos por τ. La topología inducida por la métrica d_g coincide con la topología τ.*

Demostración. Sea $U \subseteq M$ un abierto de la topología τ. Probemos que U es un abierto en la topología inducida por la métrica d_g. Sea $p \in U$, cualquiera. Por la Proposición 2.3, existe una bola coordenada regular W de radio δ centrada en p tal que $\overline{W} \subseteq U$. De manera similar a lo desarrollado en la demostración de la Proposición 2.33, existe $c > 0$ tal que

$$d_g(p,q) \geq c\delta$$

para todo $q \notin \overline{W}$. Lo que equivale a que si

$$d_g(p,q) < c\delta,$$

entonces $q \in \overline{W} \subseteq U$, es decir, la bola abierta métrica de radio $c\delta$ y centro p está contenida en U. Luego, como $p \in U$ es fijo y arbitrario, concluimos que U es un conjunto abierto en la topología inducida por la métrica, pues todos sus elementos tienen bolas abiertas métricas que están contenidas en U.

Dado que U es arbitrario, todos los abiertos de la topología τ son abiertos en la topología inducida por la métrica.

Sea $U \subseteq M$ una bola abierta métrica. Probemos que U es un elemento de τ. Sea $p \in U$ y sea $(\hat{U},\varphi)$ una carta de coordenadas que contiene a p. Supongamos W una bola coordenada regular de radio δ y centro p tal que $\overline{W} \subseteq \hat{U}$. De manera similar a la demostración de la Proposición 2.33, existen $c, C > 0$ tales que

$$c\|v\|_{\varphi^*\bar{g}} \leq \|v\|_g \leq C\|v\|_{\varphi^*\bar{g}}. \tag{2.10}$$

para todo $v \in T_qM$, $q \in \overline{W}$. Sea $r < \delta$ un número positivo lo suficientemente pequeño como para que la bola abierta métrica de centro p y radio Cr esté contenida en U. Definamos

$$W_r = \{x \in \overline{W} : \, d_{\bar{g}}(\varphi(p), \varphi(x)) < r\}.$$

Sea $q \in W_r$, cualquiera. Consideremos el segmento de linea recta que une $\varphi(p)$ y $\varphi(q)$:

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ t \quad &\mapsto \quad \gamma(t) = \varphi(p) + t(\varphi(q) - \varphi(p)). \end{aligned}$$

Demostremos que $\gamma([0,1]) \subseteq \varphi^{(-1)}(\overline{W}) = \overline{B}_\delta(\varphi(p))$. Dado que $\varphi(p)$, $\varphi(q) \in \varphi^{(-1)}(\overline{W}) = \overline{B}_\delta(\varphi(p))$, entonces todos los puntos de la recta que une a ambos puntos también pertenecen a $\overline{B}_\delta(\varphi(p))$, pues las bolas cerradas son conjuntos convexos, así, $\gamma([0,1]) \subseteq \varphi^{(-1)}(\overline{W})$. Luego, podemos definir

$$\begin{aligned} \zeta : [0,1] \quad &\rightarrow \quad \overline{W} \subseteq M \\ t \quad &\mapsto \quad \zeta(t) = (\varphi^{(-1)} \circ \gamma)(t). \end{aligned}$$

De (2.10) y como ζ es un segmento de curva de p a q, tenemos que

$$d_g(p,q) \leq L_g(\zeta) \leq CL_{\varphi^*\bar{g}}(\zeta).$$

Luego, por la Proposición 2.31, la definición de W_r y dado que $q \in W_r$, tenemos que

$$d_g(p,q) \leq CL_{\varphi^*\bar{g}}(\zeta) = CL_{\bar{g}}(\gamma) = Cd_{\bar{g}}(\varphi(p), \varphi(q)) < Cr.$$

Dado que $q \in W_r$ es fijo y arbitrario, W_r está contenido en la bola abierta métrica de radio Cr y centro p, y por la definición de r, tenemos que W_r a la vez está contenida en U. Probemos que W_r es un conjunto abierto.

Como $r < \delta$, tenemos que

$$W_r = \varphi^{(-1)}(B_r(\varphi(p))) \subseteq \varphi^{(-1)}(B_\delta(\varphi(p))) \subseteq \overline{W}.$$

De donde, del hecho que φ es un difeomorfismo, inferimos que W_r es un conjunto abierto de τ. Luego, como $p \in U$ es arbitrario y existe $W_r \in \tau$ tal que $p \in W_r \subseteq U$, concluimos que U también es un conjunto abierto en τ. Así, dado que U es una bola abierta métrica arbitraria, todos los abiertos de la topología inducida por la métrica pertenecen a la topología τ.

Finalmente, como los abiertos de ambas topologías se pertenecen mutuamente, concluimos que las topologías son iguales. $\square$

2.2.6. El Gradiente de f

En este apartado vamos a definir el gradiente de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$. Sin embargo, este concepto lo vamos a utilizar en la próxima sección. Para definir el *gradiente de f*, donde f es una función de $C^\infty(M)$, vamos a usar su caracterización y no la asignación explicita pues va más allá de los interés del presente trabajo.

Nota 2.13. Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Recordemos que el diferencial de $f \in C^\infty(M)$, es un campo de covectores suave definido por

$$df_p(v) = vf \quad \text{para todo } v \in T_pM.$$

Así, si X es un campo vectorial, tenemos que

$$df_pX = X_pf \quad \text{para todo } p \in M.$$

En este sentido,

$$dfX = Xf,$$

para todo campo vectorial X.

Definición 2.57 (El mapa $grad$)**.** Sea (M, g) una variedad de Riemann. Supongamos $f \in C^\infty(M)$. Definimos el campo vectorial $grad\, f$, llamado el **gradiente de f**, como el campo vectorial que satisface

$$\langle grad\, f, X\rangle_g = dfX = Xf \quad \text{para todo campo vectorial } X. \tag{2.11}$$

Nota 2.14. Para todo $f \in C^\infty(M)$, el campo vectorial $grad\, f$ existe y es único (ver [3, El Isomorfismo Tangente-Cotangente]), por tanto, $grad\, f$ está bien definido.

2.3. Geodésicas

Desde ahora nuestro objetivo es desarrollar el concepto de geodésica y analizar su relación con las curvas minimizantes. La manera más obvia de definir las geodésicas es como curvas que minimizan longitudes. Sin embargo, en nuestro contexto, trabajar con esa definición es complicado y poco útil. Por ello, vamos a apoyarnos en otra propiedad de las líneas rectas de los espacios Euclidianos. En un espacio Euclidiano, una curva (parametrizada) es una línea recta si y solo si su aceleración es nula (su curvatura). En efecto, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada de rapidez unitaria tal que

$$\gamma''(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b],$$

entonces, por la teoría de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, existen $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \beta,$$

para todo $t \in [a, b]$. De manera similar, se tiene la contrarrecíproca. Para iniciar, debemos definir una noción de aceleración sobre curvas. Con miras a ese fin, presentamos el concepto de *conexión*.

Los resultados más importantes se exponen en las Subsecciones 2.3.7 y 2.3.8, donde se demuestra que las curvas minimizantes son geodésicas y que las geodésicas son localmente minimizantes, respectivamente.

2.3.1. Conexión Lineal

En esta subsección definimos que es una *conexión* y estudiamos sus propiedades.

Definición 2.58 (Conexión)**.** Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable M, y sea $\mathcal{E}(M)$ el espacio de todas las secciones suaves de E. Una **conexión** en E es un mapa

$$\begin{aligned} \nabla : \mathscr{T}(M) \times \mathcal{E}(M) &\rightarrow \mathcal{E}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla(X, Y) =: \nabla_X Y, \end{aligned}$$

tal que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\nabla_X Y$ es lineal sobre $C^\infty(M)$ en la variable X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y,$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$, y para todo $X_1, X_2 \in \mathscr{T}(M)$;

(b) $\nabla_X Y$ es lineal sobre $\mathbb{R}$ en la variable Y :

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, y para todo $Y_1, Y_2 \in \mathscr{T}(M)$;

(c) ∇ satisface la siguiente regla del producto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

El operador $\nabla_X Y$ se conoce como **derivación covariante de Y en la dirección de X**.

