

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA Y AGROINDUSTRIA

DESARROLLO DE UN SOFTWARE ACADÉMICO PARA LA SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE MOLIENDA

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO
COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
INGENIERO QUÍMICO**

JORGE DANIEL VÁSQUEZ LINCANGO

jorge.vasquez@epn.edu.ec

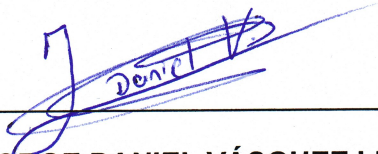
DIRECTOR: EDDY FERNANDO PAZMIÑO IBARRA

eddy.pazmino@epn.edu.ec

DMQ, febrero 2023

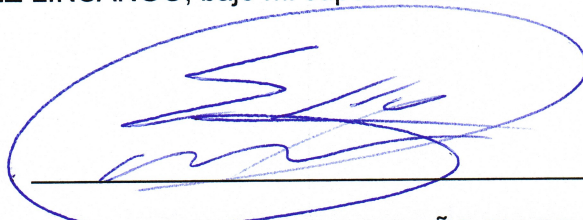
CERTIFICACIONES

Yo, JORGE DANIEL VÁSQUEZ LINCANGO declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



JORGE DANIEL VÁSQUEZ LINCANGO

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por JORGE DANIEL VÁSQUEZ LINCANGO, bajo mi supervisión.



EDDY FERNANDO PAZMIÑO IBARRA

DIRECTOR

DECLARACIONES DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultantes (s) del mismo, son públicos y estarás a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

JORGE DANIEL VÁSQUEZ LINCANGO

EDDY FERNANDO PAZMIÑO IBARRA

DEDICATORIA

Dedico el trabajo a las personas que están desde siempre conmigo, mi familia.

A mi padre Raúl y a mi madre Margarita. A mi ñaño, mi compañero incondicional David.

A mis mejores amigos, mis hermanos Juan Carlos y Joseph. A mi ángel del cielo Mayra.

Y por último, no menos importante, a mis ángeles del corazón Buder y Tiana.

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Divino Niño Jesús, por la enseñanza de que la vida vale la pena por sí misma, a pesar de las caídas, las circunstancias, agradecer a la fe de siempre seguir adelante. Agradezco un camino lleno de humildad, sacrificio y perseverancia que conlleva a la recompensa de un ganador que no es nada más que un perdedor que jamás se dio por vencido.

Agradezco a mi padre Raúl la enseñanza de laborar con honradez y firmeza, a mi madre Margarita por ser el pilar de mi vida, por inculcarme valores, por ser luchadora y sencilla. Agradecer que día a día dieron su vida por nuestra familia y que si hoy soy lo que soy es gracias a su infinito amor. Agradezco a mi ñaño, mi hermano de sangre, mi cantautor y eterno orgullo David porque desde el primer día que nació llenó nuestras vidas de alegría.

Agradezco a mis hermanos de corazón Juan Carlos y Joseph por una verdadera amistad que supera al tiempo y a la distancia. Agradecer el apoyo, los momentos y recordar que las personas vienen y van pero que la familia persiste. Agradezco a mi ángel del cielo Mayra por creer en mi cuando recién estaba empezando.

Agradezco a mi pequeña Tiana por llenar mis días y estar cuando más lo necesite. Agradecer a mi ángel de la guarda, a mi golden Buder que me cuida desde el cielo, que me acompañaba las largas noches de proyectos, que dormía junto a mi y que sigue viviendo dentro de mí. Agradecerles por ser mis mascotas.

Agradezco a mi tutor, el ingeniero Eddy Pazmiño por la paciencia, enseñanza y aportes profesiones que contribuyeron a la elaboración del trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES	II
DECLARACIONES DE AUTORÍA	III
DEDICATORIA	IV
AGRADECIMIENTO	V
ÍNDICE DE CONTENIDO	VI
Resumen	1
Abstract.....	1
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Minerales	1
1.2. Molienda	2
1.3. Modelo matemático de cinética de fractura	3
2. METODOLOGÍA	4
2.1. Planteamiento del modelo	4
2.2. Solución general del modelo de molienda	4
2.3. Diseño de la aplicación	4
2.4. Atrapar errores	6
3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	6
3.1. Mineral Cuprífero	6
3.2. Mineral Agua Dulce.....	7
4. CONCLUSIONES	7
5. RECOMENDACIONES.....	8
6. REFERENCIAS	8
7. ANEXOS.....	9

Desarrollo de un Software Académico para la Simulación de un Sistema de Molienda

Vásquez, Jorge¹

¹Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Química y Agroindustria, Quito, Ecuador

Resumen: El molino de bolas es un equipo de reducción de tamaño de minerales desde milímetros hasta micras. La molienda sigue una cinética de fractura donde los minerales se rompen por fractura de impacto o abrasión. El modelo general de molienda es una ecuación diferencial que expresa como una fracción de las partículas madres desaparecen por la ruptura y se crean nuevas partículas hijas provenientes de tamaños superiores. Para conocer como se rompen las partículas dentro del molino se deben estimar los parámetros de selección y fractura. El objetivo del trabajo es el desarrollo de un software para la simulación de un sistema de molino de bolas. Se creó una aplicación en AppDesigner del programa Matlab donde se diseñaron secciones para las constantes alfa y beta de la función selección y fractura, el análisis granulométrico, el consumo específico de energía y los resultados. El programa expresa los resultados mediante una gráfica del pasado acumulado vs abertura, como por ejemplo, se ingresaron los datos de un mineral cuprífero y el programa determinó que la curva del pasado acumulado simulado tiene una tendencia similar al pasado acumulado experimental lo que se refleja en un r^2 de 0.989. Por lo tanto, el simulador del molino de bolas cumple con el alcance esperado debido a que permite validar los parámetros de la función de selección y fractura en base a la ecuación diferencial del modelo de molienda.

Palabras clave: Molino de bolas, función selección, función fractura, pasado acumulado.

Development of an Academic Software for the Simulation of a Grinding System

Abstract: Ball mill is an equipment for size reduction of minerals from millimeters to microns. Grinding follows a fracture kinetics where minerals are broken by impact fracture or abrasion fracture. The general grinding model is a differential equation that expresses how a fraction of the mother particles disappear by breaking and new daughter particles are created from larger sizes. To know how the particles break inside the mill the selection and fracture parameters must be estimated. The objective is the development of software for the simulation of a ball mill system. An application was created in AppDesigner of the Matlab program where sections were designed for the alpha and beta constants of the selection and fracture function, the granulometric analysis, the specific energy consumption and the results. The program expresses the results by means of a graph of the accumulated past vs opening, for example, data of a copper ore was introduced, and the program determined that the curve of simulated accumulated past has a similar trend to experimental accumulated past which is reflected in an r^2 of 0.989. Therefore, ball mill simulator fulfil the expected scope because it allows validating the parameters of the selection and fracture function based on the differential equation of the grinding model.

