ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE CIENCIAS

DATOS ATÍPICOS Y FALTANTES, ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN Y DESESTACIONALIZACIÓN DE SERIES CRONOLÓGICAS. APLICACIONES A DATOS DE UNA EMPRESA DE VENTA DIRECTA

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

MARÍA AUGUSTA GÁNDARA BARRERA

DIRECTOR: DR. HOLGER CAPA SANTOS

Quito, Junio 2005

DECLARACIÓN

Yo, María Augusta Gándara Barrera, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y , que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

_____

María Augusta Gándara Barrera

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por María Augusta Gándara Barrera, bajo mi supervisión.

_____

Dr. Holger Capa Santos

DIRECTOR DEL PROYECTO

AGRADECIMIENTO

Deseo agradecer:

A Dios, por permitirme cumplir con este sueño.

A mis padres y hermanos, por su amor incondicional y su inmejorable apoyo.

A mis amigas y amigos, por su cariño y comprensión.

Al Dr. Holger Capa Santos, por su ayuda y enseñanza constante.

Al Gerente General de Yanbal Ecuador S.A., Sr. Robert Watson, por permitirme la utilización de los datos de su empresa y al Ing. César León, por su constante apoyo y amistad.

A cada uno de los integrantes de la Dirección de Proyectos y Procesos de Yanbal Ecuador S.A., por haberme ayudado en todo lo que estuvo a su alcance.

Gracias a todos.

CONTENIDO

CONTENIDO.....IV

RESUMEN.....XII

PRESENTACIÓN.....XIV

CAPITULO 1. DESESTACIONALIZACIÓN DE SERIES TEMPORALES 1

1.1. INTRODUCCIÓN.....1
1.2. OBTENCIÓN DE LA TENDENCIA DE UNA SERIE 3
1.2.1. PROCEDIMIENTOS PARA OBTENER UN RESUMEN DE LA TENDENCIA DE UNA SERIE OBSERVADA.....6
1.2.1.1. LA TENDENCIA LINEAL 8
1.2.1.2. VALORES OBSERVADOS, VALORES DE TENDENCIAS Y RESIDUOS 9
1.2.1.3. ¿CÓMO ALISAR UNA SERIE? 9
1.2.2. LOS PROCEDIMIENTOS DE ALISADO.....10
1.2.2.1. UN PRIMER ENFOQUE.....10
1.2.2.2. LOS PROCEDIMIENTOS DE ALISADO POR LAS "MEDIAS MÓVILES".....12
1.2.2.2.1 PRINCIPIO DEL MÉTODO.....13
1.2.2.2.2 RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL RECURRENTE.....15
1.2.2.2.3 NÚCLEO DE UNA MEDIA MÓVIL.....17
1.2.2.2.4 TRANSFORMACION DE UN RUIDO BLANCO POR UNA MEDIA MÓVIL.....17
1.2.2.2.5 MEDIAS ARITMÉTICAS PONDERADAS.....19
1.2.2.2.6 NÚCLEO DE UNA MEDIA ARITMÉTICA DE ORDEN 2M+1 19
1.2.2.2.7 SERIES INVARIANTES POR LA MEDIA ARITMÉTICA.....20
1.2.2.2.8 PROCESO DE TRANSFORMACIÓN DE UN RUIDO BLANCO.....22
1.2.2.3. LAS TÉCNICAS DE ALISADO POR LAS MEDIANAS MÓVILES 24
1.2.2.3.1 EJEMPLO DEL ALISADO DE UNA SERIE POR LA TÉCNICA DE LAS MEDIANAS MÓVILES DE ORDEN TRES.....24
1.2.2.3.2 EL TRATAMIENTO DE LOS VALORES "EXTREMOS" 25
1.2.2.3.3 LOS ALISADOS POR MEDIANAS MÓVILES DE ORDEN IMPAR 28
1.2.2.3.4 LOS ALISADOS POR MEDIANAS MÓVILES DE ORDEN PAR 29
1.2.2.3.5 LAS MEDIANAS MÓVILES ALTAS Y BAJAS 31
1.2.3. EL "RE-ALISADO" DE UNA SERIE 37
1.2.3.1. PASOS REPETIDOS POR UN ALISADOR DE TIPO "5" 39
1.2.3.2. APLICACIÓN DEL ALISADOR DE TIPO "5R".....39
1.2.3.3. LA CORRECCIÓN DEL ALISADO POR EL MÉTODO DE "DOBLAJE"40
1.2.4. LAS TÉCNICAS DE ALISADO POR LAS MEDIAS MÓVILES PONDERADAS Y LAS MEDIANAS MÓVILES PONDERADAS. 42
1.2.4.1. LA SELECCIÓN DEL MÉTODO DE ALISADO APROPIADO 44
1.3. DETERMINACIÓN DE LA COMPONENTE ESTACIONAL 46
1.3.1. MÉTODO DE RAZÓN A LA MEDIA MÓVIL 46

1.3.2. MÉTODO DE RAZÓN A LA TENDENCIA 47

1.3.3. MÉTODO DE DIFERENCIA A LA MEDIA MÓVIL 48
1.3.4. MÉTODO DE DIFERENCIA A LA TENDENCIA 49
1.4. METODOLOGÍAS DE REMOCIÓN DE ESTACIONALIDAD PARA VARIABLES ESTACIONARIAS 49
1.4.1. MÉTODO DE REGRESIÓN 51
1.4.2. MÉTODOS DE LOS PROMEDIOS MÓVILES 52
1.4.3. ESTIMADORES DE LA TENDENCIA – CICLO 54

CAPITULO 2. DATOS ATÍPICOS Y ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN 58

2.1. ATÍPICOS ADITIVOS (AO) 59
2.1.1. AUTOCORRELACIÓN 60
2.1.2. RESIDUOS 61
2.1.3. PARÁMETROS DEL MODELO 62
2.2. ATÍPICOS INNOVATIVOS O INNOVACIONALES (IO) 63
2.2.1. AUTOCORRELACIÓN 64
2.2.2. RESIDUOS 65
2.2.3. PARÁMETROS DEL MODELO 65
2.3. CAMBIOS DE NIVEL (LS) 66
2.3.1. RESIDUOS 67
2.3.2. AUTOCORRELACIÓN 68
2.4. ATÍPICOS Y ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN 69
2.5. PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN DE ATÍPICOS 70
2.5.1. ESTIMACIÓN DE LOS EFECTOS DE LOS ATÍPICOS 71
2.5.2. PRUEBA PARA ATÍPICOS 73
2.6. OBSERVACIONES INFLUYENTES 75
2.6.1. OBSERVACIONES INFLUYENTES Y ATÍPICOS 76
2.7. MÚLTIPLES ATÍPICOS 78
2.7.1. EFECTOS DE ENMASCARAMIENTO 78
2.7.2. PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN DE ATÍPICOS MÚLTIPLES 81
2.7.2.1. CONFUSIÓN ENTRE LOS ATÍPICOS INNOVATIVOS Y LOS CAMBIOS DE NIVEL BAJO H_0 83
2.7.2.2. MEJORAS EN LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS INICIALES 85
2.8. ESTIMACIÓN DE VALORES PERDIDOS 87
2.8.1. INTERPOLACIÓN ÓPTIMA Y FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN INVERSA. 87
2.8.2. ESTIMACIÓN DE VALORES FALTANTES 89

CAPITULO 3. APLICACIONES A DATOS DE UNA EMPRESA DE VENTA DIRECTA 92

3.1. INTRODUCCIÓN AL MANEJO DE DEMETRA 2.0 103
3.2. APLICACIONES CON DEMETRA 2.0 105
3.3. INTRODUCCIÓN AL MANEJO DE STATGRAPHICS 5.1 117
3.4. APLICACIONES CON STATGRAPHICS 5.1 119

3.4.1. MÉTODO DESCRIPTIVO 119
3.4.2. PREDICCIÓN AUTOMÁTICA 120
3.4.3. DESESTACIONALIZACIÓN 126
3.4.4. PREDICCIÓN 128

CAPITULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 138

4.1. CONCLUSIONES 138
4.2. RECOMENDACIONES 139

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 143

ANEXO 145

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1: Datos del número de Pedidos 7

Tabla 1.2: Resultados de tendencia con método de media móvil de orden 3. 11

Tabla 1.3: Valores de τ para distintos valores de m 23

Tabla 1.4: Ejemplo del alisado de una serie por medianas móviles de orden tres 25

Tabla 1.5: Resultados del alisado por las medianas móviles de orden tres 26

Tabla 1.6: Resultados del alisado por las medianas y medias móviles de orden tres 27

Tabla 1.7: Técnicas de medianas móviles de orden impar. 28

Tabla 1.8: Resultados serie se aplica la técnica de alisado “5R”. 38

Tabla 1.9: Resultados serie que aplica la técnica de alisado “[3t]”. 41

Tabla 2.1: Tipos de representaciones para los diferentes atípicos 71

Tabla 3.1: Datos de ventas de Cosmético 105

Tabla 3.2: Pruebas realizadas a residuos 123

Tabla 3.3: Pruebas a los modelos 124

Tabla 3.4: Modelos válidos 133

Tabla 3.5: Resultados obtenidos con Demetra 2.0 134

Tabla 3.6: Resultados obtenidos con Statgraphics 5.1 135

Tabla 3.7: Comparación de resultados 137

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Representación de la serie.....7

Figura 1.2: Representación de tendencia linea.....8

Figura 1.3: Acercamiento a la zona de alisamiento.....10

Figura 1.4: Gráfico de comparación entre la serie y su tendencia.....11

Figura 1.5: Gráfico para los distintos valores de λ_j positivos.....15

Figura 1.6: Tendencias para los distintos valores de λ_j negativos.....16

Figura 1.7: Gráfico para los distintos valores de ρ_j con raíces complejas..16

Figura 1.8: Gráfico para los distintos valores de ρ_h 19

Figura 1.9: Gráfico para *m*=2.....22

Figura 1.10: Gráfico de la función de autocorrelación.....23

Figura 1.11: Corrección de la diferencia por procedimiento de tipo "2p"....31

Figura 1.12: Corrección de la diferencia por procedimiento de tipo par.....31

Figura 1.13: Método de tratamiento de los valores extremos.....34

Figura 1.14: Serie A acompañada de su curva de tendencia por "5R".....39

Figura 1.15: Serie A acompañada de su curva de tendencia por "[5]".....40

Figura 1.16: Comparación de distintos métodos de alisamiento.....42

Figura 2.1: Gráfico de un AO.....60

Figura 2.2: Gráfico de la serie original y la serie con atípico.....61

Figura 2.3: Función de autocorrelación para ambas series.....61

Figura 2.4: Gráfico de la serie original y de la serie con atípico.....64

Figura 2.5: Gráfico de la función de autocorrelación para ambas series....64

Figura 2.6: Gráfico de un LS.....66

Figura 3.1: Representación de una serie temporal no estacionaria 94

Figura 3.2: Función de autocorrelación 94

Figura 3.3: Función de autocorrelación parcial.....96

Figura 3.4: Pantalla de lectura de datos..... 106

Figura 3.5: Pantalla de cálculos escogidos.....107

Figura 3.6: Selección de niveles de significancia.....108

Figura 3.7: Sección izquierda del panel de resultados.....109

Figura 3.8: Sección superior derecha del panel.....110

Figura 3.9: Sección inferior derecha del panel.....110

Figura 3.10: Resultado de la desestacionalización de la serie.....111

Figura 3.11: Gráfico de la serie, su tendencia y el ajuste estacional.....111

Figura 3.12: Gráfico de los residuales.....112

Figura 3.13: Gráfico de Componentes Estacionales por mes.....112

Figura 3.14: Gráfico de los atípicos por mes.....113

Figura 3.15: Gráfico de los efectos agregados de los atípicos.....114

Figura 3.16: Gráfico de los pronósticos calculados.....114

Figura 3.17: Resultados del modelo obtenido.....115

Figura 3.18: Gráfico de las pruebas a los residuos.....115

Figura 3.19: Previsiones calculadas para la serie.....116

Figura 3.20: Pantalla de selección de datos.....119

Figura 3.21: Pantalla de salida de Métodos Descriptivos.....120

Figura 3.22: Pantalla de salida de predicción automática.....120

Figura 3.23: Opciones de Análisis.....121

Figura 3.24: Opciones de datos.....121

Figura 3.25: Opciones gráficas.....122

Figura 3.26: Resumen del Análisis.....122

Figura 3.27: Salida de pronósticos.....123

Figura 3.28: Modelos utilizados.....123

Figura 3.29: Autocorrelaciones estimadas de los residuos.....124

Figura 3.30: Autocorrelaciones parciales estimadas de los residuos.....124

Figura 3.31: Periodigrama de los residuos.....125

Figura 3.32: Residuos de la serie.....125

Figura 3.33: Gráfico de pronósticos.....125

Figura 3.34: Informe de datos ajustados estacionalmente.....126

Figura 3.35: Gráfico de la tendencia-ciclo de la serie 127

Figura 3.36: Indices de estacionalidad 127

Figura 3.37: Gráfico de la componente irregular.....127

Figura 3.38: Gráfico de la serie ajustada estacionalmente.....128

Figura 3.39: Pantalla de salida del método de predicción.....128

Figura 3.40: Función de Autocorrelación parcial.....129

Figura 3.41: Función de Autocorrelación.....129

Figura 3.42: Autocorrelación residual SARIMA(0,0,0)$(1,0,1)_{12}$.....130

Figura 3.43: Autocorrelación parcial residual SARIMA(0,0,0)$(1,0,1)_{12}$.....130

Figura 3.44: Autocorrelación residual SARIMA(0,0,0)$(0,0,1)_{12}$.....131

Figura 3.45: Autocorrelación parcial residual SARIMA(0,0,0)$(0,0,1)_{12}$.....131

Figura 3.46: Autocorrelación residual SARIMA(0,0,0)$(1,0,0)_{12}$.....132

Figura 3.47: Autocorrelación parcial residual SARIMA(0,0,0)$(1,0,0)_{12}$.....132

Figura 3.48: Comparación de resultados con Demetra 2.0.....135

Figura 3.49: Comparación de resultados con Statgraphics 5.1.....136

RESUMEN

El comportamiento de las ventas en las empresas de venta directa está influenciado por la existencia de ofertas y promociones por campañas de ventas. Estas ventas se realizan mediante catálogos de productos que son entregados a los distribuidores..

En algunas ocasiones, se quita de los catálogos ciertos productos, debido a estrategias comerciales, lo que genera datos faltantes y contradictorios en las series temporales. Estos datos producen malas estimaciones de modelos y por consiguiente malos pronósticos de ventas.

Se estudiaron diferentes aspectos que afectan a las series temporales, tales como:

- La desestacionalización de series temporales en sus diversas componentes: tendencia-ciclo, estacionalidad y observaciones atípicas.

- Los tipos de datos atípicos: aditivos, innovativos y cambios de nivel, incluyendo los diferentes efectos que producen en las series temporales; sea en los residuos, en la función de autocorrelación o, en la estimación de los parámetros.

- La estimación de datos faltantes, aspecto muy importante tomando en cuenta la gran cantidad de series que están afectadas por ésta característica.

- El análisis de intervención, para modelar el efecto que un atípico provoca en una serie de tiempo.

Posteriormente se procedió a realizar las aplicaciones de los temas estudiados. Para esto, se solicitó la información a Yanbal Ecuador S.A. , empresa que muy amablemente permitió utilizar sus datos históricos.

Esta compañía se dedica a la producción y comercialización de cosméticos, bisutería y velas perfumadas. Cabe recalcar que los productos estudiados fueron escogidos con anterioridad al azar, por personal de la compañía.

Debido a que es una empresa líder en el mercado, el peligro de espionaje existente, no permite que se puedan rotular las series con sus nombres reales. Yanbal Ecuador S.A. tiene alrededor de 1000 productos cosméticos, razón por la cual, la búsqueda de mejorar los pronósticos resulta primordial. Este aspecto preocupa a la Gerencia General, debido a que el acierto al estimado actual está por debajo del 25%.

Las series escogidas fueron modeladas con los paquetes estadísticos: Demetra 2.0 y Statgraphics 5.1. Cada uno de estos paquetes llevó a los mismos resultados; sin embargo, las previsiones de ambos fueron muy distintas.

Se tomó como válidos los pronósticos realizados con Demetra 2.0 debido a que posee más opciones de cálculos, así como también por sus aciertos en los pronósticos.

Finalmente, se obtuvo un acierto promedio del 72%, considerado como un avance significativo en la realización de pronósticos.

PRESENTACIÓN

El presente Proyecto de Titulación tiene por objeto estudiar varios aspectos de las series temporales que deben ser analizadas antes de modelar cualquier serie temporal, para mejorar la calidad de los pronósticos.

Estos aspectos, muy comunes en las series de ventas, provocan errores muy graves en las estimaciones de modelos y por consiguiente, en las previsiones que se obtienen.

Este tipo de fenómeno ha provocado que los estimados estén completamente fuera de control, en empresas que tienen desarrollos estadísticos incipientes.. Por tal motivo, se han generado muchas pérdidas, sea por acumulación de inventario o, por costo de oportunidad.

Actualmente en el mercado, las empresas de venta directa están en auge, por lo que el correcto manejo de los pronósticos ocupa un lugar muy importante en los proyectos a corto y largo plazo, que en muchos casos son estratégicos.

En reiteradas ocasiones se promocionan charlas para los directivos de las empresas, ofreciendo paquetes estadísticos que con solo ingresar los datos, ya realizan las previsiones. Sin embargo, no se puede utilizar estos programas en el caso de Yanbal Ecuador S.A., debido a la existencia de datos atípicos y faltantes.

Sin embargo, existen otros paquetes estadísticos que no son de manejo tan simple, pero que detectan y estiman estos valores, por lo que se debe entrenar al personal en el manejo de estas herramientas.

Se demostró a la Gerencia General, que existen mejores métodos para realizar pronósticos; algo que debe ser aplicado lo más pronto posible, porque el aumento en el ingreso de empresas de venta directa país es un hecho.

CAPITULO 1. DESESTACIONALIZACIÓN DE SERIES TEMPORALES

1.1. INTRODUCCIÓN

Las series cronológicas son el resultado de la observación de un fenómeno dado en el transcurso del tiempo. Casi todas las disciplinas científicas deben observar y estudiar ciertos fenómenos en el tiempo sea para conocerlos o para controlarlos.

"Una serie cronológica (llamada también serie temporal) es un conjunto de observaciones que se distinguen por el papel particular que desempeña el orden en el cual han sido recogidas"[1]. Desde hace mucho tiempo atrás fueron descubiertas, pero se han ido desarrollando y analizando desde que fue posible utilizar una representación gráfica de las mismas entre los siglos XVII y XIX, con lo cual se llegó a los primeros análisis de la información de esas observaciones particulares.

El análisis de la frecuencia de las series tuvo mucha acogida en el campo astronómico y físico; posteriormente la descomposición de las series en términos de componentes permitió la previsión. Finalmente, surgió el concepto de autocorrelación, que dio paso a los modelos autorregresivos que son aplicados actualmente en numerosas disciplinas científicas[2].

La multiplicación de los campos de aplicación de los métodos de análisis de las series temporales condujo a la diversificación de objetivos asignados al estudio de esas series. Entre ellas se tienen los siguientes:

---

[1] Droesbeke [1989],p.6.

[2] Historia de los métodos estadísticos de análisis, ver Droesbeke [1989].

a) La descripción: se debe analizar una serie cronológica para comprender la información que aporta la medición del fenómeno en el tiempo; para esto se deben determinar los diversos componentes de la serie temporal tales como: tendencial – cíclico, estacional e irregular, para comprender mejor la naturaleza del fenómeno observado.

b) El filtrado: son métodos usados para transformar la serie temporal, de manera tal que se puedan eliminar ciertas características de la misma o, al contrario, de manera que se puedan evidenciar otras características, conservando por ejemplo determinados valores extremos importantes.

c) La modelización estocástica: "El objetivo de la modelización es expresar la manera en que se comporta una variable aleatoria X_t. Una primera manera de proceder consiste en apoyarse en modelos de tipo "modelos lineales generalizados". Es decir:

Si $X = (X_1,...,X_n)'$ es el vector definido por las n variables aleatorias del proceso correspondiente a los n valores que resultaron de la observación, el modelo se formula de la siguiente manera: $X = Ub + \varepsilon$. En este caso *b* es un vector de parámetros, U es una matriz de variables matemáticas y ε es un proceso aleatorio que, generalmente, se supone que sea de tipo gaussiano, de media nula y de matriz de varianza-covarianza constante e igual a Σ." [3]

d) La previsión: Dada una serie de observaciones $(x_1, x_2,..., x_T)$, se trata de obtener una estimación $\hat{x}_T(h)$ del valor x_{T+h}, o previsión, en el instante T tomando en cuenta el horizonte h. Este objetivo fue tratado inicialmente por métodos de extrapolación, posteriormente se definieron otros métodos de predicción tales como los de alisado exponencial, métodos ARMA, etc.

[3] ["El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a intervalos regulares", Ladiray Domenique, Laboratoire de Mèthodologie du Traitment des dones, Revista Methodologica, Bélgica, 1993]

e) Control: es la comparación de los valores obtenidos con la previsión y los valores de referencia para establecer la validez de los modelos utilizados y el posible mejoramiento cuando los fenómenos son afectados por perturbaciones.

1.2. OBTENCIÓN DE LA TENDENCIA DE UNA SERIE

Tradicionalmente, en la descomposición de series temporales, se identifican los siguientes orígenes de las variaciones: ciclo, tendencia, estacionalidad y observaciones atípicas.

TENDENCIA: Son variaciones de largo período debidas principalmente a cambios demográficos, tecnológicos e institucionales. Suele estimarse conjuntamente con las variaciones del ciclo económico que normalmente tiene un comportamiento oscilatorio.

CICLO (Variación cíclica) : Recoge las oscilaciones periódicas de amplitud superior a un año. Es decir, son movimientos irregulares alrededor de la tendencia secular en donde, a diferencia de las variaciones estacionales, el período y la amplitud son variables. Estos movimientos corresponden a períodos de intensificación y depresión del fenómeno.

ESTACIONALIDAD (Variación estacional) : Se la atribuye al efecto de las actividades socioeconómicas de las estaciones climatológicas, festividades religiosas y eventos institucionales con fechas fijas. Al igual que el ciclo económico tiene un carácter oscilatorio y evoluciona en el tiempo.

ATÍPICOS: Se deben a acontecimientos inesperados que no se repiten con regularidad estadística, tales como huelgas, inundaciones, fuertes devaluaciones, etc.

El movimiento de una serie cronológica se compone de la superposición de :

- Un movimiento de traslación (tendencia), $T(t)$
- Un movimiento vibratorio (variación estacional), $E(t)$
- Un movimiento de oscilación (variación cíclica), $C(t)$
- Un movimiento perturbador (variación aleatoria), $A(t)$

Se establecen dos modelos de descomposición:

(i) Modelo o esquema aditivo: se considera que la serie está formada por la suma de éstas componentes, es decir, $X(t) = T(t) + E(t) + C(t) + A(t)$

(ii) Modelo o esquema multiplicativo: en este caso se considera que $X(t) = T(t) * E(t) * C(t) * A(t)$ y, salvo la tendencia, los demás componentes vienen expresados en tantos por uno.

Este modelo admite variantes para recoger el supuesto de que la componente aleatoria es independiente de las demás; por ejemplo, la componente accidental puede aparecer de forma aditiva: $X(t) = T(t) * E(t) * C(t) + A(t)$

Para resolver el problema de cuál debe ser el esquema a utilizar en cada caso, si aditivo o multiplicativo, habrá que efectuar un análisis previo de la serie por métodos gráficos y analíticos.

(i) Método gráfico: Si las oscilaciones aumentan a lo largo de los períodos con una tendencia creciente, puede creerse que actúa el esquema multiplicativo; mientras que, si las oscilaciones son regulares, no expansivas a lo largo de la serie, puede concluirse que actúa un esquema aditivo.

(ii) Método analítico: Se supone una serie temporal de varios años (p años) con observaciones mensuales (o bien, bimestrales, trimestrales, cuatrimestrales, etc.):

$$\underbrace{X_{1:1};X_{2:1};...;X_{12:1}}_{1er.Año};\underbrace{X_{1:2};X_{2:2};...;X_{12:2}}_{2do.Año};....;\underbrace{X_{1:p};X_{2:p};...;X_{12:p}}_{Año\ \ p}$$

Para cada mes se calculan las diferencias y cocientes en años consecutivos:

$$d_{i:k} = X_{i:k+1} - X_{i:k}, \quad c_{i:k} = \frac{X_{i:k+1}}{X_{i:k}},\ i = 1,2,....,12 \quad k = 1,2,...(p-1) \quad (años)$$

Se calculan las medias totales d_1, c_1 correspondientes a $d_{i;k}$ y $c_{i;k}$, respectivamente, así como sus desviaciones típicas d y c con el objeto de calcular el coeficiente de variación de Pearson.

Este coeficiente es una de las medidas de dispersión relativas más significativas y se define como el cociente entre la desviación típica de los datos y la media aritmética. Como es una medida adimensional, permite comparar medias de distintas series.

De esta manera, se comparan los coeficientes para las series de $d_{i;k}$ y $c_{i;k}$:

$$CV(d) = \frac{d}{d_1}; \quad CV(c) = \frac{c}{c_1}$$

Si $CV(d) < CV(c)$, se toma como válido el esquema aditivo;

Si $CV(d) > CV(c)$, se toma como válido el esquema multiplicativo.

En las series que resultan de la acumulación de actividades diarias, también se observan los efectos causados por las variaciones de actividad según el largo del mes y el número de veces que cada día de la semana ocurre en el mes, o sea por la composición del mes, la cual cambia con los años. Este tipo de variaciones también son eliminadas de las series temporales cuando se ajusta por estacionalidad dejando, en consecuencia, una serie transformada en la cual sólo quedan las variaciones atribuibles a la tendencia - ciclo, y los casos atípicos.

En la terminología de modelos de descomposición estructural, se acostumbra llamar “señal” a la parte sistémica de la serie cronológica y “ruido” a la componente residual.

El objetivo principal del ajuste estacional es alcanzar a inferir la fase del ciclo en la cual se encuentra la economía dentro del año corriente y muy especialmente, identifica el punto de retorno o de giro, es decir el punto en el cuál se pasa de un período de expansión a uno de recesión o viceversa. Para realizar esto, se necesita estandarizar la serie, eliminando la componente estacional conjuntamente con las variaciones por la composición del mes y fiestas móviles cuando éstas existan.

Sin embargo, existen grandes dificultades en la identificación y estimación de las componentes, especialmente de las que tienen casos atípicos. Estas variaciones atípicas impiden ver claramente la dirección de la tendencia en el corto plazo; es decir, dan problemas para identificar la fase del ciclo corriente de ese instante de la economía.

En ese caso, es necesario utilizar buenos estimadores de tendencia – ciclo que aplicados a las series desestacionalizadas suavicen la presencia de la componente irregular y eliminen el impacto de los eventos atípicos.

1.2.1. PROCEDIMIENTOS PARA OBTENER UN RESUMEN DE LA TENDENCIA DE UNA SERIE OBSERVADA

Se investiga el desarrollo de la serie de pedidos por semana en una empresa de venta directa. Los pedidos son realizados los días jueves y viernes de cada semana y normalmente los pedidos incrementan en la cuarta semana de cada mes debido a que los intermediarios desean cumplir con los objetivos que les ha propuesto la empresa.

Se puede observar en la Tabla 1.1 los valores de los pedidos realizados en los tres primeros meses de ventas. A simple vista se puede observar que en la cuarta semana de cada mes los pedidos se incrementan.

SEMANA	Pedidos por semana
01 SEM	5571
02 SEM	8347
03 SEM	8367
04 SEM	9927
05 SEM	6995
06 SEM	7704
07 SEM	6038
08 SEM	9370
09 SEM	6637
10 SEM	7632
11 SEM	8548
12 SEM	8116

Tabla 1.1: Datos del número de Pedidos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se puede realizar una primera lectura de la evolución durante el período de la serie a partir de la representación gráfica de la misma.

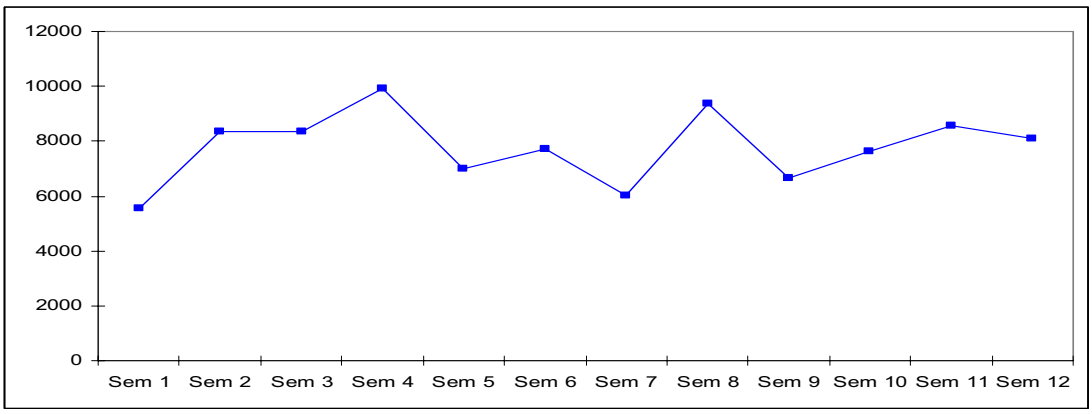


Figura 1.1: Representación de la serie

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

1.2.1.1. La tendencia lineal

Se utiliza una recta de ajuste con el procedimiento clásico de regresión lineal o recta de los mínimos cuadrados ordinarios. La Figura 1.2 muestra ésta recta de regresión. Como se observa el resumen de tendencia dado por la regresión lineal suele ser poco matizado y por lo tanto poco apropiado para dar cuenta de las modificaciones de la tendencia en el transcurso de un período.

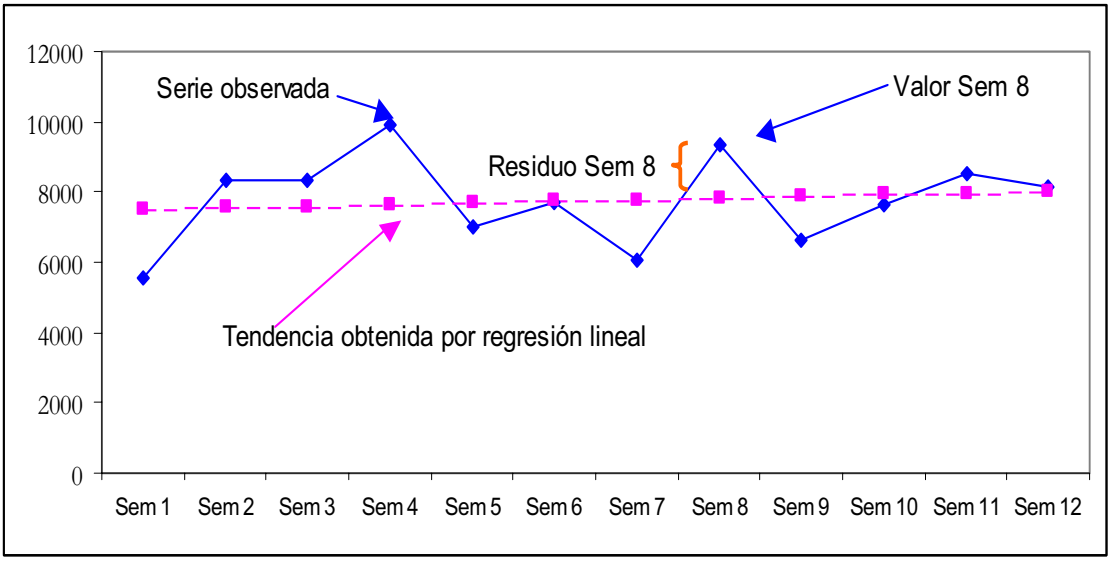


Figura 1.2: Representación de tendencia lineal.