Nota 2.15. El siguiente resultado nos muestra que el operador *conexión* ∇ en realidad es un operador local.

Lema 2.3. *Sean* $\pi : E \rightarrow M$ *un fibrado vectorial,* ∇ *una conexión en* E, $X \in \mathscr{T}(M)$, $Y \in \mathscr{E}(M)$ *y* $p \in M$. *Si* $X = \tilde{X}$ *y* $Y = \tilde{Y}$ *en alguna vecindad* U *de* p, *entonces*

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$$

Demostración. Primero estudiemos la componente de Y. Tomemos $Z = Y - \tilde{Y}$, así, $Z = 0$ sobre una vecindad U de p. Probemos que $\nabla_X Z|_p = 0$. Sea $f \in C^\infty(M)$ una función test cuyo soporte está contenido en U y $f(p) = 1$.

Como Z se anula en U, tenemos que $fZ = 0$ en todo M. Por tanto, para todo $X \in \mathscr{T}(M)$, por las propiedades de ∇ tenemos que

$$\nabla_X(fZ) = \nabla_X(0fZ) = 0\nabla_X(fZ) = 0,$$

de donde,

$$(Xf)Z + f\nabla_X Z = \nabla_X(fZ) = 0.$$

Pero $(Xf)Z$ es cero sobre el soporte de f pues está contenido en U, así, $f\nabla_X Z = 0$ en U. Entonces, como $f(p) = 1$, tenemos que $\nabla_X Z|_p = 0$. Y de la linealidad de ∇, concluimos que

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p.$$

De manera similar, enfocándonos en la componente de X, obtenemos que

$$\nabla_X \tilde{Y}|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p.$$

Así,

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p.$$

□

Definición 2.59 (Conexión lineal)**.** Sea M una variedad diferenciable con o sin frontera. Una **conexión lineal** sobre M es una conexión en TM, es decir, una mapa

$$\nabla : \mathscr{T}(M) \times \mathscr{T}(M) \to \mathscr{T}(M),$$

que satisface las propiedades $(a) - (c)$ de la Definición 2.58.

Nota 2.16. Analicemos la descomposición local de la *conexión lineal* . Si M es una n-variedad diferenciable con o sin frontera y $\{E_i\}$ es una *fibra local* de TM para algún conjunto abierto $V \subset M$, entonces

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k E_k,$$

sobre V. para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Las n^3 funciones Γ_{ij}^k se llaman **símbolos de Christoffel**.

Nota 2.17. Al igual a lo que ocurre con la existencia de las *métricas de*

Riemann, toda *variedad diferenciable* cuenta con al menos una conexión lineal (ver [4, Proposición 4.12]).

Lema 2.4. *Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Si ∇ es una conexion lineal, $X, Y \in \mathscr{T}(M)$, y $\{E_i\}$ es una fibra local tal que $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ y $Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_i$ en un conjunto abierto $V \subseteq M$, entonces*

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left[XY^k + \sum_{j,i=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right] E_k$$

sobre V.

Demostración. Por las propiedades de la conexión lineal ∇, tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y = \nabla_X \left(\sum_{i=1}^n Y^i E_i \right) &= \sum_{i=1}^n \left[(XY^i)E_i + Y^i \nabla_X E_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[(XY^i)E_i + Y^i \nabla_{(\sum_{j=1}^n X^j E_j)} E_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[(XY^i)E_i + Y^i \sum_{j=1}^n X^j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k E_k \right]
\end{aligned}$$

y cambiando las variables de los índices, concluimos que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left[XY^k + \sum_{j,i=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right] E_k$$

sobre V. □

Nota 2.18. Recordemos que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces $Xf \in C^\infty(M)$ con la asignación

$$Xf(p) = X_p(f) \quad \text{para todo } p \in M.$$

El siguiente resultado nos permite extender el concepto de conexión sobre fibrados tensoriales $T^k(M)$.

Lema 2.5. *Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial y sea ∇ una conexión lineal sobre M. Existe una única conexión sobre cada fibrado tensorial $T^k(M)$,* *tambien denotada por ∇, para todo $k \in \mathbb{N}$. Esta conexión cumple las siguientes propiedades:*

1. *Sobre TM, ∇ coincide con la conexión dada.*

2. *Sobre $T^0M = C^\infty(M)$, ∇ está dado por:*

$$\nabla_X f = Xf \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M).$$

3. *∇ obedece la siguiente regla de producto tensorial:*

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G),$$

   para todo $F, G \in T^k(M)$.

4. *Para todo $F \in \mathscr{T}^k(M)$ y para todo campo de vectores $Y_1, \ldots, Y_k$, se tiene que*

$$(\nabla_X F)(Y_1, \ldots, Y_k) = X(F(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{i=1}^{k} F(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_k).$$

Todo lo anterior para todo $X \in \mathscr{T}(M)$.

Demostración. Ver [4, Proposición 4.15]. □

2.3.2. Geodésicas

En esta subsección exponemos la definicíon de una *geodésica*. Para ello, también definimos la *derivación covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva.*

Nota 2.19. En general, cuando declaremos "*sea $\gamma : I \to M$ una curva*" el intervalo I puede ser un intervalo abierto, cerrado, semicerrado o semiabierto, a menos que se mencione lo contrario. Además, recordemos que al decir *curva* nos estamos refiriendo a una *curva suave.*

Definición 2.60 (Campo vectorial de una curva)**.** Sea $\gamma : I \to M$ una curva. Un **campo vectorial a lo largo de** γ (o simplemente **campo vectorial**

de γ) es un mapa suave $V : I \to TM$ tal que

$$V(t) \in T_{\gamma(t)}M \quad \text{para todo } t \in I.$$

Denotamos por $\mathscr{T}(\gamma)$ al espacio de todos los campos vectoriales de γ. Un ejemplo inmediato de un campo vectorial de γ es el inducido por su vector velocidad: $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in I$.

Un campo vectorial V de γ se dice **extensible** cuando existe un campo vectorial $\tilde{V}$ definido en una vecindad de la imagen de γ tal que

$$V(t) = (\tilde{V} \circ \gamma)(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

Lema 2.6. *Sea M una n-variedad diferenciable con o sin frontera. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial y sea ∇ una conexión lineal sobre M. Para cada curva $\gamma : I \to M$, ∇ determina un único operador*

$$D_t : \mathscr{T}(\gamma) \to \mathscr{T}(\gamma),$$

que satisface las siguientes propiedades:

(a) Linealidad sobre $\mathbb{R}$:

$$D_t(aV + bW) = aD_t(V) + bD_t(W),$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $V, W \in \mathscr{T}(\gamma)$.

(b) La regla del producto:

$$D_t(fV) = f'V + fD_t(V),$$

para todo $f \in C^\infty(M)$, $V \in \mathscr{T}(\gamma)$.

