



# ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL



**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**MODELADO Y PROGRAMACIÓN DE UN SOFTWARE  
DIDÁCTICO PARA LA DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y  
DEFORMACIONES BAJO CARGAS AXIALES UTILIZANDO  
APP DESIGNER DE MATLAB**

**“MODELADO Y PROGRAMACIÓN DE UN SOFTWARE DIDÁCTICO  
PARA LA DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES  
BAJO CARGAS AXIALES EN PROBLEMAS DE CASOS  
ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS UTILIZANDO APP DESIGNER DE  
MATLAB”**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO  
MECÁNICO**

**ERNESTO ROGELIO BRACERO ANDRANGO**

**ernesto.bracero@epn.edu.ec**

**DIRECTOR: “M.Sc. LUIS RICARDO SOTO AYMAR”**


**“ricardo.soto@epn.edu.ec”**

**Quito, febrero-2023**

## CERTIFICACIONES


Yo, ERNESTO ROGELIO BRACERO ANDRANGO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.



**ERNESTO ROGELIO BRACERO ANDRANGO**

Como director del trabajo de titulación “Modelado Y Programación De Un Software Didáctico Para La Determinación De Esfuerzos Y Deformaciones Bajo Cargas Axiales Utilizando App Designer De Matlab”, desarrollado por Ernesto Rogelio Bracero Andrango, estudiante de la carrera de Ingeniería Mecánica, habiendo supervisado la realización de este trabajo y realizado las correcciones correspondientes, doy por aprobada la redacción final del documento escrito para que prosiga con los trámites correspondientes.



**M.Sc. LUIS RICARDO SOTO AYMAR**

**DIRECTOR DE PROYECTO**

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.



ERNESTO ROGELIO BRACERO ANDRANGO



M.Sc. LUIS RICARDO SOTO AYMAR

DIRECTOR DE PROYECTO

## DEDICATORIA

Dedico con todo mi corazón el presente trabajo de titulación a mi madre y abuelita, ya que han sido mi pilar y su confianza me ha permitido lograr mis metas, por enseñarme a no darme por vencido ante situaciones complicadas, por su bendición que día a día me protege y me lleva por el camino correcto. Les doy las gracias mami y abuelita.

A mis hermanas y sobrinos quienes me han acompañado, servido de guía y motivación durante toda mi vida.

Ernesto Rogelio Bracero Andrango

## **AGRADECIMIENTO**

Agradecer a la virgen María, por siempre estar presente en mi corazón en los momentos que sentía miedo y nunca dejar de proteger a mi familia.

Agradecer a mi madre Emma Andrango, por siempre llevarme de la mano desde pequeño y nunca soltarme, por dar su vida como madre y padre para verme triunfar. A mi abuelita, quien ha sido mi segunda madre y ha luchado a diario por verme feliz. A mi hermana Liseth, por ser quien ha guiado mi camino en la juventud y siempre darme su cariño. A mi hermana Evelyn, por la paciencia entregada durante cada etapa de mi vida y siempre recibirme con alegría. A mi hermana Samantha, por demostrarme que siempre se puede perdonar a tus seres queridos. A todas les agradezco por su cariño.

A todos mis sobrinos, quienes han servido de motivación para triunfar y siempre darme su cariño, a pesar de ser molesto con ellos.

A Mishell, quien desde que conocí ha cambiado mi vida, soporto todas mis locuras y me ha vuelto mejor persona, por convertirse en una parte esencial en mi vida y enseñarme lo que significa el verdadero amor de pareja.

A Pedro Gavilanes, por ser un gran compañero y amigo desde que nos conocimos, y por todo su empeño para culminar este proyecto.

# INDICE DE CONTENIDOS

CERTIFICACIONES .....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA .....	II
DEDICATORIA .....	III
AGRADECIMIENTO .....	IV
INDICE DE CONTENIDOS.....	V
INDICE DE FIGURAS.....	VII
RESUMEN.....	IX
ABSTRACT .....	X
1. DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO.....	1
1.1 Objetivo general .....	1
1.2 Objetivos específicos .....	1
1.3 Alcance .....	1
1.4 Marco teórico .....	2
1.4.1 Conceptos de estática.....	2
1.4.2 Concepto de cuerpo rígido.....	3
1.4.3 Concepto de fuerza.....	3
1.4.3.1 Fuerzas externas.....	3
1.4.2.1 Fuerzas internas.....	3
1.4.3 Equilibrio y reacciones .....	4
1.4.3.1 Primera ley de Newton .....	4
1.5 Concepto de elasticidad.....	5
1.6 Ley de Hooke y deformación unitaria.....	7
1.7 Esfuerzo bajo cargas axiales .....	7
1.8 Deformación bajo cargas axiales .....	8
1.9 Caso de ejercicio bajo carga axial.....	8
1.9.1 Estáticamente determinados.....	8
1.9.2 Estáticamente indeterminados.....	8
1.9.3 Problemas con gradientes de temperatura .....	8
2. METODOLOGÍA.....	10
2.1 Casos indeterminados lineales.....	10
2.1.1 Serie .....	10

2.1.2	Paralelo.....	13
2.2	Casos indeterminados rotatorio.....	16
2.2.1	Modelo rotatorio Indeterminado caso 1 y 3.....	16
2.2.2	Modelo indeterminado rotatorio caso 2.....	19
2.2.3	Modelo indeterminado rotatorio caso 4.....	23
2.2.4	Modelo indeterminado rotatorio caso 5.....	27
2.3	Interfaz gráfica con App Designer .....	30
2.3.1	Ventana de presentación y selección de caso.....	30
2.3.2	Ventana de parametrización caso lineal. ....	31
2.3.2.1	Ventana de diagrama de cuerpo libre caso lineal.....	32
2.3.2.2	Ventana de resultados caso lineal.....	33
2.3.3	Ventana de parametrización caso rotatorio. ....	36
2.3.3.1	Ventana de resultados caso rotatorio.....	37
3.	RESULTADOS .....	39
3.1	Resultados caso indeterminado lineal en serie .....	39
3.2	Resultados caso indeterminado lineal en paralelo .....	40
3.3	Resultados caso indeterminado rotatorio problema 1 y 3.....	42
3.4	Resultados caso indeterminado rotatorio problema 2. ....	44
3.5	Resultados caso indeterminado rotatorio problema 4. ....	46
3.6	Resultados caso indeterminado rotatorio problema 5. ....	47
3.7	Resultados de la encuesta. ....	49
3.7.1	Datos demográficos.....	49
3.7.2	Primer cuestionario.....	49
3.7.3	Segundo Cuestionario .....	55
4.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	62
4.1	Conclusiones.....	62
4.2	Recomendaciones.....	63
	BIBLIOGRAFÍA.....	63

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Fuerzas exteriores y apoyos.....	3
Figura 1.2 Fuerzas interiores.....	4
Figura 1.3 Primera ley de Newton.....	4
Figura 1.4 Tercera ley de Newton.....	5
Figura 1.5 Equilibrio de momentos.....	5
Figura 1.6 Relación fuerza vs deformación en una barra.....	6
Figura 1.7 Relación fuerza vs deformación en una barra.....	6
Figura 1.8 Fuerza aplicada sobre un área en una barra.....	7
Figura 2.1 Modelo indeterminado en serie.....	11
Figura 2.2 DCL modelo indeterminado en serie.....	11
Figura 2.3 Modelo indeterminado en paralelo.....	13
Figura 2.4 DCL Modelo indeterminado en paralelo.....	14
Figura 2.5 Modelo rotatorio 1.....	16
Figura 2.6 DCL Modelo rotatorio 1 A: Cuerpo rígido, B: Elemento 1, C: Elemento 2.....	17
Figura 2.7 DCL Modelo rotatorio 1 deformaciones.....	18
Figura 2.8 Modelo indeterminado caso 2.....	20
Figura 2.9 Modelo determinado rotatorio A: Cuerpo rígido, B: Elemento 1,2 y 3.....	21
Figura 2.10 Relación de las deformaciones generadas A) Totales, B) Relación.....	22
Figura 2.11 Modelo indeterminado rotatorio 4.....	24
Figura 2.12 DCL Modelo indeterminado rotatorio problema 4 A) Cuerpo rígido; B: Elemento 1; C: Elemento 2.....	25
Figura 2.13 Relación de deformación caso 4.....	25
Figura 2.14 Modelo indeterminado rotatorio 5.....	27
Figura 2.15 DCL Modelo indeterminado rotatorio problema 5 A) Cuerpo rígido; B) Elemento 1; C) Elemento 2.....	28
Figura 2.16 Relación de deformación caso 5.....	29
Figura 2.17 Ventana de presentación y selección de casos.....	31
Figura 2.18 Ventana de parametrización del caso lineal.....	32
Figura 2.19 Diagrama de cuerpo libre del caso lineal.....	33
Figura 2.20 Ventana de resultados del caso lineal.....	34
Figura 2.21 Resultado de carga axial para cada miembro del sistema.....	34
Figura 2.22 Resultado de carga axial para cada miembro del sistema.....	35



Figura 2.23 Resultado de esfuerzo axial para cada miembro del sistema.....	35
Figura 2.24 Ventana de parametrización del caso rotatorio.....	36
Figura 2.25 Resultados del problema 1 del caso rotatorio.....	37
Figura 2.26 Grafica de las deformaciones del problema 1 del caso rotatorio. ....	38
Figura 3.1 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.27 del libro. ....	39
Figura 3.2 Resultados ejercicio 5.27.....	40
Figura 3.3 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.28 del libro. ....	41
Figura 3.4 Resultados ejercicio 5.28.....	42
Figura 3.5 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.65 del libro. ....	43
Figura 3.6 Resultados ejercicio 5.65.....	44
Figura 3.7 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.39 del libro. ....	44
Figura 3.8 Resultados ejercicio 5.39.....	45
Figura 3.9 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.38 del libro. ....	46
Figura 3.10 Resultados ejercicio 5.39.....	47
Figura 3.11 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.42 del libro. ....	47
Figura 3.12 Resultados ejercicio 5.39.....	49
Figura 3.13 Pregunta 1 – Instalación. ....	50
Figura 3.13 Pregunta 2 – Interfaz. ....	51
Figura 3.14 Pregunta 3 – Resultados. ....	52
Figura 3.15 Pregunta 4 – Conocimiento. ....	53
Figura 3.16 Nube de palabras de los comentarios ....	54
Figura 3.17 Pregunta 1 – Manejo Software. ....	56
Figura 3.18 Pregunta 2 – Interfaz-2. ....	57
Figura 3.19 Pregunta 3 – Manejo-2. ....	58
Figura 3.20 Pregunta 4 – Resultados-2. ....	59
Figura 3.21 Pregunta 5 – Expectativas.....	60
Figura 3.22 Pregunta 6 – Importancia.....	61
Figura 3.23 Pregunta 7 – Interés. ....	62

## RESUMEN

En el presente trabajo de integración se plantea el objetivo de programar una aplicación pedagógica para el cálculo de esfuerzos y deformación de elementos sometidos a cargas axiales en problemas estáticamente indeterminados, enfocada a estudiantes de ingeniería mecánica, civil, entre otros. Se muestra el planteamiento realizado paso a paso para elaborar las ecuaciones necesarias para la resolución de ejercicios teóricos, obtenidos de varias fuentes bibliográficas. Las ecuaciones, necesariamente son simplificadas en lo posible con la finalidad de optimizar el código de programación. El código de programación es elaborado en App designer de Matlab, donde se generó una interfaz para que el usuario pueda ingresar y variar parámetros en el que se obtuvo diferentes resultados para un mismo tipo de problema. Estos resultados son validados mediante ejercicios típicos de varios autores que muestran la solución, al ingresar ecuaciones simplificadas se evita la lentitud en el programa. Finalmente se realizaron pruebas con estudiantes de mecánica de materiales de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Escuela Politécnica Nacional, en las que se realizó una encuesta con preguntas en las que se verifican varios criterios pedagógicos, siendo favorables y permitió validar los objetivos del proyecto, además de evaluar el interés de los usuarios en crear nuevas aplicaciones con una finalidad pedagógica.

**Palabras clave:** pedagógico, aplicación, carga axial, estáticamente indeterminado, programación, didáctico.

## ABSTRACT

In the present integration work, the objective of programming a pedagogical application for the calculation of stresses and deformation of elements subjected to axial loads in statically indeterminate problems is proposed, focused on students of mechanical and civil engineering, among others. The approach carried out step by step to elaborate the necessary equations for the resolution of theoretical exercises, obtained from various bibliographic sources, is shown. The equations are necessarily simplified as much as possible in order to optimize the programming code. The programming code is elaborated in Matlab's App designer, where an interface was generated so that the user can enter and vary parameters in which different results were obtained for the same type of problem. These results are validated through typical exercises by various authors that show the solution, by entering simplified equations slowness in the program is avoided. Finally, tests were carried out with students of materials mechanics from the Faculty of Mechanical Engineering of the National Polytechnic School, in which a survey was carried out with questions in which various pedagogical criteria were verified, being favorable and allowing to validate the objectives of the project, in addition to evaluating the interest of users in creating new applications with a pedagogical purpose.

**Key words:** pedagogical, application, axial load, , programming, didactic.

# **1. DESCRIPCIÓN DEL COMPONENTE DESARROLLADO**

En la componente se realiza la modelación y programación de un software con finalidad didáctica que permita obtener esfuerzos y deformaciones bajo condiciones de carga axial en sistemas indeterminados.

Para la modelación se considera ejercicios típicos que comprenden los modelos matemáticos del caso de estudio, que son obtenidos de forma manual, basados en conceptos teóricos de la mecánica de materiales.

Finalmente, se crea un software que resuelve los modelos matemáticos a través de una programación en Apps designer de Matlab, en el que se varían las condiciones del modelo matemático y se obtiene diferentes resultados de manera didáctica y pedagógica.

## **1.1 Objetivo general**

Modelar y programar un software didáctico para la determinación de esfuerzos y deformaciones bajo cargas axiales en sistemas indeterminados utilizando App Designer de Matlab.

## **1.2 Objetivos específicos**

1. Recopilar información sobre elementos sometidos bajo cargas axiales en casos indeterminados y guías para el desarrollo de aplicaciones en Matlab a través de una revisión bibliográfica.
2. Modelar el comportamiento e interfaz gráfica que tendrá el software con la finalidad de dirigir el avance de la componente.
3. Desarrollar una aplicación con un código de programación que cumpla con las expectativas pedagógicas y resultados teóricos.
4. Realizar pruebas de funcionamiento de la aplicación y el código de programación.

## **1.3 Alcance**

El presente trabajo tiene un propósito teórico-experimental, experimental ya que permitirá a estudiantes y docentes realizar cálculos de esfuerzos y deformaciones de manera didáctica, el software poseerá problemas modelo en el que el usuario podrá modificar parámetros que caracterizaran el modelo, dentro del estudio se obtendrá una recopilación de información de aplicativos semejantes, buscando mejorar las características del software diseñado y finalmente en el ámbito teórico la aplicación utilizará los conceptos y métodos de la mecánica para realizar los cálculos de cargas, esfuerzos y deformaciones.

La recopilación bibliográfica permitirá desarrollar los conceptos de mecánica de materiales que sean necesarios para modelar las ecuaciones numéricas para la resolución de problemas de deformación bajo carga axial.

Se determinará el tipo de interfaz adecuado para evitar posibles confusiones durante las pruebas de validación, enfocándose en el ordenamiento de cuadros de texto de ingreso y salida de datos, botones interactivos que permitan manejar ventanas y obtener los resultados, finalmente las gráficas que mostrarán la configuración de los casos de estudio.

En la programación se utilizarán códigos en base a los recursos de App Designer de Matlab, se tomará en cuenta la optimización de recursos para evitar lentitud en el programa, para esto se simplificará al máximo el tipo de ecuaciones de programación y la cantidad de elementos mostrados en pantalla.

La validación de resultados se realizará de dos maneras, por comparación de resultados realizados de manera manual y por encuestas que serán realizadas a estudiantes de mecánica de materiales, los cuales evaluarán las respuestas para problemas de deformación bajo carga axial de estudio, las retroalimentaciones que sean obtenidas serán ingresadas al código de programación para la versión final.

Durante las pruebas de interfaz se realizará la evaluación con preguntas tipo encuesta a los estudiantes, los mismos que podrán generar sugerencias finales, mismas que serán tomadas en cuenta para la versión final del software didáctico, previo a la presentación final del trabajo de integración curricular presente.

## **1.4 Marco teórico**

Para el desarrollo del presente trabajo es necesario conocer dos conceptos fundamentales en mecánica de materiales, la estática que permite desarrollar métodos para definir el comportamiento de las fuerzas en cada elemento de una estructura, y finalmente la mecánica de materiales que es la encargada de establecer valores que determinen el comportamiento de un elemento (Beltrán Reyna, 2015).

### **1.4.1 Conceptos de estática**

Como parte de la mecánica de materiales se encuentra la estática que se encarga del estudio de cuerpos en reposo, bajo ciertas consideraciones entre las que se encuentran, la teoría del cuerpo rígido, ecuaciones de equilibrio y los parámetros por fenómenos externos, como fuerzas o temperatura (Hibbeler, 2010).

## 1.4.2 Concepto de cuerpo rígido

En la naturaleza todo cuerpo sólido se deforma bajo la acción de cargas, es decir no son completamente nulas y no existe un cuerpo totalmente rígido, sin embargo, estas deformaciones son despreciables y no afectan el equilibrio del sistema, el estudio de estas deformaciones es necesaria cuando se aplican conceptos de teoría de fallas (Hibbeler, 2010).

## 1.4.3 Concepto de fuerza

El comportamiento de un cuerpo depende de las fuerzas, ya que, en función de estas, el cuerpo permanecerá en movimiento o reposo, por ello, es necesario reconocer el tipo de fuerzas que se pueden definir en un sistema.

### 1.4.3.1 Fuerzas externas

Corresponde a las fuerzas aplicadas sobre un sistema podrán ser de volumen o de superficie. Las fuerzas de volumen corresponden a los pesos generados por la gravedad, atracción magnética por electromagnetismo y dilatación térmica por la temperatura. Por último las fuerzas de superficie corresponde a la acción de otros cuerpos fuera del sistema y las reacciones que permiten el equilibrio. Las reacciones son generadas en puntos en el que sistema se encuentra con apoyos, cuya finalidad es evitar el movimiento del sistema como se muestra en la figura.

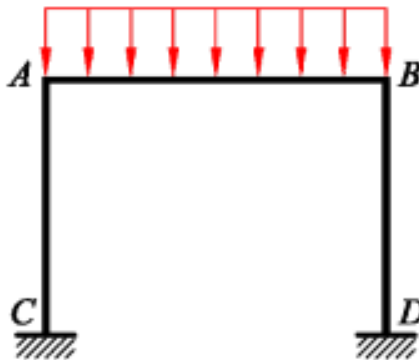


Figura 1.1. Fuerzas exteriores y apoyos (Oller & Nallim, 2020).

### 1.4.2.1 Fuerzas internas

Las fuerzas externas generan fuerzas interiores, las cuales por las acciones y reacciones transmiten una parte de estas fuerzas a los elementos para lograr mantener un sistema en equilibrio como se muestra en la figura (Hibbeler, 2010).

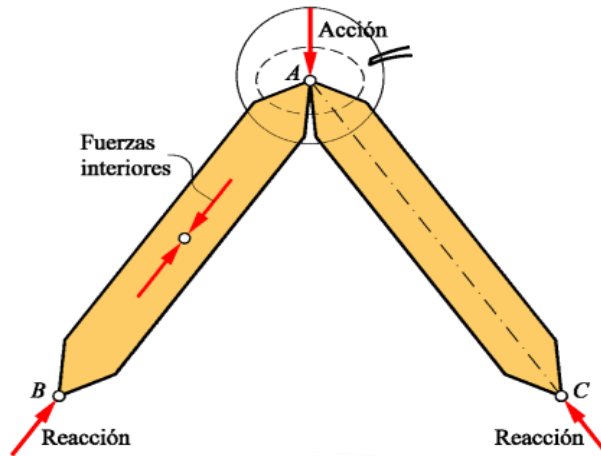


Figura 2.2. Fuerzas interiores (Oller & Nallim, 2020).

### 1.4.3 Equilibrio y reacciones

El concepto básico por la que parte la estática es el análisis de partículas para finalmente agruparlo en varias partículas que conforman un cuerpo o sistema, de esta manera se puede relacionar las ecuaciones de equilibrio a un sistema.

#### 1.4.3.1 Primera ley de Newton

En una partícula se mantendrá su reposo si las fuerzas resultantes son cero o en el caso que la partícula estaba en movimiento se mantendrá una velocidad constante, se muestra la figura 1.3 y la ecuación 1.1.

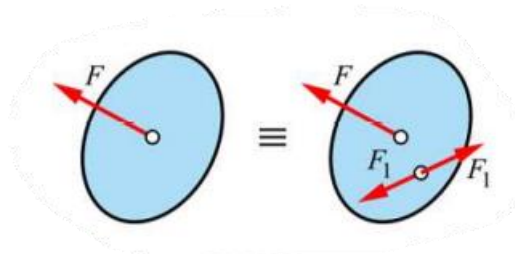


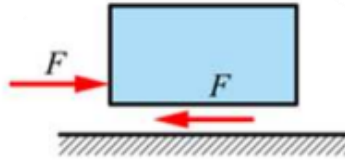
Figura 3.3. Primera ley de Newton (Oller & Nallim, 2020).

$$\sum F_i = 0$$

Ecuación 1.1. Primera ley de Newton

#### 1.4.3.2 Tercera ley de Newton

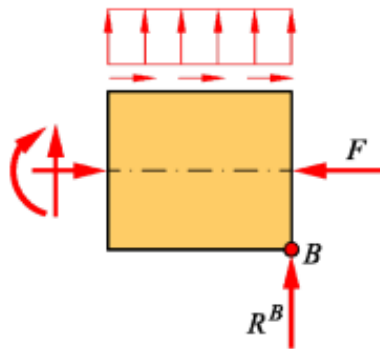
Las fuerzas de acción y reacción de dos partículas en contacto tendrán la misma dirección y magnitud, pero en sentidos opuestos como se muestra en la figura 1.4.



**Figura 4.4.** Tercera ley de Newton (Oller & Nallim, 2020).

### 1.4.3.3 Equilibrio de momentos

Conocida como la teoría de la palanca es decir que si se aplica una fuerza sobre un elemento y se analiza desde una distancia en un punto de referencia este generará un momento. El equilibrio del sistema determina que la suma de estos momentos deberá ser nula, la figura 1.5 representa las fuerzas implicadas y relacionadas en la ecuación 1.2.



**Figura 5.5.** Equilibrio de momentos (Oller & Nallim, 2020).

$$\sum M_i = 0$$

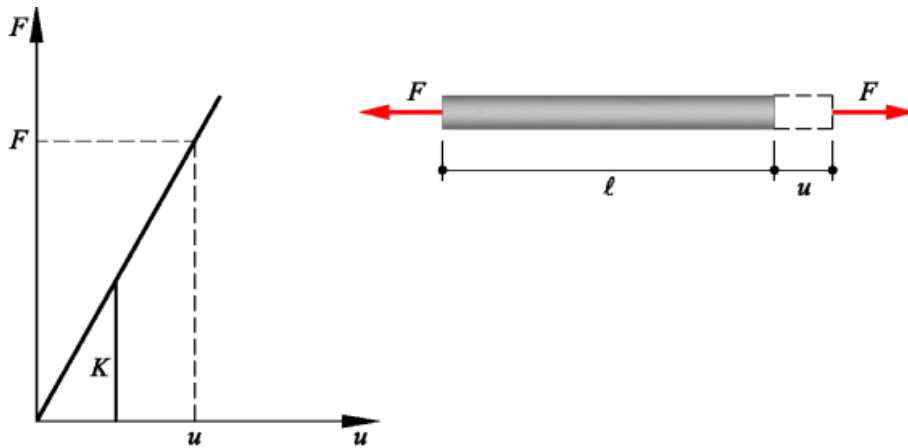
**Ecuación 1.2.** Tercera ley de Newton

## 1.5 Concepto de elasticidad

Esta rama de la mecánica de materiales permite relacionar la rigidez de un cuerpo sólido con la deformación bajo la acción de una fuerza, en el que la rigidez se mantiene constante y la deformación es proporcional a la fuerza aplicada como muestra la figura 1.6 y la ecuación 1.3.