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se puede proponer un resumen empírico de la tendencia de la serie observada. Por ejemplo, si se traza con la mano una curva que pasa por lo más cerca posible de los puntos que representan los valores semanales observados, pero de manera tal que no se quiebre. Se habrá construido entonces otro resumen (una curva) que representa mejor la tendencia, durante el período.

1.2.1.2. Valores observados, valores de tendencias y residuos

Siempre que se reemplazan los valores observados por los valores de tendencia (cualquiera que sea el procedimiento por el que se determina esos valores), se establece un determinado "residuo" que equivale a la diferencia entre el valor observado y el valor estimado por el procedimiento adoptado para resumir la tendencia de la serie. Se puede formularlo diciendo que la búsqueda de la tendencia de una serie nos lleva a la siguiente relación:

Datos observados = Valores de tendencia estimados + Residuos

Un procedimiento que permite resumir la tendencia de una serie será considerado mejor que otro, cuando los "residuos" que produce son globalmente más reducidos que los que produce otro procedimiento. En el marco de los métodos clásicos de análisis de la información aportada por una serie cronológica, se considera que la serie de los residuos corresponde generalmente al componente "accidental" de la información. En este caso, se llama "residuos" del alisado, la serie que contiene el componente "extra - tendencial", que comporta el componente accidental, pero también eventualmente otros componentes (cíclico, estacional).

1.2.1.3. ¿Cómo alisar una serie?

La operación que consiste en producir un resumen que evidencie la tendencia a lo largo del período de una serie es llamada "alisado" de la serie. Para producir ese resumen, es necesario determinar los valores de tendencia que corresponden a cada observación. Si se reúnen los puntos así determinados, se obtiene la "curva de tendencia" asociada a la serie observada.

En la Figura 1.3, se hace un acercamiento de la zona central del trazado de la serie observada, a fin de representar mejor una de las maneras de

determinar los valores de tendencia. El procedimiento se explica en la sección 1.2.2.1.

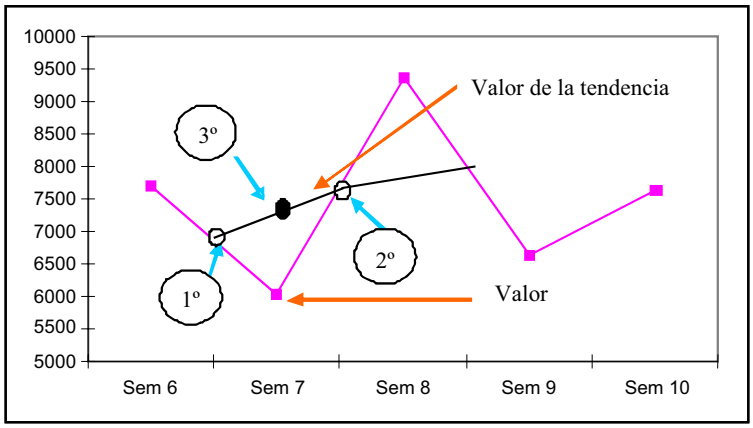


Figura 1.3: Acercamiento a la zona de alisamiento

Fuente: Yanbal Data Warehouse

1.2.2. LOS PROCEDIMIENTOS DE ALISADO

1.2.2.1. Un primer enfoque

Para determinar el valor de tendencia que corresponde a la semana 7, se puede proceder de la forma siguiente: en una primera etapa, hay que calcular el valor promedio de los valores observados en la 6 y 7 semana (véase Figura 1.3, punto señalado por (1º.)) y el de las semanas 7 y 8 (véase Figura 1.3, punto señalado por (2º.)). En una segunda etapa, hay que calcular el promedio de los dos valores (1º.) y (2º.), el cual (véase Figura 1.3, punto señalado por (3º.)) será considerado como el valor de tendencia que corresponde a la semana 7. En la Figura 1.3, puede observarse que el punto (1º.) es el centro del segmento definido por los valores observados en 6 y 7, como el punto (2º.) es el centro del segmento definido por los valores observados en 7 y 8. Trazando la recta definida por ambos puntos, se determina el "valor esperado" en 7 (3º.)

Si se aplica esta técnica de "alisado" a la serie del número de pedidos, se obtienen los resultados presentados en la Tabla 1.2. Normalmente los

valores que corresponden a los valores de las extremidades de la serie se conservan.

Semana	Serie Observada	Tendencia	Residuos
Sem 1	5571	5571	0
Sem 2	8347	7658	689
Sem 3	8367	8752	-385
Sem 4	9927	8804	1123
Sem 5	6995	7905.25	-910.25
Sem 6	7704	7110.25	593.75
Sem 7	6038	7287.5	-1249.5
Sem 8	9370	7853.75	1516.25
Sem 9	6637	7569	-932
Sem 10	7632	7612.25	19.75
Sem 11	8548	8211	337
Sem 12	8116	8052.25	63.75

Tabla 1.2: Resultados de tendencia con método de media móvil de orden 3.

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la Figura 1.4 se observa la curva de tendencia así definida.

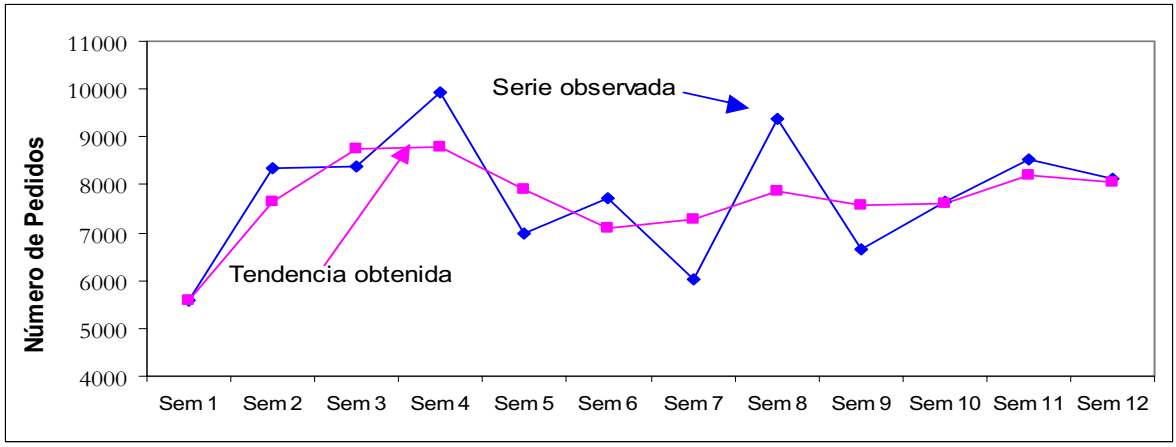


Figura 1.4: Gráfico de comparación entre la serie y su tendencia

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Pero el alisado de la serie por el procedimiento de interpolación lineal es insuficiente. La curva obtenida da una representación suficientemente lisa de la tendencia de la serie observada en los intervalos en los que ésta presenta fuertes irregularidades, pero conserva puntos de inflexión.

Además, este procedimiento de alisado es seguramente mejor que el que se usaba antes para establecer la tendencia de la serie estudiada por ajuste de una recta de regresión lineal, pero es de calidad inferior a la del procedimiento “empírico” anterior.

Para mejorar los resultados del alisado ¿por qué limitarse a asociar a cada observación un valor de tendencia definido como el promedio de dos valores consecutivos? Se podría, por ejemplo, determinar cada valor de tendencia por la media aritmética de tres, cuatro, cinco o p valores sucesivos centrados en cada observación. Procediendo de esta forma, se emplearían las técnicas de alisado por “medias móviles”:

1.2.2.2. Los procedimientos de alisado por las “medias móviles”

Para calcular los valores de tendencia, las técnicas de alisado por medias móviles determinan la esperanza matemática (la media) de las observaciones incluidas en una ventana de *p* observaciones sucesivas, centradas en cada valor observado, De tal manera que existen medias móviles de orden par y de orden impar, según el número de observaciones incluidas.

Las medias móviles de orden par deben ser corregidas, por este motivo, es preferible utilizar la siguiente fórmula para medias móviles de orden 4:

$$E_t = \frac{\left(X_{t-2}/2\right) + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \left(X_{t+2}/2\right)}{4}$$

En general las medias móviles son muy sensibles a la presencia de valores extremos lo cual será comprobado en la sección 1.2.2.3.2.

1.2.2.2.1 Principio Del Método

Sea una serie X_t que admita una descomposición aditiva:

$$X_t = Z_t + S_t + u_t \qquad t = 1,...,T$$

Una manera simple de determinar las componentes de la serie, por ejemplo la tendencia Z_t, consiste en aplicarle la transformación lineal f que conserve la tendencia y cancele las otras componentes.

Sean $X_t^*, Z_t^*, S_t^*, u_t^*$ la serie y las componentes de la serie transformadas por f, de la serie y componentes X, Z, S, u. Como f es lineal: $X_t^* = Z_t^* + S_t^* + u_t^*$

Por otra parte, f anula la estacionalidad y la perturbación: $S_t^* = 0, \quad u_t^* = 0$ y se conserva la tendencia: $Z_t^* = Z_t$.

La mayor dificultad del método está en la selección de la transformación f. No se puede construir una transformación que preserve la tendencia y que cancele toda la estacionalidad y residuos.

La selección de la transformación f no es automática y se la encuentra realizando un estudio previo y modelización de sus varias componentes y debe cumplir con los siguientes requisitos:

- Los cálculos deben ser simples.
- La actualización debe ser fácil cuando T incrementa.
- El método debe ser estable.

Las transformaciones generalmente utilizadas son las medias móviles. X_t^* es la suma ponderada de valores de X que están alrededor de t:

$$X_t^* = \theta_{-m_1} X_{t-m_1} + \theta_{-m_1+1} X_{t-m_1+1} + \ldots + \theta_{m_2} X_{t+m_2}$$

$$X_t^* = \sum_{j=-m_1}^{m_2} \theta_j X_{t+j}$$

Donde $m_i \in N$ y $\theta_j \in \Re$; $\quad m_1 + 1 \le t \le T - m_2$

Una media móvil es una aplicación lineal del espacio $\Re^Z$ en sí mismo y como toda aplicación lineal, tiene sus características básicas, como son sus vectores y valores propios y su núcleo. Para estimarlos es preferible escribir a la serie X_t en términos del operador de retardos B.

Sea B el operador de retardos, que a la serie X_t le hace corresponder la serie X_{t-1} ; la serie transformada por las medias móviles se escribe:

$$X^* = MX = \left[\sum_{j=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i} \right] X$$

Una media móvil es una aplicación que se escribe como una combinación lineal finita de potencias positivas y negativas del operador de retardos:

$$M = \sum_{j=-m_1}^{m_2} \theta_i B^{-i}$$

Las medias móviles normalmente son centradas: $m_1 = m_2 = m$.

El operador M se puede escribir de la siguiente manera:

$$M = B^m \left[\theta_{-m} + \theta_{-m+1} B^{-1} + \ldots + \theta_m B^{-2m} \right]$$

o también en términos del operador en avance F, definido por $F = B^{-1}$ y Θ al polinomio tal que:

$$\Theta(x) = \theta_{-m} + \theta_{-m+1} x + \ldots + \theta_m x^{2m}$$

de donde:

$$M = B^m \Theta(F)$$

1.2.2.2.2 Resolución De Una Ecuación Lineal Recurrente

Sea la ecuación lineal recurrente de orden $2m$:

$$a_0 X_t + a_1 X_{t+1} + ... + a_{2m} X_{t+2m} = 0 \qquad \forall t$$

Las soluciones de tal ecuación constituyen un subespacio vectorial de dimensión $2m$.

Existen soluciones de la forma $X_t = \lambda^t$ con $\lambda \in C$. El valor de λ debe satisfacer la ecuación característica:

$$a_o + a_1 \lambda + ... + a_{2m} \lambda^{2m} = 0$$

Cuando la ecuación admite $2m$ raíces distintas, $\lambda_1,...,\lambda_j,...\lambda_{2m}$, se obtiene:

$$X_{1t} = \lambda_1^t,..., X_{jt} = \lambda_j^t,..., X_{2mt} = \lambda_{2m}^t$$

La solución de la ecuación de recurrencia viene dada por:

$$X_t = \sum_{j=1}^{2m} c_j X_{jt} = \sum_{j=1}^{2m} c_j \lambda_j^t, \quad c_j \in C$$

Las raíces pueden ser reales o complejas:

Si λ_j es real, la solución $X_{jt} = \lambda_j^t$ y dependiendo de los valores de λ_j se tendría uno de estos gráficos.

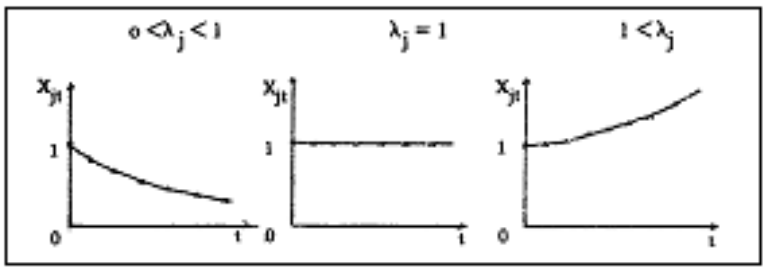


Figura 1.5: Gráfico para los distintos valores de λ_j positivos.

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

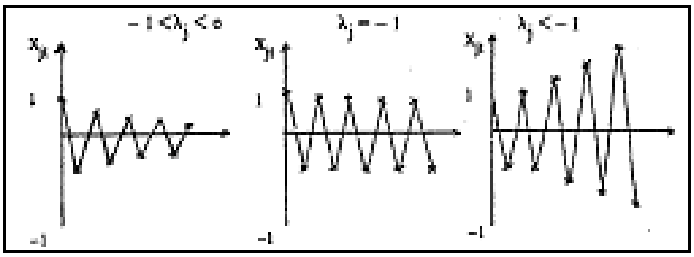


Figura 1.6: Tendencias para los distintos valores de λ_j negativos.

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

Cuando la raíz λ_j es compleja, $\lambda_j = \rho_j e^{i\omega_j}$ con $\rho_j = |\lambda_j| > 0$ y $\omega_j \in [0,2\pi[$, la ecuación característica admite como solución el valor conjugado $\bar{\lambda}_j = \rho_j e^{-i\omega_j}$.

Las combinaciones reales de X_t pueden escribirse como:

$$X_t = \rho_j^t \left(c_{1j} \cos \omega_j t + c_{2j} \operatorname{sen} \omega_j t\right)$$

Este tipo de series son explosivas o de forma sinusoidal convergentes de acuerdo a la posición de ρ_j comparadas con 1.

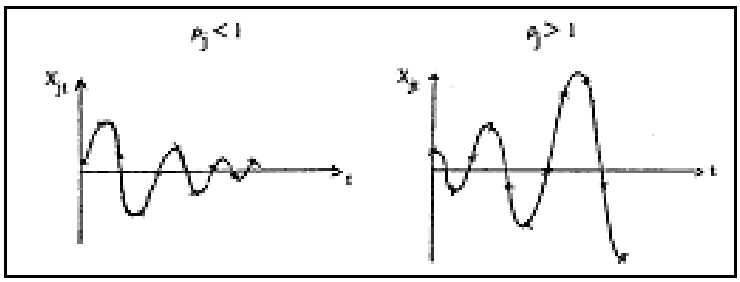


Figura 1.7: Gráfico para los distintos valores de ρ_j con raíces complejas

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

Donde un período igual a $\frac{2\pi}{\omega_j}$ corresponde a un período de la serie inicial, y se interpreta como una componente estacional.

Cuando el período es muy largo, o ω_j pequeño, la serie puede ser vista como una tendencia (o un ciclo).

En el caso general las raíces de la ecuación característica, pueden ser múltiples. Puede tener J raíces distintas $\lambda_1,...,\lambda_j,...,\lambda_J$ con multiplicidad $\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_J$, la solución general de:

$$\alpha_0 X_t + \alpha_1 X_{t+1} + ... + \alpha_{2m} X_{t+2m} = 0 \qquad \forall t$$

puede escribirse de la forma:

$$X_t = \lambda_j^t \left(c_{11} + c_{12} t + ... + c_{1\alpha_1} t^{\alpha_1 - 1}\right) + ... + \lambda_J^t \left(c_{J1} + c_{J2} t + ... + c_{J\alpha_J} t^{\alpha_J - 1}\right)$$

$$c_{jk} \in C, \quad j = 1,...,J; \quad k = 1,...,\alpha_j$$

1.2.2.2.3 Núcleo De Una Media Móvil

El núcleo de una media móvil M (Notado “Ker M”) es el conjunto de todas las series temporales anuladas por la media:
Es decir:

$$\forall t : MX_t = \theta_{-m} X_{t-m} + .. + \theta_m X_{t+m} = 0$$
$$\forall t : \theta_{-m} X_t + .. + \theta_m X_{t+2m} = 0$$

Por lo tanto, los elementos del núcleo son soluciones de la ecuación lineal de recurrencia.

1.2.2.2.4 TRANSFORMACION DE UN RUIDO BLANCO POR UNA MEDIA MÓVIL

Se puede transformar la perturbación u, suponiendo que las u_t son variables aleatorias centradas, no correlacionadas, de la misma varianza σ^2. Un método que simplifica la transformación son las medias móviles.

$$u_t^* = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i u_{t+i}$$

Como las variables son centradas, entonces: $Eu_t^* = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i Eu_{t+i} = 0$

Correleograma de u^*

Si se analiza la varianza: $\sigma^{*2} = Vu_t^* = \sigma^2 \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2$

La importancia de la perturbación disminuye si $\sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2 < 1$.

La razón de reducción de la varianza residual es: $\frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2} = \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2$

Las variables transformadas son correlacionadas entre sí. Entonces la covarianza entre u_t^* y $u_{t+h}^* (h \geq 0)$ es igual a:

$$\begin{aligned}
&\gamma(h) = Cov\left[u_t^*, u_{t+h}^*\right] \\
&= \sum_{i=-m}^{m} \sum_{j=-m}^{m} \theta_i \theta_j E\left[u_{t+i} u_{t+h+j}\right] \\
&= \begin{cases} \sigma^2 \quad \sum_{i=h-m}^{m} \theta_i \theta_{i-h} \quad si \quad h \leq 2m \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad caso\ contrario \end{cases}
\end{aligned}$$

Esta covarianza no depende de t y se anula si $h > 2m$. Se obtiene la correlación que depende de h: $\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

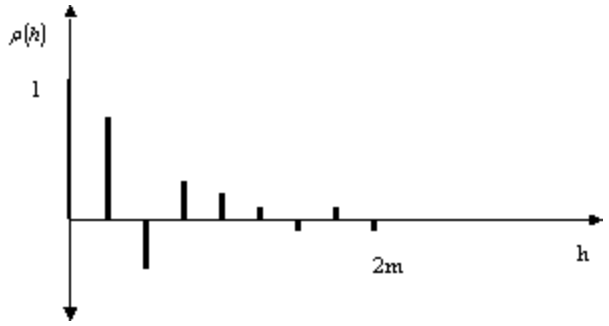


Figura 1.8: Gráfico para los distintos valores de ρ_h.

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

1.2.2.2.5 MEDIAS ARITMÉTICAS PONDERADAS

Los coeficientes θ_i son la solución del problema de minimizar:

$$\underset{\theta_i}{Min} \sum_{i=-m}^{m} \theta_i^2$$

$$\sum_{I=-m}^{m} \theta_i = 1$$

$\sum_{I=-m}^{m} \theta_i = 1$ debido a que conserva los polinomios de grado 1 y suponiendo que decrece al máximo posible tomando en cuenta la perturbación, lo que conduce a:

$$\theta_i = \frac{1}{2m+1} \quad \forall i$$

$$X_t^* = \frac{1}{2m+1}\left[X_{t-m} + X_{t-m+1} + ... + X_{t+m}\right]$$

1.2.2.2.6 Núcleo De Una Media Aritmética De Orden 2m+1

El polinomio asociado a la media móvil centrada es:

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{2m+1}\left(1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^{2m}\right)$$

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{2m+1}\frac{1-\lambda^{2m+1}}{1-\lambda}$$

La ecuación característica $\Theta(\lambda) = 0$ admite como soluciones las 2m raíces que pueden ser de unicidad distinta a 1.

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi j}{2m+1}}, \qquad j = 1,...,2m$$

Los elementos generadores del núcleo son de la forma:

$$S_t = \sum_{j=1}^{m}\left(c_{1j}\cos\frac{2\pi jt}{2m+1} + c_{2j}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi jt}{2m+1}\right)$$

Estas son funciones periódicas de período $2m+1$ que en promedio se anulan en el período:

$$\sum_{i=-m}^{m} S_{t+i} = 0 \qquad \forall t$$

Dada una función estacional periódica de período impar, de media nula, siempre existe un promedio aritmético que permite anularla.

1.2.2.2.7 Series Invariantes por La Media Aritmética

Por construcción, la media preserva las constantes, y al ser simétrica conserva los polinomios de grado 1. Para los polinomios de grado 2 esta propiedad no se cumple. Por ejemplo: $X_t = t^2$

$$X_t^* = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=-m}^{m}(t+i)^2$$

$$= \frac{1}{2m+1}\left[\sum_{i=-m}^{m} t^2 + 2t\sum_{i=-m}^{m} i + \sum_{i=-m}^{m} i^2\right]$$
$$= \frac{1}{2m+1}\left[(2m+1)t^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{3}\right]$$
$$= t^2 + \frac{m(m+1)}{3} \neq t^2$$

Para la media aritmética de orden 5, el polinomio característico asociado a la ecuación de recurrencia es:

$$\Theta(\lambda) - \lambda^2 = \frac{1}{5}\lambda^4 + \frac{1}{5}\lambda^3 - \frac{4}{5}\lambda^2 + \frac{1}{5}\lambda + \frac{1}{5}$$

Como este polinomio es divisible para $(\lambda - 1)^2$, entonces:

$$\Theta(\lambda) - \lambda^2 = \frac{1}{5}(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 3\lambda + 1)$$

Las raíces que son distintas de 1 son: $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ y las series invariantes correspondientes son:

$$X_t = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^t \quad , X_t = \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

Para apreciar el efecto de la media aritmética en otras funciones periódicas, se puede calcular la ganancia en esta media: $\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|$, donde $\omega \in [0, \pi[$. El valor $\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|$ mide el efecto de la amplitud en las funciones sinusoidales de período $\frac{2\pi}{\omega}$.

$$\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right| = \left|\frac{1}{2m+1}\left(e^{-im\omega} + \ldots + e^{im\omega}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{2m+1}\left|1 + e^{i\omega} + \ldots + e^{2im\omega}\right|$$
$$= \frac{1}{2m+1}\frac{\left|1 - e^{(2m+1)i\omega}\right|}{\left|1 - e^{i\omega}\right|} = \frac{1}{2m+1}\left|\frac{sen(2m+1)\frac{\omega}{2}}{sen\frac{\omega}{2}}\right|$$

Esta función se anula para $\omega = \frac{2k\pi}{2m+1} \qquad k = 1,2,\ldots$

Se debe encontrar las series que provienen del núcleo de la media móvil. Es decir, las series periódicas de frecuencia cercana a $\frac{2k\pi}{2m+1}$ que también serán muy reducidos a causa de la continuidad de $\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|$. La modificación de la amplitud también depende del tamaño de la media móvil.; en particular, se observa que si m tiende al infinito, $\Theta\left(e^{i\omega}\right)$ tiende a cero, ya que $\omega \neq 0$. Esto implica que si a una serie cualquiera se le aplica una media aritmética larga, tiende a hacerla constante. Cuando $m = 2$, la función de $\left|\Theta\left(e^{i\omega}\right)\right|$ tiene la siguiente forma:

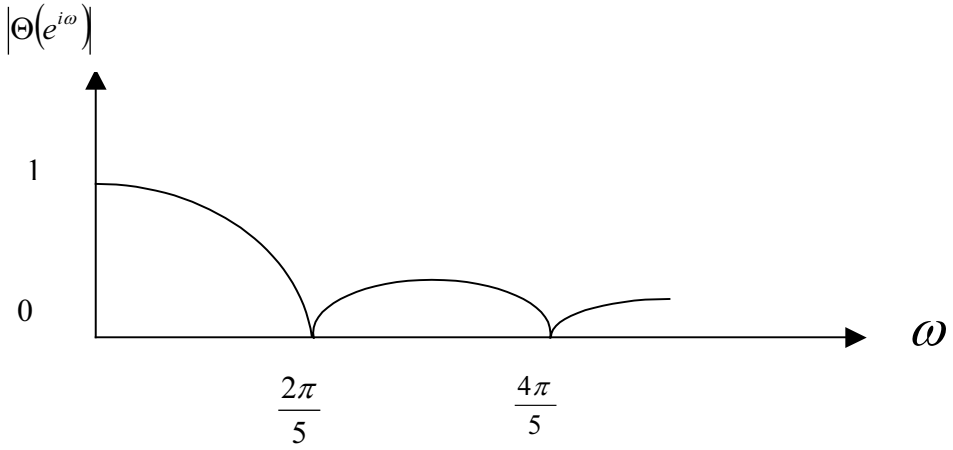


Figura 1.9: Gráfico para m =2

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

1.2.2.2.8 Proceso de Transformación de un Ruido Blanco

La covarianza $\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{i=h-m}^{m} \frac{1}{(2m+1)^2} = \sigma^2 \frac{2m+1-h}{(2m+1)^2}$

La reducción de la varianza obtenida para el ruido blanco es:

$$\frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2} = \frac{\gamma(0)}{\sigma^2} = \frac{1}{2m+1}$$

La función de autocorrelación:

$$\rho(h)=\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}=\begin{cases}\dfrac{2m+1-h}{2m+1} & 0\le h\le 2m\\ 0 & caso\ \ contrario\end{cases}$$

El gráfico de la función de autocorrelación se presenta a continuación:

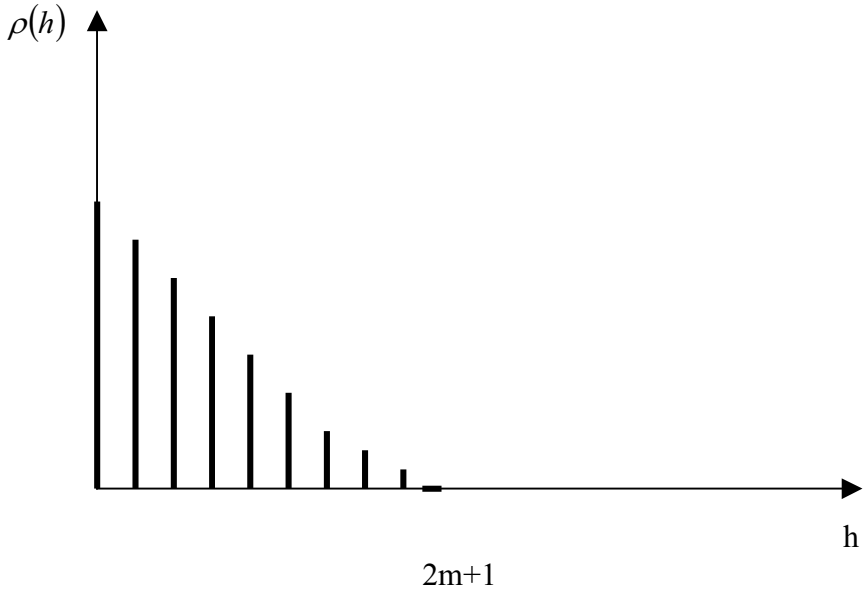


Figura 1.10: Gráfico de la función de autocorrelación

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

La autocorrelación de orden 1, introduce regularidades ficticias de grandes períodos. Estos períodos están dados por:

$$\tau=\frac{2\pi}{Arc\cos\dfrac{2m}{2m+1}}=\frac{2\pi}{Arc\cos\left(1-\dfrac{1}{2m+1}\right)}$$

m	1	2	3	4	5	6
τ	7,4	9,7	11,8	12,9	14,5	15,7

Tabla 1.3: Valores de τ para distintos valores de m

Fuente: "Cours de séries temporelles", Christian Gourieroux, Alain Monfort, Economica, 1983

1.2.2.3. Las técnicas de alisado por las medianas móviles

Considere una serie cronológica A:

$$A = \{y_t; t = 1,.....,n\}$$

Cuando se procede al alisado de una serie A, por ejemplo, mediante la técnica de las medianas móviles de orden tres[4], la serie E, que resume la tendencia de A durante el período, se define por el conjunto de los valores esperados. Se podrá definir la serie E de la siguiente manera: $E = \{e_t^{[3]}; t = 1,...,n\}$. En el caso general de un procedimiento $[P]$cualquiera de alisado, la serie E de tendencia producida por $[P]$cualquiera de alisado, se definirá así: $E = \{e_t^{[P]}; t = 1,...,n\}$.

Se observa que si se produce por $[P]$, la serie E asociada a una serie A, se define la serie que resume la tendencia de ésta y una serie R de residuos. Se puede entonces definir la serie R del siguiente modo: $R = \{r_t^{[P]}; t = 1,...,n\}$.

Por ejemplo, en el caso del alisado de la serie A observada por el procedimiento [3], se tiene la relación siguiente:

$$y_t = e_t^{[3]} + r_t^{[3]}; \quad \forall t = 1,...,n\,.$$

En esta expresión, $e_t^{[3]} = mediana[y_{t-1}, y_t, y_{t+1}]; \quad \forall t = 2,...,n-1$, mientras que:

$$r_t^{[3]} = y_t - e_t^{[3]}; \quad \forall t = 1,..,n\,.$$

1.2.2.3.1 Ejemplo del alisado de una serie por la técnica de las medianas móviles de orden tres

Si se toma de nuevo la serie con la que trabajamos en la sección 1.2.1 la cual se llamará serie A, y se calcula las series asociadas E y R por la técnica de las medianas móviles de orden tres, se tiene el siguiente resultado:

---

[4] En adelante se designan los procedimientos de alisado por las medianas móviles por su orden, digamos un alisado de orden tres será [3]. Cuando se trate de alisados por medias móviles será precedido por el signo =,, por ejemplo el alisado de orden tres deberá ser [=3].