Keywords Ball mill, selection function, fracture function, accumulated past.

1. INTRODUCCIÓN

La minería se basa en la obtención de minerales y metales, por lo que es una parte fundamental para el desarrollo económico y social de cada país. Ecuador es considerado como un potencial minero debido a las reservas de oro, plata, cobre y otros productos mineros que oferta. Entre las empresas que procesan minerales cupríferos en el Ecuador, se puede nombrar a Lundin Gold cuyo depósito es Fruta del Norte ubicada en la provincia de Zamora Chinchipe, Bira Sodirec que se encuentra en la Provincia del Oro y Agroindustrial “El

Corazón” que se localiza en Imbabura. Cada empresa recupera metales de plata y oro, este último con un porcentaje de recuperación mínimo del 90%. Para llegar a un porcentaje de recuperación elevado, los minerales pasan por un proceso extenso donde cada operación unitaria se debe estudiar con detalle, como por ejemplo la molienda (Viana, 2018).

1.1. Minerales

Los minerales provienen de origen natural y son sustancias sólidas e inorgánicas que poseen características fisicoquímicas

debido a su composición y estructuras químicas definidas. Los minerales de interés se encuentran dentro de rocas o asociados a otros minerales por lo que el objetivo principal es separar y liberar el material de interés. Es importante realizar un estudio mineralógico que determine las características que son diferentes para cada mineral. Se debe realizar un análisis mineralógico para determinar que compuestos conforman la muestra y el tamaño de grano mediante análisis macroscópicos y microscópicos (De la Torre, 2019).

- **Análisis granulométrico**

Las muestras sólidas se pueden cuantificar mediante un análisis granulométrico que proporciona la distribución del tamaño de partícula y determina de forma estadística un tamaño representativo (d80). El método usual que se emplea para el análisis granulométrico es el tamizado donde se utiliza una torre de tamices de abertura normalizada decreciente (el número de malla expresa el número de agujeros que tiene la malla por pulgada cuadrada). Mediante vibración, se realiza el tamizado por 30 minutos y se pesa cada fracción de muestra retenida en los tamices.

1.2. Molienda

La molienda es una operación de reducción de tamaño del material con el fin de obtener una granulometría deseada. La reducción de las partículas oscila entre 5 - 250 mm a 10 - 300 um aproximadamente. En el material se producen fracturas mediante choques, desgaste o aplastamiento. En la molienda se produce la verdadera liberación de los minerales de interés. Consiste en disminuir el tamaño de partícula hasta que la fase sólida de interés esté expuesta superficialmente para procesos posteriores. Normalmente la molienda viene acompañada de un sistema de separación para clasificación por tamaño y lograr un adecuado control del proceso (Briceño, 2015).

- **Tipos de molienda**

Existen dos tipos de molienda, molienda en seco o en húmedo. El sistema de molienda se puede realizar por vía seca (materiales con 2% al 30% de humedad) la cual se caracteriza por un medio predominante de aire entre partículas. El contenido de agua está generalmente asociado a la porosidad intersticial. En contraste, la molienda por vía húmeda (mayor al 30% de contenido de agua en la carga a moles) donde el medio intergranular está completamente anegado. El material se comporta como una pulpa cuando el tamaño de partícula disminuye (Ortiz, 2020). Se puede observar en la Figura 1 ambos tipos de molienda.

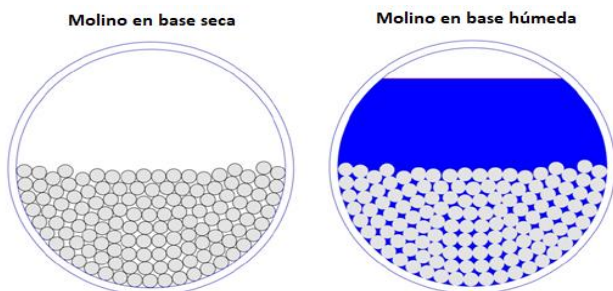


Figura 1. Esquema de molienda en base seca y base húmeda (Ortiz, 2020)

En comparación con la molienda seca, la molienda en base húmeda precisa menos energía por tonelada de material (la humedad disminuye la resistencia de los fragmentos), reduce problemas del polvo y ruido (mejora las condiciones ambientales de trabajo) y cuando el procesamiento subsecuente es en medio húmedo es la mejor elección (por ejemplo, contracción por flotación o por gravedad). La mayoría de minerales se muelen en medio húmedo (De la Torre, 2019).

- **Molino de bolas**

El molino de bolas es un ejemplo de tipo de molienda en base húmeda y para grandes cantidades de mineral se utilizan molinos de marcha continua. Como se muestra en la Figura 2, el molino se constituye por un cuerpo de tambor que contiene bolas hechas de acero, cerámica o partículas del mismo mineral. Normalmente, las bolas de acero se utilizan para molienda de minerales. (Briceño, 2015).

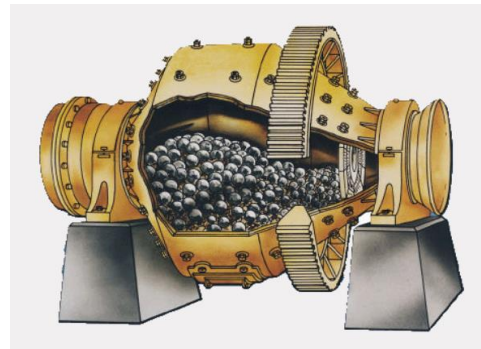


Figura 2. Esquema del molino de bolas (Ortiz, 2020)

- **Funcionamiento del molino de bolas**

Como se observa en la Figura 3, el tambor gira al 90% de la velocidad crítica que es la velocidad de rotación en el que los elementos de molienda debido al momento de inercia generado por la rotación giran y se elevan respecto al fondo del molino lo que genera un efecto de cascada que produce la molienda por abrasión de partículas que es óptimo para la molienda. El otro efecto que se produce en el molino se denominada catarata donde las bolas alcanzan el punto más alto y caen lo produce una fragmentación más rápida. Cabe mencionar que, si la velocidad de rotación es muy baja con relación a la velocidad crítica, los elementos de molienda giran en el fondo del molino. En contraste, si la velocidad de rotación es muy elevada respecto a la crítica, el momento de inercia es muy alto y los elementos de molienda se pegan a las paredes, lo cual puede causar daños graves al equipo (Hinojosa, 2017).

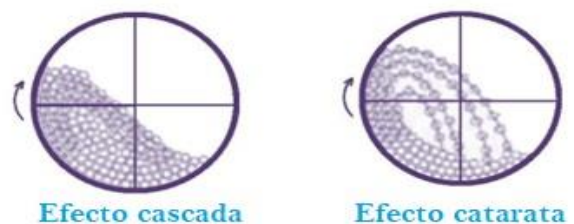


Figura 3. Tipos de movimientos que se presentan dentro del molino (Ortiz, 2020)

• **Características del molino de bolas**

Entre las características más destacables del molino de bolas, se puede mencionar que es un equipo de fácil operación, aplicable para materiales de todos los tipos de dureza, entrega productos con granulometría uniforme e incluso más finos que otros tipos de molino. Además, el costo de inversión es bajo, proporciona seguridad en operación y presenta un gran ahorro energético (Méndez y Orellana, 2018).

