

El control óptimo y su desarrollo a través de la historia.

Georginio Ananganó Alvarado*, Óscar Gonzales Zurita †
Escuela Politécnica Nacional
Quito-Ecuador.

Resumen—El presente trabajo busca condensar los avances históricos del Control Óptimo, presentando un análisis cronológico de los problemas más trascendentales de optimización y su posterior influencia. Además, se presenta un resumen de las técnicas de optimización más usadas en la teoría de control moderna, una implementación breve de algunas de estas técnicas en una planta altamente inestable (péndulo invertido), enumerando las aplicaciones en las que el control óptimo ha tenido éxito, planteando conclusiones, objetivos y trabajos futuros.

Index Terms—Optimización, control, regulador, ecuación de Euler-Lagrange, principio de Pontryagin, LQR, LQI, H infinito

I. INTRODUCCIÓN

El control óptimo de sistemas es un problema que se ha convertido en una disciplina en auge que busca utilizar de forma eficiente los recursos que necesitan los procesos para su funcionamiento. Frente a esta problemática, distintas soluciones se han propuesto desde diversos campos de la ciencia. Por esta razón, se presenta un resumen general de las diferentes técnicas de control óptimo utilizadas hoy en día para el control de plantas y procesos. El siguiente trabajo se realiza de la siguiente manera: en la sección II, se muestra la Teoría de Control Óptimo, en la sección III se hará un breve recorrido por la literatura referente a los controladores óptimos, en la sección IV se estudiará el péndulo invertido, mientras que en la sección V se hará la Discusión de los resultados de la sección anterior y finalmente en la sección VI, conclusiones del trabajo.

II. TEORÍA DEL CONTROL ÓPTIMO

II-A. Los inicios del control óptimo

Históricamente, el primer problema de Control Óptimo fue planteado por Johann Bernoulli, en el año de 1697, aunque se conoce que Galileo Galilei en el año 1638 en su obra *Dos nuevas ciencias* propuso el mismo problema y sugirió una solución. No obstante, se puede regresar más atrás en el tiempo para encontrar que los griegos tenían interés en problemas de este tipo, aunque solamente formularon preguntas ambiguas [1]. El problema de Bernoulli se planteó así:

Invitación a todos los matemáticos para resolver un nuevo problema: Si en un plano vertical dos puntos A y B están dados, se requiere especificar la trayectoria de la curva AMB del punto móvil M, empezando su movimiento desde A, y bajo la

influencia de su propio peso, llegue al punto B en el menor tiempo posible (...)

El problema en cuestión actualmente se conoce como el *Problema de la Braquistócrona* [2], y fue uno de los primeros problemas del cálculo variacional. En efecto, aunque la recta genera la distancia más corta entre dos puntos en un plano vertical, no genera la trayectoria que puede recorrerse en el menor tiempo. En este punto es prudente introducir la palabra *Optimización*. En este problema puntual, la variable que se deseaba minimizar era el tiempo t . Se encontró que la solución paramétrica de la trayectoria óptima para el problema sin fricción en un plano vertical xy se aprecia en (1) [3]. Apellidos como Leibniz, L'Hopital, Hudde, Newton, figuran entre los que intentaron, y resolvieron con éxito el problema planteado por Bernoulli.

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (1)$$

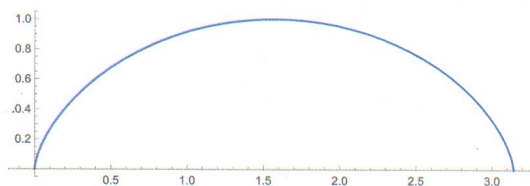


Figura 1. Gráfica de la curva braquistócrona generada en *Wolfram Mathematica*. $k = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En base a lo expuesto anteriormente parecería que el Control Óptimo es una disciplina antiquísima, pero lo cierto es que, enmarcada en el Siglo de las Luces, en un futuro se podrían observar sus aplicaciones a nivel científico-tecnológico.

II-B. De Euler a Weierstrass

En Física, la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial se conoce como el Lagrangiano. Cabe mencionar, que es una función escalar basada en los *estados* del sistema. En este punto, el lector que esté familiarizado con la Teoría de Control, no debe sorprenderse que los estados del Lagrangiano sean los mismos que se formulan en el control por espacio de estados, por lo que se deben considerar estas variables y sus derivadas.

Dado que el Lagrangiano condensa la información física del sistema en unidades de energía, el producto de esta energía por

la unidad de tiempo se conoce como la *acción*. En sentido más general, la acción es la integral del Lagrangiano respecto al tiempo.

$$S = \int_A^B L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2)$$

Buscando la optimización de un sistema, se busca la trayectoria óptima. Con este propósito se desarrolló la Ecuación Diferencial de Euler-Lagrange, que se presenta a continuación [4].

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial u}(q(t), \dot{q}(t), t) \right] - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0 \quad (3)$$

(3) se usa extensivamente en el campo de la Mecánica Clásica, e inclusive se ha utilizado en la Mecánica Relativista, con algunas variaciones.

La Ecuación de Euler-Lagrange tiene su derivación a partir de la definición de la acción [5]. Usando otra notación puede emplearse la siguiente escritura [6]:

$$F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} F_y(\cdot, y, y') = F_y(\cdot, y, y') \quad \text{a trozos } [a, b] \quad (4)$$

Legendre aportó la segunda condición para un mínimo, que se aprecia en (5) para el caso escalar.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(q(t), \dot{q}(t), t) \geq 0 \quad (5)$$

Poco después, Hamilton realizó aportes sustanciales. Sea (6) la función Hamiltoniana de control.

$$H(q, u, p, t) = \langle p, u \rangle - L(q, u, t) \quad (6)$$

Es necesario definir:

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial u}(\dot{q}(t), q(t), t) \quad (7)$$

Se define. A partir de estas definiciones, se llegaron a las Ecuaciones de Hamilton, que se reproducen a continuación [1]:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (8)$$

Después de cierto formalismo matemático, se puede concluir para la función de control Hamiltoniana que:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0 \quad (9)$$

De acuerdo a la ecuación 9, se deben cumplir las condiciones descritas para que la función de control tenga un máximo en función de la variable u . Esto es importante, ya que a comparación de la ecuación 3, las condiciones para el Hamiltoniano son más parecidas a las condiciones de puntos críticos que se enseñan en los albores del Cálculo, por lo que su generalización y estudio eran más accesibles.

