

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIÓN DE AGUJEROS DE GUSANO CARGADOS ASINTÓTICAMENTE FRIEDMAN-LAMAITRE-ROBERTSON- WALKER (FLRW) Y ESTUDIO DE LOS HORIZONTES APARENTES

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
FÍSICA**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ADALÍ ISBETH VENEGAS MOLINA

adali.venegas@epn.edu.ec

DIRECTOR: OSCAR ANDRÉS LASSO ANDINO, PhD

oscar.lasso@udla.edu.ec

CODIRECTOR: CHRISTIAN LEONARDO VÁSCONEZ VEGA, PhD

christian.vasconez@epn.edu.ec

Quito, Junio 2023

Declaración de Autoría

Yo ADALÍ ISBETH VENEGAS MOLINA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

Firma:



Adalí Isbeth Venegas Molina

Certificación

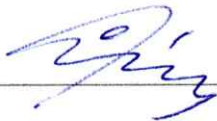
Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por ADALÍ ISBETH VENEGAS MOLINA, bajo nuestra supervisión.

Firma:



Oscar Andrés Lasso Andino, Ph.D.
Director del Proyecto

Firma:



Christian Leonardo Vásquez Vega, Ph.D.
Codirector del Proyecto

Agradecimientos

A mi familia y amigos, quienes me han apoyado incondicionalmente durante el transcurso de mi carrera. A mi tutor Dr. Oscar Lasso, por su orientación y acompañamiento en el desarrollo del presente trabajo. Y al Dr. Nicolás Vásquez por su apoyo y seguimiento.

Índice general

Declaración de Autoría	I
Agradecimientos	III
Índice general	IV
Índice de Figuras	VI
Notación y convenciones	VII
Resumen	VIII
Abstract	IX
1. Tópicos de Relatividad General	1
1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein	2
1.2. Soluciones de Schwarzschild	4
1.3. Modelo Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)	6
1.3.1. Principio Cosmológico	7
1.3.2. Métrica FLRW	8
2. Agujeros de Gusano	12
2.1. Agujeros de gusano Lorentzianos	14
2.1.1. Agujeros de gusano atravesables	14
2.2. Métrica de Morris-Thorne	15
2.3. Condiciones de Energía	19
2.4. Agujeros de gusano cargados	20
2.4.1. Agujero de gusano con campo escalar	21
2.4.2. Agujero de gusano con carga eléctrica	22
2.5. Agujeros de gusano estacionarios y dinámicos	23
2.6. Agujeros de gusano giratorios	24
2.7. Agujeros de gusano asintóticamente Anti-De Sitter	25
3. Agujeros de Gusano asintóticamente FLRW	29

3.1. Agujero de gusano dependiente del tiempo	30
3.2. División del universo en parte cosmológica y del agujero de gusano	32
3.3. Formalismo de McVittie para agujeros de gusano	35
4. Universo FLRW con un agujero de gusano cargado	42
4.1. Agujero de gusano cargado	43
4.2. Agujero de gusano isotrópico	43
4.3. Solución de agujero de gusano embebido en el universo FLRW	44
4.3.1. Solución homogénea	46
4.3.2. Solución particular	47
4.4. Horizontes aparentes	54
4.4.1. Solución 1	54
4.4.2. Solución 2	55
5. Conclusiones	58
Bibliografía	62

Índice de figuras

2.1. Dibujo esquemático de Wheeler de un agujero de gusano - Representación esquemática de líneas de fuerza en un espacio doblemente conectado. Dibujo tomado de la referencia [1]	. . .	13
4.1. La curva azul muestra la solución numérica de β para el agujero de gusano con carga, y la curva amarilla muestra la solución analítica de β en el caso sin carga.	. . .	47
4.2. La curva azul muestra la solución numérica de β para el agujero de gusano con carga, y la curva amarilla muestra la solución analítica de β en el caso sin carga. Gráfica para ρ de 0 a 1.	. . .	48
4.3. En la curva azul se muestra la función exponencial de β para el caso del agujero de gusano con carga y en la curva amarilla se muestra la función exponencial de β para el caso no cargado. Gráfica en escala logarítmica.	. . .	48
4.4. En la curva azul se muestra la función exponencial de β para el caso del agujero de gusano con carga y en la curva amarilla se muestra la función exponencial de β para el caso no cargado. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 1.	. . .	49
4.5. En la curva roja se muestra la solución numérica encontrada para el agujero de gusano con carga mientras que en la curva azul se muestra la función encontrada al realizar el ajuste de datos. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 2000.	. . .	50
4.6. Los puntos rojos muestran la solución numérica encontrada para el agujero de gusano con carga mientras que en la curva azul se muestra la función encontrada al realizar el ajuste de datos. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 0.6.	. . .	50
4.7. En la curva roja se muestra la solución numérica encontrada para el agujero de gusano con carga mientras que en la curva azul se muestra la función encontrada al realizar el ajuste de datos. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 2000.	. . .	51
4.8. En esta gráfica se muestra la diferencia de las funciones f_2 y f_1 , en escala logarítmica, para ρ de 0 a 10.	. . .	52
4.9. En esta gráfica se muestra la diferencia de las funciones f_2 y f_1 , en escala logarítmica, para ρ de 0 a 2000.	. . .	52
4.10. En esta gráfica se muestra relación entre de las funciones f_2 y f_1 , es decir f_2/f_1 en escala logarítmica.	. . .	53
4.11. En esta gráfica se muestra relación entre de las funciones f_2 y f_1 , es decir f_2/f_1 en escala logarítmica.	. . .	53

Notación y convenciones

- En todo el trabajo utilizaremos unidades naturales, es decir $c = G = 1$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G la constante de gravitación universal de Newton.
- Los índices espacio-temporales se representan por letras griegas:
 $\mu, \nu, \gamma, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Los índices espaciales se representan por letras latinas:
 $a, b, c, \dots \in \{1, 2, 3, 4\}$, a menos que se diga lo contrario.
- Usamos la signatura mayormente positiva $(-, +, \dots, +)$, a menos que se especifique lo contrario.
- La contracción para el tensor de Ricci es $R_{\beta\mu} = R_{\alpha\beta}{}^{\alpha}{}_{\mu}$ y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ corresponde a la curvatura escalar.
- Se usa $\Delta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.
- ∇_{μ} es la conexión de Levi-Civita.

Resumen

Una de las propiedades más extrañas de los agujeros de gusano es la necesidad de materia exótica. Esta materia exótica es necesaria para el sostenimiento del agujero, sin embargo este tipo de materia viola ciertas condiciones de energía clásicas. Por esta razón se han intentado construir modelos de agujeros de gusano que no requieran de materia exótica, así como también modelos de agujeros de gusano cosmológicos con las mismas propiedades referentes a la materia exótica. En 1933 McVittie derivó una solución de un agujero negro embebido en el espacio Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Esto dio paso al descubrimiento de agujeros negros embebidos en soluciones cosmológicas de las ecuaciones de Einstein, como por ejemplo la solución de un agujero negro cargado en un universo en expansión. Asimismo, el estudio de agujeros de gusano ha producido el mismo tipo de soluciones embebidas. Basándonos en el método desarrollado por McVittie para agujeros negros, se construyó un modelo para el agujero de gusano de Morris-Thorne (MT) embebido en el espacio FLRW. Esto resulta ser interesante, ya que si se considera la totalidad de la materia en este tipo de soluciones, existe la posibilidad de conservar algunas de las condiciones clásicas de energía.

En este trabajo de titulación seguiremos el formalismo de McVittie para construir un modelo de agujero de gusano cargado embebido en el universo FLRW. De esta forma generalizamos el modelo encontrado antes para el agujero de gusano MT sin carga. Se considera que la materia alrededor del agujero de gusano tiene una distribución esféricamente simétrica y que la materia total consta de dos partes: la materia que constituye solamente al agujero de gusano y la materia que se distribuye por el universo.

Restringiendo el problema al de un observador ultra-estático, encontramos la forma isotrópica del agujero de gusano cargado de MT, y calculamos sus ecuaciones de campo. Utilizando las consideraciones arriba mencionadas, dividimos el tensor energía-momento en la parte cosmológica y en la parte del agujero de gusano. Además, buscamos que en las cercanías del agujero de gusano la métrica obtenida se reduzca a la métrica cargada de MT y en el infinito espacial a la métrica FLRW. Como resultado, encontramos una ecuación diferencial para las componentes espaciales de la métrica cargada y se obtuvo un resultado numérico que nos ha permitido encontrar una solución aproximada, la cual se reduce al caso de la métrica sin carga y tiene las propiedades asintóticas deseadas. Es importante notar que no se logró resolver analíticamente la ecuación diferencial que nos permite encontrar cierta parte de la métrica, sin embargo los resultados encontrados nos permiten estudiar ciertas propiedades físicas importantes.

Abstract

One of the most strange properties of wormholes is the existence of exotic matter. This type of matter violates some classical energy conditions. For this reason, attempts have been made to construct wormhole models that do not require exotic matter, as well as cosmological wormhole models with the same properties of avoidance of exotic matter. In 1933 McVittie derived a solution of a black hole embedded in Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) space. This led to the discovery of embedded black holes in cosmological solutions of Einstein's equations, such as the solution of a charged black hole in an expanding universe. Likewise, the study of wormholes has produced the same type of embedded solutions. Thus, based on the method developed by McVittie for black holes, we construct a model for the Morris-Thorne wormhole with charge embedded in FLRW space. This turns out to be interesting, if the totality of matter is considered in this type of solutions, there is the possibility of conserving some of the classical energy conditions.

In this undergraduate thesis we will follow the McVittie formalism to construct a model of a charged wormhole embedded in the FLRW universe. In this way we generalize the model found earlier for the uncharged MT wormhole. The matter around the wormhole is considered to have a spherically symmetric distribution and the total matter consists of two parts: the matter that constitutes only the wormhole and the matter that is distributed throughout the universe.

We find the isotropic form of the charged MT wormhole, and calculate its field equations. Using the above considerations, we split the energy-momentum tensor into the cosmological part and the wormhole part. We restrict the problem to a problem for an ultra-static observer. We sought that in the vicinity of the wormhole the obtained metric reduces to the charged MT metric and at spatial infinity to the FLRW metric. As a result, we found a differential equation for the spatial components of the charged metric and a numerical result was obtained. One of the functions that defines the metric has to be guessed from the numerical results. However, we were able to give a metric that reduces to the uncharged case when the charge goes to zero. Moreover, the proposed metric has the asymptotic properties needed. This results will let us to extract some physics and discuss interesting applications.

Capítulo 1

Tópicos de Relatividad General

Durante más de 200 años la ley de Newton de la gravitación universal había sido aceptada como una descripción válida de la fuerza gravitacional entre dos masas. Esta ley ayudó en la descripción del movimiento de varios cuerpos, desde el vuelo de una bala de cañón, hasta el movimiento de los planetas. Este modelo tenía una propiedad muy atractiva: todos los observadores, independientemente del sistema de referencia en el que se encuentren, son equivalentes, es decir las leyes de la física tienen la misma forma.

Durante el siglo XIX se produjeron notables avances en la comprensión de los fenómenos de la electricidad, el magnetismo y la luz. En 1865 James Clerk Maxwell publicó un conjunto de ecuaciones que combinan todos estos fenómenos en uno solo llamado electromagnetismo [2]. Sin embargo, estas ecuaciones presentaban una peculiaridad: su forma cambiaba al pasar de un sistema de referencia a otro. Toda la belleza de la invarianza y la irrelevancia de los observadores, pertenecientes a la física newtoniana, habían desaparecido. En 1895, el físico holandés Hendrik Lorentz descubrió las transformaciones de Lorentz, las cuales fueron incorporadas posteriormente por Albert Einstein en su teoría de la relatividad especial. Estas transformaciones permitían preservar la estructura de las ecuaciones de Maxwell al pasar de un sistema de referencia a otro [3].

Esto hizo que Einstein se preguntara si la transformación que conservaba la estructura de las ecuaciones de Maxwell era simplemente un truco matemático o si había algo fundamental en ella. Se preguntó si el tiempo y el espacio son absolutos o si el principio de invarianza de las leyes de la física debería ser primordial. En 1905, Einstein postuló el principio de la relatividad: todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes, el movimiento del observador (con velocidad constante) es irrelevante y las leyes de la física deberían tener la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales [4]. La combinación de este principio con el electromagnetismo sugiere que la transformación de un sistema de referencia inercial a otro debe tener la estructura de la transformación de Lorentz, lo que significa que el tiempo y el espacio ya no son absolutos y cambian sus propiedades al cambiar de un sistema de referencia inercial a otro.

En 1907, Einstein se dio cuenta de que su teoría no estaba completa. El principio de la relatividad que postuló solo era aplicable a los observadores que se movían con velocidad constante y tampoco encajaba con la descripción newtoniana de la gravedad. Einstein, como oficial de patentes, no tenía acceso a equipos de laboratorio por lo que tuvo que dedicarse a realizar experimentos mentales. Estos experimentos mentales le permitieron convencerse que la fuerza de gravedad no es diferente a una aceleración. Así que, el estar parado en la Tierra se siente igual que estar parado en un cohete que se mueve con una aceleración constante. También demostró que el observador acelerado observaría que las propiedades geométricas fundamentales cambian. Por ejemplo, que el número π ya no podría definirse como una relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. De modo que no solo el tiempo y el espacio perdieron su significado absoluto, sino que también la geometría en sí misma no era absoluta.

Todo este razonamiento convenció a Einstein de que la geometría del espacio-tiempo y los procesos físicos que tienen lugar en él, están relacionados entre sí. También concluyó que lo que percibimos como gravedad es solo una consecuencia del movimiento a través del espacio-tiempo. Cuanto mayor es la curvatura del espacio-tiempo, más fuerte es la gravedad. Einstein tardó ocho años en encontrar la relación entre la geometría del espacio-tiempo y la física. Las ecuaciones que presentó en 1915 no solo llevaron a una interpretación completamente diferente de los eventos que nos rodean, sino que también proporcionaron una explicación para algunos fenómenos desconcertantes.

La primera evidencia que apoyó la Relatividad General (RG) fue la precesión anómala del planeta Mercurio. Posteriormente, en 1919 Arthur Stanley Eddington confirmó la predicción de Einstein de la desviación de la luz por el Sol durante el eclipse solar total del 29 de mayo de 1919. Esto ayudó a cimentar el estado de la Relatividad General como una teoría viable [5]. Desde entonces, muchas observaciones han mostrado concordancia con las predicciones de la Relatividad General. Estos incluyen estudios de púlsares binarios, observaciones de señales de radio que pasan por un extremo del Sol e incluso el sistema de posicionamiento global [6][7]. La teoría también predice ondas gravitacionales, que son ondulaciones en la curvatura del espacio-tiempo que se propagan como ondas. La primera observación de ondas gravitacionales, que provino de la fusión de dos agujeros negros, fue realizada el 14 de septiembre de 2015 por el equipo de Advanced LIGO, corroborando otra predicción de la teoría 100 años después de su publicación [8]. La primera imagen de un agujero negro ubicado en el centro de la galaxia Messier 87, fue publicada por Event Horizon Telescope Collaboration el 10 de abril de 2019[9].

1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein

La RG describe a la gravedad como una propiedad geométrica del espacio-tiempo, en donde el espacio-tiempo ya no es plano como se asumía en la relatividad especial, de hecho, el espacio-tiempo debe ser curvo en todas las situaciones donde esté físicamente presente un

campo gravitacional. Entonces el espacio-tiempo ya no es la variedad \mathbb{R}^4 con una métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ definida en ella, como en la relatividad especial. En RG el espacio-tiempo se modela como una variedad M de dimensión 4 con una métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$, y los efectos de la gravedad se explican por la curvatura de esta variedad. [10].

Así como las ecuaciones de Maxwell gobiernan cómo los campos eléctricos y magnéticos responden a las cargas y corrientes, las ecuaciones de campo de Einstein gobiernan cómo responde la métrica $g_{\mu\nu}$ a la energía y al momento, es decir, relaciona la curvatura de $g_{\mu\nu}$ con la distribución de materia en el espacio-tiempo. Las ecuaciones de campo son 10, contenidas en la ecuación tensorial que se muestra a continuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (1.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ la curvatura escalar, G es la constante de la gravitación universal, y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento.

Estas ecuaciones se pueden escribir en función del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, un tensor de rango 2 definido sobre una variedad Lorentziana que expresa la curvatura de dicha variedad, y está definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (1.2)$$

El tensor $T_{\mu\nu}$ de energía-momento es un tensor de rango 2 simétrico que describe la densidad y el flujo de energía y momento, que son las fuentes de la curvatura del espacio-tiempo [11]. Algunos de los tensores de energía-momento más usados en RG, son el tensor energía-momento de la materia incoherente o polvo, el tensor energía-momento de un fluido perfecto y el tensor energía-momento de campo electromagnético.

En el caso del polvo o materia incoherente, el tensor de energía-momento es [12]:

$$T_{\mu\nu} = ru_{\mu}u_{\nu} , \quad (1.3)$$

donde u es la velocidad de flujo unitaria y r es la densidad de masa en reposo.

Para un fluido perfecto, el tensor de energía-momento es [3]:

$$T_{\mu\nu} = \mu u_{\mu}u_{\nu} + p(g_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}) , \quad (1.4)$$

donde de nuevo u es la velocidad de flujo unitaria, μ es la densidad de energía y p es la densidad de presión.

Para un campo electromagnético, el tensor de energía-momento es: [3]:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} , \quad (1.5)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético y $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski.

Las ecuaciones de Einstein son compatibles sólo si el tensor de energía-momento satisface las leyes de conservación:

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.6)$$

1.2. Soluciones de Schwarzschild

Si un espacio-tiempo es invariante respecto a ciertas transformaciones de simetrías, su dinámica se simplifica debido a que se tienen menos grados de libertad, uno de los más usados es el espacio vacío fuera de una fuente esféricamente simétrica, por ejemplo, una estrella esférica, que en una buena aproximación, es el espacio-tiempo fuera del sol. La solución de Schwarzschild describe este espacio-tiempo, y es una de las soluciones de vacío a las ecuaciones de Einstein, es decir que el tensor energía-momento es nulo. Esta solución fue encontrada por Karl Schwarzschild en 1916 [11] y la métrica es la siguiente

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.7)$$

donde M es una constante que se interpreta como la masa del objeto que genera el campo gravitacional.

Una de las formas de caracterizar las simetrías de una variedad es encontrar sus vectores de Killing. Formalmente, un vector de Killing se define como un campo vectorial que satisface cierta ecuación diferencial, conocida como ecuación de Killing [10]. Esta ecuación relaciona la derivada de Lie del tensor métrico, que describe la geometría del espacio-tiempo, con el propio tensor métrico, y puede escribirse como:

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = 0 \iff \nabla_{\mu} v_{\nu} + \nabla_{\nu} v_{\mu} = 0, \quad (1.8)$$

donde \mathcal{L}_v es la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial v , ∇ es la derivada covariante y v es el vector de Killing.

Intuitivamente, esta ecuación significa que el tensor métrico permanece inalterado bajo la acción del vector de Killing, que genera una simetría del espacio-tiempo. Por ejemplo, si un espacio-tiempo posee un vector de Killing que describe una simetría de traslación temporal, esto significa que la geometría del espacio-tiempo sigue siendo la misma en distintos momentos, y que las magnitudes físicas como la energía y el momento se conservan.

La métrica de Schwarzschild tiene las siguientes propiedades:

- Es independiente del tiempo. Hay un vector de Killing ξ asociado a esta simetría, la métrica es invariante bajo desplazamientos en la coordenada del tiempo t . El vector de Killing tiene las componentes:

$$\xi^{\alpha} = (1, 0, 0, 0). \quad (1.9)$$

- Es esféricamente simétrica. La geometría de una superficie bidimensional que tiene constante t y r en la geometría de dimensión 4 viene dada por el elemento de línea:

$$d\Sigma^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.10)$$

Esto describe la geometría de una esfera de radio r en un espacio tridimensional plano. Entonces, la geometría de Schwarzschild tiene las simetrías de una esfera con respecto a los cambios en los ángulos θ y ϕ . En las ecuaciones (1.7) y (1.10) esto es evidente para la dirección ϕ porque la métrica es independiente de tal coordenada, esto implica que la métrica es invariante bajo rotaciones sobre el eje z . El vector de Killing asociado con esta simetría es:

$$\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (1.11)$$

La coordenada de Schwarzschild r tiene una interpretación geométrica simple que surge de la simetría esférica. De hecho, está relacionada con el Area A de las esferas bidimensionales de r y t fijados por la fórmula estándar:

$$r = (A/4\pi)^{1/2}. \quad (1.12)$$

- La constante M en la métrica de Schwarzschild es la masa total de la fuente de curvatura. En la física Newtoniana la masa del sol es determinada midiendo el período y el tamaño de la órbita de un cuerpo de prueba (la Tierra) y relacionando esas mediciones con la masa de la fuente de atracción gravitatoria mediante la ley de Kepler. En RG la masa de una fuente estacionaria de curvatura en el espacio-tiempo está definida por este tipo de experimento. Cualquier forma de energía es una fuente de curvatura en el espacio-tiempo, incluyendo la energía de campos electromagnéticos, interacciones nucleares, etc. Entonces la masa de un cuerpo estacionario puede definirse por la ley de Kepler para órbitas grandes y debido a que está determinada por el potencial Newtoniano, la constante M en la métrica de Schwarzschild es la masa total. Por lo tanto, la geometría fuera de una fuente esféricamente simétrica está caracterizada por un sólo número, la masa total M .
- Algo interesante sucede en la métrica de Schwarzschild cuando $r = 0$ y $r = 2GM$. Si una estrella colapsara hasta un tamaño crítico en el cual su velocidad de escape sea igual a la velocidad de la luz, entonces la fuerza gravitatoria en su superficie sería infinita. Y si la estrella colapsara por debajo de este tamaño crítico, se formaría lo que se conoce como agujero negro. El radio de este tamaño crítico se llama radio de Schwarzschild ($r = 2GM$), marca el límite de un agujero negro y es la escala de longitud característica para la curvatura en la geometría de Schwarzschild.