La teoría de elasticidad depende de varios elementos entre los que el elemento debe volver a su estado natural una vez la fuerza es retirada.





**Figura 6.6.** Relación fuerza vs deformación en una barra (Oller & Nallim, 2020).

$$F = K \cdot \delta$$

**Ecuación 1.3.** Elasticidad de un elemento

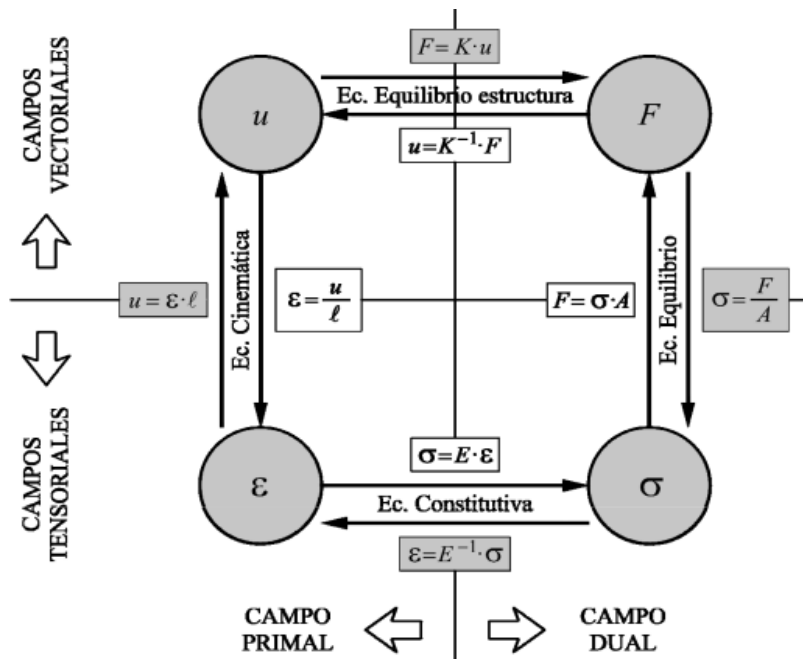
Donde:

$F$ : Fuerza sobre el cuerpo rígido

$K$ : Rigidez del elemento

$u = \delta$ : deformación del elemento

Con ayuda del diagrama de Enzo Tonti se puede relacionar fácilmente las ecuaciones para el caso aplicada una fuerza axial relacionando la teoría de elasticidad y obtener la rigidez para los elementos como se muestra en la ecuación 1.4 y figura 1.7.



**Figura 7.7.** Relación fuerza vs deformación en una barra (Oller & Nallim, 2020).

$$K = \frac{E \cdot A}{L}$$

**Ecuación 1.4.** Rigidez de un elemento

Donde:

$E$ : Modulo de elasticidad del elemento

$A$ : Sección transversal del elemento

$L$ : Longitud del elemento

## 1.6 Ley de Hooke y deformación unitaria

La ley de Hooke es conocida como una ecuación de constitutiva como se observa en el diagrama de Enzo Tonti, esta ley permite relacionar el esfuerzo como una expresión lineal a la deformación (Oller & Nallim, 2020).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

**Ecuación 1.5.** Ley de Hooke

Donde:

$\sigma$  = Esfuerzo

$\varepsilon$  = deformación unitaria

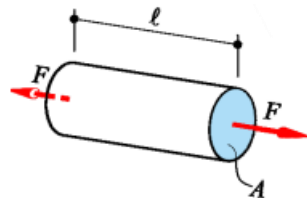
De la que se conoce que la deformación unitaria es una relación entre la deformación del elemento y la longitud inicial del elemento.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

**Ecuación 1.6.** Deformación unitaria de un elemento

## 1.7 Esfuerzo bajo cargas axiales

Al considerar un cuerpo rígido como la agrupación de varias partículas se puede definir el esfuerzo como la oposición del cuerpo a ser deformado y mantener sus partes unidas. Es por ello por lo que la ecuación 7 relaciona la fuerza sobre el área como se muestra en la figura 1.8.



**Figura 8.8.** Fuerza aplicada sobre un área en una barra (Oller & Nallim, 2020).

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

## Ecuación 1.7. Ley de Hooke

### 1.8 Deformación bajo cargas axiales

Como se mostró en la figura 1.6 se tiene que al aplicar una fuerza sobre un elemento rígido se obtiene una deformación que es reversible, es decir regresa a su posición inicial una vez retirada la fuerza. Al relacionar las ecuaciones 3,4,5,6 y 7 se obtiene lo mostrado en el diagrama de Enzo Tonti, de la que podemos obtener la deformación para un elemento y se muestra en la ecuación 8 (Beer, 2012).

$$\delta = \frac{F \cdot L}{E \cdot A}$$

### Ecuación 1.9. Deformación de un elemento cargado axialmente

### 1.9 Caso de ejercicio bajo carga axial

Según la disposición del sistema planteado se pueden clasificar en determinados o indeterminados, mismos que pueden estar sujetos a un adicional en el que existiera un gradiente de temperatura.

#### 1.9.1 Estáticamente determinados

En este tipo de sistemas bajo cargas axiales, las ecuaciones de equilibrio son suficientes para obtener las fuerzas internas en cada miembro y las reacciones en los puntos de apoyo. Es decir, se pueden resolver a partir del diagrama de cuerpo libre.

#### 1.9.2 Estáticamente indeterminados

En este tipo de sistemas bajo cargas axiales, las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para obtener las fuerzas internas en cada miembro y las reacciones en los puntos de apoyo. Por ello requieren otro tipo de análisis en función de las relaciones geométricas de deformación entre los elementos.

#### 1.9.3 Problemas con gradientes de temperatura

El fenómeno físico de la dilatación térmica aparece en todo cuerpo que es sometido a una variación de temperatura, el tipo de problema determinado o indeterminado dependerá de las restricciones que representen los elementos de apoyo. En este tipo de casos se puede aplicar la superposición para adicionar la deformación por dilatación térmica mostrada en la ecuación 9 (Philpot, 2012).

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L_o$$

### Ecuación 1.10. Dilatación de un elemento por efecto de la temperatura

Donde:

$\delta_T$ : Dilatación térmica

$\alpha$ : Coeficiente de expansión térmica

$\Delta T$ : Gradiente de temperatura

$L_o$ : Longitud inicial

## 2. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se modela numéricamente las expresiones matemáticas para determinar los esfuerzos y deformaciones bajo carga axial en varios sistemas indeterminados, en función de la disposición se los clasificará en lineales o rotatorios. Se aplicará las siguientes denotaciones para la modelación de las ecuaciones:

$F$ : Fuerza exterior sobre el sistema

$F_i$ : Fuerza interior en cada elemento del sistema

$\delta_i$ : Deformación en cada elemento del sistema

$$\delta_i = \frac{F_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i}$$

Bajo un gradiente de temperatura se aplica la superposición de las deformaciones y se aplicará la siguiente expresión.

$\delta_t$ : Deformación térmica

$$\delta_i = \frac{F_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \alpha_i \cdot \Delta T \cdot L_i$$

### 2.1 Casos indeterminados lineales

#### 2.1.1 Serie

El modelo indeterminado en serie tiene miembros los cuales están conectados uno a continuación del otro cargado con fuerzas sobre ellos, las fuerzas internas de cada elemento dependen del comportamiento de sus puntos de contacto.

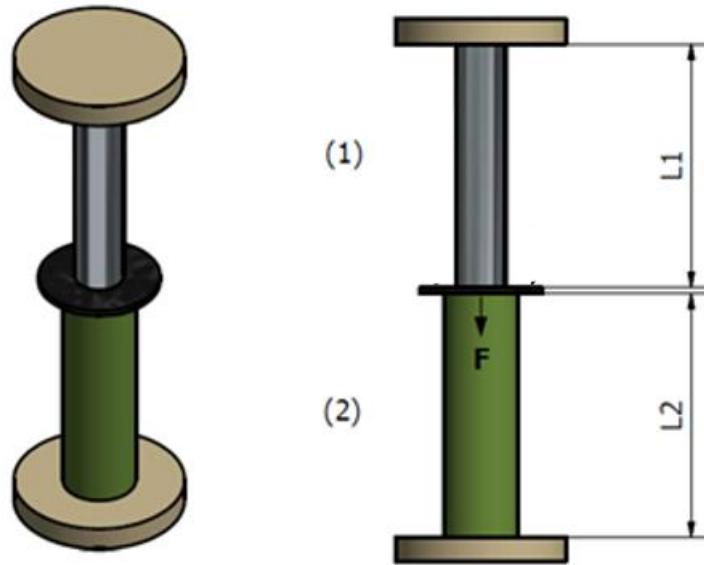
El sistema posee soportes de tipo fijo que no permite que los elementos del sistema se deformen con libertad, por lo cual se considera que la deformación total es igual a cero, pero permitiendo la deformación individual de los miembros.

#### **Entradas:**

Material, longitud de cada miembro, área de cada miembro, carga, gradiente de temperatura

#### **Salidas:**

Fuerza, deformación y esfuerzo de cada miembro.

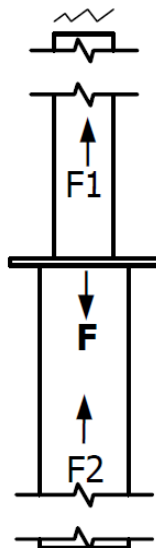


**Figura 9.1.** Modelo indeterminado en serie

Se aplica el siguiente método de resolución:

a. Diagrama de Cuerpo Libre

En el modelo del caso, se observa que se tiene una junta entre el miembro 1 y 2, por lo que se genera un diagrama de cuerpo libre en esta zona, se lo muestra en la figura.



**Figura 10.2.** DCL modelo indeterminado en serie

b. Ecuaciones de Equilibrio

Al presentar solo fuerzas en el eje Y, se obtiene una sola ecuación de equilibrio. Los momentos también son nulos ya que no existe una carga que genere rotación.

$$\sum F_y = 0$$

$$-F + F_2 + F_1 = 0$$

c. Ecuaciones de compatibilidad

Al tener dos miembros en serie se establece la ecuación que relaciona las deformaciones entre los miembros de la siguiente manera:

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

d. Resolución sistemas de ecuaciones

Se relaciona y resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo las ecuaciones para este caso.

$$\frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} = 0 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

$$F_1 = -\frac{F_2 \cdot b}{a}$$

Se reemplaza en la ecuación de equilibrio.

$$-F - \frac{F_2 \cdot b}{a} + F_2 = 0$$

$$F_2 = \frac{F}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)} \quad ; \quad c = \left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$F_2 = \frac{F}{c}$$

Obtenida las fuerzas en acción en cada miembro se puede calcular las deformaciones y esfuerzos individuales con las siguientes ecuaciones:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

Para calcular los esfuerzos de cada miembro:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

e. Adición de la dilatación térmica por superposición

Se mantiene la notación aplicada para la resolución de este caso, obteniendo la siguiente expresión.

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad d = \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad e = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

$$F_1 \cdot a + d = -F_2 \cdot b - e$$

$$F_1 = \frac{-F_2 \cdot b - e - d}{a} \quad ; \quad f = \frac{e + d}{a}$$

$$-F - \frac{F_2 \cdot b}{a} - f + F_2 = 0$$

$$F_2 = \frac{F + f}{1 - \frac{b}{a}} \quad ; \quad c = 1 - \frac{b}{a}$$

$$F_2 = \frac{F + f}{c}$$

## 2.1.2 Paralelo

El modelo paralelo indeterminado posee una fuerza distribuida homogéneamente sobre los cuerpos, debido a su configuración se considera que las deformaciones de los cuerpos son iguales.

### Entradas:

Material, longitud de cada miembro, área de cada miembro, carga, gradiente de temperatura.

### Salidas:

Fuerza, deformación y esfuerzo de cada miembro.

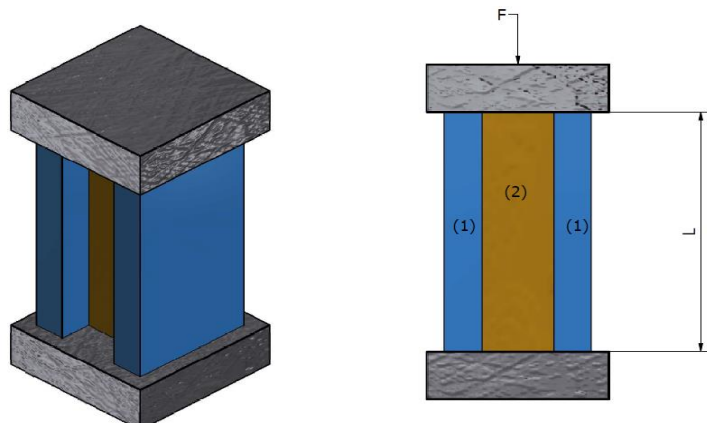


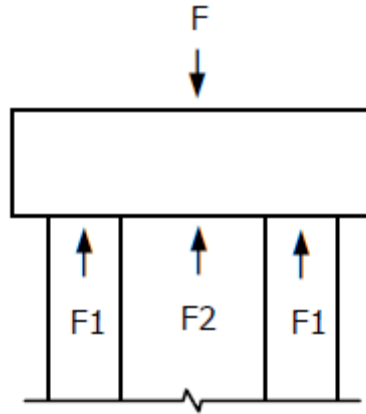
Figura 11.3. Modelo indeterminado en paralelo



Método de resolución:

a. Diagrama de Cuerpo Libre

Al tener una placa base de apoyo entre los dos miembros se establece que es un tipo de junta, por lo que desarrolla el diagrama de cuerpo libre en este elemento.



**Figura 12.4.** DCL Modelo indeterminado en paralelo

b. Ecuaciones de Equilibrio

Al tener solo una fuerza en Y, se obtiene una sola ecuación de equilibrio. Los momentos también son nulos ya que no existe una carga que genere rotación u momentos.

En el caso que se encuentren con placas y estas sean del mismo material y misma área se considera dos fuerzas iguales F1, en el caso de ser tubo se considera una sola fuerza con una sola área.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 + F_2 - F = 0$$

c. Ecuación de compatibilidad

Al tener dos miembros en paralelo se establece que la ecuación que relaciona las deformaciones entre los miembros será igual:

$$\delta_1 = \delta_2$$

d. Resolución sistemas de ecuaciones

Se procede a despejar las incógnitas por lo que se pueden anular estos términos.

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$$

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot b}{a}$$

$$\left(\frac{F_2 \cdot b}{a}\right) + F_2 - F = 0$$

$$F_2 = \frac{F}{\left(1 + \frac{b}{a}\right)} \quad ; \quad c = 1 + \frac{b}{a}$$

$$F_2 = \frac{F}{c}$$

Obtenida las fuerzas de reacción en cada miembro se puede calcular las deformaciones y esfuerzo individuales con las siguientes ecuaciones:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

Para calcular los esfuerzos de cada miembro:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

e. Adición de la dilatación térmica por superposición

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad d = \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad e = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$$

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$F_1 \cdot a + d = F_2 \cdot b + e$$

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot b + e - d}{a} \quad ; \quad f = \frac{e - d}{a}$$

$$-F + \frac{F_2 \cdot b}{a} + f + F_2 = 0$$

$$F_2 = \frac{F - f}{1 + \frac{b}{a}} \quad ; \quad c = 1 + \frac{b}{a}$$

$$F_2 = \frac{F - f}{c}$$

## 2.2 Casos indeterminados rotatorio

Modelos de sistemas rotatorios indeterminados poseen casos en los cuales por su geometría poseen diferentes métodos de resolución, en algunos casos los mismos sistemas de ecuaciones funcionan para resolver dos tipos de problemas, se aplica las siguientes entradas y salidas en cada sistema.

### Entradas:

Material, longitud de cada miembro, área de cada miembro, cargas, gradiente temperatura.

### Salidas:

Fuerza, deformación y esfuerzo en cada miembro

Reacciones en los puntos de apoyo

### 2.2.1 Modelo rotatorio Indeterminado caso 1 y 3

El modelo rotatorio se tiene una carga que realiza una rotación sobre un miembro pivote, este elemento rígido ideal está sujeto a otros elementos que están cargados axialmente, de esta manera y de acuerdo con la posición de los miembros tiene un problema de carga axial con barras paralelo.

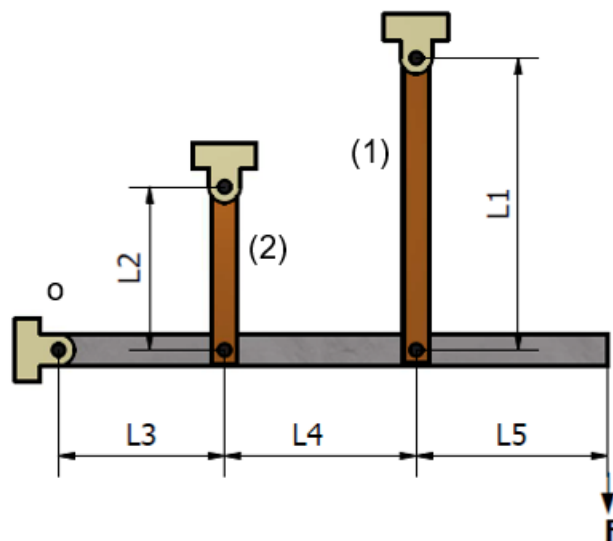
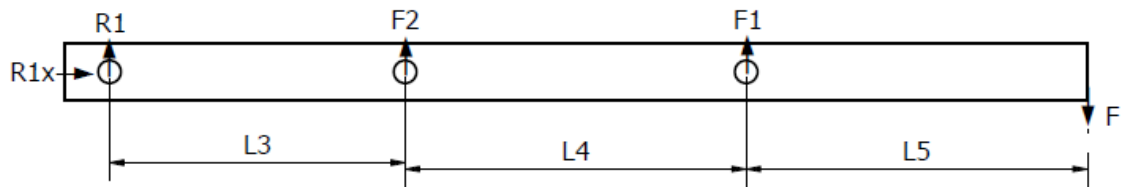


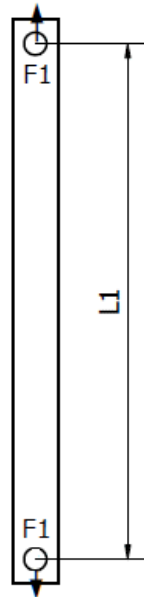
Figura 13.5. Modelo rotatorio 1

Método de resolución:

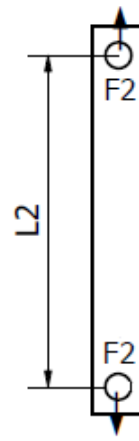
- Diagrama de Cuerpo Libre



(A)



(B)



(C)

**Figura 14.6.** DCL Modelo rotatorio 1 A: Cuerpo rígido, B: Elemento 1, C: Elemento 2

b. Ecuaciones de equilibrio

El modelo rotatorio parte de una barra rígida sujeta a un punto que sirve de referencia para establecer las ecuaciones de equilibrio, en estos casos y por ser 2 barras conectadas se puede aplicar únicamente un análisis de momentos.

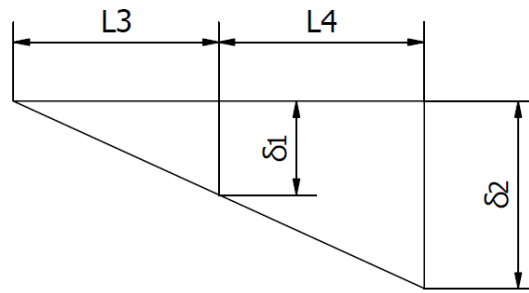
$$\sum M_1 = 0$$

$$L_3 \cdot F_2 + (L_3 + L_4) \cdot F_1 - (L_3 + L_4 + L_5) \cdot F = 0 \quad ; \quad L_x = (L_3 + L_4) \quad ; \quad L_y = L_3 + L_4 + L_5$$

$$L_x \cdot F_2 + L_3 \cdot F_1 - L_y \cdot F = 0$$

c. Ecuación de compatibilidad

Al tener dos miembros en paralelo se establece la ecuación que relaciona las deformaciones con una relación de triángulos entre las deformaciones de la siguiente manera:



**Figura 15.7.** DCL Modelo rotatorio 1 deformaciones

$$\frac{\delta_1}{L_3} = \frac{\delta_2}{L_x}$$

Cabe resaltar que las fuerzas en cada miembro corresponden a las reacciones generadas por la carga.

d. Resolución sistemas de ecuaciones

Finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones donde se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

$$\frac{F_1 \cdot a}{L_3} = \frac{F_2 \cdot b}{L_x}$$

Se despeja una de las fuerzas con el objetivo de reemplazarla en las ecuaciones de equilibrio.

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot b \cdot L_3}{a \cdot L_x} \quad ; \quad c = \frac{b \cdot L_3}{a \cdot L_x}$$

Se reemplaza en la ecuación de deformación en las ecuaciones de equilibrio con el objetivo de poder despejar una de las fuerzas.

$$L_x \cdot F_2 + F_2 \cdot c \cdot L_3 - L_y \cdot F = 0$$

$$F_2 = \frac{F \cdot L_y}{L_x + c \cdot L_3} \quad ; \quad d = \frac{1}{L_x + c \cdot L_3}$$

$$F_2 = F \cdot d \cdot L_y$$

Obtenida las fuerzas de reacción en cada miembro se puede calcular las deformaciones y esfuerzo individuales con las siguientes ecuaciones:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

Para calcular los esfuerzos de cada miembro:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

e. Adición de la dilatación térmica por superposición

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad e = \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad f = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$$

$$\frac{F_1 \cdot a}{L_3} + \frac{e}{L_3} = \frac{F_2 \cdot b}{L_x} + \frac{f}{L_x}$$

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot b \cdot L_3}{a \cdot L_3} + \frac{L_x}{a} \cdot \left( \frac{f}{L_x} - \frac{e}{L_3} \right) \quad ; \quad c = \frac{b \cdot L_3}{a \cdot L_x} \quad ; \quad g = \frac{L_3}{a} \cdot \left( \frac{f}{L_x} - \frac{e}{L_3} \right)$$

$$L_x \cdot F_2 + F_2 \cdot c \cdot L_3 + g \cdot L_3 - L_y \cdot F = 0$$

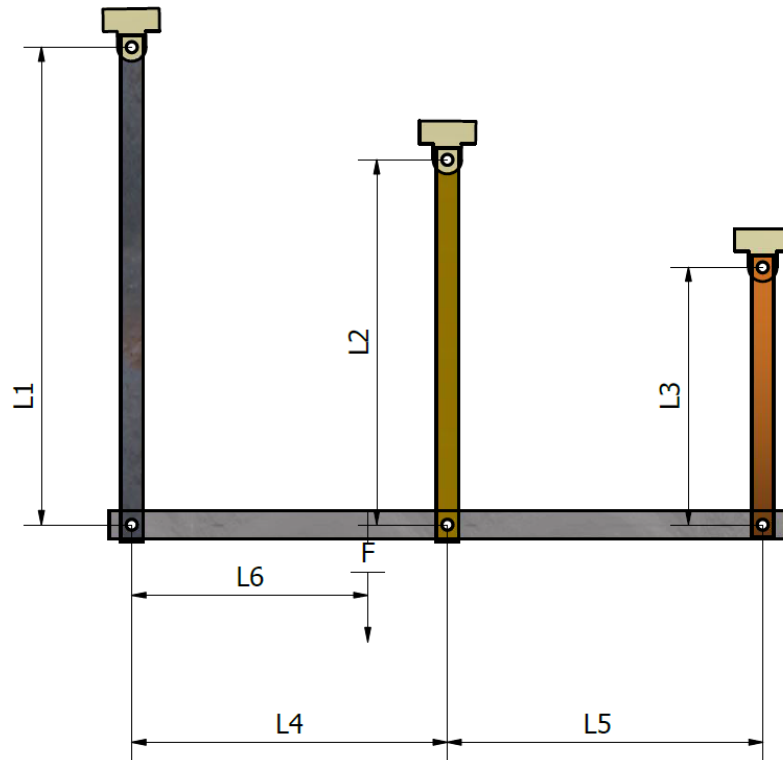
$$F_2 = \frac{F \cdot L_y - g \cdot L_3}{L_x + c \cdot L_3} \quad ; \quad d = \frac{1}{L_x + c \cdot L_3}$$

$$F_2 = (F \cdot L_y - g \cdot L_3) \cdot d$$

## 2.2.2 Modelo indeterminado rotatorio caso 2

Se tiene un sistema indeterminado, configuración rotatoria. Donde se requiere conocer el valor de la deformación y esfuerzos presentes en el sistema.