Algo importante para mencionar es la energía específica consumida debido a que en 1867, Von Rittinger postuló la relación que existe entre la energía y el incremento de la superficie generada. En otras palabras, explicó que la energía específica consumida (kWh/ton) es directamente proporcional a la nueva superficie específica creada debido a la reducción de tamaño que sufre un sólido (Bernedo, 2015).

1.3. Modelo matemático de cinética de fractura

La ingeniería de procesos de los circuitos de molienda está íntimamente relacionada con los mecanismos cinéticos que gobiernan la velocidad a la que se rompe el material en un molino. Los fenómenos de fractura se basan en el concepto de impacto donde partículas madres se ven involucradas en un esfuerzo compresivo que provoca la fractura del mineral. En cada evento de impacto, la partícula madre captura parte de la energía de impacto disponible y como resultado se rompe. Al romperse se genera una partícula hija que de inmediato también absorbe una parte de la energía de impacto residual y estas partículas pueden romperse o no. Cualquier partícula que se rompa producirá una nueva partícula hija que a su vez puede romperse y el suceso de fracturas continua en cada partícula hija hasta que la energía del impacto original se ha disipado. Estos eventos de impacto ocurren con alta frecuencia en un molino y es conveniente considerar la fractura como un proceso continuo. Dicho fenómeno descrito proporciona un método de modelado eficaz que se basa en el enfoque de equilibrio de la población (King, 2001).

Como se mencionó, el efecto catarata son las fracturas de impacto que se producen por choque y generan partículas gruesas, mientras que el efecto cascada son fracturas por abrasión que producen partículas finas debido a una acción de fricción en superficies. El fenómeno de fractura se conoce como modelo de balance poblacional que según la ecuación 1, es un modelo matemático que se expresa de forma general como un balance de masa, cantidad de movimiento y energía (Heredia, 2016).

$$[Acumulación] = [Entrada] - [Salida] + [Generación] \quad (1)$$

• **Modelo de molienda tipo batch**

El modelo representa el proceso de reducción de tamaño mediante un balance de masa diferencial que se explica en la Figura 4. Considere un molino hipotético batch donde en un instante t, la distribución granulométrica de la carga del molino

está cuantificada por las fracciones f_i ($i=1, n$) y retenidas en los distintos ‘n’ tamices, como se observa en el lado izquierdo. Luego de un intervalo de tiempo Δt , algunas partículas serán fracturadas y los fragmentos se distribuyen en los tamices inferiores dependiendo de los tamaños. La cuantificación de la granulometría resultante se expresa en el lado derecho de la imagen (Heredia, 2016).

Esta teoría, incluye dos nuevos parámetros conocidos como función de selección y función de fractura. Para las partículas retenidas en una malla $i+1$ (fracción i), la función selección S_i (min^{-1}) representa la fracción de partículas en el intervalo de tamaños $[d_{i+1}, d_i]$ que se fracturan por unidad tiempo. Por lo tanto, el producto $(S_i \Delta t)$ representa la fracción del material retenido en la malla $i+1$, al instante t, que será fracturado por acción del molino en un Δt posterior. Del mismo modo, la función fractura B_{ij} representa la fracción en peso resultante de la fractura de las partículas previamente retenidas en la malla $j+1$ que ahora se encuentran en la malla inferior $i+1$ (Raby, 2016).

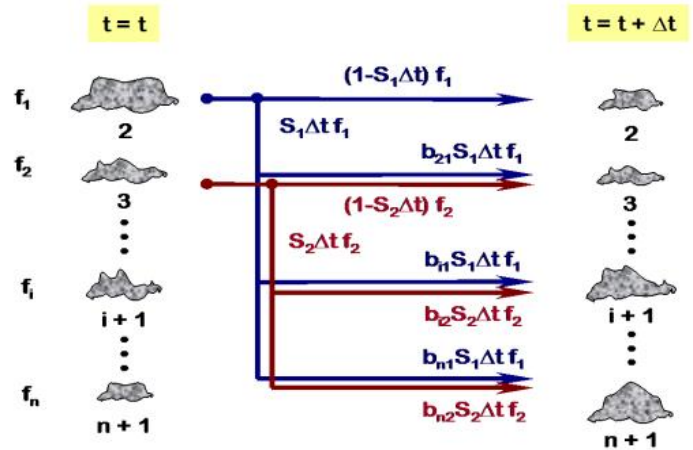


Figura 4. Representación de la fractura del material (Heredia, 2016)

Por lo tanto, se obtiene la ecuación 2 que es el modelo general de molienda y es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{df_i(t)}{dt} = -S_i f_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} S_j f_j(t) \quad (2)$$

• **Estimación de parámetros de fractura**

Para resolver el sistema de cómo se rompen las partículas dentro del molino se debe estimar los parámetros de fractura que involucran la función de selección y la función de fractura (Bernedo, 2015).

Función selección: representa la fracción de partículas i que se fracturarán en la siguiente unidad de tiempo (kWh). Se representa con la siguiente ecuación:

$$S_i^E = \frac{\alpha_o * (d_i^*)^{\alpha_1}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{d_c}\right)^{\alpha_2}} \quad (3)$$

Función fractura: representa los fragmentos de partículas fracturadas de tamaño j que se han convertido en tamaño i después del evento de fractura. Se expresa en la ecuación 4:

$$B_{ij} = B_0 * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{B_1} + (1 - B_0) * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{B_2} \quad (4)$$

Cabe mencionar que d es la abertura en μm , d^* el tamaño intermedio de la abertura y tanto alfa (α) como beta (B) son constante determinadas de forma experimental (Bernedo, 2015).

Existen distintos métodos de solución que se basan en la estimación de parámetros. Primero, el método de ensayos de laboratorio enfocados en la reducción de tamaño de una granulometría muy específica (distribución mono-dispersa) estos ensayos realizados en “monotamaños” permiten la integración del modelo cinético de conminución batch para construir gráficas de rectas descendientes de la fracción de masa del monotamaño en función del tiempo. Se repite el procediendo con distintos monotamaños en la alimentación y se podrán calcular los valores de las funciones para cada fracción granulométrica de interés. Otro método de resolución es la regresión no lineal que estima los parámetros a partir de resultados batch, se plantea una función objetivo y se emplean técnicas standard de regresión no lineal. Por último, el método simplificado que es un caso especial que parte del modelo general de conminución y se deriva un modelo matemático simplificado para determinar los parámetros (Bernedo, 2015) (Sepúlveda y Gutiérrez, 1986).