(c) Si V es extensible, entonces para cualquier extensión $\tilde{V}$ de V, se tiene que

$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}.$$

*Para cualquier $V \in \mathscr{T}(\gamma)$, D_tV se llama la **derivación covariante de V a lo largo de** γ (o simplemente **derivación covariante de V de** γ).*

Demostración. Sea $\gamma : I \to M$ una curva suave. Demostremos primero la unicidad del operador D_t. Supongamos que D_t es tal operador que cumple las propiedades anteriores. Sea $X \in \mathscr{T}(\gamma)$, y sea $t_0 \in int\, I$. De manera similar a la demostración del Lema 2.3, la evaluación de $D_t X$ en t_0 solo depende en una vecindad $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$. Sea $(U, (x^i))$ un coordenada suave de M con $\gamma(t_0) \in U$. Así,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)},$$

para todo t en una vecindad de t_0, y $V^1, \dots, V^n$ son las funciones componente suaves definidas en una vecindad de t_0 en I. Luego, de las propiedades de D_t, y dado que $(\partial/\partial x^i)$ son su propia extensión, tenemos que

$$\begin{aligned} D_t X(t) &= \sum_{i=1}^{n} \left[(X^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} + X^i(t) D_t \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[(X^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} + X^i(t) \nabla_{\gamma'(t)} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} \right]. \end{aligned}$$

Usando los *símbolos de Christoffel* y la notación de la Nota 2.8, tenemos que

$$D_t X(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[(X^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)} + \sum_{j,k=1}^{n} X^i(t) (\gamma^j)'(t) \Gamma_{ji}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t)} \right].$$

Y cambiando la variable de los índices, llegamos a lo siguiente:

$$D_t X(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[(X^k)'(t) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t)} + \sum_{i,j=1}^{n} X^i(t) (\gamma^j)'(t) \Gamma_{ji}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t)} \right], \tag{2.12}$$

sobre una vecindad de t_0. En el caso que $t_0 \in I$ es un punto de frontera repetimos lo anterior para una extensión suave de γ sobre un intervalo abierto que contiene a I, y luego restringimos la extensión a I y obtenemos la misma linea (2.12). Luego, como $t_0 \in I$ y $X \in \mathscr{T}(M)$ son arbitrarios y el valor de $D_t X$ depende localmente, concluimos que el operador D_t es único pues sus descomposición es única y completamente determinada por la curva γ.

Demostremos la existencia. El conjunto $\gamma(I)$ puede ser recubierto por cartas coordenadas de M. Si definimos D_t en cada carta por la fórmula (2.12), esta cumple las propiedades (a)-(c). Además, notemos que el mapa D_t está bien definido pues de la unicidad tenemos que cuando dos cartas se sobreponen, el operador D_t coincide en su dominio en común.

$\square$

Utilizando la notación del Lema 2.6, presentamos la definición de geodésica.

Definición 2.61 (Geodésica)**.** Sea M una variedad con una conexión lineal ∇, y sea γ una curva sobre M. La **aceleración** de γ es el campo vectorial $D_t\gamma'$ de γ. Una curva es llamada una **geodésica** con respecto a ∇ cuando su aceleración es cero.

Teorema 2.1. *[Existencia y Unicidad de una Geodésica] Sea M una variedad con una conexión lineal ∇. Para cada $p \in M$, $V \in T_pM$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a t_0 y una geodésica $\gamma : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\gamma(t_0) = p \quad y \quad \gamma'(t_0) = V.$$

Si existen dos de estas geodésicas, entonces coinciden en su dominio en común.

Demostración. Ver [1, Teorema 4.10]. $\square$

Nota 2.20. Del Teorema anterior se puede inferir que, para cada $p \in M$ y $V \in T_pM$, existe una única geodésica $\gamma : I \to M$, llamada **geodésica maximal**, que no puede ser extendida a un intervalo abierto más grande, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0)$. Solo se debe tomar I como la unión de todos los intervalos abiertos donde las geodésicas del Teorema 2.1 están definidas. Esta *geodésica maximal* a menudo es llamada simplemente la **geodésica con punto inicial p y velocidad inicial V**, y denotada por γ_V. En la notación de la geodésica no se incluye el punto $\gamma(0) = p$ pues $p = \pi(V)$, con $\pi : TM \to M$ la proyección natural.

2.3.3. Geodésicas de Riemann

El objetivo de esta subsección es definir las *geodésicas de Riemann*. Para ello, debemos introducir la definición de *conexión de Riemann*.

Definición 2.62 (Compatibilidad de una conexión)**.** Sea g una métrica de Riemann sobre una variedad M. Decimos que una conexión lineal ∇ es **compatible con g** cuando esta satisface la siguiente regla:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g,$$

para todo campo vectorial X, Y, $Z \in \mathscr{T}(M)$. Una definición alternativa de compatibilidad es decir que ∇ es compatible cuando $\nabla g = 0$. Ambas definiciones son equivalentes, por tanto, se puede usar indistintamente cualquiera. Sin embargo, trabajamos con la enunciada en la definición.

El siguiente lema resalta algunas equivalencias de la definición de *compatibilidad.*

Lema 2.7. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Se cumplen las siguientes equivalencias:*

(a) ∇ es compatible con g.

(b) ∇g es nula.

(c) Si V, W son campos vectoriales a lo largo de cualquier curva $\gamma : [a, b] \to M$, entonces

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle_g = \langle D_t V, W \rangle_g + \langle V, D_t W \rangle_g.$$

Aquí,

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle V, W \rangle_g(t) = \langle V(t), W(t) \rangle_g. \end{aligned}$$

(d) Si V, W son campos vectoriales de alguna curva γ tales que $D_t V$ y $D_t W$ son nulos, entonces $\langle V, W \rangle_g$ es constante.

Demostración. Ver [4, Proposición 5.5]. □

Definición 2.63 (Tensor de torsión)**.** Sea ∇ una conexión de una variedad M. Definimos el **tensor de torsión de** ∇ como el mapa

$$\tau : \mathscr{T}(M) \times \mathscr{T}(M) \to \mathscr{T}(M),$$

definido por
$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
para todo $X, Y \in \mathscr{T}(M)$.

Definición 2.64 (Simetría de una conexión lineal)**.** Una conexión lineal ∇ se dice **simétrica** cuando su tensor de torsión es idénticamente nulo, es decir, cuando
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$
para todo $X, Y \in \mathscr{T}(M)$.

Teorema 2.2. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Existe una única conexión lineal ∇ sobre M que es compatible con g y es simétrica.*

Demostración. Ver [1, Teorema 5.4] □

Definición 2.65 (Conexión de Riemann)**.** La conexión del Teorema 2.2 se llama la **conexión de Riemann** o la **conexión Levi-Civita de g.**

Definición 2.66 (Geodésicas de Riemann)**.** Sea (M, g) una variedad de Riemann. Una **geodésica de Riemann** de M es una geodésica con respecto a la *conexión de Riemann* correspondiente.

Nota 2.21. En adelante, sobre una variedad de Riemann siempre trabajaremos con la conexión de Riemann y, por tanto, con las geodésicas de Riemann, a las que solo nos referiremos como geodésicas.

Lema 2.8. *Todas las geodésicas de Riemann son curvas de rapidez constante.*

Demostración. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Sea γ una geodésica de Riemann. Así, sabemos que $D_t\gamma' = 0$. Por el Lema 2.7.(d), tenemos que $\|\gamma'\|_g^2 = \langle\gamma', \gamma'\rangle_g$ es constante, es decir, $\|\gamma'\|_g$ es constante. En otras palabras, γ es una curva de rapidez constante. □

2.3.4. El Mapa Exponencial

En esta subsección vamos a repasar algunos resultados del *mapa exponencial* y discutiremos sobre objetos matemáticos que este mapa induce.

Recordemos que en la Nota 2.20 declaramos que, para cada $p \in M$ y para cualquier vector $V \in T_pM$, existe una única geodésica maximal γ_V. Con base en este hecho presentamos la definición de *mapa exponencial.*

Definición 2.67. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathscr{E} = \{V \in TM : \ \gamma_V \text{ es definido sobre un intervalo conteniendo } [0,1]\}.$$

Definimos el **mapa exponencial** $exp : \mathscr{E} \to M$ por

$$exp(V) = \gamma_V(1),$$

para todo $V \in \mathscr{E}$. Para cada $p \in M$, definimos el **mapa exponencial restringido** exp_p como la restricción del *mapa exponencial* al conjunto $\mathscr{E}_p = \mathscr{E} \cap T_pM$.