Weierstrass realizó la que quizá fue la mayor contribución de su tiempo en el cálculo variacional. Añadió robustez a las soluciones encontradas antes, mediante la introducción de una *función de exceso*. Esto es importante en el Control Moderno ya que deben considerarse las variaciones o perturbaciones en el modelo original para que sean toleradas adecuadamente por el controlador y permita obtener una respuesta adecuada [1].

$$\eta(q, u, \bar{u}) = L(q, \bar{u}) - \frac{\partial L}{\partial u}(q, u) \cdot \bar{u} \quad (10)$$

Al definir esta función de exceso, se llegó a la conclusión más importante. Hay que notar, que a diferencia de los primeros criterios, $\dot{q}(t)$ es tratado de forma independiente con el establecimiento de la variable u . Por lo tanto, para establecer los criterios de optimalidad, se debe cumplir que:

$$H(q(t), \dot{q}(t), p(t), t) = \text{máx} H(q(t), u, p(t), t) \quad (11)$$

La conclusión anterior es de crucial importancia para el desarrollo del control óptimo moderno.

II-C. El principio del máximo de Pontryagin

El control óptimo moderno alcanzó su esplendor con el desarrollo de las técnicas investigadas por los investigadores de la Unión Soviética, en la mitad del siglo XX [7]. La Teoría de Control clásica empezó a estudiarse de forma exhaustiva en los Estados Unidos, a principios del siglo anterior. Problemas como la regulación automática de temperatura, equilibrio de barcos, fueron las primeras aplicaciones en las que los teóricos del control empezaron a trabajar, con resultados prometedores por parte de Bode y Nyquist [8].

Llegando la Segunda Guerra Mundial, el problema más importante era automatizar los sistemas de control de tiro. En virtud de agrupar todos los esfuerzos durante la guerra, los teóricos y los técnicos estadounidenses lograron realizar avances importantes en este ámbito [8].

En el año de 1956, el grupo de matemáticos encabezado por Lev Semyonovich Pontryagin, y sus estudiantes: V. Boltyanski, R. Gamkrelidze y E. Mishchenko, del Instituto Stelkov de Matemática en Moscú, presentó al mundo el principio del máximo [9]. El contexto en el que la investigación surgió está en la guerra fría. El control óptimo moderno se desarrolló para optimizar los problemas relacionados con la carrera espacial y armamentística. Por ejemplo, se puede imaginar un satélite con combustible limitado, que se envía desde la Tierra a un punto del espacio, con combustible limitado, y el consiguiente problema de qué trayectoria debería tomar para llegar en el menor tiempo, usando la menor cantidad de combustible posible.

En los párrafos siguientes, se expondrá la explicación del principio del máximo. Se tiene un sistema dinámico controlado. Si se tienen las ecuaciones de movimiento dadas por:

$$\dot{x} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n) = f^i(x, u) \quad (12)$$

En la ecuación anterior, el espacio fase es dado por los componentes x^1, \dots, x^n , mientras que los controles admisibles

vienen dados por $u = (u^1 \cdots u^n)$. En el problema de control óptimo a tratarse hay dos puntos ξ_0 y ξ_1 , y el objetivo es controlar la trayectoria de forma que viaje entre los puntos anteriores en un tiempo mínimo [9].

Se define una función que se optimizará:

$$H(x, \psi, u) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u) \quad (13)$$

La función que se presentó anteriormente, debe tomar un máximo respecto a u , en el caso que x, ψ sean arbitrarios pero sean fijos, considerando que u puede cambiar en un dominio cerrado $\bar{\Omega}$. El máximo se nota como $M(x, \psi)$. Si se tiene una solución al sistema hamiltoniano en forma de un vector dado por (x, ψ) , se deben cumplir las siguientes condiciones [9]:

$$\dot{x}^i = f^i(x, u) = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, i = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\dot{\psi}^i = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \psi_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, i = 1 \cdots n \quad (15)$$

El vector $u(t)$, que puede ser continuo a trozos, debe satisfacer en todo momento la condición:

$$H(x, \psi, u) = M(x, \psi) > 0 \quad (16)$$

El objetivo, será determinar $u(t)$, el control óptimo, y $x(t)$, la trayectoria optimizada en un conjunto local del problema [9].

II-D. El problema de control óptimo

Después de presentar un contexto histórico del control óptimo, es preciso presentar el enfoque moderno del planteamiento de problemas de este tipo.

Se consideran problemas donde el tiempo inicial t_a y el estado inicial $x(t_a) = x_a$ son especificados. El Problema de Control Óptimo se puede formular.

El objetivo es encontrar un control óptimo $u : [t_a, t_b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ de forma tal que el sistema dinámico definido por la ecuación diferencial [10]:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (17)$$

En este sistema dinámico, se busca transferir el estado inicial $x(t_a) = x_a$ a un estado admisible $x(t_b) \in S \subset \mathbb{R}^m$. La trayectoria de estados debe satisfacer las restricciones dadas por $x(t) \in \Omega_x(t) \subset \mathbb{R}^n$.

Lo más importante es que se define el funcional a minimizar, que actualmente se define de la siguiente forma [10]:

$$J(u) = K(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), u(t), t) \quad (18)$$

En base a esta sección, se examinarán las diferentes alternativas que se han desarrollado a lo largo de los años para el diseño de controladores que puedan aplicarse en la Teoría de Control Moderna.

III. CONTROLADORES

III-A. Generalidades

En el ámbito de la teoría de control, el análisis de controladores robustos inicia en la década de los 60 con la carrera espacial. A inicios de los años 70, se empieza a prestar atención a los controladores de horizonte finito y a mediados de la década de 1980 se empiezan a investigar con especial detalle los controladores de horizonte infinito con capacidades de predicción.

Actualmente, la tendencia es mezclar los controladores clásicos con los controladores modernos, inclusive con técnicas de 'caja negra' como el caso de la inteligencia artificial. Otras integraciones se realizan con lógica difusa, inteligencia artificial y minería de datos.

III-B. Regulador óptimo no lineal

El algoritmo preciso para obtener un controlador no lineal óptimo es un problema aún abierto en la matemática. A diferencia de otros controladores, de los que nos ocuparemos más adelante, el control óptimo por integración considera la dinámica no lineal del sistema dinámico que se estudia. Por eso, uno de los problemas más serios es resolver la ecuación diferencial parcial no lineal de Hamilton-Jacobi-Bellman [11]. Una alternativa es transformar el problema no lineal en un problema de borde con la Ecuación de Euler-Lagrange, que inclusive con esta asunción es un problema bastante complicado de resolver [11].