Imaginémonos una estrella colapsada en forma de una esfera que tiene un radio igual al radio de Schwarzschild, entonces la superficie de la esfera se conoce como el horizonte de sucesos. Fuera del horizonte, la gravedad es fuerte pero finita, y es posible que los objetos escapen a su atracción. Pero una vez dentro del horizonte, un objeto tendría que viajar más rápido que la luz para escapar, y como sabemos eso no está permitido. Sin embargo, resulta que la superficie de una estrella estática siempre está afuera de ese radio. En la superficie, la geometría de Schwarzschild une una geometría diferente dentro de la estrella. Siempre y cuando uno se mantenga a las afueras de las estrellas estáticas, uno no se tiene que preocupar sobre los radios $r = 0$ y $r = 2GM$ [11].

Por lo tanto, el primer modelo de agujero negro aparece en la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein construidas por Schwarzschild llamado agujero negro de Schwarzschild o agujero negro estático. El agujero negro de Schwarzschild no tiene carga eléctrica ni momento angular, se lo describe mediante la métrica de Schwarzschild. Según el teorema de Birkhoff, es la única solución de vacío que es esféricamente simétrica, lo que significa que no hay diferencia observable a distancia entre el campo gravitatorio de un agujero negro de este tipo y el de cualquier otro objeto esférico de igual masa [13]. Por lo tanto, la idea comúnmente aceptada de que un agujero negro absorbe todo lo que se encuentra a su alrededor solo es cierta en las inmediaciones de su horizonte de sucesos. A mayor distancia, el campo gravitatorio externo es similar al de cualquier otro objeto de igual masa. El horizonte de sucesos no es una superficie física, y una persona que lo atravesara (antes de ser destrozada por las fuerzas de las mareas), no notaría ninguna superficie física en esa posición; es una superficie matemática que es importante para determinar las propiedades del agujero negro [14].

Teórica y experimentalmente la geometría de Schwarzschild puede ser estudiada a través de las órbitas de partículas de prueba y rayos de luz. Las observaciones de los pequeños efectos predichos por la RG en las órbitas de los planetas y las trayectorias de los rayos de luz en el sistema solar son importantes pruebas experimentales de la teoría.

1.3. Modelo Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)

La gravedad gobierna la estructura del universo a grandes escalas, la RG es, por tanto, fundamental para la cosmología siendo esta una de las aplicaciones más importantes de la RG. Nuestra comprensión del universo a grandes escalas ha aumentado drásticamente en los últimos años, tanto de forma observacional como teórica. Quizás lo más importante es que la mecánica relativista general ya había sugerido universos modelo no estáticos cuando los astrónomos descubrieron para su gran sorpresa que eran necesarios [15].

Por el contrario, la mecánica de Newton había demostrado ser estéril como fuente de modelos cosmológicos. Sus leyes son problemáticas para distribuciones de masa infinitas.

La idea de Newton de un universo estático infinito no se basaba en la dinámica sino más bien en la simetría y la existencia del espacio absoluto, estaba plagado de contradicciones. Los astrónomos estaban tan inclinados a la idea de que el universo debe ser estático, incluso Einstein inicialmente se resistió a lo que sus propias ecuaciones de campo le decían claramente, las manipuló para que su primer modelo cosmológico (de 1917) pudiera ser estático [16]. Sin embargo, debemos considerar que la primera preocupación de los cosmólogos debe ser la distribución espacial de las estrellas y galaxias, ya que proporciona información crucial para construir modelos cosmológicos. Comprender la distribución de la materia en el universo es esencial para construir un modelo cosmológico completo.

En esta sección vamos a presentar el modelo cosmológico encontrado por Alexander Friedman a principios de la década de 1920, quien considera por primera vez un modelo no estático del universo y muestra la posibilidad de mundos no estáticos con curvatura positiva o negativa [17]. Este modelo se consideró importante años después cuando se dieron cuenta que el universo se está expandiendo.

1.3.1. Principio Cosmológico

La cosmología se basa en un principio de simplicidad, llamado, el principio cosmológico. Es, en esencia, una generalización del principio de Copérnico de que la Tierra no está en el centro del sistema solar. Con el mismo espíritu, no esperaríamos que la Tierra, ni el sistema solar, ni nuestra galaxia, ni nuestro grupo local de galaxias ocuparan una posición especialmente favorecida en el universo.

Entonces el principio cosmológico dice que: a escalas suficientemente grandes, el universo es homogéneo e isótropo; es decir, las propiedades geométricas del espacio tridimensional son las mismas en todas las ubicaciones espaciales y no señalan a ninguna dirección especial en el espacio. A esto se le suele agregar la universalidad: las leyes de la física son las mismas en todas las partes del universo.

La isotropía es la uniformidad en todas las orientaciones, es decir establece que el espacio se ve igual sin importar a que dirección miremos. Formalmente, una variedad M es isótropa alrededor de un punto p si, para dos vectores cualquiera V y W en T_pM , hay una isometría φ en M tal que $\varphi(p) = p$ y $\varphi_*(V) = W$.

Homogeneidad es la afirmación de que la métrica es la misma a lo largo de toda la variedad. En otras palabras, dados dos puntos cualquiera p y q en M , hay una isometría que lleva p a q . No hay necesariamente una relación entre homogeneidad e isotropía, una variedad puede ser homogénea pero en ningún lugar isótropa, o puede ser isótropa alrededor de un punto sin ser homogénea. Por otro lado, si un espacio es isótropo en todas partes, entonces es homogéneo. De la misma forma si la variedad es isótropa alrededor de un punto y también homogénea, será isótropa alrededor de cualquier punto [18].

En la década de 1930, Edwin Hubble observó que las galaxias se alejan unas de otras mediante la observación del desplazamiento hacia el rojo de los rayos de luz emitidos por las estrellas. Expresó que el universo no es estático y se está expandiendo. Años antes de esta importante observación experimental por parte de Hubble, en 1922 Friedman y en 1927 Lemaître, abandonan la idea de un universo estático con sus soluciones dinámicas a las ecuaciones de campo de Einstein. Seguido de esto, Robertson (1929) y Walker (1935) proporcionaron soluciones cosmológicas de forma más cercana a la geometría diferencial. Estos modelos se convirtieron luego en los predominantes para describir la evolución del Universo. Una vez que la idea del flujo de Hubble (1929) se aceptó por parte de los astrónomos, se observó que mediante las ecuaciones de Friedmann, Lemaître, Robertson y Walker se puede expresar la evolución del cosmos de forma dinámica.

1.3.2. Métrica FLRW

Recordemos que la métrica permite medir distancias. Por ejemplo, en el espacio euclidiano tridimensional, la distancia física entre dos puntos separados por las distancias de las coordenadas infinitesimales dx , dy , dz es

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.13)$$

En este ejemplo, la métrica es la delta de Kronecker $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$. Sin embargo, también sabemos que si se usaran coordenadas esféricas en su lugar, el cuadrado de la distancia física ya no sería la suma del cuadrado de las distancias de las coordenadas. En cambio, sería

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.14)$$

En este caso, la métrica ha adoptado una forma menos trivial $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Esto indica que los observadores que utilizan diferentes sistemas de coordenadas no necesariamente estarán de acuerdo en las distancias de las coordenadas entre dos puntos, pero siempre estarán de acuerdo en la distancia física $d\ell$, entonces se dice que $d\ell$ es invariante.

Un objeto fundamental en la relatividad es la métrica del espacio-tiempo. Convierte las coordenadas del espacio-tiempo dependientes del observador $X^\mu = (t, x^i)$ en el elemento de línea invariante

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu. \quad (1.15)$$

En relatividad especial, la métrica de Minkowski es la misma en todas partes en el espacio y el tiempo,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (1.16)$$

En la relatividad general, por otro lado, la métrica dependerá de la ubicación del espacio-tiempo,

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}). \quad (1.17)$$

La dependencia espacio-temporal de la métrica incorpora los efectos de la gravedad. La forma en que la métrica depende de la posición en el espacio-tiempo está determinada por la distribución de materia y energía en el universo. El alto grado de simetría del universo homogéneo significa que la métrica del universo en expansión toma una forma bastante simple.

La homogeneidad espacial y la isotropía significan que el universo puede ser representado por una secuencia ordenada en el tiempo de rebanadas espaciales tridimensionales, en donde cada una es homogénea e isotrópa. El elemento de línea de cuatro dimensiones en este caso es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\ell^2, \quad (1.18)$$

donde $d\ell^2 \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j$ es el elemento de línea de un espacio tridimensional maximalmente simétrico y el factor de escala $a(t)$ describe la expansión del universo.

Para clasificar de los espacios tridimensionales maximalmente simétricos, primero se observa que los espacios tridimensionales homogéneos e isotrópos tienen curvatura tridimensional constante. Entonces solo hay tres opciones: sin curvatura (E^3), curvatura positiva (S^3) y curvatura negativa (H^3).

La métrica para cada caso es:

- Espacio plano: el elemento de línea del espacio euclidiano tridimensional E^3 es simplemente

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.19)$$

Esto es claramente invariante bajo traslaciones espaciales ($x^i \mapsto x^i + a^i$, with $a^i = \text{const.}$) y rotaciones ($x^i \mapsto R_k^i x^k$, con $\delta_{ij} R_k^i R_l^j = \delta_{kl}$).

- Espacio positivamente curvado: un espacio tridimensional con curvatura positiva constante puede ser representado como una esfera tridimensional S^3 embebida en un espacio Euclideano de 4 dimensiones E^4 ,

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \quad \mathbf{x}^2 + u^2 = a^2, \quad (1.20)$$

donde a es el radio de la esfera tridimensional. La homogeneidad e isotropía de la superficie de la esfera tridimensional se heredan de la simetría del elemento de línea bajo rotaciones de 4 dimensiones.

- Espacio con curvatura negativa: un espacio tridimensional con curvatura negativa constante puede ser representado como un hiperboloide H^3 embebido en un espacio lorentziano de 4 dimensiones $\mathbb{R}^{1,3}$,

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \quad \mathbf{x}^2 - u^2 = -a^2, \quad (1.21)$$

donde a^2 es una constante arbitraria. La homogeneidad e isotropía de la geometría inducida en el hiperboloide son heredadas de la simetría del elemento de línea bajo pseudo-rotaciones en 4 dimensiones, es decir transformaciones de Lorentz, con u haciendo el rol del tiempo.

En los últimos dos casos, es conveniente cambiar la escala de las coordenadas, $x \rightarrow ax$ y $u \rightarrow au$. Entonces los elementos de línea de los casos de la esfera y el hiperboloide son

$$d\ell^2 = a^2 [dx^2 \pm du^2], \quad x^2 \pm u^2 = \pm 1. \quad (1.22)$$

Por lo tanto, las coordenadas x y u ahora son adimensionales, mientras que el parámetro a lleva la dimensión de longitud. El diferencial de la condición de embebimiento, $x^2 \pm u^2 = \pm 1$, da $u du = \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$, entonces

$$d\ell^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.23)$$

Se puede unificar la ecuación (4.23) con el elemento de línea Euclideano (1.19) al escribir

$$d\ell^2 = a^2 \left[dx^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \right], \quad \text{para} \quad k \equiv \begin{cases} 0 & \text{E}^3 \\ +1 & \text{S}^3 \\ -1 & \text{H}^3 \end{cases}. \quad (1.24)$$

En este caso se debe tomar $a^2 > 0$ para tener $d\ell^2$ positivo en $\mathbf{x} = 0$, y por lo tanto en todas partes. Es conveniente utilizar coordenadas polares esféricas, (r, θ, ϕ) , porque pone en manifiesto las simetrías del espacio. Al usar

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^2 &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= r dr, \end{aligned} \quad (1.25)$$

la métrica en la ecuación (1.24) se vuelve diagonal

$$d\ell^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.26)$$

donde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Entonces los elementos de línea correspondientes son

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{\equiv d\Omega^2}, \quad \text{donde } k = \begin{cases} 0 & \text{E}^3 \\ +1 & \text{S}^3 \\ -1 & \text{H}^3 \end{cases}. \quad (1.27)$$

Al sustituir la ecuación (1.27) en la ecuación (1.18), se obtiene la métrica FLRW en coordenadas polares

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.28)$$

En este caso las simetrías del universo han reducido las diez componentes independientes de la métrica del espacio-tiempo a una sola función del tiempo, el factor de escala $a(t)$, y una constante k conocida como el parámetro de curvatura.

Capítulo 2

Agujeros de Gusano

Los agujeros de gusano son estructuras geométricas cuya métrica es una solución especial de las ecuaciones de campo de Einstein, al carecer de horizontes de sucesos, estos agujeros teóricamente podrían conectar dos universos asintóticamente planos y ampliamente separados o dos porciones diferentes asintóticamente planas del mismo universo a través de un túnel.

La teoría de los agujeros de gusano se remonta a 1916, cuando el físico austriaco Ludwig Flamm buscó la solución más simple posible de las ecuaciones de campo de Einstein, conocida como solución de Schwarzschild. Esta solución describe el campo gravitacional fuera de una masa esférica. Si la masa es lo suficientemente compacta, la solución describe lo que ahora se conoce como agujero negro, en este caso el agujero negro de Schwarzschild. Flamm se dio cuenta que las ecuaciones de Einstein permitían una segunda solución, ahora conocida como agujero blanco¹ y que las dos soluciones, que describen dos regiones diferentes del espacio-tiempo, estaban conectadas matemáticamente por un conducto de espacio-tiempo [19].

En 1935 Albert Einstein junto con Nathan Rosen expandieron la idea de Flamm pero no a una teoría de agujeros de gusano, sino a una teoría de partículas. Su motivación fue construir un modelo de partículas elementales representadas por puentes que conectan dos regiones idénticas descritas por la solución de Schwarzschild [20]. Esta representación matemática del espacio físico conectado por una solución tipo agujero de gusano inspiró a otros a estudiar los agujeros de gusano, por esto se denominó posteriormente a los agujeros de gusano de Schwarzschild, puente de Einstein-Rosen.

Este campo permaneció inactivo durante aproximadamente dos décadas después del trabajo de Einstein y Rosen, hasta que en 1955 John Wheeler se interesó en el estudio de un espacio-tiempo conectado de forma múltiple, donde dos regiones muy separadas estaban conectadas por un túnel. Su artículo acuñó el término agujeros de gusano y los discutió en términos de entidades topológicas llamadas geones (soluciones inestables pero de larga duración para las ecuaciones combinadas de Einstein-Maxwell). También proporcionó el primer

¹En Relatividad General (RG), un agujero blanco es una región hipotética del espacio-tiempo a la que no se puede acceder desde el exterior, aunque de él se pueden escapar energía-materia, luz e información. En este sentido, es el reverso de un agujero negro.

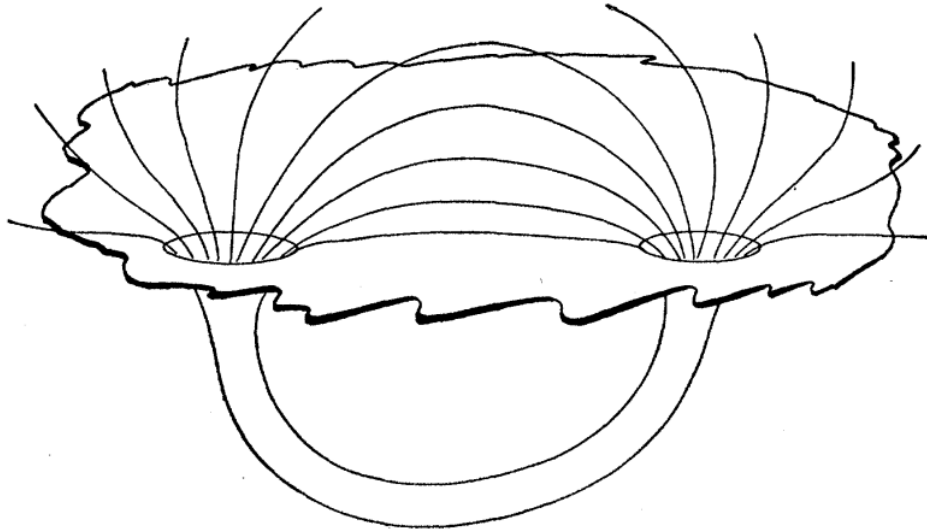


FIGURA 2.1: Dibujo esquemático de Wheeler de un agujero de gusano - Representación esquemática de líneas de fuerza en un espacio doblemente conectado. Dibujo tomado de la referencia [1]

diagrama de un agujero de gusano como un túnel que conecta dos aberturas en diferentes regiones del espacio-tiempo (Figura 2.1) [1].

Kip Thorne y su estudiante Michael Morris fueron los primeros en dar la idea de que el ser humano podría viajar a través de túneles de agujeros de gusano, y se dieron cuenta de que tal viaje podría ser posible si un agujero de gusano pudiera mantenerse abierto el tiempo suficiente para que una nave espacial (o cualquier otro objeto) lo atravesara, descartando así el agujero de gusano de Schwarzschild que al tener horizontes no permite el viaje de ida y vuelta, convirtiéndolo en un agujero de gusano no atravesable. Morris y Thorne investigaron los agujeros de gusano estáticos esféricamente simétricos utilizando los principios de la RG, identificaron los conceptos principales detrás de los agujeros de gusano atravesables explicando el llamado agujero de gusano de Morris-Thorne (MT) [21] [22].

Desde entonces, y a lo largo de la década de 1990, han aparecido muchos artículos altamente técnicos en las principales revistas científicas que tratan sobre agujeros de gusano de todas las formas y tamaños, y el interés en el tema no muestra signos de disminuir por el momento².

Hay algunas maneras de clasificar a las soluciones de agujero de gusano, globalmente los agujeros de gusano pueden ser lorentzianos o euclidianos. Esto simplemente refleja si la variedad en la que reside el agujero de gusano es (o no) una variedad Lorentziana (pseudo-riemanniana). En esta sección nos centraremos en agujeros de gusano de tipo Lorentziano.

²El primer libro de texto dedicado al tema lo escribió Mat Visser y se titula: Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking [Visser](#)

2.1. Agujeros de gusano Lorentzianos

Los agujeros de gusano Lorentzianos son de dos tipos principales, permanentes (cuasipermanentes) y transitorios, ambos pueden clasificarse además como intra-universales o inter-universales, dependiendo de si el agujero de gusano conecta o no regiones distantes de un mismo universo o conecta diferentes universos en el multiverso. Además, estos pueden ser macroscópicos o microscópicos según el tamaño de la región activa en relación con la longitud de Planck. [24].

Si uno corta una región del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales cada porción de espacio es considerada como una variedad riemanniana tridimensional y cada una de ellas contiene un agujero de gusano, entonces se puede pensar que el agujero de gusano existe durante un cierto período de tiempo. Tal agujero de gusano se llamará agujero de gusano cuasipermanente o simplemente agujero de gusano permanente para abreviar. Los agujeros de gusano (cuasi) permanentes son esencialmente objetos tridimensionales que existen durante un período de tiempo finito distinto.

Los agujeros de gusano de Wheeler, que derivan su existencia de las supuestas fluctuaciones del vacío que tienen lugar en la espuma del espacio-tiempo, son definitivamente de naturaleza microscópica. Por lo general, son transitorios, aunque pueden surgir aleatoriamente con la topología adecuada para ser considerados cuasipermanentes. El tipo del agujero de gusano de Wheeler depende críticamente de las suposiciones de entrada sobre lo que significa cuantizar gravedad.

2.1.1. Agujeros de gusano atravesables

Morris y Thorne presentaron nueve propiedades deseables para un agujero de gusano atravesable de larga duración [21] [22]:

1. La métrica debe ser esféricamente simétrica e independiente del tiempo (estática). Esta condición se seleccionó para simplificar los cálculos. La forma general de este tipo de métrica es:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

donde $d\Omega^2 = \sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2$, $\Phi(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones desconocidas de r .

2. La solución debe obedecer las ecuaciones de campo de Einstein en todas partes.
3. La solución debe tener una garganta que conecte dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.

4. No puede existir ningún horizonte, ya que su presencia impediría el viaje de ida y vuelta a través del agujero de gusano. Esta restricción corresponde a que $\Phi(r)$ sea finito en todas partes.
5. Las fuerzas gravitatorias de marea experimentadas por un viajero deben ser "soportablemente" pequeñas.
6. Un viajero debe ser capaz de atravesar el agujero de gusano en un tiempo finito y razonablemente pequeño (por ejemplo menos de un año) medido no solo por el viajero, sino también por los observadores que se quedan atrás o que lo esperan fuera del agujero de gusano.
7. La materia y los campos que crean la curvatura del espacio-tiempo del agujero de gusano deben tener un tensor de tensión-energía físicamente razonable.
8. La solución debe ser estable bajo pequeñas perturbaciones.
9. Debería ser posible ensamblar el agujero de gusano. Por ejemplo, la masa necesaria para crear el agujero de gusano debería ser mucho menor que la masa total del universo, y el tiempo que tarda en ocurrir debería ser mucho menor que la edad del universo.

Las cuatro primeras propiedades se denominan criterios básicos de agujeros de gusano, mientras que las propiedades cinco y seis, que cambian los parámetros del agujero de gusano para la comodidad fisiológica humana, se denominaron criterios de usabilidad.

2.2. Métrica de Morris-Thorne

Morris y Thorne propusieron un tipo de agujero de gusano, que en principio cumple con la primera propiedad deseada para que sea atravesable (más adelante se analizará el cumplimiento de las demás propiedades). Su métrica tiene el nombre de agujero de gusano de Morris-Thorne (MT) [21]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2)$$

donde $\Phi(r)$ y $b(r)$ son funciones de r que estarán limitadas por las propiedades antes mencionadas, deseables para un agujero de gusano atravesable. La función $b(r)$ determina la forma espacial del agujero de gusano, y por lo tanto se llama función de forma, mientras que $\Phi(r)$ determina el corrimiento al rojo gravitacional y se llama función de corrimiento al rojo.