Semana	Serie Observada	Tendencia(E)	Residuos(R)
Sem 1	5571	-	5571
Sem 2	8347	8347	0
Sem 3	8367	8367	0
Sem 4	9927	8367	1560
Sem 5	6995	7704	-709
Sem 6	7704	6995	709
Sem 7	6038	7704	-1666
Sem 8	9370	6637	2733
Sem 9	6637	7632	-995
Sem 10	7632	7632	0
Sem 11	8548	8116	432
Sem 12	8116	-	8116

Tabla 1.4: Ejemplo del alisado de una serie por medianas móviles de orden tres

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la Tabla 1.4, se puede observar que cada valor $e_t^{[3]}$ de la serie E corresponda a la mediana de tres valores observados: y_{t-1}, y_t, y_{t+1}. Pero es evidente que resulta imposible aplicar esta regla de determinación del valor de tendencia en el caso del primer y del último valor observado.

1.2.2.3.2 El tratamiento de los valores "extremos"

Si la serie observada del número de pedidos no sea A, sino que será una serie A' que difiere de A en dos observaciones:

- En la segunda semana, el número de pedidos sería 83.470 (y no 8.347)
- En la séptima semana, sería de 7.038 (y no de 6.038)

Este tipo de alteraciones respecto a la serie original suelen ser provocadas por errores en la trascripción de los datos o bien son valores ciertos que representan puntos extremos.

Ya que se quiere evidenciar la tendencia del desarrollo del número de pedidos durante el período, se espera que el procedimiento de alisado utilizado, por una parte no se vea afectado por la presencia de valores "anómalos", y por otra parte permanezca sensible a los valores que modifican puntualmente el desarrollo del número de pedidos. La Tabla 1.5 presenta los resultados del alisado por las medianas móviles de orden [3] de la serie A'.

Semana	Serie Observada	Tendencia	Residuos
Sem 1	5571	-	5571
Sem 2	83470	8367	75103
Sem 3	8367	9927	-1560
Sem 4	9927	8367	1560
Sem 5	6995	7704	-709
Sem 6	7704	7038	666
Sem 7	7038	7704	-666
Sem 8	9370	7038	2332
Sem 9	6637	7632	-995
Sem 10	7632	7632	0
Sem 11	8548	8116	432
Sem 12	8116	-	8116

Tabla 1.5: Resultados del alisado por las medianas móviles de orden tres

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Si se comparan estos resultados con los de la Tabla 1.5, se puede observar que:

El alisado por [3] efectuó una "corrección automática" del valor "anómalo". En efecto, el valor "anómalo" y_2 de A' le corresponde un valor de tendencia no muy lejano del valor de tendencia que al valor "normal" y_2 de A.

Para apreciar la manera en que los distintos métodos de alisado reaccionan ante la presencia de valores "anómalos", también se procede al alisado de la serie A' por la técnica de las medias móviles de orden ("=3"). La Tabla 1.6

presenta los resultados de la serie A' por el método "=3", comparados con el resultado del alisado de la misma serie por el método [3]. Se puede observar en esa tabla que en el caso del alisado por "=3", la presencia de valores extremos (anómalos o no) acarrea una modificación significativa de los valores de tendencia vecinos.

Semana	Serie A'	Valores de tendencia [3]	Residuos	Valores de tendencia "=3"	Residuos
1	5571	-	5571	-	5571
2	83470	8367	75103	32469	51001
3	8367	9927	-1560	33921	-25554
4	9927	8367	1560	8430	1497
5	6995	7704	-709	8209	-1214
6	7704	7038	666	7246	458
7	7038	7704	-666	8037	-999
8	9370	7038	2332	7682	1688
9	6637	7632	-995	7880	-1243
10	7632	7632	0	7606	26
11	8548	8116	432	8099	449
12	8116	-	8116	-	8116

Tabla 1.6: Resultados del alisado por las medianas y medias móviles de orden tres
Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se recomiendan los métodos de alisado por medianas móviles porque:

- Eliminan las perturbaciones debidas a los valores "anómalos" y esto, sin que sea necesario identificarlos o emplear procedimientos de detección y de corrección.
- Conservan toda secuencia lineal observada. En particular, los procedimientos de medianas móviles de orden impar conservan toda secuencia monótona, lineal o no.

Son estas propiedades las que hacen que se conceda a estos instrumentos de análisis un lugar importante entre el conjunto de las técnicas de alisado de las series cronológicas.

1.2.2.3.3 Los alisados por medianas móviles de orden impar

El número de valores observados consecutivos que se toman en cuenta para determinar el valor esperado al instante t designa el orden de la técnica de alisado. Si se ordenan las técnicas por orden creciente, se atribuye un rango a los métodos de alisado. La Tabla 1.7 presenta las técnicas de medianas móviles de orden impar, ordenadas en función de su rango y orden.

Medianas móviles de orden impar	
Rango: (p)	**Orden: (2p-1)**
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
...	...

Tabla 1.7: Técnicas de medianas móviles de orden impar.

Fuente: "El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a intervalos regulares", Ladiray Domenique, Revista Methodologica, Bélgica, 1993.

Si el método de alisado es de rango p y de orden $2p-1$, éste asocia al valor observado Y_t el valor de tendencia al instante t designado como $e_t^{[2p-1]}$, el cual se define como la mediana de $2p-1$ valores observados centrados en el valor t.

De este modo, se definen los valores $e_t^{[2p-1]}$ de la serie E (asociada a la serie observada A) por la expresión:

$$e_t^{[2p-1]} = mediana\left[y_{t-(p-1)},....,y_t,....,y_{t+(p-1)}\right], \quad \forall t = p,(p+1),...,(n-p-1)$$

En efecto, esta manera de definir el valor de tendencia asociada a un valor observado no puede aplicarse en el caso de los $2p-2$ valores situados en las extremidades de la serie.

Como se ha visto en el caso del alisado por [3], si se generalizan todos los procedimientos de alisado de orden impar, se pueden comprobar las relaciones:

$$y_t = e_t^{[2p-1]} + r_t^{[2p-1]}; \quad \forall t = 1,...,n$$

1.2.2.3.4 Los alisados por medianas móviles de orden par

Dado que la mediana de una serie con un número par de observaciones se define como el promedio de las extremidades de su intervalo mediano, la t mediana móvil de orden $2p$ también se calcula como el promedio de los dos valores del centro, cuando están ordenados en orden creciente los $2p$ valores observados alrededor de y_t.

Es por ello que los valores $e_t^{[2p]}$ de la serie E (asociada a la serie observada A) son definidos por la expresión:

$$e_t^{[2p]} = \frac{y_t + y_{t+1}}{2}; \quad \forall t = p,(p+1),...,(n-p-1)$$

Como el caso de las medianas móviles de orden impar, esta manera de definir el valor de tendencia que corresponde a un valor observado no puede aplicarse en el caso de los $2p-2$ valores situados en las extremidades de la serie.

Este procedimiento también presenta otro inconveniente: la mediana calculada de esta forma no corresponde a un valor de t sino a un valor

intermedio. En efecto, al valor $y_{(t)}$ de una serie ordenada de $2p$ valores centrados en t, corresponde la mediana:

$$e_{t+0,5}^{[2p]} = \frac{y_t + y_{t+1}}{2}; \quad \forall t = p,(p+1),...,(n-p-1)$$

La Figura 1.11 ilustra este inconveniente en el caso de la determinación del valor esperado $e_t^{[2p]}$ por un procedimiento de alisado de las medianas móviles pares, de rango 2 (de orden 4).

Se puede comprobar en este gráfico que cuando se aplica la regla de cálculo de la mediana a los cuatro valores “alrededor “ del valor y_t, el valor de tendencia asociado a ésta es la mediana de los valores $(y_t; y_{t-2})$, es decir que:

$$e_{t-0,5}^{[4]} = \frac{y_{t-2} + y_t}{2}$$

Para evitar este inconveniente, hay que hacer seguir siempre el alisado de orden par de la serie A, por un nuevo alisado de orden 2 de la serie E resultante, pero procurando desplazar las medianas en el otro sentido. Hay que proceder entonces como lo indica el Esquema 1.1.

$$\textit{Serie observada } A \Rightarrow \textit{Serie } E^{[2p]} \textit{ asoc. a } A \Rightarrow \textit{Serie } E^{[2p:2]} \textit{ por alisado de } E^{[2p]}$$

$$y_t \qquad e_{t-0,5}^{[2p]} = \frac{y_{t-1} + y_t}{2} \qquad e_t^{[2p:2]} = \frac{e_{t-0,5}^{[2p]} + e_{t+0,5}^{[2p]}}{2}$$

Esquema 1.1: Corrección de la diferencia por un procedimiento de tipo “2p”

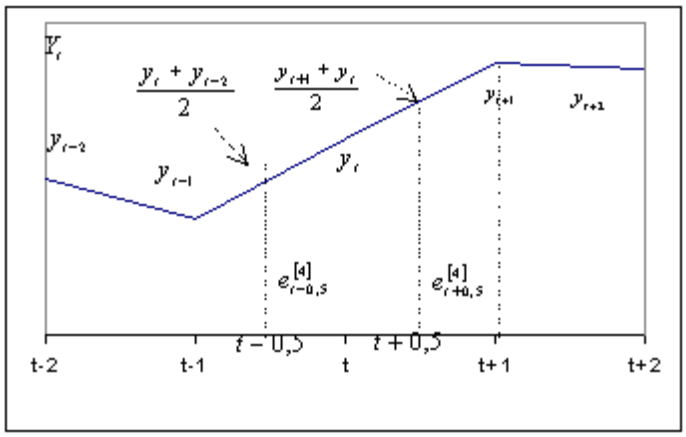


Figura 1.11: Corrección de la diferencia por un procedimiento de tipo "2p"

Fuente: "El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a in

En la Figura 1.12 se podrá comprobar la corrección necesaria de un alisado de orden par en el caso del ejemplo presentado en la Figura 1.11.

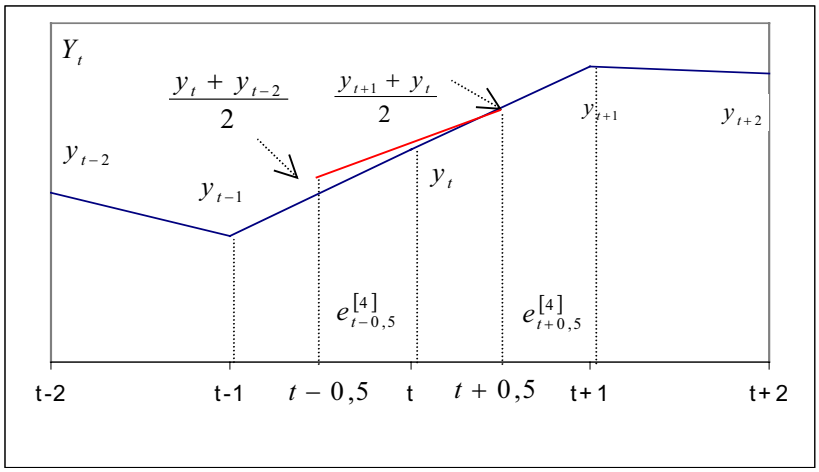


Figura 1.12: Corrección de la diferencia por un procedimiento de tipo par.

Fuente: "El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a intervalos regulares", Ladiray Domenique, Revista Methodologica, Bélgica, 1993.

1.2.2.3.5 Las medianas móviles altas y bajas

El alisado de una serie por medianas móviles, en el caso en que sean de orden par, también pueden realizarse por medio de la técnica llamada "de las medianas altas" o "de las medianas bajas". Recordando las propiedades bien conocidas de los parámetros de posición central de una serie, resulta

fácil comprender que se podría definir cada una de las medianas móviles de orden “2p” de una serie, si se toma como valor de tendencia no tanto el promedio de los extremos del intervalo mediano, sino una de las extremidades de ese intervalo.

Las medianas móviles bajas

Si se asigna al valor de tendencia $e_{t-0,5}^{[2p]}$ el más pequeño de dos valores $\left[y_{k/2}; y_{(k/2)+1} \right]$, (donde $y_{k/2}$ pertenece al intervalo mediano), se aplica la técnica llamada de las “medianas móviles bajas”.

Para designar ese método de alisado, se hace proceder el orden de las medianas móviles por el signo <. Por ejemplo, el alisado por las medianas móviles bajas de orden 4 se designará con: “<4”.

Las medianas móviles altas

Si se asigna al valor de tendencia $e_{t-0,5}^{[2p]}$ el más grande de dos valores $\left[y_{k/2}; y_{(k/2)+1} \right]$, se aplica la técnica llamada de las “medianas móviles altas”.

Para designar este método de alisado, se hace proceder el orden de las medianas móviles del signo >. El alisado por las medianas móviles de orden 4, por ejemplo, será designado con: “>4”.

Tratándose de las medianas móviles de orden par, estos métodos de alisado han de ser utilizados seguidos por el re-alisado por las medianas móviles de orden 2, lo que permite hacer coincidir el valor esperado con un valor del índice t.

Tratamiento de los puntos terminales en el caso de las medianas móviles de orden impar

La determinación de los valores de tendencia en las extremidades de la serie se realiza en dos etapas:

Primera etapa

Se reduce de un rango el orden impar del alisado, para aumentar el número de las medianas móviles atribuidas a los valores de la serie.

Sea:

- y_a el primer valor para el cual se pudo determinar; por ejemplo, la mediana móvil de orden $(2p-1)$=5;
- y_b el último valor para el cual se pudo determinar; por ejemplo, la mediana móvil de orden $(2p-1)$=5, se obtiene:

$$e_a^{[2p-1]} = mediana\left[y_{a-(p-1)},...,y_a,...,y_{a+(p-1)}\right]$$
$$e_b^{[2p-1]} = mediana\left[y_{b-(p-1)},...,y_b,...,y_{b+(p-1)}\right]$$

Pasando a un alisado de rango inferior $2(p-1)-1=3$, se puede determinar:

$$e_{a-1}^{[2(p-1)-1]} = mediana\left[y_{(a-1)-(p-1)-1},...,y_{(a-1)},...,y_{(a-1)+(p-1)-1}\right]$$
$$e_{a-1}^{[2p-3]} = mediana\left[y_{a-p+1},...,y_{a-1},...,y_{a+p-1}\right];$$

igualmente: $$e_{b-1}^{[2p-3]} = mediana\left[y_{b-p+1},...,y_{b-1},...,y_{b+p-1}\right];$$

Segunda etapa

Se determina el "valor esperado" asociado a la primera (y a la última) observación a partir de la extrapolación lineal de las medianas móviles asociadas a las observaciones y_a e y_{a-1}.

Es decir, que para determinar los valores de tendencia en los extremos de la serie, se prolonga la tendencia establecida mediante el alisado de orden $2p-1$ para el valor y_a y de orden $2p-3$ para el valor y_{a-1}. Asimismo, al otro extremo de la serie, se prolonga la tendencia establecida mediante el alisado de orden $2p-1$ para el valor y_b, y de orden $2p-3$ para el valor y_{b+1}.

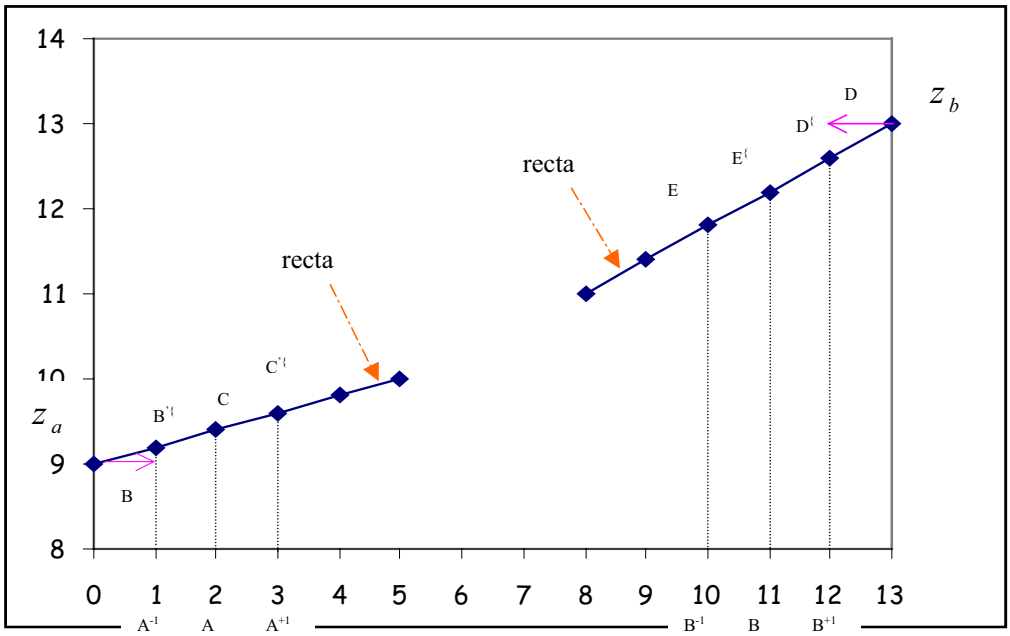


Figura 1.13: Método de tratamiento de los valores extremos.

Fuente: "El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a intervalos regulares", Ladiray Domenique, Revista Methodologica, Bélgica, 1993.

La Figura 1.13 resume el método de tratamiento de los valores extremos en el caso de los métodos de alisado por las medianas móviles de orden impar.

Se trata de determinar el valor de z_a y de z_b que será atribuido al primer y al último valor de tendencia respectivamente. La demostración de las relaciones que permiten calcular esos valores recurre a propiedades geométricas elementales.

En la Figura 1.13, los puntos C y C' determinan la recta *a* a la que pertenecen. Los puntos E y E' definen la recta b. La longitud del segmento $\overline{(A^{+1},C')}$ representa el valor de tendencia, definido por el alisador "2p-1",

asociado al valor observado y_{a+1}, entonces $\overline{\left(A^{+1},C'\right)}=e_{a+1}^{[2p-1]}$. En el mismo sentido, $\overline{\left(B^{-1},E\right)}=e_{b-1}^{[2p-1]}$, $\overline{(A,C)}=e_{a}^{[2p-3]}$, $\overline{\left(B,E'\right)}=e_{b}^{[2p-3]}$. La pendiente de la recta a representa la tendencia de la serie en el intervalo $\left[y_a,y_{a+1}\right]$. Si se prolonga la extremidad izquierda de la recta a , se puede definir el punto B, intersección de esta recta con el eje y.

Se procede de forma similar en el otro extremo de la serie, a partir de la pendiente de la recta b que representa la tendencia de la serie en el intervalo $\left[y_{b-1},y_b\right]$.

Sabiendo que se define la recta a con la expresión: $e_t^{[2p-1]}=b_at+c_a$, se calcula la pendiente de esa recta. En la Figura 1.13 se puede comprobar que la pendiente de la recta a es:

$$b_a=\frac{e_{a+1}^{[2p-1]}-e_a^{[2p-3]}}{1}$$

pero dado que el punto $B\in a$, la pendiente de a también es:

$$b_a=\frac{e_{a+1}^{[2p-1]}-z_a}{3}$$

De las dos ecuaciones anteriores se concluye que:

$$z_a=3e_a^{[2p-3]}-2e_{a+1}^{[2p-1]}$$

El valor z_a calculado en el punto “0” se atribuye a la primera observación como valor de tendencia. A partir de un razonamiento similar, se determina, al otro extremo de la serie, el valor de z_b, el cual se atribuye como valor de tendencia a la última observación: $z_b=3e_b^{[2p-3]}-2e_{b-1}^{[2p-1]}$. El valor z_b, atribuido a la última observación como valor de tendencia, se calcula en el punto $t=13$, que no corresponde a un valor observado.

Si no se adopta la aplicación del procedimiento de los puntos terminales, puede hacerse el alisado atribuyendo como valor de tendencia de las extremidades de la serie, el mismo valor que el observado. Esto se justifica si la serie es suficientemente larga. Es decir si la pérdida de información producida de esta forma no afecta mucho la interpretación que se hará de su tendencia a lo largo del período.

Tratamiento de los puntos terminales en el caso del alisado por las medianas móviles de orden par

La determinación de los valores extremos, en el caso de los métodos de alisado por las medianas móviles de orden par, también se hace en dos etapas.

Primera etapa

Se reduce el rango el orden par del alisado a fin de aumentar el número de las medianas móviles atribuidas a los valores de la serie, desplazados de medio intervalo en el eje del tiempo.

Así: $e_{a+0.5}^{[2p]} = mediana\left[y_1, y_a, ..., y_{a+p-1}\right]$, $e_{b+0.5}^{[2p]} = mediana\left[y_b, y_{b+1}, ..., y_{b+p}\right]$

Pasando a un alisado de rango inferior $2(p-1) = 2p-2 = 2$, se puede determinar:

$$e_{(a+1)-0.5}^{[2p-2]} = \frac{y_1 + y_a}{2} \Rightarrow e_{a-0.5}^{[2p-2]} = \frac{y_1 + y_a}{2}$$

pero también:

$$e_{(b+1)+0.5}^{[2p-2]} = \frac{y_b + y_{b+1}}{2} \Rightarrow e_{b+1.5}^{[2p-2]} = \frac{y_b + y_{b+1}}{2}$$

hasta:

$$e^{[2p-2]}_{(b+p)+0.5} = \frac{y_{b+p-1} + y_{b+p}}{2}$$

Pero esta primera etapa no permite determinar los valores de tendencia desplazados asociados al primer y último valor observado.

Segunda etapa

Cabe proceder al centrado de los valores de tendencia, obtenidos por las medianas móviles de orden $2p$, sobre los valores observados de $t \in T$. Se puede ver que para poder determinar los valores de tendencia asociados a las extremidades de la serie, cabe "crear" dos observaciones ficticias. Se acuerda al punto $t = 0.5$ al valor de la primera observación : $y_{0.5} = y_1$; de la misma manera, a la otra extremidad, $y_{n+0.5} = y_n$.

A partir de la serie compuesta de $n+2$ valores siguientes: los valores de tendencia de orden $2p$, los valores de tendencia de orden $2p-2$ de las observaciones que figuran en las extremidades de la serie y los valores $y_{0.5}$ e $y_{n+0.5}$, se determina el alisado de orden 2 invertido que permite centrar los valores esperados sobre los índices t de las observaciones, incluidos los valores que figuran en las extremidades de las serie observada.

Si no se adopta la aplicación del método del tratamiento de los valores que figuran en las extremidades de la serie, se puede proceder al alisado atribuyéndole, como valor de tendencia, el mismo valor que el observado.

1.2.3. EL "RE-ALISADO" DE UNA SERIE

Se denomina "re-alisado" de una serie a toda operación que consiste en alisar de manera repetida la serie observada. Lastimosamente, las técnicas de alisado por medianas móviles de orden impar presentan fuertes oscilaciones. Para esto, Tukey propuso aplicar un método de tipo "2p-1" de manera repetida, el número de veces que fuera necesario, hasta obtener

una serie lisa estable. Este procedimiento llamado de “alisados repetidos” se designa con la letra “R” colocada después del orden de las medianas móviles de alisado. En el ejemplo siguiente, se estudia una serie A que posee fuertes oscilaciones. A esta serie se aplica la técnica de alisado “5R”. Los resultados se pueden ver en la Tabla 1.8.

Caso	Serie A	Serie lisa por “5” de A		Residuos en cada iteración			Serie lisa por “5R” de A	
		S1	R1	R2	R3	R4	S”5R”	R”5R”
1	107	107	0	0	0	0	107	0
2	77	107	-30	-30	-30	-30	107	-30
3	111	111	0	0	0	0	111	0
4	147	111	36	36	36	36	111	36
5	126	126	0	0	0	0	126	0
6	102	127	-25	-24	-24	-24	126	-24
7	130	126	4	3	4	4	126	4
8	127	127	0	0	1	1	126	1
9	89	127	-38	-37	-37	-37	126	-37
10	144	93	51	33	33	33	111	33
11	93	93	0	-18	-18	-18	111	-18
12	91	111	-20	-20	-20	-20	111	-20
13	141	111	30	30	30	30	111	30
14	111	126	-15	-10	-10	-10	121	-10
15	126	126	0	0	5	5	121	5
16	162	121	41	36	41	41	121	41
17	121	126	-5	0	0	0	121	0
18	107	121	-14	-14	-14	-14	121	-14
19	152	107	45	45	45	45	107	45
20	89	103	-14	-14	-14	-14	103	-14
21	81	103	-22	-22	-22	-22	103	-22
22	103	103	0	0	0	0	103	0
23	140	113	27	27	27	27	113	27
24	113	113	0	0	0	0	113	0
25	114	113	1	1	1	1	113	1
26	106	106	0	0	0	0	106	0
27	103	103	0	0	0	0	103	0

Tabla 1.8: Resultados serie se aplica la técnica de alisado “5R”.

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la Figura 1.14 se presenta la serie A acompañada de su curva de tendencia por “5R” a partir de esta serie.

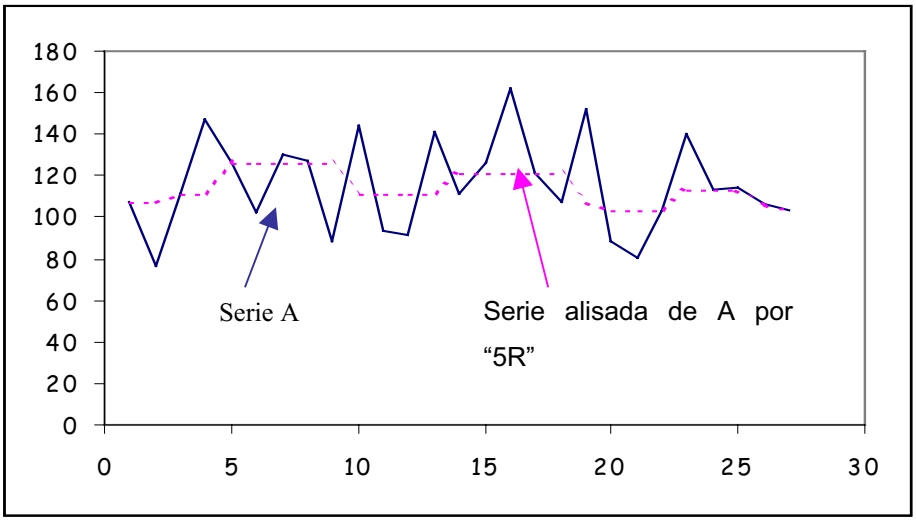


Figura 1.14: Serie A acompañada de su curva de tendencia por “5R”

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

1.2.3.1. Pasos repetidos por un alisador de tipo “5”

Se realiza el alisado por “5” de la serie A. Posteriormente, la serie “lisa de A” fue alisada nuevamente por el método de tipo “5” y así sucesivamente. En cada etapa se comprueba que los residuos del alisado no son todos nulos. Entonces, a la cuarta repetición del alisado de “5”, los residuos eran todos nulos o las diferencias entre la serie A y la serie lisa producida en la cuarta etapa eran las mismas que las diferencias entre la serie A y la serie lisa producida en la tercera etapa. Por esto, se retienen los valores de la serie lisa producida en la tercera etapa. Los residuos del alisado se obtienen, clásicamente, por la diferencia entre los valores de la serie A y los valores de tendencia asociados.

1.2.3.2. Aplicación del alisador de tipo “5R”

El alisado por “5R” de la serie de A proporciona los mismo resultados que la tercera iteración de alisado anterior. Por esto, se dice que “5R” resultó convergente a la serie lisa de A al cabo de tres iteraciones.

En la práctica, el método de “alisado repetido” es convergente en las series cronológicas, aunque existen series que podrían no ser convergentes.

El alisado repetido no puede aplicarse en las medianas móviles de orden par. En efecto, si se aplicara de manera iterada un alisado de tipo “2p”, se tendría que calcular las medianas de dos valores medianos, lo que lleva a definir una serie lisa de valores constantes. Ahora bien, esta evolución, hacia una serie lisa de valores constantes no podría ser considerada como equivalente a la propiedad de convergencia sobre resultados estables, propios a los métodos repetidos de las medianas de orden impar.

1.2.3.3. La corrección del alisado por el método de “doblaje”

El procedimiento de “doblaje” (twicing) de una serie consiste en utilizar la información contenida en los residuos del alisado a fin de corregir una primera representación de la tendencia de una serie observada.

Por ejemplo, se investiga la información aportada por la serie cuyo trazado se encuentra en la Figura 1.15. El alisado por las medianas móviles de orden [5] de esa serie, permitió producir un primer resumen de su tendencia, que se presenta en el mismo gráfico.

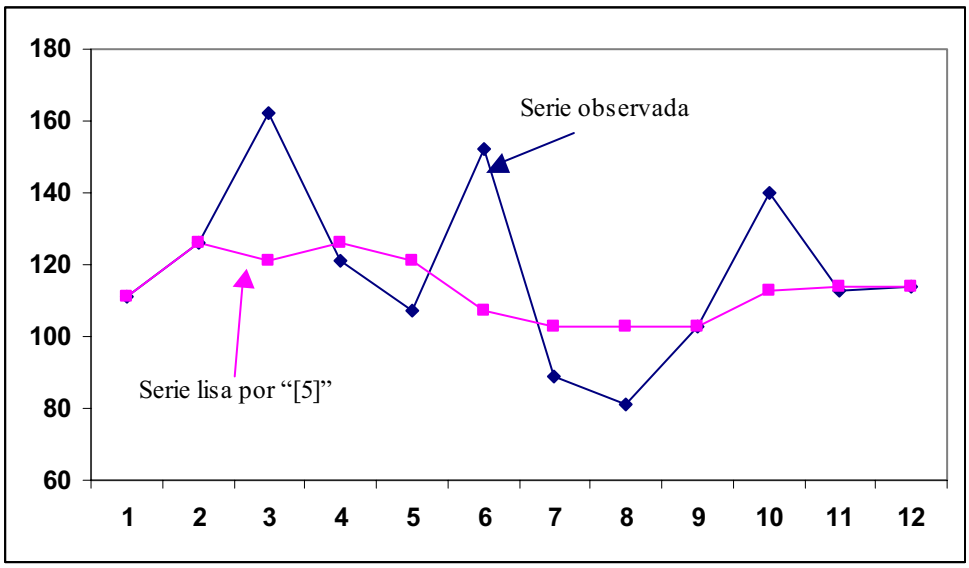


Figura 1.15: Serie A acompañada de su curva de tendencia por “[5]”

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Al tratar de resumir la información residual aportada por los residuos del alisado por [5] de la serie A, se utiliza el mismo alisador por [5], pero esta vez a la serie de los residuos del alisado de A.

Se obtiene la serie "lisa de los residuos del alisado de A". Para mantener la coherencia en el empleo de los instrumentos, se utiliza el mismo alisador para realizar las dos operaciones de alisado.

La información relativa a la tendencia de los residuos durante el período puede ser considerada como un "correctivo" para la información producida, relativa a la tendencia de la serie A.

Luego se suman los valores del "alisado de los residuos del alisado de A" a la serie "lisa de A" a fin de obtener un resumen "corregido" de la tendencia asociada a la serie observada. Los valores se pueden observar el la Tabla 1.9

Caso	Serie A	Serie lisa por [5] de A	Residuos del alisado por [5] de A	Serie lisa por [5] de los residuos del alisado de A	Serie lisa por "[5t]" de A	Residuos
1	111	111	0	0	111	0
2	126	126	0	0	126	0
3	162	121	41	0	121	41
4	121	126	-5	0	126	-5
5	107	121	-14	-5	116	-9
6	152	107	45	-14	93	59
7	89	103	-14	-14	89	0
8	81	103	-22	0	103	-22
9	103	103	0	-1	102	1
10	140	113	27	0	113	27
11	113	114	-1	0	114	-1
12	114	114	0	0	114	0

Tabla 1.9: Resultados serie que aplica la técnica de alisado "[3t]".