El regulador no lineal óptimo considera una ecuación diferencial del tipo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \quad (19)$$

En donde u es el control óptimo para el sistema dinámico. Se tiene además que minimizar el funcional dado por el criterio puramente cuadrático:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (20)$$

Hay que notar, que el problema es de horizonte infinito, es decir que no está limitado en el tiempo. El control óptimo puede obtenerse en la teoría de cálculo variacional con la siguiente expresión:

$$u = -R^{-1} g^T(x) p \quad (21)$$

El coestado p puede obtenerse a partir de la derivada del costo óptimo V . Se obtiene de la ecuación de coestado:

$$\dot{p} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u\right)^T p - Qx \quad (22)$$

[11] es quizá la referencia más detallada sobre este tipo de diseño de controlador. En la figura 2 se aprecian los contornos de fase en los que se grafican la velocidad angular respecto a la posición angular, con diferentes criterios de optimización

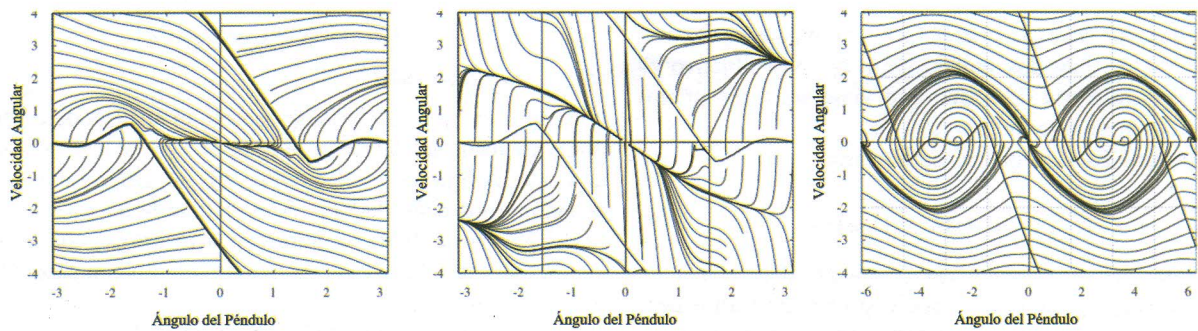


Figura 2. Simulaciones en lazo cerrado para controles $u = \frac{1}{2}u^*$, $u = 10u^*$ y un control con saturación, desarrollados por [11]

y restricciones de control. Una gran ventaja es que se pueden incluir saturaciones directamente de forma natural.

Es preciso mencionar que este controlador no lineal en teoría es el mejor ya que considera todas las variables dinámicas del sistema de estudio, con sus comportamientos completos y no restringidos a un conjunto de estados. No obstante, esta forma de resolución aún está en estudios intensivos, y ha demostrado que necesita algoritmos relacionados con métodos numéricos como se aprecia en los trabajos de [12] y [13]. Algoritmos han sido estudiados por [14].

III-C. Regulador Lineal Cuadrático (LQR)

El Regulador Lineal Cuadrático como su nombre lo indica, actúa eficientemente en sistemas carentes de no-linealidades. Es quizá el primer regulador óptimo propuesto. Si se tiene un sistema lineal dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{23}$$

Se busca optimizar el funcional dado por:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Qx + u^T Ru) dt + \frac{1}{2} x^T(T) P_1 x(T) \tag{24}$$

En este regulador, **A** es la dinámica de los estados del sistema representada en forma matricial, **B** es la relación de la entrada con los estados del sistema, u es la variable de control y Q es el error del estado, mientras que R es el esfuerzo del controlador [15]. El término $\frac{1}{2}x^T(T)P_1x(T)$ representa una penalización del controlador, puesto que en la práctica no es posible tener un control totalmente cercano a la idealidad, su uso es variable dependiendo del autor [16].

Las matrices Q y R son escogidas de forma heurística, en la mayoría de los casos. Generalmente Q es una matriz identidad y R es una matriz diagonal [15].

$$R = \rho \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix} \tag{25}$$

El parámetro ρ se usa para balancear la relación entrada/salida. EL regulador LQR tiene la característica de poseer

una ganancia estática, robustez, y a causa del asignamiento de polos, un control sencillo y barato [15].

La ganancia de realimentación puede ser calculada:

$$K = R^{-1}(B^T P(t) + N^T) \tag{26}$$

Además P es una matriz que puede calcularse resolviendo la ecuación diferencial de Riccati:

$$A^T P(t) + P(t)A - (P(t)B + N)R^{-1}(B^T P(t) + N^T) + Q = -\dot{P}(t) \tag{27}$$

Se deben cumplir condiciones de estado, de coestado, condiciones estacionarias, y condiciones de borde. Afortunadamente, existen paquetes informáticos que permiten calcular la matriz de realimentación de forma sencilla, requiriendo la matriz A , B , Q , R . En el caso de las dos últimas, se ha descrito ya el proceso que suele seguirse para escogerlas.

Cuando se incluye una acción integral para llegar a la referencia deseada, el LQR se modifica en un LQI (Control Integral Cuadrático) El vector de realimentación de estados viene dado por:

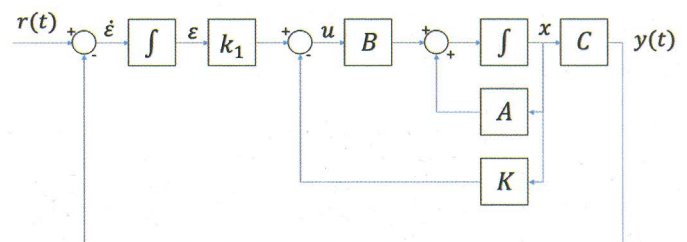


Figura 3. Diagrama de bloques típico en variables de estado para un regulador LQI.

$$u = -Kx + K_1 \varepsilon \tag{28}$$

Además:

$$\varepsilon = r - y = r - Cx \tag{29}$$

En este control, también es preciso mencionar que se dispone de una dinámica dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{30}$$

$$y = Cx \tag{31}$$

Como se aprecia, es la típica representación de un sistema dinámico en variables de estado. La ganancia óptima se determina al resolver la ecuación algebraica de Riccati [16]:

$$A^T P + PA - PBQ_u^{-1} B^T P + Q_x = 0 \tag{32}$$

Así, la teoría indica que la matriz \hat{K} puede calcularse:

$$\hat{K} = Q_u^{-1} B^T \tag{33}$$

De forma similar con el control mediante LQR, se dispone actualmente de software que puede realizar este proceso de forma amigable y aparta la posibilidad de emplear complejos sistemas de resolución manual.