Con la métrica de MT se puede calcular el tensor de Riemann $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, el escalar de Ricci R y con esto encontrar el tensor de Einstein, cuyas componentes diferentes de cero son:

$$G_{tt} = \frac{b'}{r^2}, \quad (2.3)$$

$$G_{rr} = -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r}, \quad (2.4)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right), \quad (2.5)$$

donde prima (') denota la derivada con respecto a la coordenada radial r . Las ecuaciones de Einstein (1.1) se pueden escribir mediante del tensor de Einstein, de la siguiente forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

con $\kappa = 8\pi$. En las ecuaciones de Einstein (2.6), el tensor energía-momento es proporcional al tensor de Einstein, entonces ambos tensores deben tener la misma estructura algebraica. Por eso, las únicas componentes diferentes de cero del tensor energía-momento son T_{tt} , T_{rr} y $T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi}$. Además, cada una de estas componentes tiene una interpretación física

$$T_{tt} = \rho(r), \quad T_{rr} = -\tau(r) \quad y \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p(r), \quad (2.7)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad total de masa-energía, $\tau(r)$ es la tensión radial por unidad de área y $p(r)$ es la presión en la dirección lateral. Entonces las ecuaciones de Einstein toman la siguiente forma

$$\rho(r) = \frac{b'}{8\pi r^2}, \quad (2.8)$$

$$\tau(r) = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi'}{8\pi r^2}, \quad (2.9)$$

$$p(r) = \frac{r}{2} [(\rho - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau. \quad (2.10)$$

Para encontrar una solución que cumpla las propiedades deseadas de un agujero de gusano atravesable se pueden controlar las funciones $b(r)$ y $\phi(r)$. Dadas estas funciones se tiene determinada la métrica del problema, a diferencia de los agujeros negros donde para encontrar soluciones se debe tener condiciones para el horizonte de sucesos.

Embebimiento

Al ser la métrica de MT esféricamente simétrica y estática, sin perder generalidad, es posible enfocarse en un plano ecuatorial de la esfera $\theta = \pi/2$ y en un instante fijo de tiempo $t = \text{const}$. Esto es posible debido a que en un sistema estático, el espacio en un tiempo fijo

t_1 tiene la misma geometría tridimensional que el espacio en otro tiempo t_2 . Además, en cualquier momento, como el espacio tiene simetría esférica, un corte a través del centro, que divide el espacio simétricamente en dos mitades (en este caso, el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$), tiene la misma geometría bidimensional que cualquier otro corte a través del centro [25]. En este caso la métrica queda

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.11)$$

Para visualizar este plano ecuatorial como si se hubiese removido del espacio-tiempo y embebido en un espacio Euclideo, se introduce la métrica del espacio Euclideo en coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.12)$$

La superficie embebida será axialmente simétrica y se describe por la función $z = z(r)$, entonces

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.13)$$

Este elemento de línea es el del plano ecuatorial (2.11) que atraviesa al agujero de gusano, si se identifican las coordenadas (r, ϕ) del espacio embebido con las coordenadas (r, ϕ) del espacio-tiempo del agujero de gusano, la función $z(r)$ describe la superficie embebida y satisface

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1\right)^{-1/2}. \quad (2.14)$$

Esta ecuación muestra la manera en la que la función $b = b(r)$ da forma al agujero de gusano.

En cualquier espacio-tiempo estático asintóticamente plano, incluyendo el de un agujero de gusano, un horizonte es la superficie físicamente no singular en la que $g_{00} \equiv -e^{2\Phi} \rightarrow 0$. Para que el agujero de gusano de MT no tenga horizontes, entonces $\Phi(r)$ debe ser finita en todo el espacio-tiempo. La coordenada radial r debe tener un mínimo $r = b_0$ en el agujero de gusano, correspondiente a su garganta. En este radio mínimo la superficie embebida es vertical, es decir, la ecuación (2.14) diverge, y $b(r) = r$.

También se debe cumplir que la distancia radial sea finita en todo el espacio, pero la coordenada radial r no se comporta de esta forma cerca de la garganta, en cambio la coordenada radial $l(r)$ debe ser finita en todo el espacio, y está dada por

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{1/2}}. \quad (2.15)$$

El signo (+) en la ecuación indica que se encuentra en la parte superior del universo y el signo (−) en la parte inferior. Lejos de la garganta, en ambas direcciones radiales, el espacio debe ser asintóticamente plano, es decir la ecuación (2.14) debe aproximarse a cero mientras que $l \rightarrow \pm\infty$.

Condición de ensanchamiento

En este caso se quiere que el agujero de gusano conecte dos espacios-tiempo asintóticamente planos a través de una garganta que no se cierre, lo que implica que en la garganta la superficie embebida (2.14) se ensanche hacia afuera. Es decir, el inverso de la función de embebimiento $z(r)$ debe satisfacer $d^2r/dz^2 > 0$ en la garganta o cerca de la garganta. Para analizar esta condición se invierte la ecuación (2.14)

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left(\frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.16)$$

Entonces al diferenciar la ecuación (2.16) con respecto a z se obtiene la condición de ensanchamiento, que es la condición necesaria para que exista una garganta que no se cierre.

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad \text{en o cerca de la garganta, } r = b = b_0. \quad (2.17)$$

Por otro lado, la tensión del agujero se puede estudiar usando siguiente función adimensional, también llamada función de exotividad [21]

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{b/r - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|}. \quad (2.18)$$

Al combinar las ecuaciones (2.17) y (2.18), se obtiene

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left(\frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r - b) \frac{\Phi'}{|b'|}. \quad (2.19)$$

Esta relación junto con el hecho de que ρ y por lo tanto b' son finitas (ecuación (2.8)), y también debido a que $(r - b)\Phi' \rightarrow 0$ en la garganta, se obtiene una segunda versión de la condición de ensanchamiento

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|\rho_0|} > 0 \quad \text{en o cerca de la garganta, } r = b = b_0, \quad (2.20)$$

de donde se obtiene la condición de que $\tau_0 > \rho_0$, es decir, en la garganta la tensión debe ser muy grande como para exceder la densidad total de energía ρ_0 . La materia con esta propiedad $\tau > \rho > 0$, se llama materia exótica. Esto implica que para mantener abierto un agujero de gusano se requiere materia con una densidad de energía negativa y una gran presión negativa. La existencia de la materia exótica conlleva un problema para la existencia física de los agujeros de gusano, ya que esto implica tener condiciones de energía sobre la

materia que no se han observado. En el siguiente apartado mencionaremos con más detalle las condiciones de energía en la Relatividad General y algunas de sus consecuencias físicas.

2.3. Condiciones de Energía

Hay siete condiciones de energía que son útiles cuando se habla de materia y energía en Relatividad General [23]:

1. Condición de energía nula (NEC): dado el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, para cualquier vector nulo k_μ , se cumple la relación:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (2.21)$$

2. Condición de energía débil (WEC): para cualquier vector temporal V^μ , la siguiente relación es verdadera:

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (2.22)$$

Si esto es cierto para cualquier vector temporal, implicará la condición de energía nula. La importancia física de esta condición es que obliga a que la densidad de energía local medida por cualquier observador temporal sea positiva.

$$\text{WEC} \Rightarrow \rho \geq 0. \quad (2.23)$$

3. Condición de energía fuerte (SEC): cualquier vector temporal V^μ debe satisfacer la relación:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu} \right) V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (2.24)$$

donde T es la traza del tensor energía-momento $T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. La condición de energía fuerte implica la condición de energía nula, pero no implica, en general, la condición de energía débil.

4. Condición de energía dominante (DEC): para cualquier vector temporal V^μ , la siguiente relación es verdadera:

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (2.25)$$

donde $T_{\mu\nu}V^\nu$ no es espacial. La condición de energía dominante implica la condición de energía débil y, por lo tanto, implica la condición de energía nula.

5. Condición de energía nula promediada (ANEC): esta condición se cumple si en todas las curvas nulas Γ tenemos:

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} d\lambda \geq 0, \quad (2.26)$$

donde λ es una parametrización afín y k^{μ} es el vector tangente correspondiente.

6. Condición de energía débil promediada (AWEC): se dice que esta condición se mantiene en una curva temporal Γ si:

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} ds \geq 0, \quad (2.27)$$

donde s es la parametrización de tiempo adecuada de la curva temporal Γ y V^{μ} es el vector tangente correspondiente.

7. Condición de energía fuerte promediada (ASEC): esta condición es cierta para una curva temporal Γ si:

$$\int_{\Gamma} \left(T_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} + \frac{1}{2} T \right) ds \geq 0. \quad (2.28)$$

En el punto anterior se estableció la condición de Morris y Thorne de que, en la garganta de un agujero de gusano atravesable, la tensión debe ser mayor que la densidad total de masa-energía $\tau_0 > \rho_0$, la llamada materia exótica. Esto implica que un observador que cae a través del agujero de gusano con una velocidad radial cercana a la velocidad de la luz medirá una densidad de energía de masa negativa, con la extensión lógica natural para un observador estático que mide una densidad de energía de masa negativa. Esto contradice las múltiples condiciones de energía mencionadas anteriormente en las que la densidad de energía era estrictamente no negativa, como la condición de energía débil y la condición de energía dominante.

2.4. Agujeros de gusano cargados

Un agujero de gusano lorentziano para ser atravesable requiere materia exótica, y como se mencionó anteriormente, esto implica que se violen algunas de las condiciones de energía. Por todo esto eso se continúa en la búsqueda de un mecanismo que no requiera de materia exótica o que la minimice y por tanto permita la existencia de este tipo de agujeros de gusano. Se han encontrado varias formas de modificar el espacio-tiempo del agujero de gusano, una forma es la generalización del agujero de gusano mediante teorías alternativas, por ejemplo, la teoría de Brans-Dicke [26], la teoría $f(R)$ [27], teoría de Born-Infeld [28], teoría de Einstein-Gauss-Bonnet [29], y la teoría tensor-escalar [30]. Otra forma es la generalización agregando

materia adicional, la cual vamos a presentar en este apartado en los dos casos propuestos por [Kim and Lee](#).

Las ecuaciones de Einstein para el espacio-tiempo de un agujero de gusano usual son:

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (2.29)$$

donde el lado izquierdo $G_{\mu\nu}^{(0)}$ es la geometría del agujero de gusano y el lado derecho $T_{\mu\nu}^{(0)}$ es la materia exótica que viola las condiciones de energía. Si se añade materia adicional $T_{\mu\nu}^{(1)}$ al lado derecho de la ecuación y su correspondiente parte geométrica $G_{\mu\nu}^{(1)}$ al lado izquierdo, se obtiene

$$G_{\mu\nu}^{(0)} + G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi [T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)}]. \quad (2.30)$$

2.4.1. Agujero de gusano con campo escalar

Se considera el caso más simple de un agujero de gusano Lorentziano estático con un campo escalar sin masa mínimamente acoplado [31]. El término adicional del Lagrangiano debido al campo escalar viene dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi, \quad (2.31)$$

y la ecuación de movimiento para φ viene dada por

$$\square \varphi = 0. \quad (2.32)$$

El tensor energía-momento se obtiene de la ecuación (2.31):

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \varphi \nabla_\sigma \varphi. \quad (2.33)$$

Entonces las componentes de $T_{\mu\nu}^{(1)}$, de la métrica de agujero de gusano estático (2.2) con $\Phi(r) = 0$, son:

$$\begin{aligned} T_{tt}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \varphi'^2, \\ T_{rr}^{(1)} &= \frac{1}{2} \varphi'^2, \\ T_{\theta\theta}^{(1)} &= -\frac{1}{2} r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \varphi'^2, \\ T_{\phi\phi}^{(1)} &= -\frac{1}{2} r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \varphi'^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En este espacio-tiempo, la ecuación de movimiento de φ se convierte en:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{2} \frac{(1-b/r)'}{(1-b/r)} + \frac{2}{r} = 0 \implies r^4 \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) = \text{const.} \quad (2.35)$$

Se representa la constante de integración con $\alpha/4\pi$ para algún α positivo. Si se añade $G_{\mu\nu}^{(1)}$ como una geometría adicional a $G_{\mu\nu}^{(0)}$, el efecto debido al campo escalar, la ecuación (2.30) se convierte en:

$$\begin{aligned}\frac{b'}{8\pi r^2} + \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha}{r^4} &= \rho^{(0)} + \frac{1}{2} \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right), \\ \frac{b'}{8\pi r^3} - \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha}{r^4} &= \tau^{(0)} - \frac{1}{2} \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right), \\ \frac{b - rb'}{16\pi r^3} - \frac{1}{8\pi} \frac{\alpha}{r^4} &= p^{(0)} - \frac{1}{2} \varphi'^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Si se reemplaza $b_{\text{eff}} = b - \alpha/r$ en lugar de b y $T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)}$ en lugar de $T_{\mu\nu}^{(0)}$ en las ecuaciones (2.8)-(2.10) con $\Phi = 0$, entonces las ecuaciones efectivas se van a satisfacer y van a tener la forma de las ecuaciones (2.36). Por lo tanto, el efecto de un campo escalar en el agujero de gusano se ve representado al cambiar la función b por $b_{\text{eff}} = b - \alpha/r$. Debido a que b es proporcional a $r^{1/(1+2\beta)}$, donde β es un parámetro que aparece en la ecuación de estado que a su vez depende de la materia que se elija [32], la forma del agujero de gusano efectivo variará con el valor de los parámetros β y α . Ya que α desempeña el rol de una carga escalar, la métrica de un agujero de gusano con carga escalar debe ser:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r} + \frac{\alpha}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.37)$$

2.4.2. Agujero de gusano con carga eléctrica

En este caso se asume la métrica de un espacio-tiempo probable y luego se verifica que es correcta, entonces se establece que el espacio-tiempo de un agujero de gusano con carga eléctrica Q es [31]:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.38)$$

Este espacio-tiempo es la combinación del agujero de gusano estático esféricamente simétrico de tipo MT y el espacio-tiempo Reissner-Nordström (RN). Cuando $Q = 0$, se recupera la métrica MT y cuando $b = 0$, se convierte en el agujero negro RN con masa cero. Las ecuaciones de Einstein-Maxwell en este caso son:

$$\begin{aligned}\frac{b'}{r^2} + \frac{Q^2}{r^4} &= 8\pi (\rho^{(0)} + \rho^{(1)}), \\ \frac{b'}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4} - 2 \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(-\frac{Q^2}{r^2(r^2+Q^2)}\right) &= 8\pi (\tau^{(0)} + \tau^{(1)}), \\ \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left[\frac{Q^2(3r^2+Q^2)}{r^2(r^2+Q^2)^2} - \left(\frac{b'r - b + \frac{2Q^2}{r}}{2(r^2 - br + Q^2)}\right) \left(-\frac{Q^2}{r(r^2+Q^2)^2}\right)\right. \\ &\left. + \left(-\frac{Q^2}{r(r^2+Q^2)^2}\right)^2 - \frac{Q^2}{r^2(r^2+Q^2)^2} - \frac{b + \frac{2Q^2}{r}}{2r(r^2 - br + Q^2)}\right] &= 8\pi (P^{(0)} + P^{(1)}).\end{aligned}\quad (2.39)$$

Los términos de la materia son:

$$\rho^{(1)} = \tau^{(1)} = P^{(1)} = \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad (2.40)$$

como $T_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} (F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma})$ y el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ por la simetría esférica está dado por:

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

entonces por las ecuaciones de Maxwell, el campo eléctrico es:

$$E = \frac{Q}{r^2} \sqrt{g_{tt}g_{rr}}. \quad (2.42)$$

Al comparar las métricas (2.1) y (2.38), y debido a que $e^{2\Phi(r)} = 1 + Q^2/r^2$, se obtiene:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} \right). \quad (2.43)$$

Y debido a que $e^{2\lambda(r)} = 1/[1 - b(r)/r]$ en la métrica de la ecuación (2.1), se deduce que la función de forma efectiva b_{eff} para el agujero de gusano con carga eléctrica es:

$$b_{\text{eff}}(r) = b(r) - \frac{Q^2}{r}. \quad (2.44)$$

Por lo tanto la función de forma de agujero de gusano efectiva b_{eff} y la materia total $T_{\mu\nu}^{(1)}$ satisfacen las ecuaciones de Einstein-Maxwell como en el caso del campo escalar.

2.5. Agujeros de gusano estacionarios y dinámicos

Un espacio-tiempo estático es aquel en el que todas las componentes de la métrica son independientes de la coordenada temporal t , el sistema físico más simple estático es una estrella inactiva o un agujero negro. Se puede definir a un agujero de gusano estático como una superficie mínima en una hipersuperficie espacial estática (spacelike), de modo que sea localmente la sección más estrecha de un túnel entre dos regiones más grandes. Mientras que en un agujero de gusano dinámico la superficie espacial es mínima en alguna hipersuperficie espacial, esto implica que la superficie es una superficie atrapada (futura o pasada), generalmente asociada con agujeros negros o blancos, con una estabilidad en el sentido de que cualquier variación suficientemente pequeña de una superficie atrapada es también una superficie atrapada y, por lo tanto, también mínima en alguna hipersuperficie espacial [33].

Entonces un agujero de gusano debe ser una región del espacio-tiempo con dicha estabilidad, lo que difiere cualitativamente de un agujero de gusano estático, que es la hipersuperficie temporal (timelike) generada por las superficies mínimas. Para que una región de un agujero de gusano sea atravesable en dos sentidos debe tener dos límites, denominados aquí horizontes de agujero de gusano y en otros lugares gargantas de agujero de gusano, que están en contacto causal. La transitabilidad bidireccional local sugiere que estos horizontes deberían ser hipersuperficies temporales. Además, se espera que los horizontes estén foliados por superficies marginales (superficies marginalmente atrapadas), como ocurre con los horizontes aparentes de agujeros negros según Hawking y Ellis.

Una hipersuperficie foliada por superficies marginales será llamado horizonte de captura[34]. De hecho, los agujeros negros y los agujeros de gusano son localmente idénticos excepto por la naturaleza causal de los horizontes. Si el horizonte es temporal y, por lo tanto, transitable en dos sentidos, podemos llamarlo horizonte de agujero de gusano, mientras que si es espacial o nulo y, por lo tanto, solo transitable en un sentido, podemos llamarlo horizonte de agujero negro o de agujero blanco, respectivamente. Si la región atrapada está en el futuro o en el pasado.

La métrica general esféricamente simétrica y estática es

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)d\Omega^2. \quad (2.45)$$

Un ejemplo de un agujero de gusano estático es el propuesto por Morris y Thorne (2.2), considerado el caso más simple de agujeros de gusano estáticos y esféricamente simétricos. Mientras que la métrica para un agujero de gusano de Morris-Thorne esféricamente simétrico y dinámico se puede escribir como

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + a^2(t) \left[\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.46)$$

que corresponde a una geometría tridimensional con un factor de escala dependiente del tiempo $a(t)$.

2.6. Agujeros de gusano giratorios

La métrica para un agujero de gusano giratorio es de la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2], \quad (2.47)$$

donde N, K, ω y μ son funciones de r y θ . Esta métrica es una extensión más general del agujero de gusano MT estático (2.2). Esta permitiría describir agujeros de gusano giratorios dentro de un marco general. N es el análogo de la función de corrimiento al rojo en el agujero de MT estático, tiene que ser finito y distinto de cero para asegurar que no haya horizontes de

eventos o singularidades de curvatura. $\omega(r, \theta)$ puede interpretarse como la velocidad angular $d\phi/dt$ de una partícula que cae libremente desde el infinito hasta un punto (r, θ) . $K(r, \theta)$ determina la distancia radial apropiada [35].

2.7. Agujeros de gusano asintóticamente Anti-De Sitter

En la búsqueda de un agujero de gusano atravesable, se han hecho varios intentos para minimizar la violación de las condiciones de energía, generalmente mediante la construcción de configuraciones de agujeros de gusano donde la cantidad de materia exótica sea arbitrariamente pequeña, o esté restringida solo a regiones particulares. También se han construido soluciones de agujeros de gusano en el régimen semiclásico, en donde la violación de las condiciones de energía no es inusual, ya que ocurre en algunos casos como en el efecto Casimir [36]. De igual forma se hicieron intentos de relacionar la materia exótica que sostiene los agujeros de gusano con modelos cosmológicos, ya que según el modelo más popular, el universo está compuesto predominantemente por una sustancia de presión negativa llamada energía oscura. Ciertos candidatos para la energía oscura, como la energía fantasma, también violan la condición de energía nula, asemejándose así al caso del agujero de gusano. Inspirándose en esta observación, se encontraron una serie de soluciones de agujeros de gusano que contenían energía fantasma [37].

Los centros galácticos, por lo general tienen un objeto compacto supermasivo, que se cree que constituye un agujero negro. Sin embargo, no se puede descartar a los objetos sin horizonte como estrellas de bosones, gravastars y agujeros de gusano, por lo que es importante poder identificarlos. Para distinguir los agujeros negros de los agujeros de gusano, se han establecido varias firmas astrofísicas de agujeros de gusano que podrían permitir buscarlos en un futuro próximo. Algunos ejemplos son sus sombras [38], las lentes gravitacionales [39], los discos de acreción alrededor de los agujeros de gusano [40] y su fase de reducción con la emisión asociada de ondas gravitacionales [41].

Los agujeros de gusano de Ellis son estructuras geométricas simples que tienen una garganta que conecta dos regiones asintóticamente planas, este tipo de agujero de gusano ha sido generalizado a dimensiones superiores [42], y en cuatro [43] y cinco dimensiones al caso giratorio [44]. Aquí vamos a describir el caso del agujero de gusano asintóticamente Anti-De Sitter (AdS), en donde la garganta es sostenida por un campo fantasma. Para esto se considera la acción de Einstein-Hilbert incluyendo la constante cosmológica Λ , y con el lagrangiano de la materia, es decir del campo fantasma ψ , dado por $L_{\text{ph}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi$ [45].

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + L_{\text{ph}} \right]. \quad (2.48)$$

En este caso las ecuaciones de Einstein tienen la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

donde $\kappa = 4\pi G$, y el tensor de energía momento viene dado por $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\psi\partial^\alpha\psi - \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi$.

Entonces se obtiene la ecuación de Klein-Gordon sin masa:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\psi) = 0. \quad (2.50)$$

Para construir soluciones de agujeros de gusano asintóticamente AdS, se utiliza el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -F(\eta)N(\eta)dt^2 + \frac{p(\eta)}{F(\eta)}\left[\frac{d\eta^2}{N(\eta)} + h(\eta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right], \quad (2.51)$$

donde η es la coordenada radial cuasi-isotrópica, $N(\eta) = 1 - \Lambda\eta^2/3$ y $h(\eta) = \eta^2 + \eta_0^2$ con η_0 como el parámetro de la garganta. Esta métrica corresponde a un agujero de gusano de Ellis estático con $\Lambda = 0$, posee dos regiones asintóticamente planas Σ_\pm cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$, y su solución analítica está dada por $p(\eta) = 1$, $F(\eta) = e^{f(\eta)}$ con $f(\eta) = \frac{2M}{\eta_0}\left[\arctan\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$, y M es la masa del agujero de gusano de Ellis en Σ_+ .