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un software para la simulación de un sistema de molienda mediante el modelo matemático del balance de masa diferencial de fractura de mineral que se rige por la función de selección y fractura. Además, el software debe validar los parámetros de las funciones mediante el cálculo del pasado acumulado. También, se tiene como objetivo desarrollar una interfaz gráfica que permita que este modelo sea accesible para su uso en la docencia e investigación de procesos de molino de bolas.

2. METODOLOGÍA

2.1. Planteamiento del modelo

Se creó una codificación en el programa Matlab (Matlab, 2019) para validar los parámetros de las funciones de selección y fractura, en base al planteamiento del trabajo de Bernedo (2015) que determinó dichos parámetros a través de técnicas de regresión no lineal en un programa de diseño que siguió el algoritmo propuesto por Sepúlveda y Gutiérrez (1986). El algoritmo requiere de datos iniciales que se utilizaron en el modelo matemático de molienda batch donde los resultados simulados se compararon con resultados experimentales mediante el uso de una función objetivo de minimización de mínimos cuadrados. Si el error es mínimo se aceptan los parámetros de la función selección y la función de fractura. Caso contrario se buscan nuevos parámetros. (Bernedo, 2015).

2.2. Solución general del modelo de molienda

Según Bernedo (2015), existe la solución analítica para la ecuación diferencial de primer orden donde se asume que los parámetros S_i y B_{ij} no varían con el tiempo. La solución general del modelo fue propuesto por Herbst y Fuerstenau y se denomina “modelo lineal” y se expresa en forma matricial:

$$f = T * J * T^{-1} * f^0 \quad (5)$$

Donde T es una matriz triangular inferior ($n \times n$), J es una matriz diagonal ($n \times n$), f^0 es el vector alimentación al tiempo cero y f es el vector de descarga al tiempo t .

Según estudios la función de selección S_i presenta relaciones de proporcionalidad con la potencia absorbida por el molino, según la ecuación 6:

$$S_i = S_i^E * \frac{P}{H} \quad (6)$$

Donde S_i^E es la función de selección específica que no depende de las condiciones de operación del molino ni de la geometría, H es la masa de la materia dentro del molino y P es la potencia neta consumida.

Además, se sabe que el consumo de energía E se expresa como:

$$E = \frac{P * t}{H} \quad (7)$$

Si se reemplaza la ecuación 7 en la ecuación 6 se obtiene la ecuación 8 que se puede expresar también como la ecuación 9:

$$S_i = S_i^E * \left(\frac{E}{t}\right) \quad (8)$$

$$S_i * t = S_i^E * E \quad (9)$$

Por lo tanto, el modelo cinético de molienda Batch puede expresarse en forma normalizada como:

$$\frac{df_i(E)}{dE} = -S_i^E f_i(E) + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij} S_j^E f_j(E) \quad (10)$$

Como se observa en la ecuación 10, el modelo de molienda Batch se expresa mediante la función de selección específica S_i^E donde tiene dependencia del consumo específico de energía. De igual forma, la solución general se expresa en su forma lineal como:

$$f = T * J * T^{-1} * f^0 \quad (5)$$

Siendo T_{ij} :

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j \\ 1, & \text{si } i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik} * S_k^E}{S_i^E - S_j^E} * T_{kj}, & \text{si } i > j \end{cases} \quad (11)$$

Y J_{ij} :

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \exp(-S_i^E * E), & \text{si } i = j \end{cases} \quad (12)$$

2.3. Diseño de la aplicación

El programa se creó en AppDesigner, una aplicación dentro de Matlab. Se puede observar en la Figura 5 que el programa cuenta con 4 secciones.

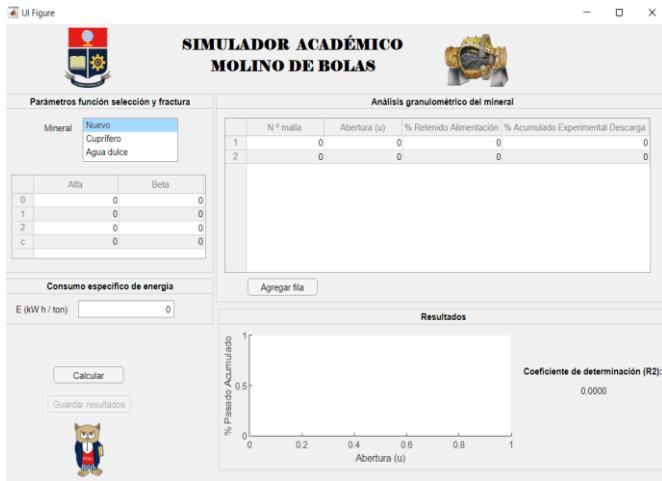


Figura 5. Diseño del simulador en AppDesigner

La primera sección que se diseñó fueron los “Parámetros de las funciones de selección y fractura”. Se colocó una tabla para las constantes alfa (α) y beta (B) y un List Box para seleccionar un mineral nuevo si el usuario cuenta con los valores de las constantes que deben ser introducidas en la tabla de forma manual. Caso contrario, si seleccionó el mineral Cuprífero o Agua dulce se despliegan valores bibliográficos de las constantes, como se muestra en la Figura 6.

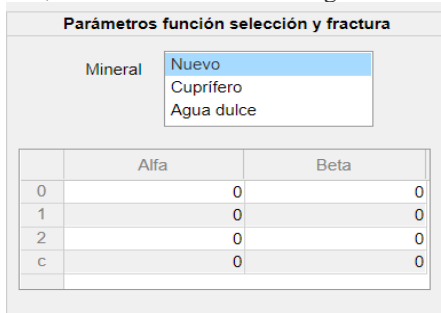


Figura 6. Diseño de la sección parámetros de función selección y fractura

A continuación, se diseñó la segunda sección que corresponde al “Análisis granulométrico del mineral” que cuenta con una tabla de cuatro columnas que incluye al número de malla, tamaño de abertura, porcentaje retenido de alimentación f^0 y el porcentaje del pasado acumulado experimental. También se colocó un botón para agregar las filas que requiera el usuario en la opción de mineral nuevo. Al igual que en el anterior diseño, si seleccionó el mineral Cuprífero o Agua dulce, se llenan las columnas de la tabla con valores bibliográficos como se observa en la Figura 7.