III-D. Control Predictivo (MPC)

No obstante, los modelos anteriores se basan en conocer en cada momento el valor de las variables de estado. El control predictivo en base a modelo tiene la característica de anticipar el comportamiento futuro de la planta, gracias a su modelado. Este comportamiento permite al controlador tomar acciones de control anticipadas [17]. Es parte de la segunda generación de reguladores óptimos.

El control predictivo no se recomienda para plantas simples, ya que debido a su complejidad y capacidad de predicción, sería una pérdida de recursos implementar un controlador de este tipo para un sistema de comportamiento vastamente conocido. Su uso se recomienda en plantas altamente no lineales, y con tiempos de retraso muy grandes [17].

Matemáticamente el control MPC se basa en sistemas discretos o digitales definidas por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \tag{34}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\xi}_k \tag{35}$$

Como se aprecia, es una representación discreta en variables de estado donde los términos nuevos son las matrices \mathbf{w}_k que son las perturbaciones que se aplican al sistema, y $\boldsymbol{\xi}_k$ que representa el ruido contaminante para el procesamiento.

La característica de control predictivo puede apreciarse en el funcional digital que se optimiza en este control [17]:

$$J = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\|\mathbf{x}_{k+j}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_{k+j}\|_{\mathbf{R}}^2 \right) \tag{36}$$

III-E. Síntesis H_{∞}

La síntesis H_{∞} es de las más nuevas en el campo del control óptimo, siendo tema de análisis hasta nuestros días. En esta sección solamente se examinará brevemente su formulación matemática ya que un examen más minucioso excede el objetivo de este trabajo.

Se formula una representación en espacios de estado de un sistema dinámico:

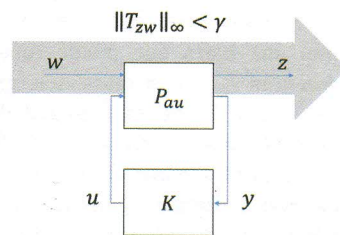


Figura 4. Esquema de bloques para el controlador H_{∞}

$$\begin{bmatrix} x' \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{37}$$

El problema general de optimización para el controlador H_{∞} consiste en encontrar una correspondencia entre w y z que estabilice internamente el sistema [18].

$$z = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}w \tag{38}$$

No obstante, no se ha encontrado una solución exacta. Más sencillo es encontrar el problema subóptimo de tal forma que [18]:

$$\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma \quad \gamma > 0 \tag{39}$$

IV. CASO DE ESTUDIO

IV-A. El péndulo invertido

Para el estudio de los diferentes controladores, se ha escogido una planta en común para su estudio. El péndulo invertido se visualizó como una opción idónea a causa de su alta no linealidad y su tendencia a la inestabilidad. Por este motivo, el estudio de controladores que trabajen con plantas problemáticas es preferible al estudio de plantas con características lineales, en las que los controladores más sencillos pueden cumplir su función con excelente rendimiento.

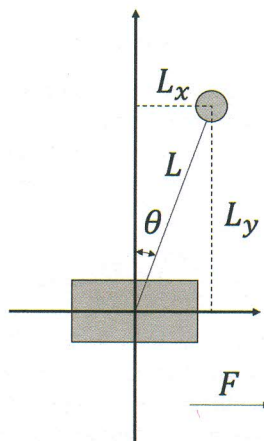


Figura 5. Diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido móvil. L es la longitud del péndulo, θ es el ángulo de desviación del péndulo respecto a la horizontal, F la fuerza externa aplicada al péndulo para su movimiento.

El péndulo invertido se puede definir como una masa m conectada mediante una barra que puede rotar respecto al eje vertical con longitud L , a una masa más grande M a la cual se aplica una fuerza F con la finalidad de cambiar el estado dinámico del sistema. Si no se ejerce fuerza alguna y el péndulo se deja libre a partir de un $\theta = 0$, lo natural es que el péndulo caiga a alguno de los dos lados ($\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = -\frac{\pi}{2}$). El objetivo del controlador es mover el móvil M de manera que se impida la caída del péndulo y se mantenga en una referencia deseada por el usuario. El caso más simple se da cuando $\theta = 0$, es decir cuando se busca que la posición angular del péndulo sea totalmente vertical.

IV-B. El poder de la mecánica lagrangiana

A continuación lo que se busca es definir el modelo dinámico del sistema usando un modelo físico que no se estudia comúnmente en la ingeniería electrónica, pero que el autor considera, debería hacerse para mejorar la capacidad de los ingenieros para modelar sistemas. El modelo viene dado por la mecánica lagrangiana.

En (2) se definió el Lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema. Se definirán los dos cuerpos M y m para el estudio. Primero se parte de la posición del sistema general, que se puede calcular con un simple enfoque geométrico. Así, las ecuaciones de posición vienen dadas por:

$$\begin{cases} r_x = x + L_x = x + L \sin \theta \\ r_y = L_y = L \cos \theta \end{cases} \quad (40)$$

Una vez definidos estos parámetros, es preciso encontrar la rapidez. Como es bien conocido, la rapidez no es más que la derivada de la posición respecto al tiempo. Después de realizar ciertos cálculos, la energía cinética del sistema viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \quad (41)$$

Mientras que la energía potencial, solamente depende de la posición r_y :

$$E_p = mgL \cos \theta \quad (42)$$

La obtención del lagrangiano es bien conocida. Anteriormente en (3) se definió implícitamente la ecuación de Euler-Lagrange para el caso conservativo. Para el caso no conservativo, en el que intervienen fuerzas externas, se considera una variación [19]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_q \quad (43)$$

La ecuación (43) se usa para incluir fuerzas externas al sistema que se desea estudiar. En esta ecuación q representa una coordenada generalizada, y τ_q representa las fuerzas no conservativas aplicadas en esta coordenada generalizada. Dado que en este sistema hay movimiento angular y movimiento en el eje x será necesario resolver un sistema de ecuaciones de Euler Lagrange [19]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \tau_x \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_\theta \quad (45)$$