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la Figura 1.16, se ha trazado la curva de tendencia “corregida” de la serie A.

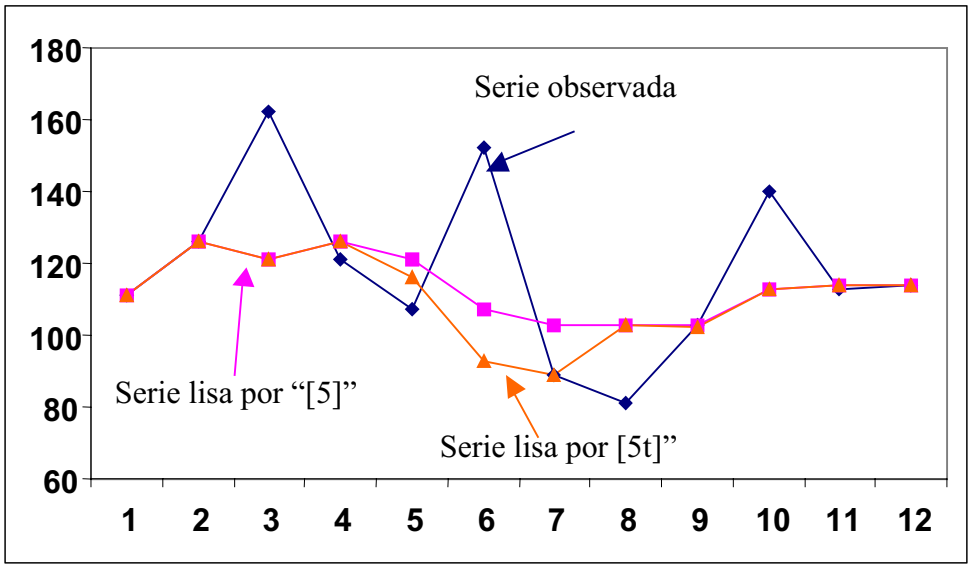


Figura 1.16: Comparación de distintos métodos de alisamiento.
Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Esta forma de “corregir” un alisado demasiado “fuerte de una serie observada se denomina doblaje. Este método aspira a utilizar al máximo la información aportada por los datos, y saca provecho de los residuos. Sin embargo, la utilización del doblaje no se debe realizar si la tendencia de una serie presenta pocos puntos de inversión, porque toda mejora de la tendencia para esos puntos acarreará el deterioro de la calidad del resumen para los otros puntos de la serie.

1.2.4. LAS TÉCNICAS DE ALISADO POR LAS MEDIAS MÓVILES PONDERADAS Y LAS MEDIANAS MÓVILES PONDERADAS.

Normalmente los métodos de alisado de orden impar son poco eficaces para producir un resumen correcto de la tendencia de una serie. Para evitar este inconveniente, Tukey en 1977 propuso el procedimiento designado con “H” que se inspira en las técnicas de alisado por las medianas móviles.

El alisado por las medias móviles ponderadas determina los valores de tendencia asociados a los valores observados a partir de la media ponderada de observaciones contenidas en una ventana centrada en cada valor.

El más antiguo método de alisado por las medias móviles ponderadas se debe al meteorologista austríaco del siglo pasado Julius Von Hann. De acuerdo con esa técnica, el valor de tendencia asociado a un valor observado es definido a partir de la media ponderada de tres valores consecutivos centrados en él, utilizando los coeficientes de ponderación siguientes:

$$e_t^{[H]} = \left(\frac{1}{4} y_{t-1} + \frac{1}{2} y_t + \frac{1}{4} y_{t+1} \right)$$

Refiriéndose a esa técnica, Tukey propuso una forma de re-alisado apropiado para corregir las imperfecciones de un primer alisado por [3]. Ha definido un procedimiento llamado “hanning”, que se designa con la letra H colocada después del orden del alisado: “3H”.

Ese proceso de re-alisado se realiza en dos tiempos:

- El primer alisado por [3], e incluso por “3R”, elimina la influencia de los puntos aberrantes gracias a la robustez de esos procedimientos.
- En la etapa de re-alisado, la serie lisa producida es tratada por los procedimientos de las medias móviles ponderadas.

Por el alisado de orden [3] de la serie A:

$$\begin{cases} e_{t-1}^{[3]} = mediana\left(y_{t-2}, y_{t-1}, y_t\right) \\ e_t^{[3]} = mediana\left(y_{t-1}, y_t, y_{t+1}\right) \\ e_{t+1}^{[3]} = mediana\left(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}\right) \end{cases}$$

Por un alisado “H” de la serie lisa de A producida por [3], se obtiene:

$$e_t^{[3H]} = \left(\frac{1}{4} e_{t-1}^{[3]} + \frac{1}{2} e_t^{[3]} + \frac{1}{4} e_{t+1}^{[3]} \right)$$

Otros métodos de alisado por las medianas móviles ponderadas han sido propuestos por Ladiray en 1987. Son apropiados para alisar otros tipos de fluctuaciones mal tratadas por los alisadores elementales de tipo medianas móviles de orden impar.

El método anotado “I” es una técnica de re-alisado de la tendencia de una serie obtenida por “5”. El sistema de ponderación de “I” es de tipo:

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right)$$

El método “J” utiliza siete valores y el sistema de ponderación es:

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right)$$

1.2.4.1. La selección del método de alisado apropiado

Existen varios indicadores para realizar evaluaciones para conocer cuál de las técnicas de alisado se adapta mejor a una serie dada.

NABS: Media aritmética de los residuos utilizando el alisado P sobre la serie observada.

$$NABS = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left| e_t^{[P]} - y_t \right|$$

NSUP: Valor máximo de los residuos que resultan del empleo del procedimiento de alisado P sobre la serie observada.

$$NSUP = \sup\left|e_t^{[P]} - y_t\right|$$

DIFF1: Media aritmética de las $(n-1)$ diferencias entre las "diferencias primeras" de la serie de tendencia y las de la serie observada.

$$DIFF1 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}\left|\left(e_t^{[P]} - e_{t-1}^{[P]}\right) - \left(y_t - y_{t-1}\right)\right|$$

DIFF2: Media aritmética de las $n-2$ diferencias entre las "diferencias segundas" de la serie de tendencia y las de la serie observada.

$$DIFF2 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n}\left|\left[\left(e_t^{[P]} - e_{t-1}^{[P]}\right) - \left(e_{t-1}^{[P]} - e_{t-2}^{[P]}\right)\right] - \left[\left(y_t - y_{t-1}\right) - \left(y_{t-1} - y_{t-2}\right)\right]\right|$$

Según expertos, los alisadores: "3RH", "5RI", "53H", "4253H" son los más recomendados por su robustez.[5]

Los alisadores compuestos se realizan de izquierda a derecha, por ejemplo:

3RH: 1) Mediana móvil [3];
2) Mediana móvil [3] repetida utilizando ponderaciones de hanning.

5RI: 1) Mediana móvil [5];
2) Mediana móvil [5] repetida utilizando ponderaciones I visto anteriormente.

[5] "El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a intervalos regulares", Ladiray Domenique, Laboratoire de Mèthodologie du Traitment des dones, Revista Methodologica, Bélgica, 1993.

53H: 1) Mediana móvil [5];
2) Mediana móvil [3] repetida utilizando ponderaciones de hanning.

4253H: 1) Mediana móvil [4];
2)Mediana móvil [2] ;
3) Mediana móvil [5];
2) Mediana móvil [3] utilizando ponderaciones de hanning.

Cuando la tendencia es regular, “7RJ” y “5RI” dominan muy claramente a los otros alisadores.

Eventualmente se recomienda usar cualquiera de estos alisadores en su versión doblada.

En el caso de serie cortas, los filtros aconsejados son: “5RI”, “3RH” y “7RJ”.

1.3. DETERMINACIÓN DE LA COMPONENTE ESTACIONAL

Cuando se pretende analizar la evolución real de un fenómeno hay que eliminar la componente estacional ya que sus fluctuaciones pueden distorsionar la serie. Bajo el supuesto de que las variaciones estacionales se mantienen constantes a lo largo del tiempo, son diversas las técnicas utilizadas en la práctica para determinar la variación estacional y dependen del esquema que siga la serie: multiplicativo (métodos de razón) o aditivo (métodos de diferencia).

1.3.1. MÉTODO DE RAZÓN A LA MEDIA MÓVIL

Se supone un esquema multiplicativo: $X(t) = T(t) * E(t) * C(t) * A(t)$. Este método aísla la componente estacional mediante la eliminación sucesiva de las demás componentes. Los pasos a seguir son:

1. Determinar la tendencia por el método de medias móviles.

2. Eliminar la tendencia, dividiendo cada dato de la serie original por la correspondiente media móvil; de esta forma se eliminan conjuntamente las componentes de largo plazo (tendencia y componente cíclica):

$$\frac{X(t)}{T(t)*C(t)} = E(t)*A(t)$$

3. Para eliminar la componente accidental o aleatoria de la serie se calculan las medias aritméticas para cada estación o medias estacionales M_i (cuatrimestrales, trimestrales, mensuales, etc).

4. Calcular la media total, $\overset{1}{M}$, de dichas medias estacionales.

5. Dividir cada media estacional entre la media total, obteniendo así los índices de variación estacional: $I_i = \frac{M_i}{\overset{1}{M}} * 100$

(están expresados en tantos por ciento)

Hay tantos índices como estaciones o medias estacionales tengan las observaciones y nos indican la importancia de la variación estacional al pasar de un período a otro, es decir, el porcentaje de aumento o disminución, con respecto a la tendencia, que se produce en los valores de la serie por el hecho de estar en un determinado mes, trimestre, etc.

1.3.2. MÉTODO DE RAZÓN A LA TENDENCIA

La diferencia entre este método y el anterior es que, ahora, las componentes a largo plazo (tendencia y ciclo) se obtienen mediante un ajuste mínimo cuadrático sobre las medias anuales. Se fuese un modelo multiplicativo, entonces los pasos a seguir son:

1) Determinar la serie de tendencia mediante el método de mínimos cuadrados; es decir:
   a) Se calculan las medias anuales de los datos observados.

b) Se ajusta por mínimos cuadrados una recta de tendencia a las medias anuales.

c) A partir de la recta se calculan los valores teóricos de la tendencia en cada año. Estos valores corresponderán al instante central del mismo.

d) Para cada año, se calcula la tendencia en cada estación (mes, trimestre,...). Para ello, se parte de la tendencia central del primer año y se calcula la tendencia correspondiente al primer período de dicho año, restando el correspondiente incremento (siendo el incremento estacional para una serie de datos mensuales de: a=12, datos trimestrales; a=4, datos cuatrimestrales: a=3; etc.). A partir del primero, los demás se calculan sumando el incremento estacional correspondiente.

2) Dividir cada valor observado entre su correspondiente valor teórico de tendencia.

3) Calcular las medias estacionales (mensuales, trimestrales,...) de dichos valores.

4) Calcular la media total de las anteriores y el porcentaje de cada media estacional sobre la total. Así se obtienen los índices de variación estacional, cuya interpretación es análoga a la comentada en el método de razón a la media móvil.

1.3.3. MÉTODO DE DIFERENCIA A LA MEDIA MÓVIL

Si fuera un esquema aditivo

$$X(t) = T(t) + E(t) + C(t) + A(t)$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Determinar la tendencia por el método de medias móviles.

2. Eliminar la tendencia, restando a cada dato de la serie original la correspondiente media móvil.
3. Para eliminar la componente accidental o aleatoria de la serie se calculan las medias aritméticas para cada estación o medias estacionales M_i (cuatrimestrales, trimestrales, mensuales, etc.) .

4. Calcular la media total, $\overset{1}{M}$, de dichas medias estacionales.
5. Restar a cada media estacional la media total, obteniendo así las diferencias estacionales $d_i = M_i - \overset{1}{M}$
(Están expresadas en las mismas unidades que las observaciones y suman 0).

Hay tantas diferencias estacionales como estaciones consideradas y nos indican el aumento o disminución, con respecto a la tendencia, que se produce en los valores de la serie por el hecho de estar en un determinado mes, trimestre, etc.

1.3.4. MÉTODO DE DIFERENCIA A LA TENDENCIA

Se supone un esquema aditivo. Entonces los pasos a seguir son análogos a los del método de diferencia a la media móvil, salvo que, en el paso 1, se determina la tendencia por el método de mínimos cuadrados. La interpretación de las diferencias estacionales es análoga a la comentada en el método de diferencia a la media móvil.

1.4. METODOLOGÍAS DE REMOCIÓN DE ESTACIONALIDAD PARA VARIABLES ESTACIONARIAS

Es común encontrar en variables económicas el fenómeno de estacionalidad; es decir, el movimiento intraanual sistemático de la serie de tiempo que representa una variable económica. Existe un largo, y aún inconcluso, debate sobre la conveniencia de modelar la economía usando variables originales o desestacionalizadas. Hansen y Sargent (1993) defienden la idea de que los agentes racionales toman decisiones en base a

datos sin desestacionalizarlos y que remover la estacionalidad implica, en el mejor de los casos, eliminar información que podría ser útil para estimar los parámetros de un modelo. Sims (1993), apoya la idea opuesta; resulta preferible usar datos desestacionalizados, por cuanto en el proceso de ajustar un modelo a los datos originales se corre el riesgo de darle demasiada importancia a capturar efectos estacionales en vez de buscar una mejor parametrización de las características principales del modelo.

A pesar de lo importante que resulta este debate, la desestacionalización depende de los objetivos del estudio de la serie. Si el objetivo es pronosticar datos, entonces la desestacionalización no será necesaria, pero si se desea observar la tendencia, entonces la desestacionalización es válida.

El ajuste estacional de las series de tiempo consiste en eliminar las variaciones provenientes de eventos estacionales predecibles, evidenciando otras variaciones que pueden ser provocadas por la tendencia o por el ciclo económico.[6]

- Si se considera un esquema multiplicativo, habrá que dividir cada dato de la serie por su correspondiente índice de variación estacional, expresado en tantos por uno.
- Si el esquema es aditivo, a cada valor observado se le resta la diferencia estacional correspondiente.

Entre los métodos más comunes para remover la estacionalidad están el uso de variables ficticias estacionales y el método de promedios móviles, que incluye desde la "variación en x-períodos" hasta el X12ARIMA. Esta última es la metodología más popular, tanto porque su nivel de desarrollo analítico es superior, como porque viene implementada como una opción sencilla de usar en muchos programas econométricos.

---

[6] "Smoothing seasonal time series for cyclical análisis", Dagum Estela, Estadística, Revista del Instituto Interamericano de Estadística, Argentina, Diciembre 2000., 109-110 pp.

1.4.1. MÉTODO DE REGRESIÓN

Este es el método más simple de remover componentes estacionales. Utiliza una serie de variables ficticias para estimar los efectos estacionales:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2 + ...\beta_k D_k + \gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde cada variable D_i toma valores 1 en el período que ésta representa y cero en cualquier otro período.

En la medida en que los coeficientes β_i sean estadísticamente significativos, habrá componentes estacionales. Consecuentemente, la serie desestacionalizada y_t^* se calcula como:

$$y_t^* = y_t - \hat{\beta}_1 D_1 - ... - \hat{\beta}_k D_k$$

donde β_i son los parámetros estimados para cada componente estacional que resulten significativos al menos al 95%.

Al modelar así la estacionalidad se asume que el efecto estacional sea determinístico (o constante en valor esperado); es decir, que en cada año el cambio en la variable por razones estacionales sea exactamente el mismo. Ello no es un supuesto adecuado para muchas de las variables económicas debido a que el comportamiento estacional se determina por numerosas y muy heterogéneas fuentes, lo que sugiere que éste sea modelado como una variable aleatoria.

El uso de variables ficticias para modelar estacionalidad en un análisis de regresión presenta también el problema de inducir correlaciones entre las variables, en tanto que su uso para predecir variables en modelos de series de tiempo produce predicciones que resultan ilógicos, que son de peor calidad que las que se obtienen de otros métodos (X-11 o la variación en x-períodos).

No obstante, este método satisface algunas características que son deseables en cualquier método de remoción de estacionalidad: que se preserve el promedio de la serie original, que los componentes estacionales sean ortogonales entre sí, y que al aplicar el método a la serie desestacionalizada no se obtengan nuevos factores estacionales (idempotencia).

1.4.2. MÉTODOS DE LOS PROMEDIOS MÓVILES

El más conocido de los métodos de promedios móviles es el X11 (y su versión más moderna, el ARIMA X-12) popularizado por el U.S. Bureau of the Census. El punto de partida de la metodología es el Teorema de Wold, que demuestra que cualquier serie de tiempo estacionaria puede ser descompuesta en tres componentes básicos: una tendencia determinística, un componente estacional y un conjunto de innovaciones.

La metodología generalmente se compone de dos etapas que funcionan de manera independiente. El objetivo de la primera etapa es eliminar de la serie aquellas observaciones extremas que, de no ser eliminadas, podrían distorsionar la medición de los componentes estacionales. Para ello, se estima un modelo ARIMA que incluye regresores dicotómicos o también llamados “dummies”, para capturar efectos de eventos especiales (feriados, años bisiestos, etc.), observaciones atípicas o también llamados outliers, cambios de niveles de las series o quiebres, tendencia y un conjunto de variables ficticias que operan como estimadores preliminares de la estacionalidad.

El modelo ARIMA se escoge de modo tal que satisfaga varios requisitos, entre ellos un bajo error de predicción con valores ilógicos, ausencia de correlación y estacionariedad de residuos. Una vez estimado el modelo ARIMA se realizan dos transformaciones a la serie original: (1) se reemplazan los valores extremos por valores filtrados eliminándose la posible distorsión, y (2) se predice un cierto número de períodos

(típicamente 2 años) fuera de cada extremo de la muestra y se añaden los valores predichos a la serie original.

En la segunda etapa se estiman los componentes estacionales por medio de promedios móviles. En una primera parte, se estima el componente de tendencia de la serie transformada en la etapa anterior utilizando los llamados promedios móviles de Henderson.

El promedio móvil de Henderson es un promedio ponderado de manera decreciente de 3, 5, 7, ... observaciones, centrado en la observación de interés, por lo que consideran valores pasados y futuros. El número de observaciones es frecuentemente seleccionado de modo automático por el programa. En la segunda etapa, se estiman los componentes estacionales de la serie ajustada en la primera etapa a la cual se le han eliminado adicionalmente los componentes de tendencia. El papel que cumplen las observaciones añadidas en la primera etapa es mejorar el cálculo de los componentes estacionales usando promedios móviles en los extremos de la muestra donde la información está truncada.

La metodología para datos trimestrales en un modelo multiplicativo es la siguiente:

1) Los datos deben ser transformados mediante la técnica de Box y Cox.
2) Se filtran los datos de la siguiente manera:

$$x_t = \frac{\left[0.5y_{t+2} + y_{t+1} + y_t + y_{t-1} + 0.5y_{t-2}\right]}{4}$$

3) Se obtiene la serie $r_t = \frac{y_t}{x_t}$
4) Se calculan los índices estacionales i, como el promedio de los valores de r estimados para cada trimestre (por ejemplo, para el primer trimestre se usan r_1, r_5 ...).

5) Se normalizan los índices estacionales para preservar la media de la serie original:

$$s_t = \frac{r_t}{\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}}$$

6) Se calcula la serie destacionalizada $y_t^* = \frac{y_t}{s_i}$, y se verifica que la modelación sea adecuada haciendo pruebas de especificación y de estacionalidad residual.

Aunque el método ARIMA X11 es muy popular no está exento de limitaciones:

1) El método produce en la mayor parte de las aplicaciones prácticas un filtro no lineal, porque en los subfiltros se utilizan promedios de Henderson con distinto número de rezagos determinados de manera endógena en función de la presencia de valores extremos en los datos. Ello distorsiona las propiedades dinámicas de las series.

2) El filtro induce correlación en datos distantes, producto del uso de promedios móviles de Henderson que no necesariamente existe en las series originales.

3) El tratamiento de los componentes irregulares (por ejemplo, Semana Santa que cae en distintos días del mes de abril de cada año) no es necesariamente óptimo en esta metodología, favoreciéndose su remoción por métodos indirectos previos al filtrado de los datos con X-11.

1.4.3. ESTIMADORES DE LA TENDENCIA – CICLO

Los métodos de desestacionalización del tipo Census X11 (dados por Shiskin, Young and Musgrave, 1967) y sus variaciones, X11-ARIMA (Dagum

1980,1988) y X12-ARIMA (Findley, 1998) utilizan filtros lineales debidos a Henderson (1916) para la estimación de la componente tendencia – ciclo. La longitud de estos filtros puede seleccionarse automáticamente en base a un cociente denominado I/C, el cual mide la variación mensual, en media absoluta, de la componente irregular respecto a la tendencia – ciclo. Valores altos del cociente I/C, generalmente superiores a 3,5 indican que se trata de una serie demasiado volátil y que por lo tanto se requiere el uso de filtros de Henderson más largos[7].

El cociente I/C se conoce también como razón señal a ruido, y en base a estudios de las series se han establecido criterios para seleccionar los filtros de Henderson de 9, 13 o 23 términos par series mensuales (de 5 o 7 términos para series trimestrales). El de 13 términos (H13), que corresponde a un I/C entre 1,0 y 3,49 es el más frecuentemente seleccionado. Se trata de un filtro lineal que es simétrico para los valores centrales y asimétricos para las seis primeras y las seis últimas observaciones de la serie. Este filtro tiene buenas propiedades para estimar los ciclos económicos y de los negocios de media y larga duración (superiores a dos años) y detectar rápidamente verdaderos puntos de retorno, pero produce un gran número de ondulaciones cortas (ciclos de diez meses) que pueden ser interpretadas por error como puntos de retorno.

Debido a esto, el filtro de 13 términos, si bien es el más frecuentemente utilizado, no es un buen estimador de la tendencia para el análisis del corto plazo. Por otra parte, el uso del filtro de 23 términos, si bien reduce el número de puntos de retorno falsos, no es útil porque produce un aumento significativo en el retardo temporal para detectar los verdaderos.

Otro de los problemas que presenta la estimación de la tendencia – ciclo mediante el procedimiento estándar es que las estimaciones correspondientes a los períodos más recientes son poco confiables y sujetas

[7] Estadística, Revista del Instituto Interamericano de Estadística, Junio y Diciembre, 2000

a grandes revisiones, generalmente mayores que las de las estimaciones correspondientes a la serie desestacionalizada. En efecto, los últimos datos de la serie son suavizados por promedios móviles asimétricos o sea filtros que de hecho cambian para cada punto en el tiempo. En consecuencia, las revisiones resultan de las innovaciones que entran a la serie con la nueva información y los cambios en el sistema de pesos correspondiente.

Una nueva metodología para la estimación de la tendencia – ciclo propuesta por Dagum (1996), denominada Henderson de 13 términos modificado, posee la ventaja de detectar rápidamente los verdaderos puntos de giro del ciclo al igual que el filtro de Henderson de 13 términos, corrigiendo sus desventajas, al disminuir el número de ondulaciones indeseadas y reducir el error de las estimaciones para los períodos más recientes, al producir revisiones de menor tamaño.
En el caso de series mensuales, este nuevo método consiste básicamente en:

1. Identificar inicialmente un modelo ARIMA simple, generalmente el $(0,1,1)(0,0,1)_{12}$ o un $(1,1,0)(0,0,1)_{12}$, para la serie estacionalmente ajustada, modificada por valores extremos con pesos cero, utilizando los límites sigma habituales ($\pm$1.5s y $\pm$ 2.5s).
2. Extender esa serie desestacionalizada con las extrapolaciones ARIMA, y modificar sus valores extremos haciendo uso de límites sigma más estrictos ($\pm$0.7s y $\pm$ 1.0s)
3. Aplicar el filtro de Henderson de 13 términos a esta última serie.

El estimador definido de ésta manera resulta ser no lineal y es un post procesamiento de la serie desestacionalizada. La estimación de la componente tendencia –ciclo no compite con la estimación estacional; más aún, el procedimiento requiere una adecuada desestacionalización, con extrapolación ARIMA y utilizando las opciones casi estándar que produzcan mínimas revisiones para el nuevo estimador de la tendencia –ciclo. El objetivo de la extensión con extrapolaciones ARIMA consiste en reducir las

revisiones y permitir el uso de los pesos simétricos del filtro de Henderson de 13 términos. Por otra parte, el uso de límites sigma más estrictos para el reemplazo de los casos extremos facilita la reducción del número de ondulaciones indeseadas.

CAPITULO 2. DATOS ATÍPICOS Y ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN

El presente capítulo ha sido desarrollado en base al libro: "A Course In Time Series Análisis" de Peña Daniel y Tiao George, publicado por John Wiley & Sons en el año 2001.

En toda información estadística, se encuentran valores que no son lógicos a simple vista. Probablemente se deben a una mala trascripción de los datos o simplemente son verdaderos, en cuyo caso se denominan valores atípicos.

La detección de valores atípicos es considerada una parte muy importante de las series temporales. Su presencia puede provocar problemas en la identificación del modelo, desviaciones en las estimaciones de los parámetros del mismo y como consecuencia, malas previsiones para valores futuros.

Los atípicos en una serie de datos pueden estar representados dentro de la estructura de los modelos ARIMA.

Sea y_t la serie cronológica que contiene los datos atípicos, tal que:

$$\Phi(B)\nabla^d y_t = \Theta(B)a_t,$$

Donde B es el operador de retardos, de tal forma que $B\,y_t = y_{t-1}$

Por consiguiente:

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$$
$$\Theta(B) = 1 - \varphi_1 B - \ldots - \varphi_q B^q$$

$\Theta(z)$ y $\Phi(z)$ son polinomios de grado p y q respectivamente, primos entre sí, con sus raíces fuera del círculo unidad.

$$\nabla = 1 - B$$

Entonces $\nabla^d y_t$ es estacionaria y a_t corresponde a un ruido blanco tal que su distribución es $N(0,\sigma_a^2)$.

Existen varios tipos de datos atípicos los cuales se verán a continuación:

2.1. ATÍPICOS ADITIVOS (AO)

Normalmente corresponde a un valor erróneo o en su defecto a un punto aislado debido a un evento inusitado. Puede tratarse del efecto producido por un paro, una caída en el precio por un día, etc.

En el caso de un atípico aditivo, observaríamos la serie z_t, que guardaría con la serie y_t la siguiente relación:

$$z_t = \begin{cases} y_t & t \neq T \\ y_t + w_A & t = T \end{cases}$$

También se puede representar un atípico aditivo tomando en cuenta variables dicotómicas. En este caso, el modelo sería el siguiente:

$$z_t = \omega_A I_t^{(T)} + \psi(B)a_t$$

Donde $I_t^{(T)}$ es una variable dicotómica, es decir:

$$I_t^{(T)} = \begin{cases} 0 & t \neq T \\ 1 & t = T \end{cases}$$

$$\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)\nabla^d$$

La representación de un atípico aditivo es la que sigue a continuación.

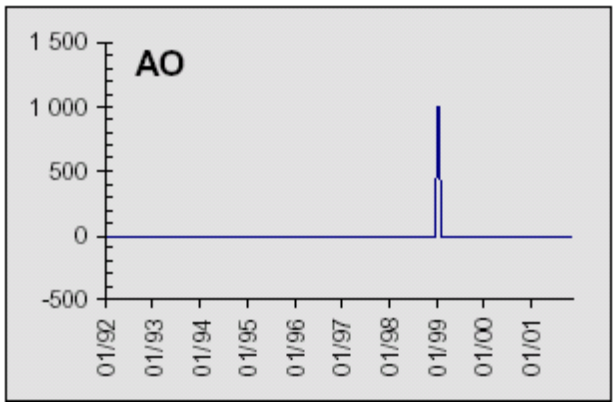


Figura 2.1: Gráfico de un AO

Fuente: "Demetra 2.0 User Guide", European Communities, Dosée Jens, 1999

El efecto de un atípico aditivo es acotado. Por lo tanto, un atípico aditivo no tiene efectos en los valores subsecuentes de la serie. Si la serie contiene k valores atípicos, su efecto combinado puede expresarse como:

$$y_t^* = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(B)\omega_j I_t^{T_j} + y_t$$

Donde: y_t^* es la serie que contiene al atípico, ω_j es el impacto inicial del atípico en el tiempo $t = T_j$, $I_t^{T_j}$ es una variable que toma el valor 1 si $t = T_j$ y toma el valor 0 en caso contrario; y_t es la serie que sigue un proceso ARIMA, $\xi_j(B)$ corresponde a la dinámica del atípico[8], que en este caso es igual a 1.

Existen varios tipos de efectos de los atípicos:

2.1.1. AUTOCORRELACIÓN

Si una serie tuviese un atípico aditivo en $t = 20$, la representación de la serie sería modificada de la siguiente manera:

[8] Efectos asociados a la presencia del atípico.

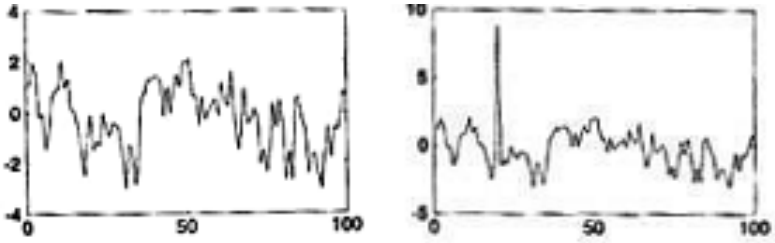


Figura 2.2: Gráfico de la serie original y la serie con atípico

Fuente: "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

En cuanto a la función de autocorrelación, su representación sería:

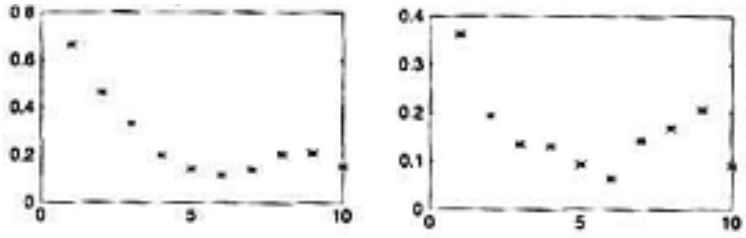


Figura 2.3: Función de auto correlación para ambas series

Fuente: "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Como se puede observar, la presencia de un atípico aditivo afecta seriamente los valores de autocorrelación de la serie en cuestión.

2.1.2. RESIDUOS

Sea la serie $z_t = \begin{cases} y_t & t \neq T \\ y_t + \omega_A & t = T \end{cases}$, tal que su representación como un $AR(\infty)$ sea:

$\pi(B) z_t = e_t$.

De esta forma los residuos para $t \geq T$, deberán ser calculados por:

$$e_{T+j} = z_{T+j} - \pi_1 z_{T+j-1} - \ldots - \pi_p z_{T+j-p} - \ldots .$$

Para $t < T$ los residuos deberán ser calculados por:

$$a_{T+j} = y_{T+j} - \pi_1 y_{T+j-1} - \ldots - \pi_p y_{T+j-p} - \ldots$$

Se puede ver que la relación entre ellos, es: $e_{T+j} = a_{T+j} - \pi_j \omega_A \quad j \geq 0$, con $\pi_0 = 1$.