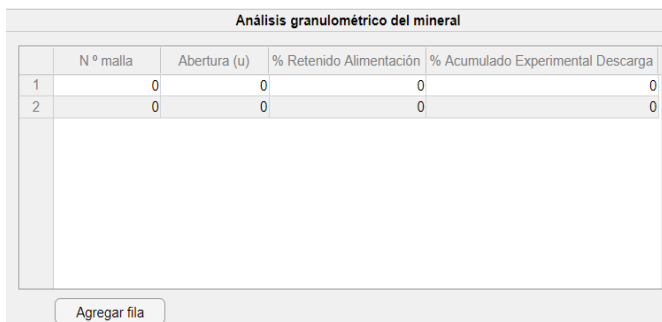


Figura 7. Diseño de la sección análisis granulométrico

Luego, se colocó una sección pequeña para el “Consumo específico de energía” donde se debe introducir el valor en kW h/ton. Todos los valores mencionados con anterioridad se utilizaron para determinar el porcentaje del pasado acumulado simulado y por ello se colocó el botón “Calcular” para realizar dicho proceso. Se realizó la programación del botón “Calcular” donde se encontró el tamaño intermedio d_i^* con el uso de la ecuación 13 y la función selección específica S_i^E con la ecuación 3:

$$d_i^* = (d_i * d_{i+1})^{0.5} \quad (13)$$

$$S_i^E = \frac{\alpha_o * (d_i^*)^{\alpha_1}}{1 + \left(\frac{d_i^*}{d_c}\right)^{\alpha_2}} \quad (3)$$

Se prosiguió a calcular la función fractura B_{ij} , función fractura retenida b_{ij} , el modelo de simulación de molienda batch T_{ij} , la inversa del modelo T_{ij}^{-1} que son matrices triangulares inferiores $n \times n$, a excepción de la matriz J_{ij} que es una matriz diagonal $n \times n$, de acuerdo con las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$B_{ij} = B_0 * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{B_1} + (1 - B_0) * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{B_2} \quad (4)$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \leq j \\ B_{i,j} - B_{i+1,j}, & \text{para } i > j \end{cases} \quad (14)$$

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j \\ 1, & \text{si } i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik} * S_k^E}{S_i^E - S_j^E} * T_{kj}, & \text{si } i > j \end{cases} \quad (11)$$

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \exp(-S_i^E * E), & \text{si } i = j \end{cases} \quad (12)$$

Se finalizó el cálculo con el porcentaje del pasado acumulado simulado que se obtuvo a partir del retenido simulado f mediante la multiplicación de matrices. El ejemplo de los cálculos que se realizaron se encuentran en la sección del Anexo 1.

$$f = T * J * T^{-1} * f^0 \quad (5)$$

Por último, se diseñó la sección de “Resultados” que muestra la gráfica del porcentaje de pasado acumulado vs la abertura en micras. Además, se colocó un botón para “Guardar resultados” que crea un archivo de texto txt con los valores del pasado acumulado experimental y simulado. También, se colocó un label para observar el coeficiente de determinación R^2 que representa la desviación entre los datos experimentales y los simulados, como se muestra en la Figura 8:

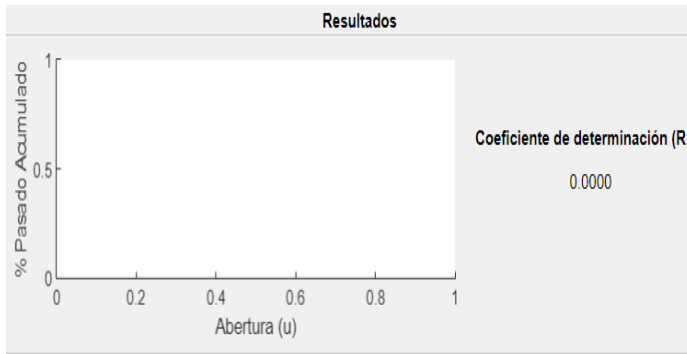


Figura 8. Diseño de la sección resultados

2.4. Atrapar errores

Una parte del código que se realizó tuvo como objetivo encontrar errores provenientes de los datos ingresados por el usuario para evitar fallos en la simulación. Por ejemplo, si se ingresó un número negativo o una palabra en vez de un dato numérico, el programa muestra en la pantalla un mensaje de aviso que el dato escrito no es aceptable, como se observa en la Figura 9. El mismo caso se repitió, si se introdujo el valor cero, a excepción de la constante Beta C (no es un dato que se requiere en los cálculos) y el porcentaje retenido de alimentación f^0 (en el primer número de malla si puede ser cero) que pueden tener dicho valor.

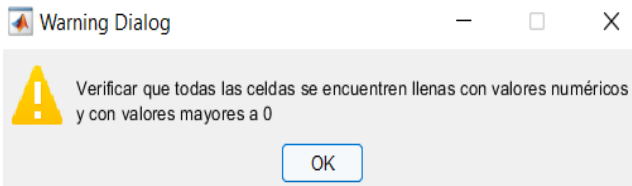


Figura 9. Mensaje de aviso por valor erróneo introducido en el programa

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Mineral Cuprífero

Para mostrar la resolución, se escogió de ejemplo el mineral Cuprífero con el fin de comparar los resultados obtenidos en el simulador de AppDesigner y los que obtuvo Bernedo (2015) en su trabajo. En la Figura 10 y 11, se observan los datos correspondientes al mineral Cuprífero.

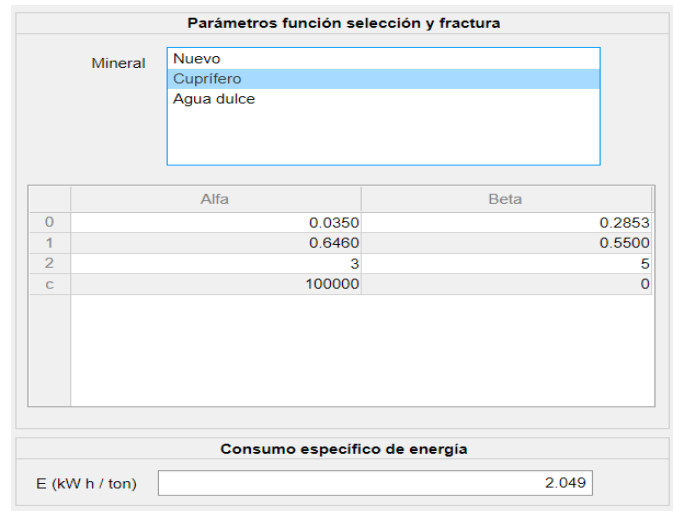


Figura 10. Constante alfa y beta del mineral Cuprífero

Análisis granulométrico del mineral

	N ° malla	Abertura (u)	% Retenido Alimentación	% Acumulado Experimental	Descarga
1	6	3350	0		100
2	8	2360	13.9300		100
3	10	1700	24.0400		99.7200
4	14	1180	4.6700		99.4000
5	20	850	9.4900		99.1700
6	28	600	4.1100		98.5800
7	35	425	10.7900		98.3300
8	48	300	5.4300		93.4000
9	65	212	4.2200		84.5500
10	100	150	3.9900		74.0100
11	150	106	3.0900		62.5700
12	200	75	16.2400		52.3600

Figura 11. Análisis granulométrico del mineral Cuprífero

Una vez realizada la simulación, se muestran los resultados en la gráfica del porcentaje del pasado acumulado vs abertura. Como se muestra en la Figura 12, la curva de color azul representa el porcentaje del pasado acumulado experimental mientras que la curva amarilla hace referencia al simulado. Ambas curvas tienen tendencia similar por lo que los resultados que se simularon si se aproximan a los experimentales. Como menciona Bernedo (2015), existe una desviación en las curvas debido a la no linealidad y a los errores que pueden provenir del análisis granulométrico. No obstante, tanto en la simulación como en el trabajo bibliográfico el coeficiente de determinación r^2 es de 0.989 por lo que es aceptable el margen de error y se validan los parámetros de la función fractura y función selección. En la Figura 14 se muestra como el botón “Guardar resultados” cumple la función de crear un archivo de texto txt donde se visualiza de mejor manera que los resultados experimentales y simulados son muy cercanos.