En el problema 2 se tiene tres cuerpos deformables con longitudes L1, L2 y L3 con una carga P a longitud L6, los tres cuerpos están conectados a una barra ideal rígida. La figura 2.8. muestra la disposición del problema.



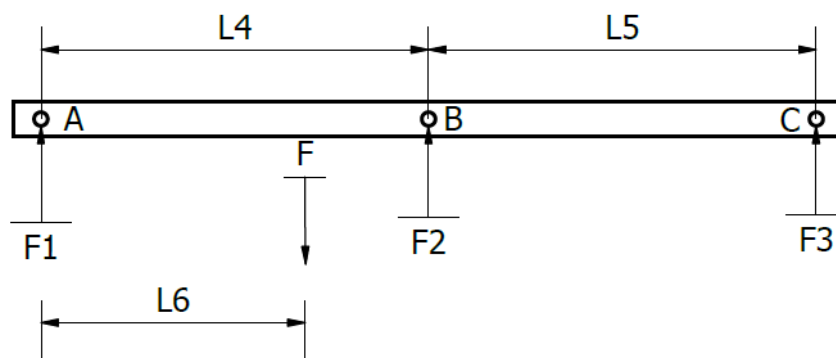
**Figura 16.8.** Modelo indeterminado caso 2

Método de resolución:

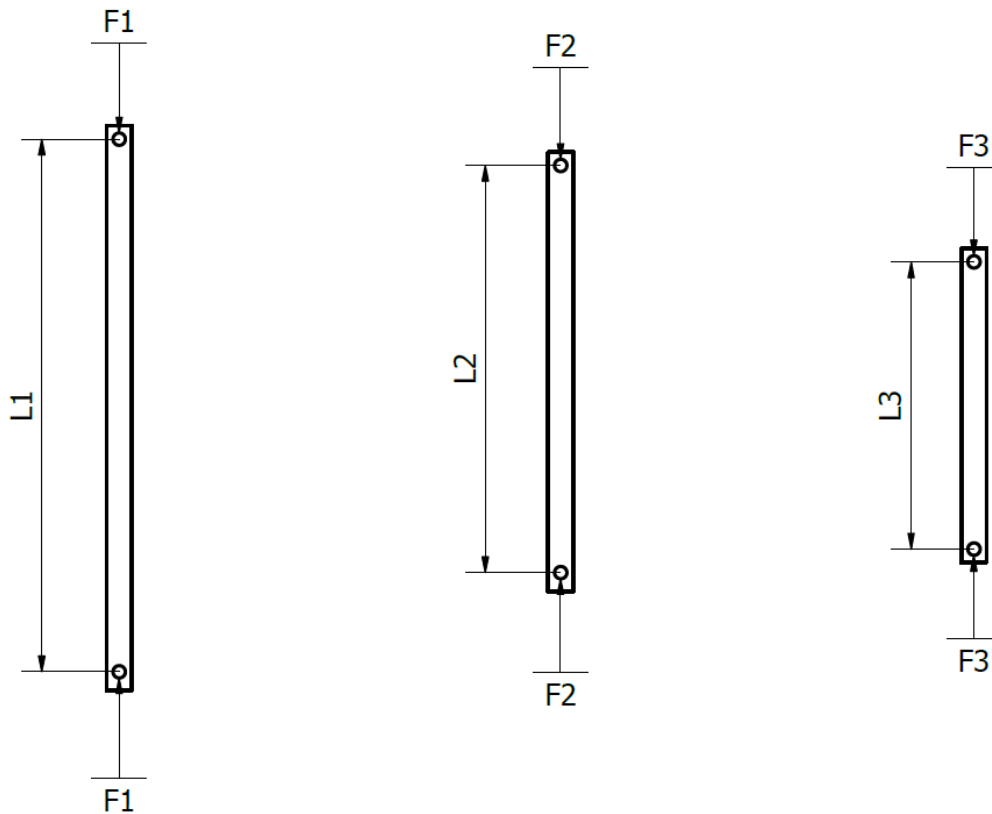
Se presenta el proceso de resolución:

a. Diagrama de Cuerpo Libre

Se identifica sobre la barra rígida las cargas por la fuerza inicial y los elementos conectados por separado.



A)



B)

**Figura 17.9.** Modelo determinado rotatorio A: Cuerpo rígido, B: Elemento 1,2 y 3.

b. Ecuaciones de Equilibrio

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_1 - F_2 - F_3 + F = 0$$

$$F_1 = F - F_2 - F_3$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_2 \cdot L_4 + F_3 \cdot (L_4 + L_5) - F \cdot L_6 = 0$$

$$F_3 = \frac{F \cdot L_6 - F_2 \cdot L_4}{L_4 + L_5} \quad ; \quad g = \frac{L_6}{L_4 + L_5} \quad ; \quad h = \frac{L_4}{L_4 + L_5}$$

$$F_3 = F \cdot g - F_2 \cdot h$$

$$F_1 = F - F_2 - (F \cdot g - F_2 \cdot h)$$

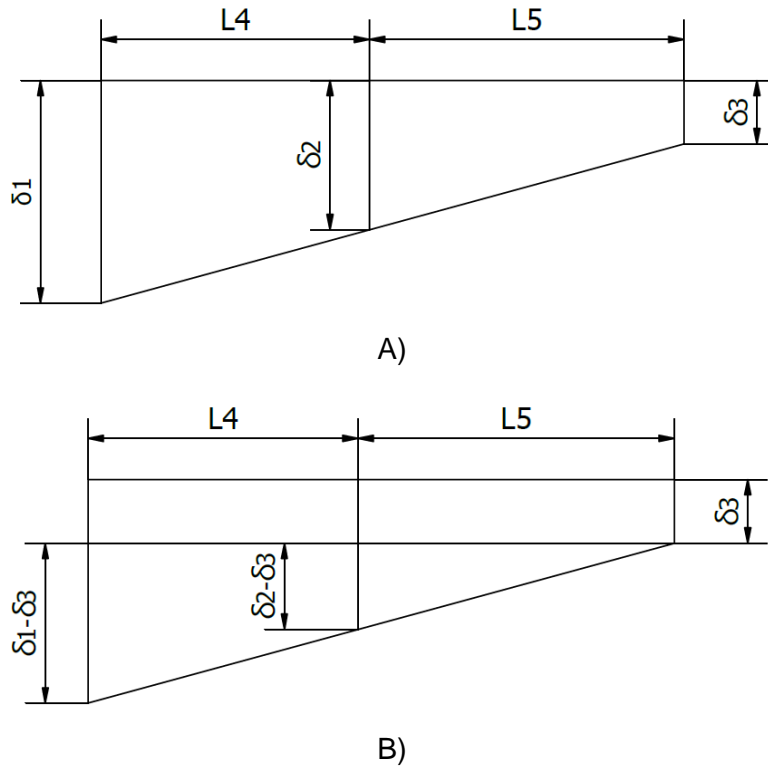
$$F_1 = F \cdot (1 - g) - F_2 \cdot (1 - h) \quad ; \quad e = (1 - g) \quad ; \quad f = (1 - h)$$

$$F_1 = F \cdot e - F_2 \cdot f$$



c. Relación de las deformaciones

De la relación de triángulos generados por las deformaciones, las mismas se pueden comparar de la siguiente manera:



**Figura 18.10.** Relación de las deformaciones generadas A) Totales, B) Relación

Obteniendo la siguiente ecuación

$$\frac{\delta_1 - \delta_3}{L_4 + L_5} = \frac{\delta_2 - \delta_3}{L_5}$$

$$\delta_2 = \left[ \frac{(\delta_1 - \delta_3) \cdot L_5}{L_4 + L_5} + \delta_3 \right] \quad ; \quad d = \frac{L_5}{L_4 + L_5}$$

d. Resolución sistemas de ecuaciones

De esta manera podemos remplazar las ecuaciones para obtener las fuerzas en cada elemento.

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

$$\delta_3 = \frac{F_3 \cdot L_3}{A_3 \cdot E_3} \quad ; \quad c = \frac{L_3}{A_3 \cdot E_3}$$

$$F_2 \cdot b = \left( \frac{(F_1 \cdot a - F_3 \cdot c) \cdot L_5}{L_4 + L_5} + F_3 \cdot c \right)$$

$$F_2 \cdot b = (F_1 \cdot a \cdot d - F_3 \cdot c \cdot d + F_3 \cdot c)$$

$$F_2 = \frac{F(a \cdot d \cdot e - c \cdot d \cdot g + g \cdot c)}{(b + f \cdot a \cdot d - h \cdot c \cdot d + h \cdot c)}$$

e. Adición de la dilatación térmica por superposición

Considerando variaciones de temperatura se puede incluir las expansiones térmicas de la siguiente manera:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad T_1 = \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad T_2 = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$$

$$\delta_3 = \frac{F_3 \cdot L_3}{A_3 \cdot E_3} + \alpha_3 \cdot \Delta T \cdot L_3 \quad ; \quad c = \frac{L_3}{A_3 \cdot E_3} \quad ; \quad T_3 = \alpha_3 \cdot \Delta T \cdot L_3$$

$$F_2 \cdot b + T_2 = ((F_1 \cdot a + T_1 - F_3 \cdot c - T_3) \cdot d + F_3 \cdot c + T_3)$$

$$F_2 \cdot b = (F_1 \cdot a \cdot d - F_3 \cdot c \cdot d + F_3 \cdot c) + (T_1 \cdot d - T_3 \cdot d + T_3 - T_2)$$

$$T_t = (T_1 \cdot d + T_3 \cdot d + T_3 - T_2)$$

$$F_2 = \frac{F(a \cdot d \cdot e - c \cdot d \cdot g + g \cdot c) + T_t}{(b + f \cdot a \cdot d - h \cdot c \cdot d + h \cdot c)}$$

### 2.2.3 Modelo indeterminado rotatorio caso 4

Se tiene un sistema indeterminado, configuración rotatoria. Donde se requiere conocer el valor de la deformación y esfuerzos presentes en el sistema.

La barra rígida con geometría en L esta soportada por dos barras, ambas barras poseen propiedades físicas conocidas y dicho sistema se encuentra cargado con una fuerza externa en el extremo opuesto a los elementos.

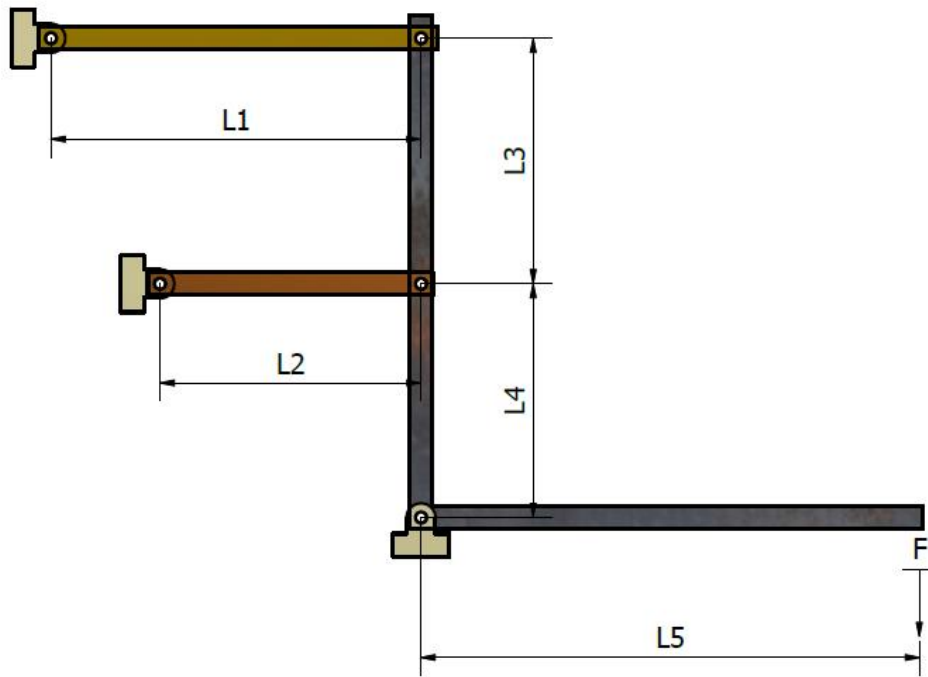
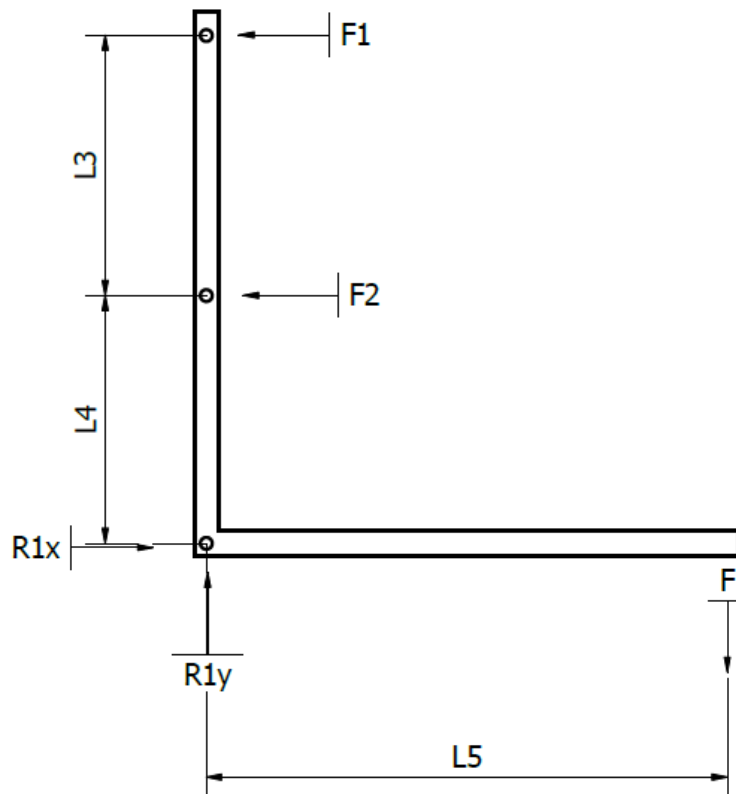


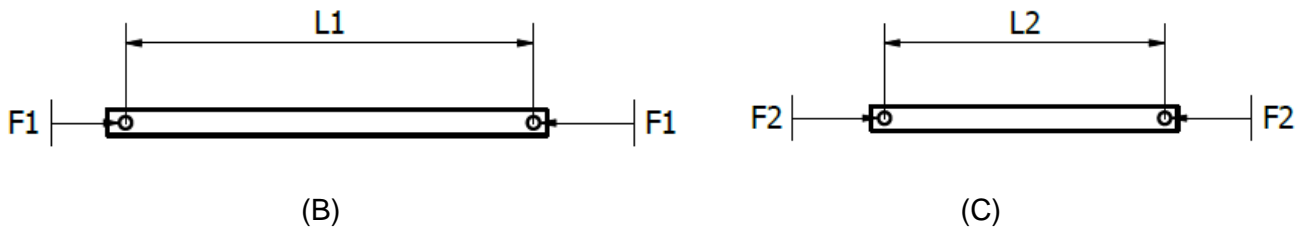
Figura 19.11. Modelo indeterminado rotatorio 4

Método de resolución:

a. Diagrama de Cuerpo Libre



(A)



**Figura 20.12.** DCL Modelo indeterminado rotatorio problema 4 A) Cuerpo rígido; B: Elemento 1; C: Elemento 2

b. Ecuaciones de Equilibrio

El modelo rotatorio parte de una barra rígida sujeta a un punto que sirve de referencia para establecer las ecuaciones de equilibrio, en estos casos y por ser 2 barras conectadas se puede aplicar únicamente un análisis de momentos.

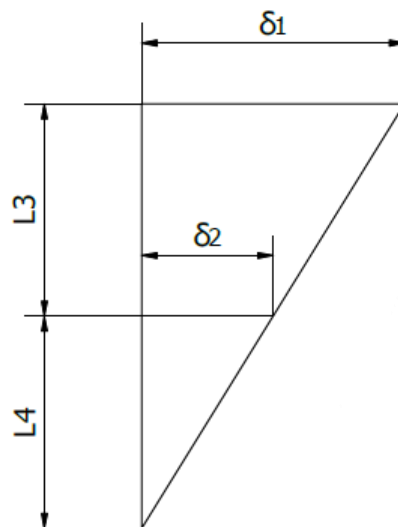
$$\sum M = 0$$

$$L_4 \cdot F_2 + (L_3 + L_4) \cdot F_1 - L_5 \cdot F = 0 \quad ; \quad L_x = L_3 + L_4$$

$$L_4 \cdot F_2 + L_x \cdot F_1 - L_5 \cdot F = 0$$

c. Relación de las deformaciones

Se desea conocer la deformación total del sistema e individualmente, por lo que es necesario realizar un análisis de la relación entre las deformaciones individuales.



**Figura 21.13.** Relación de deformación caso 4

De tal manera se puede relacionar el triángulo formado por las deformaciones de cada elemento con las longitudes al punto de referencia.

$$\frac{\delta_2}{L_4} = \frac{\delta_1}{L_3 + L_4} \quad ; \quad L_x = L_3 + L_4$$

d. Resolución sistemas de ecuaciones

Recordando que la deformación se la calcula de la siguiente manera:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

$$\frac{F_1 \cdot a}{L_x} = \frac{F_2 \cdot b}{L_4}$$

Se despeja las variables incógnitas de fuerzas reemplazando por sus equivalentes en otras ecuaciones.

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot b \cdot L_x}{L_4 \cdot a} \quad ; \quad c = \frac{b \cdot L_x}{L_4 \cdot a}$$

$$L_4 \cdot F_2 + F_2 \cdot c \cdot L_x - L_5 \cdot F = 0$$

$$F_2 = \frac{L_5 \cdot F}{L_4 + L_x \cdot c}$$

Para el cálculo del esfuerzo en cada miembro.

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

Cálculo de la deformación de cada miembro.

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

e. Adición de la dilatación térmica por superposición

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad e = \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad f = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$$

$$\frac{F_1 \cdot a}{L_x} + \frac{e}{L_x} = \frac{F_2 \cdot b}{L_4} + \frac{f}{L_4}$$

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot b \cdot L_x}{a \cdot L_4} + \frac{L_x}{a} \cdot \left( \frac{f}{L_4} - \frac{e}{L_x} \right) \quad ; \quad c = \frac{b \cdot L_x}{a \cdot L_4} \quad ; \quad g = \frac{L_x}{a} \cdot \left( \frac{f}{L_4} - \frac{e}{L_x} \right)$$

$$L_4 \cdot F_2 + F_2 \cdot c \cdot L_x + g \cdot L_x - L_5 \cdot F = 0$$

$$F_2 = \frac{F \cdot L_5 - g \cdot L_x}{L_4 + c \cdot L_x} \quad ; \quad d = \frac{1}{L_4 + c \cdot L_x}$$

$$F_2 = (F \cdot L_5 - g \cdot L_x) \cdot d$$

## 2.2.4 Modelo indeterminado rotatorio caso 5

La barra rígida con geometría en L esta soportada por dos barras en sus extremos, ambas barras poseen propiedades físicas distintas y con valores de sección transversal conocidas. Se conoce que está cargado con una fuerza. Se desea conocer los esfuerzos y deformaciones de los miembros 1 y 2.