Por ende, los p residuos posteriores serán afectados. Es más, una proporción de $k\%$ de atípicos contaminará un $kp\%$ de los residuos.

2.1.3. PARÁMETROS DEL MODELO

La presencia de un atípico aditivo produce malas estimaciones en los parámetros del modelo. Por ejemplo, para un $AR(1)$ con media cero, tendríamos el siguiente modelo: $\Phi(B)z_t = a_t$

donde: $z_t = \begin{cases} y_t & t \neq T \\ y_t + \omega_A & t = T \end{cases}$

Por lo tanto, lo que estaremos buscando serán estimaciones para Φ.

La estimación para la serie afectada por el atípico será: $\hat{\Phi} = \dfrac{\sum z_t z_{t-1}}{\sum z_t^2}$ que al ser reemplazada por y_t, queda expresada $\hat{\Phi} = \dfrac{\hat{\Phi}_0 + n^{-1}\tilde{\omega}_A(\tilde{y}_{T-1} + \tilde{y}_{T+1})}{1 + 2\tilde{\omega}_A\tilde{y}_T + n^{-1}\tilde{\omega}_A^2}$, donde: $\hat{\Phi}_0 = \dfrac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_t^2}$.

Donde: $\tilde{\omega}_A = \dfrac{\omega_A}{s_y}$, $\tilde{y}_t = \dfrac{y_t}{s_y}$ y $s_y^2 = \sum y_t^2 \Big/ n$

Como se puede observar, si el tamaño del atípico es muy grande, entonces:

$\omega_A \to \infty$, lo que implica que $\hat{\Phi} \to 0$. De esta manera, se puede observar que un aditivo de gran tamaño podría provocar que el estimador tenga como valor cero.

2.2. ATÍPICOS INNOVATIVOS O INNOVACIONALES (IO)

Normalmente corresponde a un cambio interno o a un efecto endógeno en el ruido del proceso.

Tomando en cuenta que la serie original sea y_t , la serie que contiene los atípicos será:

$$z_t = \begin{cases} y_t & t < T \\ y_t + \omega_I \psi_j, & t = T + j, \quad j \geq 0 \end{cases}$$

Los ψ_j provienen de la representación MA(∞) de un proceso ARIMA.

Si utilizamos variables dicotómicas, el proceso tendría el siguiente modelo:

$$z_t = \psi(B)\left(\omega_I I_t^{(T)} + a_t\right)$$

Donde z_t es la serie observada, ω_I es el tamaño del atípico, $I_t^{(T)}$ es una variable dicotómica.

Si la serie contiene k valores atípicos innovativos, su efecto combinado puede expresarse como:

$$y_t^* = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(B)\omega_j I_t^{T_j} + y_t$$

Donde: y_t^* es la serie que contiene los atípicos, ω_j es el impacto inicial del atípico en el tiempo $t = T_j$, $I_t^{T_j}$ es una variable que toma el valor 1 si $t = T_j$ y toma el valor 0 en caso contrario; y_t es la serie que sigue un proceso ARIMA. $\xi_j(B)$ corresponde a la dinámica del atípico y es igual a $\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}$.

El efecto de un atípico innovativo es acotado. Es decir, no tiene efectos en los valores subsecuentes de la serie. Existen varios tipos de efectos de los atípicos innovativos que son:

2.2.1. AUTOCORRELACIÓN

Si una serie tuviese un atípico innovativo en $t = 20$, la representación de la serie sería modificada de la siguiente manera:

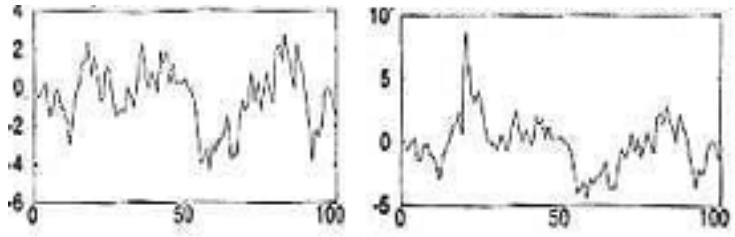


Figura 2.4: Gráfico de la serie original y de la serie con atípico

Fuente: "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

En cuanto a la función de autocorrelación, su representación sería:

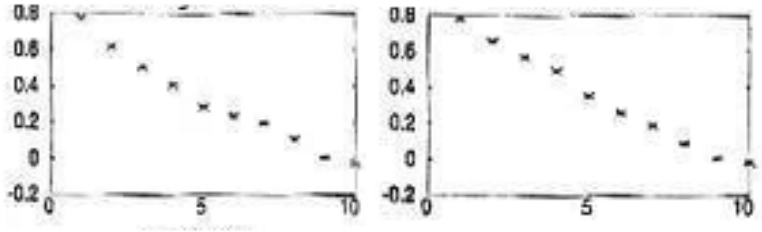


Figura 2.5: Gráfico de la función de autocorrelación para ambas series

Fuente: "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Como se puede ver, los efectos de los atípicos innovativos generalmente son menores que los de los aditivos en su función de autocorrelación.

2.2.2. RESIDUOS

Sea la serie $z_t = \begin{cases} y_t & t < T \\ y_t + \omega_I \psi_j & t = T + j, \quad j \geq 0 \end{cases}$, tal que su representación como un $AR(\infty)$ sea: $\pi(B) z_t = e_t$.

La relación entre los residuos afectados por el atípico es: $e_T = a_T - \omega_I$

Para los valores $j > 0$, $e_{T+j} = a_{T+j}$

Por ende sólo el residuo en el tiempo T se vería afectado. Los efectos del atípico innovativo son menores que el aditivo.

2.2.3. PARÁMETROS DEL MODELO

La presencia de un atípico innovativo dentro del modelo produce pequeños efectos en las estimaciones de los parámetros del mismo. Por ejemplo, para un $AR(1)$ con media cero, tendríamos el siguiente modelo: $\Phi(B)z_t = a_t$

donde: $z_t = \begin{cases} y_t & t < T \\ y_t + \omega_I \psi_j & t > T \quad j > 0 \end{cases}$

Por lo tanto lo que estaremos buscando serán estimaciones para Φ.

La estimación para la serie afectada por el atípico será: $\hat{\Phi} = \dfrac{\sum z_t z_{t-1}}{\sum z_t^2}$ que al ser reemplazada por y_t, queda expresada como:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi_0 + n^{-1}S_1 + n^{-1}\tilde{\omega}_I^2\left(\phi_0 / \left(1-\phi_0^2\right)\right)}{1 + n^{-1}2S_2 + n^{-1}\tilde{\omega}_I^2 / \left(1-\phi_0^2\right)}$$

Donde: $\hat{\phi}_0 = \left(\sum y_t^2\right)^{-1} \sum y_t y_{t-1}, \quad \tilde{\omega}_I = \omega_I / \Delta y, \quad S_1 = \tilde{\omega}_I \sum_{j=0} \left(\tilde{y}_{T-1+j} + \tilde{y}_{T+1+j}\right)\phi^j$ y $S_2 = \tilde{\omega}_I \sum_{j=0} \tilde{y}_{T+j}\phi^j$

Como se puede observar si el tamaño del atípico es muy grande, entonces:

$$si \quad \tilde{\omega}_I \to \infty, \quad \hat{\phi} \to \hat{\phi}_0$$

De esta manera, se puede observar que un atípico innovativo de gran tamaño genera estimaciones consistentes dentro del modelo.

2.3. CAMBIOS DE NIVEL (LS)

Un cambio de nivel es un cambio de la media del proceso en una parte del tiempo observado de la serie cronológica.

"En cuanto a los procesos estacionarios, un cambio de nivel implica un cambio en la media del proceso después de un cierto punto, y posteriormente el proceso se transforma en un proceso no estacionario."[9]

La representación de un cambio de nivel es la siguiente:

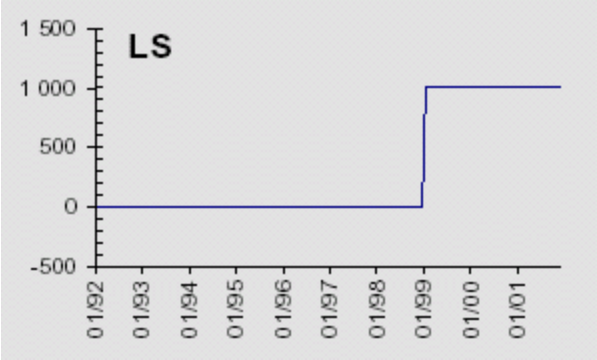


Figura 2.6: Gráfico de un LS

Fuente: "Demetra 2.0 User Guide", European Communities, Dosée Jens, 1999

El modelo que se tendría sería el siguiente:

$$z_t = \begin{cases} y_t & t < T \\ y_t + \omega_L & t \geq T \end{cases}$$

También se lo podría considerar como una sucesión de atípicos aditivos y en este caso el modelo sería:

$$z_t = \omega_L S_t^{(T)} + \psi(B)a_t$$

Donde $S_t^{(T)}$ corresponde a la función de salto la cual tiene el valor 0 antes del tiempo T y 1 después del tiempo T.

Una forma alternativa de escribir el modelo es:

$$\pi(B)\left(z_t - \omega_L S_t^{(T)}\right) = a_t$$

Los efectos de los cambios de nivel pueden ser muy grandes:

[9] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

2.3.1. RESIDUOS

Sea z_t la serie que contiene los cambios de nivel, tal que $e_t = \pi(B)z_t$. Sea a_t tal que: $\pi(B)\left(z_t - \omega_L S_t^{(T)}\right) = a_t$

Los residuos observados e_t se relacionan con los residuos verdaderos por:

$$e_t = a_t + \pi(B)\omega_L S_t^{(T)}$$

La función de impulso $I_t^{(T)}$ es aquella que toma el valor de 1 para $t = T$ y cero para cualquier otro valor.

La función de salto $S_t^{(T)}$ es aquella que toma el valor cero antes de T y toma el valor de 1 para $t \geq T$.

La relación entre ambas funciones es: $S_t^{(T)} = {}^{1}\!\!\diagup\!\!_{(1-B)} I_t^{(T)}$

Si reemplazamos la función salto por su correspondiente función impulso, se tendría:

$$e_t = a_t + l(B)\omega_L I_t^{(T)}$$

Donde: $l_j = 1 - \pi_1 - \cdots - \pi_j$ son los coeficientes de:

$$l(B) = \left(1 + l_1 B + l_2 B^2 + ...\right) = \frac{\pi(B)}{(1-B)}$$

Entonces tenemos:

$$e_t = \begin{cases} a_t & t < T \\ a_t + \omega_L l_j & t = T + j \end{cases}$$

Esto implica que todos los residuos después del tiempo T pueden ser afectados. Si por ejemplo tenemos un modelo $\mathrm{AR}(p)$:

$$e_T = a_T + \omega_L$$

$$e_{T+j} = a_{T+j} + \omega_L\left(1 - \phi_1 - ... - \phi_j\right) \qquad j = 1,..., p$$

$$e_{T+j} = a_{T+j} + \omega_L\left(1 - \phi_1 - ... - \phi_p\right) \qquad j \geq p+1$$

Los efectos de un cambio de nivel también dependen de la longitud de tiempo en el que sucede el atípico. Si el modelo es estacionario el efecto es más duradero que en un modelo no estacionario.

2.3.2. AUTOCORRELACIÓN

Si asumimos un modelo AR(1), el parámetro $r_z(1) = \dfrac{\sum z_t z_{t-1}}{\sum z_t^2}$ en términos de la serie y_t, tendríamos el estimador: $r_z(1) = \dfrac{r_y(1) + n^{-1}S_3 + n^{-1}\varpi_L^2(n-T)}{1 + n^{-1}2S_4 + n^{-1}\varpi_L^2(n-T+1)}$

Donde: $S_3 = \varpi_L\left(\tilde{y}_{T-1} + \tilde{y}_T + 2\tilde{y}_{T+1} + ... + 2\tilde{y}_n\right)$, $S_4 = \varpi_L \sum_{j=0} \tilde{y}_{T+j}$

Entonces si $n - T$ no es demasiado pequeño, $\varpi_L \to \infty \Rightarrow r_z(1) \to 1$.

2.4. ATÍPICOS Y ANÁLISIS DE INTERVENCIÓN

Los atípicos se consideran un caso particular del análisis de intervención, que fue desarrollado por Box y Tiao en 1975.

El análisis de intervención es un proceso que tiene como finalidad modelar el efecto dinámico en la serie de tiempo, debido a un cierto atípico en un instante dado.

Dada la serie: $z_t = O_t + \psi(B)a_t$, la expresión formal de los efectos de las observaciones atípicas es:

$$O_t = \omega V(B) I_t^{(T)}$$

Donde:

I_t^T es una variable dicotómica de valor 1 para el tiempo T y nulo en los restantes, siendo T el instante donde ocurre el evento atípico;

ω es una constante;

$V(B) = (1 + v_1 B + v_2 B^2 + ...)$ es la función de transferencia, que normalmente es una operador polinomial del operador B .

La expresión general es: $V(B) = \dfrac{a(B)}{b(B)}$

En el caso del atípico aditivo : $V(B) = 1$, en cuyo caso la intervención no tiene ninguna dinámica, y el resultado es un AO de tamaño ω.

En el caso del atípico innovativo $V(B) = {}^{1}\!/_{\pi(B)}$; esto es, cuando la dinámica de la intervención es la misma dinámica del proceso original.

El efecto de un nivel de cambio disminuye y desaparece en un cierto tiempo. Una manera de mostrar esto es con un cambio transitorio, introducido por Tsay (1988) como índices de cambio que desaparecen en una forma exponencial. A esto se lo define como un efecto de intervención en el que $V_h(B) = (1 - \delta B)^{-1}$, esto es:

$$z_t = \frac{\omega_{TC}}{1 - \delta B} I_t^{(T)} + \frac{1}{\pi(B)} a_t$$

2.5. PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN DE ATÍPICOS

Para eliminar el efecto de un atípico dado en una serie de tiempo dada se requiere:

1. Detectar el tiempo en el que se da el atípico;
2. Identificar el tipo de atípico;
3. Remover sus efectos calculando un modelo en el que se incorpore el atípico

Se debe seguir el siguiente procedimiento:

A cada punto de la muestra se analiza si será alguno de los tipos de atípicos más probables; para esto se estudia en cada punto del tiempo la razón de verosimilitud para los tipos de atípicos considerados. Se calcula el valor de p en la prueba para cada tipo de atípico y tomar como atípico más probable para cada punto aquel que proporcione un valor de p más pequeño.

Esto produce una sucesión de los atípicos más probables en cada punto del tiempo, por ejemplo (IO, AO, IO,...,AO) y una serie de tiempo de valores de p .

Entonces se escoge como el tiempo del atípico candidato al punto de tiempo en el que se ha asociado el valor de p más pequeño, y como efecto del atípico al efecto correspondiente. Una vez definida la ubicación y el tipo de atípico, su efecto puede removerse proponiendo el modelo de análisis de intervención apropiado.[10]

2.5.1. ESTIMACIÓN DE LOS EFECTOS DE LOS ATÍPICOS

Se suponen conocidos los parámetros del modelo ARIMA y se necesita analizar cómo estimar el tamaño del atípico en un tiempo T cuando el tipo de atípico (AO ,IO o LS) es conocido.

[10] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

El modelo desde la serie observada z_t está dada por $z_t = \omega V(B) I_t^{(T)} + \psi(B) a_t$ donde $V(B)$ tiene distintos valores dependiendo del tipo de atípico.

Sean $e_t = \pi(B) z_t$ los residuos de la serie observada dado el valor para los parámetros del modelo.

Se podría escribir el modelo como: $e_t = \omega_i x_t + a_t$

Cada tipo de atípico tiene representaciones diferentes en cuanto a ω_i y x_t.

Tipo	Aditivo	Innovativo	Cambio de Nivel	Shock transitorio
ω_i	ω_A	ω_I	ω_L	ω_{TC}
x_t	$\pi(B) I_t^{(T)}$	$I_t^{(T)}$	$\frac{\pi(B)}{(1-B)}$	$\frac{\pi(B)}{(1-\delta B)}$

Tabla 2.1: Tipos de representaciones para los diferentes atípicos

Fuente: "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Como se asume que los parámetros son conocidos, ω_i puede estimarse por mínimos cuadrados, conduciendo a $\tilde{\omega}_i = \frac{\sum e_t x_t}{\sum x_t^2}$ con varianza $\sigma_a^2 \left(\sum x_t^2 \right)^{-1}$.

Para atípicos aditivos, la estimación conduce a $\hat{\omega}_A = \rho_A^2 \pi(F) e_t$ donde F es el operador en avance definido por $F z_t = z_{t+1}$, $\rho_A^2 = \left(1 + \pi_1^2 + ... + \pi_{n-T}^2\right)^{-1}$. Este resultado es consistente con la propiedad de que todos los residuos después del punto T son afectados por el atípico; por lo tanto, todos ellos tienen información sobre éste.

Por ejemplo, para una AR(1) el estimador es:

$$\hat{\omega}_A = \frac{e_T - \phi e_{T+1}}{1 + \phi^2}$$

Para atípicos innovativos, el único residuo que tiene información del tamaño del atípico es el del tiempo T, y entonces la estimación es: $\hat{\omega}_I = e_T$ y la varianza es: $Var(\hat{\omega}_I) = \sigma_a^2$

En el caso de un cambio de nivel, todos los residuos después del cambio tienen información, y se podría esperar que la estimación combine todos ellos. La estimación es: $\hat{\omega}_L = \rho_L^2 l(F) e_T$, donde $l(B) = \frac{\pi(B)}{1-B}$ y $\rho_L^2 = \left(1 + l_1^2 + l_2^2 + ... + l_{n-T}^2\right)^{-1}$ donde l_i son los coeficientes de $l(B)$. Su varianza es $\text{var}(\hat{\omega}_L) = \rho_L^2 \sigma_a^2$

Finalmente para el caso de un shock transitorio, la estimación es $\hat{\omega}_{TC} = \rho_T^2 \beta(B) e_T$, donde $\rho_T^2 = \left(1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_{n-T}^2\right)^{-1}$ en los que β_i son los coeficientes de $\beta(B) = \frac{\pi(B)}{(1-\delta B)}$ y la varianza: $\text{var}(\hat{\omega}_{TC}) = \rho_T^2 \sigma^2$.[11]

2.5.2. PRUEBA PARA ATÍPICOS

Para probar si en el tiempo T ocurre un atípico, la prueba es:

$$H_0 : \omega_j = 0$$
$$H_j : \omega_j \neq 0$$

donde $j = I, A, LS, TC$. Si se conocen los parámetros se utiliza e_t y la prueba es equivalente a probar la pendiente en un modelo de regresión simple, sin embargo el criterio de razón de verosimilitud compara el parámetro calculado con su error estándar, así que su estadístico es:

$$H_0 \quad contra \quad H_j : \lambda_{j,t} = \frac{\hat{\omega}_{j,t}}{\rho_{j,t}\sigma_a}$$

[11] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

donde $\rho_{I,T} = 1$, y la distribución de $\lambda_{j,t}$ es una t de Student. Cuando se desconoce la ubicación del atípico se sugiere utilizar la prueba de razón de verosimilitud: $n_t = max_{1 \le t \le n} \{\lambda_{j,t}\}$

La distribución de η_t es complicada debido a la correlación entre los $\lambda_{j,t}$ por lo que normalmente se trata solamente de aproximar esta distribución.

Si se desconocen los parámetros, la prueba de razón de verosimilitud requiere el cálculo de los parámetros bajo ambas hipótesis. La estimación bajo la hipótesis alternativa debe realizarse a todos los T, lo que hace muy lento el proceso de la prueba. Chang y Tiao, en 1983, propusieron un procedimiento iterativo en el cual los parámetros se estiman únicamente en cada iteración bajo H_0. Basándose en la simulación de Montecarlo, demostraron que si los parámetros son sustituidos por estimadores consistentes bajo H_0, los estadísticos $\lambda_{j,t}$ son asintóticamente distribuidos como una normal estándar.

Este procedimiento fue generalizado por Tsay en 1988 y tiene las siguientes fases:

- En la primera fase se ajusta un modelo por máxima verosimilitud a la serie de tiempo, asumiendo que no existen atípicos. Utilizando los parámetros estimados, los residuos e_t, su varianza estimada, las razones de verosimilitud y utilizando los valores iniciales como estimaciones de los parámetros en cada instante de tiempo.

- Para todo $t = 1,...,n$ se calcula el estadístico: $\eta_t = max\left\{\left|\hat{\lambda}_{j,t}\right|, i = A, I\right\}$

Si $\max \quad \eta_t = \left|\hat{\lambda}_{A,T}\right| \ge C$, donde C es una constante predeterminada, se asume un AO en $t = T$, si $\max \quad \eta_t = \left|\hat{\lambda}_{I,T}\right| \ge C$ asumimos un IO en t=T, y así sucesivamente. El valor de C es usualmente 3,5 o 4.

Cuando se detecta un atípico, los residuos se corrigen según el tipo de atípico. Por ejemplo, si se detecta un IO se define un nuevo residuo en este punto por $\tilde{e}_t = \hat{e}_t - \hat{\omega}_t$, si se detecta un AO el residuo se define como $\tilde{e}_t = \hat{e}_t - \hat{\omega}_A \hat{\pi}(B) I_t^{(T)}$, para $t \geq T$; si es un LS $\tilde{e}_t = \hat{e}_t - \hat{\omega}_{LS} g(B) I_t^{(T)}$, donde $g(B) = l(B)$.

Utilizando estos nuevos residuos se obtiene una nueva varianza estimada $\tilde{\sigma}_e^2$, y las razones de verosimilitud $\lambda_{j,t}$ se calculan nuevamente usando los nuevos residuos $\tilde{e}_t$ y su varianza $\tilde{\sigma}_e^2$. La identificación de los atípicos y el cálculo de nuevos residuos se repiten hasta que no se detecten más puntos como atípicos.

- En la segunda fase se estima el tamaño de los atípicos identificados y los parámetros. Se debe asumir que k posibles atípicos han sido identificados en posiciones $T_1, T_2, ...T_k$. Entonces se estima el siguiente modelo:

$$z_t = \sum_{j=1}^{k} \omega_{T_j}(B) I_t^{T_j} + \psi(B) a_t$$

donde $V_{T_j}(B) = 1$ para AO, $V_{T_j}(B) = \psi(B)$ para IO y así sucesivamente. Utilizando estos nuevos parámetros estimados, el proceso se repite hasta que se encuentren nuevos atípicos.

Simulaciones realizadas hacen notar que este procedimiento trabaja muy bien cuando los atípicos están aislados.[12]

2.6. OBSERVACIONES INFLUYENTES

Existen valores que aunque no son detectados como atípicos tienen influencia sobre los valores de los parámetros del modelo y por ende en los pronósticos. Con la detección de estos valores se puede ver la sensibilidad de los valores de los parámetros.

[12] A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Existen muchas propuestas para medir la influencia de ciertas observaciones basándose en el coeficiente de autocorrelación; otras sustituyen los valores de la serie por su media no condicional; otras lo tratan como un valor perdido. Sin embargo se detalla la sugerencia de Peña en 1987.

Primero se escribe el modelo ARIMA en la aproximación AR(h):

$$y_t = \sum_{i=1}^{h} \pi_i y_{t-i} + a_t$$

Luego la medida de la influencia de la observación T sobre el valor del parámetro es:

$$P_\pi(T) = \frac{\left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)' \hat{\Sigma}_\pi^{-1} \left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)}{h\sigma_a^2}$$

donde $\hat{\pi}$ es el estimador de máxima verosimilitud del vector de parámetros π asumiendo que no existen atípicos, $\hat{\pi}_{(T)}$ es el estimador de máxima verosimilitud asumiendo que la observación $t = T$ está perdida, $\hat{\Sigma}_\pi^{-1}\sigma_a^2$ es la matriz de varianzas-covarianzas del vector estimado $\hat{\pi}$, y h es el número de parámetros. Esta medida es general y se usa tanto para procesos estacionarios como no estacionarios.

Si $\hat{Z} = X_z\hat{\pi}$ y , $\hat{Z}_{(T)} = X_z\hat{\pi}_{(T)}$ son los vectores estimados de las predicciones, calculados a partir de dos vectores de parámetros (el primero con todos los datos y el segundo asumiendo que la observación en $t = T$ está perdida) y X_z es la matriz:

$$X_z = \begin{pmatrix} z_h & z_{h-1} & \cdots & z_1 \\ z_{h+1} & z_h & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ z_{t-1} & z_{t-2} & \cdots & z_{t-h} \end{pmatrix}$$

puesto que: $\left(\hat{Z} - Z_{(T)}\right)'\left(Z - Z_{(T)}\right) = \left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)\left(X_z' X_z\right)\left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)$, la medida de influencia puede escribirse como:

$$P_{\hat{z}}(T) = \frac{\left(\hat{Z} - \hat{Z}_{(T)}\right)'\left(\hat{Z} - \hat{Z}_{(T)}\right)}{h\hat{\sigma}_a^2}$$

y tiene la ventaja que puede ser calculada por la representación ARIMA del modelo y no requiere la aproximación AR. Donde $h = p + q$, es el número de parámetros usados para calcular el vector de predicciones.[13]

2.6.1. OBSERVACIONES INFLUYENTES Y ATÍPICOS

Se puede medir la influencia de un atípico aditivo sobre los parámetros de una serie de tiempo calculando la distancia Mahalanobis entre el vector de parámetros estimados por máxima verosimilitud, asumiendo que no existen atípicos en la serie, y el mismo vector estimado asumiendo un atípico aditivo es ese punto. Así se obtiene el efecto que un atípico aditivo puede tener en cada punto de la muestra. La misma idea puede aplicarse para otros tipos de atípicos.

Peña mostró que la estimación de máxima verosimilitud de los parámetros cuando se asume un atípico aditivo en el tiempo T, se realiza considerando la observación en el tiempo T como un valor perdido; esto permite sustituirlo por su media condicional dado el resto de datos.

Sin embargo, la estimación de máxima verosimilitud cuando se asume un atípico innovativo en el tiempo T, se realiza eliminando la observación de los cálculos, lo que permite sustituirlo por su media marginal como en el caso estático.

Como los atípicos aditivos tienen más influencia que los atípicos innovativos sobre los parámetros, Peña propone como una medida estándar de influencia el estadístico $P_{\pi}(T) = \frac{\left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)'\hat{\Sigma}_{\pi}^{-1}\left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)}{h\sigma_a^2}$, donde $\hat{\pi}_{(T)}$ se lo calcula (o estima) asumiendo que la observación en el tiempo T es un dato perdido.

---

[13] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

En $P_{\hat{z}}(T)=\frac{\left(\hat{Z}-\hat{Z}_{(T)}\right)'\left(\hat{Z}-\hat{Z}_{(T)}\right)}{h\hat{\sigma}_a^2}$ el valor de la serie en el tiempo T no es completamente indiferente porque aparece en el vector de pronósticos $\hat{Z}_{(T)}$.

Una medida alternativa de influencia que evita esto, puede ser construida directamente mirando los cambios en el vector de pronósticos con y sin un atípico aditivo, la cual es: $D_{\hat{z}}(T)=\frac{\left(\hat{Z}-\hat{Z}_t^{(INT)}\right)'\left(\hat{Z}-\hat{Z}_t^{(INT)}\right)}{h\hat{\sigma}_a^2}$

Donde h es el orden o número de parámetros del modelo ARIMA, $\hat{\sigma}_a^2$ es la estimación de la varianza del ruido blanco, $\hat{Z}$ es el vector del pronósticos asumiendo la no presencia de atípicos, y $\hat{Z}_T^{(INT)}$ es el vector de pronósticos estimado asumiendo un atípico aditivo a $t=T$. Este vector de pronósticos está dado por el modelo de intervención: $\pi(B)\left(z_t-\omega_A I_t^{(T)}\right)=a_t$ donde $\pi(B)$, ω_A e $I_t^{(T)}$ han sido previamente definidos.

Se debe notar que en los modelos de regresión lineal una medida de la influencia basada en el cambio del parámetro estimado es siempre equivalente a uno basado en el cambio en el pronóstico, mientras que en las series de tiempo esta equivalencia se pierde, porque $P_{\pi}(T)=\frac{\left(\hat{\pi}-\hat{\pi}_{(T)}\right)'\hat{\Sigma}_{\pi}^{-1}\left(\hat{\pi}-\hat{\pi}_{(T)}\right)}{h\sigma_a^2}$ y $D_{\hat{z}}(T)=\frac{\left(\hat{Z}-\hat{Z}_t^{(INT)}\right)'\left(\hat{Z}-\hat{Z}_t^{(INT)}\right)}{h\hat{\sigma}_a^2}$ son diferentes.

Aquí $D_{\hat{z}}(T)$ puede interpretarse como el efecto de cambio del parámetro más el efecto del atípico aditivo. Estudios de Montecarlo han mostrado que $D_{\hat{z}}(T)=\frac{\left(\hat{Z}-\hat{Z}_t^{(INT)}\right)'\left(\hat{Z}-\hat{Z}_t^{(INT)}\right)}{h\hat{\sigma}_a^2}$,(el cual incluye el tamaño del atípico), es más efectivo para detectar atípicos (que tienen una gran influencia sobre el modelo) que:

$$P_\pi(T) = \frac{\left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)' \hat{\Sigma}_\pi^{-1} \left(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)}\right)}{h\sigma_a^2}.$$ [14]

2.7. MÚLTIPLES ATÍPICOS

2.7.1. EFECTOS DE ENMASCARAMIENTO

Muchas veces la serie está sujeta a un conjunto de atípicos que pueden producir enmascaramiento. La generalización del modelo de atípicos para k atípicos es:

$$z_t = \sum_{i=1}^{k} \omega_i V_i(B) I_t^{(T_i)} + y_t$$

Si se asumen los parámetros conocidos, $e_t = \pi(B) z_t$, el modelo $z_t = \sum_{i=1}^{k} \omega_i V_i(B) I_t^{(T_i)} + y_t$ puede ser escrito como: $e_t = x_t' \beta + a_t$

donde $\beta' = (\omega_1, ..., \omega_k)$ y $x_t' = (x_{1t}, ..., x_{kt})$, con $x_{it} = \pi(B) V_i(B) I_t^{(T_i)}$.

Los métodos de identificación de atípicos basados en la estimación de los efectos de éstos, considerándolos uno por uno usan el modelo $z_t = \omega V(B) I_t^{(T)} + \psi(B) a_t$ en vez de $z_t = \sum_{i=1}^{k} \omega_i V_i(B) I_t^{(T_i)} + y_t$.

Se espera que éstos procedimientos trabajen bien cuando la matriz $\left(\sum_{t=1}^{n} x_t x_t'\right)^{-1}$ es aproximadamente diagonal, pero puede conducir a serios sesgos cuando las series tienen grupos de atípicos aditivos y cambios de nivel. Note que para un atípico innovativo $x_{it} = I_t^{(T_i)}$, y además la estimación de su efecto típicamente no está correlacionada con otros efectos. Sin embargo, para atípicos aditivos $x_{it} = \pi(B) I_t^{(T_i)}$, y la correlación entre los efectos de atípicos aditivos consecutivos

[14] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

puede ser muy alta. Se espera que esto ocurra cuando se tenga grupos de atípicos, un hecho empírico encontrado por Bruce y Martin (1989).