Cuando $\Lambda < 0$ la métrica (2.51) debería poseer dos regiones asintóticamente AdS cuando $\eta \rightarrow \pm\infty$, para esto se obtienen las ecuaciones diferenciales para las funciones f y p

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{F'^2}{F} + \frac{\Lambda\eta F}{3pN}p' - \left(\frac{p'}{2p} + \frac{2\eta(3N - h\Lambda)}{3hN}\right)F' + \frac{2\Lambda(2\eta^2F + Fh - 3ph)}{3Nh}, \\ p'' &= \frac{p'^2}{2p} - \frac{\eta(3N - h\Lambda)}{Nh}p' + \frac{2p(3F - 3FN + 4\Lambda\eta^2F + \Lambda hF - 6\Lambda ph)}{3hFN}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Se estudia el comportamiento asintótico de estas funciones en el límite $\eta \rightarrow \infty$, realizando una expansión en serie

$$\begin{aligned} F(\eta) &= F_\infty + \frac{F_\infty\eta_0^2}{3\eta^2} - \frac{F_\infty\eta_0^2(\Lambda\eta_0^2 - 12)}{15\Lambda\eta^4} + O(\eta^{-6}), \\ p(\eta) &= F_\infty - \frac{F_\infty\eta_0^2}{3\eta^2} + \frac{F_\infty\eta_0^2(14\Lambda\eta_0^2 + 27)}{45\Lambda\eta^4} + O(\eta^{-6}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Entonces los términos impares desaparecen de forma idéntica. Con estas expansiones, las expansiones de g_{tt} y $g^{\eta\eta}$ para el agujero de gusano están dadas por

$$\begin{aligned} -g_{tt}|_{\eta\rightarrow\infty} &= -\frac{\Lambda F_\infty\eta^2}{3} + F_\infty\left(1 - \frac{\Lambda\eta_0^2}{9}\right) + \frac{F_\infty\eta_0^2}{15\eta^2}\left(1 + \frac{\Lambda\eta_0^2}{3}\right) + O(\eta^{-4}), \\ g^{\eta\eta}|_{\eta\rightarrow\infty} &= -\frac{\Lambda\eta^2}{3} + 1 - \frac{2\Lambda\eta_0^2}{9} + \frac{\eta_0^2(7\Lambda\eta_0^2 + 81)}{135\eta^2} + O(\eta^{-4}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Debido a que los términos impares desaparecen, las funciones tienen exactamente las mismas expansiones asintóticas cuando $\eta \rightarrow -\infty$ y $\eta \rightarrow \infty$, por lo tanto las condiciones de contorno apropiadas son $F(\pm\infty) = p(\pm\infty) = 1$, y entonces $F_\infty = 1$.

La garganta de un agujero de gusano es la superficie mínima del agujero de gusano. Por eso en este caso, tiene que cumplir las siguientes condiciones,

$$\left. \frac{dR_c}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_{\text{th}}} = 0, \quad \left. \frac{d^2 R_c}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_{\text{th}}} > 0, \quad (2.55)$$

donde R_c es el radio circunferencial definido como $R_c(\eta) = \sqrt{\frac{ph}{F}}$, y η_{th} es la coordenada radial de la garganta, si el agujero de gusano tiene un ecuador con coordenadas radiales η_{eq} , esto requiere que se cumpla

$$\left. \frac{dR_c}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_{\text{eq}}} = 0, \quad \left. \frac{d^2 R_c}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_{\text{eq}}} < 0. \quad (2.56)$$

Un ecuador generalmente se encuentra entre dos gargantas y, por lo tanto, indica una configuración de doble garganta.

La garganta de un agujero de gusano se puede visualizar integrando el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) en el espacio euclidiano (ρ, φ, z) . Entonces si se utilizan coordenadas cilíndricas, para la métrica anterior se tiene la parametrización

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{p}{FN} d\eta^2 + \frac{ph}{F} d\phi^2, \\ &= d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\phi^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Por comparación se obtiene la expresión para z

$$z = \pm \int \sqrt{\frac{p}{FN} - \left(\frac{d\rho}{d\eta}\right)^2} d\eta, \quad \rho \equiv R_c. \quad (2.58)$$

El signo de z depende de la coordenada radial η , para el caso del agujero de gusano de Ellis simétrico y sin masa ($\Lambda = 0, F = p = 1$), esto se vuelve

$$z = \int_0^\eta \sqrt{1 - \frac{\eta'^2}{\eta'^2 + \eta_0^2}} d\eta' = \text{arcsinh} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right). \quad (2.59)$$

Como se había mencionado, al construir agujeros de gusano se violan las condiciones de energía, en este caso se va a presentar la condición NEC (2.21). Debido a que el espacio-tiempo del agujero de gusano es esféricamente simétrico, se tienen dos opciones del vector nulo

$$k_\mu = \left(g_{tt}, \sqrt{-\frac{g_{tt}}{g_{\eta\eta}}}, 0, 0 \right), \quad \text{and} \quad k_\mu = \left(1, 0, \sqrt{-\frac{g_{tt}}{g_{\theta\theta}}}, 0 \right), \quad (2.60)$$

entonces se obtienen dos ecuaciones para probar la violación de NEC:

$$-T_t^t + T_\eta^\eta \geq 0, \quad -T_t^t + T_\theta^\theta \geq 0. \quad (2.61)$$

Y al evaluar las expresiones se obtiene

$$-T_t^t + T_n^n = -\frac{D^2 F}{p^2 h^2 N} < 0, \quad -T_t^t + T_\theta^\theta = 0, \quad (2.62)$$

lo que implica que NEC siempre se viola, esto conlleva también la violación de las condiciones de energía débil y fuerte.

Se construyeron soluciones de agujeros de gusano asintóticamente AdS para valores de la constante cosmológica Λ en el rango $-100 \leq \Lambda \leq 0$, estos agujeros de gusano son simétricos con respecto a $\eta \rightarrow -\eta$. En el límite $\Lambda \rightarrow 0$ se obtiene el agujero de gusano de Ellis asintóticamente plano, donde $F = p = 1$. Con respecto a las propiedades geométricas del agujero de gusano, se encontró que R_c tiene un solo mínimo en $\eta = 0$, desde donde se eleva de forma monótona hacia el infinito en ambos lados. Este mínimo corresponde a la garganta del agujero de gusano, es decir estos agujeros de gusano poseen una sola garganta [45].

Capítulo 3

Agujeros de Gusano asintóticamente FLRW

Wheeler investigó la posibilidad de que la construcción de agujeros de gusano sea más fácil en el nivel cuántico que el en clásico [46], sin embargo este tipo de agujero de gusano no sería atravesable ya que las fluctuaciones cuánticas en la métrica del espacio-tiempo son del orden de la longitud de Planck, es decir son distancias demasiado pequeñas en comparación con cualquier objeto macroscópico. Aunque podríamos imaginar que en un futuro muy lejano pueda existir tecnología suficientemente avanzada como para poder extraer el agujero de gusano cuántico de la espuma del espacio-tiempo, ampliarlo y ajustarlo al tamaño y la forma adecuados para el viaje interestelar [21]. Dentro de este contexto se han estudiado modelos cosmológicos que contienen agujeros de gusano (un ejemplo de esto es el agujero de gusano en un universo Anti de Sitter descrito en el capítulo anterior), como modelos más completos y físicos de agujeros de gusano. Además existe la posibilidad de que la si la inserción del agujero de gusano en un universo en expansión dejaría de lado la necesidad de materia exótica.

En este capítulo en la primera parte vamos a presentar una forma de encontrar soluciones generales que describen agujeros de gusano dependientes del tiempo, llegando al caso particular del agujero de gusano asintóticamente FLRW [47]. En la segunda parte expondremos el modelo cosmológico con un agujero de gusano atravesable ¹ combinado con la métrica FLRW, este modelo fue propuesto en 1966 por Sung-Won Kim, en su modelo cosmológico se asume que la materia se divide en dos partes: la parte cosmológica que es dependiente del tiempo, es decir la materia que se distribuye por todo el universo y la parte de la materia del agujero de gusano que depende solo del espacio. En este trabajo se encuentra que aunque la materia del agujero de gusano es exótica, la materia total (la parte cosmológica más la parte del agujero de gusano) no puede ser exótica, a diferencia de otros modelos de agujeros de gusano estáticos o inflacionarios donde la materia total es exótica. Como última parte del capítulo vamos a

¹Atravesable en el sentido del Capítulo 2, es decir se deben cumplir ciertas restricciones sobre la geometría del agujero de gusano para que se pueda considerar atravesable, de las cuales la más estudiada es la condición de materia exótica.

describir una solución exacta del agujero de gusano de MT en su forma isotrópica embebido en el universo FLRW [48].

3.1. Agujero de gusano dependiente del tiempo

En este caso se parte de una métrica general esféricamente simétrica que contiene soluciones de agujeros de gusano [47]

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)} dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.1)$$

donde $d\Omega^2 = \sin^2 \theta d\psi^2 + d\theta^2$ y $a(t)$ es la escala habitual de la coordenada temporal, $e^{2\phi(r,t)}$ es la función de corrimiento al rojo y $b(r)$ es la función que determina la forma del agujero de gusano. Debido a que los agujeros de gusano atravesables están pre-condicionados a no tener un horizonte de eventos, se asume que la función de corrimiento al rojo es finita en todas partes. Como la garganta del agujero de gusano es la superficie con radio mínimo, si r_0 es el valor mínimo de la coordenada radial, entonces en la garganta $b(r_0) = r_0$. Además $b(r)$ debe satisfacer las condición de ensanchamiento, tal que $\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Tomando en cuenta la ecuación de Einstein de la siguiente forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde $\kappa = 8\pi$, considerando a las componentes diagonales del tensor de energía momento como

$$T_{tt} = \rho(r, t), \quad T_{rr} = p_r(r, t) \quad \text{y} \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = p_t(r, t). \quad (3.3)$$

Se calcula el tensor de Einstein para la métrica dada y sus componentes quedan de la siguiente forma

$$\kappa\rho(r, t) = 3H^2 e^{-2\phi(r,t)} + \frac{b'(r)}{a^2 r^2}, \quad (3.4)$$

$$\kappa p_r(r, t) = - \left(2\dot{H} + 3H^2 - 2H\phi_t \right) e^{-2\phi(r,t)} - \frac{b(r)}{a^2 r^3} + \frac{2(r - b(r))}{a^2 r^2} \phi_r, \quad (3.5)$$

$$\kappa p_t(r, t) = - \left(2\dot{H} + 3H^2 - 2H\phi_t \right) e^{-2\phi(r,t)} + \frac{b(r) - rb'(r)}{2a^2 r^3} + \frac{2r - b(r) - rb'(r)}{2a^2 r^2} \phi_r + \frac{r - b(r)}{a^2 r} (\phi_r^2 + \phi_{rr}), \quad (3.6)$$

$$0 = -2e^{-2\phi(r,t)} \phi_r \dot{a} \frac{r - b(r)}{r}, \quad (3.7)$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$, el símbolo prima (\prime) denota diferenciación con respecto a r y el punto ($\dot{}$) denota diferenciación con respecto a t . La ecuación (3.7) se satisface cuando $\phi_r = 0$, es decir,

la métrica es dinámica, no homogénea y la función de corrimiento al rojo es independiente de la coordenada radial ². Entonces ahora se elije $p_r(r, t) = \alpha p_t(r, t)$, donde α puede ser una función de r . El tensor energía-momento satisface las ecuaciones de conservación dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + H(3\rho + p_r + 2p_t) &= 0, \\ \frac{\partial p_r}{\partial r} &= \frac{2}{r}(p_t - p_r). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se asume que α es una función de r , entonces

$$a^2 \left(2\dot{H} + 3H^2 - 2H\dot{\phi} \right) e^{-2\phi(t)} = -\frac{1}{(1-\alpha(r))} \left[\frac{b(r)}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha(r)}{2} \right) - \frac{b'(r)}{r^2} \left(\frac{\alpha(r)}{2} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Así se obtiene la ecuación a resolver (3.9), el lado derecho de dicha ecuación solo depende de la coordenada radial r , mientras que el lado izquierdo depende de la coordenada temporal t . Dado que las coordenadas t y r son independientes, se puede igualar el lado izquierdo y el lado derecho a un factor constante β y obtener las siguientes ecuaciones:

$$a^2 \left(2\dot{H} + 3H^2 - 2H\dot{\phi} \right) e^{-2\phi(t)} - \beta = 0, \quad (3.10)$$

$$b'(r) - \frac{b}{r} \left(1 + \frac{2}{\alpha(r)} \right) - 2\beta r^2 \left(\frac{1}{\alpha(r)} - 1 \right) = 0. \quad (3.11)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales con incógnitas $a(t)$ y $b(r)$ pueden resolverse para algunos valores conocidos de $\alpha(r)$ y $\phi(t)$.

Solución para $a(t)$

Se reescribe la ecuación (3.10) para $a(t)$

$$a\ddot{a} - a\dot{a}\dot{\phi}_t + \frac{1}{2}\dot{a}^2 - 2\omega^2 e^{2\phi} = 0, \quad (3.12)$$

donde $\omega^2 = \frac{\beta}{4}$. Para resolver la ecuación se asume que $e^{\phi(t)} = a(t)$, lo que reduce la ecuación (3.12) a una ecuación diferencial ordinaria lineal $\ddot{X} - 2\omega^2 X = 0$, donde $a(t) = X^2$, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \beta > 0 &\Rightarrow a(t) = e^{\pm 2\omega t}, \\ \beta < 0 &\Rightarrow a(t) = e^{\pm 2i\omega t}, \\ \beta = 0 &\Rightarrow a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

²La ecuación (3.7) también se satisface cuando $\dot{a} = 0$ que sería el caso de una métrica estática, no homogénea y esféricamente simétrica y cuando $\phi_r = 0$ en el que la métrica sería dinámica, no homogénea y la función de corrimiento al rojo independiente de la coordenada radial. Pero en este trabajo no se va a revisar estos casos.

Con la elección de $e^{\phi(t)}$ se reemplaza el tiempo conforme t con el tiempo propio τ mediante la relación $d\tau = a(t)dt$. Entonces, $a(t) \equiv A(\tau)$ tal que la métrica del agujero de gusano ahora se asemeja a un agujero de gusano dinámico sin fuerzas de marea soportado por materia anisotrópica.

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (3.14)$$

Solución para $b(r)$

Se reescribe $\alpha(r) = \frac{g(r)}{rg'(r)}$, donde $g(r)$ corresponde a cualquier función arbitraria de r . Con esto la solución de la ecuación (3.11) para $b(r)$ es la siguiente:

$$\frac{b(r)}{r} = -\beta r^2 + g^2(r). \quad (3.15)$$

Dependiendo de la función que se escoja para $g(r)$ se pueden obtener soluciones viables para la garganta del agujero de gusano. Al sustituir $b(r)$ en la métrica (3.1), se obtiene:

$$ds^2 = -e^{2\phi(t)} dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - (-\beta)r^2 - \frac{b_n(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (3.16)$$

donde $\frac{b_n(r)}{r} = g^2(r)$, la constante $-\beta$ puede interpretarse como la curvatura del espacio-tiempo, que puede ser 0, +1, -1, para un universo plano, abierto y cerrado, respectivamente. Además, si $g^2(r) \rightarrow 0$ (para $r \rightarrow \infty$) se obtiene el elemento de línea FLRW. Ahora, si se considera la métrica del agujero de gusano como se define arriba, la función de forma efectiva que define la garganta del agujero de gusano estaría dada por $\frac{b_n(r)}{r} = g^2(r)$. La geometría del agujero de gusano estático habitual se obtiene como un caso especial de la solución general anterior para $\beta = 0$ y $a(t) = \text{constante}$. Por lo tanto, la solución general anterior puede describir una variedad de geometrías espaciales dependiendo de la elección de los parámetros.

3.2. División del universo en parte cosmológica y del agujero de gusano

Al combinar dos métricas de espacio-tiempo: espacio-tiempo FLRW (1.28) con la métrica de agujero de gusano estático MT (2.2), se puede construir la métrica de un agujero de gusano asintóticamente FLRW [32]

$$ds^2 = -e^{\Phi(r)} dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2 - b(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.17)$$

donde $R(t)$ es el factor de escala del universo y k es el signo de la curvatura del espacio-tiempo, que puede ser +1,0,-1. Para la métrica (3.17) se puede encontrar el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, con lo que las ecuaciones de Einstein (3.2) para $\Phi = 0$, son

$$8\pi T_{tt} = 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k}{R^2} + \frac{b'}{R^2 r^2}, \quad (3.18)$$

$$8\pi T_{rr} = -\frac{1}{1 - kr^2 - b(r)/r} \left(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k + \frac{b}{r^3} \right), \quad (3.19)$$

$$8\pi T_{\theta\theta} = -r^2 \left(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k + \frac{b'}{2r^2} - \frac{b}{2r^3} \right). \quad (3.20)$$

En este caso el espacio embebido a $t = \text{const}$ y $\theta = \pi/2$ está dado por

$$ds^2 = \frac{R^2 dr^2}{1 - kr^2 - b(r)/r} + R^2 r^2 d\phi^2 = d\bar{z}^2 + d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\phi^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{b}/\bar{r}} + \bar{r}^2 d\phi^2, \quad (3.21)$$

entonces

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{r}} = \pm \left(\frac{\bar{r}}{\bar{b}} - 1 \right)^{-1/2} = \frac{dz}{dr}, \quad (3.22)$$

donde $\bar{b} = Rb + kRr^3$, y $\bar{r} = Rr$, en este caso la condición de ensanchamiento es

$$\frac{d^2\bar{r}}{d\bar{z}^2} = \frac{1}{R} \frac{b - b'r - 2kr^3}{2(b + kr^3)^2} = \frac{\bar{b} - \bar{b}'\bar{r}}{2\bar{b}^2} > 0. \quad (3.23)$$

A medida que el universo se expande el término $d^2\bar{r}/d\bar{z}^2$ se aproxima a cero, es decir, la forma del agujero de gusano gradualmente desaparece. Para este agujero de gusano (3.17), y para $\Phi = 0$, la función de exotocidad es

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{1}{4\pi|\rho|} \left[\left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) + \frac{(b + kr^3)^2}{Rr^3} \frac{d^2\bar{r}}{d\bar{z}^2} \right]. \quad (3.24)$$

Debido a que $d^2\bar{r}/d\bar{z}^2$ debe ser positivo, el signo del primer término $A \equiv \ddot{R}/R - \dot{R}^2/R^2$ de la ecuación (3.24) juega un papel importante en determinar el signo de ζ . En el caso de un agujero de gusano estático ($A = 0$), ζ debe ser positiva o $\tau > \rho$, lo que implica que se necesita materia exótica. Este primer término A en el modelo cosmológico siempre es menor que cero (excepto en el caso de inflación exponencial), mientras que el segundo término siempre es positivo. Lo que conlleva a la posibilidad de que ζ sea negativo debido a la contribución cosmológica A , a pesar de que la contribución exótica del agujero de gusano siempre sea positiva [32].

Se puede nombrar a las componentes del tensor energía-momento como

$$T_{tt} = \rho(r, t), \quad T_{rr} = -\tau(r, t) \quad y \quad T_{\theta\theta} = P(r, t), \quad (3.25)$$

donde las cantidades $\rho(r, t)$, $\tau(r, t)$ y $P(r, t)$ son la densidad de energía de masa, la tensión radial y la presión lateral, respectivamente. Así las ecuaciones de Einstein (3.18)-(3.20) quedan de la siguiente forma

$$\rho(r, t) = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{3(\dot{R}^2 + k)}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{b'}{r^2} \right], \quad (3.26)$$

$$\tau(r, t) = \frac{1}{8\pi} \left[2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{(\dot{R}^2 + k)}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{b}{r^3} \right], \quad (3.27)$$

$$P(r, t) = \frac{1}{8\pi} \left[-2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{(\dot{R}^2 + k)}{R^2} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{b}{r^3} - \frac{b'}{r^2} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Y la ley de conservación $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ en este caso se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + (3\rho + 2P - \tau)\frac{\dot{R}}{R} &= 0, \\ \tau' + (P + \tau)\frac{2}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde el símbolo prima (\prime) denota diferenciación con respecto a r y el punto ($\dot{}$) denota diferenciación con respecto a t . Se separa la materia en dos partes, con lo que se puede resolver el problema de forma más simple, como ρ , τ y P dependen tanto de t como de r , se utiliza el siguiente ansatz

$$\begin{aligned} R^2(t)\rho(t, r) &= R^2(t)\rho_c(t) + \rho_w(r), \\ R^2(t)\tau(t, r) &= R^2(t)\tau_c(t) + \tau_w(r), \\ R^2(t)P(t, r) &= R^2(t)P_c(t) + P_w(r). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Los subíndices c y w indican la parte cosmológica y la parte del agujero de gusano, respectivamente. La parte cosmológica que depende solo de t corresponde a la materia que se distribuye por todo el universo y la parte estática del agujero de gusano depende solo de r y corresponde solamente a la materia que es parte del agujero de gusano. Debido a que la parte cosmológica de las ecuaciones y la materia deben ser isotrópicas, se requiere que $\tau_c(t) = -P_c(t)$. Por esta separación de la materia también se puede separar en dos partes las ecuaciones (3.26)-(3.29)

$$R^2\rho_c(t) - \frac{3}{8\pi} (\dot{R}^2 + k) = \frac{b'(r)}{8\pi r^2} - \rho_w(r) = l, \quad (3.31)$$

$$R^2\tau_c(t) - \frac{3}{8\pi} (2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k) = \frac{b(r)}{8\pi r^3} - \tau_w(r) = m, \quad (3.32)$$

$$R^2P_c(t) + \frac{3}{8\pi} (2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{b(r)}{r^3} - \frac{b'(r)}{r^2} \right) - P_w(r) = n, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{R^3}{R} \left[\dot{\rho}_c + (3\rho_c + 2P_c - \tau_c) \frac{\dot{R}}{R} \right] &= -\rho_w - 2P_w + \tau_w = q = l - 3m, \\ \tau_w' + (P_w + \tau_w) \frac{2}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde l , m , n y q son constantes de separación independientes de r y t . Al resolver la ley de conservación (3.34) con la ecuación de estado $P_c = \gamma\rho_c$ para la parte cosmológica, se obtiene que ρ_c es

$$\rho_c = aR^{-3(1+\gamma)} + \frac{q}{(3\gamma+1)}R^{-2}. \quad (3.35)$$

También se pueden encontrar las distribuciones espaciales de la parte del agujero de gusano $b(r)$, $\rho_w(r)$, $\tau_w(r)$, y $P_w(r)$. Para esto se asume que $P_w = \beta\rho_w$, de forma similar a la ecuación de estado, y se obtiene

$$\rho_w(r) = Cr^{-2(1+3\beta)/(1+2\beta)}, \quad (3.36)$$

$$\tau_w(r) = C(1+2\beta)r^{-2(1+3\beta)/(1+2\beta)}, \quad (3.37)$$

$$b(r) = 8\pi C(1+2\beta)r^{1/(1+2\beta)}. \quad (3.38)$$

La constante C es la constante de integración. Las restricciones de las constantes $\beta < -1/2$ y $C < 0$, son debido a condición asintóticamente plana del agujero de gusano, con estas restricciones, se determinan los signos de la materia y de la función de forma del agujero de gusano. Entonces $\rho_w < 0$ y $P_w, \tau_w, b > 0$, que muestra la propiedad exótica de la materia del agujero de gusano.