En el caso de τ_x se considera solamente una entrada $u - \mu_1 \dot{x}$. u es la fuerza que se aplica en el sistema, mientras que $\mu_1 \dot{x}$ es la fuerza de fricción que depende de un coeficiente de rozamiento y la velocidad. En el caso de τ_θ se considera solamente un coeficiente de rozamiento $\mu_\theta \dot{\theta}$ en el eje que rota. Después de resolver los sistemas se tiene que:

$$(M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta}^2 \sin \theta + mL\ddot{\theta} \cos \theta = u - \mu_1 \dot{x} \quad (46)$$

$$mL^2\ddot{\theta} - mgL \sin \theta + mL \cos \theta \ddot{x} = -\mu_2 \dot{\theta} \quad (47)$$

Se puede apreciar claramente que es un sistema no lineal. Para linealizar el sistema, algo que se necesitará en las siguientes secciones, primero se busca un rango de linealidad. En este rango, el error entre las funciones debe ser razonable. Para el efecto, se analiza la gráfica de la función:

$$f(\theta) = \left| \frac{\sin \theta - \theta}{\sin \theta} \right| \quad (48)$$

Para asegurar el rango de linealidad, se considera el caso para el coseno, con la función:

$$g(\theta) = \left| \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta} \right| \quad (49)$$

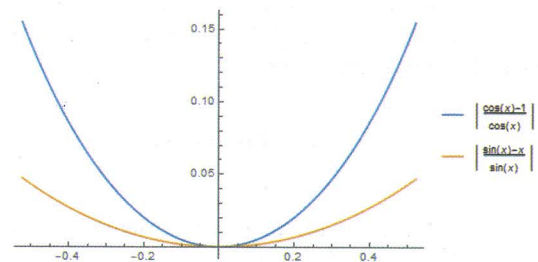


Figura 6. Gráficas de las funciones (48) y (49) entre $-\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6}$

Como se puede apreciar en la figura 6, se concluye que la función coseno es más crítica para la linealización. En este marco, se tiene que un rango razonable para confiar en la linealización viene dado entre $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ radianes, es decir con un rango de seguridad de unos 15 grados. Reemplazando $\theta = \frac{\pi}{12}$ en (49), se tiene un error porcentual de 3,53%.

Para la modelación completa, se tiene que trabajar con las ecuaciones (46) y (47). Se puede notar que los términos \ddot{x} y $\ddot{\theta}$ pueden conformar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para simplificar el análisis, se asumirá que no existe coeficiente de fricción lineal y angular ($\mu_1 = \mu_2 = 0$). Con esto se obtienen las expresiones para la aceleración lineal y angular:

$$\ddot{x} = \frac{2(m \sin(\theta)(L\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta)) + u)}{m(-\cos(2\theta)) + m + 2M} \quad (50)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\cos(\theta)(Lm\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + u) - g(m+M)\sin(\theta)}{Lm\cos^2(\theta) - L(m+M)} \quad (51)$$

Con las expresiones anteriores, se puede construir el modelo no lineal, que es construido en Simulink.

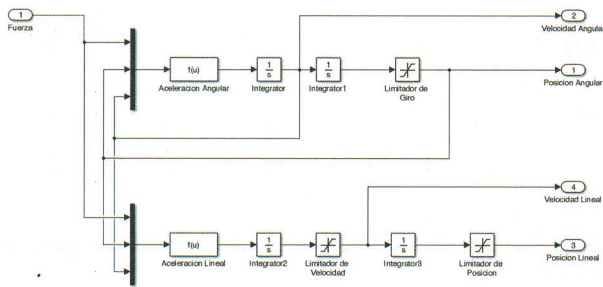


Figura 7. Diagrama de bloques del modelo no lineal construido en Simulink

Frente a una entrada nula, el péndulo no cae. No obstante esto no sucede, ya que existen perturbaciones que siempre están presentes en el ambiente. Como se aprecia en la figura 7 se ha precisado usar saturadores para limitar los ángulos de giro (totalmente caído a la izquierda y a la derecha), las velocidades (se asume que los motores proveerán una velocidad máxima de 5 metros por segundo en ambos sentidos), y las posiciones (un metro a ambos lados desde el centro).

Cuadro I
PARÁMETROS DE SIMULACIÓN PARA EL PÉNDULO INVERTIDO

Parámetro	Valor	Unidad
Masa del móvil (M)	0,5	kilogramos
Masa del péndulo (m)	0,05	kilogramos
Gravedad (g)	9,81	metros/segundo al cuadrado
Longitud del péndulo (L)	0,3	metros

Para la simulación inicial se ha aplicado una entrada de ruido blanco que simula las perturbaciones ambientales del sistema. Como se aprecia, la mínima perturbación hace que el péndulo pierda su equilibrio, y tienda a caer, como se aprecia en la figura 8.

IV-C. Comparación de controladores

En esta sección se procederá a controlar el péndulo invertido. Se ha procedido a realizar las simulaciones con un modelo linealizado en variables de estado. Los modelos han sido implementados en simulink, y para la evaluación del rendimiento se ha omitido la presencia de perturbaciones. Lo que se ha hecho es una prueba en la que el péndulo debe alcanzar una referencia de 3 metros, sin cambiar el ángulo de inclinación, y se evalúa el comportamiento de posición, posición angular y acción de control en el sistema. Además, se ha omitido el análisis con ruido añadido, lo que hubiera añadido cierta dificultad a los controladores. Se omitirá el controlador H_{∞} .

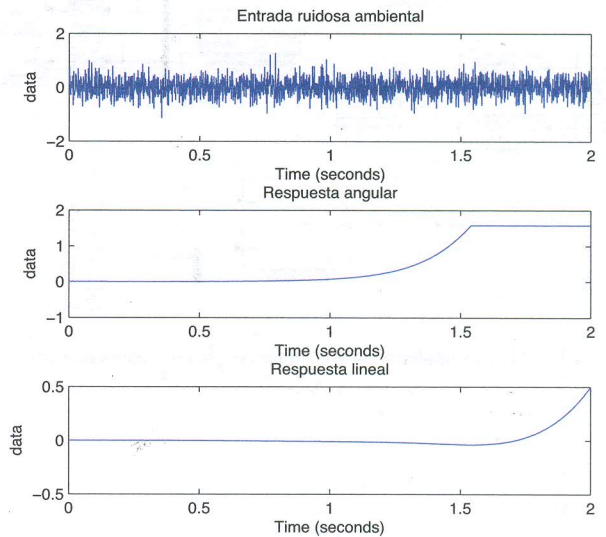


Figura 8. Respuesta del péndulo invertido no lineal frente a una entrada aleatoria de ruido blanco.