Por ejemplo, si tenemos dos atípicos aditivos consecutivos de magnitudes ω_1 y ω_2 al tiempo T y $T+1$, $k=2$ y el valor esperado para la estimación de ω_1 usando el modelo $z_t = \omega V(B) I_t^{(T)} + \psi(B) a_t$ y asumiendo que éste es el único atípico, el cual será llamado $\hat{\omega}_1^{(s)}$ estaría dado por:

$$E\left(\hat{\omega}_1^{(s)}\right) = \omega_1 + \omega_2 \frac{\sum_{i=0}^{n-T-1} \pi_i \pi_{i+1}}{\sum_{i=0}^{n-T} \pi_i^2}$$

donde $\pi_0 = -1$. Como un ejemplo, si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y el proceso es una marcha aleatoria, la estimación asumiendo un único atípico en $t = T$ será la mitad del valor verdadero del atípico, y la varianza será $\sigma^2/2$; entonces el valor esperado para la razón de verosimilitud será $\omega/\sqrt{2}\sigma$. Por otra parte, en el modelo correcto el valor esperado para el cálculo es ω y tiene una varianza de $2\sigma^2/3$ conduciendo a una razón de verosimilitud esperada de $\sqrt{3}\omega/\sqrt{2}\sigma$.

En este caso simple, donde los parámetros se asumen como conocidos, se puede ver que la presencia del segundo atípico produce un efecto de enmascaramiento, lo que puede conducir a una mala identificación del atípico.

Cuando se asume que los parámetros son desconocidos, el problema es más serio aún, porque una secuencia de atípicos aditivos puede producir sesgos importantes sobre los parámetros calculados.

Se pueden considerar los siguientes casos:

1) Todos los atípicos tienen el mismo signo y tamaño similar: Entonces, si $\omega \to \infty$, entonces $r_z(h) \to (k-h)/k$ para $k > h$, y $r_z(h) \to 0$ para $k \le h$. Esto implica que si k es pequeño la serie parecerá ser un ruido blanco, por lo tanto si k es grande parecerá un proceso no estacionario.

2) Los atípicos tienen grandes valores aleatorios: Por ejemplo, supongamos que ellos se generan por una distribución de media cero y una gran varianza. Entonces $r_z(h) \to 0$ y la serie mostrará ser un ruido blanco.

En el caso general de conjuntos o grupos de atípicos de tamaño arbitrario, el efecto depende del tamaño relativo del grupo y del tamaño y longitud de otros grupos. En cualquier caso, si los atípicos son correctamente identificados, el problema de posibles sesgos de sus tamaños puede superarse mediante un cálculo conjunto de todos los atípicos candidatos. Sin embargo, el sesgo puede ser tan fuerte que varios atípicos sean enmascarados y se mantengan no identificados.[15]

2.7.2. PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN DE ATÍPICOS MÚLTIPLES

El primer procedimiento para la detección de los mismos fue realizado por Bruce y Martin en 1989. Estos autores generalizaron el método de Peña para medir observaciones influyentes en las series temporales y propusieron la identificación de atípicos utilizando: $D_v(T) = \dfrac{\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2_{(T)}}{\hat{\sigma}^2_{(T)}}$

Ellos mostraron que para un modelo AR (p) con un atípico aislado la medida de la influencia $P_\pi(T)$ se puede indicar como p valores influyentes antes del atípico y p valores después y este efecto se llama efecto de manchado.

---

[15] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Ellos propusieron un procedimiento basando en calcular $D_v(T)$ para grupos de $k = 1,2,3...$ pero es muy difícil de aplicar y parece no trabajar muy bien en general.

Chen y Liu en 1993 extendieron el procedimiento de Chang y Tsay de 1988, para evitar el efecto de enmascaramiento de las series temporales. Reconocieron que los atípicos pueden producir desviaciones en las estimaciones de los parámetros que afectan a todo el procedimiento y que algunos atípicos no podrían ser identificados por causa del efecto de enmascaramiento. Para esto, proponen una modificación a los procesos previos como sigue:

- Se calculan las estimaciones iniciales de los parámetros y los atípicos se detectan uno por uno usando la razón de máxima verosimilitud hasta que no se encuentren más atípicos.
- El tamaño de los atípicos identificados son estimados conjuntamente. Luego se aplica un proceso de eliminación hacia atrás; eso es, se calcula la razón de mínima verosimilitud para los atípicos detectados, y si este valor es más pequeño que el valor crítico C utilizado para detectar atípicos, entonces este valor se retira del conjunto de atípicos candidatos. Después de que cada punto sea eliminado, los atípicos restantes y los valores de los parámetros se estiman nuevamente por razón de máxima verosimilitud, y la eliminación hacia atrás se aplica nuevamente.
- Los pasos anteriores se realizan hasta que no se encuentran atípicos.

Este método tiene tres problemas principales:

1. La presencia de cambios de nivel causa serios problemas en la especificación y parámetros del modelo. El uso de la razón de máxima verosimilitud para distinguir entre los cambios de nivel y los atípicos innovativos, a veces no funciona correctamente debido a que el valor esperado de la razón de máxima verosimilitud para un atípico innovativo, excede el valor esperado de la razón de máxima verosimilitud de los cambios de nivel. Posteriormente, los cambios de nivel a veces son confundidos con atípicos innovativos.

2. Se produce una desviación en las estimaciones de los valores iniciales de los parámetros. Este problema se da porque la estimación inicial de los parámetros se realiza bajo hipótesis de no existencia de atípicos en las series que normalmente conduce a la búsqueda de atípicos utilizando un conjunto de parámetros con muchas desviaciones y por ende el procedimiento fallará.

3. El problema del enmascaramiento, que aparece principalmente cuando existe una secuencia de atípicos aditivos consecutivos, debido a que los procedimientos basados en la identificación de atípicos uno a uno puede fallar en la identificación de algunos de los miembros del grupo de atípicos.[16]

2.7.2.1. Confusión entre los atípicos innovativos y los cambios de nivel bajo H_0

Se supone un cambio de nivel en un AR (1). Entonces el parámetro estimado debería ser cercano a uno y la serie debe parecer una marcha aleatoria. Como en una marcha aleatoria un atípico innovativo es idéntico a un cambio de nivel, entonces se observa claramente la posibilidad de la confusión entre los dos.

En el caso general la raíz más larga del modelo AR(p) irá a 1 y el problema será similar. El problema es complicado porque cuando se escoge entre un atípico innovativo y un cambio de nivel por la prueba de razón de máxima verosimilitud, la distribución de estos estadísticos bajo la hipótesis nula facilita que se identifique un cambio de nivel como un atípico innovativo. Este problema fue detectado por Balke en 1993, quien propuso adicionar una nueva búsqueda de atípicos utilizando un modelo de ruido blanco.

Sin embargo, esta idea tiene dos problemas. Primeramente el ruido blanco no permite distinguir atípicos aditivos e innovativos, y también que puede permitir cambios de nivel falsos que no serán fáciles de detectar. La distribución de los dos estadísticos son diferentes bajo la hipótesis nula.

---

[16] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Los estadísticos para probar un atípico innovativo es:

$$\hat{\lambda}_{I,T} = \frac{\hat{e}_T}{\hat{\sigma}_a^2}$$

Mientras que para un cambio de nivel es:

$$\hat{\lambda}_{L,T} = \frac{\hat{e}_T - \sum_{i=1}^{n-T} \hat{l}_i \hat{e}_{T+i}}{\hat{\sigma}_a \left(1 + \sum_{i=1}^{n-T} l_i^2\right)^{1/2}}$$

Donde: $\hat{l}_1 = -1 + \hat{\pi}_1$, $\hat{l}_2 = -1 + \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2, ..., \hat{l}_{n-T} = -1 + \sum_{i=1}^{n-T} \hat{\pi}_i$

Entonces la relación entre $\hat{\lambda}_{I,T}$ y $\hat{\lambda}_{L,T}$ es:

$$\hat{\lambda}_{L,T} = \frac{\hat{\lambda}_{I,T} + \frac{\sum_{i=1}^{n-T} \left(\hat{e}_{T+i} \left(1 - \sum_{j=1}^{i} \hat{\pi}_j \right) \right)}{\hat{\sigma}_a^2}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{n-T} \left(-1 + \sum_{j=1}^{i} \hat{\pi}_j \right)^2 \right)^{1/2}}$$

Para modelos AR(p) los valores más cercanos a la unidad son los elementos de la secuencia: $\phi_1, \phi_1 + \phi_2, ..., \sum_{i=1}^{p} \phi_i$ que son cercanos a los valores críticos de un cambio de nivel, también lo serán para el valor crítico de los atípicos Innovativos.

Para modelos ARMA invertibles, bajo H_0 (ausencia de atípicos), cuando $t = T$ no está cerca del final de la serie, para n grande el segundo término se irá hacia cero y la razón de máxima verosimilitud para cambios de nivel, $\hat{\lambda}_{L,T}$ se espera que sea menor que la razón de máxima verosimilitud de los atípicos innovativos $\hat{\lambda}_{I,T}$.

Estos resultados sugieren que para un modelo invertible ARMA los estadísticos para los cambios de nivel como para los atípicos innovativos no deberían ser comparados porque los valores críticos bajo la hipótesis nula pueden ser diferentes.

Para revisar este resultado en muestras finitas, Peña y Sánchez realizaron una simulación de la distribución de estos dos estadísticos. Estos autores obtuvieron los valores críticos para los estadísticos de máxima verosimilitud confirmando que el método de detección basado en $\eta_t = \max_t \left\{ \left| \hat{\lambda}_{i,t} \right| \right\}$ parece ser inadecuada, porque el comportamiento del máximo valor del estadístico para un cambio de nivel es diferente a sus correspondientes para un atípico innovativo y aditivo. La confusión entre un cambio de nivel y un atípico innovativo puede ser evitada comparando atípicos innovativos con aditivos y luego dejando solos a los cambios de nivel.[17]

2.7.2.2. Mejoras en las estimaciones de los parámetros iniciales

Las posibles desviaciones en la búsqueda inicial de atípicos pueden causar que el proceso fracase. Es conveniente empezar la búsqueda con la estimación de los parámetros que no están siendo fuertemente afectados por algunos datos que pueden ser atípicos. Una manera de detectar las observaciones que pueden tener grandes efectos en las estimaciones de los parámetros es el uso de la medida de la influencia definida antes. Se puede asumir que las observaciones influyentes están perdidas (lo que equivale a asumir atípicos aditivos en estos puntos) y calcular los parámetros bajo estas hipótesis.

Sánchez y Peña, en 1997, observaron que este método funciona bien con atípicos aislados pero cuando la serie tiene cambios de nivel o una secuencia de atípicos aditivos del mismo tamaño, la medida de la influencia $D_{\hat{Z}}(T)$ detecta como observaciones influyentes un bajo porcentaje de observaciones afectadas por un cambio de nivel o incluidas en esa secuencia. Este es el efecto de

[17] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

enmascaramiento. Entonces si se quitan observaciones de acuerdo solo a $D_{\hat{Z}}(T)$ algunos atípicos pueden no ser detectados y pueden provocar desviaciones en las estimaciones de los parámetros.

Para evitar esta situación se define una medida de influencia para los cambios de nivel o para secuencias de atípicos que pueden ser usados conjuntamente con $D_{\hat{Z}}(T)$, para llegar al depuramiento de los datos.

La siguiente medida se propone para verificar los efectos de los conjuntos de observaciones:

$$DL(T) = \frac{\left(\hat{Z} - \hat{Z}_T^{(ILS)}\right)'\left(\hat{Z} - \hat{Z}_T^{(ILS)}\right)}{h\hat{\sigma}_a^2}$$

Donde $\hat{Z}$ es el vector de predicciones, asumiendo que no existen efectos en los atípicos y $\hat{Z}_T^{(ILS)}$ es el vector de predicciones asumiendo un cambio de nivel al tiempo T, que se estima por el modelo de intervención.

Como en el caso de los atípicos aditivos, se puede medir la influencia de los cambios de nivel analizando el cambio en las estimaciones de los parámetros. Llamando $\hat{\pi}$ al estimador de máxima verosimilitud de π suponiendo que no existen atípicos, y $\hat{\pi}_L$ al estimador de máxima verosimilitud, considerando que existe un cambio de nivel en $t = T$, se puede utilizar la distancia de Mahalanobis entre estas estimaciones, como en $P_\pi(T)$, para construir una medida del cambio en los parámetros.

Sánchez y Peña en 1997 mostraron: $DL(T) \cong PL(T) + \frac{\hat{\lambda}^2_{L,T}}{h}$

Y, en el caso de atípicos aditivos, $DL(T)$ puede interpretarse como el efecto en el cambio de los parámetros más el efecto del cambio de nivel.

En resumen, se puede mejorar la estimación inicial de los parámetros utilizando las medidas de influencia $D_{\hat{Z}}(T)$ y $DL(T)$ para corregir las series en todos los puntos, que parecen tener fuertes efectos en la estimación de los parámetros y luego calcular los parámetros iniciales de la serie corregida.[18]

[18] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

2.8. ESTIMACIÓN DE VALORES PERDIDOS

2.8.1. INTERPOLACIÓN ÓPTIMA Y FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN INVERSA.

Se supone una serie estacionaria con una observación perdida en $t = T$; entonces la estimación de los valores faltantes se llama problema de interpolación y se resuelve calculando la esperanza de la variable aleatoria no observada dados el resto de datos.

Grenander y Rosenblatt en 1957 mostraron que esta esperanza está dada por:

$$E\left(z_T \middle| Z_{(T)}\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \left(z_{T+i} + z_{T-i}\right)$$

Donde δ_i son los coeficientes de autocorrelación inversa, e incluye todos los datos sin el dato faltante. Brubacher y Tunniclife-Wilson en 1976 obtuvieron este resultado por mínimos cuadrados. Una manera simple de definir la función de autocorrelación inversa es como sigue:

Se debe definir un proceso dual de un modelo ARIMA invertible como un modelo ARMA: $\Theta(B) z_t = \Phi(B) \nabla^d a_t$

Esto es, el proceso dual se construye intercambiando el papel de los operadores AR con los MA. Entonces la función de autocorrelación del proceso dual es la función de autocorrelación inversa (IAF) del proceso original.

El proceso AR(1): $(1 - \phi B) z_t = a_t$ tendrá una función de autocorrelación inversa que es la función de autocorrelación del proceso MA(1): $z_t = (1 - \phi B) a_t$. Entonces la IAF tiene el primer coeficiente de autocorrelación igual a $\frac{-\phi}{(1+\phi^2)}$ y todos los

otros valores son iguales a cero. Utilizando $E\left(z_T \middle| Z_{(T)}\right)$, el interpolador óptimo para un proceso AR(1) con media cero es:

$$E\left(z_T \middle| Z_{(T)}\right) = \frac{\phi}{1+\phi^2}\left(z_{T+1} + z_{T-1}\right)$$

Si el proceso dual es invertible y estacionario, la función de autocorrelación inversa siempre existe. El interpolador óptimo tiene una interpretación simple.

Si a la serie temporal se la escribe en su representación AR(∞):

$$z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z_{t-i} + a_t$$

Entonces, si el valor z_t fuese un dato faltante, se podría obtener una estimación insesgada de él utilizando:

$$\hat{z}_T^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z_{t-i}$$

Esta estimación que contiene los valores anteriores al faltante, tendrá varianza σ_a^2.

Sin embargo, aún se dispone de las observaciones que están después del valor faltante. Eso significa que se puede escribir que para todo j tal que $\pi_j \neq 0$:

$$z_T = \pi_j^{-1}\left(z_{T+j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{\infty} \pi_i z_{T+t-i} \right) - \frac{a_{T+j}}{\pi_j}$$

De donde se puede obtener estimaciones hacia atrás insesgadas de z_T de esta ecuación por:

$$\hat{z}_T^{(j)} = \pi_j^{-1}\left(z_{T+j} - \sum_{i\neq j} \pi_i z_{T+t-i} \right)$$

con varianza $\frac{\sigma_a^2}{\pi_j^2}$. Como todas estas estimaciones son insesgadas condicionalmente e independientes dados los datos observados, la mejor estimación lineal insesgada para el valor faltante z_T será:

$$\hat{z}_T = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j^2}{\sum \pi_j^2} \hat{z}_T^{(j)}$$

Donde $\pi_0 = -1$. Esta estimación es equivalente a la expresión de estimación para valores faltantes de series estacionales gaussianas dada por: $E\left(z_T \middle| Z_{(T)}\right)$.

Este procedimiento también se puede generalizar para el caso de grupos de observaciones faltantes.

Si el caso fuese un proceso AR(1) en el cual los valores z_T y z_{T+1} son faltantes, el cálculo de los interpoladores óptimos procede de la siguiente manera:

Para z_T se tiene la estimación: $\hat{z}_T^{(0)} = \phi z_{T-1}$ con varianza σ_a^2 y como $z_{T+2} = \phi^2 z_T + \phi a_{T+1} + a_{T+2}$, se puede calcular el estimador hacia atrás: $\hat{z}_T^{(2)} = \phi^{-2} z_{T+2}$ con varianza $\frac{\sigma_a^2\left(1+\phi^2\right)}{\phi^4}$.

La mejor estimación lineal insesgada será:

$$\hat{z}_T = \frac{\phi\left(1+\phi^2\right)}{1+\phi^2+\phi^4} z_{T-1} + \frac{\phi^2}{1+\phi^2+\phi^4} z_{T+2}$$

En cuanto a la estimación de $\hat{z}_{T+1}$ tendrá una forma similar pero con los roles de z_{T-1} y de z_{T+2} intercambiados.

2.8.2. ESTIMACIÓN DE VALORES FALTANTES

El proceso visto anteriormente para encontrar el valor de los datos faltantes se utiliza cuando el número de valores faltantes es grande. Si el objetivo es estimar los parámetros del modelo, se puede aplicar la razón de máxima verosimilitud directamente a los datos observados.

En el caso de un AR(1), la función de verosimilitud calculada asumiendo que z_T es un dato faltante es fácil de obtener utilizando:

$$f\left(z_1,...z_{T-1},z_{T+1},...,z_n\right) = f\left(z_1\right)f\left(z_2/z_1\right)...f\left(z_{T+1}/z_{T-1}\right)f\left(z_{T+2}/z_{T+1}\right)...f\left(z_n/z_{n-1}\right)$$

Asumiendo normalidad y que el proceso es centrado y condicionado en la primera observación, la función de máxima verosimilitud condicional puede obtenerse fácilmente notando que para todo $t \geq 2$, $t \neq T$ se tiene que $f(z_t / z_{t-1})$ es también normal con parámetros $N(\phi^{\,2} z_{T-1}, \sigma^2(1+\phi^{\,2}))$.

Entonces la función a ser maximizada es:

$$l(\phi, \sigma^2 / z_1) = -\frac{(n-2)}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln(1+\phi^{\,2}) - \sum_{t\in A}\frac{(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_{T+1} - \phi^{\,2} z_{T-1})^2}{2\sigma^2(1+\phi^{\,2})}$$

Donde $A = \{1,2,...,T-1,T+2,...,n\}$. Si se compara con una serie que no tenga datos faltantes pero que tenga un atípico aditivo en el tiempo T, el modelo puede ser escrito como: $z_t = \phi z_{t-1} + \omega I_t^{(T)} - \phi\omega I_{t-1}^{(T)} + a_t$.

La función de máxima verosimilitud sería:

$$l(\omega, \phi, \sigma^2 / z_1) = -\frac{(n-1)}{2}\ln\sigma^2 - \sum_{t\in A}\frac{(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_T - \phi z_{T-1} - \omega)^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_{T+1} - \phi(z_T - \omega))^2}{2\sigma^2}$$

Esta estimación se puede hacer en dos pasos. En el primero, se condiciona ϕ y se obtiene la estimación de ω dado ϕ. Diferenciando con respecto a ω e igualando a cero, se obtiene:

$$(z_T - \phi z_{T-1} - \omega) = (z_{T+1} - \phi(z_T - \omega))\phi$$

Lo que conduce a: $\hat{\omega} = z_T - \frac{\phi}{(1+\phi^{\,2})}(z_{T+1} + z_{T-1})$.

Se debe notar que esta estimación puede ser interpretada como la diferencia entre el valor observado y su interpolador óptimo.

Es decir: $l(\phi, \sigma^2 / z_1) = -\frac{(n-1)}{2}\ln\sigma^2 - \sum_{t\in A}\frac{(z_t - \phi z_{t-1})^2}{2\sigma^2} - \frac{(z_{T+1} - \phi^{\,2} z_{T-1})^2}{2\sigma^2(1+\phi^{\,2})}$

Como se pudo observar con el ejemplo, la función de máxima verosimilitud para estimación de valores perdidos será similar a la función de máxima verosimilitud de un modelo que llena los huecos de la serie con valores arbitrarios y luego asume que son atípicos aditivos en estos puntos. Esta relación fue encontrada

por Peña en 1987. Esta relación sugiere un procedimiento simple para estimar los valores faltantes en las series temporales.

Llenar los huecos con valores arbitrarios y asumir atípicos aditivos en las posiciones de los datos faltantes. Las estimaciones de los parámetros obtenidos del modelo del análisis de intervención son las estimaciones de los parámetros para las series con valores faltantes y la estimación de los valores faltantes son las estimaciones de los tamaños de los atípicos aditivos con signo opuesto.

Se puede generalizar $\hat{\omega} = z_T - \frac{\phi}{\left(1+\phi^2\right)}\left(z_{T+1} + z_{T-1}\right)$ con $\hat{\omega} = z_T - \hat{z}_{T/R}$

Donde: $\hat{z}_{T/R} = E\left(z_T /,...,z_{T-1}, z_{T+1},...,z_n\right)$ es el interpolador óptimo. Sin embargo, si $z_T = 0$ se tiene que $\hat{\omega} = -\hat{z}_{T/R}$.[19]

[19] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

CAPITULO 3. APLICACIONES A DATOS DE UNA EMPRESA DE VENTA DIRECTA

En el entorno empresarial, el manejo de las ventas es primordial. En algunas empresas, el comportamiento de sus ventas es monótono por lo que el problema de pronosticar los valores futuros no constituye un gran inconveniente.

Sin embargo, en las empresas de venta directa, el comportamiento de las ventas está influenciado por la existencia de ofertas y promociones por campañas. En otras ocasiones se quitan de los catálogos ciertos productos, debido a estrategias comerciales, lo que genera datos faltantes y contradictorios en las series temporales.

Estos datos producen malas estimaciones de modelos y por consiguiente malos pronósticos de ventas. Por lo tanto es necesario realizar diferentes análisis para conseguir validez en los pronósticos.

El presente capítulo presenta la aplicación de diferentes paquetes estadísticos para realizar análisis y pronósticos a las series temporales. Los datos que se van a utilizar en las aplicaciones se refieren a valores de unidades vendidas de productos cosméticos.

La mayoría de paquetes estadísticos utilizan de alguna manera métodos automáticos de modelización. Por este motivo, se considera ligeramente sus pruebas y procedimientos.

El método más conocido fue desarrollado por Box-Jenkins en 1976 y se basa en la inspección de datos, así como en sus correspondientes gráficos de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial. Funciona perfectamente para procesos autorregresivos y de media móvil puros; sin embargo, cuando se trata modelos ARMA no es tan efectivo.

Sea el modelo general:

$$\phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D z_t = C + \theta(B)\Theta(B^s)a_t$$

Donde:

C es una constante, s es el orden de la estacionalidad, ∇ corresponde a la diferencia regular, $\nabla_s = 1 - B^s$ es la diferencia estacional.

Usualmente los grados de los polinomios $\phi(B)$ y $\Phi(B^s)$ son llamados p y P respectivamente. De igual manera, los grados de $\theta(B)$ y $\Theta(B^s)$ son q y Q.

El primer análisis que se realiza corresponde a la obtención de los grados de diferenciación d.

Existen dos formas de realizar este análisis:

- Observación de la función de autocorrelación (informal);
- Realizando la prueba de raíces unitarias(formal).

Observación de la función de autocorrelación

Inicialmente se debe observar la representación de la serie temporal. Si existe algún valor en torno al cual la serie oscila pero sin alejarse de forma permanente de dicho valor, entonces se puede decir que $d = 0$; es decir, que la serie es estacionaria en media.

Si la serie tiene una representación similar a la presentada en la Figura 3.1, significa que debe ser diferenciada para convertirse en estacionaria.

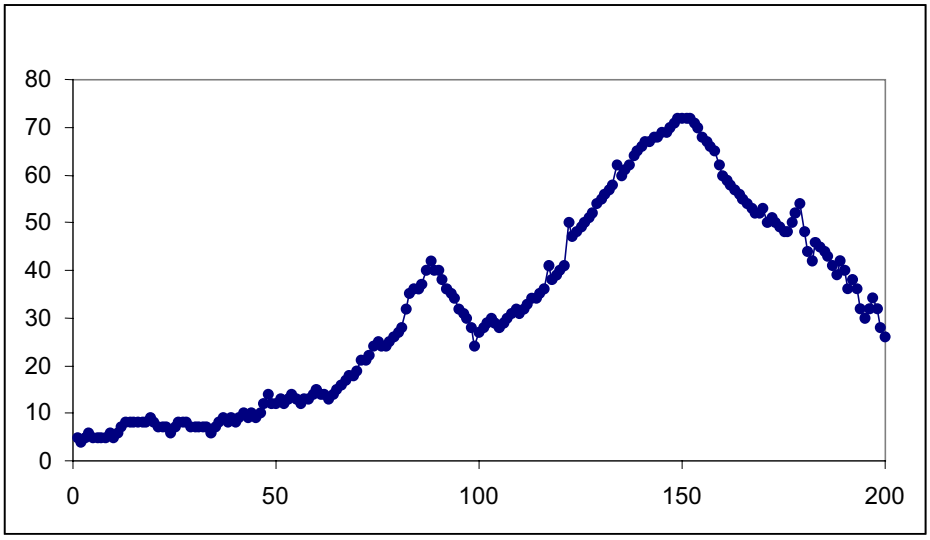


Figura 3.1: Representación de una serie temporal no estacionaria.

Fuente: "Introduction to Time Series and Forecasting", Brockwell P, Davis R, Springer, Segunda Edición

Para ratificar esto, se debe observar la función de autocorrelación, y si ésta va decayendo en forma continua pero lentamente, es una señal clara de que la serie necesita ser diferenciada, como se puede ver en la Figura 3.2:

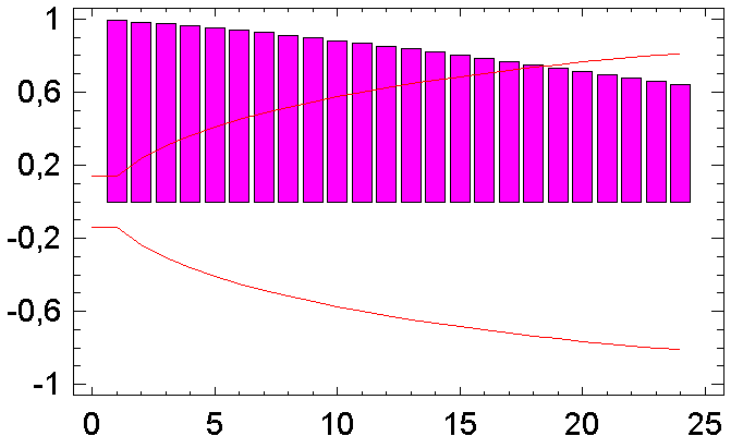


Figura 3.2: Función de Autocorrelación

Fuente: "Introduction to Time Series and Forecasting", Brockwell P, Davis R, Springer, Segunda Edición

Prueba de las raíces unitarias

Sea la serie temporal: $\phi(B)\nabla^d y_t = \Theta(B)a_t$ se dice que tiene d raíces unitarias si $w_t = \nabla^d y_t$ es estacionaria.

El problema de las raíces unitarias se da cuando existe una raíz muy cerca o dentro del círculo unidad en la parte autorregresiva o en la parte media móvil.

Por ejemplo, cuando existe una raíz cercana a 1 en el polinomio autorregresivo, este sugiere la necesidad de diferenciación; si la raíz cercana a 1 está en el polinomio media móvil, usualmente indica que la serie ha sido sobrediferenciada; es decir, que el valor de d está sobreestimado y debe bajarse.

Para esto se debe realizar la prueba de las raíces unitarias la cual corresponde a un proceso formal para establecer la necesidad de diferenciación que tenga una serie temporal.

Sean $X_1,...,X_n$ las observaciones de un modelo AR(1) tal que:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + Z_t \quad con \quad Z_t \;\; N(0,\sigma^2)$$

donde $|\phi_1| < 1$ y $\mu = EX_t$.

La prueba de hipótesis para la existencia de una raíz unitaria es:

$$H_0 : \phi_1 = 1$$
$$H_1 : \phi_1 < 1$$

$$\nabla X_t = \phi_0^* + \phi_1^* X_{t-1} + Z_t$$

donde $\phi_0^* = \mu(1-\phi_1)$, $\phi_1^* = \phi_1 - 1$ y $Z_t \;\; N(0,\sigma^2)$

El error estándar estimado de $\hat{\phi}_1^*$ es:

$$\hat{SE}\left(\hat{\phi}_1^*\right) = S\left(\sum_{t=2}^{n}\left(X_{t-1}-\overline{X}\right)^2\right)^{-1/2}$$

donde: $S^2 = \dfrac{\sum_{t=2}^{n}\left(\nabla X_t - \hat{\phi}_0^* - \hat{\phi}_1^* X_{t-1}\right)^2}{n-3}$

Dickey y Fuller propusieron la distribución límite, bajo la hipótesis nula, cuando $n \to \infty$ de $\hat{\tau}_\mu := \dfrac{\hat{\phi}_1^*}{\hat{SE}\left(\hat{\phi}_1^*\right)}$, que tiene los valores –3.43, -2.86 y –2.57 para los cuantiles 0.01, 0.05 y 0.10.

La hipótesis nula se rechaza al nivel 0.05 si $\hat{\tau}_\mu < -2.86$.

Para modelos AR(p) el modelo es:

$$X_t - \mu = \phi_1\left(X_{t-1}-\mu\right) + \ldots + \phi_p\left(X_{t-p}-\mu\right) + Z_t, \quad con \quad Z_t \quad N\left(0,\sigma^2\right)$$

que también puede ser escrito como:

$$\nabla X_t = \phi_0^* + \phi_1^* X_{t-1} + \phi_2^* \nabla X_{t-1} + \ldots + \phi_p^* \nabla X_{t-p+1} + Z_t$$

donde $\phi_0 = \mu\left(1-\phi_1-\ldots-\phi_p\right), \quad \phi_1^* = \sum_{i=1}^{p}\phi_i - 1, \quad \phi_j^* = \sum_{i=j}^{p}\phi_i, \quad j = 2,\ldots,p$

Para el caso anterior, la representación de la función de autocorrelación parcial de la Figura 3.3, sugiere la posibilidad de ajuste a un AR(2) o un AR(3).