Así la condición de ensanchamiento (3.23) que se obtiene es

$$b - b'r - 2kr^3 = 16\pi\beta Cr^{1/(1+2\beta)} - 2kr^3 > 0. \quad (3.39)$$

Cuando k es cero o -1 el modelo satisface la condición de ensanchamiento para todo el rango de r . Cuando $k = 1$, r debe ser menor a $r_0 = (8\pi\beta C)^{(1+\beta)/(2+3\beta)}$ para satisfacer la condición. Lo que implica que el tamaño de la garganta b_0 debe ser menor a r_0 , la forma del agujero de gusano atravesable se mantiene sólo en la región donde $b_0 \leq r < r_0$.

3.3. Formalismo de McVittie para agujeros de gusano

Una forma de construir un modelo cosmológico con un agujero de gusano es empezar con un agujero de gusano tipo Morris-Thorne, combinar el agujero de gusano con el trasfondo cosmológico de forma plausible y a partir de las ecuaciones de Einstein encontrar condiciones satisfactorias para la materia. De esta forma se derivó, usando un método similar al de

McVittie [49], la solución exacta del modelo cosmológico con un agujero de gusano sin carga y asintóticamente FLRW [48]. Estas soluciones de un agujero negro en el universo en expansión se parecen más a un modelo realista que llamó la atención debido a las evidencias de que el universo se está expandiendo.

Al igual que con los agujeros negros, es de interés estudiar el modelo exacto de un agujero de gusano incrustado en el universo, ya que proporcionaría mucha información para comprender la relación entre la materia del agujero de gusano y el espacio-tiempo de fondo. Si un agujero de gusano estuviera en el universo en expansión, interactuaría con la energía oscura de alguna manera considerable. A continuación, vamos a investigar la solución de Kim, la cual pudo satisfacer la ecuación de Einstein con un agujero de gusano tipo Morris-Thorne a partir del espacio-tiempo isotrópico genérico. También obtuvieron dos horizontes aparentes: uno es el horizonte cosmológico aparente y el otro es la garganta del agujero de gusano. Es importante saber cómo la materia afecta el espacio-tiempo de la cosmología del agujero de gusano y sus horizontes, porque con esa información se puede obtener el papel del agujero de gusano en el universo.

Para derivar el modelo exacto de un agujero de gusano dentro del universo FLRW, debido a la isotropía del modelo cosmológico, primero se debe encontrar la forma isotrópica del agujero de gusano de MT (2.2). Se introducen las nuevas coordenadas (\tilde{t}, \tilde{r}) para definir la forma isotrópica del agujero de gusano

$$ds^2 = -A^2 d\tilde{t}^2 + B^2 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2). \quad (3.40)$$

Para ver la geometría del agujero de gusano de forma más simple, en la métrica de MT se considera $b(r) = \frac{b_0^2}{r}$ y $e^{2\Phi} = 1$. Con estas consideraciones, y al comparar las métricas de las ecuaciones (2.2) y (3.40) se obtiene, después de integrar y teniendo en cuenta las condiciones de frontera, lo siguiente:

$$r = \tilde{r} + \frac{b_0^2}{4\tilde{r}}, \quad B = \frac{r}{\tilde{r}} = \left(1 + \frac{b_0^2}{4\tilde{r}^2}\right), \quad (3.41)$$

entonces la métrica del agujero de gusano en su forma isotrópica es

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + \left(1 + \frac{b_0^2}{4\tilde{r}^2}\right)^2 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2). \quad (3.42)$$

Ahora, la métrica no diverge en $\tilde{r} = b_0/2$, mientras que diverge en $r = b_0$ en el agujero de gusano de MT. Se pueden transformar las componentes del tensor de energía-momento de la métrica MT a las nuevas coordenadas

$$\begin{aligned}
 T^{\bar{0}}_{\bar{0}} &= -\frac{4^4 b_0^2 \tilde{r}^4}{8\pi (b_0^2 + 4\tilde{r}^2)^4} = \rho_w, \\
 T^{\bar{1}}_{\bar{1}} &= -\frac{4^4 b_0^2 \tilde{r}^4}{8\pi (b_0^2 + 4\tilde{r}^2)^4} = -\tau_w, \\
 T^{\bar{2}}_{\bar{2}} &= +\frac{4^4 b_0^2 \tilde{r}^4}{8\pi (b_0^2 + 4\tilde{r}^2)^4} = P_w, \\
 T^{\bar{3}}_{\bar{3}} &= +\frac{4^4 b_0^2 \tilde{r}^4}{8\pi (b_0^2 + 4\tilde{r}^2)^4} = P_w,
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde ρ_w , τ_w , y P_w son la densidad de energía, tensión y presión del agujero de gusano, respectivamente. En este caso también se debe usar la métrica del espacio FLRW en forma isotrópica [49]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{(1 + kr^2)^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \tag{3.44}$$

Ahora se va a empezar con la forma general de una métrica isotrópica para poder embeber el agujero de gusano en el universo FLRW

$$ds^2 = -e^{\zeta(r,t)} dt^2 + e^{\nu(r,t)} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \tag{3.45}$$

Siguiendo la solución de McVittie [49], se asume que la materia en el universo está distribuida de forma esféricamente simétrica alrededor del agujero de gusano, sin flujo de materia desde o hacia él. Se agrega otra suposición, debido a que el agujero de gusano es un objeto localizado, la materia del agujero de gusano se separa de la materia cosmológica, que se distribuye por el universo. Con este ansatz se separa la materia en dos partes: el término de materia cosmológica, dependiente del tiempo e isótropo, y el término de materia del agujero de gusano dependiente solo del espacio y no es necesariamente isótropo

$$\begin{aligned}
 a^2(t)\rho(r,t) &= a^2(t)\rho_c(t) + \rho_w(r), \\
 a^2(t)p_1(r,t) &= a^2(t)p_{1c}(t) + p_{1w}(r), \\
 a^2(t)p_2(r,t) &= a^2(t)p_{2c}(t) + p_{2w}(r), \\
 a^2(t)p_3(r,t) &= a^2(t)p_{3c}(t) + p_{3w}(r),
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

entonces las componentes del tensor de Einstein para la métrica general isotrópica (3.45) son

$$\begin{aligned}
 G^0_0 &= \frac{1}{4r} \left\{ \left[(8\nu' + 4\nu''r + \nu'^2r) e^{-\nu+\zeta} - 3\dot{\nu}^2r \right] e^{-\zeta} \right\}, \\
 G^0_1 &= \frac{1}{2} (2\dot{\nu}' - \dot{\nu}\zeta') e^{-\zeta}, \\
 G^1_1 &= \frac{1}{2r} \left\{ \left[r \left(-2\ddot{\nu} + \left(-\frac{3}{2}\dot{\nu} + \dot{\zeta} \right) \dot{\nu} \right) e^{-\zeta+\nu} + 2\nu' + 2\zeta' + \zeta'\nu'r + \frac{1}{2}r\nu'^2 \right] e^{-\nu} \right\}, \\
 G^1_0 &= \frac{1}{2} (-2\dot{\nu}' + \dot{\nu}\zeta') e^{-\nu}, \\
 G^2_2 = G^3_3 &= \frac{1}{4r} \left\{ \left[2\zeta' + 2\nu' + 2\nu''r + 2\zeta''r + \zeta'^2r \right] e^{-\nu} + 2r \left(-2\ddot{\nu} - \frac{3}{2}\dot{\nu}^2 + \dot{\zeta}\dot{\nu} \right) e^{-\zeta+\nu} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde el punto indica (\cdot) derivada con respecto a t y prima $(')$ es derivada con respecto a r . Se resuelve la ecuación $G^1_0 = 0$ para un observador ultra-estático³ ($\zeta = 0$). La ecuación se convierte en $\dot{\nu}' = 0$, cuya solución es

$$e^{\nu(t,r)} = e^{\alpha(t)} e^{\beta(r)}. \tag{3.48}$$

Como se quiere encontrar una métrica que cerca de la garganta ($r \rightarrow b_0/2$) se comporte como la métrica MT (3.42) y en el límite asintótico ($r \rightarrow \infty$) sea la métrica FLRW, entonces con estas condiciones para la ecuación (3.48) se obtiene

$$\beta(r) = 2 \ln \left(1 + \frac{b_0^2}{4r^2} \right) \text{ si } r \rightarrow b_0/2 \quad \text{y} \quad \beta(r) = -2 \ln (1 + kr^2) \text{ si } r \rightarrow \infty. \tag{3.49}$$

Para que se cumplan las condiciones de borde exigidas, entonces

$$e^{\alpha(\tau)} = a^2(\tau). \tag{3.50}$$

Tomando en cuenta la ecuación de Einstein (3.2), al comparar G^1_1 y G^2_2 , y nombrar como p_1 y p_2 a las componentes de T^1_1 y T^2_2 , respectivamente, se obtiene

$$G^1_1 - G^2_2 = \kappa(p_1 - p_2), \tag{3.51}$$

$$\left[\nu'' - \frac{1}{r}\nu' - \frac{1}{2}(\nu')^2 \right] e^{-\nu} = 2\kappa(p_2 - p_1). \tag{3.52}$$

Se asume que $p_1 = p_{1c} + p_{1w}$ y $p_2 = p_{2c} + p_{2w}$, haciendo uso del ansatz para separar la materia en parte cosmológica y parte del agujero de gusano. Por isotropía $p_{1c} = p_{2c}$, entonces la ecuación anterior se convierte en una ecuación que solo contiene partes puramente espaciales

³Un observador ultra-estático es un observador que se encuentra en un punto fijo del espacio, no experimenta ninguna aceleración y se mueve con una velocidad constante en el marco de referencia en el que se encuentra. Entonces en presencia de un observador ultra-estático, la componente temporal de la métrica isotrópica general (3.45) es constante.

$$\left[\beta'' - \frac{1}{r} \beta' - \frac{1}{2} (\beta')^2 \right] e^{-\beta} = 2\kappa (p_{2w} - p_{1w}) = \frac{4b_0^2}{r^4 (1 + b_0^2/4r^2)^4}. \quad (3.53)$$

La solución general de esta ecuación diferencial no homogénea es la solución de la ecuación homogénea más la solución particular, es decir $\beta = \beta_c + \beta_w$, β_c es el trasfondo cosmológico global que domina en la región lejana y β_w es la solución local del agujero de gusano que domina cerca del origen. Primero se encuentra la solución homogénea

$$e^{-\beta} \left(\beta'' - \frac{\beta'}{r} - \frac{\beta'^2}{2} \right) = 0. \quad (3.54)$$

Se puede decir que la solución a la ecuación homogénea coincide con β_c ya que el término de la derecha de la ecuación diferencial es diferente de cero solo en el agujero de gusano, y al utilizar las condiciones de borde que se encontró para β en el límite asintótico ($\rho \rightarrow \infty$) (3.49), se obtiene

$$\beta_c = -2 \log (kr^2 + 1). \quad (3.55)$$

De la misma forma, la solución particular que sería β_w , debe ser la solución local para el agujero de gusano y si se toma en cuenta que tenemos la solución para $\rho \rightarrow b_0/2$ (ecuación (3.49)), al reemplazar en la ecuación no homogénea se encuentra que

$$\beta_w = 2 \log \left(1 + \frac{b_0^2}{4r^2} \right). \quad (3.56)$$

Al reemplazar las soluciones encontradas, se tiene

$$e^\nu = \frac{e^{\alpha(t)}}{(\kappa r^2 + 1)^2} \left(1 + \frac{b_0^2}{4r^2} \right)^2. \quad (3.57)$$

Entonces la solución del agujero de gusano cosmológico se convierte en

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2(t)}{(\kappa r^2 + 1)^2} \left(1 + \frac{b_0^2}{4r^2} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (3.58)$$

En la solución exacta encontrada del agujero de gusano en el modelo cosmológico FLRW, la materia se separa en una parte dependiente del tiempo que corresponde al fondo cosmológico $\rho_c(t)$, y en una parte del agujero de gusano que depende solo del espacio $\rho_w(r)$. Como se observa en la ecuación (3.57), en la métrica del espacio-tiempo del agujero de gusano, la parte cosmológica se acopla con la parte del agujero de gusano sin que se vea afectado el fondo cosmológico, ya que $\rho_w(r)$ no afecta el término $(1 + kr^2)$ determinado por $\rho_c(t)$.

Horizontes aparentes

Un horizonte aparente es una superficie que es el límite entre los rayos de luz que se dirigen hacia el exterior y se mueven hacia el exterior y los que se dirigen hacia el exterior

pero se mueven hacia el interior. Para comprender la estructura causal del espacio-tiempo, es necesario encontrarlos y analizarlos. Entonces, para esto se redefine la coordenada R del espacio-tiempo (3.58)

$$R \equiv a \left(\frac{1 + b_0^2/4r^2}{1 + kr^2} \right) r = a(t)A(r). \quad (3.59)$$

Así la métrica puede ser reescrita como $ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + R^2 d\Omega^2$, donde $x^a = (t, R)$ y $h_{ab} = \text{diag}(-1, a^2(1 + b_0^2/4r^2)/(1 + kr^2))$. La ubicación del horizonte aparente se define a partir de la relación $h^{ab}\partial_a R \partial_b R = 0$, entonces para la métrica estudiada el horizonte aparente está ubicado en la posición que satisface la siguiente relación

$$\Delta \equiv 1 - \frac{H^2 R^2}{r(R)^2 J(R)^2} = 0, \quad (3.60)$$

$$\text{donde, } \frac{\dot{a}}{a} = H, \quad \frac{A'}{A} = J = \frac{1}{r} - \frac{b_0^2/2r^3}{1+b_0^2/4r^2} - \frac{2kr}{1+kr^2}.$$

Al redefinir el sistema de coordenadas, Δ aparece como el coeficiente de g_{tt} y g_{RR} para la métrica similar a la de Schwarzschild. Por simplicidad se analiza el caso $k = 0$, que es el agujero de gusano en el universo FLRW plano. En este caso r está dado por

$$r = \frac{R}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b_0^2}{4}\right)}. \quad (3.61)$$

Hay dos relaciones entre r y R , pero se elije el signo positivo debido a la naturaleza positiva de r . Al reemplazar la ecuación (4.37) en la ecuación (3.60) se obtiene la ubicación de los horizontes aparentes en

$$R_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2H^2}} \left[1 \pm \sqrt{1 - (2b(t)H)^2} \right]^{1/2} < \frac{1}{H} \equiv R_H, \quad (3.62)$$

donde, $b(t) \equiv a(t)b_0$ es el tamaño de la garganta del agujero de gusano escalada por $a(t)$ y es igual al mínimo de R en $r = b_0/2$. $R_H = 1/H$ es el horizonte aparente cosmológico del modelo FLRW en ausencia de un agujero de gusano ($b_0 = 0$) y se llama horizonte de Hubble. En este caso cuando $b_0 = 0$ los horizontes aparentes se aproximan a $R_+ = R_H$ y $R_- = 0$, respectivamente.

Las soluciones a la ecuación $\Delta = 0$ dependen de los valores relativos de $b(t)$ para $1/(2H) = R_H/2$. Debido a que se trató la coordenada isotrópica en el agujero de gusano cosmológico, el mínimo es la mitad del valor en el caso esféricamente simétrico, por esto la comparación $R_{\text{mín}}$ a $R_H/2$ es razonable. Los 3 casos para la solución de $\Delta = 0$ son

- En el caso de $b(t) < R_H/2$, hay dos horizontes: El mayor es R_+ que corresponde al horizonte cosmológico y el menor es R_- que es el tamaño de la garganta del agujero de gusano en el universo en expansión.

- Cuando $b(t) = R_H/2$, los dos horizontes coinciden y solo hay un horizonte, como $R_{\pm} = 1/(\sqrt{2}H)$. En este caso el coeficiente Δ es negativo excepto en este punto.
- Si $b(t) > R_H/2$ no hay horizontes aparentes. En este caso el coeficiente Δ siempre es negativo, nunca es cero.

En el siguiente capítulo usaremos el formalismo desarrollado en este capítulo para aplicarlo a un agujero de MT con carga (2.38). Como se presentó en este capítulo seguiremos el método desarrollado por McVittie para agujeros negros, para construir la métrica de un universo asintóticamente FLRW con un agujero de gusano cargado incrustado. Para esto partiremos de la métrica del agujero de gusano cargado y calcularemos sus ecuaciones de campo. Luego usaremos la métrica isotrópica y dividiremos el tensor de energía-impulso en la parte cosmológica y la parte del agujero de gusano. Usando este anzats, las componentes del tensor energía-impulso de la métrica cargada, además del comportamiento de la métrica en los límites correspondientes a la garganta del agujero de gusano y al infinito espacial, encontraremos la métrica deseada del modelo de universo asintóticamente FLRW con un agujero de gusano cargado.

Capítulo 4

Universo FLRW con un agujero de gusano cargado

Como se anotó en los capítulos anteriores, los agujeros de gusano son soluciones de las ecuaciones de Einstein, y su propiedad más estudiada es la necesidad de materia exótica para sostener al agujero de gusano, esta materia exótica viola las condiciones de energía clásicas [21]. Se pueden construir métricas de agujeros de gusano asegurándose que satisfaga las ecuaciones de Einstein, de esta forma se pueden construir modelos cosmológicos y estudiar sus propiedades.

Desde un punto de vista teórico es interesante predecir las características que debería tener un objeto predicho por una teoría, en el caso de este trabajo, un agujero de gusano cargado dentro de la RG clásica. Un ejemplo son los agujeros negros, que fueron predichos por la RG, y fueron observados por primera vez de forma directa por el Event Horizon Telescope en 2017 del agujero negro supermasivo en el centro galáctico de Messier 87 [50]. Por esto, es necesario tener un modelo plausible de los agujeros de gusano para caracterizarlos y predecir su comportamiento si existieran en alguna parte del universo.

Para obtener modelos cosmológicos que contengan objetos de interés en la física, se estudia la forma de tener una geometría de fondo RW que sea compatible localmente con objetos como los agujeros negros o agujeros de gusano, esta métrica debe reproducir las condiciones iniciales del universo y su evolución posterior. En este sentido una de las métricas más usadas es la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Así se han logrado construir este tipo de métricas utilizando agujeros negros de Schwarzschild [51], agujeros negros de Reissner-Nordström [52], también de esta forma se ha logrado obtener el modelo cosmológico con una forma isotrópica del agujero de gusano tipo Morris-Thorne [48].

En este capítulo vamos a expandir la solución encontrada en [48], es decir para el caso de un agujero de gusano cargado. Esta nueva métrica tendrá propiedades mejores y nos permitirá estudiar un modelo cosmológico que incluye un agujero de gusano con carga.

4.1. Agujero de gusano cargado

Para encontrar el modelo de un agujero de gusano cargado dentro de un universo FLRW, vamos a utilizar el agujero de gusano MT con carga eléctrica que habíamos mencionado en el Capítulo 2 (2.38). Por simplicidad consideramos que la función $b(r)$ es b_0^2/r , de esta forma se obtiene

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b_0^2 - Q^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (4.1)$$

Para este agujero de gusano las componentes del tensor energía-momento están dadas por

$$T^t_t = \frac{b_0^2 - Q^2}{8\pi r^4}, \quad (4.2)$$

$$T^r_r = \frac{b_0^2(Q^2 - r^2)}{8\pi r^4(Q^2 + r^2)} - \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad (4.3)$$

$$T^\theta_\theta = T^\phi_\phi = \frac{Q^2}{8\pi r^4} - \frac{b_0^2(Q^4 + Q^2 r^2 - r^4)}{8\pi r^4(Q^2 + r^2)^2}. \quad (4.4)$$

4.2. Agujero de gusano isotrópico

La métrica del agujero de gusano de MT (2.2) es asintóticamente plana, y las coordenadas en las que está escrita no permiten construir una solución que sea asintóticamente FLRW. Debido a que las coordenadas que se utilizan para describir el espacio-tiempo FLRW son isotrópicas, debemos trabajar con una métrica que se pueda escribir en dichas coordenadas. Como se describió en el Capítulo 3, la métrica de MT se puede escribir de esa manera (3.42). Por lo tanto, la métrica del agujero de gusano cargado MT también se puede escribir de esta forma.