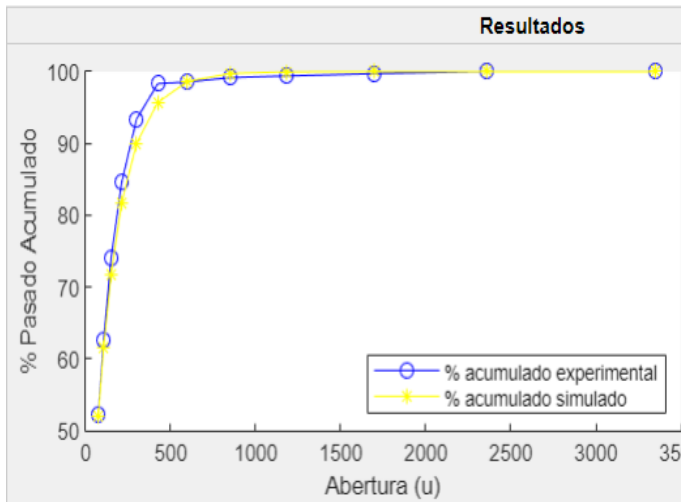


Figura 12. Resultado obtenidos mediante la simulación mineral Cuprífero

Coefficiente de determinación (R2):
0.989

Figura 13. Coeficiente de determinación de la simulación del mineral Cuprífero

Resultados del pasado acumulado: Bloc de notas

%Pasado Acumulado Experimental	%Pasado Acumulado Simulado
100.0000	100.0000
100.0000	100.0000
99.7200	99.9992
99.4000	99.9729
99.1700	99.7361
98.5600	98.6560
98.3300	95.7220
93.4000	90.0321
84.5500	81.6417
74.0100	71.7013
62.5700	61.4976
52.3600	52.0403

Figura 14. Archivo de texto con los resultados de la simulación

3.2. Mineral Agua Dulce

Para el caso del mineral Agua Dulce, se obtuvieron los resultados de la Figura 15 y 16. Como se puede observar, la curva del pasado acumulado experimental tiene una tendencia diferente a la curva del pasado simulado. Lo que también se refleja en el valor de 0.678 correspondiente al coeficiente de determinación. Esto se debe a los datos que se emplearon, el análisis granulométrico son datos bibliográficos de De la Torre (2019), pertenecientes al mineral de Agua Dulce proveniente de Portovelo. Mientras que los coeficientes de la función de selección y fractura son valores bibliográficos con los que trabaja el programa Moly-Cop. Bernedo (2015), afirma que para determinar de forma correcta la función de selección y fractura se debe realizar el estudio mineralógico característico de cada mineral, es decir, los datos deben ser correspondientes al mineral para obtener un r^2 cercano a 1 y validar los parámetros.

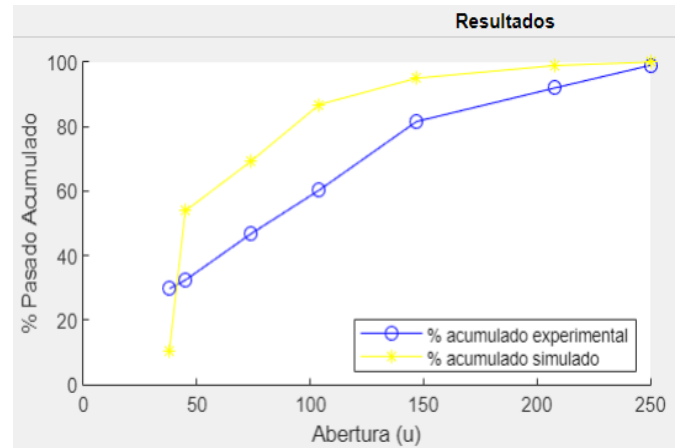


Figura 15. Resultado obtenidos mediante la simulación mineral Agua Dulce

Coefficiente de determinación (R2):
0.678...

Figura 16. Coeficiente de determinación del mineral Agua Dulce

Por lo tanto, validar los parámetros de la función de selección y fractura tiene importancia para conocer cómo se rompen las partículas dentro del molino debido a que la resolución de la ecuación diferencial del modelo general de molienda requiere de dichos parámetros. Además, permite obtener un idea de criterio de escalamiento porque la función de selección y fractura específica es invariante, es decir, no depende del equipo sino de las características del mineral, por lo que las funciones obtenidas mediante pruebas hechas en laboratorio en un molino planta piloto se pueden escalar y utilizar de igual forma en un molino industrial, siempre y cuando sea el mismo tipo de molino, en este caso, un molino de bolas (Pérez, Pérez, Alvarado y Corimanya, 2018). Cabe mencionar que los parámetros también permiten realizar evaluaciones de análisis en las condiciones de operación del molino como por ejemplo, ver la influencia que tiene la variación del porcentaje de velocidad crítica y el nivel de llenado con el fin de seleccionar condiciones óptimas de operación (Bernedo, 2015).

4. CONCLUSIONES

Los resultados simulados del mineral Cuprífero fueron aceptables porque la gráfica del pasado simulado tiene tendencia similar al pasado experimental con un r^2 de 0.989.

En el caso del mineral Agua Dulce las curvas no tuvieron tendencia similar lo que se refleja en el r^2 de 0.676. Esto se debe a que los datos introducidos en el programa deben ser propios y característicos de cada mineral, lo cual para este caso, no fue así.

El programa del simulador del molino de bolas si tiene el alcance esperado porque permite validar los parámetros de la función de selección y fracturas.

5. RECOMENDACIONES

Se recomienda el uso del programa con un nuevo mineral donde los datos sean característicos del mineral para poder simular de forma correcta en base al modelo de molienda batch.

Se recomienda hacer un análisis de la variación del consumo de energía específica debido a que está directamente relacionado con las funciones de fractura y la reducción del tamaño del mineral.