Nota 2.22. Recordemos que un conjunto S de un espacio vectorial se dice **en forma de estrella con respecto a** $x \in S$ cuando para cualquier $y \in S$, se tiene que el segmento de linea q de x a y también pertenece a S, es decir,

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in S$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Proposición 2.35. *[Propiedades del mapa exp] Sea (M,g) una variedad de Riemann.*

1. *$\mathscr{E}$ es un conjunto abierto de TM que contiene la sección cero, y cada conjunto $\mathscr{E}_p$ es en forma de estrella con respecto a 0.*
2. *Para cada $v \in TM$, la geodésica γ_V esta dada por*

$$\gamma(t) = exp(tV),$$

   donde t recorre todo el dominio de γ_V.

3. *El mapa exp es suave.*

Demostración. Ver [1, Proposición 5.7]. $\square$

Nota 2.23. El mapa exp es útil para poder presentar el concepto de *vecindad normal*, el cual empezamos a estudiar a partir del siguiente resultado.

Lema 2.9 (Lema de Vecindad Normal)**.** *Para cada $p \in M$, existe una vecindad $\mathfrak{V}$ del cero de T_pM y una vecindad $\mathfrak{U}$ de p de M tal que*

$$exp_p : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Ver [1, Lema 5.10]. □

Definición 2.68 (Vecindad Normal, Bola Geodésica y Esfera Geodésica)**.** En el contexto del Lema anterior, cualquier vecindad abierta $\mathfrak{U}$ de $p \in M$ que es la imagen bajo exp_p de una vecindad abierta en forma de estrella con respecto a $0 \in T_pM$ es llamada una **vecindad normal de p.** Si $\epsilon > 0$ es un número positivo tal que exp_p es un difeomorfismo sobre la bola $B_\epsilon(0) \subset T_pM$, entonces el conjunto imagen $exp_p(B_\epsilon(0))$ es llamado una **bola geodésica en M.** Por último, si la bola cerrada $\bar{B}_\epsilon(0)$ está contenida en un conjunto abierto $V \subset T_pM$ sobre el cual exp_p es un difeomorfismo, entonces $exp_p(\bar{B}_\epsilon(0))$ es llamada una **bola geodésica cerrada**, y $exp_p(\bar{B}_{\partial\epsilon}(0))$ es llamada una **esfera geodésica**.

Nota 2.24. Sea (M, g) una variedad de Riemann, toda *bola geodésica* en M es una *vecindad normal.* En efecto, para todo $p \in M$, toda bola abierta $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ es un conjunto convexo, así, para todo $q \in B_\epsilon(0)$ y $0 < t < 1$, se tiene que $tq \in B_\epsilon(0)$. Por tanto, $B_\epsilon(0)$ es en forma de estrella con respecto a 0.

Definición 2.69. [Coordenadas normales] Sea M una n-variedad de Riemann y sea $p \in M$. Una base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ para T_pM induce un isomorfismo por el mapa $E : \mathbb{R}^n \to T_pM$ cuya ley de asignación es $E(x^1, \ldots, x^n) = x^iE_i$, para todo $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathfrak{U}$ es una vecindad normal de p, podemos combinar el anterior isomorfismo con el mapa exponencial para obtener una carta de coordenadas

$$\varphi = E^{-1} \circ exp_p^{-1} : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n.$$

Tales coordenadas se llaman **coordenadas normales centradas en p.** Dado $p \in M$ y una vecindad normal $\mathfrak{U}$ de p, existe una correspondencia uno a uno entre las cartas coordenadas y las bases ortonormales en p.

Definición 2.70 (Campo vectorial de radio unitario)**.** En el contexto de la Definición 2.69, dada una carta de coordenadas normal centrada en p, definimos la **función de distancia radial** $r : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ por

$$r(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \right)^{1/2},$$

y el **campo vectorial de radio unitario** $\partial/\partial r$ sobre $\mathfrak{U} - \{p\}$ por

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Proposición 2.36 (Propiedades de las Coordenadas Normales)**.** *Sea (M, g) una n-variedad de Riemann. Sea $(\mathfrak{U}, (x^i))$ una carta de coordenadas normales centrada en un punto $p \in M$, cualquiera. Se tienen los siguientes literales:*

(a) Para cada $V = \sum_{i=1}^{n} V^i \partial/\partial x^i \in T_pM$, la geodésica γ_V que empieza en p con vector de velocidad inicial V es representado en coordenadas normales por

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \ldots, tV^n)$$

tanto como γ_V esté contenida en $\mathfrak{U}$.

(b) Las coordenadas de p son $(0, 0, \ldots, 0)$.

(c) En cualquier punto $q \in \mathfrak{U} - \{p\}$, $\partial/\partial r$ es el vector velocidad de la geodésica de rapidez unitaria de p a q.

Demostración. Ver [4, Proposición 5.24]. □

Lema 2.10. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Sea U una vecindad normal de $p \in M$, la función de distancia radial y el campo vectorial radial están bien definidos, y son independientes de las coordenadas normales elegida. Tanto r como $\partial/\partial r$ son suaves sobre $U - \{p\}$, y r^2 es suave sobre todo U.*

Demostración. Ver [4, Lema 6.8]. □

Definición 2.71 (Geodésica Radial)**.** Sea (M, g) una variedad de Riemann. Las geodésicas que empiezan en $p \in M$ y se encuentran dentro de una vecindad normal de p se dicen **geodésicas radiales.**

Definición 2.72. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Un conjunto abierto $W \subset M$ se dice **uniformemente normal** cuando existe $\delta > 0$ tal que para todo $p \in W$, se cumple que

$$W \subseteq exp_p(B_\delta(0)).$$

Nota 2.25. La definición *vecindad uniformemente normal* refina el concepto de *vecindad normal*: Toda *vecindad uniformemente normal* es en particular una *vecindad normal* (Este resultado se basa en la Nota 2.24).

Lema 2.11. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Dado un punto $p \in M$ y un conjunto abierto U de p, existe una vecindad uniformemente normal $\mathfrak{U}$ de p que está contenido en U.*

Demostración. Ver [1, Lema 5.12]. □

2.3.5. Curva Regular

En esta subsección discutimos el concepto de *curva regular* y *curva admisible* que van a ser mencionados en las próximas subsecciones.

Definición 2.73 (Curva regular)**.** Sea M una variedad diferenciable. Decimos que $\gamma : I \to M$ es una **curva regular** cuando es una curva suave tal que $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Y γ se dice un **segmento de curva regular por partes** (o simplemente **curva admisible**) cuando su dominio I es un intervalo compacto y existe una partición $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es una *curva reglar*, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Nota 2.26. Las geodésicas son curvas regulares pues tienen rapidez constante y son no nulas.

Lema 2.12. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Se tienen las siguientes propiedades:*

(a) *Toda curva regular en M tiene una reparamezación de rapidez unitaria.*

(b) *Toda curva admisible $\gamma : [a,b] \to M$ tiene una reparametrización $\tilde{\gamma} : [0,L] \to M$ de rapidez unitaria con $L = L_g(\gamma)$.*

Demostración. Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular. Sabemos que $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Por tanto, para $\alpha \in I$ cualquiera, si definimos el mapa $\varphi : I \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{\alpha}^{t} \|\gamma'(t)\|_g dt \quad \text{para todo } t \in I,$$

entonces, $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|_g > 0$, para todo $t \in I$. Como φ es estrictamente creciente, continua y con derivada no nula en I, entonces $\varphi(I)$ es un intervalo y $\varphi : I \to \varphi(I)$ es un difeomorfismo. Definiendo $f = \varphi^{-1} : \varphi(I) \to I$, obtenemos la reparametrización $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f : \varphi(I) \to M$. Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\gamma}'(t)\|_g = \|f'(t)\gamma'(f(t))\|_g &= \|(\varphi^{-1})'(t)\gamma'(f(t))\|_g \\
&= \frac{1}{|\varphi'(f(t))|}\|\gamma'(f(t))\|_g \\
&= \frac{\|\gamma'(f(t))\|_g}{\|\gamma'(f(t))\|_g} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \varphi(I)$. Por tanto, $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de rapidez unitaria de γ. Luego, como γ es una curva regular cualquiera, se concluye que el Literal (a) es cierto