Entonces escribimos la métrica del agujero de gusano cargado (4.1) en su forma isotrópica, mediante la transformación

$$t = \tau, \quad s = \tilde{s}, \quad r = \rho - \frac{Q^2 - b_0^2}{4\rho}. \quad (4.5)$$

Entonces el agujero de gusano cargado (4.1) en su forma isotrópica es

$$d\tilde{s}^2 = - \left(1 + \frac{16Q^2\rho^2}{(b_0^2 - Q^2 + 4\rho^2)^2} \right) d\tau^2 + \left(1 + \frac{b_0^2 - Q^2}{4\rho^2} \right)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (4.6)$$

En las coordenadas isotrópicas el agujero de gusano ya no diverge en la garganta, es decir ya no diverge en $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{b_0^2 - Q^2}$, como lo hacía en su forma no isotrópica. Ahora en las nuevas coordenadas las componentes del tensor energía-momento son

$$T^\tau{}_\tau = \frac{256\rho^4 (b_0^2 - Q^2)}{8\pi (b_0^2 + 4\rho^2 - Q^2)^4}, \quad (4.7)$$

$$T^\rho{}_\rho = \frac{256\rho^4 \left(-16\rho^4 (b_0^2 + Q^2) - 8\rho^2 (b_0^2 - Q^2)^2 - (b_0^2 - Q^2)^2 (b_0^2 + Q^2) \right)}{8\pi (b_0^2 + 4\rho^2 - Q^2)^4 \left(b_0^4 - 2b_0^2 (Q^2 - 4\rho^2) + (4\rho^2 + Q^2)^2 \right)}, \quad (4.8)$$

$$T^\theta{}_\theta = T^\phi{}_\phi = \frac{256\rho^4 \left((b_0^2 + Q^2) (b_0^2 - Q^2)^4 + 16\rho^2 (b_0^4 - b_0^2 Q^2 + Q^4) (b_0^2 - Q^2)^2 \right)}{8\pi (b_0^2 + 4\rho^2 - Q^2)^4 \left(b_0^4 - 2b_0^2 (Q^2 - 4\rho^2) + (4\rho^2 + Q^2)^2 \right)^2} +$$

$$\frac{256\rho^4 (256\rho^8 (b_0^2 + Q^2) + 256\rho^6 (b_0^4 - b_0^2 Q^2 + Q^4) + 32\rho^4 (3b_0^6 - 7b_0^4 Q^2 + b_0^2 Q^4 + 3Q^6))}{8\pi (b_0^2 + 4\rho^2 - Q^2)^4 \left(b_0^4 - 2b_0^2 (Q^2 - 4\rho^2) + (4\rho^2 + Q^2)^2 \right)^2}. \quad (4.9)$$

Nombramos a las componentes del tensor energía-momento como

$$T^\tau{}_\tau = \rho_w, \quad T^\rho{}_\rho = -\tau_w \quad y \quad T^\theta{}_\theta = T^\phi{}_\phi = P_w, \quad (4.10)$$

donde ρ_w , τ_w , y P_w son la densidad de energía, tensión y presión del agujero de gusano, respectivamente.

4.3. Solución de agujero de gusano embebido en el universo FLRW

Consideramos la siguiente métrica isotrópica en forma general para embeber el agujero de gusano en el universo FRLW

$$ds^2 = -e^{\zeta(\rho,\tau)} d\tau^2 + e^{\nu(\rho,\tau)} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (4.11)$$

Las componentes del tensor de Einstein para esta métrica general isotrópica (4.11) son

$$G^0{}_0 = \frac{1}{4r} \left\{ \left[(8\nu' + 4\nu''r + \nu'^2 r) e^{-\nu+\zeta} - 3\nu^2 r \right] e^{-\zeta} \right\}, \quad (4.12)$$

$$G^0{}_1 = \frac{1}{2} (2\nu' - \nu\zeta') e^{-\zeta}, \quad (4.13)$$

$$G^1{}_1 = \frac{1}{2r} \left\{ \left[r \left(-2\ddot{\nu} + \left(-\frac{3}{2}\dot{\nu} + \dot{\zeta} \right) \dot{\nu} \right) e^{-\zeta+\nu} + 2\nu' + 2\zeta' + \zeta'\nu'r + \frac{1}{2}r\nu'^2 \right] e^{-\nu} \right\}, \quad (4.14)$$

$$G^1_0 = \frac{1}{2} (-2\dot{\nu}' + \dot{\nu}\zeta') e^{-\nu}, \quad (4.15)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = \frac{1}{4r} \left\{ [2\zeta' + 2\nu' + 2\nu''r + 2\zeta''r + \zeta'^2r] e^{-\nu} + 2r \left(-2\ddot{\nu} - \frac{3}{2}\dot{\nu}^2 + \dot{\zeta}\dot{\nu} \right) e^{-\zeta+\nu} \right\}, \quad (4.16)$$

donde el punto indica (\cdot) derivada con respecto a τ y prima $(')$ indica derivada con respecto a ρ . Ahora vamos a seguir el formalismo de McVittie [49], entonces asumimos que la materia alrededor del agujero de gusano es esféricamente simétrica. También se asume que al ser el agujero de gusano un objeto localizado, podemos separar la materia en dos partes: una parte dependiente del tiempo compuesta por la materia que se distribuye por todo el universo que es la materia cosmológica, y otra parte dependiente solo del espacio que contiene únicamente la materia del agujero de gusano, de esta forma se puede escribir que

$$\begin{aligned} a^2(t)\rho(r, t) &= a^2(t)\rho_c(t) + \rho_w(r), \\ a^2(t)p_1(r, t) &= a^2(t)p_{1c}(t) + p_{1w}(r), \\ a^2(t)p_2(r, t) &= a^2(t)p_{2c}(t) + p_{2w}(r), \\ a^2(t)p_3(r, t) &= a^2(t)p_{3c}(t) + p_{3w}(r). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora calculamos G^1_0 (4.15) y resolvemos el sistema $G^1_0 = 0$ asumiendo que $\zeta = 0$, entonces se obtiene:

$$\nu(\rho, \tau) = \beta(\rho) + \alpha(\tau) \Rightarrow e^{\nu(\rho, \tau)} = e^{\beta(\rho)} e^{\alpha(\tau)}. \quad (4.18)$$

Queremos construir una métrica que cerca de la garganta se comporte como un agujero de gusano cargado (4.1) y en el límite asintótico ($\rho \rightarrow \infty$) se comporte como la métrica FLRW (3.44), entonces calculamos las condiciones de borde de la función β

Cuando $\rho \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{b_0^2 - Q^2}$:

$$e^{\nu(\rho, \tau)} = \left(1 + \frac{b_0^2 - Q^2}{4\rho^2}\right)^2 = e^{\beta(\rho)} e^{\alpha(\tau)} \Rightarrow \beta(\rho) = 2 \ln \left(1 + \frac{b_0^2 - Q^2}{4\rho^2}\right). \quad (4.19)$$

Cuando $\rho \rightarrow \infty$:

$$e^{\nu(\rho, \tau)} = \frac{a^2(\tau)}{(1 + K\rho^2)^2} = e^{\alpha(\tau)} e^{\beta(\rho)},$$

entonces

$$\beta(\rho) = -2 \ln(1 + k\rho^2) \quad y \quad e^{-\alpha(\tau)} a^2(\tau) = 1. \quad (4.20)$$

Tomando en cuenta la ecuación de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, comparando G^1_1 y G^2_2 , y nombrando como p_1 y p_2 a las componentes de T^1_1 y T^2_2 , respectivamente, se obtiene

$$G^1_1 - G^2_2 = \kappa(p_1 - p_2), \quad (4.21)$$

$$\left[\nu'' - \frac{1}{\rho} \nu' - \frac{1}{2} (\nu')^2 \right] e^{-\nu} = 2\kappa (p_2 - p_1). \quad (4.22)$$

Haciendo uso del ansatz para separar la materia dos partes: parte cosmológica y parte del agujero de gusano, asumimos que $p_1 = p_{1c} + p_{1w}$ y $p_2 = p_{2c} + p_{2w}$. Dado que por la isotropía del universo $p_{1c} = p_{2c}$, entonces la ecuación (4.22) se convierte en una ecuación que solo contiene partes puramente espaciales

$$\left[\beta'' - \frac{1}{\rho} \beta' - \frac{1}{2} (\beta')^2 \right] e^{-\beta} = 2\kappa (p_{2w} - p_{1w}). \quad (4.23)$$

Calculamos $p_{2w} - p_{1w}$

$$p_{2w} - p_{1w} = \frac{64\rho^4 \left((b_0^2 - Q^2)^4 (b_0^2 + Q^2) + 8\rho^2 (2b_0^4 - b_0^2 Q^2 + 2Q^4) (b_0^2 - Q^2)^2 \right)}{\pi (b_0^2 + 4\rho^2 - Q^2)^4 \left(b_0^4 - 2b_0^2 (Q^2 - 4\rho^2) + (4\rho^2 + Q^2)^2 \right)^2} + \frac{64\rho^4 (256\rho^8 (b_0^2 + Q^2) + 128\rho^6 (2b_0^4 - b_0^2 Q^2 + 2Q^4) + 32\rho^4 (3b_0^6 - 5b_0^4 Q^2 - b_0^2 Q^4 + 3Q^6))}{\pi (b_0^2 + 4\rho^2 - Q^2)^4 \left(b_0^4 - 2b_0^2 (Q^2 - 4\rho^2) + (4\rho^2 + Q^2)^2 \right)^2}. \quad (4.24)$$

La solución general a la ecuación diferencial (4.23) es la solución correspondiente a la ecuación homogénea más la solución particular, es decir $\beta = \beta_c + \beta_w$. El término β_c corresponde a la parte cosmológica, que es el trasfondo cosmológico global que domina en la región lejana, mientras que β_w es la solución local del agujero de gusano que domina cerca del origen.

4.3.1. Solución homogénea

La ecuación diferencial homogénea es

$$e^{-\beta} \left(\beta'' - \frac{\beta'}{\rho} - \frac{\beta'^2}{2} \right) = 0. \quad (4.25)$$

Podemos decir que la solución a la ecuación homogénea coincide con la condición de borde encontrada para β en el caso de que $\rho \rightarrow \infty$ (4.20), esto debido a que el término de la derecha de la ecuación diferencial es diferente de cero solo en el agujero de gusano, entonces

$$\Rightarrow \beta_c = c_2 - 2 \log(\rho^2 - 4c_1). \quad (4.26)$$

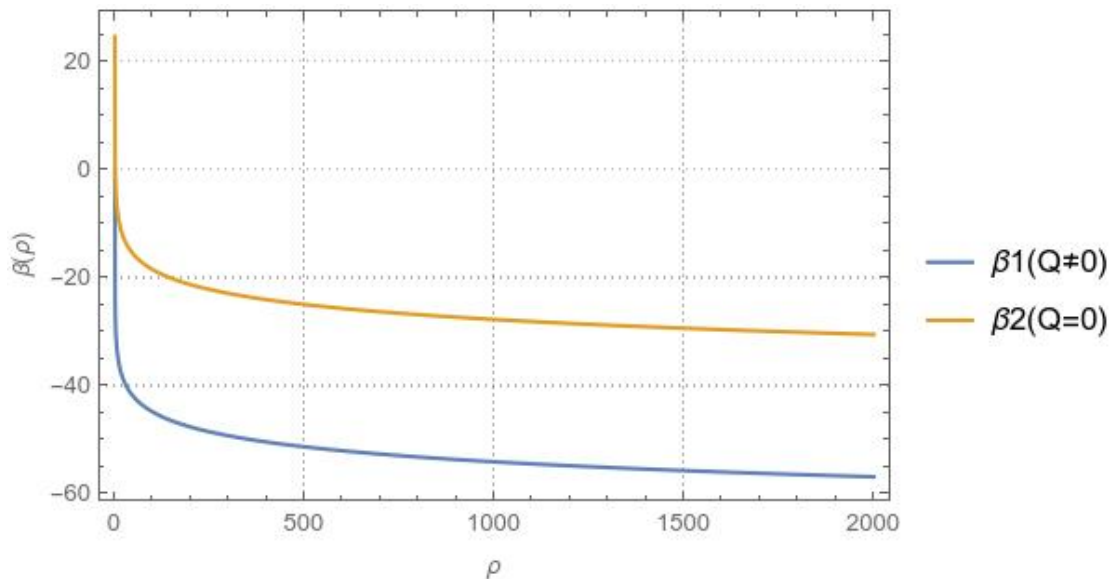


FIGURA 4.1: La curva azul muestra la solución numérica de β para el agujero de gusano con carga, y la curva amarilla muestra la solución analítica de β en el caso sin carga.

Comparando con la parte espacial de las condiciones de borde que se encontró (4.20), tenemos que

$$\beta_c = -2 \log(k\rho^2 + 1). \quad (4.27)$$

4.3.2. Solución particular

La presencia de carga en el agujero de gusano MT, hace que la solución analítica para la parte no homogénea, es decir la solución particular de la ecuación diferencial no lineal obtenida (4.23), no tenga solución inmediata como en el caso del agujero de gusano MT no cargado. Sin embargo vamos a presentar la solución general encontrada de forma numérica con el fin de poder comparar nuestro caso, el de la métrica cargada con el caso de la métrica sin carga visto en el capítulo anterior.

Para resolver de forma numérica, por simplicidad, asumimos que las constantes b_0 y Q toman el valor de 1, de esta forma la ecuación diferencial a resolver es

$$\left[\beta'' - \frac{1}{\rho} \beta' - \frac{1}{2} (\beta')^2 \right] e^{-\beta} = \frac{4(4\rho^2 + 3)}{(\rho^3 + \rho)^2}. \quad (4.28)$$

Las condiciones de borde de β , cuando se acerca a la garganta vienen dadas por (4.19). Como asumimos que las constantes tienen un valor de 1, la garganta del agujero de gusano está en $\rho = 0$, por esta razón encontramos las condiciones de borde para $\rho = 0,001$. Las condiciones de borde son $\beta = 0$ y $\beta' = 0$. Con estas condiciones realizamos la solución numérica utilizando el paquete `diffgeo` del Software Mathematica, obteniendo así las soluciones numéricas para β , y las comparamos con la solución en el caso de la métrica sin carga (3.55) y (3.56).

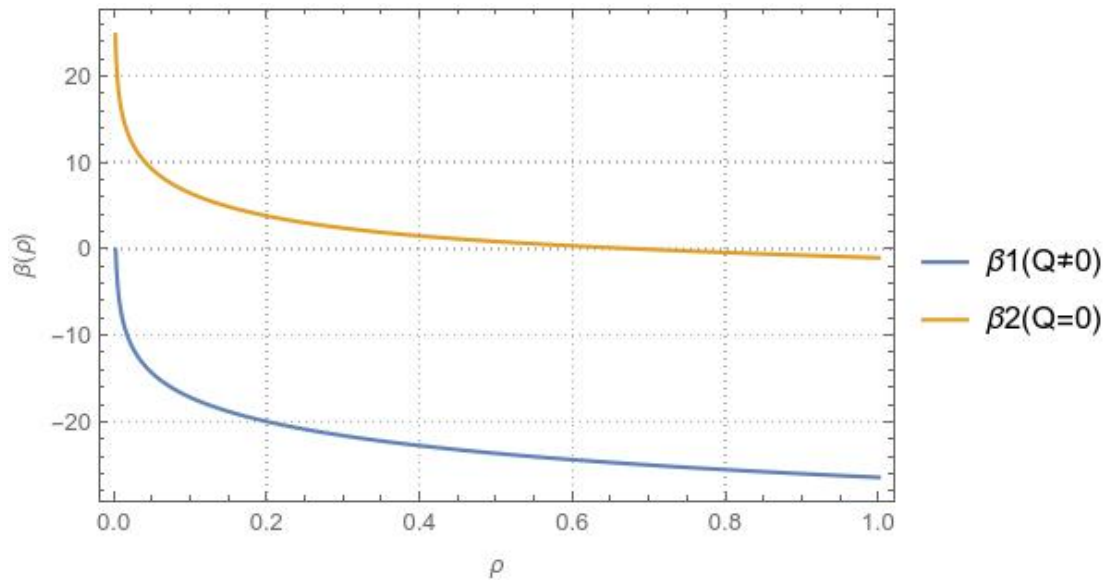


FIGURA 4.2: La curva azul muestra la solución numérica de β para el agujero de gusano con carga, y la curva amarilla muestra la solución analítica de β en el caso sin carga. Gráfica para ρ de 0 a 1.

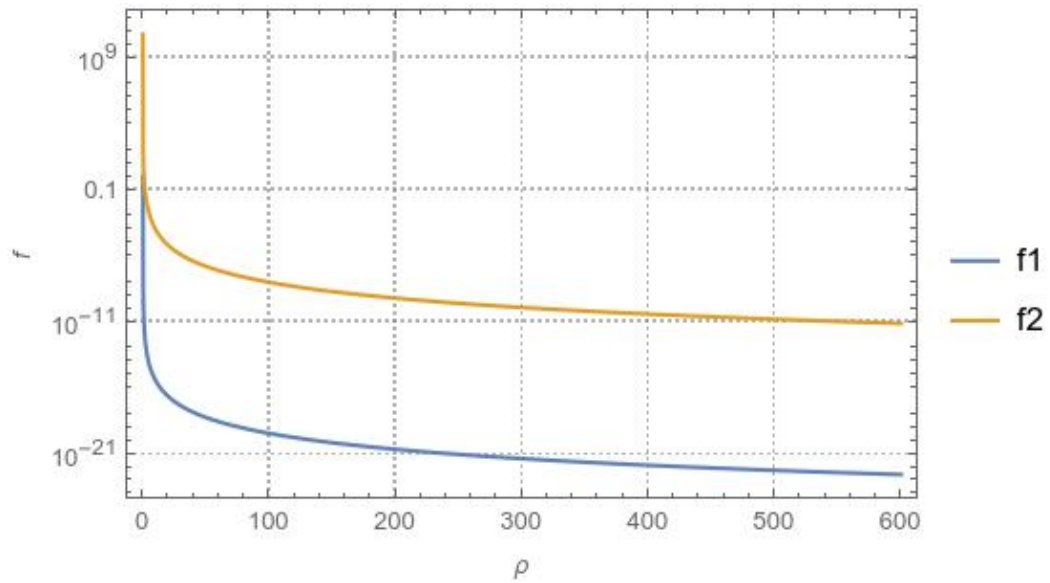


FIGURA 4.3: En la curva azul se muestra la función exponencial de β para el caso del agujero de gusano con carga y en la curva amarilla se muestra la función exponencial de β para el caso no cargado. Gráfica en escala logarítmica.

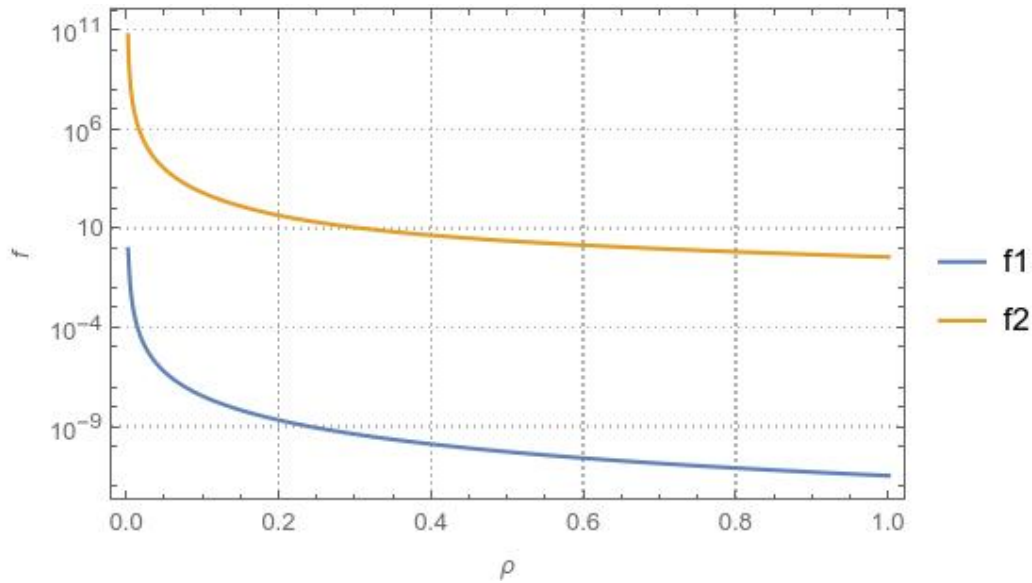


FIGURA 4.4: En la curva azul se muestra la función exponencial de β para el caso del agujero de gusano con carga y en la curva amarilla se muestra la función exponencial de β para el caso no cargado. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 1.

En las Figuras 4.1 y 4.2 tenemos el gráfico en azul de la solución de β que se obtiene al resolver la ecuación diferencial (4.28) de forma numérica, suponiendo que las constantes valen 1, y en amarillo está el gráfico de la solución analítica de β para el caso del agujero de gusano con carga (3.55) y (3.56). La primera gráfica se hizo para ρ de 0 a 600 y la segunda para ρ de 0 a 1, de esta forma se puede observar de mejor manera el comportamiento de la función $\beta(\rho)$.

Mientras que en las Figuras 4.3 y 4.4 tenemos la gráfica en azul de la función llamada f_1 que corresponde a $e^{\beta_1(\rho)}$ para la solución numérica de β en el caso del agujero de gusano cargado, y en amarillo se tienen la gráfica de la función $e^{\beta_2(\rho)}$ en el caso del agujero de gusano sin carga, llamada f_2 . Estas dos gráficas se realizaron con escala logarítmica, y también como en el caso anterior, se presentan las gráficas cuando ρ va de 0 a 600 y cuando ρ va de 0 a 1.

Como observamos en las curvas encontradas para β en el caso cargado y en el sin carga, ambas curvas tienen la misma forma pero la una está desplazada con respecto a la otra, por esto realizamos un ajuste de datos para la solución numérica del caso con carga a una función con la misma forma que la solución analítica del caso sin carga. Es decir, ajustamos los valores de la solución numérica a la función

$$e^{\beta} = \frac{\left(a_1 + \frac{a_2}{\rho^2}\right)^2}{(a_3 + a_4\rho^2)^2}. \quad (4.29)$$

El ajuste se realizó para el rango de ρ de 0,002 a 2000, y se encontraron los siguientes valores de las constantes

$$a_1 = 0,144263, \quad a_2 = 0,0000313227, \quad a_3 = 16,424, \quad a_4 = 75769,7.$$

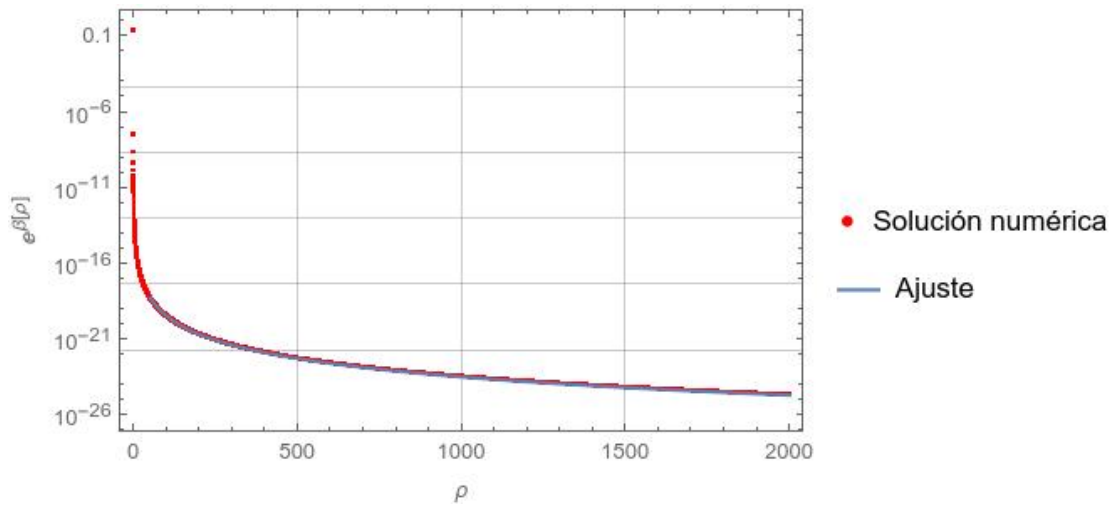


FIGURA 4.5: En la curva roja se muestra la solución numérica encontrada para el agujero de gusano con carga mientras que en la curva azul se muestra la función encontrada al realizar el ajuste de datos. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 2000.