6. REFERENCIAS

- Bernedo, L. (2015). *Estudio de la influencia de la velocidad crítica y nivel de llenado, en la molienda de un mineral cuprífero a través de simulación de procesos*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Metalurgista). Universidad Nacional San Agustín. Arequipa, Perú.
- Briceño, E. (2015). *Desarrollo de un simulador bajo el entorno de Matlab para un circuito de molienda y calificación directa más común en los procesos de conminación de minerales*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Químico). Universidad Nacional de Trujillo. Trujillo, Perú.
- De la Torre, E. (2019). *Operaciones Unitarias Básicas: Apuntes de clase Tomo 1*. Escuela Politécnica Nacional. Departamento de Metalurgia Extractiva.
- Heredia, H. (2016). *Simulación y obtención de parámetros óptimos para la optimización de los revestimientos del molino SAG 36 ft x 26.6 ft de la minera Constancia – Hudbay*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Metalurgista). Universidad Nacional San Agustín. Arequipa, Perú.
- Hinojosa, J. (2017). *Diseño y simulación de un molino de bolas horizontal de 15 [Tn/hr] aplicado a una planta concentradora mediante el uso de software CAD especializado*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Mecánico Electricista). Universidad Nacional del Altiplano. Puno, Perú.
- King, R. (2001). *Modeling and simulation of mineral processing systems*. Boston, USA: Butterworth – Heinemann.
- Mathworks. (2019). *MATLAB R2019a*.
- Méndez, J. y Orellana, A. (2018). *Diseño y construcción de un molino de martillos triturador de 15 qq/h de mineral pétreo para producir biofertilizantes*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Mecánico). Universidad Politécnica Salesiana. Quito, Ecuador.
- Ortiz, M. (2020). *Molienda de bolas en húmedo y en seco con eje externo*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero en Minas y Metalurgia). Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México, México.
- Pérez, E., Pérez, E., Alvarado, L. y Corimanya, J. (2018). *Modelo matemático aplicado a molienda discontinua "Batch"*. *Revista TECNIA*, 27(1), 21-28. DOI: <http://dx.doi.org/10.21754/tecnica.v27i1.122>
- Raby, M. (2016). *Evaluación de circuito molienda – clasificación de planta las luces de compañía minera las cenizas, utilizando Moly-Cop Tools como software de apoyo*. (tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Civil). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
- Sepúlveda, J. y Gutiérrez, L. (1986). *Dimensionamiento y optimización de plantas concentradoras mediante técnicas de modelación matemática*. Santiago, Chile: Centro de investigación minera y metalúrgica.
- Viana, R. (2018). *Minería en América Latina y el Caribe, un enfoque socioambiental*. *Revista U.D.C.A Actualidad y Divulgación Científica*, 21(2), 617-637. DOI: <https://doi.org/10.31910/rudca.v21.n2.2018.1066>

7. ANEXOS

Anexo I: Ejemplo de Cálculo

Para mostrar los cálculos que realizó el programa de simulación, se tomó como referencia al mineral Cuprífero:

- **Tamaño intermedio (d_i^*) de la abertura en la posición $i=2$:**

	Nº malla	Abertura (u)
1	6	3350
2	8	2360
3	10	1700
4	14	1180
5	20	850
6	28	600
7	35	425
8	48	300
9	65	212
10	100	150
11	150	106
12	200	75

Figura AI.1 Datos de la malla y abertura del mineral Cuprífero

$$d_i^* = (d_i * d_{i+1})^{0.5} \tag{13}$$

$$d_2^* = (2360 * 1700)^{0.5} = 2003$$

	1
1	2.8118e+03
2	2.0030e+03
3	1.4163e+03
4	1.0015e+03
5	714.1428
6	504.9752
7	357.0714
8	252.1904
9	178.3255
10	126.0952
11	89.1628
12	0

Figura AI.2 Resultados del tamaño intermedio d_i^* del mineral Cuprífero

- **Función de selección específica (S_i^E) en la posición $i=2$:**

	Alfa
0	0.0350
1	0.6460
2	3
c	100000

Figura AI.3 Constantes alfa del mineral Cuprífero

$$S_i^E = \frac{\alpha_o * (d_i^*)^{\alpha_1}}{1 + (d_i^*)^{\alpha_2}} \tag{3}$$

$$S_2^E = \frac{0.035 * (2360)^{0.646}}{1 + \left(\frac{2003}{100000}\right)^3} = 4.7141$$

	1
1	5.8668
2	4.7141
3	3.7698
4	3.0147
5	2.4239
6	1.9383
7	1.5501
8	1.2386
9	0.9905
10	0.7921
11	0.6334
12	0

Figura A1.4 Resultados de la función selección específica del mineral Cuprífero

- **Función fractura (Bij) para i=3 y j=1:**

Beta	
	0.2853
	0.5500
	5
	0

Figura A1.5 Constantes beta del mineral Cuprífero

$$B_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j \\ 1, & \text{si } i = j \\ B_0 * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{B_1} + (1 - B_0) * \left(\frac{d_i}{d_j}\right)^{B_2}, & \text{si } i > j \end{cases} \quad (4)$$

$$B_{3,1} = 0.2853 * \left(\frac{1700}{2360}\right)^{0.55} + (1 - 0.2853) * \left(\frac{1700}{2360}\right)^5 = 0.3768$$

12x12 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.3768	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.2172	0.3485	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.1670	0.2172	0.3768	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0.1351	0.1648	0.2210	0.3608	1	1	0	0	0	0	0	0
7	0.1113	0.1338	0.1670	0.2172	0.3634	1	1	0	0	0	0	0
8	0.0918	0.1100	0.1351	0.1648	0.2172	0.3608	1	1	0	0	0	0
9	0.0758	0.0908	0.1111	0.1336	0.1649	0.2167	0.3616	1	1	0	0	0
10	0.0627	0.0751	0.0918	0.1100	0.1338	0.1648	0.2172	0.3626	1	1	0	0
11	0.0518	0.0620	0.0758	0.0908	0.1101	0.1336	0.1649	0.2172	0.3616	1	1	0
12	0.0428	0.0513	0.0627	0.0751	0.0909	0.1100	0.1338	0.1651	0.2172	0.3626	1	1

Figura A1.6 Resultados de la función fractura del mineral Cuprífero

- **Función fractura retenida (bij) para la posición i=2 y j=1:**

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \leq j \\ B_{i,j} - B_{i+1,j}, & \text{para } i > j \end{cases} \quad (14)$$

$$b_{2,1} = 1 - 0.3768 = 0.6232$$

12x12 double												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.6232	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.1596	0.6515	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.0502	0.1314	0.6232	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.0319	0.0524	0.1558	0.6392	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.0238	0.0310	0.0539	0.1436	0.6366	0	0	0	0	0	0	0
7	0.0195	0.0238	0.0319	0.0524	0.1463	0.6392	0	0	0	0	0	0
8	0.0160	0.0192	0.0240	0.0312	0.0523	0.1441	0.6384	0	0	0	0	0
9	0.0131	0.0157	0.0193	0.0236	0.0311	0.0519	0.1445	0.6374	0	0	0	0
10	0.0109	0.0131	0.0160	0.0192	0.0237	0.0312	0.0523	0.1454	0.6384	0	0	0
11	0.0090	0.0107	0.0131	0.0157	0.0192	0.0236	0.0311	0.0521	0.1445	0.6374	0	0
12	0.0428	0.0513	0.0627	0.0751	0.0909	0.1100	0.1338	0.1651	0.2172	0.3626	1	1

Figura A1.7 Resultados de la función fractura retenida del mineral Cuprífero

- Matriz (Tij) del modelo molienda batch para i=3 y j=1:

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j \\ 1, & \text{si } i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik} * S_k^E}{S_i^E - S_j^E} * T_{kj}, & \text{si } i > j \end{cases} \quad (11)$$

$$T_{3,1} = \frac{0.1596 * 5.8668}{3.7698 - 5.8668} * 1 + \frac{0.6515 * 4.7141}{3.7698 - 5.8668} * (-3.1719) = 4.1987$$

12x12 double												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-3.1719	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4.1987	-3.2522	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-2.8731	4.1315	-3.1111	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1.0647	-2.7497	4.0176	-3.2617	1	0	0	0	0	0	0	0
6	-0.2364	1.0696	-2.7602	4.2735	-3.1778	1	0	0	0	0	0	0
7	0.0243	-0.2287	1.0662	-2.9335	4.1000	-3.1909	1	0	0	0	0	0
8	-0.0019	0.0261	-0.2334	1.1419	-2.7807	4.1131	-3.1771	1	0	0	0	0
9	-7.8302e-04	-1.4472e-04	0.0246	-0.2467	1.0614	-2.7783	4.0825	-3.1820	1	0	0	0
10	-6.3709e-04	6.0111e-04	-0.0013	0.0266	-0.2254	1.0591	-2.7576	4.1024	-3.1867	1	0	0
11	-5.2267e-04	5.0525e-04	-4.1451e-04	-7.8016e-04	0.0238	-0.2257	1.0528	-2.7768	4.1051	-3.1820	1	0
12	-0.0025	0.0024	-0.0019	7.0799e-04	-0.0013	0.0228	-0.2006	0.8564	-1.9183	2.1820	-1	1

Figura A1.8 Resultados de la matriz Tij del mineral Cuprífero

- Matriz inversa (Tij⁻¹):

12x12 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3.1719	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	6.1169	3.2522	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	8.7986	5.9863	3.1111	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0
5	11.7804	9.2094	6.1298	3.2617	1.0000	0	0	0	0	0	0	0
6	13.5622	11.5900	8.9442	6.0915	3.1778	1.0000	0	0	0	0	0	0
7	14.9668	13.5465	11.4683	8.9979	6.0400	3.1909	1.0000	0	0	0	0	0
8	15.8256	14.8736	13.3737	11.4605	8.9001	6.0249	3.1771	1.0000	0	0	0	0
9	16.4520	15.8463	14.8215	13.4415	11.4287	8.9223	6.0270	3.1820	1.0000	0	0	0
10	16.8417	16.4810	15.8200	14.8885	13.4242	11.4565	8.9303	6.0378	3.1867	1.0000	0	0
11	17.0313	16.8353	16.4350	15.8460	14.8488	13.4247	11.4443	8.9267	6.0351	3.1820	1.0000	0
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1

Figura AI.9 Resultados de la matriz inversa T_{ij}^{-1} del mineral Cuprífero

- Matriz (Jij) posición i=2 y j=2:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \exp(-S_i^E * E), & \text{si } i = j \end{cases} \quad (12)$$

$$E = 2.049 \text{ kW h/ton}$$

$$J_{2,2} = \exp(-4.7141 * 2.049) = 6.3834 \times 10^{-5}$$

12x12 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	6.0161e-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	6.3834e-05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	4.4193e-04	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.0021	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.0070	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.0188	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.0417	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.0790	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1314	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1973	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2731	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Figura AI.10 Resultados de la matriz inversa (Jij) del mineral Cuprífero

- Porcentaje retenido simulado (f):

% Retenido Alimentación	
	0
	13.9300
	24.0400
	4.6700
	9.4900
	4.1100
	10.7900
	5.4300
	4.2200
	3.9900
	3.0900
	16.2400

Figura AI.11 Porcentaje retenido alimentación (f^0) del mineral Cuprífero

$$f = T * J * T^{-1} * f^0 \tag{5}$$

12x1 double	
	1
1	0
2	8.8921e-04
3	0.0278
4	0.2465
5	1.1104
6	2.9864
7	5.7493
8	8.4325
9	9.9522
10	10.1914
11	9.4331
12	51.8696

Figura AI.12 Resultados del porcentaje retenido (f) del mineral Cuprífero

- **Porcentaje del pasado acumulado simulado:**

$$\begin{aligned}
 P_{acum_1s} &= 100 - f_1 = 100 - 0 = 100 \\
 P_{acum_2s} &= P_{acum_1s} - f_2 = 100 - 8.89 \times 10^{-4} = 100 \\
 P_{acum_3s} &= P_{acum_2s} - f_3 = 100 - 0.0278 = 99.9991
 \end{aligned} \tag{15}$$

12x1 double	
	1
1	100
2	100
3	99.9991
4	99.9714
5	99.7249
6	98.6144
7	95.6280
8	89.8788
9	81.4463
10	71.4942
11	61.3027
12	51.8696

Figura AI.13 Resultados del pasado acumulado simulado del mineral Cuprífero

- Error de suma de cuadrados (SSE):

% Acumulado Experimental Descarga	
	100
	100
	99.7200
	99.4000
	99.1700
	98.5600
	98.3300
	93.4000
	84.5500
	74.0100
	62.5700
	52.3600

Figura AI.14 Valores del pasado acumulado experimental (pacume) del mineral Cuprífero

$$SSE = |pacume - pacums|^2 \tag{16}$$

12x1 double	
	1
1	0
2	0
3	0.0779
4	0.3264
5	0.3079
6	0.0030
7	7.3007
8	12.3991
9	9.6329
10	6.3295
11	1.6060
12	0.2405

Figura AI.15 Resultados del SSE

- **Regresión de la suma de cuadrados (SSR):**

$$\begin{aligned} \text{promedio pacume} &= 88.5058 \\ \text{SSR} &= |\text{pacume} - \text{promedio pacume}|^2 \end{aligned} \tag{17}$$

12x1 double	
	1
1	132.1159
2	132.1159
3	125.7575
4	118.6829
5	113.7245
6	101.0863
7	96.5143
8	23.9529
9	15.6486
10	210.1292
11	672.6675
12	1.3065e+03

Figura AI.16 Resultados del SSR

- **Suma de cuadrados totales (SST):**

$$\text{SST} = \text{SSE} + \text{SSR} \tag{18}$$

12x1 double	
	1
1	132.1159
2	132.1159
3	125.8354
4	119.0093
5	114.0323
6	101.0892
7	103.8150
8	36.3520
9	25.2815
10	216.4587
11	674.2734
12	1.3068e+03

Figura AI.17 Resultados del SST

- **Sumatoria de los valores obtenidos en SSR y SST:**

$$\text{sum}(\text{SSR}) = 3048.9 \tag{19}$$

$$\text{sum}(\text{SST}) = 3087.1 \tag{20}$$

- **Coefficiente de determinación r^2 :**

$$r^2 = \frac{\text{sum}(\text{SSR})}{\text{sum}(\text{SST})} = \frac{3048.9}{3087.1} = 0.9876$$