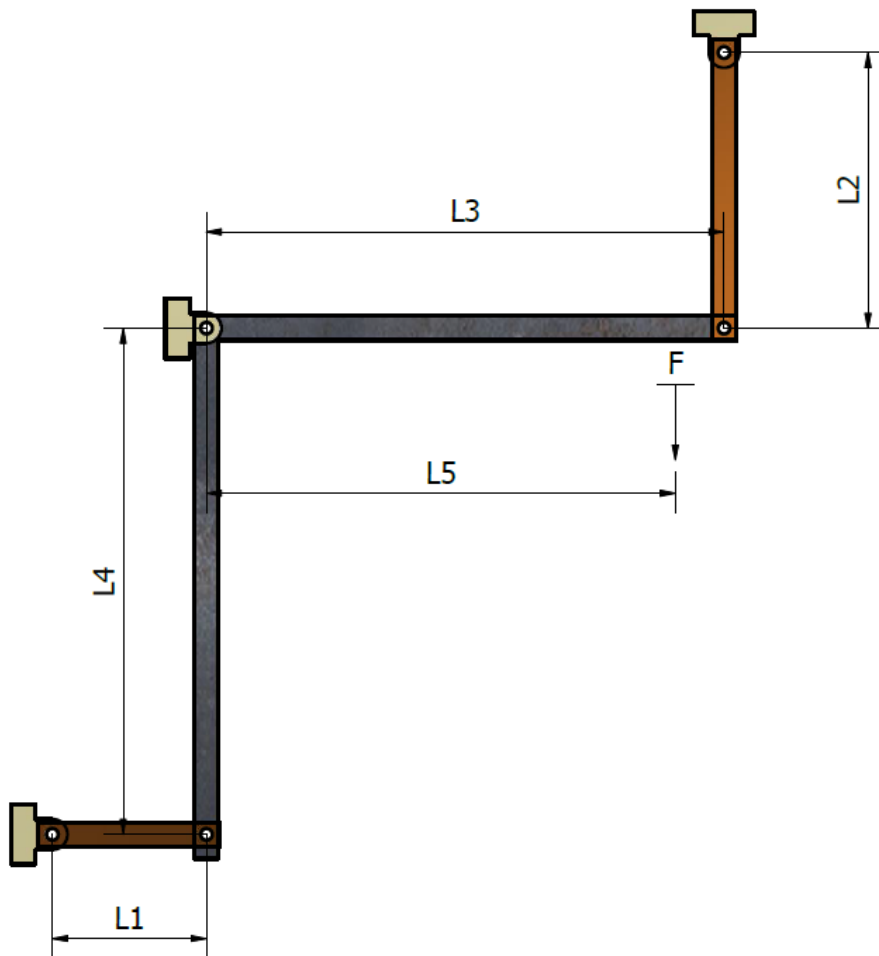
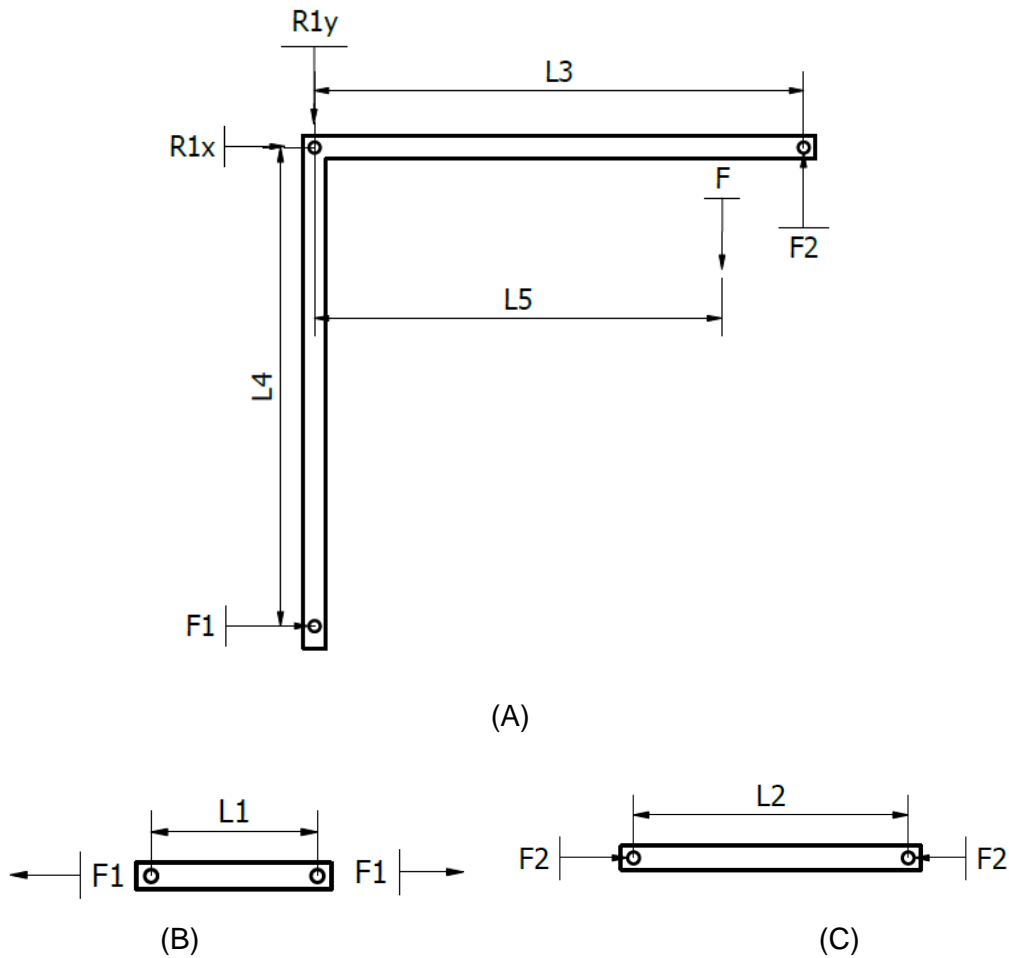


Figura 22.14. Modelo indeterminado rotatorio 5

Método de resolución:

- Diagrama de Cuerpo Libre



**Figura 23.15.** DCL Modelo indeterminado rotatorio problema 5 A) Cuerpo rígido; B) Elemento 1; C) Elemento 2

b. Ecuaciones de Equilibrio

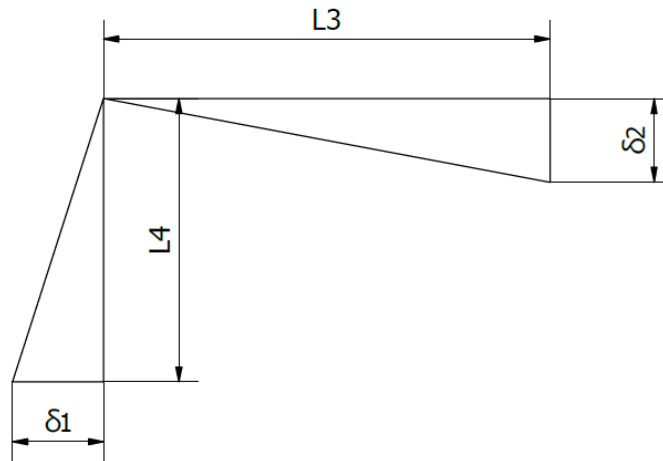
El modelo rotatorio parte de una barra rígida sujeta a un punto que sirve de referencia para establecer las ecuaciones de equilibrio, en estos casos y por ser 2 barras conectadas se puede aplicar únicamente un análisis de momentos.

$$\sum M = 0$$

$$L_3 \cdot F_2 - L_4 \cdot F_1 - L_5 \cdot F = 0$$

c. Relación de las deformaciones

Se desea conocer la deformación total del sistema e individualmente, por lo que es necesario realizar un análisis de la relación entre las deformaciones individuales.



**Figura 24.16.** Relación de deformación caso 5

De tal manera se puede relacionar el triángulo formado por las deformaciones de cada elemento con las longitudes al punto de referencia.

$$-\frac{\delta_2}{L_3} = \frac{\delta_1}{L_4}$$

d. Resolución sistemas de ecuaciones

Recordando que la deformación se la calcula de la siguiente manera:

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

$$\frac{F_1 \cdot a}{L_4} = -\frac{F_2 \cdot b}{L_3}$$

Se despeja las variables incógnitas de fuerzas reemplazando por sus equivalentes en otras ecuaciones.

$$F_1 = -\frac{F_2 \cdot b \cdot L_4}{L_3 \cdot a} \quad ; \quad c = \frac{b \cdot L_4}{L_3 \cdot a}$$

$$L_3 \cdot F_2 - L_4 \cdot F_2 \cdot c - L_5 \cdot F = 0$$

$$F_2 = \frac{L_5 \cdot F}{L_3 + L_4 \cdot c}$$

Para el cálculo del esfuerzo en cada miembro.

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2}$$



Cálculo de la deformación de cada miembro.

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2}$$

e. Adición de la dilatación térmica por superposición

$$\delta_1 = \frac{F_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} + \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1 \quad ; \quad a = \frac{L_1}{A_1 \cdot E_1} \quad ; \quad e = \alpha_1 \cdot \Delta T \cdot L_1$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} + \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2 \quad ; \quad b = \frac{L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad ; \quad f = \alpha_2 \cdot \Delta T \cdot L_2$$

$$\frac{F_1 \cdot a}{L_4} + \frac{e}{L_4} = -\frac{F_2 \cdot b}{L_3} - \frac{f}{L_3}$$

$$F_1 = -\frac{F_2 \cdot b \cdot L_4}{a \cdot L_3} - \frac{L_4}{a} \cdot \left( \frac{f}{L_3} + \frac{e}{L_4} \right) \quad ; \quad c = \frac{b \cdot L_4}{a \cdot L_3} \quad ; \quad g = \frac{L_4}{a} \cdot \left( \frac{f}{L_3} + \frac{e}{L_4} \right)$$

$$L_3 \cdot F_2 + F_2 \cdot c \cdot L_4 + g \cdot L_4 - L_5 \cdot F = 0$$

$$F_2 = \frac{F \cdot L_5 - g \cdot L_4}{L_3 + c \cdot L_4} \quad ; \quad d = \frac{1}{L_3 + c \cdot L_4}$$

$$F_2 = (F \cdot L_5 - g \cdot L_4) \cdot d$$

## 2.3 Interfaz gráfica con App Designer

### 2.3.1 Ventana de presentación y selección de caso.

Finalizada el modelado matemático de las ecuaciones para cada uno de los casos se desarrolla el software didáctico, en el que se toman en cuenta el tipo de problema ya sea indeterminado lineal o indeterminado rotatorio, es así como se muestra la primera ventana de presentación en la que se muestra los tipos de caso que el usuario puede seleccionar, además de mostrar una presentación del tipo de proyecto, se muestra en la figura 2.17.

Las imágenes mostradas en el cuadro selección de casos permiten al estudiante conocer qué tipo de ejercicios podrá solucionar al seleccionar lineal o rotatorio, para evitar confusiones se bloquea el cambio entre ventanas, es decir se deberá seleccionar entre las posibilidades para acceder al siguiente cuadro de dialogo que es netamente el de parametrización de las variables.



**Figura 25.17.** Ventana de presentación y selección de casos.

### 2.3.2 Ventana de parametrización caso lineal.

Al seleccionar el caso indeterminado lineal se abrirá la siguiente ventana correspondiente a la parametrización en la que se podrá realizar algunas de las siguientes acciones y se muestran en la figura 2.18:

- a. Seleccionar el tipo de problema a solucionar entre serie y paralelo
- b. Determinar el número de elementos que conformen un sistema, en este caso el programa se actualiza y muestra en la gráfica el número de elementos.
- c. Elegir el tipo de sistema de unidades en las que se desea resolver el sistema.
- d. Ingresar los parámetros, acorde al material y geometría de cada elemento, en este caso se puede añadir otros valores seleccionando la opción otro.
- e. Determinar de existir un gradiente de temperatura para habilitar la opción e ingresar un valor de temperatura.
- f. Seleccionar la cantidad de fuerzas externas sobre el sistema, los puntos de referencia se muestran automática en la gráfica.

- g. Finalizada la parametrización el estudiante podrá generar cambiar selección entre generar un diagrama de cuerpo libre, modificar el sólido o ver los resultados.

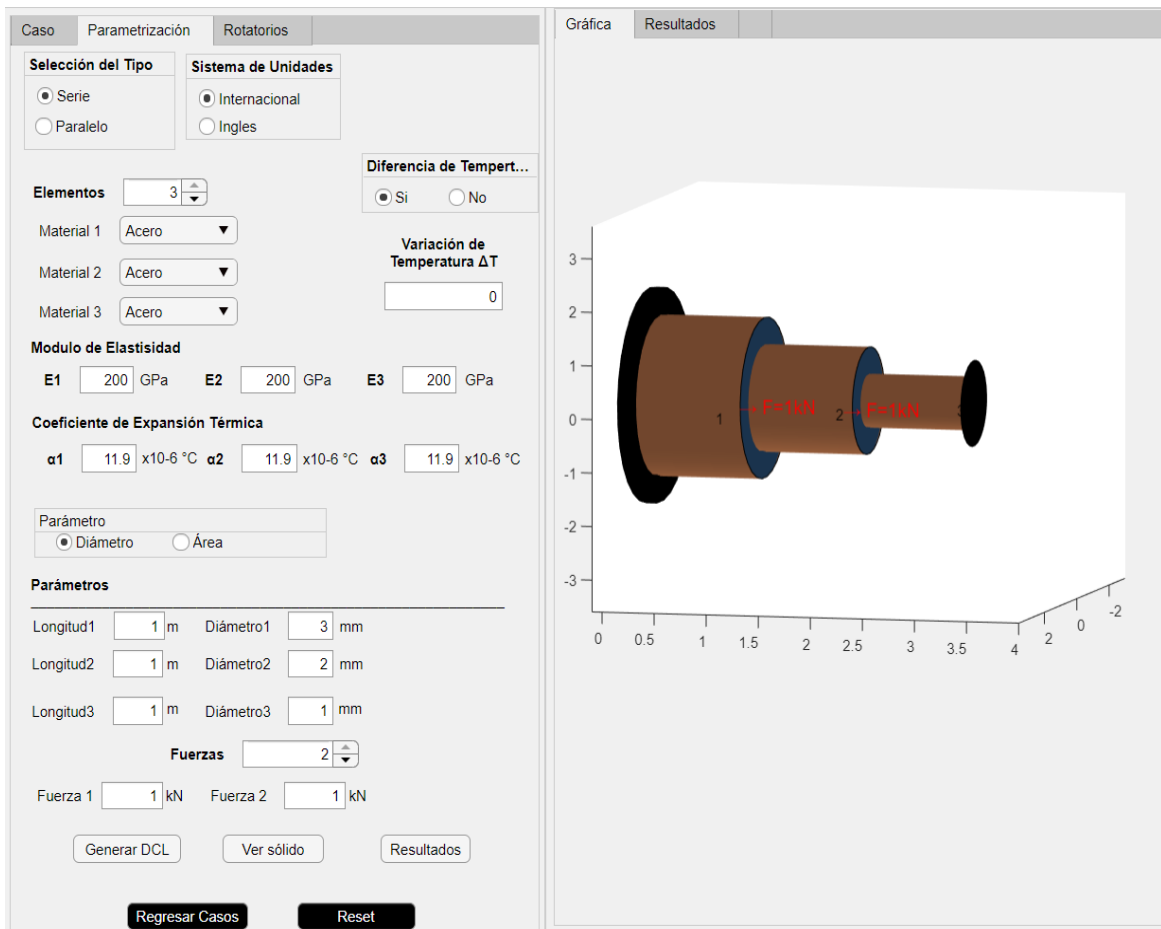


Figura 26.18. Ventana de parametrización del caso lineal.

### 2.3.2.1 Ventana de diagrama de cuerpo libre caso lineal.

Finalizada la parametrización se podrá visualizar el diagrama de cuerpo libre en el que se mostraran los elementos, las fuerzas internas y externas se presentan en el mismo cuadro de imagen.

Al tener restricciones en sus extremos cualquier fuerza aplicada generará una fuerza en cada elemento por separado al estar en contacto uno con el otro, se muestra en la figura 2.19 el diagrama de cuerpo libre para un problema de 3 elementos y 2 fuerzas externas.

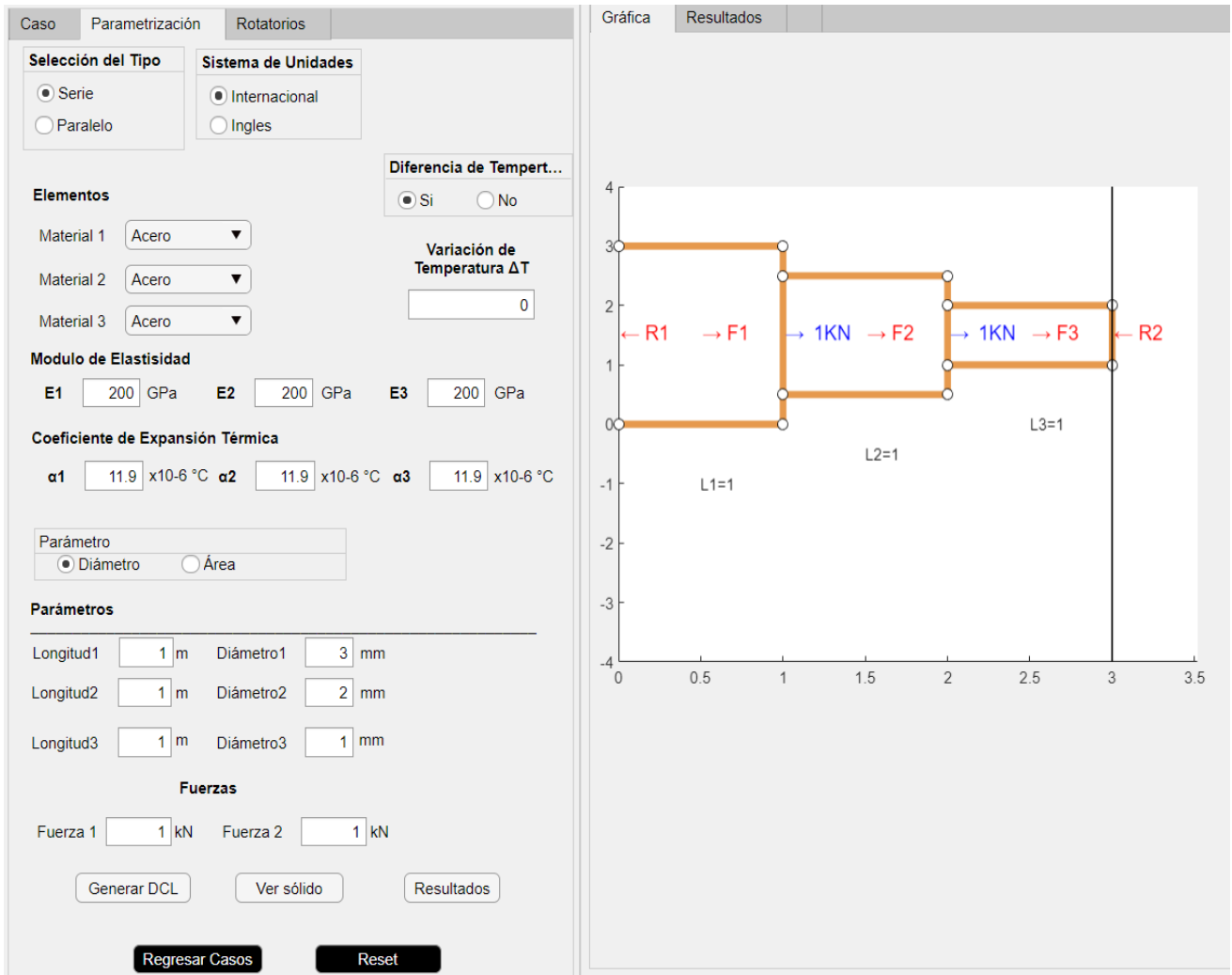


Figura 27.19. Diagrama de cuerpo libre del caso lineal.

### 2.3.2.2 Ventana de resultados caso lineal.

Al seleccionar resultados se visualizará otra ventana en la que se mostrará una gráfica adicional que podrá ser cambiada según sea requerido, se podrá mostrar graficas de fuerzas en cada elemento, deformaciones de cada miembro y sus esfuerzos.

En la figura 2.20 se muestra los resultados para un problema lineal de 3 elementos y 2 fuerzas externas, con propiedades de un acero común, longitudes de 1m y los diámetros que permitan determinar la sección serán de 1mm. Las fuerzas aplicadas serán de 1kN, no se tomará en cuenta consideraciones de cambio de temperatura, finalmente se utilizará el sistema de unidades internacional.

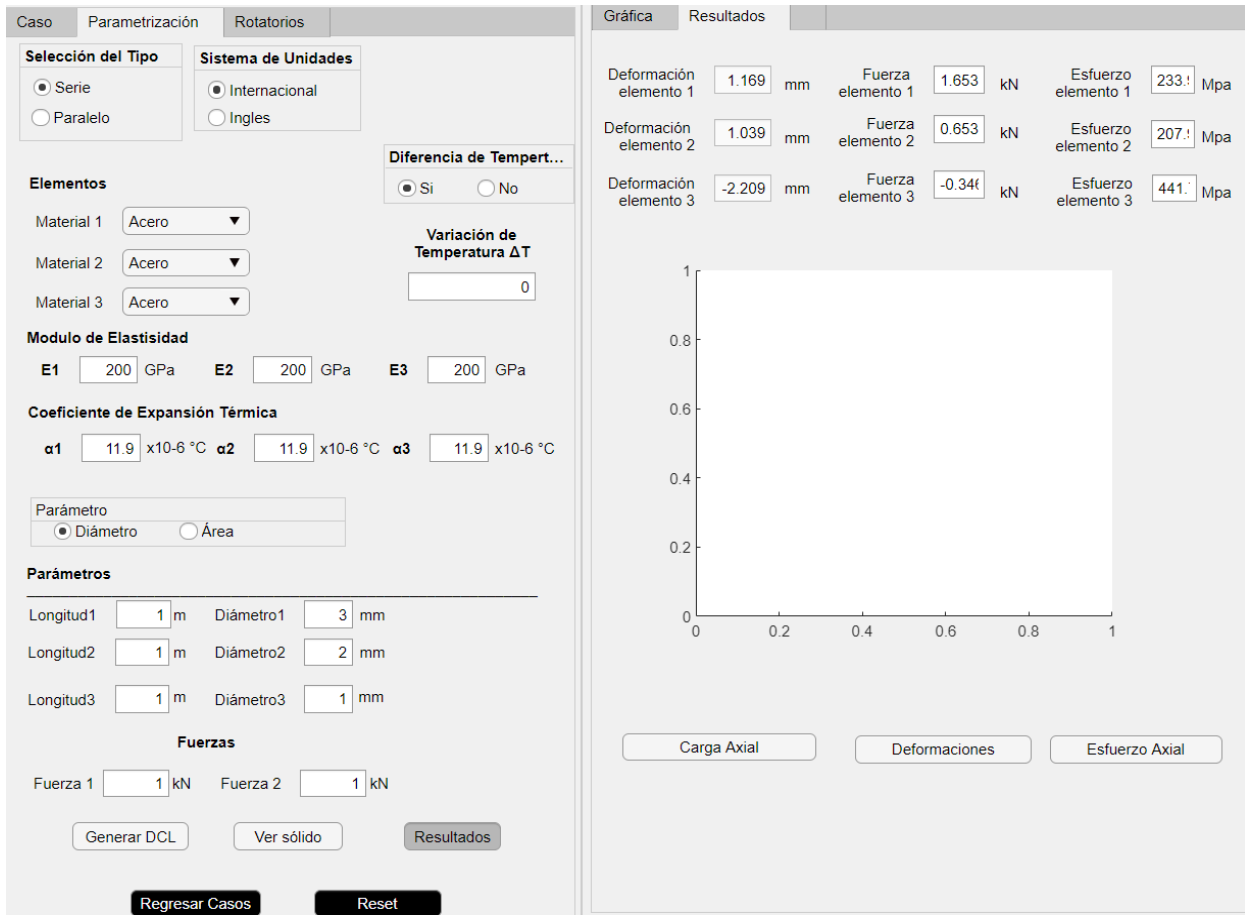


Figura 28.20. Ventana de resultados del caso lineal.

La grafica podrá cambiar según se seleccione:

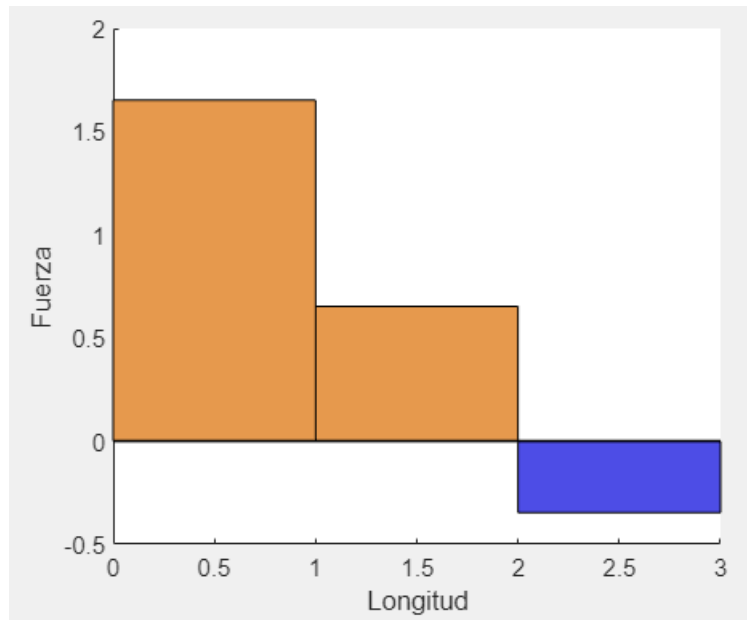
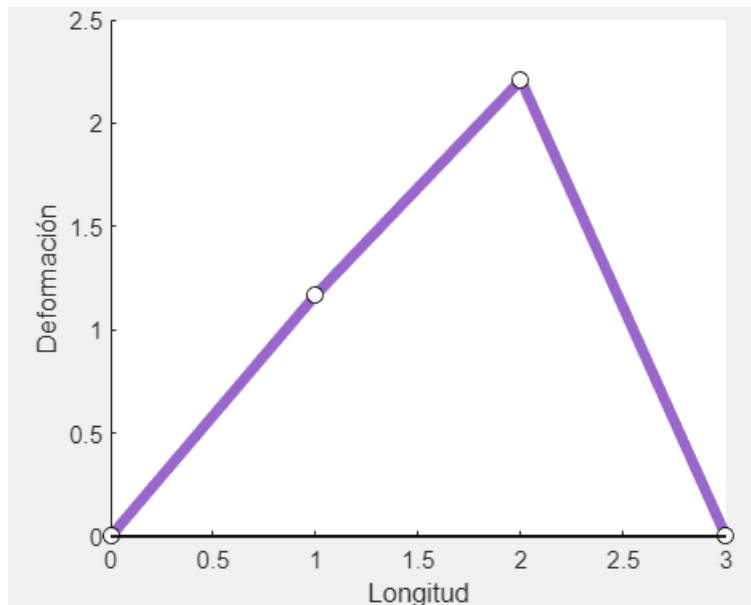


Figura 29.21. Resultado de carga axial para cada miembro del sistema.