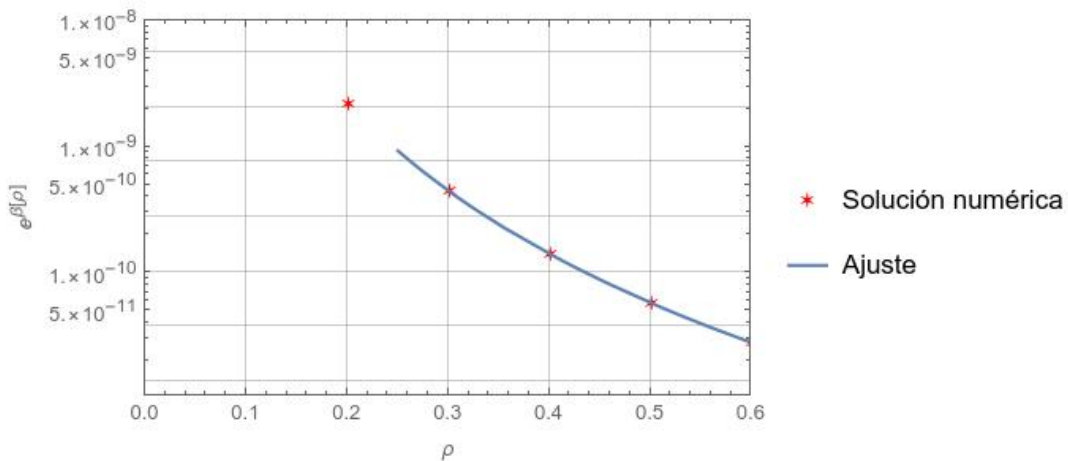


FIGURA 4.6: Los puntos rojos muestran la solución numérica encontrada para el agujero de gusano con carga mientras que en la curva azul se muestra la función encontrada al realizar el ajuste de datos. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 0.6.

Como se observa en la Figura 4.5, la función de la ecuación (4.29) se ajusta bien a la solución numérica para valores grandes de ρ . En la Figura 4.6 se observan los valores para un rango más pequeño, entonces vemos que la función encontrada se ajusta a la solución numérica aproximadamente desde $\rho = 0,3$, entonces para valores menores a $\rho = 0,3$ realizamos otro ajuste de datos con la misma función (4.29) y en este caso se obtuvieron los siguientes coeficientes

$$a_1 = -6,63877, \quad a_2 = 6,84363 \times 10^{-6}, \quad a_3 = -3,17211, \quad a_4 = 3,37697 \times 10^6.$$

De esta forma, mediante el ajuste de datos realizado a la solución numérica de la función e^β del agujero de gusano cargado, obtenemos la siguiente métrica

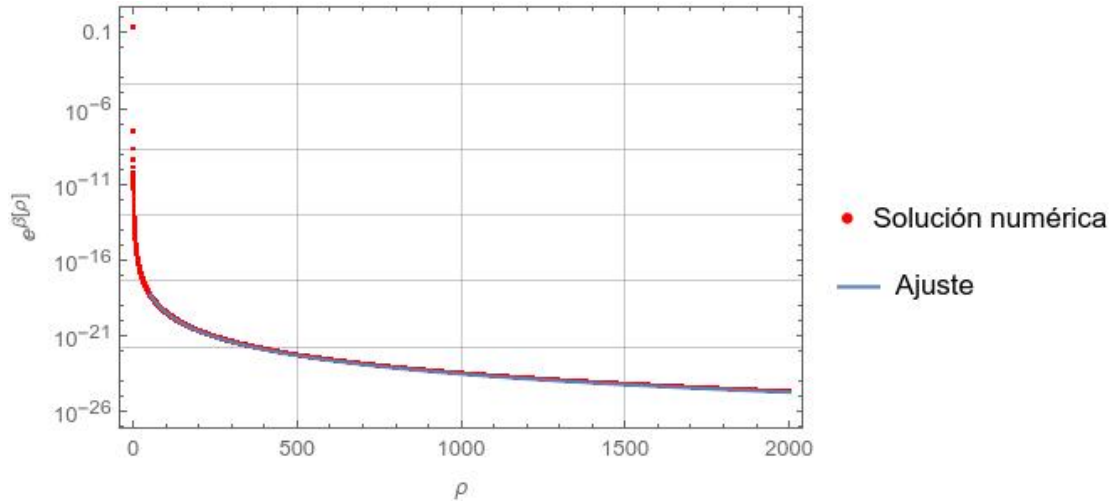


FIGURA 4.7: En la curva roja se muestra la solución numérica encontrada para el agujero de gusano con carga mientras que en la curva azul se muestra la función encontrada al realizar el ajuste de datos. Gráfica en escala logarítmica, para ρ de 0 a 2000.

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{a^2(\tau) \left(a_1 + \frac{a_2}{\rho^2}\right)^2}{(a_3 + a_4\rho^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (4.30)$$

con

$$a_1 = -6,63877, \quad a_2 = 6,84363 \times 10^{-6}, \quad a_3 = -3,17211, \quad a_4 = 3,37697 \times 10^6 \quad \text{Cuando } \rho = [0,001 \text{ a } 0,3]$$

$$a_1 = 0,144263, \quad a_2 = 0,0000313227, \quad a_3 = 16,424, \quad a_4 = 75769,7 \quad \text{Cuando } \rho = [0,3 \text{ a } 2000].$$

Ahora vamos a realizar otro ajuste de datos, para poder visualizar de mejor forma la contribución de la carga al agujero de gusano. Para este caso realizamos el ajuste para la función

$$e^\beta = \frac{\left(b_1 + \frac{b_2}{\rho^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4\rho^2} + b_3\right)^2}{(\rho^2 + 1)^2}. \quad (4.31)$$

De la misma forma el rango de ρ en el ajuste es de 0,002 a 2000, y se encontraron los siguientes valores de las constantes

$$b_1 = 7,61617 \times 10^{-6}, \quad b_2 = 4,85534 \times 10^{-14}, \quad b_3 = -0,750177.$$

En la Figura 4.7 se observa el ajuste realizado, en este caso la función de la ecuación (4.31) se ajusta bien a la solución numérica para valores grandes de ρ , de la misma forma que lo hace el ajuste anterior. Sin embargo para valores más pequeños, menores a $\rho = 0,3$ la función ya no se ajusta a los valores numéricos obtenidos en la solución. A diferencia del caso anterior, para este ajuste no se puede realizar otro ajuste para los valores menores a $\rho = 0,3$.

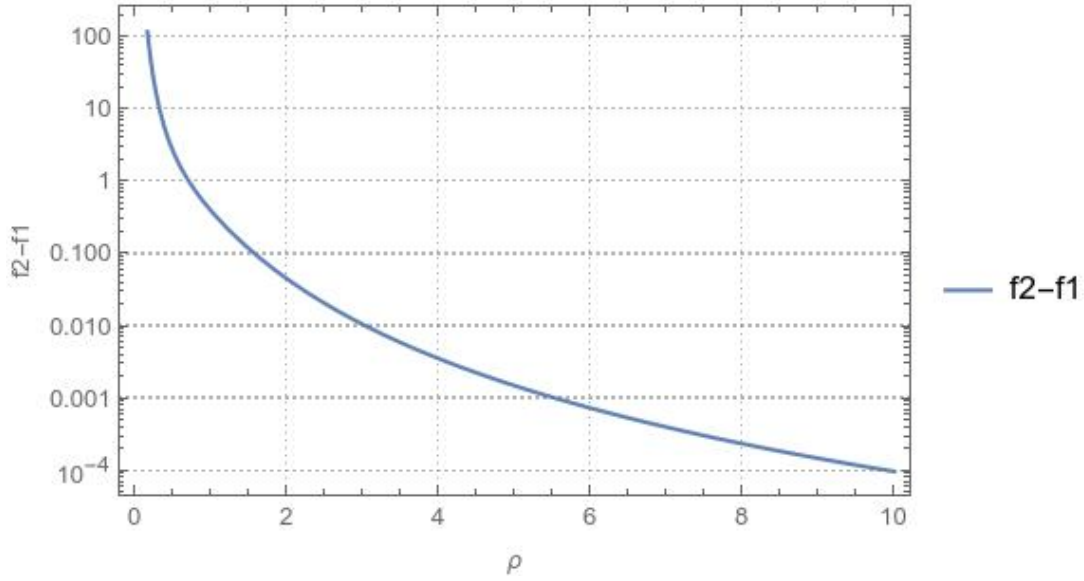


FIGURA 4.8: En esta gráfica se muestra la diferencia de las funciones f_2 y f_1 , en escala logarítmica, para ρ de 0 a 10.

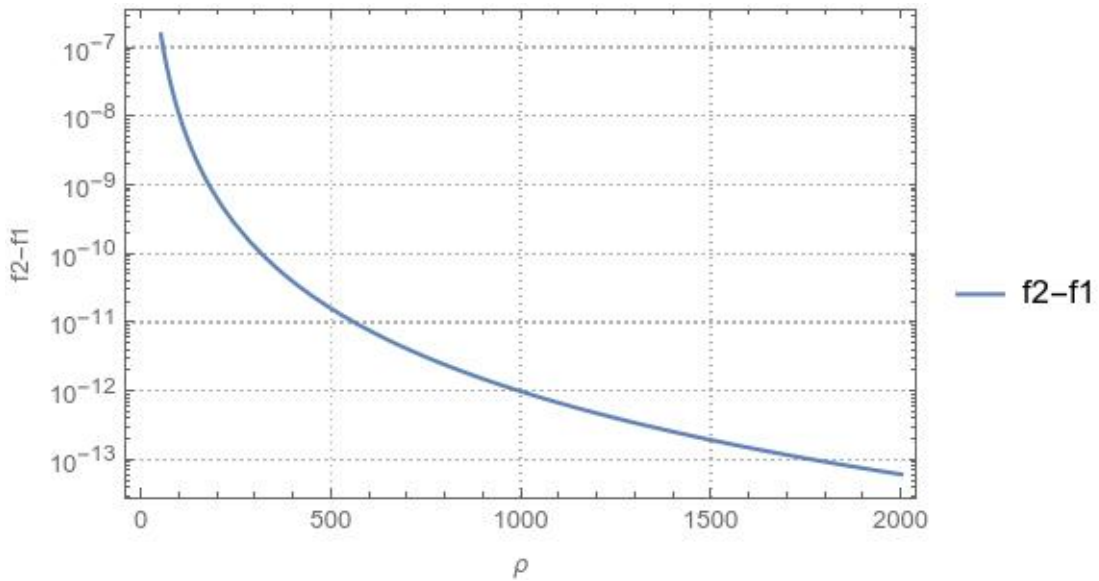


FIGURA 4.9: En esta gráfica se muestra la diferencia de las funciones f_2 y f_1 , en escala logarítmica, para ρ de 0 a 2000.

Para este caso la métrica obtenida es

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{a^2(\tau) \left(b_1 + \frac{b_2}{\rho^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4\rho^2} + b_3\right)^2}{(\rho^2 + 1)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (4.32)$$

con

$$b_1 = 7,61617 \times 10^{-6}, \quad b_2 = 4,85534 \times 10^{-14}, \quad b_3 = -0,750177 \quad \text{Cuando } \rho = [0,3 \text{ a } 2000].$$

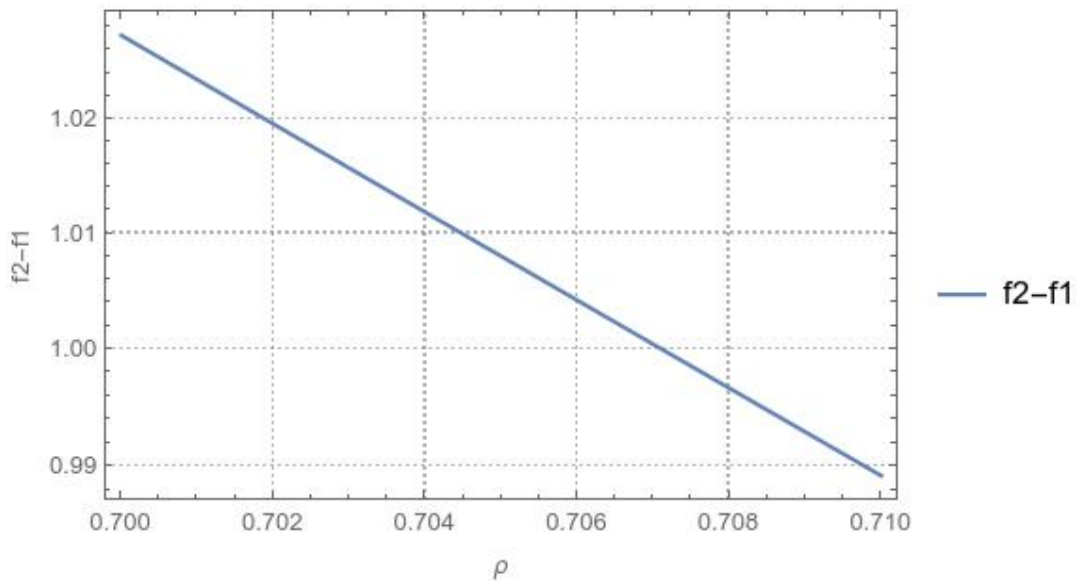


FIGURA 4.10: En esta gráfica se muestra relación entre de las funciones f_2 y f_1 , es decir f_2/f_1 en escala logarítmica.

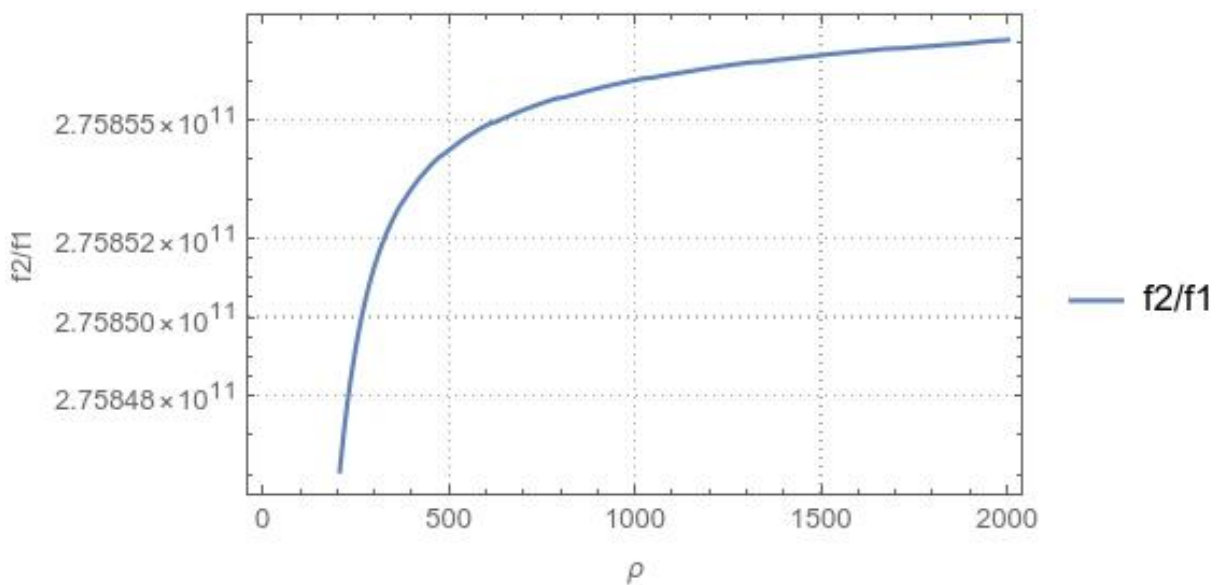


FIGURA 4.11: En esta gráfica se muestra relación entre de las funciones f_2 y f_1 , es decir f_2/f_1 en escala logarítmica.

Con este nuevo ajuste se puede observar de forma más clara la contribución de la carga, podemos ver que si las constantes b_1 , b_2 y b_3 son cero en la métrica (4.32), se regresa a la métrica del agujero de gusano asintóticamente FLRW (3.58).

Para observar de mejor forma el comportamiento de la solución, vamos a restar la función f_2 del caso no cargado con la función f_1 del caso cargado, así podemos ver como su resta evoluciona con respecto a ρ . En las gráficas 4.8 y 4.9 se muestra la resta de las dos funciones, la función f_2 del caso del agujero de gusano sin carga menos la función f_1 del caso con carga, para distintos valores de ρ . También podemos hacer una comparación relativa de ambas

funciones, para esto vamos a encontrar la relación entre ambas funciones f_1 y f_2 , lo cual se puede observar en la gráfica 4.10.

4.4. Horizontes aparentes

Los horizontes aparentes nos ayudan a entender la estructura causal del espaciotiempo. En esta sección vamos a detallar el cálculo de la ubicación de los horizontes aparentes para las métricas (4.30) y (4.30). Además, haciendo una analogía con el caso sin carga calcularemos la temperatura de Hawking.

4.4.1. Solución 1

Para encontrar los horizontes aparentes de la métrica (4.30) vamos a redefinir la coordenada R de la siguiente forma

$$R \equiv \frac{a(\tau) \left(a_1 + \frac{a_2}{\rho^2} \right)}{(a_3 + a_4 \rho^2)} \rho = a(\tau) A(\rho). \quad (4.33)$$

Así la métrica puede ser reescrita como $ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + R^2 d\Omega^2$, donde $x^a = (\tau, R)$. De esta forma

$$h_{ab} = \text{diag} \left(-1, \left[\rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2a_4 \rho}{(a_3 + a_4 \rho^2)} - \frac{\frac{2a_2}{\rho^3}}{a_1 + \frac{a_2}{\rho^2}} \right)^2 \right]^{-1} \right). \quad (4.34)$$

La posición en la que se encuentra el horizonte aparente puede ser determinada utilizando la ecuación $h^{ab} \partial_a R \partial_b R = 0$. Así, la condición que usamos para ubicar el horizonte aparente es la siguiente:

$$-1 \left(\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} R \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2a_4 \rho}{(a_3 + a_4 \rho^2)} - \frac{\frac{2a_2}{\rho^3}}{a_1 + \frac{a_2}{\rho^2}} \right)^2 = 0. \quad (4.35)$$

La expresión anterior se puede escribir de manera más compacta de la siguiente forma:

$$\Delta \equiv 1 - \frac{H^2 R^2}{\rho(R)^2 J(R)^2} = 0, \quad (4.36)$$

donde $H = \frac{a'(\tau)}{a(\tau)}$, $\frac{A'}{A} = J = \frac{1}{\rho} - \frac{2a_4 \rho}{(a_3 + a_4 \rho^2)} - \frac{\frac{2a_2}{\rho^3}}{a_1 + \frac{a_2}{\rho^2}}$.

Suponemos que $a_4 = f(k)$, entonces se puede simplificar el análisis al considerar el caso en el que $k = 0$. En este caso $a_4 = f(0) = 0$, y de la ecuación (4.33) encontramos que ρ está dado por

$$\rho = \frac{a_3 R}{2a_1 a} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3 R}{2a_1 a} \right)^2 - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)}. \quad (4.37)$$

Existen dos expresiones para la relación entre ρ y R , pero se utiliza positiva debido a la naturaleza positiva de ρ . Al sustituir la ecuación (4.37) en la ecuación (4.36), se obtiene la ubicación de los horizontes aparentes:

$$R_{\pm} = \frac{a_3}{\sqrt{2a_3^2 H^2}} \left[1 \pm \sqrt{a_3^2 - 16a_1 a_2 H^2 a(\tau)^2} \right]^{1/2}. \quad (4.38)$$

Es evidente que la expresión anterior se reduce, cuando la carga es cero ($a_3 = a_1 = 1, a_2 = b_0^2/2$), a la expresión (3.62). Similarmente, la temperatura de Hawking puede ser calculada. En clara analogía al caso sin carga usaremos la siguiente expresión [48]:

$$T = \frac{1}{2\pi R_+}. \quad (4.39)$$

Así, reemplazando el horizonte aparente encontrado se obtiene:

$$T = \left(\frac{2\pi a_3}{\sqrt{2a_3^2 H^2}} \left[1 + \sqrt{a_3^2 - 16a_1 a_2 H^2 a(\tau)^2} \right]^{1/2} \right)^{-1}. \quad (4.40)$$

Los resultados están acorde con lo que se espera cuando las cargas se anulan.

De acuerdo a la ecuación (4.38) los horizontes existen si y solo si $a_3^2 \geq 16a_1 a_2 H^2 a(\tau)^2$. Cuando no existe agujero de gusano ($a_3 = a_1 = 1, a_2 = 0, a_4 = \kappa$) el horizonte aparente cosmológico de la métrica FRLW es el horizonte de Hubble $R_H = \frac{1}{H}$, por lo tanto $R_{\pm} < \frac{1}{H}$.