Supongamos que $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva admisible. De manera similar al párrafo anterior, definimos el mapa $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \int_{a}^{t} \|\gamma'(t)\|_g dt \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Como $\|\gamma'(\cdot)\|_g$ es una función continua en $[a,b]$ excepto en finitos puntos, de la Teoría del Cálculo Elemental, tenemos que φ es diferenciable en $[a,b]$, y φ es estrictamente creciente pues $\varphi(t) = \|\gamma'(t)\|_g > 0$. Así mismo, tenemos que $\varphi([a,b]) = [0,L]$ con $L = L_g(\gamma)$. Por tanto, $\varphi : [a,b] \to [0,L]$ es un difeomorfismo. Definiendo $f = \varphi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$, obtenemos la reparametrización $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f : [0,L] \to M$, la cual, de manera similar al párrafo anterior, es de rapidez unitaria. Como γ es una curva admisible cualquiera, se concluye que el Literal (b) es cierto. $\square$

Nota 2.27. Del lema anterior, sabemos que toda curva admisible tiene una reparametrización de rapidez unitaria. Sin embargo, tal reparametrización es única (ver [4, Proposición 2.49]). Por este motivo, decimos que una curva $\gamma : [0, L] \to M$ está **parametrizada por su longitud de arco** cuando es de rapidez unitaria y $L = L_g(\gamma)$.

Definición 2.74 (Campo vectorial suave por partes de una curva)**.** En el contexto de la definición anterior, un mapa continuo $V : [a, b] \to TM$ tal que $V_t \in T_{\gamma(t)}M$, para todo $t \in [a, b]$, se dice un **campo vectorial suave por partes de** γ cuando existe una partición $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \ldots < \tilde{a}_m = b$ tal que V es suave sobre $\gamma|_{[\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]}$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

2.3.6. Geodésicas y Curvas Minimizantes

En esta subsección definimos las *curvas minimizantes* y introducimos el concepto de *familia de curvas admisibles.*

Definición 2.75. Una curva admisible γ sobre una variedad de Riemann se dice **minimizante** cuando

$$L(\gamma)_g \leq L_g(\tilde{\gamma}),$$

para cualquier otra curva admisible $\tilde{\gamma}$ que conecta los mismos puntos extremos.

Definición 2.76 (Familia admisible)**.** Sea M una variedad diferenciable. Una **familia de curvas admisibles** (o simplemente **familia admisible**) es un mapa continuo $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ tal que es suave en $(-\epsilon, \epsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, para alguna partición $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, y tal que $\Gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$ es una curva admisible para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Si Γ es una *familia admisible*, un **campo vectorial de** Γ es un mapa continuo $V : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to TM$ tal que $V(s, t) \in T_{\Gamma(s,t)}M$ para todo (s, t) en el dominio de V, y tal que $V|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]}$ es suave para alguna partición $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \ldots < \tilde{a}_m = b$.

Nota 2.28. Cualquier familia admisible Γ define dos grupos de curvas: las *curvas principales* $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ definidas sobre $[a,b]$ y fijando $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, y las *curvas transversales* $\Gamma^{(t)}(s) := \Gamma(s,t)$ definidas sobre $(-\epsilon, \epsilon)$ y fijando $t \in [a,b]$.

Las curvas transversales son suaves sobre $(-\epsilon, \epsilon)$ para todo $t \in [a,b]$. Por otro lado, las curvas principales son curvas regulares por partes. Cuando Γ es suave, los vectores velocidad generan campos vectoriales de Γ, los denotamos por

$$\partial_t \Gamma(s,t) := \frac{d}{dt}\Gamma_s(t), \quad \partial_s \Gamma(s,t) := \frac{d}{dt}\Gamma^{(t)}(s).$$

En el contexto de una variedad de Riemann, si V es un campo vectorial sobre Γ, podemos calcular las derivadas covariantes de V a lo largo de las curvas principales o de las transversales donde estas son suaves, y el campo de vectores resultante es denotado por $D_t V$ y $D_s V$, respectivamente.

Lema 2.13. *[Lema de Simetría] Sea M una variedad de Riemann y sea $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ una familia de curvas admisibles. Sobre una región $(-\epsilon, \epsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ donde Γ es suave, se tiene que*

$$D_s \partial_t \Gamma = D_t \partial_s \Gamma. \tag{2.13}$$

Demostración. Dado que D_t está definido localmente por la fórmula (2.12), basta demostrar (2.13) localmente. Sea (x^i) unas coordenadas locales del punto $\Gamma(\epsilon_0, t_0)$, podemos considerar, al menos en una vecindad lo suficientemente cercana a (ϵ_0, t_0), el mapa de coordenadas de Γ:

$$\Gamma^i = x^i \circ \Gamma,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la Nota 2.8, sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\Gamma^i}{dt}\frac{d}{dx^i}, \quad \frac{\partial}{\partial s}\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\Gamma^i}{ds}\frac{d}{dx^i}.$$

Por la fórmula de la derivación covariante a lo largo de curvas dada en

(2.12), obtenemos que

$$D_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Gamma^k}{\partial s\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\Gamma^i}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^j}{\partial s}\Gamma_{ji}^k\right]\frac{\partial}{\partial x^k},$$
$$D_t\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Gamma^k}{\partial t\partial s} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\Gamma^i}{\partial s}\frac{\partial\Gamma^j}{\partial t}\Gamma_{ji}^k\right]\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Intercambiando los índices i e j, y como $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$ por la condición de simetría, concluimos que

$$D_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma\right) = D_t\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma\right).$$

□

Definición 2.77. Sea M una variedad de Riemann. Si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva admisible, una **variación de** γ es una familia admisible $\Gamma : (-\epsilon,\epsilon)\times[a,b] \to M$ tal que $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$, para todo $t \in [a,b]$, y se dice una **variación adecuada** cuando en adición

$$\Gamma_s(a) = \gamma(a) \ \text{ y } \ \Gamma_s(b) = \gamma(b)$$

para todo $s \in (-\epsilon,\epsilon)$. Si Γ es una variación de γ, el **campo variacional de** Γ es el campo vectorial $V(t) = \partial_s\Gamma(0,t)$, para todo $t \in [a,b]$, a lo largo de γ. Un campo vectorial V de γ se dice **adecuado** cuando $V(a) = V(b) = 0$.

Lema 2.14. *Sean M una variedad de Riemann. Si γ es una curva admisible de M y V un campo vectorial de γ, entonces V es un campo variacional de alguna variación de γ. Si V es adecuado, la variación puede ser elegida para ser adecuada también.*

Demostración. Ver [1, Lema 6.4]. □

2.3.7. Las Curvas Minimizantes son Geodésicas

En esta subsección demostramos que toda *curva minimizante* es una *geodésica.*

Proposición 2.37. *[Primera Formula de Variación] Sean M una variedad de Riemann, $\gamma : [a,b] \to M$ una curva admisible de rapidez unitaria, Γ :*

$(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ *una variación adecuada de* γ, *y* V *su campo variacional. Se cumple la siguiente igualdad:*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = -\int_a^b \langle V, D_t\gamma' \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \gamma' \rangle,$$

donde $\Delta_i\gamma' = \gamma'(a_i^+) - \gamma'(a_i^-)$, *y* $\gamma'(a_i^+)$ *y* $\gamma(a_i^+)'$ *denotan las derivaciones laterales de la Definición 2.35 para una partición* $a = a_0 < \cdots < a_{k-1} = b$ *en cuyos subintervalos* γ *es suave.*

Demostración. Denotemos

$$T(s, t) = \delta_t \Gamma(s, t), \quad S(s, t) = \delta_s \Gamma(s, t) \quad \text{para todo } (s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b].$$