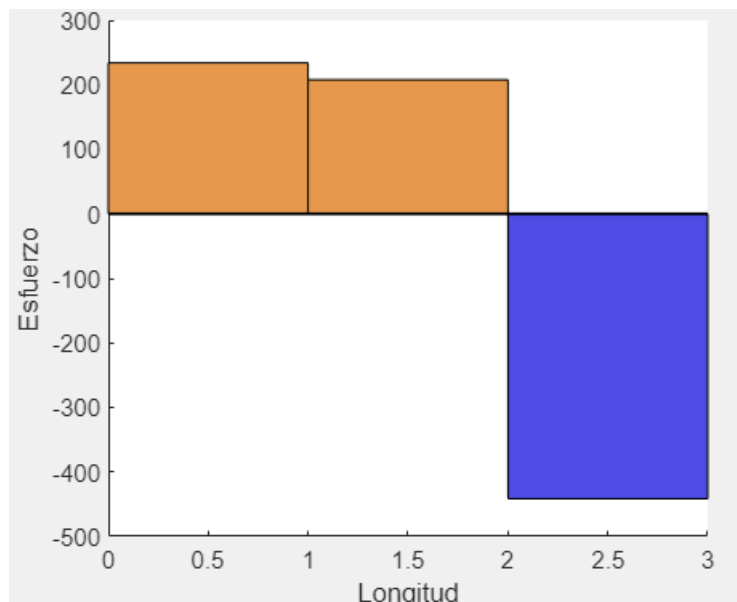
■ Tracción    ■ Compresión

En la figura 2.21, se muestra el comportamiento de cada miembro siendo de diferentes colores para diferenciar el estado del elemento, la carga axial se encuentra en función de la longitud pudiendo mostrar las variaciones por los cambios de sección.



**Figura 30.22.** Resultado de carga axial para cada miembro del sistema.

En la figura 2.22, se muestra el comportamiento de cada miembro por las deformaciones, en este caso se encuentra restringido el movimiento de todo el sistema, por lo que empieza y termina en un valor nulo. Las líneas de pendiente positiva indican que se encuentra con deformadas de alargamiento y las pendientes negativas una deformación de compactación.



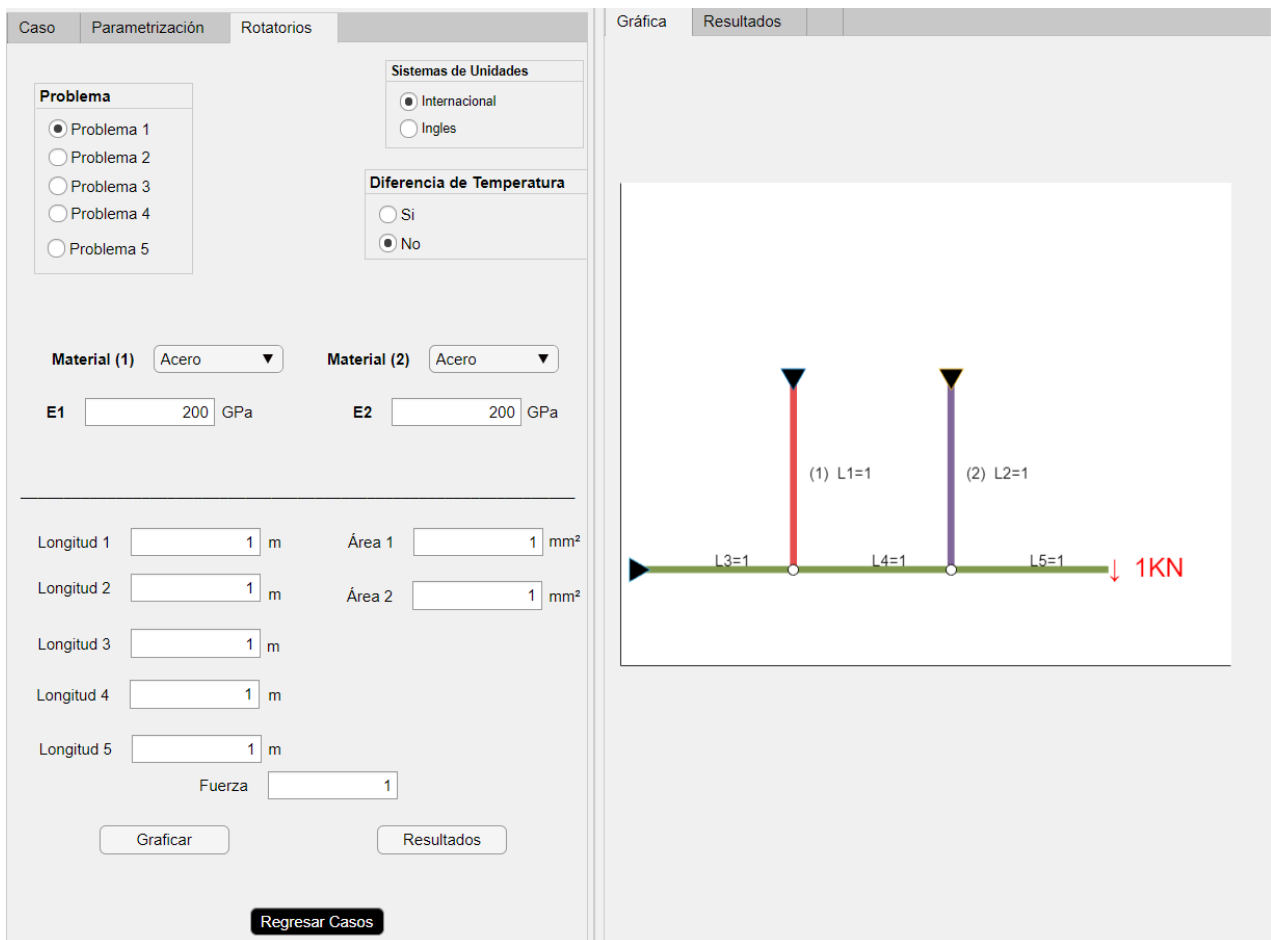
**Figura 31.23.** Resultado de esfuerzo axial para cada miembro del sistema.

■ Tracción   ■ Compresión

En la figura 2.23, se muestra el comportamiento de cada miembro por los esfuerzos internos generados, se presenta un símil a la carga axial en diferencia de valores al ser dependientes del área que se haya parametrizado. De igual manera se diferencian los colores para indicar los elementos a tracción y compresión.

### 2.3.3 Ventana de parametrización caso rotatorio.

Al seleccionar el caso indeterminado rotatorio se abrirá la siguiente ventana correspondiente a la parametrización en la que se podrá realizar las siguientes acciones y se muestran en la figura 2.24:



**Figura 32.24.** Ventana de parametrización del caso rotatorio.

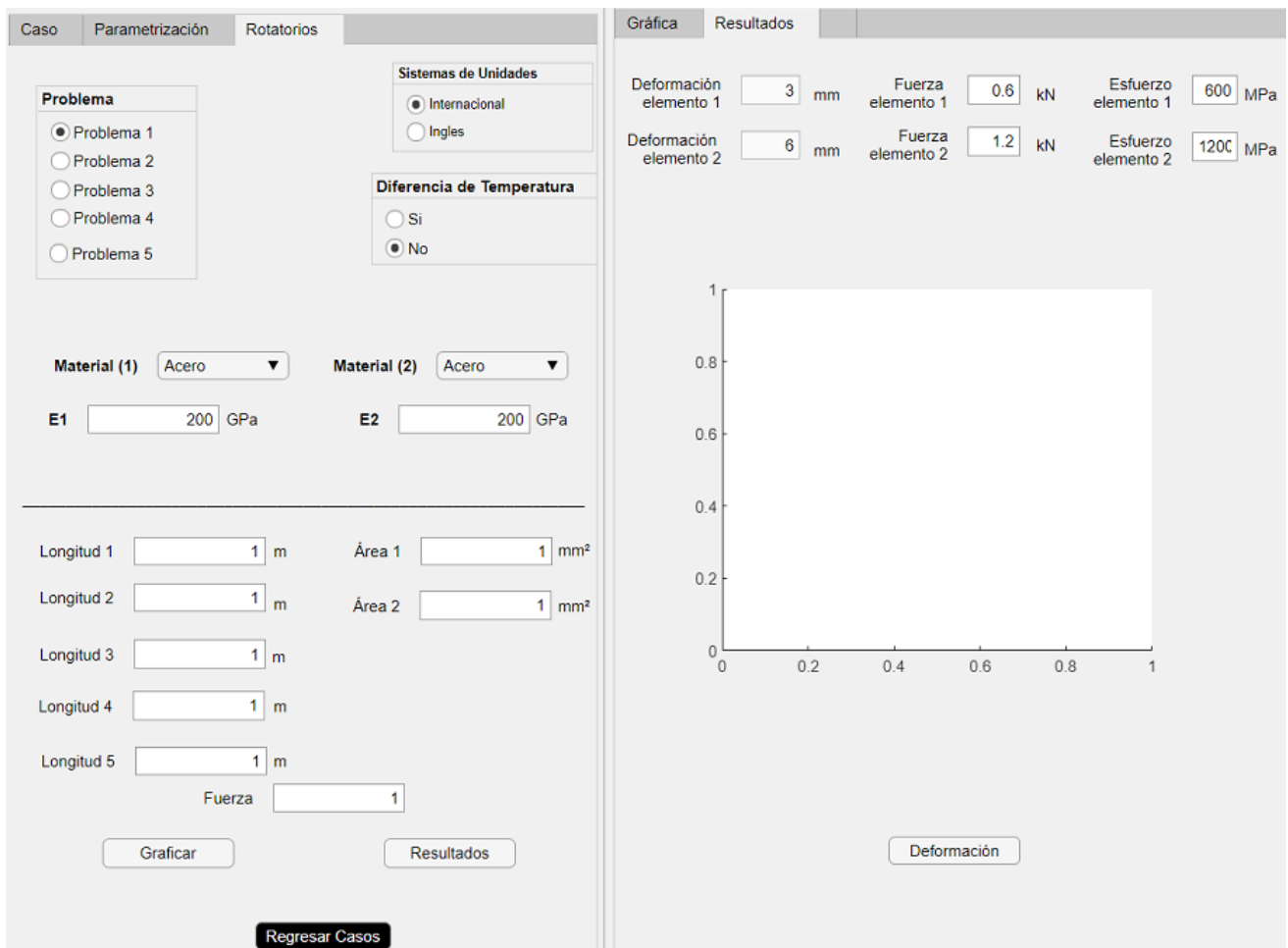
- Seleccionar el tipo de problema a solucionar entre los 5 modelados, se muestra el tipo de problema en el gráfico.
- Elegir el tipo de sistema de unidades en las que se desea resolver el sistema.
- Ingresar los parámetros, acorde al material y sección de cada elemento, en este caso se puede añadir otros valores seleccionando la opción otro.
- Determinar de existir un gradiente de temperatura para habilitar la opción e ingresar un valor de temperatura.

- e. Ingresar el valor de la fuerza externa sobre el sistema, los puntos de referencia se muestran automática en la gráfica.
- f. Finalizada la parametrización se podrá actualizar el gráfico o ir directamente a los resultados.

### 2.3.3.1 Ventana de resultados caso rotatorio.

Al seleccionar resultados se visualizará otra ventana en la que se mostrará una gráfica adicional que podrá mostrar la deformación del sistema.

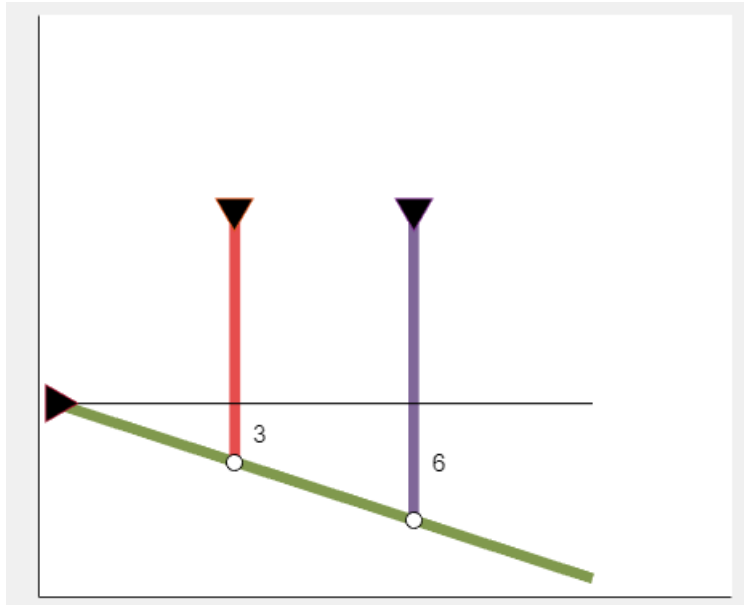
En la figura 2.25 los resultados para los resultados para el problema 1, con propiedades del de un acero común, longitudes de 1m y sección será de 1mm<sup>2</sup>. La fuerza aplicada será de 1kN, no se tomará en cuenta consideraciones de cambio de temperatura, finalmente se utilizará el sistema de unidades internacional.



**Figura 33.25.** Resultados del problema 1 del caso rotatorio.

En la gráfica de la ventana de resultados se podrán evidenciar las deformaciones totales del sistema, se debe realizar una ampliación o escalado debido a que las deformaciones son despreciables en consideración de las longitudes de los elementos, como se muestra en la figura 2.26.





**Figura 34.26.** Grafica de las deformaciones del problema 1 del caso rotatorio.

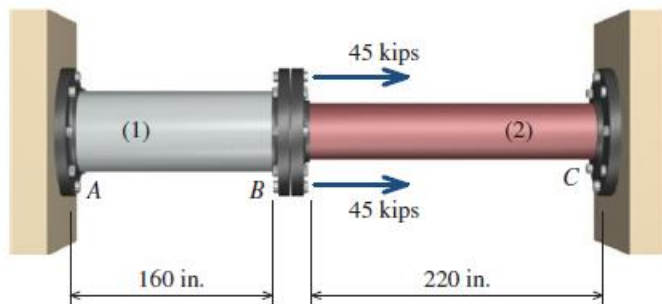
### 3. RESULTADOS

En este capítulo se validará los resultados para cada uno de los problemas modelados entre los casos lineales y rotatorios, se utilizará la bibliografía consultada para presentar ejercicios similares generados en el software y verificar las respuestas. Se aplicarán en ciertos casos sistema de unidades internacionales y casos en sistema de unidades inglesas. Se validará únicamente los resultados ya que las gráficas son generadas de acuerdo con los valores obtenidos y los diagramas mostrados se encuentra en función de las ecuaciones ingresadas.

Se indicará e ingresará directamente los valores de parametrización de esta manera solo se mostrará el gráfico que corresponda al caso. Finalmente se mostrará los resultados realizados a manera de encuesta a estudiantes de mecánica de materiales, los cuales validarán el nivel de aprendizaje que puede alcanzar el programa, además de corrobora resultados arrojados por el software y por último se pedirá recomendaciones que podrán ser tomadas en cuenta en futuros trabajos.

#### 3.1 Resultados caso indeterminado lineal en serie

Se muestra en la figura 3.1 un problema de dos elementos se evidencia que se encuentra las unides se encuentra en el sistema ingles y el movimiento del sistema se encuentra restringido en sus apoyos. Se empezará de izquierda a derecha enumerando los elementos en orden. El ejercicio 5.27, solicita determinar los esfuerzos y la deformación en el sistema.



5.27 (a)  $\sigma_1 = 7.84 \text{ ksi (T)}$ ,  
 $\sigma_2 = 17.10 \text{ ksi (C)}$   
(b)  $u_B = 0.1254 \text{ in. } \rightarrow$

**Figura 35.1.** Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.27 del libro (Philpot, 2012).

a. Parámetros de ingreso al programa.

$$L_1 = 160in \quad ; \quad L_2 = 220in$$

$$F = 2 \cdot (45kips) = 90kips$$

$$A_1 = 4.5 \text{ in}^2 \quad ; \quad A_2 = 3.2 \text{ in}^2$$

$$E_1 = 10 \text{ Mpsi} \quad ; \quad E_2 = 30 \text{ Mpsi}$$

Resultados requeridos por el ejercicio.

$$\sigma_1 = 7.84 \text{ kpsi Tracción} \quad ; \quad \sigma_2 = 17.1 \text{ kpsi Compresión} \quad ; \quad u_B = \delta = 0.1254 \text{ in}$$

En la figura 3.2 se muestra los resultados obtenidos por el programa, se validará los esfuerzos y la deformación que se muestra como incógnita.

b. Resultados obtenidos en el programa.

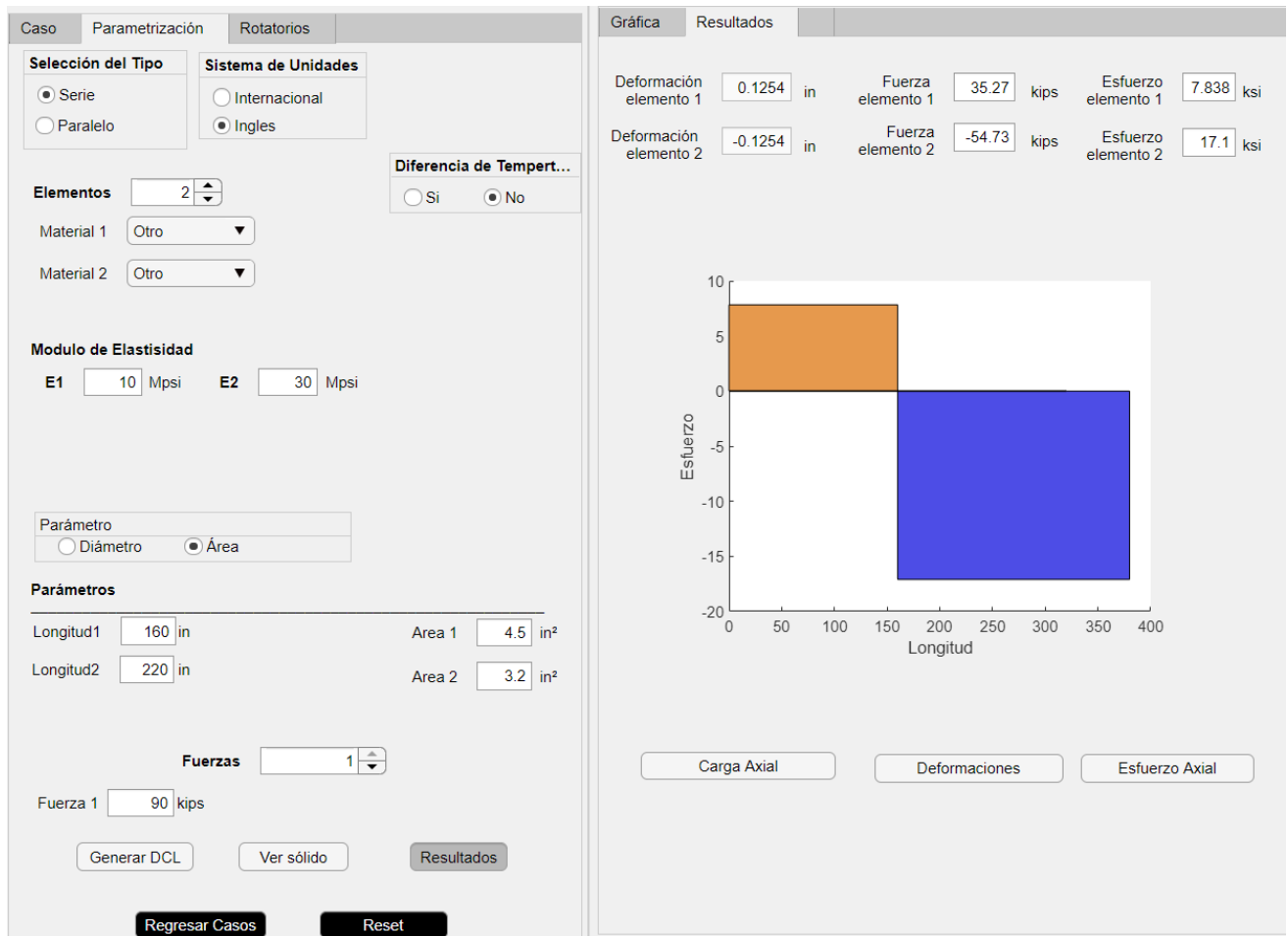


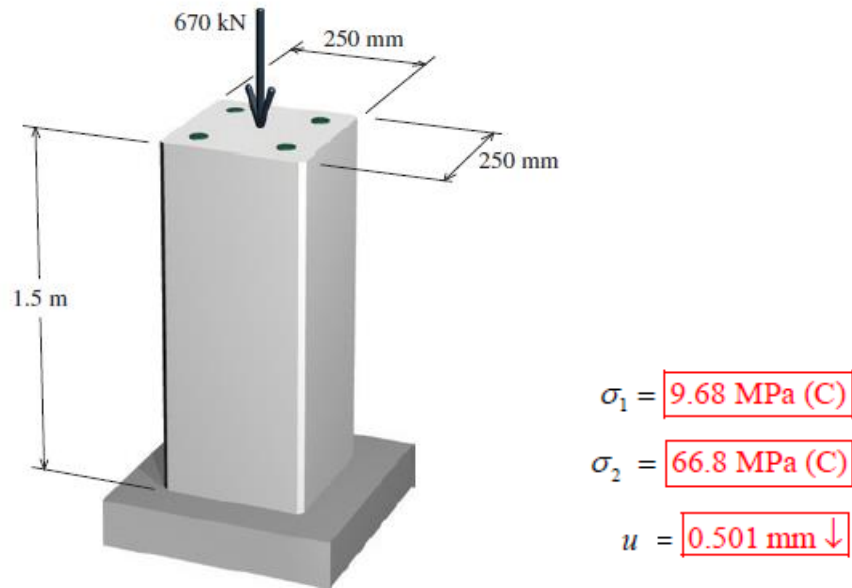
Figura 36.2. Resultados ejercicio 5.27.

■ Tracción   ■ Compresión

Como se muestra en la figura 3.2 los resultados son validados cuantitativamente con los valores y cualitativamente con los estados de los esfuerzos planteados en el libro de referencia, por lo que se puede validar el programa para el problema indeterminado lineal en serie.

### 3.2 Resultados caso indeterminado lineal en paralelo

Se muestra en la figura 3.3 un problema de varios elementos en paralelo, estos pueden ser reducidos a solo dos ya que las áreas son conocidas y se puede aplicar el programa para evaluar las respuestas. El ejercicio 5.28 solicita determinar los esfuerzos y la deformación en el sistema.