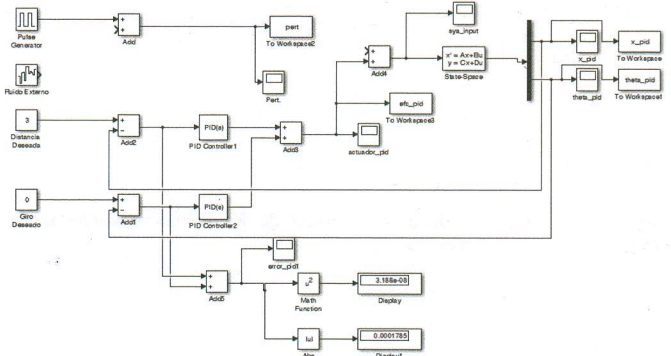


Figura 9. Modelo implementado en simulink para el controlador PID.

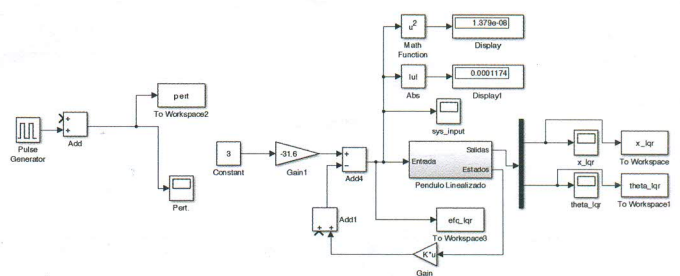


Figura 10. Modelo implementado en simulink para el controlador LQR con precompensador.

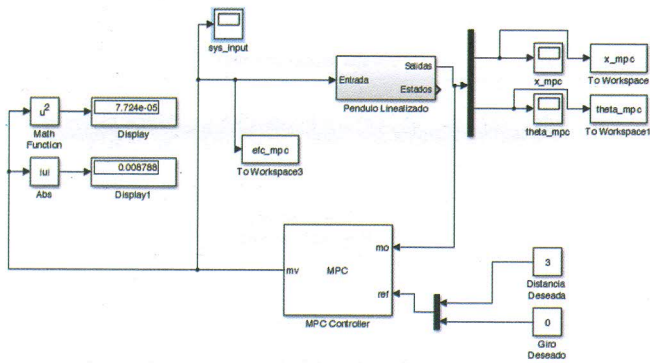


Figura 11. Modelo implementado en simulink para el controlador MPC.

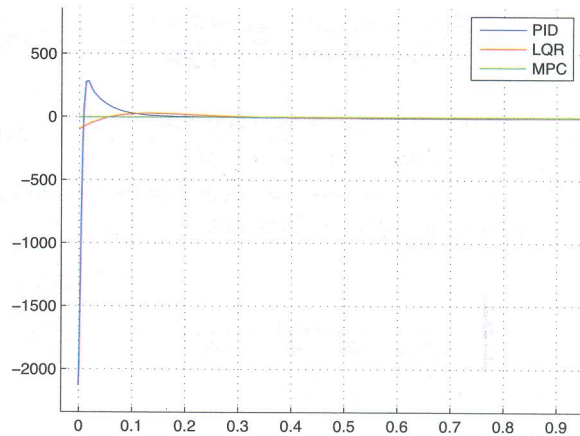


Figura 14. Acción de control frente a los diferentes controladores implementados en simulación.

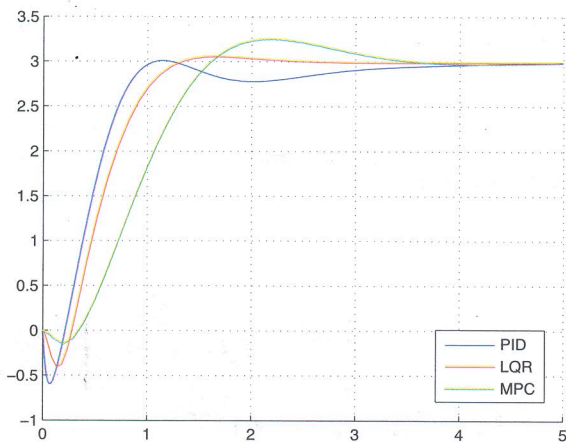


Figura 12. Respuesta de posición lineal de los diferentes controladores implementados en simulación.

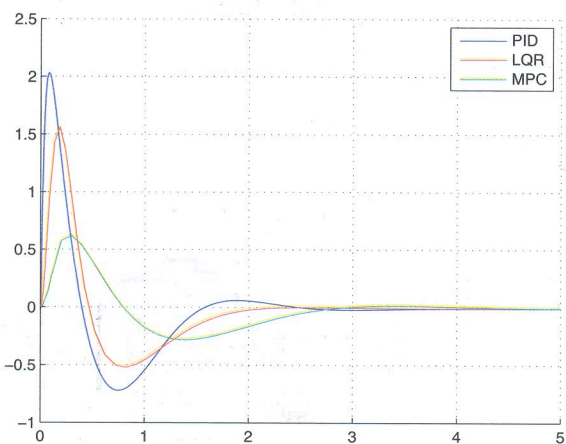


Figura 13. Respuesta de posición angular de los diferentes controladores implementados en simulación.

V. DISCUSIÓN

La estabilización del péndulo en sentido traslacional como rotacional toma alrededor de 4 segundos. No obstante pueden establecerse otras conclusiones interesantes:

Cuadro II
RENDIMIENTO DE LOS DIFERENTES CONTROLADORES.

Controlador	$ \Delta x _{\text{máx}}$	$ \Delta \theta _{\text{máx}}$	EFC Máximo (Val. Abs)
PID	8,3 %	2 rad	2000
LQR	3,3 %	1,55 rad	32
MPC	8,3 %	0,6 rad	6,9

De acuerdo a los resultados presentados, es interesante visualizar de que aunque el controlador PID clásico provee un aparente excelente rendimiento, esto lo consigue con detrimento de cuidar el EFC (Elemento Final de Control), con acciones tan agresivas como se puede apreciar en la figura 14.