Sabemos que existe una partición $a = a_0 < \ldots < a_k = b$ donde $\Gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$ es suave, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sean $i \in \{1, \ldots, k\}$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Como $\Gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$, $\delta_t\Gamma|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$ y $\|\cdot\|_g$ son mapas suaves y continuos, tenemos que su composición

$$\|\delta_t\Gamma(s, t)\|_g : (-\epsilon, \epsilon) \times [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$$

también lo es. Luego, como el concepto de Diferencial coincide con el de derivada total sobre los espacios Euclidianos (ver 2.1.8), sabemos que la función $\|\delta_t\Gamma(s, t)\|_g$ es diferenciable y continua. Luego, por el Teorema 2.7.(c), *Teorema de derivación bajo el signo integral* y por el Lema 2.13, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} L_g(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{d}{ds} \|\delta_t\Gamma(s, t)\|_g dt = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{d}{ds} \langle T, T \rangle_g^{1/2} dt \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2} \langle T, T \rangle_g^{-1/2} (\langle D_s T, T \rangle_g + \langle T, D_s T \rangle_g) dt \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\langle D_s T, T \rangle_g}{\|T\|_g} dt = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\langle D_t S, T \rangle_g}{\|T\|_g} dt.
\end{aligned}$$

Tomando $s = 0$ y como $S(0, t) = V(t)$, $T(0, t) = \gamma'(t)$ y γ' es de longitud uno, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\langle D_t S, T\rangle_g}{\|T\|_g} dt \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{d}{dt}\langle V, \gamma'\rangle_g - \langle V, D_t\gamma'\rangle_g \right) dt \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left(\frac{d}{dt}\langle V, \gamma'\rangle_g - \langle V, D_t\gamma'\rangle_g \right) dt \\
&= \langle V(a_i), \gamma'(a_i^-)\rangle_g - \langle V(a_{i-1}), \gamma'(a_{i-1}^+)\rangle_g - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t\gamma'\rangle_g dt.
\end{aligned}$$

Como Γ es una variación adecuada, tenemos que

$$V(a_o) = V(a_k) = 0.$$

Así, dado que $i \in \{1, \ldots, k\}$ es arbitrario, concluimos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) &= \sum_{i=1}^{k} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s|_{[a_{i-1},a_i]}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle V(a_i), \gamma'(a_i^-)\rangle_g - \langle V(a_{i-1}), \gamma'(a_{i-1}^+)\rangle_g - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t\gamma'\rangle_g dt \\
&= -\sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i\gamma'\rangle_g - \int_a^b \langle V, D_t\gamma'\rangle_g dt.
\end{aligned}$$

□

Antes de presentar el principal teorema de esta subsección, enunciamos el siguiente lema que utilizaremos en la demostración del mismo.

Lema 2.15. *Sea M una variedad de Riemann. Dada una curva $\gamma : I \to M$, un punto $t_0 \in I$ y un vector $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe un campo vectorial V a lo largo de γ tal que $V(t_0) = V_0$ y $D_t V = 0$.*

Demostración. Ver [1, Teorema 4.11]. □

Teorema 2.3. *Toda curva minimizante de rapidez unitaria es una geodésica (de Riemann).*

Demostración. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una curva minimizante de rapidez unitaria. Demostremos que γ es una geodésica. Existe una partición $a = a_0 < \ldots < a_k = b$ donde $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ es suave, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Si Γ es una variación adecuada de γ, de la *Teoría del Cálculo Elemental*, tenemos que

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = 0.$$

Como todo campo vectorial adecuado V de γ es un campo variacional de alguna variación adecuada Γ de γ, de la Proposición 2.37, tenemos que

$$-\int_a^b \langle V, D_t\gamma' \rangle_g dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i\gamma' \rangle_g = 0, \tag{2.14}$$

para todo campo vectorial adecuado V de γ. Sea $i \in \{1\ldots, k\}$. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función test tal que $f > 0$ sobre (a_{i-1}, a_i) y nula fuera de (a_{i-1}, a_i). Tomando $V = fD_t\gamma'$ en (2.14), tenemos que

$$\begin{aligned} -\int_a^b \langle fD_t\gamma', D_t\gamma' \rangle_g dt &= \sum_{j=1}^{k-1} \langle f(a_j)D_t\gamma'(a_j), \Delta_i\gamma' \rangle_g \\ -\int_{a_{i-1}}^{a_i} f\|D_t\gamma'\|_g^2 dt &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f\|D_t\gamma'\|_g^2 dt = 0.$$

Dado que $f\|D_t\gamma'\|_g^2 \geq 0$ y $f > 0$ sobre (a_{i-1}, a_i), concluimos que $D_t\gamma' = 0$ sobre (a_{i-1}, a_i). Por tanto, como $i \in \{1\ldots, k\}$ es arbitrario y $D_t\gamma'$ es continua, se infiere que $D_t\gamma' = 0$ sobre $[a_{i-1}, a_i]$, para todo $i \in \{1\ldots, k\}$. En otras palabras, $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ es una geodésica, para todo $i \in \{1\ldots, k\}$.

Sea $i \in \{1\ldots, k-1\}$. Demostremos que $\Delta_i\gamma' = 0$. Consideremos un intervalo abierto cualquiera $U \subset [a, b]$ que contiene a a_j si $j = i$ y no lo contiene en el caso contrario. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función test tal que su soporte esté contenido en U y $f(a_i) = 1$. Por el Lema 2.15, existe un campo vectorial Vde γ tal que $V(a_i) = \Delta_i\gamma'$. Luego, el campo vectorial fV de γ cumple que: $(fV)(a_i) = \Delta_i\gamma'$ y $(fV)(a_j) = 0$, para todo $j \neq i$. Así, de la

Ecuación (2.14) y como $D_t\gamma' = 0$ sobre $[a_{i-1}, a_i]$, se tiene que

$$\begin{aligned} -\langle (fV)(a_i), \Delta_i\gamma' \rangle_g =& 0 \\ -\langle \Delta_i\gamma', \Delta_i\gamma' \rangle_g =& 0, \end{aligned}$$

es decir, $\|\Delta_i\gamma'\|_g = 0$ y $\Delta_i\gamma' = 0$. Por tanto, como $i \in \{1\ldots, k-1\}$ es arbitrario, tenemos que

$$\Delta_i\gamma' = 0 \quad \text{para todo } i \in \{1\ldots, k-1\}.$$

Así, las geodésicas $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ y $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ comparten el mismo vector de velocidad lateral. Por el Teorema 2.1 existe $\epsilon > 0$ y una geodésica

$$\tilde{\gamma} : (-\epsilon + a_i, a_i + \epsilon) \subset [a_{i-1}, a_{i+1}] \to M,$$

tal que

$$\tilde{\gamma}'(a_i) = \gamma'(a_i^+) = \gamma'(a_i^-), \quad \tilde{\gamma}(a_i) = \gamma(a_i).$$

Por la Unicidad del Teorema 2.1, sabemos que $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$, $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ y $\tilde{\gamma}$ coinciden en su dominio en común. Así,

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) \;\; \text{para todo } t \in (-\epsilon + a_i, a_i + \epsilon) \subset [a_{i-1}, a_{i+1}].$$

Luego, como $\tilde{\gamma}$ es suave, concluimos que γ es suave sobre $(-\epsilon + a_i, a_i + \epsilon)$. Por tanto, $\gamma|_{[a_{i-1},a_{i+1}]}$ es suave, para todo $i \in \{1\ldots, k-1\}$. Como $i \in \{1\ldots, k-1\}$ es arbitrario, γ es suave en todo su dominio. Así, dado que γ es una geodésica en todos los subintervalos de la partición $a = a_0 < \ldots < a_k = b$, inferimos que γ es una geodésica en todo su dominio. Finalmente, como γ es una curva minimizante de rapidez unitaria cualquiera, hemos demostrado que toda curva minimizante de rapidez unitaria es una geodésica. $\square$

2.3.8. Las Geodésicas son Localmente Minimizantes

En el Teorema 2.3 demostramos que toda curva minimizante es una geodésica. En esta subsección analizamos y probamos que también se cumple una versión local de la contrarrecíproca del Teorema 2.3. Para ese fin, necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 2.4 (El Lema de Gauss)**.** *Sea* (M, g) *una variedad de Riemann. Sea* $\mathfrak{U}$ *una bola geodésica centrada en* $p \in M$*. El campo vectorial de radio unitario* $\delta/\delta r$ *es* $g-$*ortogonal a las esferas geodésicas en* $\mathfrak{U} - \{p\}$*. En otras palabras, si* w *es un vector tangente a esfera geodésica en un punto cualquiera* q*, entonces*

$$\langle w, \delta/\delta r|_q \rangle_g = 0.$$

Demostración. Ver [1, Teorema 6.8]. □

Lema 2.16. *Sean* (M, g) *una n-variedad de Riemann,* (x^i) *coordenadas normales en una bola geodésica* $\mathfrak{U}$ *centrada en algún punto* $p \in M$*, y* r *la función de distancia radial, es decir,*

$$r(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \right)^{1/2}.$$

Entonces, $grad\, r = \partial/\partial r$ *sobre* $\mathfrak{U} - \{p\}$.