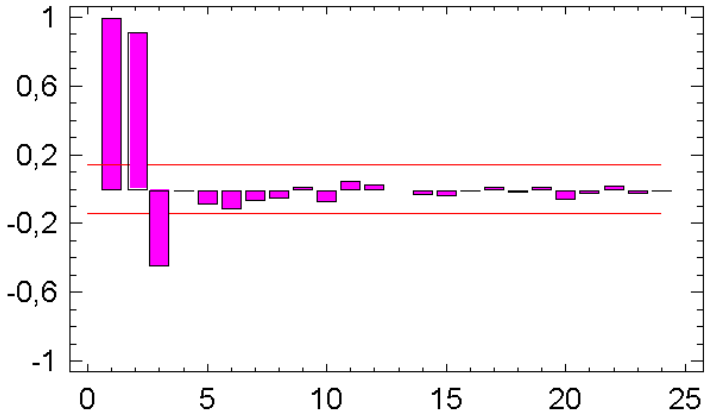


Figura 3.3: Función de autocorrelación parcial

Fuente: "Introduction to Time Series and Forecasting", Brockwell P, Davis R, Springer, Segunda Edición

Realizando la regresión de ∇X_t con: 1, X_{t-1}, ∇X_{t-1}, ∇X_{t-2} desde $t=4$, se obtiene:

$$\nabla X_t = \underset{(0.1135)}{0.1503} - \underset{(0.0028)}{0.0041} X_{t-1} + \underset{(0.0707)}{0.9335} \nabla X_{t-1} - \underset{(0.0708)}{0.1548} \nabla X_{t-2} + Z_t$$

El estadístico de prueba para la presencia de una raíz unitaria es:

$$\hat{\tau}_{\mu} = \frac{-0.0041}{0.0028} = -1.464$$

Como –1.464 > -2.57, la hipótesis de la existencia de una raíz unitaria se acepta, bajo los niveles habituales, del 10%, 5% y 1% de significancia.

Funciones de penalización

Una vez que se han obtenido los órdenes d y D respectivamente, se procede a determinar los órdenes k, i del proceso $ARMA(k,i)$ producto de la diferenciación anterior.

Se debe minimizar la función:

$$P(k,i) = \ln\left(\hat{\sigma}_{k,i}\right)^2 + (k+i)\frac{C(n)}{n}, \quad k \le K, \quad i \le I$$

Donde:

$\left(\hat{\sigma}_{k,i}\right)^2$ es la estimación de la varianza del ruido blanco por máxima verosimilitud, $C(n)$ es una función del número de observaciones n de la serie temporal, K e I son los límites superiores de los órdenes que normalmente se imponen a priori.

Si $C(n)$ se reemplaza por 2, se obtiene el Criterio de Akaike (AIC); si se reemplaza por $\ln n$, se obtiene el llamado Criterio Bayesiano (BIC); si se reemplaza por $2\ln(\ln n)$, se obtiene el llamado Criterio de Hannan y Quinn (HQ).

Estos criterios ayudan a observar cuál o cuáles de los modelos planteados se ajusta más a los datos disponibles.

Modelos de identificación

Desde 1980, algunos métodos han sido aplicados para determinar los órdenes de los procesos ARMA que utilizan las ecuaciones de Yule – Walker.

Para el proceso: $z_t + \phi_1 z_{t-1} + ... + \phi_p z_{t-p} = C + a_t + \theta_1 a_{t-1} + ... + \theta_q a_{t-q}$, las ecuaciones mencionadas son: $\gamma_j = -\phi_1 \gamma_{j-1} - ... - \phi_p \gamma_{j-p}, \qquad j = q+1, q+2, ...$

Donde γ_j, es la función de autocovarianza del proceso.

Entre los métodos de identificación están: Método del borde de Bebuin (1980), de autocorrelación extendida de Tsay y Tiao(1984), de la Correlación Canónica de Tsay y Tiao (1985) y de Choi (1992).[20]

Herramientas automáticas para la identificación de modelos

Prueba de logaritmos

Esta prueba se basa en la estimación por máxima verosimilitud del parámetro λ en la transformación de Box-Cox, que se define por:

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{\left(Y_t^{\lambda} - 1\right)}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln Y_t & \lambda = 0 \end{cases}$$

Sea $w = (w_1, ..., w_n)'$ la serie diferenciada y sea T la transformación de Box-Cox hecha a los datos. $T(w)$ sigue una distribución normal de media 0 y de varianza $Var(T(w)) = \sigma^2 \sum$.

El logaritmo de la función de densidad $f(w)$ es:

[20] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

$$\ln\left(f\left(w\right)\right)=k-\frac{1}{2}\left\{n\ln\left(\sigma^{2}\right)+\ln\left|\sum\right|+T\left(w\right)'\sum^{-1}T\left(w\right)/\sigma^{2}+\ln\left(\frac{1}{J\left(T\right)}\right)^{2}\right\}$$

donde k es una constante y $J\left(T\right)$ es el Jacobiano de la transformación.

La función de densidad es maximizada y σ^{2} debe ser reemplazada por el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\sigma}^{2}=T\left(w\right)'\sum^{-1}T\left(w\right)/n.$

La función concentrada es:

$$l\left(w\right)=-\frac{1}{2}\left\{n\ln\left(T\left(w\right)'\sum^{-1}T\left(w\right)\right)+\ln\left|\sum\right|+\ln\left(\frac{1}{J\left(T\right)}\right)^{2}\right\}+...,$$

donde los puntos indican términos que no dependen de los parámetros del modelo.

Después de maximizar con respecto a todos los parámetros diferentes de λ, se maximiza con respecto a λ.

Sea $\sum=LL'$, donde L es la matriz triangular inferior de la transformación de Cholesky. Entonces la expresión $T\left(w\right)'\sum^{-1}T\left(w\right)\left|\sum\right|^{1/n}=\left|L\right|^{1/n}T\left(w\right)'\sum^{-1}T\left(w\right)\left|L\right|^{1/n}$ es una suma de cuadrados no lineal que se denota por $S\left(w,T\right)$.

El principio de máxima verosimilitud lleva a la minimización de $S\left(w,T\right)\left(1/J\left(T\right)\right)^{1/n}$. El término $\left(1/J\left(T\right)\right)^{1/n}$ es la media geométrica en el caso de la transformación logarítmica y la unidad en el caso de no existir trasformación.

Es decir, la prueba compara la suma de cuadrados sin logaritmos y la suma de cuadrados multiplicados con la suma de la media geométrica en el caso de existir logaritmos. Los logaritmos deben ser tomados en el caso de que esta función sea mínima.[21]

[21] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

Técnicas de regresión para estimar raíces unitarias

Sea la serie: $\phi(B)(\delta(B)z_t - \mu) = \theta(B)a_t$

Donde a_t sigue una distribución normal de media 0 y de varianza σ^2, $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_q B^q$, $\phi(B) = 1 + \phi_1 B + ... + \phi_p B^p$ y $\delta(B) = 1 + \delta_1 B + ... + \delta_d B^d$.

El algoritmo que se utiliza para identificar el polinomio de diferenciación es el siguiente:

1. Especificar el modelo de la forma $(1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2)(1 + \phi B^s)(z_t - \mu) = a_t$ si es estacional multiplicativo, o un proceso AR(2) con media. Este proceso autorregresivo se estima con el método HR el cual se detalla posteriormente. Si las raíces estimadas con el método HR caen fuera del círculo unidad, la autorregresión se estima nuevamente utilizando mínimos cuadrados. Una raíz se considera unitaria si su módulo es mayor que un valor específico, que por defecto es 0.97.
2. Se especifica un modelo de forma ARMA$(1,1)$x$(1,1)_s$ para procesos estacionales o un modelo ARMA$(1,1)$ para modelos no estacionales. El modelo es estimado utilizando el Método HR o el de máxima verosimilitud, dependiendo del usuario y si alguno de los parámetros autorregresivos estimados es cercano a uno, el grado de diferenciación se incrementa en uno. Un parámetro se considera cercano a 1 si su módulo es mayor que 0.88. Para evitar la cancelación de términos en el modelo, el valor absoluto de la diferencia entre cada parámetro autorregresivo y su correspondiente parámetro de media móvil debe ser mayor que 0.15.
3. Utilizando los residuos del último modelo estimado se decide cuando especificar la media del modelo o dependiendo de la significancia de la media residual estimada.

Método de Hannan-Rissanen

El Método de Hannan-Rissanen (HR) es un método de penalización basado en el Criterio Bayesiano (BIC), en el cual las estimaciones de los parámetros del modelo se calculan por medio de regresiones lineales.

Sea $z_t = (z_1,...,z_n)'$ la serie observada que sigue el modelo $\phi(B)(\delta(B)z_t - \mu) = \theta(B)a_t$ en el que por simplicidad,se asume que $\mu = 0$.

Una vez que $\delta(B)$ haya sido identificado, se debe calcular la serie diferenciada $w_t = \delta(B)z_t$, $t = d+1,...,n$, que sigue un modelo ARMA(p,q).

Si los órdenes del modelo son (p,q) el estadístico BIC es:

$$BIC_{p,q} = \log(\hat{\sigma}^2_{p,q}) + (p+q)\frac{\log(n-d)}{n-d}$$

donde $\hat{\sigma}^2_{p,q}$ es el estimador de máxima verosimilitud de la varianza. El criterio BIC estima los órdenes (p,q) seleccionando aquellos $(\hat{p},\hat{q})$ que minimizan la función anterior.

Hannan y Rissanen propusieron una estimación utilizando regresiones lineales en dos pasos:

1) Si la serie tiene una parte media móvil, se estiman las innovaciones del proceso a_t mediante ajustes a un modelo largo autorregresivo. Es decir, dado un entero positivo grande N, $\hat{a}_t$ se calcula mediante:

$$\hat{a}_t = \sum_{j=0}^{N} \hat{\phi}_N(j) w_{t-j}, \qquad \hat{\phi}_N(0) = 1, \qquad t \geq 1$$

2) Dados los órdenes (p,q), se estiman los parámetros del modelo $\phi(B)w_t = \theta(B)a_t$ minimizando la función:

$$S(p,q) = \sum_{t=m}^{n-d} \left\{ \sum_{j=0}^{p} \phi_j w_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \hat{a}_{t-j} \right\}^2$$

donde $m = \max\{p+1, q+1\}$ y $\phi_0 = 1$.

Posteriormente se calcula el estimador $\hat{\sigma}^2_{p,q}$ mediante la fórmula: $\hat{\sigma}^2_{p,q} = \frac{S(p,q)}{(n-d)}$

y también el criterio bayesiano.

El modelo escogido es un modelo ARMA$(\tilde{p},\tilde{q})$para el cual su respectivo $BIC_{\tilde{p},\tilde{q}}$ es el más pequeño de los ARMA(p,q) posibles.[22]

Algoritmo para la identificación automática de modelos en presencia de atípicos

El algoritmo a seguir es el siguiente:

1. Si el usuario desea, puede realizar la prueba de logaritmos a las series.
2. Si el usuario desea corregir valores atípicos, debe especificar el modelo a utilizar e ir al paso 5. De otra manera, debe ir al paso 3. El valor crítico C para la detección de atípicos puede ser a gusto del usuario o especificado en el procedimiento, dependiendo de la longitud de la serie.
3. Si el usuario ha especificado el orden de diferenciación y la existencia o no de media en el proceso, ir al paso 4. De otra manera, se debe corregir la serie de los efectos regresivos que pueda tener. Posteriormente utilizando la serie corregida, el orden de diferenciación se obtiene automáticamente, así como la existencia de la media del proceso. Ir al paso 4.
4. Se realiza la identificación automática del modelo ARMA(p,q) para la serie diferenciada, corregida de sus atípicos y efectos si existieran. Si se desea realizar corrección de atípicos debe ir al paso 5; de otra manera aquí debería parar.
5. Asumiendo que el modelo es conocido, se realiza la detección y corrección automática de atípicos utilizando el valor crítico C.

[22] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

En el caso de existir datos faltantes, estos son tratados como atípicos aditivos. Esto significa que se puede trabajar con la serie completa ya que se asignan valores tentativos a los valores faltantes de la serie. Posteriormente, una vez que el modelo ha sido estimado, la diferencia entre el valor tentativo y el coeficiente estimado por regresión son interpolados. [23]

3.1. INTRODUCCIÓN AL MANEJO DE DEMETRA 2.0

El paquete estadístico Demetra 2.0 es de origen español y ha sido escogido debido a que sus procesos se basan en la metodología TRAMO-SEATS (Time series regresión with ARIMA noise, Missing observations and Outliers) y (Signal extraction in ARIMA Time Series).

Este paquete ajusta las series a modelos ARIMA$(p,d,q),(P,D,Q)_S$; es decir, las partes autorregresivas y de media móvil para las componentes regular y estacional.

Los pasos a seguir son:

1. Escoger la serie a estudiar;
2. Escoger los datos que se desean guardar;
3. Escoger los métodos a utilizar.

Una vez que se ha ingresado al programa, se deben leer los datos y escoger la manera como se desea realizar el análisis. Para esto se tienen las opciones:

- Automated Module;
- Detailed Analysis Module.

Cualquiera sea nuestra elección, se procede:

- A leer los datos, para lo cual se puede escoger entre varios formatos: Excel, SAS, etc;

[23] "A Course in Time Series Analysis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canadá, 2001.

- Una vez que se han traído los datos, se observa en la pantalla el nombre de la serie, el número de observaciones, el tiempo que dura la misma y la ubicación desde donde se leen los datos;

- Posteriormente, se deben especificar todos los cálculos que se desean realizar, como: coeficientes, residuos, componentes, previsiones y el respectivo archivo donde se guardan los cálculos realizados;

- Se deben especificar las pruebas residuales que se desean hacer, así como también, los niveles de significancia para rechazo de pruebas de hipótesis.

A continuación, se procede a realizar el análisis de la serie, de manera automática o de manera manual.

Posteriormente se debe:

- Escoger el método de ajuste estacional: Tramo – Seats o X-12-ARIMA;
- Iniciar el proceso.

Cuando el proceso haya finalizado, se tendrá una pantalla dividida en cuatro paneles:

- En el panel superior izquierdo, se encuentra la serie aceptada o rechazada, con un resumen de los resultados obtenidos para el modelo encontrado para la misma;
- En el panel inferior izquierdo, está la gráfica de la serie, que puede ser cambiada por otros gráficos tales como: residuos, tendencias, atípicos, etc;

- En el panel superior derecho, está la información de los modelos: coeficientes, intervalos de confianza, etc;

- En el panel inferior derecho, están los estadísticos de las pruebas realizadas a los residuos, incluyendo una conclusión del modelo con respecto a las mismas.

En la parte superior del menú, existe un símbolo de un árbol, el cual procede a desestacionalizar la serie tratada, para el caso de hacerlo manualmente.

Normalmente las predicciones son lo que más interesa, las que se encuentran en un archivo denominado “Log File”. Este archivo contiene todos los cálculos realizados durante la corrida del programa.

3.2. APLICACIONES CON DEMETRA 2.0

Los datos que se van a utilizar en el presente análisis, corresponden a las unidades vendidas de un producto cosmético perteneciente a Yanbal Ecuador S.A. Los datos se presentan en la Tabla 3.1, donde las casillas coloreadas corresponden a los valores que deben ser pronosticados.

	96	97	98	99	00	01	02	03	04
Ene			9317	5530	1535	1409	1745	543	501
Feb		7379	2977	2293	1492	11621	18113	9206	8194
Mar			11742	2785	3318	4968	8739	1778	1609
Abr	4670	13594	4689	2199	2044	11219	14949	24013	12097
May	3079	2647	2591	3925	4877	4261	1853	1686	6161
Jun	7815	10143	17781	11613	5262	15560	4316	19580	9515
Jul	3871	3042	7223	2443	3979	7918	57192	9608	7502
Ago	1457	13581	1180	9248	7286	10519	8751	5019	4986
Sep	3669	4201	4230	5971	4246	8375	6260	5871	6200
Oct		11044	4981	1120	38583	3844	32565	7834	6896
Nov	4304	10655	19580	6174	7284	8143	13614	3696	5864
Dic	2050	5476	8836	562	6175	6489	36909	84572	20548

Tabla 3.1: Datos de ventas de Cosmético2

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se realizó una corrida del programa Demetra 2.0, utilizando estos datos, con objeto de analizar si es posible encontrar mejores pronósticos.

La Figura 3.4 representa la salida que proporciona el paquete cuando los datos han sido ingresados correctamente.

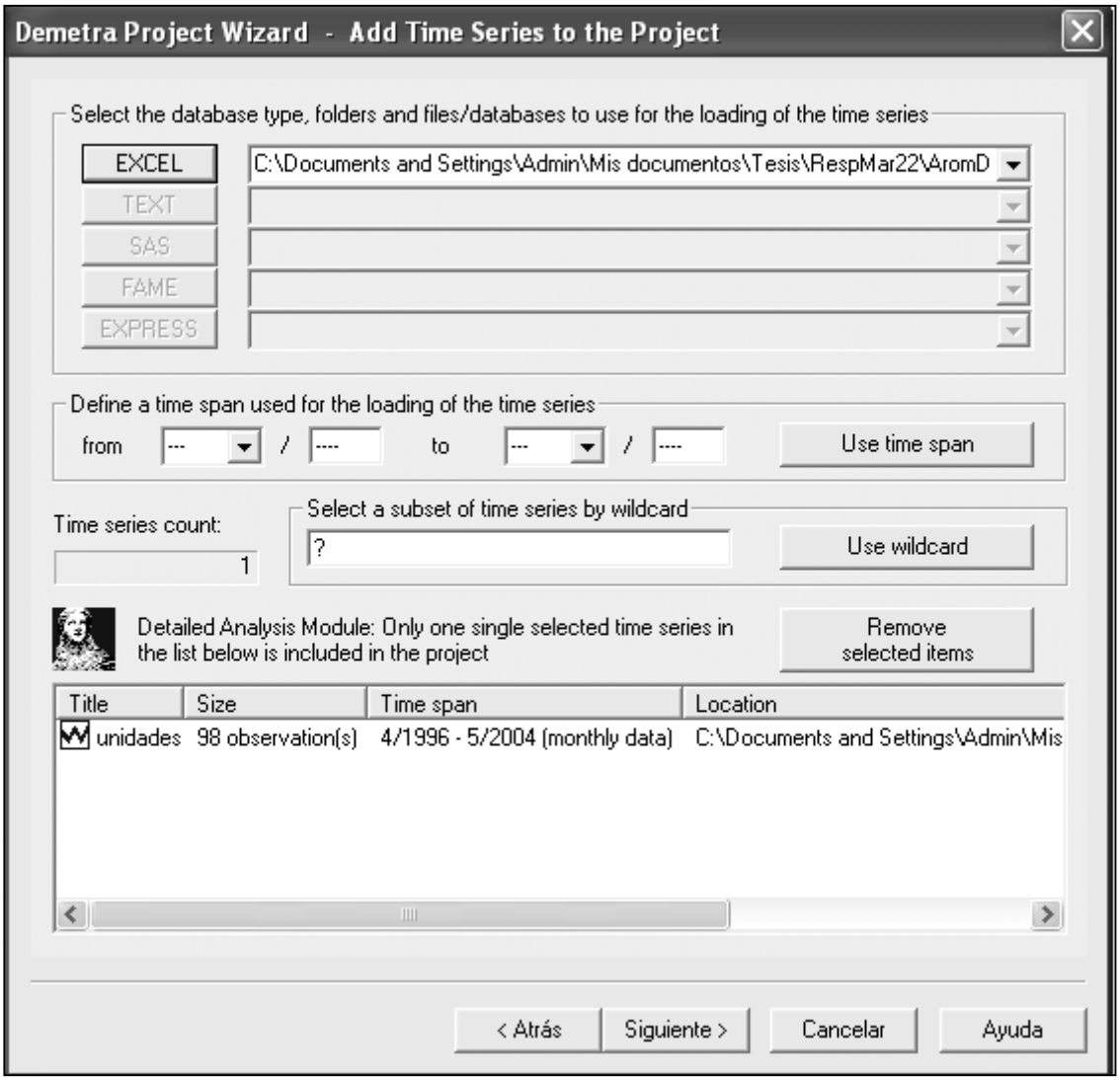


Figura 3.4: Pantalla de lectura de datos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Posteriormente se escogen los cálculos que se desea sean realizados por el paquete; en este caso, la tendencia, la serie ajustada, sus respectivos pronósticos, atípicos, etc. Los cálculos requeridos se pueden observar en la Figura 3.5.

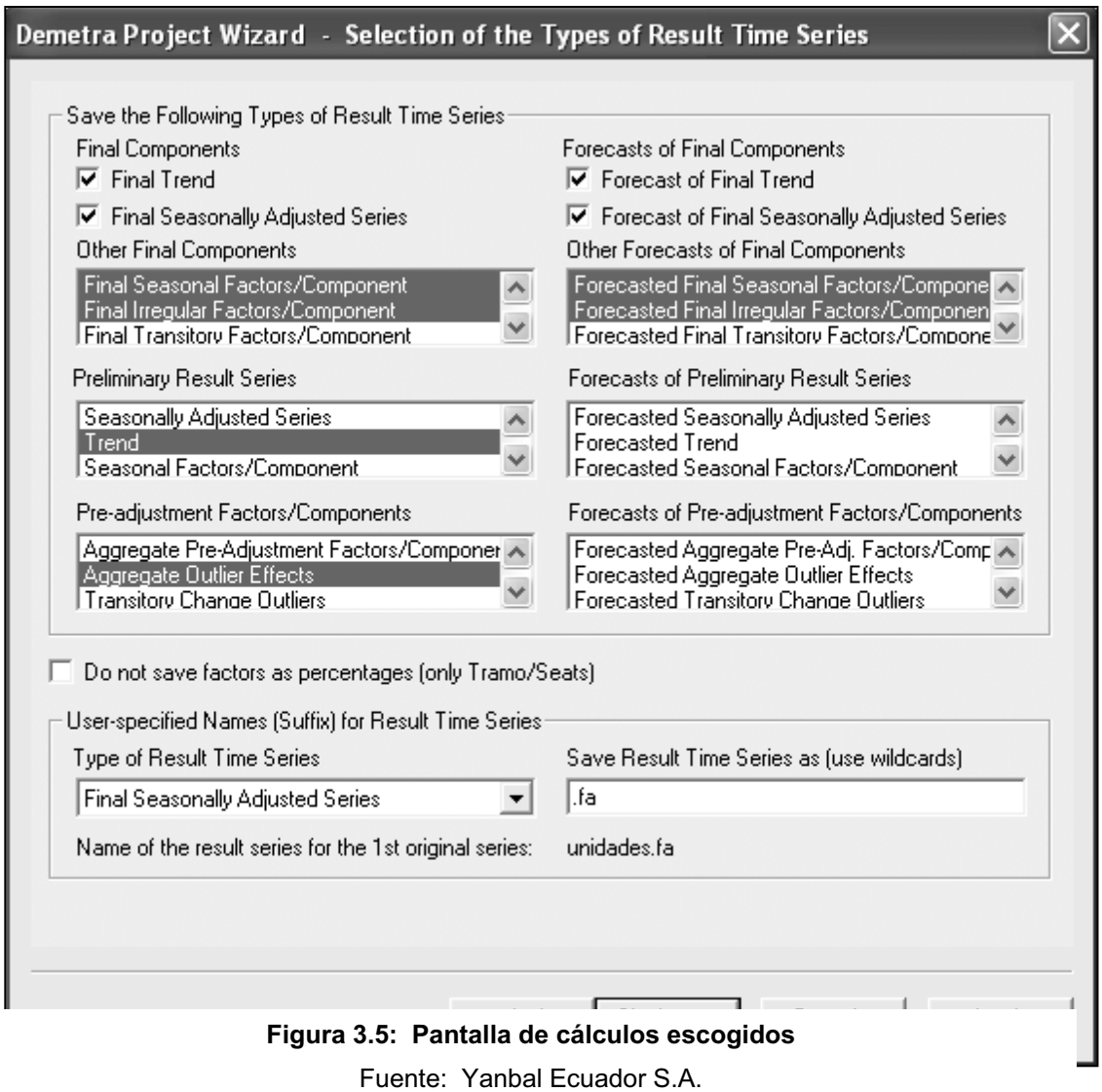


Figura 3.5: Pantalla de cálculos escogidos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se revisan todos los estadísticos que se utilizan para el ajuste, como es el caso de Box-Pierce, Ljung-Box y especificaciones en cuanto a número máximo de atípicos que nos permitan aceptar modelos. La salida de paquete se muestra en la Figura 3.6.

Como se puede ver en la pantalla, el usuario puede cambiar los niveles de las pruebas a su gusto, lo cual no es recomendable debido a que se puede admitir por ejemplo un gran porcentaje de valores atípicos, lo cual afectaría la validez del modelo.

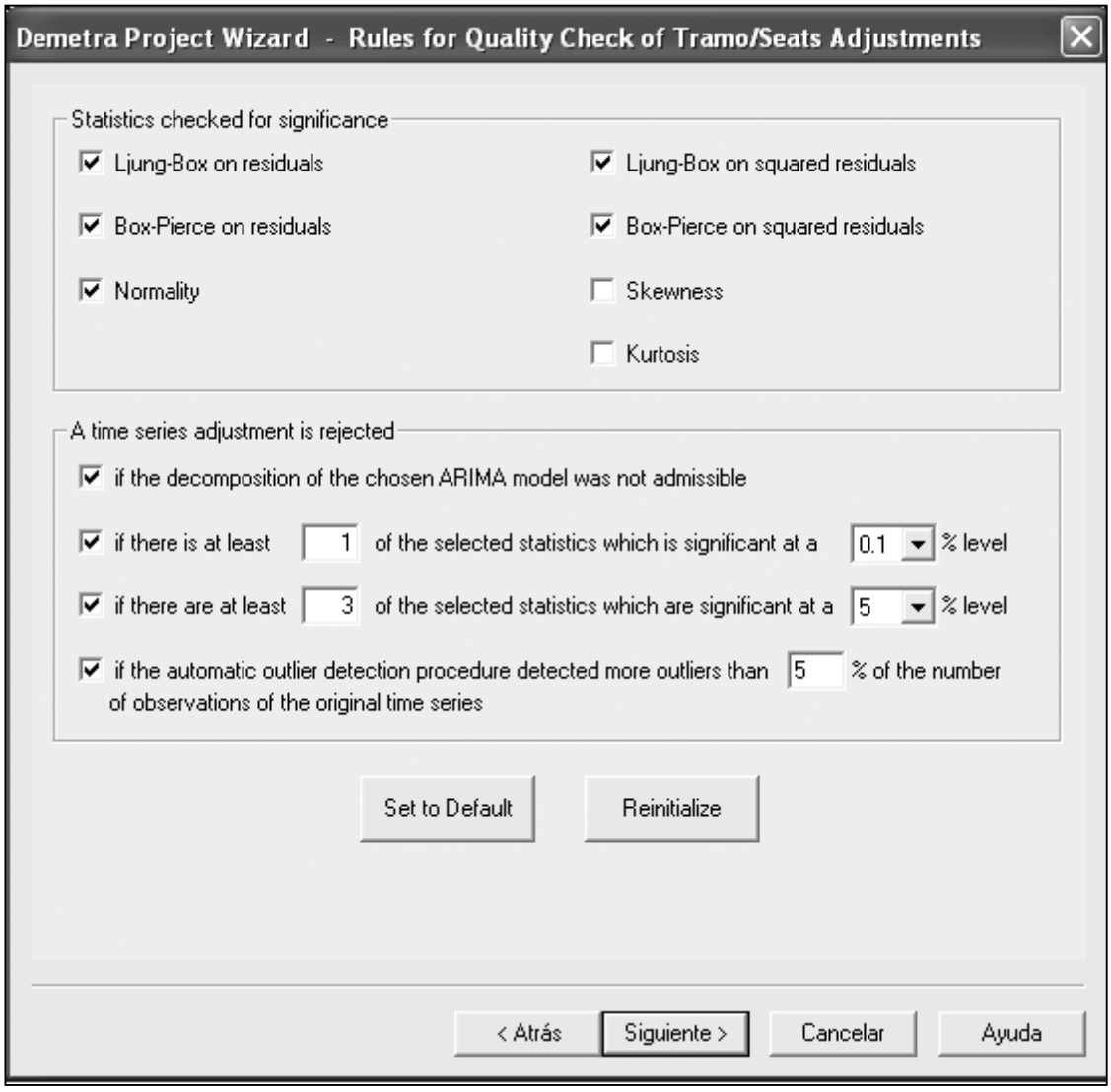


Figura 3.6: Selección de niveles de significancia

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se debe iniciar el proceso de ajuste, y una vez terminado el proceso, aparece una pantalla que contiene elementos importantes para el analista, y se encuentra dividida en cuatro secciones.

La sección izquierda es normalmente utilizada para especificar parámetros sobresalientes de los modelos, cuando estos ya han sido encontrados, así como también para gráficos de la serie estudiada, aspecto que se puede apreciar en la Figura 3.7.