**Figura 37.3.** Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.28 del libro (Philpot, 2012).

a. Parámetros de ingreso al programa.

$$L_1 = 1.5 \text{ m}$$

$$F = 670 \text{ kN}$$

$$D_1 = 19 \quad ; \quad A_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 19^2}{4} = 1134.115 \text{ mm}^2$$

$$A_1 = 250 \cdot 250 - 1134.115 = 61365.885 \text{ mm}^2$$

$$E_2 = 200 \text{ GPa} \quad \text{Acero} \quad ; \quad E_1 = 29 \text{ GPa} \quad \text{Concreto}$$

b. Resultados requeridos por el ejercicio.

$$\sigma_1 = 9.68 \text{ MPa Compresión} \quad ; \quad \sigma_2 = 66.8 \text{ MPa Compresión} \quad ; \quad u_B = \delta = 0.501 \text{ mm}$$

En la figura 3.4 se muestra los resultados obtenidos por el programa, se validará los esfuerzos y la deformación que se muestra como incógnita.

c. Resultados obtenidos en el programa.

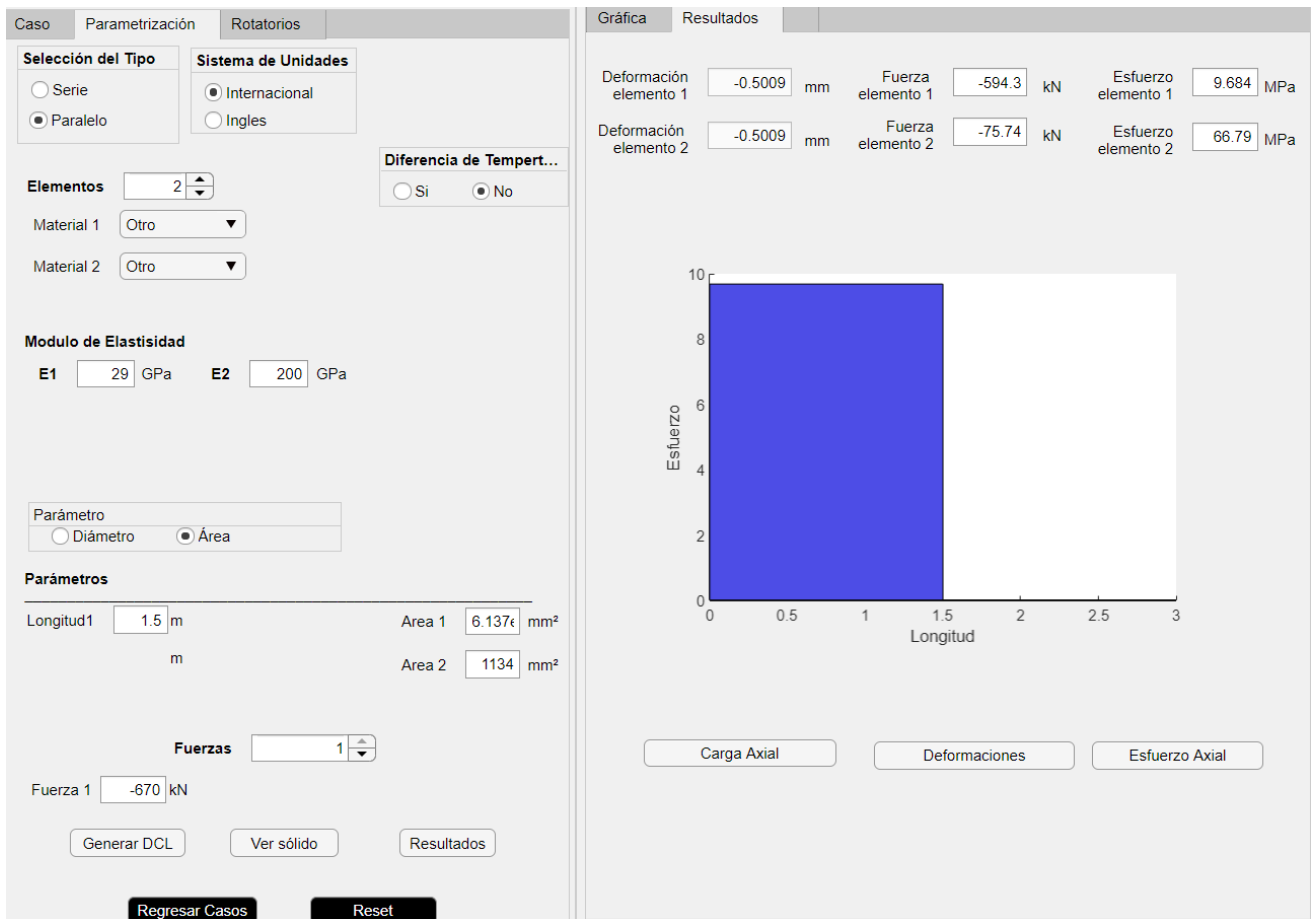


Figura 38.4. Resultados ejercicio 5.28.

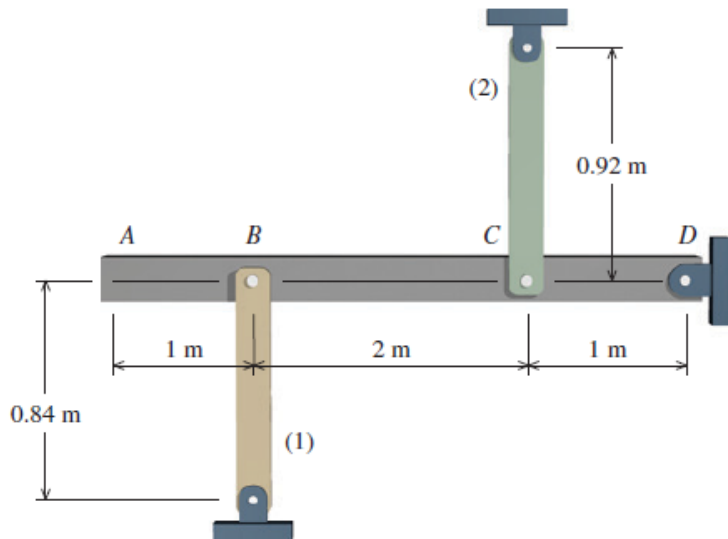
### ■ Compresión

Como se muestra en la figura 3.2 los resultados son validados cuantitativamente con los valores y cualitativamente con los estados de los esfuerzos planteados en el libro de referencia, por lo que se puede validar el programa para el problema indeterminado lineal en paralelo.

## 3.3 Resultados caso indeterminado rotatorio problema 1 y 3

Se muestra en la figura 3.5 un problema que no tiene fuerzas externas, sino es un caso de dilatación térmica ya que existe un gradiente de temperatura. El ejercicio 5.65 solicita determinar los esfuerzos en cada elemento y la deformación en uno de sus extremos.

En la figura se muestra un problema opuesto al desarrollado, lo que se visualizará es el mismo problema acoplado al modelo programado, los parámetros se mantienen y es fácilmente comparable.



5.65 (a)  $\sigma_1 = 35.0 \text{ MPa (C)}$ ,  
 $\sigma_2 = 70.0 \text{ MPa (C)}$   
 (b)  $v_A = 0.365 \text{ mm } \uparrow$

Figura 39.5 Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.65 del libro (Philpot, 2012).

a. Parámetros de ingreso al programa.

$$L_1 = 0.92 \text{ m} \quad ; \quad L_2 = 0.84 \text{ m}$$

$$L_3 = 1 \text{ m} \quad ; \quad L_4 = 2 \text{ m} \quad ; \quad L_5 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta T = 40^\circ\text{C}$$

$$A_1 = 600 \text{ mm}^2 \quad ; \quad A_2 = 400 \text{ mm}^2$$

$$E_1 = 70 \text{ GPa} \quad ; \quad E_2 = 100 \text{ GPa}$$

$$\alpha_1 = 22.5 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} \quad ; \quad \alpha_2 = 16.9 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

b. Resultados requeridos por el ejercicio.

$$\sigma_1 = 35 \text{ MPa Compresión} \quad ; \quad \sigma_2 = 70 \text{ MPa Compresión}$$

$$\text{Deformación en el extremo} \quad v_A = \delta = 0.501 \text{ mm}$$

c. Resultados obtenidos en el programa.

Como se muestra en la figura 3.6, los resultados arrojados por el programa validan este problema y las ecuaciones modeladas, cabe resaltar que ambos miembros se encuentran a compresión ya que uno ejerce una fuerza de dilatación sobre el otro, sin embargo, el elemento 2 se expande una mayor cantidad y la deformación se inclina a su favor. Se verifica la deformación en el extremo, comparando los triángulos de deformación.

$$\frac{m}{v_A} = \frac{3 \text{ m}}{0.274 \text{ mm}} \quad ; \quad v_A = 0.3653 \text{ mm}$$

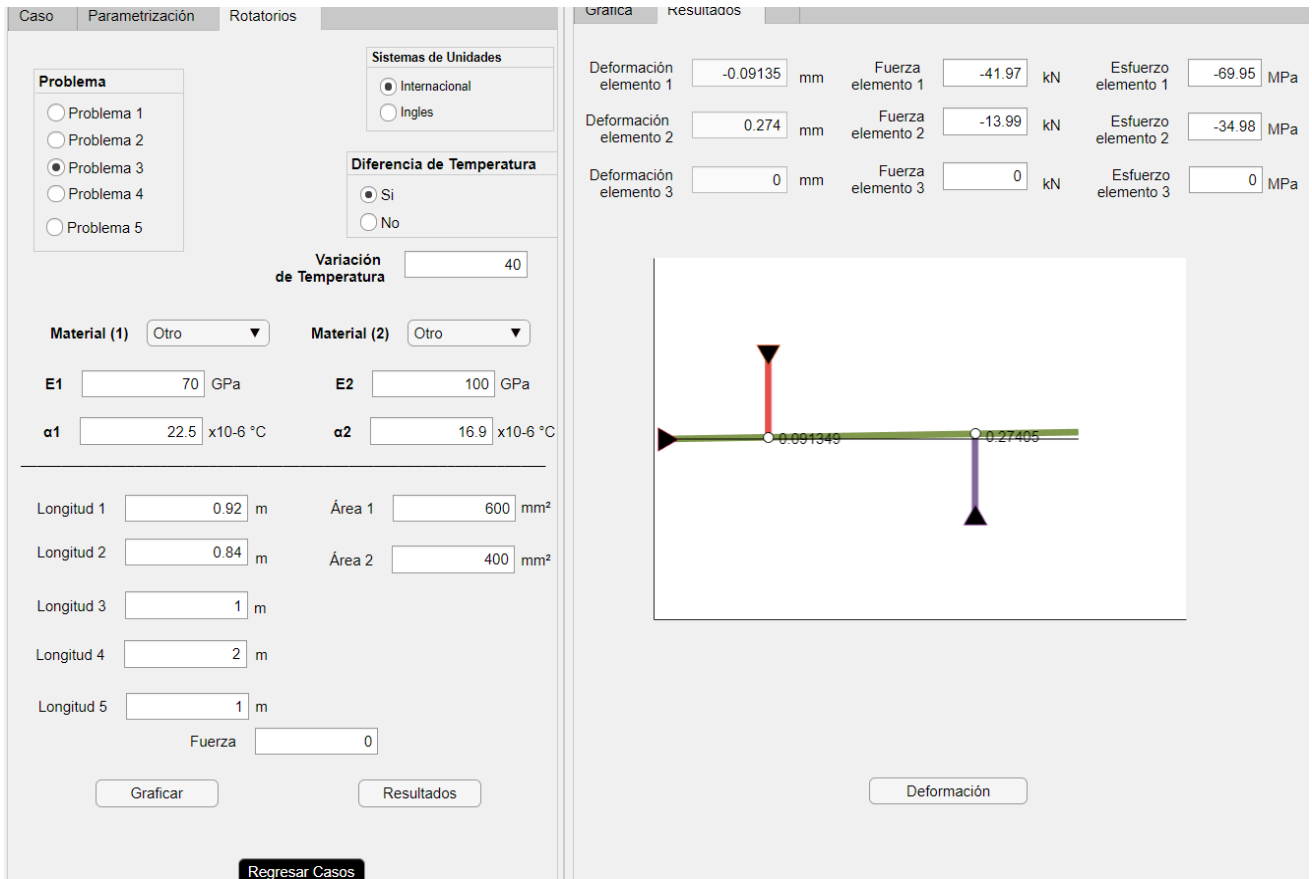
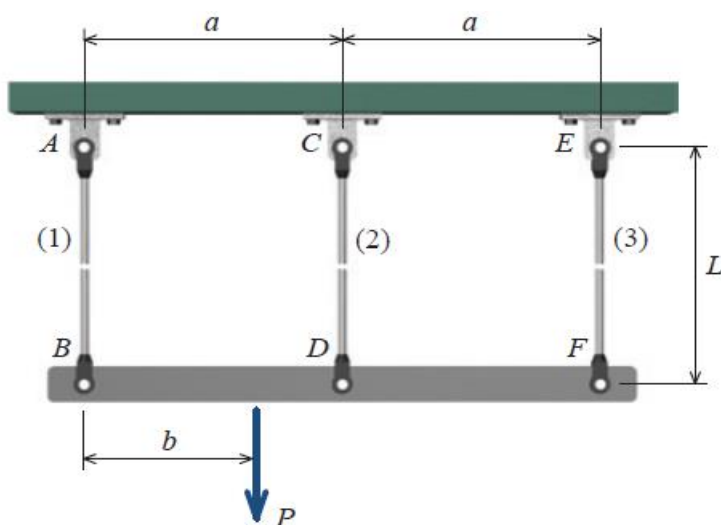


Figura 40.6. Resultados ejercicio 5.65.

### 3.4 Resultados caso indeterminado rotatorio problema 2

Se muestra en la figura 3.7 un problema que tiene 3 elementos de iguales parámetros, pero la fuerza externa se encuentra desplazada a un extremo. El ejercicio 5.39 solicita determinar las cargas en cada elemento y la deformación en el punto B.



5.39 (a)  $F_1 = 40.0$  kN,  
 $F_2 = 25.0$  kN,  
 $F_3 = 10.00$  kN  
 (b)  $v_B = 3.40$  mm  $\downarrow$

Figura 41.7. Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.39 del libro (Philpot, 2012).

a. Parámetros de ingreso al programa.

$$L_1 = L_2 = L_3 = 3 \text{ m}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 200 \text{ GPa}$$

$$L_3 = L_4 = 2.5 \text{ m}$$

$$L_5 = 1.5 \text{ m}$$

$$F = 75 \text{ kN}$$

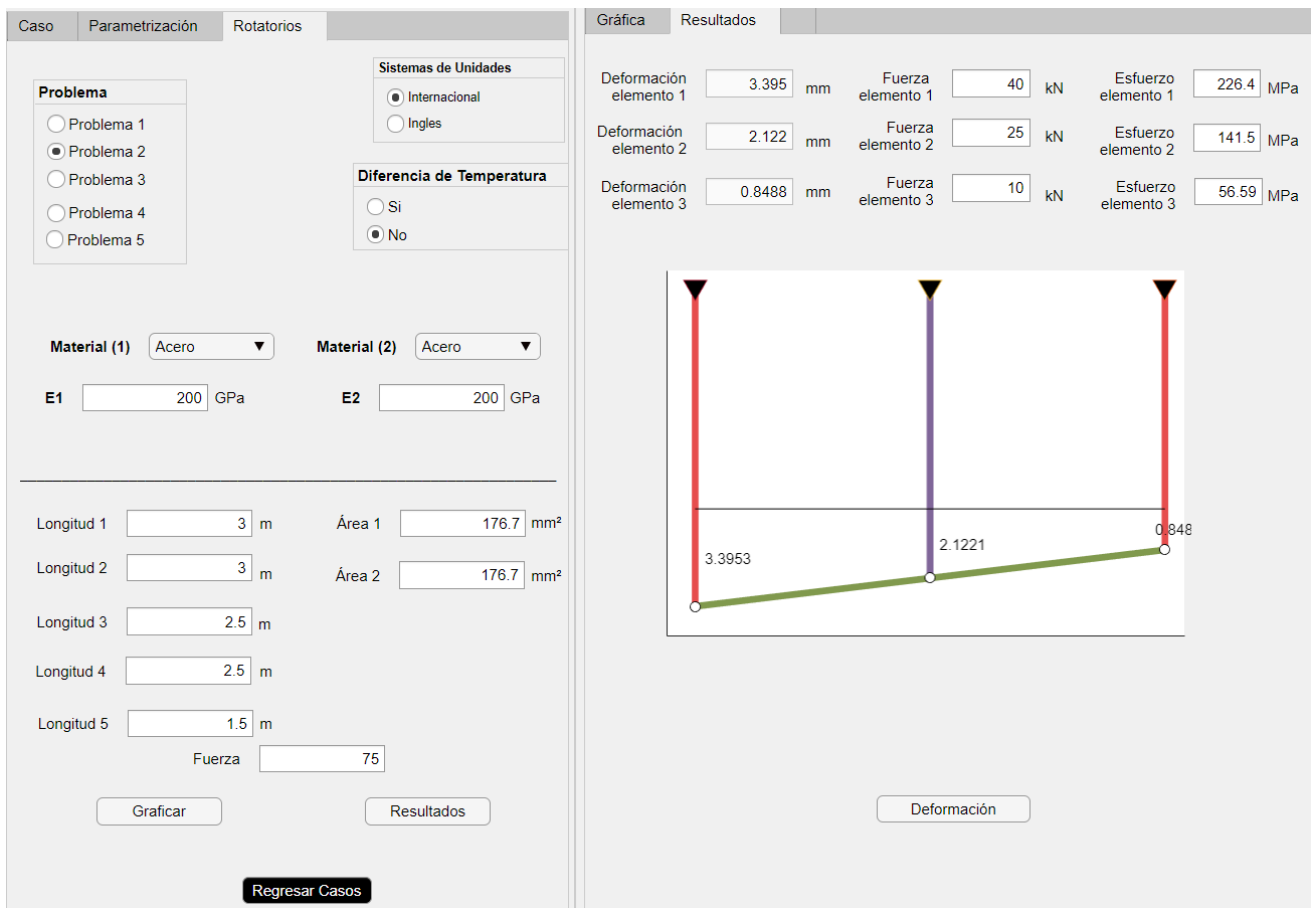
$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{\pi \cdot 15^2}{4} = 176.715 \text{ mm}^2$$

b. Resultados requeridos por el ejercicio.

$$F_1 = 40 \text{ kN} \quad ; \quad F_2 = 25 \text{ kN} \quad ; \quad F_3 = 10 \text{ kN}$$

$$\delta_1 = v_B = 3.4 \text{ mm}$$

c. Resultados obtenidos en el programa



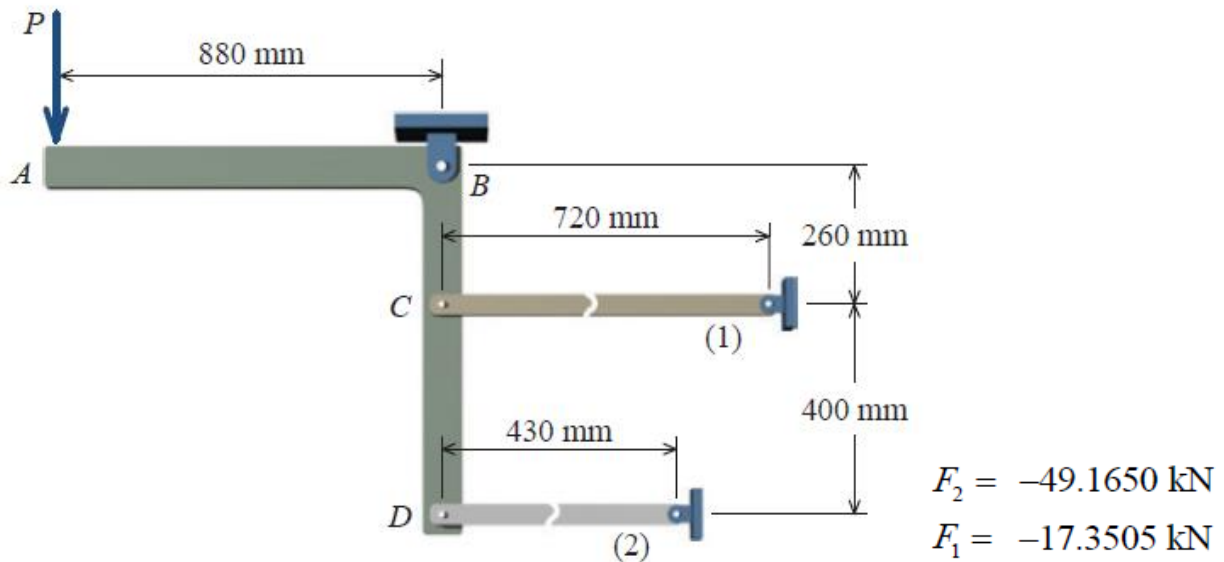
**Figura 42.8.** Resultados ejercicio 5.39.

Como se muestra en la figura 3.8, los resultados arrojados por el programa validan este problema y las ecuaciones modeladas, el uso de decimales puede generar una respuesta de mayor precisión, por lo que el programa depende de estos parámetros de ingreso.



### 3.5 Resultados caso indeterminado rotatorio problema 4

Se muestra en la figura 3.9 un problema que es similar al planteado en el capítulo de modelado, este se puede rotar hasta lograr el mismo tipo de problema. El ejercicio 5.38 solicita determinar las fuerzas internas de cada elemento.



**Figura 43.9.** Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.38 del libro (Philpot, 2012).

a. Parámetros de ingreso al programa.

$$L_1 = 0.43 \text{ m} \quad ; \quad L_2 = 0.72 \text{ m}$$

$$L_3 = 0.4 \text{ m} \quad ; \quad L_4 = 0.26 \text{ m} \quad L_5 = 0.88 \text{ m}$$

$$E_1 = 105 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 70 \text{ GPa}$$

$$A_1 = A_2 = 375 \text{ mm}^2$$

b. Resultados requeridos por el ejercicio.

$$F_1 = -49.1 \text{ kN} \quad ; \quad F_2 = -17.35 \text{ kN}$$

c. Resultados obtenidos en el programa.