Mientras tanto, los controladores LQR y MPC tienen un rendimiento similar, podría decirse inclusive inferior que el PID, pero tienen una ventaja, y es que sus respuestas angular y del elemento final de control son adecuadas y tolerables. Es muy conocido que es muy deseable tener estrategias de control que no sean agresivas con los elementos finales de control ya que acortan su vida útil y los hacen sensibles a daños por el uso y el abuso.

Respecto a la respuesta angular, es pertinente establecer la superioridad del controlador MPC sobre el PID e incluso sobre el LQR. Anteriormente se mencionó que el controlador pierde su sentido cuando tiene ángulos mayores a $\frac{\pi}{12}$ radianes. El controlador que mejor cumple los criterios de posición, posición angular y acción de control es el MPC, sin duda.

Respecto al MPC, su fortaleza de predicción está dada gracias a que su acción sobre las variables manipuladas es a tiempo discreto. En los parámetros, se escogió un tiempo de muestreo de 10 milisegundos, motivo por el cual parece una acción de control continua.

Los resultados de la aplicación de la teoría del control óptimo son bastante satisfactorios. Desde un inicio, se empleó en aplicaciones cinemáticas, de armamento e inclusive, en la teoría económica, se está haciendo énfasis en los criterios de optimización para llegar a resultados que busquen el balance entre desempeño y costos adyacentes, como el caso de la manufactura, combustibles, e inclusive cómo un país debe gastar sus recursos financieros. [1].

Una de las aplicaciones exitosas del control óptimo ha sido en la seguridad. Se han desarrollado diferentes algoritmos en lazo abierto y en lazo cerrado para la intercepción de misiles. [20] Actualmente la tecnología ofensiva y defensiva están tan desarrolladas, que en el objetivo de evadir los sistemas antimisiles hay países como Estados Unidos, China, Rusia que están en desarrollo de misiles hipersónicos capaces de llegar a velocidades tan altas como Mach 7, que serían imposibles de destruir por cualquier potencia armamentística [21].

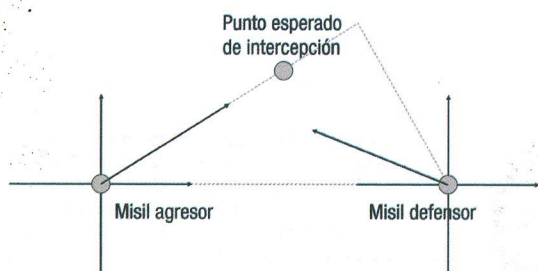


Figura 15. Problema del misil: El control óptimo ha sido muy útil en problemas críticos como en la intercepción de misiles supersónicos.

No solamente existen aplicaciones a nivel de armamento, económico y computacional. Recientemente se ha abierto la puerta a investigaciones de control óptimo orientadas a modelos biológicos. Existen trabajos para controlar la respuesta inmunitaria frente a infecciones, para fungicidas, investigaciones para oncología, modelos epidémicos, tratamiento del virus de inmunodeficiencia adquirida [22], [23]. Resultados optimistas se han conseguido después de aplicar estos métodos.

En los últimos años, en general se generaliza el concepto de derivada en muchas formas, las últimas herramientas que se han ido desarrollando son análisis matemáticos que no usan el concepto de derivada. Si se inventan nuevos conceptos, se desarrollan cálculos, herramientas de aproximación, algoritmos numéricos que puedan trabajar con los conceptos más abstractos.

Si se extiende la noción de derivada, se deben buscar nuevos métodos numéricos. Es tanto teórico como aplicado. Se trabajan en aproximaciones, métodos y surgen preguntas respecto a la competitividad de estos métodos.

Otro camino que tiene futuro es el tema de los fenómenos no locales (extensión de derivada), muchas veces se asume que algo que es un fenómeno que ocurre en un dominio, que puede ser un territorio como a una pieza de una maquinaria, pero los fenómenos de Calor, de electromagnetismo, son fenómenos locales. Es decir se asume que no altera el sistema. pero hay infinidad de fenómenos no locales: un ejemplo es una epidemia

que era un fenómeno local, pero ahora es un fenómeno que se traslada a un fenómeno no local. Las matemáticas son muy locales, ya hay teoría, y hay fenómenos no locales, y modelos no locales. Esto ha sido desarrollado en la última década, y se espera que una mejor comprensión de estos fenómenos produzca controladores aún más robustos que puedan utilizarse en la teoría de control.

VI. CONCLUSIONES

Se implementó un modelo lineal de un péndulo invertido en variables de estado, a partir del cual se evaluaron los rendimientos de diferentes controladores. Para el efecto, se usó un controlador clásico (PID) y dos controladores óptimos (LQR y MPC).

Los controladores óptimos se basan en la formulación de funciones de costo, cuyos parámetros definirán la aplicación o no de ciertas restricciones que harán que un esfuerzo de control sea mayor o menor de acuerdo a los requerimientos del usuario. A diferencia del control clásico que no considera generalmente estos problemas, y se enfoca más en cumplir parámetros transitorios o de tiempo estable a como de lugar, en vez de cumplirlos de forma inteligente.

Si bien el control clásico es el más aceptado por su facilidad de implementación, hay procesos en los cuales el control óptimo o el control moderno proveen nuevas e interesantes perspectivas de desarrollo, especialmente en procesos inherentemente problemáticos como procesos naturalmente inestables y con altos tiempos de retardo, o con perturbaciones que no pueden filtrarse. En este trabajo se ha analizado un proceso inestable.

Para una adecuada implementación de los controladores óptimos, a diferencia del PID, se requiere el conocimiento y la generación de un modelo en variables de estado del sistema. Esta forma de trabajar tiene como ventaja que los controladores óptimos pueden trabajar con sistemas de múltiples entradas-múltiples salidas (MIMO) a diferencia de los controladores clásicos como el PID, el cual solamente trabaja con funciones de una entrada-una salida (SISO), con sus beneficios y perjuicios, los cuales, sin embargo, salvan la inversión de realizar múltiples controladores.