Demostración. Sea $q \in \mathfrak{U} - \{p\}$, y $V \in T_pM$. Vamos a demostrar que

$$dr(V) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, V \right\rangle_g.$$

Sea una esfera geodésica $exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ que contiene a q, i.e., $\|exp_p^{-1}(q)\|_g = \epsilon$. Denotamos por $\{E_i\}_{i=1}^n$ la base ortonormal de T_pM respecto a la cual (x^i) son coordenadas normales. Así, para todo $X = \sum_{i=1}^n x^i E_i \in \partial B_\epsilon(0) \subseteq T_pM$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 = \|X\|_g^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x^i E_i, \sum_{i=1}^n x^i E_i \right\rangle_g \\
&= \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \langle E_i, E_j \rangle_g \\
&= \sum_{i=1}^n (x^i)^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, como $X \in \partial B_\epsilon(0)$ es arbitrario, concluimos que la esfera geodésica $exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ puede describirse por el conjunto de nivel de r en ϵ.

Demostremos que r es de rango constante 1 en $\mathfrak{U} - \{p\}$ para poder usar la Proposición 2.13. Para ello, sea $w \in \mathfrak{U} - \{p\}$, debemos encontrar $v \in T_wM$ tal que $dr_wv \neq 0$. Por la Proposición 2.36, sabemos que las coordenadas de $\nu \in \mathfrak{U}$ son cero si y solo si $\nu = p$. Así, como $w \in \mathfrak{U} - \{p\}$, entonces las coordenadas de w no son todas nulas. Consideremos $v \in T_wM$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i(w) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_w,$$

así, $v \neq 0$. Notar que

$$d_wrv = vr = \sum_{i=1}^{n} x^i(w) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_w r.$$

Si φ denota a la carta de coordenadas normales, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_w r = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(w)} (r \circ \varphi^{-1}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right)^{-1/2} 2(x^i)\bigg|_w,$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Y reemplazando en lo anterior, llegamos a lo siguiente:

$$d_wrv = vr = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r(w)}(x^i)^2|_w \neq 0,$$

i.e, $dr_w \neq 0$. Así, dado que dr_w es lineal y $\mathbb{R}$ es de dimensión 1, concluimos que la dimensión de la imagen de dr_w es 1. Como $w \in \mathfrak{U} - \{p\}$ es arbitrario, concluimos que el rango de r es constante en $\mathfrak{U} - \{p\}$. Por la Proposición 2.13, sabemos que el conjunto de nivel $r^{-1}(\epsilon) = exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ es de dimensión $n - 1$. Por tanto, el espacio tangente $T_p\, exp_p(\partial B_\epsilon(0)) \subseteq T_pM$ es de dimensión $n - 1$. Así, del hecho que T_pM es de dimensión n, $q \in \mathfrak{U} - \{p\}$, $V \in T_pM$ y como el campo vectorial de radio unitario $\partial/\partial r$ es $g-$ortogonal a la esfera geodésica $exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ (ver Teorema 2.4), existe algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y un vector $X \in T_qM$ tangente a la esfera geodésica $exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ en q (esto significa que $X \in T_q\, exp_p(\partial B_\epsilon(0))$) tal que

$$V = \alpha \frac{\partial}{\partial r} + X.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} dr_w(\partial/\partial r) &= \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_w r = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{r(x)} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_w r \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{(x^i)^2}{r(x)^2}\right|_w \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo $w \in \mathfrak{U}-\{p\}$. Por tanto, $dr(\partial/\partial r) = 1$ en $\in \mathfrak{U}-\{p\}$. Por la Proposición 2.14, tenemos que $drX = 0$ pues X es tangente a la curva de nivel de r. Así,

$$dr\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r} + X\right) = \alpha dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + dr(X) = \alpha.$$

Por la Proposición 2.36, $\partial/\partial r$ es de rapidez unitaria. Así, por el Lema 2.4, tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha\frac{\partial}{\partial r} + X \right\rangle_g = \alpha \left\| \frac{\partial}{\partial r} \right\|_g + \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \right\rangle_g = \alpha.$$

Por tanto,

$$dr\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r} + X\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha\frac{\partial}{\partial r} + X \right\rangle_g.$$

De donde,

$$dr(V) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, V \right\rangle_g.$$

Luego, de la definición del *gradiente* de una función, y como $q \in \mathfrak{U} - \{p\}$ y $V \in T_pM$ son arbitrarios, concluimos que

$$grad\, r = \frac{\partial}{\partial r}$$

en $\mathfrak{U} - \{p\}$. □

Proposición 2.38. *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Supongamos $p, q \in M$ tal que q esta en una bola geodésica alrededor de p, entonces la geodésica radial de p a q es la única curva minimizante de p a q en M (salvo reparametrizaciones).*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que $exp_p(B_\epsilon(0))$ es una bola geodésica que contiene a q. Sea γ una geodésica radial de p a q. Por el Teorema 2.30, podemos asumir que γ está parametrizada por su longitud de arco, es decir, $\gamma : [0, L] \to M$ es de rapidez unitaria y $L = L_g(\gamma)$. Por la Proposición 2.35, se tiene que $\gamma(t) = exp_p(tV)$ para algún vector $V \in T_pM$. Denotemos

$$S_L = exp_p(\partial B_L(0)).$$

Sea $\varphi : [0, c] \to M$ una curva admisible de p a q parametrizada por su longitud de arco. Probemos que $L_g(\varphi) \geq L_g(\gamma)$. Sea $a_0 \in [0, b]$ la última vez que $\varphi(a_0) = p$, y $b_0 \in [0, b]$ la primera vez después del punto a_0 que se encuentra en S_L. La composición $r \circ \varphi : [0, c] \to \mathbb{R}$ es continua sobre $[a_0, b_0]$ y suave por partes sobre (a_0, b_0). Por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$r(\varphi(b_0)) - r(\varphi(a_0)) = \int_{a_0}^{b_0} \frac{d}{dt} r(\varphi(t))dt.$$

Notar que

$$\begin{aligned} dr_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) &= \varphi'(t)r = d\varphi_t \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) r \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_t (r \circ \varphi) = \frac{d}{dt} r(\varphi(t)), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, c]$. Así,

$$\begin{aligned} r(\varphi(b_0)) - r(\varphi(a_0)) &= \int_{a_0}^{b_0} \frac{d}{dt} r(\varphi(t))dt = \int_{a_0}^{b_0} dr_{\varphi(t)}(\varphi'(t))dt \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \langle grad\, r|_{\varphi(t)}, \varphi'(t)\rangle_g dt \leq \int_{a_0}^{b_0} \|grad\, r|_{\varphi(t)}\|_g \, \|\varphi'(t)\|_g dt \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \|\varphi'(t)\|_g dt = L_g(\varphi|_{[a_0, b_0]}) \\ &\leq L_g(\varphi). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pero, de la definición de la función de distancia radial r y como $\varphi(b_0) \in S_L = exp_p(\partial B_L(0))$, tenemos que

$$r(\varphi(b_0)) - r(\varphi(a_0)) = r(\varphi(b_0)) - r(p) = L - 0.$$

Por tanto,

$$L = r(\varphi(b_0)) - r(\varphi(a_0)) \leq L_g(\varphi). \tag{2.16}$$

Así, como φ es una curva admisible cualquiera de p a q, concluimos que γ es una curva minimizante.