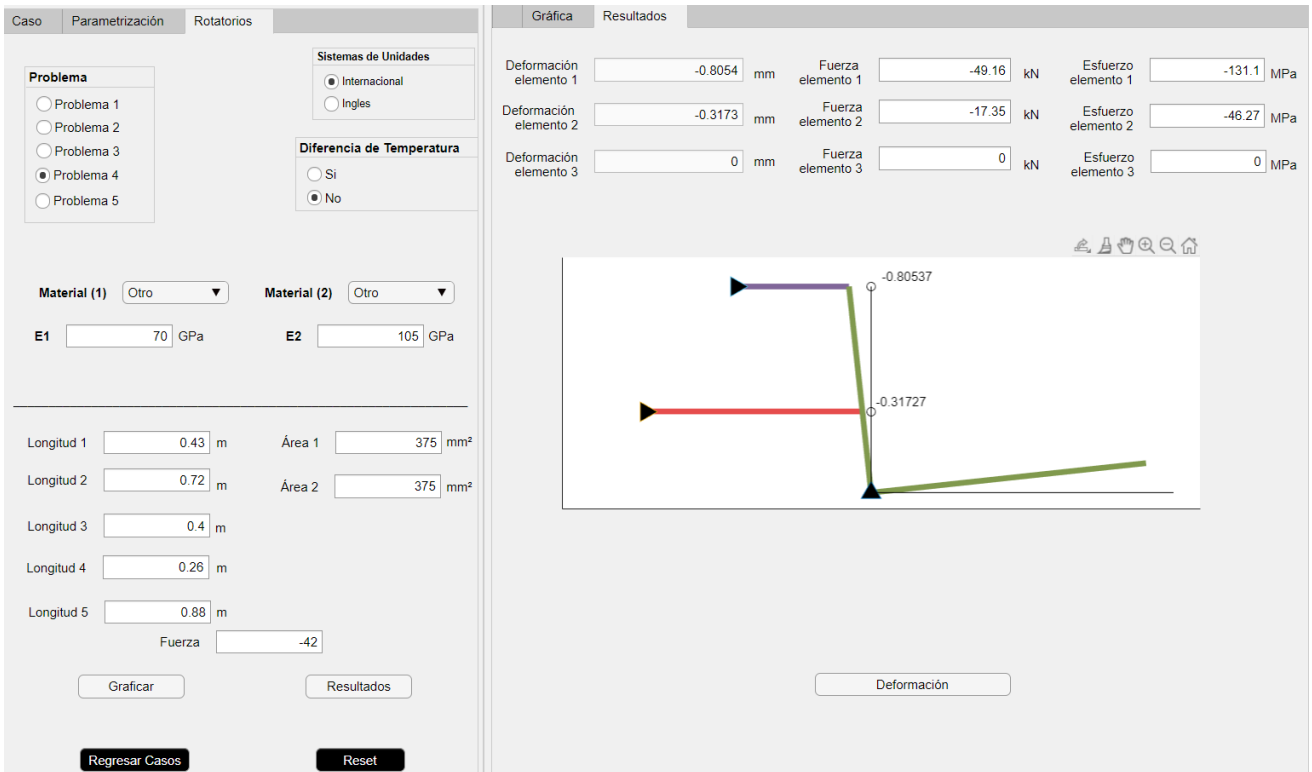


Figura 44.10. Resultados ejercicio 5.39.

Como se muestra en la figura 3.10, los resultados del programa validan este problema y las ecuaciones modeladas, las propiedades del material varían según el ejercicio por lo que es recomendable ingresar manualmente el valor de módulo de elasticidad.

### 3.6 Resultados caso indeterminado rotatorio problema 5

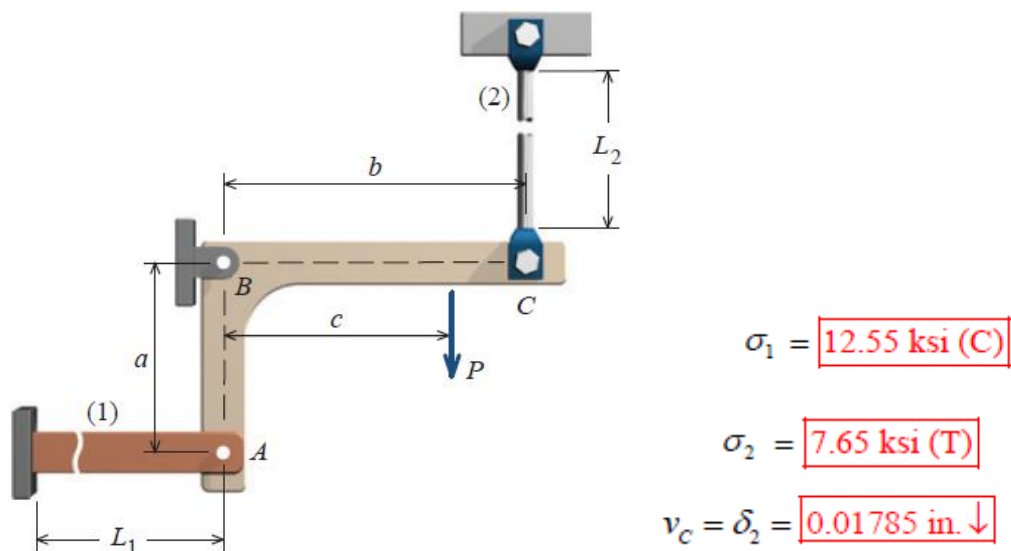


Figura 45.11. Planteamiento y respuestas del ejercicio 5.42 del libro (Philpot, 2012).

Se muestra en la figura 3.11 un ejercicio similar al planteado en modelado numérico es necesario tomar en consideración que las variables a, b, c, etc., No corresponden a las ecuaciones de modelado. Es por ello por lo que estos valores se los reemplazará por las longitudes de cada elemento y las uniones. El ejercicio 5.42 solicita determinar los esfuerzos internos de cada elemento y la deformación del punto C.

a. Parámetros de ingreso al programa.

$$L_1 = 24 \text{ in} \quad ; \quad L_2 = 70 \text{ in}$$

$$L_3 = 32 \text{ in} \quad ; \quad L_4 = 18 \text{ in} \quad L_5 = 20 \text{ in}$$

$$E_1 = E_2 = 30000 \text{ ksi}$$

$$F = 7 \text{ kips}$$

$$A_1 = 0.5 \text{ in}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 0.375^2}{4} = 0.11044 \text{ mm}^2$$

b. Resultados requeridos por el ejercicio.

$$\sigma_1 = 12.55 \text{ MPa Compresión} \quad ; \quad \sigma_2 = 7.65 \text{ MPa Tracción} \quad ; \quad \delta_2 = 0.01785$$

c. Resultados obtenidos en el programa.

Los resultados visualizados en el programa permiten validar la resolución de las ecuaciones, la consideración adicional es el considerar la deformación únicamente en el sentido de giro del elemento rígido, ya que es necesario mantener el ángulo de giro y evidenciar la relación de las deformaciones.

Un cuadro de ejes iguales permite mantener la relación de la deformación, adicional se escala las deformaciones para que sean visibles, de lo contrario serían imperceptibles y en todo caso despreciables, la figura 3.12 muestra los resultados del programa.

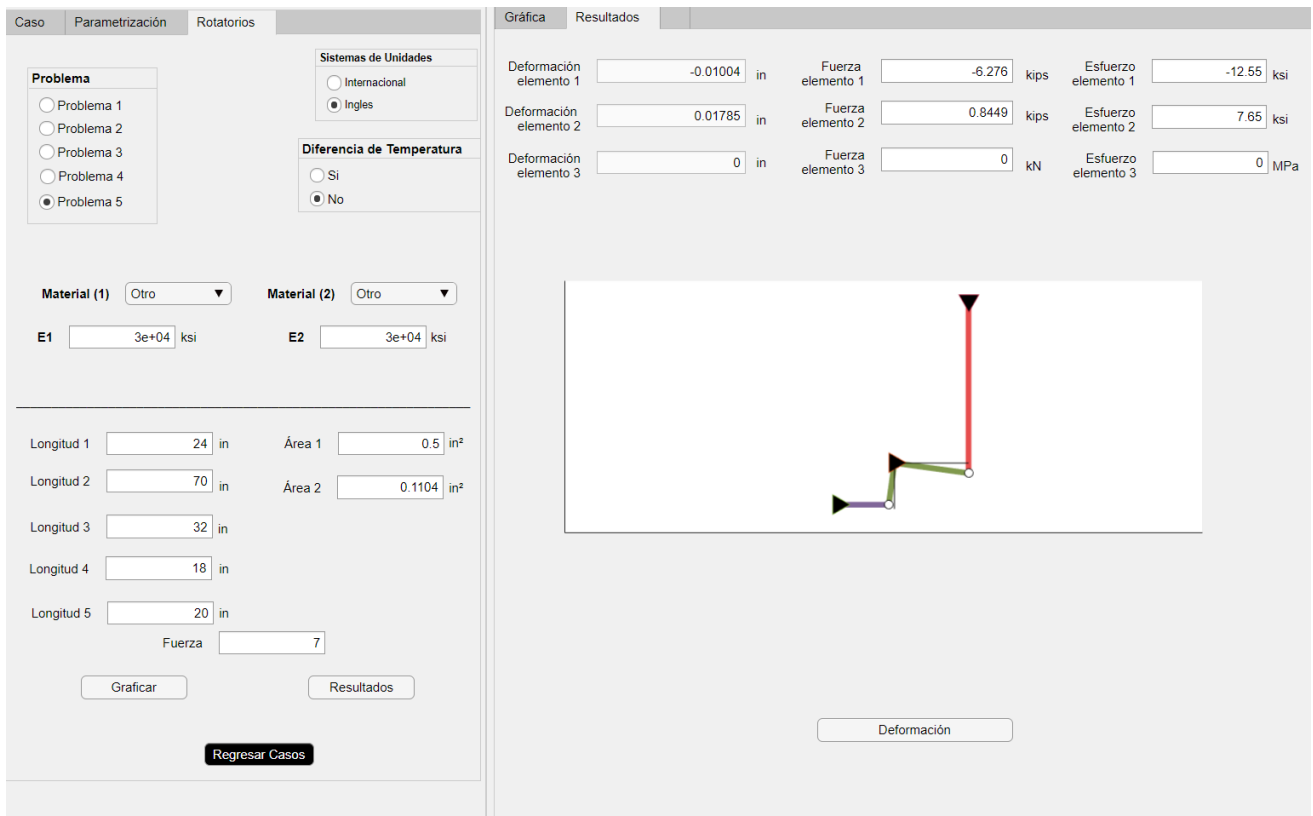


Figura 46.12. Resultados ejercicio 5.39.

### 3.7 Resultados de la encuesta

A continuación, se presentan los resultados sobre la experiencia de los estudiantes al utilizar la aplicación en su primera versión y posteriormente su versión final, misma que considera sus recomendaciones; para ello se parte identificando los datos demográficos de la muestra.

#### 3.7.1 Datos demográficos

Los dos cuestionarios se aplicaron a 37 estudiantes de pregrado de la EPN en el período 2021-B mismos que pertenecen a la carrera de Ingeniería Mecánica y se encontraban cursando la materia de mecánica de materiales perteneciente.

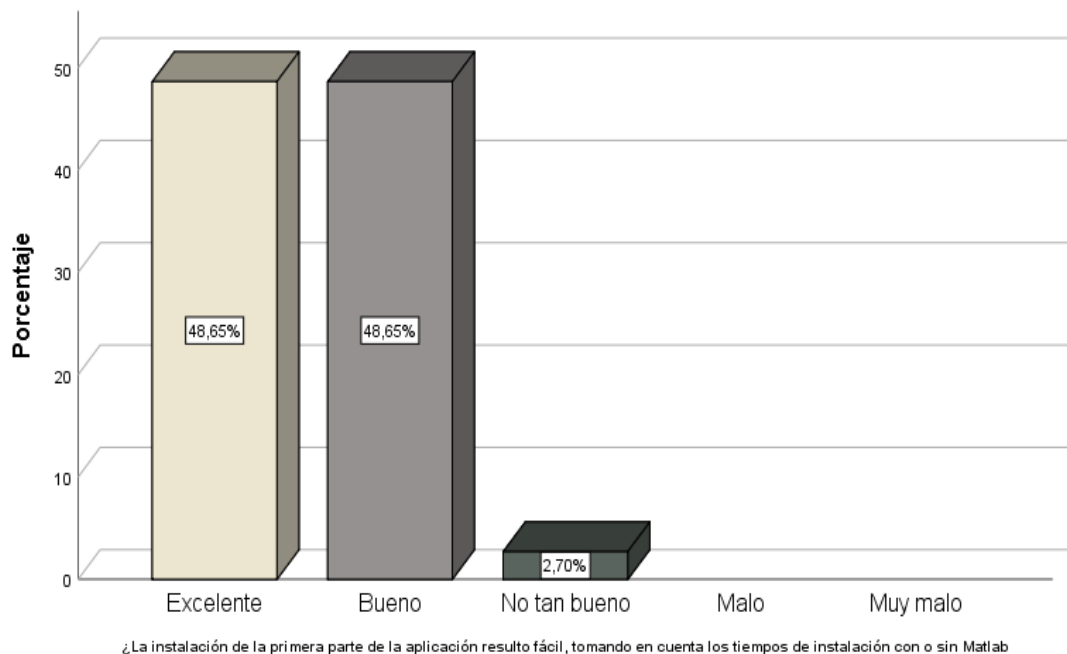
#### 3.7.2 Primer cuestionario

El primer cuestionario indaga sobre la experiencia de los estudiantes al utilizar la aplicación en su primera versión, trata de encontrar posibles recomendaciones para la interfaz y también detectar problemas en la ejecución de la aplicación, para ello se despliegan cuatro preguntas, las cuales fueron valoradas por los estudiantes en una escala de Likert de 5 puntos, que va desde “Muy malo” hasta “Excelente”.

**1. ¿La instalación de la primera parte de la aplicación resulto fácil, tomando en cuenta los tiempos de instalación con o sin Matlab?**

La primera pregunta del cuestionario indaga sobre la facilidad de instalación de la aplicación con o sin Matlab considerando el tiempo que tomó completar la instalación. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.13 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la primera pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 48,65% de los estudiantes encuestados consideran que la instalación fue “Excelente” es decir no presentó ningún tipo de dificultad, así también el 48,65% considera que la instalación fue “Bueno” y el 2,70% que fue “No tan bueno”, para las opciones de respuesta “Malo” y “Muy Malo” se obtuvo un 0%.



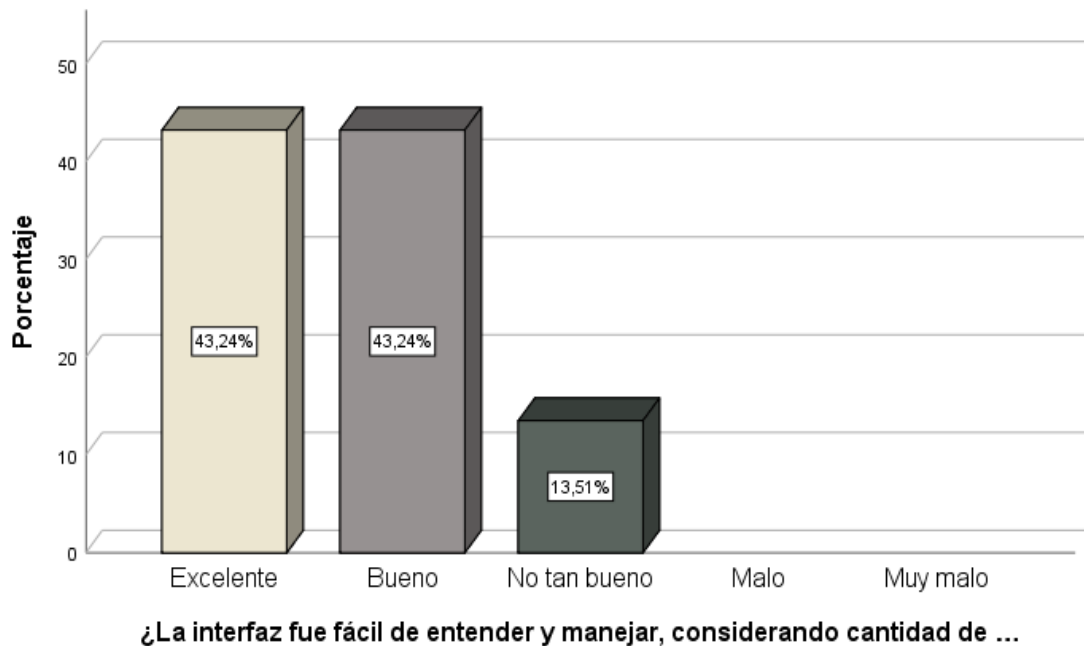
**Figura 47.13.** Pregunta 1 – Instalación.

**2. ¿La interfaz fue fácil de entender y manejar, considerando cantidad de elementos, gráficos y la secuencia de activación de estos en función de la selección de un caso (primera parte)?**

La segunda pregunta del cuestionario indaga sobre la interfaz de la aplicación considerando la cantidad de elementos que posee, gráficos y la secuencia de activación de estos. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.13 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la segunda pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 43,24% de los estudiantes encuestados consideran que la interfaz fue “Excelente” es decir que fue fácil de entender

y manejar, así también el 43,24% considera que la interfaz fue “Bueno” y el 13,51% que fue “No tan bueno”, para las opciones de respuesta “Malo” y “Muy Malo” se obtuvo un 0%.

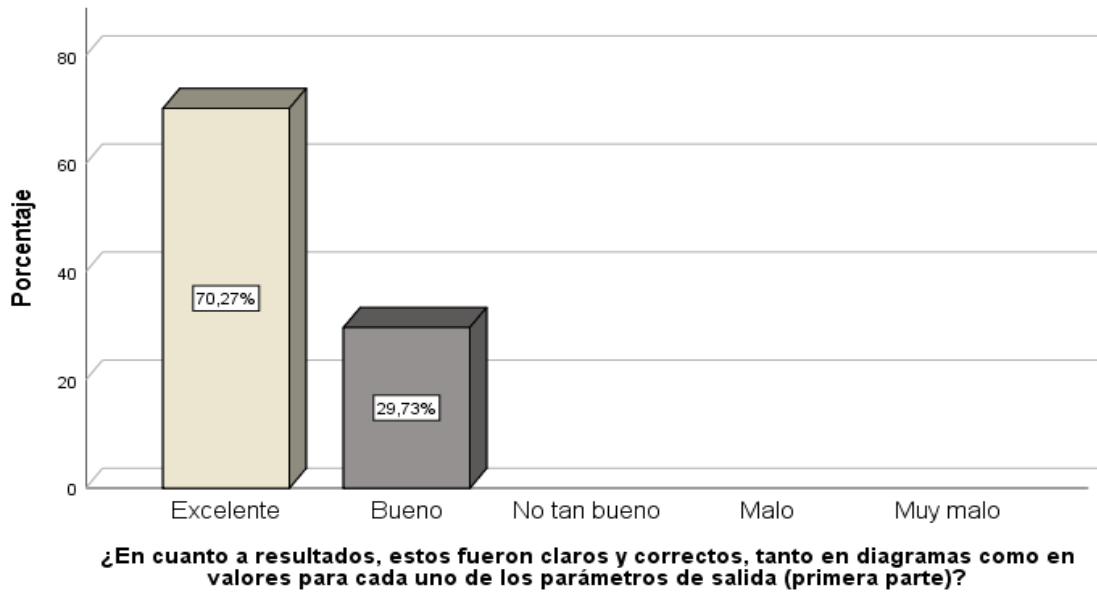


**Figura 48.13.** Pregunta 2 – Interfaz.

**3. ¿En cuanto a resultados, estos fueron claros y correctos, tanto en diagramas como en valores para cada uno de los parámetros de salida (primera parte)?**

La tercera pregunta del cuestionario indaga sobre los resultados que arroja la aplicación considerando si estos se presentan de manera clara y correcta, tanto en diagramas como valores. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.14 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la tercera pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 70,27% de los estudiantes encuestados consideran que los resultados fueron “Excelente” es decir que se presentaron de manera clara y correcta, así también el 29,73% considera que los resultados fueron “Bueno” y el 0% que fueron “No tan bueno”, “Malo” y “Muy Malo”.

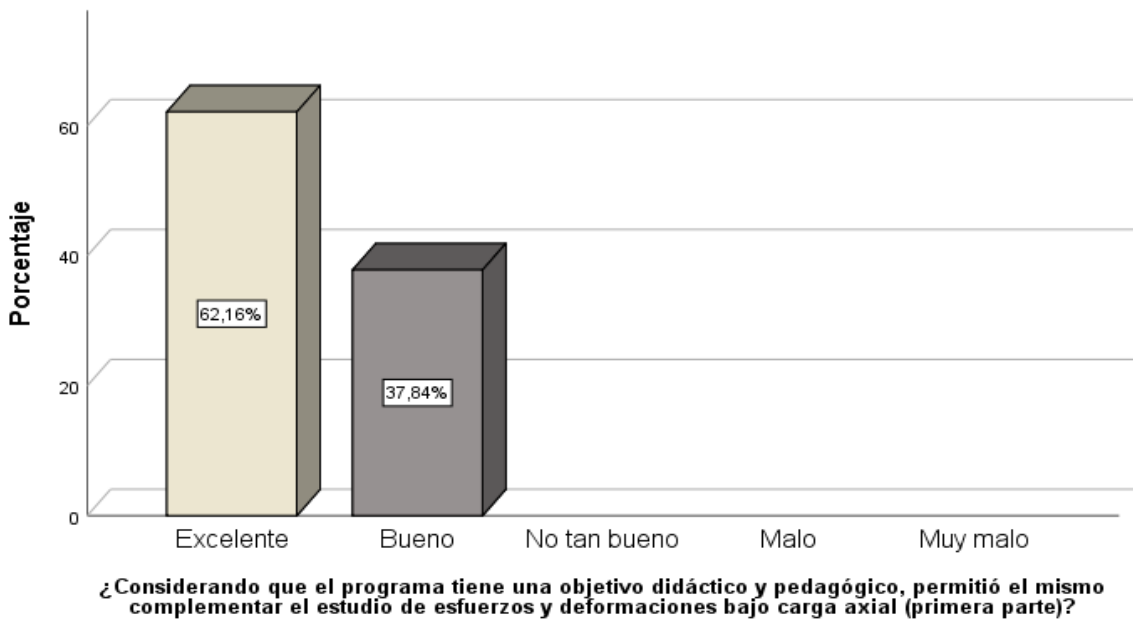


**Figura 49.14.** Pregunta 3 – Resultados.

**4. ¿Considerando que el programa tiene una objetivo didáctico y pedagógico, permitió el mismo complementar el estudio de esfuerzos y deformaciones bajo carga axial (primera parte)?**

La cuarta pregunta del cuestionario indaga sobre si el programa cumplió con el objetivo didáctico y pedagógico al presentarse como un complemento del estudio de esfuerzos y deformaciones bajo carga axial. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.15 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la cuarta pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 62,16% de los estudiantes encuestados consideran que el programa como complemento de estudio fue “Excelente” es decir que cumple su objetivo didáctico y pedagógico, así también el 37,84% considera que el programa como complemento de estudio fue “Bueno” y el 0% que fue “No tan bueno”, “Malo” y “Muy Malo”.



**Figura 50.15.** Pregunta 4 – Conocimiento.

## 5. Sección de comentarios

La última sección del cuestionario se destinó como una sección de comentarios, misma que permitió indagar sobre los aspectos subjetivos de los estudiantes en cuanto a su experiencia en la utilización del programa, en este espacio compartieron libremente la existencia de algún error, mejora o idea sobre el programa

A continuación, en la Figura 3.16 se presenta el resultado de colocar los comentarios de los estudiantes en una nube de palabras, misma que tiene como objetivo identificar las palabras más representativas de los comentarios, es decir aquellas que tienen una mayor frecuencia de repetición y que permiten determinar en qué aspectos se enfocan los comentarios de los estudiantes encuestados.