Una desventaja de los controladores óptimos, en el uso de modelos en espacios de estado, es que para el diseño de controladores, idealmente se requieren todos los estados. Por ejemplo, si se desea controlar el péndulo invertido estudiado, se requiere medir la posición, la velocidad, la posición angular y la velocidad angular. Muchas veces esto no es posible, por lo que se hace obligado el uso de modelos que empleen estimadores de estado, los cuales son modelos matemáticos, que intentan describir de forma aproximada el mundo físico. Modelos con estimadores de estado no han sido considerados en este estudio.

Entre el LQR y el MPC existen diferencias importantes: el LQR realiza una optimización en un horizonte de tiempo fijo y finito. El MPC, en cambio realiza una optimización en un horizonte de tiempo infinito, a causa de la continua

actualización de los valores, realizando una optimización no común en lazo cerrado.

Hay que establecer una salvedad: y es que los controles aquí probados, se han aplicado para una planta linealizada, sin retardos teóricos pero altamente inestable. No obstante, no se puede extrapolar los resultados indiscriminadamente. De hecho, los controladores óptimos usualmente requieren mejor potencia computacional, por la complejidad de su implementación, y se recomienda el uso de los controladores clásicos a menos que se tengan casos problemáticos.

AGRADECIMIENTOS

El Sr. Ananganó desea agradecer a todos quienes conforman el Centro de Modelización Matemática en Áreas Clave para el Desarrollo (MODEMAT), especialmente al Dr. Pedro Merino Rosero, por la oportunidad de trabajar con esta organización y generar este artículo. También agradece al Ing. Oscar Gonzales por la valiosa asistencia y respaldo en el transcurso de la concepción del presente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] E. Stein, "Milestones of direct variational calculus and its analysis from the 17th century until today and beyond—mathematics meets mechanics—with restriction to linear elasticity," *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, vol. 19, no. 1, pp. 7–91, 2017.
- [2] V. Blasjo, *Transcendental Curves in the Leibnizian Calculus*. Academic Press, 2017.
- [3] E. W. Weisstein, "Brachistochrone problem," *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*, 2014. [Online]. Available: <http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>
- [4] —, "Euler-lagrange differential equation," *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.
- [5] H. Goldstein and J. Ferrer, *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.
- [6] H. Kielhöfer, "The euler-lagrange equation," in *Calculus of Variations*. Springer, Jan. 2018.
- [7] Teoría moderna. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Zaragoza. [Online]. Available: http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/teoria_moderna_de_control.htm
- [8] Control clásico. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Zaragoza. [Online]. Available: http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/control_clasico.htm
- [9] F. Monroy-Pérez, "El principio del máximo de la teoría de control óptimo: una perspectiva histórica," *Morfismos*, vol. 19, no. 2, pp. 1–60, 2015.
- [10] H. P. Geering, "Optimal control with engineering applications," *Berlin Heidelberg*, 2007.
- [11] T. Holzhüter, "Optimal regulator for the inverted pendulum via euler-lagrange backward integration," *Automatica*, vol. 40, no. 9, pp. 1613–1620, 2004.
- [12] O. Boubaker, "The inverted pendulum: history and survey of open and current problems in control theory and robotics," *The Inverted Pendulum in Control Theory and Robotics: From Theory to New Innovations*, vol. 111, p. 1, 2017.
- [13] A. E. Bryson, *Applied optimal control: optimization, estimation and control*. Routledge, 2018.
- [14] J. C. De los Reyes, *Numerical Optimization Methods*. Springer, Jan. 2015.
- [15] R. Murray, "Lqr control," *Control and Dynamical Systems*, 2006.
- [16] C. A. Á. Ramos and F. A. S. Cárdenas, "Diseño de controladores basados en técnicas de control óptimo lqr+ y h2 para un prototipo del péndulo invertido sobre ruedas," *Revista Politécnica*, vol. 8, no. 15, pp. 45–51, 2015.
- [17] S. J. Qin and T. A. Badgwell, "A survey of industrial model predictive control technology," *Control engineering practice*, vol. 11, no. 7, pp. 733–764, 2003.
- [18] D. Sánchez de la Lllana, "Diseño de controladores h-infinito para el control de plantas mal condicionadas en presencia de perturbaciones—design of h-infinity controllers for ill-conditioned plants in presence of disturbances," 2015.
- [19] I. Kapanisakis and F. Catarinacci, "Swinging up control of an inverted pendulum," *Aalborg University- Student Report (Master Thesis)*, 2016.
- [20] N. F. Palumbo, R. A. Blauwkamp, and J. M. Lloyd, "Modern homing missile guidance theory and techniques," *Johns Hopkins APL technical digest*, vol. 29, no. 1, pp. 42–59, 2010.
- [21] C. J. Doolan, "Hypersonic missile performance and sensitivity analysis," *Journal of spacecraft and rockets*, vol. 44, no. 1, pp. 81–87, 2007.
- [22] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal control applied to biological models*. Crc Press, 2007.
- [23] J. Karrakchou, M. Rachik, and S. Gourari, "Optimal control and infectiology: application to an hiv/aids model," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 177, no. 2, pp. 807–818, 2006.



Georginio Ananganó Alvarado Nació el 19 de agosto de 1994 en Quito, Ecuador. Cursó estudios secundarios becados en la Unidad Educativa Experimental "Lev Vygotsky". Durante esta etapa fue portaestandarte institucional, presidente del Consejo Estudiantil, y participó en el foro ROTARACT en favor de los desposeídos. Actualmente, superando una turbulenta etapa, es estudiante de la carrera de Ingeniería Electrónica y Control, en la Escuela Politécnica Nacional. Sus intereses son la Teoría de control, conversores estáticos, control de energía. No

siente mucha afinidad por la Robótica. (georginio.ananganano@epn.edu.ec)



Óscar Gonzales Zurita Nació en la ciudad de Quito, se graduó como Ingeniero en Electrónica y Control en la Escuela Politécnica Nacional. Finalizó sus estudios de Maestría en Automatización y Control Electrónico Industrial en la EPN. Ha trabajado como Auxiliar de Laboratorio en el Laboratorio de Energías Alternativas y Eficiencia Energética y como Ayudante de Laboratorio de Automatización Industrial de Procesos Mecánicos en Ingeniería Mecánica de la EPN, y actualmente como Profesor Ocasional 2 en el Departamento de Automatización y Control Industrial (DACI) en la misma institución de educación superior. Sus áreas de interés son la automatización industrial, electrónica de potencia y sistemas de control avanzado. (oscar.gonzales@epn.edu.ec)