Demostremos la unicidad. Para ello, supongamos que en adición φ tiene longitud L, i.e., $L_g(\varphi) = L$. Así, como φ está parametrizada por su longitud de arco, tenemos que $c = L$. Luego, de (2.16) y como $L_g(\varphi) = c = L$, tenemos que

$$L_g(\varphi) = L_g(\varphi|_{[a_0,b_0]}),$$

y como φ es de rapidez unitaria, tenemos que $a_0 = 0$ y $b_0 = L = c$. Así, de (2.15), tenemos que

$$\langle grad\, r|_{\varphi(t)}, \varphi'(t)\rangle_g = \|grad\, r|_{\varphi(t)}\|_g \ \|\varphi'(t)\|_g$$

sobre $[0, L]$. Por tanto, $\varphi'(t)$ es un múltiplo positivo de $grad\, r|_{\varphi(t)}$. Pero $\varphi'(t)$ es de rapidez unitaria, así,

$$\varphi'(t) = grad\, r|_{\varphi(t)} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{\varphi(t)},$$

para todo $t \in [0, L]$. Y por la Proposición 2.36, tenemos que

$$\varphi'(t) = \gamma'(t),$$

para todo $t \in [0, L]$. De donde, φ es una curva suave y una geodésica. Así, por el Teorema 2.1, como φ es una curva de p a q, concluimos que $\varphi = \gamma$. Por tanto, dado que φ es una curva admisible cualquiera de p a q, concluimos que γ es la única curva minimizante de p a q, salvo reparametrizaciones. $\square$

Definición 2.78. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cualquiera y $\gamma : I \to M$ una curva suave, decimos que γ es **localmente minimizante** cuando para cada $t \in I$ existe un conjunto abierto $U \subset I$ de t tal que para todo $a, b \in U$ con $a < b$, se tiene que $\gamma|_{[a,b]}$ es minimizante.

Nota 2.29. Toda curva minimizante es localmente minimizante debido a que esta es minimizante entre cualquier par de puntos de su dominio.

Nota 2.30. Recordemos que la **componente conexa** de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, denotada por $C(A)$, se define como el conjunto conexo más grande contenido en A, es decir, si $D \subseteq A$ es un conjunto conexo, entonces $D \subseteq C(A)$.

Teorema 2.5. *Toda geodésica de Riemann es localmente minimizante*

Demostración. Sea (M, g) una variedad de Riemann y $\gamma : I \to M$ una geodésica. Supongamos que I es un intervalo abierto, y sea $t_0 \in I$, cualquiera. Sea W una vecindad uniformemente normal de $\gamma(t_0)$ (por el Lema 2.11 existe al menos una vecindad). Definamos $U \subset I$ como la componente conexa de $\gamma^{-1}(W)$ que contiene a t_0. Si $t_1,\ t_2 \in U$ con $t_1 < t_2$, por la definición de vecindad uniformemente normal, sabemos que $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ está contenido en una bola geodésica centrada en $\gamma(t_1)$. Por la Proposición 2.38, sabemos que existe una única geodésica radial de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ que es una curva minimizante. Pero $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ es una geodésica de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ contenida en la misma bola geodésica, así, $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ es una curva minimizante. Por tanto, como $t_0 \in I$ y $t_1,\ t_2 \in U$ son arbitrarios, se obtiene que γ es localmente minimizante.

Supongamos que I contiene uno o dos puntos de frontera. Por el Teorema 2.1, sabemos que existe un intervalo abierto $\tilde{I} \supset I$ y una geodésica $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to$ que es una extensión de γ sobre I. De manera similar a lo verificado en el anterior párrafo, tenemos que $\tilde{\gamma}$ es localmente minimizante. Por tanto, $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$ también es localmente minimizante. Por tanto, como γ es una geodésica arbitraria, concluimos que toda geodésica es localmente minimizante. □

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

La finalidad del presente trabajo es describir propiedades geométricas en el contexto de las variedades de Riemann como ángulos, longitudes, distancias, geodésicas y curvas minimizantes (ver el Apartado 2.2.1 y las Subsecciones 2.3.7 y 2.3.8). Para ello, primero definimos y enunciamos propiedades asociadas al fibrado cotangente, teoría de tensores y campo de tensores (ver las Subsecciones 2.1.16, 2.1.12, 2.1.18). Luego, definimos las métricas de Riemann y las variedades de Riemann (ver la Subsección 2.2.1).

En las Subsecciones 2.2.1 y 2.2.3, definimos propiedades geométricas como ángulos, longitudes y distancias, y demostramos resultados que involucran estos conceptos. El principal resultado de la Sección 2.2 se expone en la Subsección 2.2.5, donde construimos una métrica en el contexto de las variedades de Riemann y demostramos que la topología que esta induce coincide con la topología de la variedad de Riemann (ver Teoremas 2.33 y 2.34).

En la Sección 2.3, presentamos las definiciones de geodésicas y de curvas minimizantes. Los resultados principales de esta sección se encuentran en las Subsecciones 2.3.7 y 2.3.8; aquí disertamos y demostramos la relación entre una geodésica y una curva minimizante. En la

Subsección 2.3.7 demostramos que toda curva minimizante es una geodésica. Y por último, en la Subseccón 2.3.8, demostramos que toda geodésica es una curva localmente minimizante.

3.2. Conclusiones

- Las variedades de Riemann son una rama de la geometría diferencial moderna que sigue en contacto con las nociones intuitivas de la geometría Euclidiana.

- Como notamos en la construcción de la geometría esférica, las nociones intuitivas de la geometría Euclidiana puede servir de base para generalizar los objetos de la misma, y replicarlos en otros espacios y superficies. Esto lo observamos también en el desarrollo de las variedades diferenciables y las variedades de Riemann.

- Las variedades de Riemann constituyen una generalización de la Geometría Diferencial de superficies. En particular, en esta se generalizan conceptos como longitudes de curvas, geodésicas y curvas minimizantes que siguen manteniendo propiedades similares o iguales a sus correspondientes de la Geometría Diferencial de superficies.

- En el contexto de las variedades de Riemann se pueden definir nociones como ángulos y distancias. Siendo rigurosos, sobre los espacios tangentes definimos una norma, de donde, inducimos los conceptos de ángulo y ortogonalidad.

- Las curvas sobre una variedad de Riemann nos permitieron construir una métrica sobre la misma. Esta métrica induce una topología que coincide con la topología de la variedad de Riemann, con lo que se convierte en una herramienta importante que facilita trabajar en una variedad de Riemann.

- Sabemos que, en el contexto de la *Geometría Diferencial de Superficies*, existe una conexión entre geodésicas y curvas minimizantes. En el presente trabajo, además de desarrollar los conceptos de geodésica y curva minimizante, logramos evidenciar que se sigue manteniendo una relación entre ambos conceptos sobre las variedades de Riemann. En este sentido, demostramos que:

1. Toda curva minimizante de rapidez unitaria es una geodésica de Riemann (ver Teorema 2.3).
2. Toda geodésica de Riemann es localmente minimizante (ver Teorema 2.5).

3.3. Recomendaciones

- Se recomienda al lector desarrollar todos los resultados que no incluyen una demostración con el propósito de mejorar su comprensión de lo aquí expuesto.

Referencias bibliográficas

[1] John Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer, New York, 1997.

[2] John Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, New York, 2011.

[3] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York, 2013.

[4] John Lee. *Introduction to Riemann Manifolds*. Springer, Cham, 2018.

[5] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer, London, 2010.

[6] Loring Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, New York, 2011.