4.4.2. Solución 2

Vamos a encontrar los horizontes aparentes para la métrica (4.32). De la misma forma que antes, redefinimos la coordenada R en la métrica de la siguiente forma

$$R \equiv \frac{a(\tau) \left(b_1 + \frac{b_2}{\rho^2} \right) \left(1 + \frac{1}{4\rho^2} + b_3 \right)}{(\rho^2 + 1)} \rho = a(\tau) A(\rho). \quad (4.41)$$

Así la métrica puede ser reescrita como $ds^2 = h_{ab} dx^a dx^b + R^2 d\Omega^2$, donde $x^a = (\tau, R)$. En este caso h_{ab} es

$$h_{ab} = \text{diag} \left(-1, \frac{1}{\rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2\rho}{(1+\rho^2)} - \frac{2b_2}{\rho^3} - \frac{1}{b_1 + \frac{b_2}{\rho^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{4\rho^2} + b_3} \right)^2} \right). \quad (4.42)$$

La posición del horizonte aparente se determina mediante la relación $h^{ab} \partial_a R \partial_b R = 0$. De este modo, el horizonte aparente se encuentra en la ubicación que cumple con la siguiente ecuación:

$$-1 \left(\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} R \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2\rho}{(1+\rho^2)} - \frac{\frac{2b_2}{\rho^3}}{b_1 + \frac{b_2}{\rho^2}} - \frac{\frac{1}{2\rho^3}}{1 + \frac{1}{4\rho^2} + b_3} \right)^2 = 0. \quad (4.43)$$

Esta expresión puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\Delta \equiv 1 - \frac{H^2 R^2}{\rho(R)^2 J(R)^2} = 0, \quad (4.44)$$

$$\text{donde } H = \frac{a'(\tau)}{a(\tau)}, \quad \frac{A'}{A} = J = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{2\rho}{(1+\rho^2)} - \frac{\frac{2b_2}{\rho^3}}{b_1 + \frac{b_2}{\rho^2}} - \frac{\frac{1}{2\rho^3}}{1 + \frac{1}{4\rho^2} + b_3} \right).$$

En este caso la forma de la ecuación (4.41), debido a la presencia de términos de orden superior en ρ , no es posible resolverla analíticamente para encontrar ρ como función de R . Por lo tanto, recurrimos a realizar una expansión en serie de potencias de $\rho(R)$ alrededor de $\rho = 0$, lo que nos permite expresar R como un polinomio en $\rho(R)$. Para escribimos la ecuación (4.41) de la siguiente forma:

$$R = \frac{7,61617 \times 10^{-6} a(\tau) \rho \left(0,249823 + \frac{1}{4\rho^2} \right)}{\rho^2 + 1}, \quad (4.45)$$

donde reemplazamos b_1, b_2, b_3 por sus valores numéricos (4.3.2) y aproximamos b_2 a cero, ya que es un valor pequeño, $b_2 = 4,85534 \times 10^{-14}$. Entonces Tomando los dos primeros términos de la expansión en serie de potencias, obtenemos:

$$R = -1,348062 \times 10^{-9} a(\tau) \rho + \frac{1,9040425 \times 10^{-6} a(\tau)}{\rho}. \quad (4.46)$$

Entonces de la ecuación (4.46) encontramos que ρ está dado por

$$\rho = -\frac{3,70903 \times 10^8 R}{a(\tau)} \pm 0,000825175 \sqrt{\frac{2,02036 \times 10^{23} R^2}{a^2(\tau)} + 2,07431 \times 10^9}. \quad (4.47)$$

Utilizamos la relación positiva debido a la naturaleza positiva de ρ . Al sustituir la ecuación (4.47) en la ecuación (4.44), se obtiene:

$$1 - \frac{3,3 \times 10^{-36} H^2 R^2 \left(-612120 \cdot a R \sqrt{\frac{2,02 \times 10^{23} R^2}{a^2} + 2,07 \times 10^9 + 1413,43 a^2 + 2,75 \times 10^{17} R^2} \right)^2}{\left(1,31 \times 10^{-29} a^4 + 1,02 \times 10^{-14} a^2 R^2 - 2,22 \times 10^{-12} a R^3 \sqrt{\frac{2,02 \times 10^{23} R^2}{a^2} + 2,07 \times 10^9} - 1,14 \times 10^{-26} a^3 R \sqrt{\frac{2,02 \times 10^{23} R^2}{a^2} + 2,07 \times 10^9 + 1 \cdot R^4} \right)^2} \\ * \left(-2,22 \times 10^{-12} a R \sqrt{\frac{2,02036 \times 10^{23} R^2}{a^2} + 2,07431 \times 10^9} + 5,13 \times 10^{-15} a^2 + 1 \cdot R^2 \right)^2. \quad (4.48)$$

Se puede observar que la ecuación encontrada es muy compleja y no lineal, lo que dificulta su resolución analítica. En particular, la aparición de R tanto en el numerador como en el denominador de varios términos de la ecuación y debido a que la ecuación involucra a R de

una forma altamente no lineal, con múltiples términos que se multiplican entre sí y se anidan dentro de raíces cuadradas hace imposible aislar R y resolverla explícitamente.

La ecuación también contiene varios términos que implican $a(\tau)$, el factor de escala, lo que la hace dependiente de la evolución del universo. La complejidad de la ecuación se ve agravada por la presencia de H , el parámetro de Hubble, que es una medida de la velocidad de expansión del universo. El valor de H no es constante, sino que varía con el tiempo, y esta variabilidad se refleja en la ecuación. Esto significa que, aunque se pudiera encontrar una solución numérica para un valor concreto de H , la solución no sería válida para otros valores de H y lo mismo sucede para $a(\tau)$, al ser también dependiente del tiempo. Por lo tanto no es posible continuar analizando los horizontes aparentes en este caso.

En resumen en este capítulo hemos encontrado la solución numérica del agujero de gusano cargado asintóticamente FLRW, en donde asumimos que la materia está separada en dos partes, una parte del fondo cosmológico y la otra parte sólo del agujero de gusano. También para poder encontrar la solución numérica asumimos que todas las constantes pueden tomar el valor de 1 para poder realizar el ajuste de datos y tener la forma aproximada de la métrica. Y hemos encontrado gráficamente la resta y la relación entre las funciones f_1 y f_2 para poder comparar las soluciones del caso con carga con el caso sin carga. Por último calculamos los horizontes aparentes y su respectiva temperatura de Hawking.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo de titulación hemos generalizado el formalismo desarrollado por McVittie para agujeros negros, al agujero de gusano de MT cargado. Este mismo formalismo ya ha sido utilizado antes de forma exitosa para construir el espacio-tiempo del agujero de gusano no cargado MT asintóticamente FLRW, como lo revisamos en el Capítulo 3. Siguiendo nuestro propósito de construir el espacio-tiempo del agujero de gusano MT cargado en el universo FLRW, escribimos la métrica del agujero de gusano cargado de MT en coordenadas isotrópicas, debido a que estas son las coordenadas que describen el espacio-tiempo de FLRW.

Hemos considerado que la materia alrededor del agujero de gusano está distribuida de forma esféricamente simétrica, y también que la presión de la materia es isotrópica. Además, asumimos que la materia del agujero de gusano está separada de la materia del universo, así se obtuvieron dos términos: un término de la materia del universo dependiente del tiempo, y otro término de la materia del agujero de gusano dependiente solo del espacio.

Con estas consideraciones resolvimos las ecuaciones de Einstein con las condiciones de borde consideradas, es decir, cuando nos acercamos a la garganta la métrica se comporte como la del agujero de gusano cargado de MT y cuando nos vayamos hacia el infinito se aproxime al universo FLRW. Resolviendo las ecuaciones para el caso de un observador ultra-estático, encontramos la solución analítica homogénea de la ecuación diferencial obtenida. Sin embargo para encontrar la solución particular, al ser la ecuación diferencial no lineal, la solución analítica no es inmediata, así que optamos por encontrar la solución numérica.

Encontramos la solución numérica y la comparamos con el caso del agujero de gusano no cargado, para poder observar como afecta al espacio-tiempo el hecho de que el agujero de gusano tenga carga. En las Figuras 4.1 y 4.2, se observa el comportamiento de la función $\beta(\rho)$, en ambos casos en el caso cargado y no cargado, de esta forma vemos que el efecto de la carga en la función β es que sus valores disminuyen con respecto al caso sin carga, es decir la curva se corre hacia abajo, y la diferencia entre ambas curvas es cada vez menor al ir incrementando ρ , comportamiento que también se observa en las Figuras 4.3 y 4.4.

En las gráficas 4.8 y 4.9 vemos que cuando ρ se va acercando a infinito, la distancia entre las dos funciones, es decir la resta, se va haciendo cada vez más pequeña, entonces para un ρ muy grande el espacio-tiempo en ambos casos tienen una diferencia muy pequeña, lucirían muy similares.

Se puede considerar que cuando la resta de ambas funciones es mayor que 1, la diferencia entre ambas es considerable mientras que cuando es menor que 1 la resta se puede considerar muy pequeña o despreciable. Esto sucede para un valor de $\rho = 0,7071$, que se puede observar mejor en la Figura 4.10. Es decir cuando ρ es menor a 0,7071, la carga en el agujero de gusano muestra un efecto considerable, se puede observar una diferencia con respecto al agujero de gusano no cargado, mientras que cuando ρ es mayor a 0,7071, el efecto de la carga en el espacio-tiempo casi no se puede diferenciar del caso sin carga ya que ambas funciones tienden a cero cuando ρ es grande, entonces se van a restar valores muy pequeños que tienden a un número muy pequeño.

Como antes vimos ambas funciones tienden a cero, por esto en la Figura 4.11 vemos que la velocidad con la que la una solución tiende a cero es mucho más grande que la velocidad con la que la otra tiende a cero. Es decir, aunque las dos funciones tienden a valores despreciables, las dos tienden a cero de diferente forma y por eso la diferencia entre estos valores despreciables llega a ser de algunos órdenes de magnitud. Por lo tanto aunque para valores grandes de ρ ambas tienden a cero, la diferencia relativa entre las dos es grande. Aunque también podríamos aproximar desde cierto valor de ρ muy grande, las dos funciones a cero.

Con la solución numérica para la función e^β realizamos un ajuste de datos, considerando que la solución del agujero de gusano en el caso cargado tiene la misma forma que en el caso sin carga, obteniendo así la métrica (4.30). Se realizaron dos ajustes de datos ya que para valores de ρ muy cercanos a la garganta del agujero de gusano, la función obtenida no se ajustaba a la solución numérica, así que se obtuvieron valores distintos de los coeficientes de la función en el ajuste de datos, unos valores para cuando ρ está muy cerca de la garganta (ρ entre 0,001 y 0,3) y otros para cuando ρ está entre 0,3 y 2000. También realizamos un segundo ajuste de datos con una función diferente en la que se puede distinguir de mejor forma en la métrica el efecto de la carga, pero este ajuste de datos solo se ajusta bien para ρ entre 0,3 y 2000. En la ecuación (4.32) se muestra la métrica para este ajuste y se observa que cuando las constantes b_1 , b_2 y b_3 son cero, la métrica se convierte en la métrica del agujero de gusano sin carga.

Como observamos en la Figura 4.3, la función e^β encontrada para el agujero de gusano cargado tiene la misma forma que en el caso sin carga, con la diferencia de que está desplazada en el eje de las x por una cantidad no constante. Aprovechando esta característica del caso con carga podríamos decir que el estudio de los horizontes aparentes de la métrica del agujero de gusano sin carga se puede realizar de forma directa con la ecuación (3.62) encontrada para los agujeros de gusano sin carga, ya que el efecto de la carga en la métrica (4.32) podría absorberse en el término $a^2(t)$, debido a que la ecuación (3.62) de los horizontes aparentes

solo depende de $a(t)$ y b_0 cuando $k = 0$. Por lo tanto esperamos que el horizonte aparente del caso con carga se desplace con respecto al caso sin carga.

Con las soluciones numéricas encontradas para el agujero de gusano cargado asintóticamente FLRW, hemos calculado los horizontes aparentes para el caso de la primera solución (4.30), lo que nos ha permitido conocer sobre el comportamiento de los horizontes en presencia de carga. Hemos comparado los horizontes aparentes de un agujero de gusano sin carga con los horizontes aparentes encontrados para un agujero de gusano cargado.

La ecuación (4.38) nos indica que los horizontes aparentes del caso del agujero de gusano cargado son equivalentes a los del caso del agujero de gusano no cargado (3.62) cuando la contribución de carga está ausente. Concretamente, esto ocurre cuando $a_3 = a_1 = 1$ y $a_2 = b_0^2/2$. Este resultado sugiere que los horizontes aparentes del agujero de gusano cargado se desplazan en relación con el caso sin carga. Por lo tanto, la presencia de carga en el agujero de gusano tiene un impacto significativo en la ubicación del horizonte aparente.

El desplazamiento de los horizontes aparentes del agujero de gusano cargado con respecto al caso del agujero de gusano sin carga afecta a la temperatura Hawking del agujero de gusano cargado, debido a que la temperatura Hawking es inversamente proporcional a la ubicación del horizonte aparente (4.39). Como el horizonte aparente del agujero de gusano cargado se desplaza con respecto al agujero de gusano sin carga, la temperatura Hawking del agujero de gusano cargado también se desplaza con respecto al caso sin carga. Concretamente, la temperatura de Hawking del agujero de gusano cargado es menor que la del caso del agujero de gusano sin carga.

Es importante señalar que el desplazamiento de la temperatura de Hawking debido al desplazamiento de los horizontes aparentes es consecuencia de la presencia de carga en el agujero de gusano. Este resultado pone de manifiesto la importancia de considerar la contribución de la carga en el estudio de los agujeros de gusano, ya que afecta no sólo a la localización de los horizontes aparentes sino también a la termodinámica del sistema.

La segunda solución para el agujero de gusano no cargado (4.32) presenta un desafío significativo en el cálculo de la ubicación de los horizontes aparentes. Debido a que al realizar los cálculos correspondientes para poder encontrar los horizontes aparentes nos encontramos con la ecuación (4.48), la cual es compleja y no lineal, lo que dificulta resolverla analíticamente. Específicamente, la presencia de la variable R en el numerador y el denominador de múltiples términos dentro de la ecuación, junto con la relación no lineal entre R y otros términos que están anidados dentro de las raíces cuadradas, provoca que el aislamiento de R y solución explícita analítica sea imposible.

Además, la ecuación contiene varios términos que involucran el factor de escala $a(\tau)$, que indica la evolución del universo. Esta característica se suma a la complejidad de la ecuación. Además, el parámetro Hubble H , que mide la tasa de expansión del universo, también aparece en la ecuación. El valor de H no es constante, sino que cambia con el tiempo, lo que complica aún más el problema. Por lo tanto, encontrar una solución numérica para un valor específico

de H no sería válido para otros valores de H , y lo mismo es cierto para $a(\tau)$ ya que también depende del tiempo.

Como resultado de la complejidad y dependencia de la ecuación de variables que están sujetas a cambios, es imposible analizar los horizontes aparentes en este caso. La incapacidad de resolver la ecuación nos deja explícitamente con pocas opciones para una mayor exploración de este caso. No obstante, el estudio de los otros casos sigue siendo significativo y continúa proporcionando información sobre el comportamiento de los agujeros de gusano en el universo.

Bibliografía

- [1] John Wheeler. Geons. *Physical Review*, 97:511–536, 1955.
- [2] James Clerk Maxwell. Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (155):459–512, 1865.
- [3] Yvonne Choquet-Bruhat. *Introduction to general relativity, black holes, and cosmology*. OUP Oxford, 2014.
- [4] Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, 4, 1905. English translation is in *The Principle of Relativity* (Dover, N.Y., 1952, 2008).
- [5] Daniel Kennefick. Not only because of theory: Dyson, eddington and the competing myths of the 1919 eclipse expedition. *arXiv preprint arXiv:0709.0685*, 2007.
- [6] Walter Del Pozzo and Alberto Vecchio. On tests of general relativity with binary radio pulsars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 462(1):L21–L25, 2016. doi: 10.1093/mnrasl/slw116.
- [7] Neil Ashby. Relativity in the Global Positioning System. *Living Rev. Rel.*, 6:1, 2003. doi: 10.12942/lrr-2003-1.
- [8] Davide Castelvecchi and Alexandra Witze. Einstein’s gravitational waves found at last. *Nature news*, 11, 2016.
- [9] S Doeleman, EHT Collaboration, et al. Focus on the first event horizon telescope results. *Astrophys J Lett. April*, 2019.
- [10] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870328. URL <https://books.google.com.ec/books?id=ibSdQgAACAAJ>.
- [11] James B Hartle. *Gravity: an introduction to einstein’s general relativity*, 2003.
- [12] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. 1992. ISBN 978-0-19-859686-8.
- [13] Amir H. Abbassi. General solutions of the spherically symmetric vacuum Einstein field equations. 10 1998.

-
- [14] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 2011. ISBN 978-0-521-20016-5, 978-0-521-09906-6, 978-0-511-82630-6, 978-0-521-09906-6. doi: 10.1017/CBO9780511524646.
- [15] Wolfgang Rindler. *Relativity: special, general, and cosmological*, 2003.
- [16] C. O’Raifeartaigh and B. McCann. Einstein’s cosmic model of 1931 revisited: an analysis and translation of a forgotten model of the universe. *Eur. Phys. J. H*, 39:63–85, 2014. doi: 10.1140/epjh/e2013-40038-x.
- [17] A. Friedman. On the Curvature of space. *Z. Phys.*, 10:377–386, 1922. doi: 10.1007/BF01332580.
- [18] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [19] Ludwig Flamm. Comments on einstein’s theory of gravity. *Physikalische Zeitschrift*, 17: 448, 1916.
- [20] Albert Einstein and Nathan Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, 48(1):73, 1935.
- [21] Michael S Morris and Kip S Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 56(5):395–412, 1988.
- [22] Michael S Morris, Kip S Thorne, and Ulvi Yurtsever. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Physical Review Letters*, 61(13):1446, 1988.
- [23] Matt Visser. *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*. 1995. ISBN 978-1-56396-653-8.
- [24] Matt Visser. Wormholes, baby universes, and causality. *Physical Review D*, 41(4):1116, 1990.
- [25] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, and D.I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017. ISBN 9781400889099. URL <https://books.google.com.ec/books?id=zAAuDwAAQBAJ>.
- [26] AG Agnese and M La Camera. Wormholes in the brans-dicke theory of gravitation. *Physical Review D*, 51(4):2011, 1995.
- [27] Francisco S. N. Lobo and Miguel A. Oliveira. Wormhole geometries in $f(R)$ modified theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 80:104012, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.104012.

- [28] Martin G. Richarte and Claudio Simeone. Wormholes in Einstein-Born-Infeld theory. *Phys. Rev. D*, 80:104033, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.81.109903. [Erratum: *Phys.Rev.D* 81, 109903 (2010)].
- [29] Mohammad Reza Mehdizadeh, Mahdi Kord Zangeneh, and Francisco S. N. Lobo. Einstein-Gauss-Bonnet traversable wormholes satisfying the weak energy condition. *Phys. Rev. D*, 91(8):084004, 2015. doi: 10.1103/PhysRevD.91.084004.
- [30] Rajibul Shaikh and Sayan Kar. Wormholes, the weak energy condition, and scalar-tensor gravity. *Phys. Rev. D*, 94(2):024011, 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.94.024011.
- [31] Sung-Won Kim and Hyunjoo Lee. Exact solutions of a charged wormhole. *Phys. Rev. D*, 63:064014, 2001. doi: 10.1103/PhysRevD.63.064014.
- [32] Sung-Won Kim. The Cosmological model with traversable wormhole. *Phys. Rev. D*, 53:6889–6892, 1996. doi: 10.1103/PhysRevD.53.6889.
- [33] Sean A. Hayward. Dynamic wormholes. *Int. J. Mod. Phys. D*, 8:373–382, 1999. doi: 10.1142/S0218271899000286.
- [34] S. A. Hayward. General laws of black hole dynamics. *Phys. Rev. D*, 49:6467–6474, 1994. doi: 10.1103/PhysRevD.49.6467.
- [35] Edward Teo. Rotating traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 58:024014, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.58.024014.
- [36] David Hochberg, Arkadiy Popov, and Sergey V. Sushkov. Selfconsistent wormhole solutions of semiclassical gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2050–2053, 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.2050.
- [37] Francisco S. N. Lobo. Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 71:084011, 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.084011.
- [38] Petya G. Nedkova, Vassil K. Tinchev, and Stoytcho S. Yazadjiev. Shadow of a rotating traversable wormhole. *Phys. Rev. D*, 88(12):124019, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.124019.
- [39] F. Abe. Gravitational Microlensing by the Ellis Wormhole. *Astrophys. J.*, 725:787–793, 2010. doi: 10.1088/0004-637X/725/1/787.
- [40] Menglei Zhou, Alejandro Cardenas-Avendano, Cosimo Bambi, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Search for astrophysical rotating Ellis wormholes with X-ray reflection spectroscopy. *Phys. Rev. D*, 94(2):024036, 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.94.024036.

- [41] Jose Luis Blázquez-Salcedo, Xiao Yan Chew, and Jutta Kunz. Scalar and axial quasi-normal modes of massive static phantom wormholes. *Phys. Rev. D*, 98(4):044035, 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.98.044035.
- [42] Takashi Torii and Hisa-aki Shinkai. Wormholes in higher dimensional space-time: Exact solutions and their linear stability analysis. *Phys. Rev. D*, 88:064027, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.064027.
- [43] P. E. Kashargin and S. V. Sushkov. Slowly rotating wormholes: The First order approximation. *Grav. Cosmol.*, 14:80–85, 2008. doi: 10.1134/S0202289308010106.
- [44] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz, and Eugen Radu. Properties of rotating wormholes. In *14th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories*, volume 2, pages 1454–1459, 2017. doi: 10.1142/9789813226609_0128.
- [45] Jose Luis Blázquez-Salcedo, Xiao Yan Chew, Jutta Kunz, and Dong-Han Yeom. Ellis wormholes in anti-de Sitter space. *Eur. Phys. J. C*, 81(9):858, 2021. doi: 10.1140/epjc/s10052-021-09645-0.
- [46] Charles W. Misner and John A. Wheeler. Classical physics as geometry: Gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space. *Annals Phys.*, 2:525–603, 1957. doi: 10.1016/0003-4916(57)90049-0.
- [47] Subhra Bhattacharya and Tanwi Bandyopadhyay. Revisiting the evolving Lorentzian wormhole: a general perspective. *Gen. Rel. Grav.*, 53(11):104, 2021. doi: 10.1007/s10714-021-02878-0.
- [48] Sung-Won Kim. The Cosmological Model with a Wormhole and Hawking Temperature near Apparent Horizon. *Phys. Lett. B*, 780:174–180, 2018. doi: 10.1016/j.physletb.2018.03.005.
- [49] G. C. McVittie. The mass-particle in an expanding universe. , 93:325–339, March 1933. doi: 10.1093/mnras/93.5.325.
- [50] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, 875:L1, 2019. doi: 10.3847/2041-8213/ab0ec7.
- [51] C J Gao. Arbitrary-dimensional schwarzschild–FRW black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 20(24):5949–5949, dec 2003. doi: 10.1088/0264-9381/20/24/c01.

-
- [52] Chang Jun Gao and Shuang Nan Zhang. Reissner-Nordstrom metric in the Friedman-Robertson-Walker universe. *Phys. Lett. B*, 595:28, 2004. doi: 10.1016/j.physletb.2004.05.076.