- Generar una guía de instalación
- Opción para visualizar el software por casos
- Generar paneles más coloridos

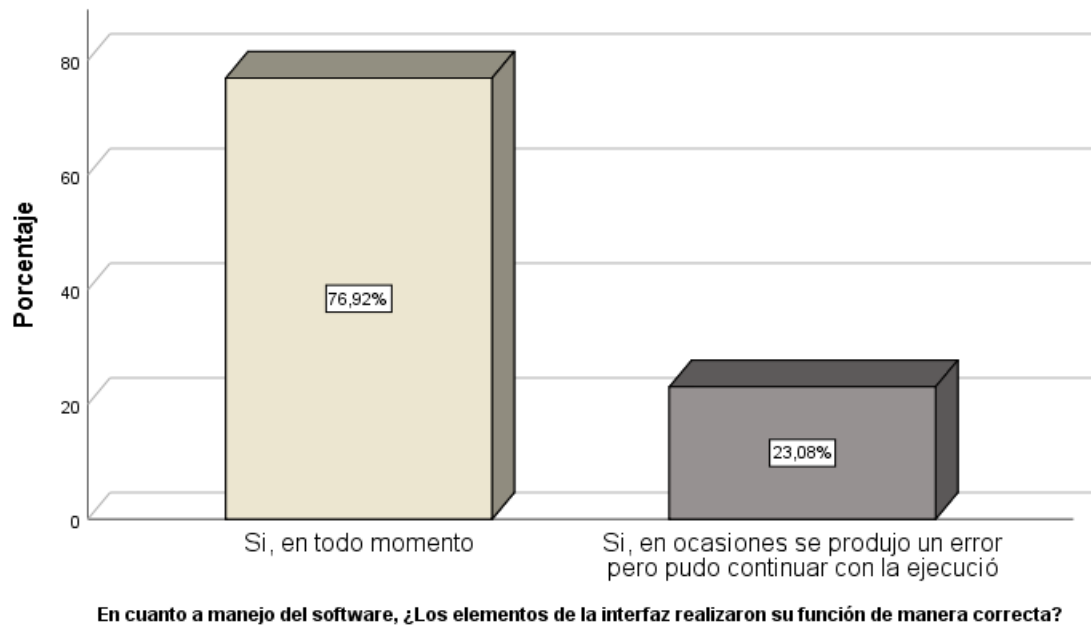
### **3.7.3 Segundo Cuestionario**

El segundo cuestionario indaga sobre la experiencia de los estudiantes al utilizar el programa en su segunda versión, misma que se mejoró considerando los aspectos de mejora descritos en el primer cuestionario. De igual forma trata de detectar posibles errores de programación o de resultados, para ello se despliegan siete preguntas, las cuales fueron valoradas por los estudiantes en una escala de Likert de 4 puntos.

#### **1. En cuanto a manejo del software, ¿Los elementos de la interfaz realizaron su función de manera correcta?**

La primera pregunta del segundo cuestionario indaga sobre el manejo del software, específicamente sobre el funcionamiento de los elementos de la interfaz. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.17 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la primera pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 76,92% de los estudiantes encuestados consideran que los elementos de la interfaz funcionaron correctamente “Si, en todo momento” es decir no presentó ningún tipo de dificultad, así también el 23,08% consideran que “Si, en ocasiones se produjo un error, pero pudo continuar con la ejecución”, para las demás opciones de respuesta se obtuvo 0%.

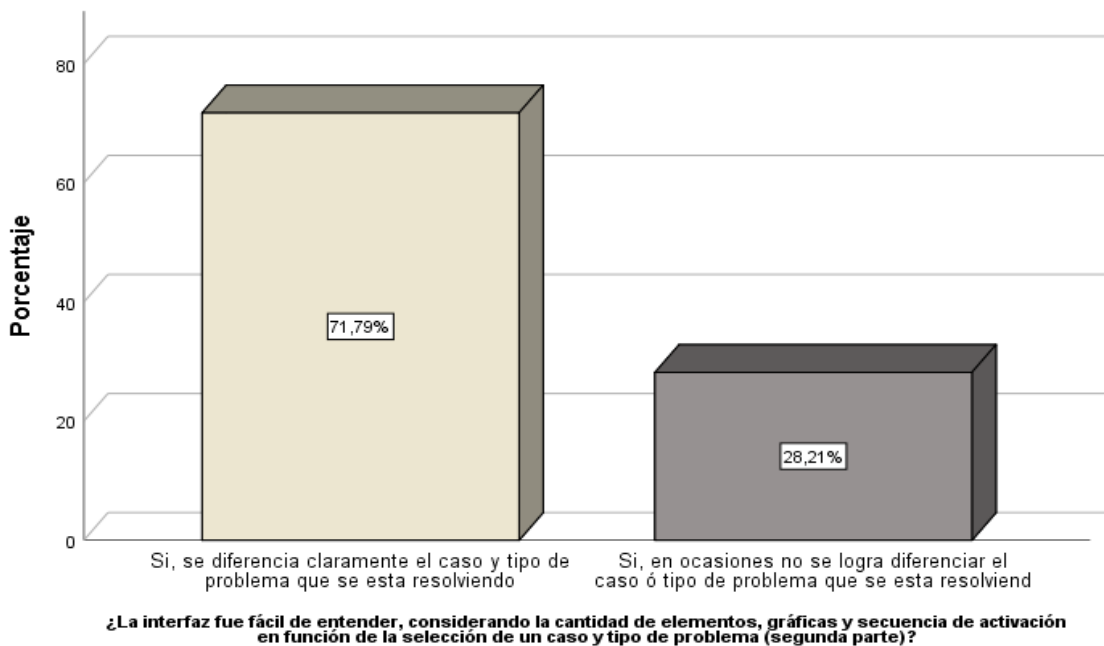


**Figura 52.17.** Pregunta 1 – Manejo Software.

**2. ¿La interfaz fue fácil de entender, considerando la cantidad de elementos, gráficas y secuencia de activación en función de la selección de un caso y tipo de problema (segunda parte)?**

La segunda pregunta del segundo cuestionario indaga sobre la facilidad de entender la interfaz considerando los elementos, gráficos y secuencia de activación de estos. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.18 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la segunda pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 71,79% de los estudiantes encuestados consideran que en la interfaz “Si, se diferencia claramente el caso y tipo de problema que se está resolviendo” es decir que es de fácil entendimiento, así también el 23,08% consideran que “Si, en ocasiones no se logra diferenciar el caso o tipo de problema que se está resolviendo”, para las demás opciones de respuesta se obtuvo 0%.

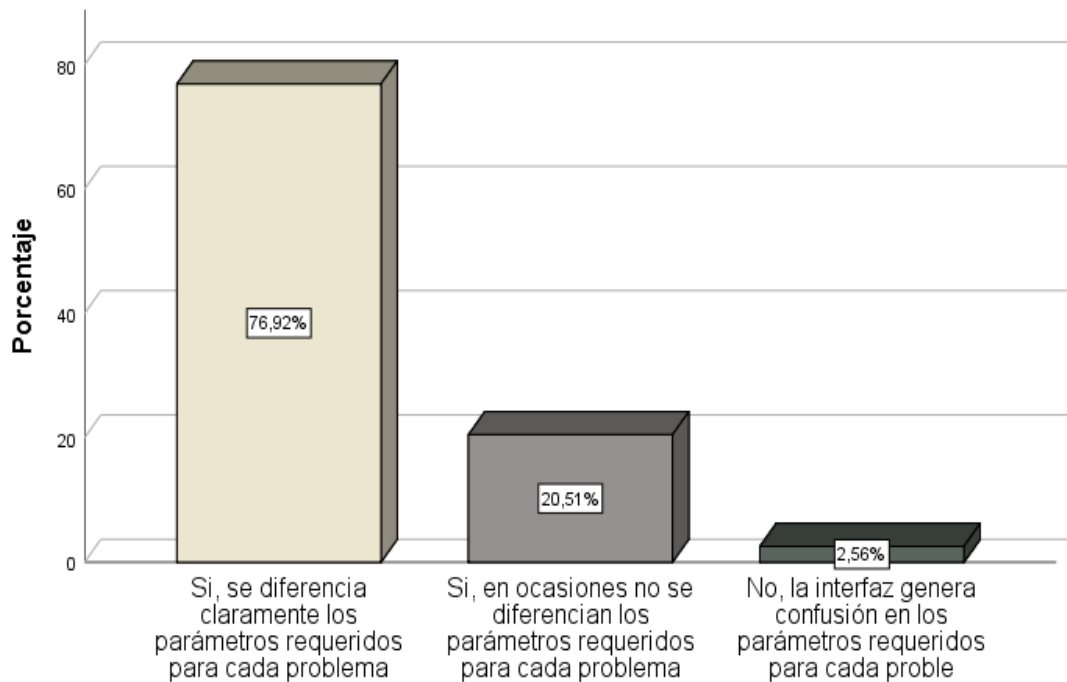


**Figura 53.18.** Pregunta 2 – Interfaz-2.

**3. ¿La interfaz fue fácil de manejar, considerando la cantidad de elementos y secuencia de activación en la resolución de un problema (segunda parte)?**

La tercera pregunta del segundo cuestionario indaga sobre la facilidad de manejar la interfaz considerando la cantidad de elementos y secuencia de activación al resolver un problema. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.19 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la tercera pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 76,92% de los estudiantes encuestados consideran que en la interfaz “Si, se diferencia claramente los parámetros requeridos para cada problema” es decir que es la interfaz fue fácil de manejar, así también el 20,51% consideran que “Si, en ocasiones no se diferencian los parámetros requeridos para cada problema”, de igual forma el 2,56% considera que “No, la interfaz genera confusión en los parámetros requeridos por cada problema”, para la última opción de respuesta se obtuvo 0%.

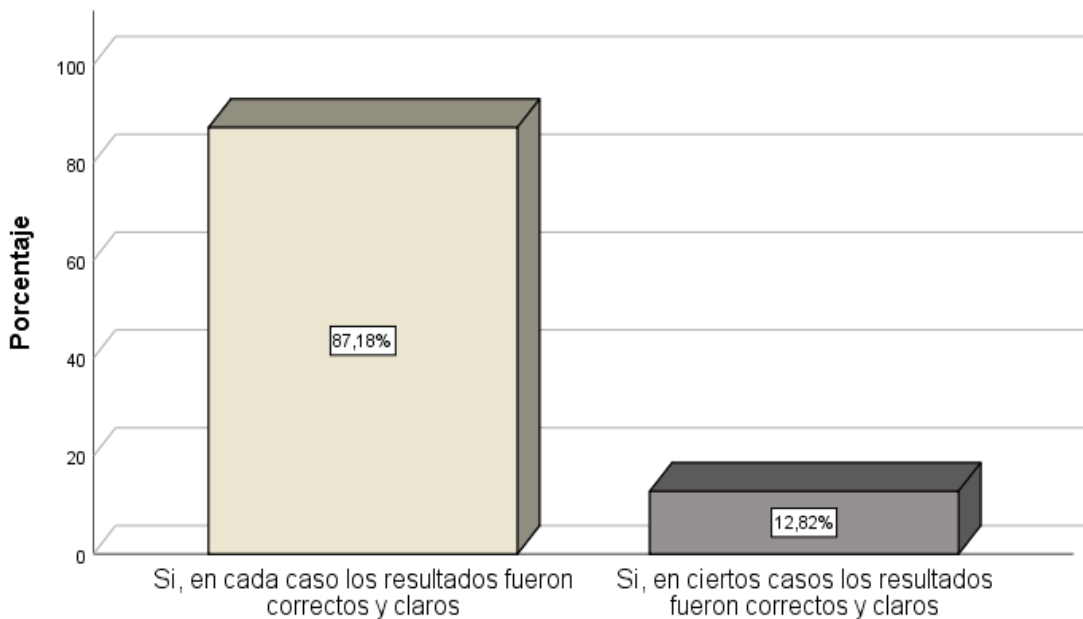


**Figura 54.19.** Pregunta 3 – Manejo-2.

**4. ¿En cuanto a resultados, estos fueron claros y correctos, tanto en diagramas como en valores para cada uno de los parámetros de salida?**

La cuarta pregunta del segundo cuestionario indaga sobre si los resultados que arroja el programa fueron claros y correctos tanto en diagramas como en valores. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.20 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la cuarta pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 87,18% de los estudiantes encuestados consideran con respecto a los resultados que “Si, en cada caso los resultados fueron correctos y claros” es decir que no se presentaron errores, así también el 12,82% considera que “Si, en ciertos casos los resultados fueron correctos y claros”, para las otras opciones de respuesta se obtuvo 0%.

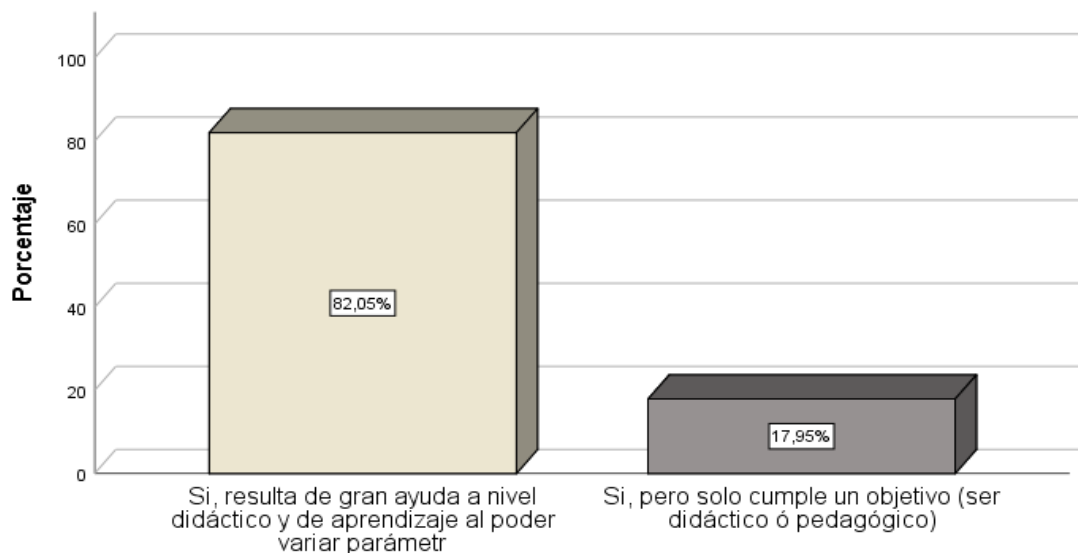


**Figura 55.20.** Pregunta 4 – Resultados-2.

**5. En función de las expectativas, considerando que el programa tiene un objetivo didáctico y pedagógico, ¿Permitió el mismo complementar el estudio de esfuerzos y deformaciones bajo carga axial?**

La quinta pregunta del segundo cuestionario indaga sobre si los estudiantes consideran que el programa representa un complemento de estudio de esfuerzos y deformaciones bajo carga axial. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.21 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la quinta pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 82,05% de los estudiantes encuestados consideran con respecto al programa que “Si, resulta de gran ayuda a nivel didáctico y de aprendizaje al poder variar parámetros” es decir que cumple con su objetivo de ser didáctico y pedagógico, así también el 17,95% considera que “Si, pero solo cumple un objetivo (ser didáctico o pedagógico)”, para las otras opciones de respuesta se obtuvo 0%.

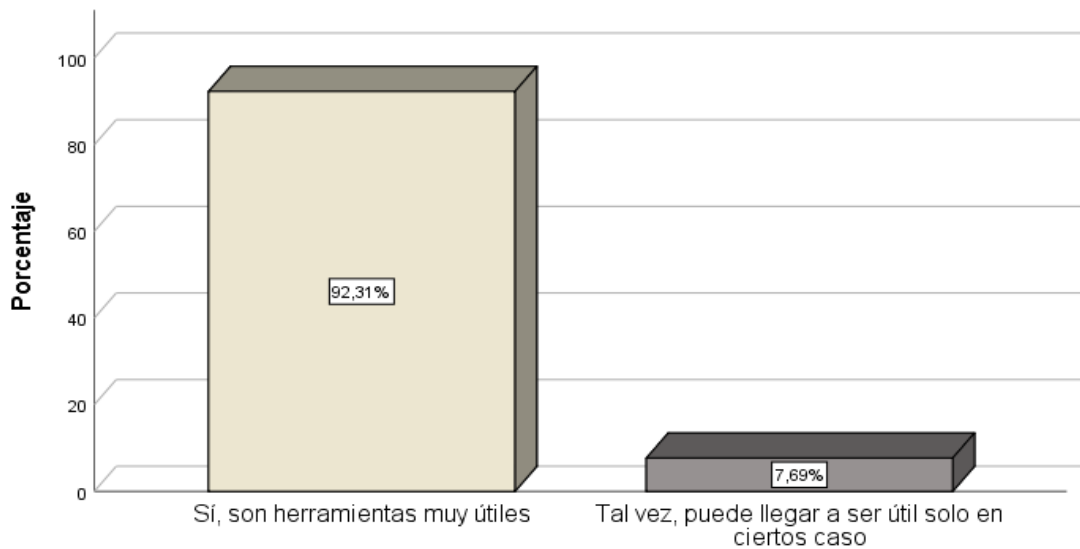


**Figura 56.21.** Pregunta 5 – Expectativas.

**6. ¿Le parece importante integrar el uso de estos softwares (por ejemplo, durante la pandemia) como herramientas pedagógicas de profesores/alumnos?**

La sexta pregunta del segundo cuestionario indaga la percepción de los estudiantes acerca del uso de softwares como herramientas pedagógicas. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 3.22 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la sexta pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 92,31% de los estudiantes encuestados consideran con respecto a los softwares que “Sí, son herramientas muy útiles” es decir que, si los consideran como una herramienta pedagógica importante, así también el 7,69% considera que “Tal vez, puede llegar a ser útil solo en ciertos casos”, para las otras opciones de respuesta se obtuvo 0%.



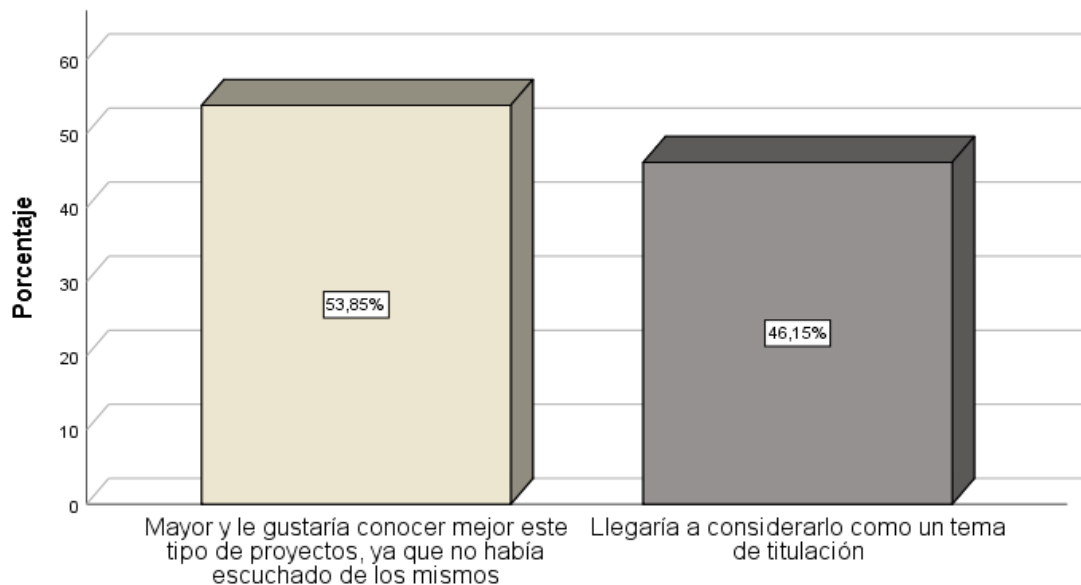
**Figura 57.22.** Pregunta 6 – Importancia.

**7. Una vez probado el software. Considera que su interés por la creación de softwares didácticos y totalmente desde cero (puede ser como tema de tesis) fue.**

La séptima pregunta del segundo cuestionario indaga el interés de los estudiantes acerca de la creación de softwares didácticos y totalmente desde cero. A continuación, se presentan los resultados obtenidos del análisis.

La Figura 4.23 representa el porcentaje de respuesta en cada una de las categorías de la escala de Likert para la séptima pregunta. Los resultados que se evidenciaron fueron que el 53,85% de los estudiantes encuestados consideran que su interés por la creación de softwares es “Mayor y le gustaría conocer mejor este tipo de proyectos, ya que no había escuchado de los mismos”, así también el 46,15% considera que “Llegaría a considerarlo como un tema de titulación”, para las otras opciones de respuesta se obtuvo 0%.





**Figura 58.23.** Pregunta 7 – Interés.

## 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 4.1 Conclusiones

El desafío que vivió el mundo ante los eventos por la pandemia de COVID-19 han llevado a la sociedad a crear aplicaciones para solventar varios requerimientos, entre ellos la educación, donde se ha implementado programas educativos virtuales y las expectativas ante dichos eventos de los estudiantes fueron altamente desconocidas. En este contexto las encuestas demostraron que el 92% de estudiantes está de acuerdo con el uso de aplicaciones pedagógicas para mejorar la enseñanza en modalidad virtual

Al finalizar las pruebas de funcionamiento se pudo validar los resultados con los recopilados en bibliografía, estos a su vez, validan los modelos matemáticos que han sido presentados de una manera simplificada para la creación de un código optimizado, el cual no presenta errores de programación o lentitud excesiva durante su funcionamiento. En este contexto, la encuesta contuvo diversos puntos de vista análisis tales como, resultados, interfaz gráfica, contenido y accesibilidad, con cifras favorables para la validación y aceptación del proyecto, es por ello, que se da por cumplidos los objetivos de este proyecto de integración curricular.

La aplicación se ha enfocado principalmente en los estudiantes de la FIM-EPN que estén tomando clases de mecánica de los materiales, por lo cual se considera que los estudiantes estarán familiarizados y poseen conocimientos básicos de elementos cargados axialmente. Los principales encargados de difundir el uso de estas aplicaciones serán los docentes, que mostrarán a sus estudiantes el alcance de la aplicación que ofrece ayuda en la resolución de ejercicios modelos, lo

que permite al estudiante utilizar esta herramienta como un sistema de comprobación de cálculos o ayuda didáctica en su aprendizaje.

Los problemas estudiados son casos que se presentan a diario cuando un estudiante culmina sus estudios e ingresa a la industria de la mecánica, el conocer de manera didáctica como será el comportamiento de varios sistemas permite en campo tener una mayor destreza para asimilar los casos estudiados, tales ejemplos como el de una columna armada por dos elementos de materiales diferentes, en las que se logra dimensionar o conocer su comportamiento de manera sencilla son fundamentales para los futuros profesionales.

El crear un ambiente de desarrollo de aplicaciones permitirá a los estudiantes tener fácil acceso a nuevas herramientas de estudio, de una manera que sirvan para reforzar los conocimientos de clase e incrementar su deseo por entender los fenómenos físicos que se producen en la mecánica de material y generar sus propios códigos de programación con el fin de resolver problemas a manera de aprendizaje.

En cuanto al valor pedagógico final de la aplicación se tiene que el programa cumple con su finalidad de mejorar el estudio virtual, en la que presento una pregunta referente al estudio remoto, de la cual el 92% de los encuestados consideran esta herramienta como parte fundamental para la enseñanza, demostrando que el ambiente educativo de la sociedad está en constante desarrollo tecnológico.

## **4.2 Recomendaciones**

Ante los eventos de pandemia por COVID-19, que en evidencia la utilidad de las tecnologías informáticas para garantizar una educación continua. Por ello es necesario en las instituciones generar y planificar programas de educación virtual, de manera que se aseguren que los estudiantes tengan las herramientas necesarias para mejorar su aprendizaje, en las que se engloban las aplicaciones pedagógicas.

El generar encuestas para evaluar las aplicaciones y su alcance, permite al programador o estudiante corregir y mejorar una aplicación, volviéndose una herramienta en la que la mayoría de los usuarios podrán entender el funcionamiento, mejorando su aprendizaje.

Se recomienda difundir este tipo de proyectos, de tal manera que logra abarcar un mayor contenido de materias, en las que los estudiantes sean los encargados de generar versiones accesibles para sus compañeros, de forma que estos sirvan para evaluar y llevar a un resultado de aceptación.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Beer, F. P. (2012). *Mechanics of Materials* (6th edition). McGraw Hill Higher Education.

Beltrán Reyna, R. F. (2015). *Resistencia de Materiales; Teoría y Calculos prácticos*.

Hibbeler, R. (2010). *INGENIERIA MECANICA - ESTATICA*.

Oller, S. H., & Nallim, L. G. (2020). *Estática y resistencia de materiales*.

Philpot, T. A. (2012). *Mechanics of Materials, Binder Ready Version: An Integrated Learning System*.