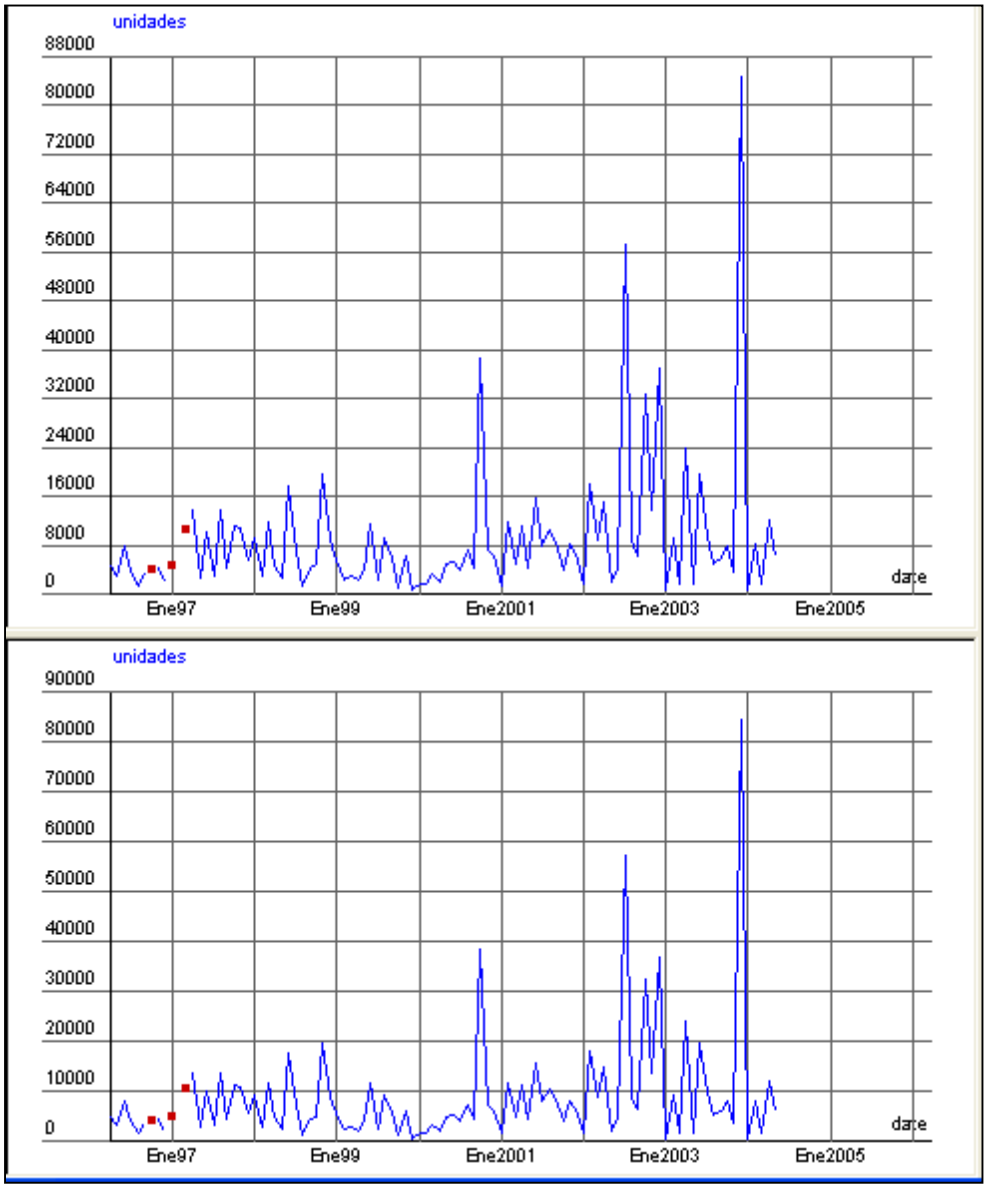
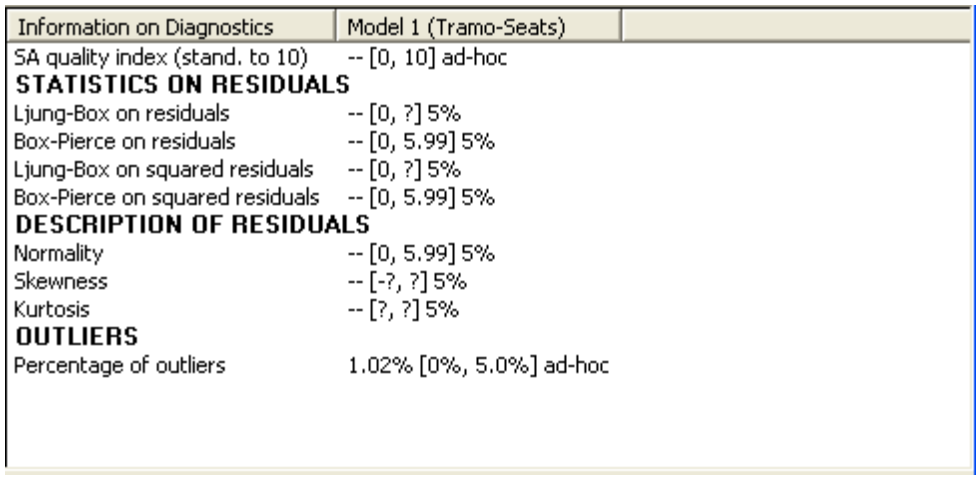


Figura 3.7: Sección izquierda del panel de resultados

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la sección superior derecha se encuentran todos los aspectos del análisis a priori realizado a la serie tales como existencia de valores faltantes, valores atípicos y la categoría a la que pertenecen, transformaciones logarítmicas, corrección de media del proceso, modelos encontrados y la existencia de estacionalidad si fuera el caso. La representación de la misma se encuentra en la Figura 3.8.

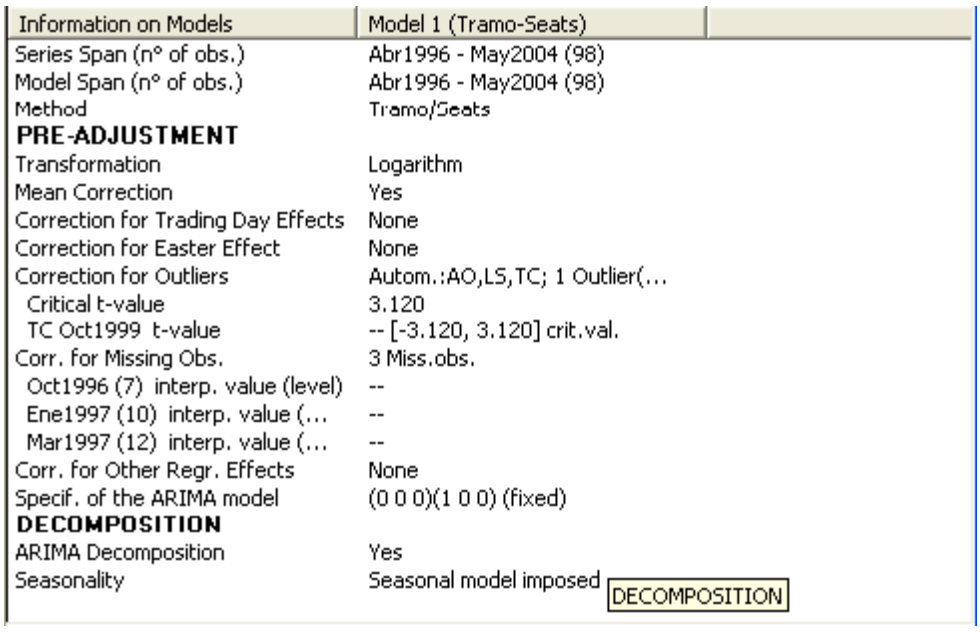


Information on Diagnostics	Model 1 (Tramo-Seats)
SA quality index (stand. to 10)	-- [0, 10] ad-hoc
STATISTICS ON RESIDUALS	
Ljung-Box on residuals	-- [0, ?] 5%
Box-Pierce on residuals	-- [0, 5.99] 5%
Ljung-Box on squared residuals	-- [0, ?] 5%
Box-Pierce on squared residuals	-- [0, 5.99] 5%
DESCRIPTION OF RESIDUALS	
Normality	-- [0, 5.99] 5%
Skewness	-- [-?, ?] 5%
Kurtosis	-- [?, ?] 5%
OUTLIERS	
Percentage of outliers	1.02% [0%, 5.0%] ad-hoc

Figura 3.8: Sección superior derecha del panel

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la sección inferior derecha se encuentra la información con respecto a las pruebas realizadas a los residuos, los intervalos de confianza y el porcentaje de atípicos encontrados en la serie temporal. La representación de la misma se encuentra en la Figura 3.9.



Information on Models	Model 1 (Tramo-Seats)
Series Span (n° of obs.)	Abr1996 - May2004 (98)
Model Span (n° of obs.)	Abr1996 - May2004 (98)
Method	Tramo/Seats
PRE-ADJUSTMENT	
Transformation	Logarithm
Mean Correction	Yes
Correction for Trading Day Effects	None
Correction for Easter Effect	None
Correction for Outliers	Autom.:AO,LS,TC; 1 Outlier(...
Critical t-value	3.120
TC Oct1999 t-value	-- [-3.120, 3.120] crit.val.
Corr. for Missing Obs.	3 Miss.obs.
Oct1996 (7) interp. value (level)	--
Ene1997 (10) interp. value (...	--
Mar1997 (12) interp. value (...	--
Corr. for Other Regr. Effects	None
Specif. of the ARIMA model	(0 0 0)(1 0 0) (fixed)
DECOMPOSITION	
ARIMA Decomposition	Yes
Seasonality	Seasonal model imposed

DECOMPOSITION

Figura 3.9: Sección inferior derecha del panel

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Como se puede observar, la serie aún no ha sido estudiada completamente y debe ser desestacionalizada para que se pueda analizar sus componentes. Para esto se debe presionar el símbolo de forma de árbol del menú y aparecerá la pantalla que se presenta en la Figura 3.10.

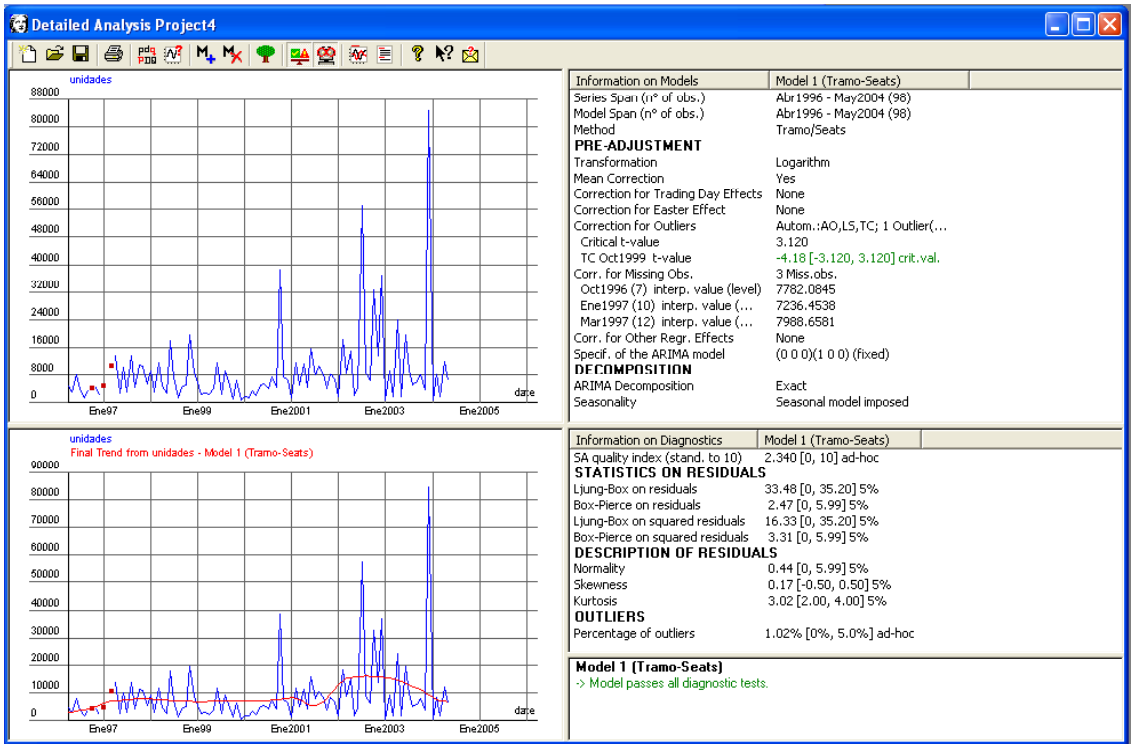


Figura 3.10: Resultado de la desestacionalización de la serie

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Por medio de los paneles de la sección izquierda se puede observar cada uno de los gráficos que se encuentren disponibles tales como:

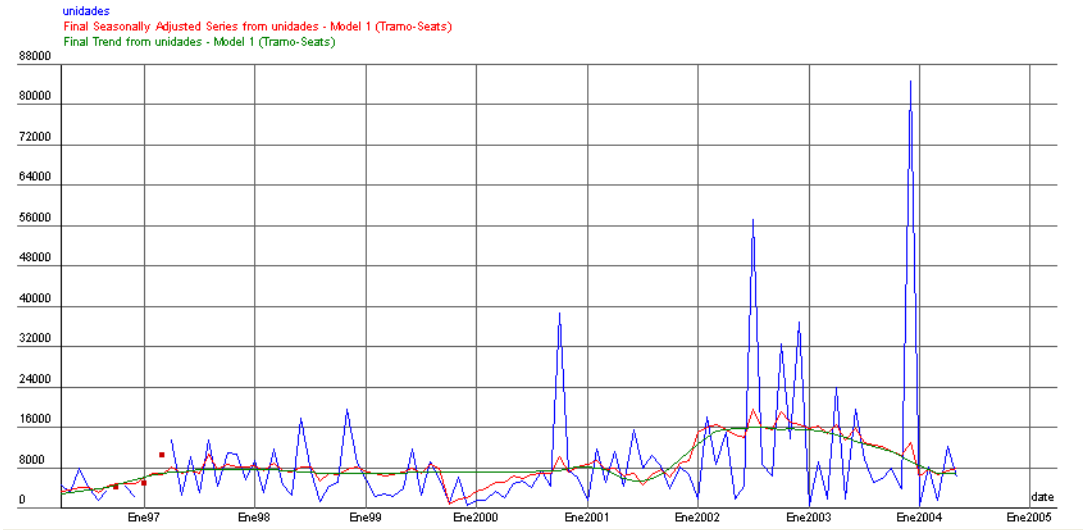


Figura 3.11: Gráfico de la serie, su tendencia y el ajuste estacional

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la Figura 3.11 se puede observar que la serie ha sido descompuesta en su tendencia, componente estacional y residuos, los que se presentan en la Figura 3.12. El gráfico de la tendencia suele ser de mucha importancia para entender el comportamiento de la serie para las empresas comercializadoras.

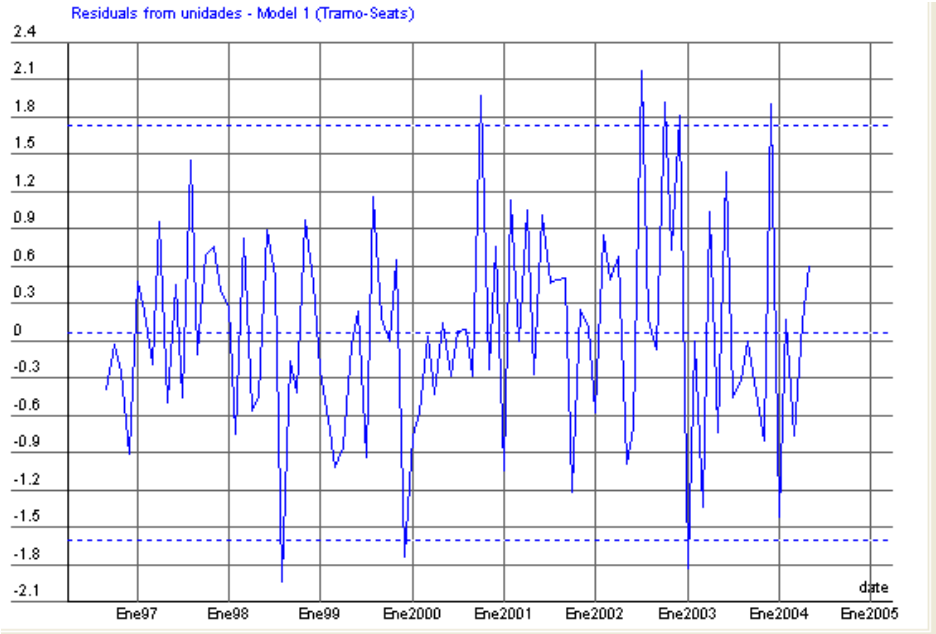


Figura 3.12: Gráfico de los residuales

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En la Figura 3.13 se presenta un análisis de las componentes estacionales por mes.

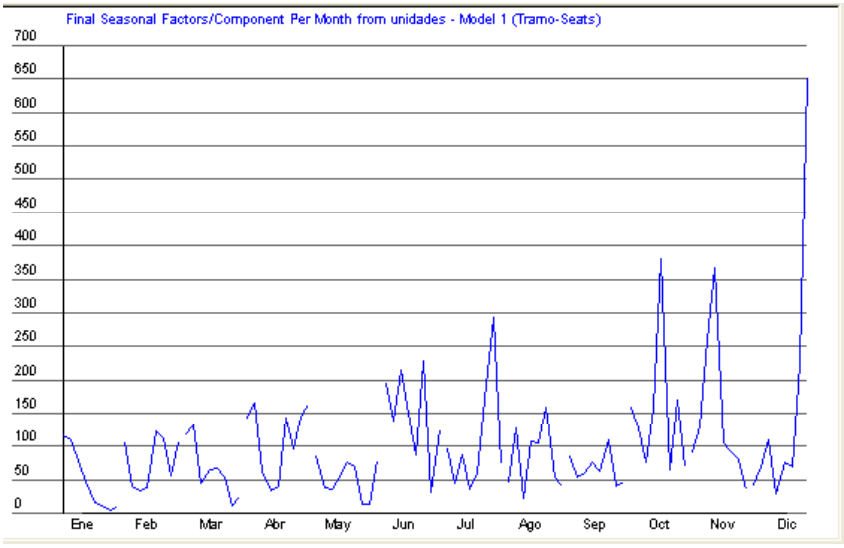


Figura 3.13: Gráfico de Componentes Estacionales por mes

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Este gráfico es de gran importancia para observar los meses en los que las ventas del producto se ven incrementadas. Por ejemplo, se puede ver que en algunos meses las ventas descienden tales como enero, marzo; en otros son estables, como febrero y septiembre, y en otros se incrementan, tales como diciembre, aspecto normal debido a que es un producto ideal para obsequio navideño.

Se puede observar también el gráfico de los atípicos encontrados en la serie en la Figura 3.14. En el caso actual, solo fue encontrado un atípico en el mes de octubre de 1999 y ha sido catalogado como un shock transitorio.

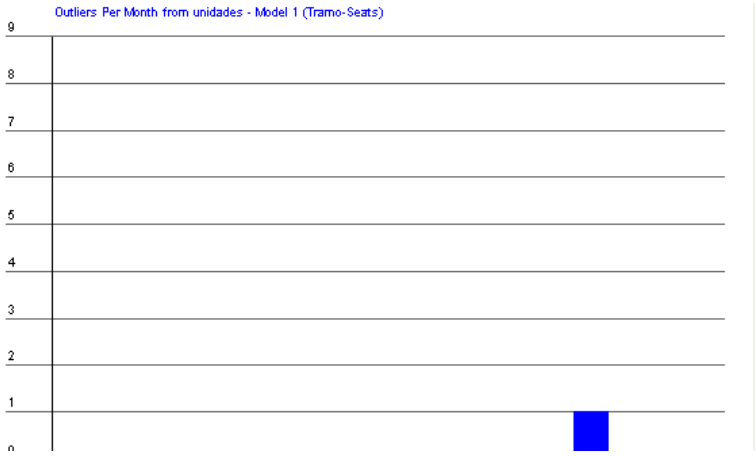


Figura 3.14: Gráfico de los atípicos por mes

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Cuando existen atípicos también se puede agregar el efecto de los mismos, lo cual se observa en la Figura 3.15, mostrando también la forma de los atípicos encontrados, en este caso, del tipo shock transitorio.

Este programa realiza por defecto el análisis de intervención, para calcular los efectos de los atípicos en las series temporales tratadas, y también permite que el usuario introduzca manualmente los atípicos que desea que se consideren en el modelo.

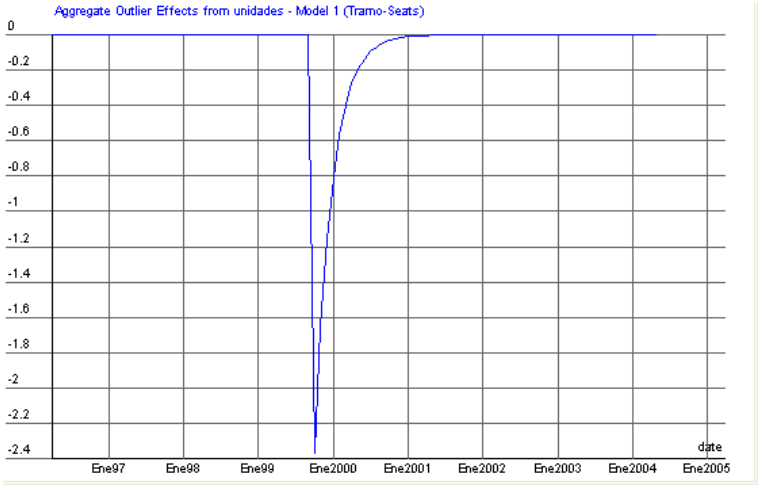


Figura 3.15: Gráfico de los efectos agregados de los atípicos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

El programa también tiene una herramienta que permite escoger otros gráficos de los cuales los más importantes son los de los pronósticos, sea de la tendencia, o de la serie misma, los que se presentan en la Figura 3.16.

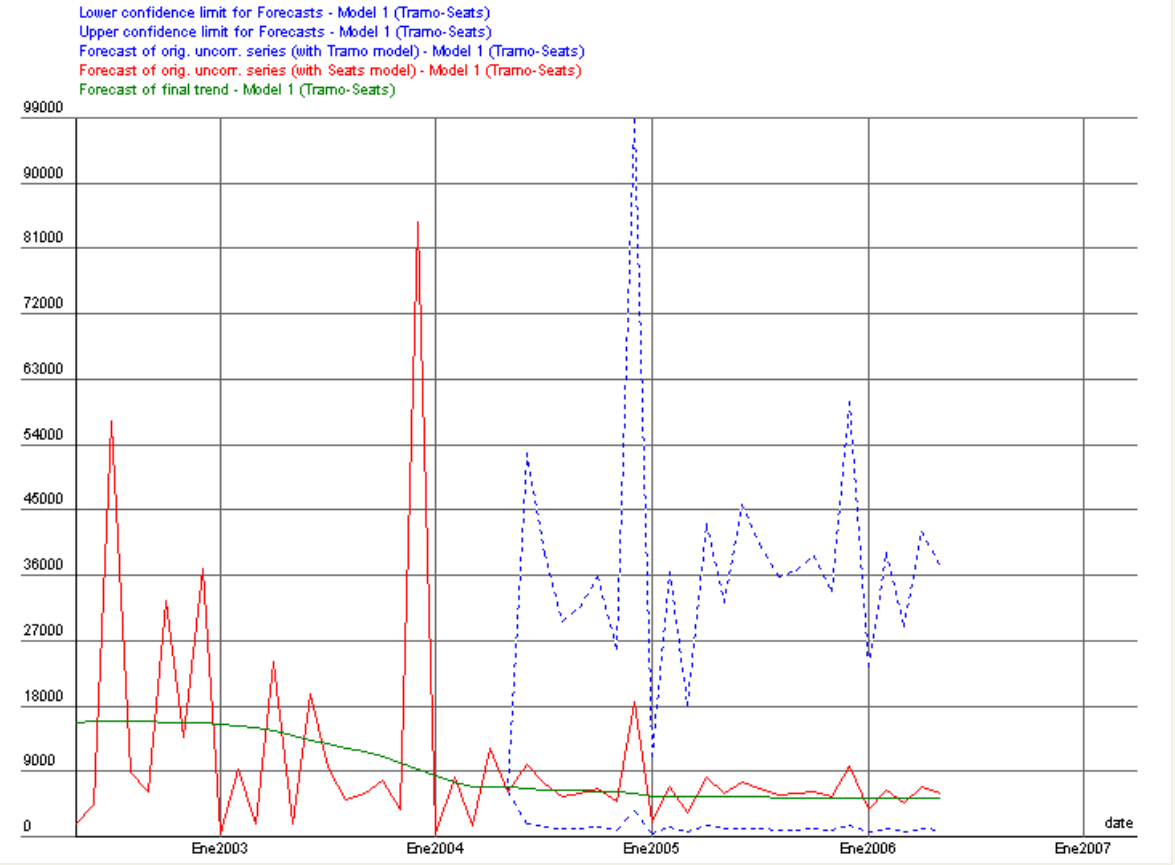


Figura 3.16: Gráfico de los pronósticos calculados

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En el panel superior derecho o en referencia a la Figura 3.17 , se muestra el modelo que fue encontrado por el paquete, en este caso, ARIMA $(0,0,0),(1,0,0)_{12}$.

Information on Models	Model 1 (Tramo-Seats)
Series Span (n° of obs.)	Abr1996 - May2004 (98)
Model Span (n° of obs.)	Abr1996 - May2004 (98)
Method	Tramo/Seats
PRE-ADJUSTMENT	
Transformation	Logarithm
Mean Correction	Yes
Correction for Trading Day Effects	None
Correction for Easter Effect	None
Correction for Outliers	Autom.:AO,LS,TC; 1 Outlier(...
Critical t-value	3.120
TC Oct1999 t-value	-4.18 [-3.120, 3.120] crit.val.
Corr. for Missing Obs.	3 Miss.obs.
Oct1996 (7) interp. value (level)	7782.0845
Ene1997 (10) interp. value (...	7236.4538
Mar1997 (12) interp. value (...	7988.6581
Corr. for Other Regr. Effects	None
Specif. of the ARIMA model	(0 0 0)(1 0 0) (fixed)
DECOMPOSITION	
ARIMA Decomposition	Exact

Figura 3.17: Resultados del modelo obtenido

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Las pruebas de los residuos para la validez del modelo se encuentran en la Figura 3.18.

Information on Diagnostics	Model 1 (Tramo-Seats)
SA quality index (stand. to 10)	2.340 [0, 10] ad-hoc
STATISTICS ON RESIDUALS	
Ljung-Box on residuals	33.48 [0, 35.20] 5%
Box-Pierce on residuals	2.47 [0, 5.99] 5%
Ljung-Box on squared residuals	16.33 [0, 35.20] 5%
Box-Pierce on squared residuals	3.31 [0, 5.99] 5%
Durbin-Watson statistic on res...	2.44 [min:0, max:4]
DESCRIPTION OF RESIDUALS	
Mean of residuals	0.06 [close to 0]
Standard deviation of mean	0.09
Test of significance of empiric...	0.68 [-1.984, 1.984] 5%
Standard deviation of residuals	0.85
Normality	0.44 [0, 5.99] 5%
Skewness	0.17 [-0.50, 0.50] 5%
Kurtosis	3.02 [2.00, 4.00] 5%
OUTLIERS	
Percentage of outliers	1.02% [0%, 5.0%] ad-hoc
CRITERIA FOR ARIMA MODEL FIT	
AIC statistics (Akaike's Inform...	0.00 [minimal]
BIC statistic (Bayesian Inform....	0.00 [minimal]
Non-param. test of runs on re...	2.29 [-1.984, 1.984] 5%
Non-param. test of runs on A...	0.68 [-2.021, 2.021] 5%
Prop. of the var. of the irreg. ...	1.09 [0.2, 5] ad-hoc

Normalmente la parte más importante son los pronósticos. En este caso se tenían los datos hasta Diciembre del 2004 pero se utilizaron solo hasta Mayo del 2004 para ver la validez de los pronósticos.

Se debe acceder al archivo “Log File” del paquete, el que contiene todos los cálculos realizados por el mismo; entre ellos, las previsiones. Como es un archivo de texto muy grande, solo se presenta un corte en la sección de las previsiones en la Figura 3.19.

FORECASTS:

ORIGIN: 98 NUMBER: 24

OBS	FORECAST	STD ERROR	ACTUAL	RESIDUAL	
	FORECAST (TR. SERIES)	STD ERROR			(
ORIGINAL SERIES)					
99	9.20437	0.852438		9940.46	10273.6
100	8.90003	0.852438		7332.22	7577.93
101	8.62244	0.852438		5554.91	5741.06
102	8.68947	0.852438		5940.01	6139.06
103	8.81277	0.852438		6719.53	6944.71
104	8.49164	0.852438		4873.83	5037.15
105	9.82982	0.852438		18579.7	19202.3
106	7.63734	0.852438		2074.22	2143.73
107	8.83198	0.852438		6849.84	7079.38
108	8.13612	0.852438		3415.64	3530.10
109	8.99851	0.852438		8091.03	8362.16
110	8.71008	0.852438		6063.71	6266.90
111	8.91458	0.927062		7439.63	8681.91
112	8.78448	0.927062		6532.05	7622.79
113	8.66581	0.927062		5801.13	6769.81
114	8.69446	0.927062		5969.75	6966.60
115	8.74717	0.927062		6292.88	7343.68
116	8.60989	0.927062		5485.65	6401.66
117	9.18195	0.927062		9720.10	11343.2
118	8.24469	0.927062		3807.36	4443.12
119	8.75538	0.927062		6344.76	7404.22
120	8.45791	0.927062		4712.21	5499.06
121	8.82657	0.927062		6812.91	7950.54
122	8.70327	0.927062		6022.59	7028.25

Figura 3.19: Previsiones calculadas para la serie

El valor original para el mes de Junio del 2004, era de 9515, mientras que el valor pronosticado fue de 9940. Para el resto de meses, el pronóstico es bastante acertado en comparación con los datos reales. Teniendo en cuenta, lo difícil que resulta pronosticar valores para las empresas de venta directa, este fue un resultado importante que se tomó en cuenta para desarrollar nuevas series para otros productos.

El acercamiento global obtenido entre todos los productos fue del 72%, lo cual es bastante elevado con respecto al nivel actual de acierto del estimado, el mismo que actualmente no llega ni al 25%.

Se utilizó este programa ya que sus procesamientos se basan en la metodología TRAMO-SEATS. Como la serie tratada tiene problema de datos faltantes, necesitamos de esta metodología para que los encuentre y los calcule. En la presente serie, fueron encontrados tres valores faltantes, los cuales fueron calculados y sus valores se encuentran especificados en la Figura 3.10.

Existen otros programas que no pueden detectar la presencia de datos atípicos y menos corregirlos o controlar los efectos de ellos. Estos programas son manuales y permiten manipular la serie en sus distintos grados de las partes autorregresiva y de media móvil. Este es el caso de Statgraphics 5.1, que veremos a continuación.

3.3. INTRODUCCIÓN AL MANEJO DE STATGRAPHICS 5.1

Otro paquete que se utiliza bastante en la actualidad es Statgraphics 5.1. Este paquete es de origen estadounidense y es renovado por nuevas versiones continuamente. La última versión existente del mismo es la 5.1 que será vista a continuación.

Al igual que el programa anterior, necesita leer los datos para realizar el análisis. Sin embargo, este paquete tiene pantallas para ingresarlos compatibles con Excel, lo que facilita bastante el análisis en comparación con Demetra 2.0.

Es un programa mayoritariamente manual, aunque en este nueva versión ha sido implementado un ajuste automático de la serie, estimación de datos faltantes; así como también el proceso de desestacionalización de la misma; cálculos que no se encuentran en las versiones anteriores.

Para utilizar este programa el usuario debe saber interpretar los gráficos que se obtienen de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial, debido a que basados en ellas y en los residuos, se llega a escoger un modelo.

La salida de datos es quizás el defecto del programa debido a que solo permite ser copiado como imagen.

En la parte referente a series temporales el programa permite realizar los siguientes análisis:

a) Métodos Descriptivos;
b) Predicción Automática;
c) Desestacionalización;
d) Predicción.

a) Los métodos descriptivos permiten realizar un análisis a simple vista de la serie; se pueden ver sus gráficos, los datos, etc;

b) El proceso automático selecciona por si solo el modelo al que mejor se ajustan los datos y es en cierta forma una manera bastante rápida de hacer predicciones;

c) El proceso de desestacionalización de la serie temporal, se lo hace basándose en modelos aditivos o multiplicativos, descomponiendo a la serie en sus cuatro componentes;

d) El proceso de predicción que es utilizado conjuntamente con los Métodos Descriptivos y permiten al usuario modelar por si mismo la serie en cuestión.

Las herramientas gráficas del paquete no son tan variadas como el anterior, pero si es posible arreglar la escala a gusto del usuario. Dependiendo del análisis que se esté realizando se presentan los gráficos concernientes al tema como son: funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial, periodigrama, la tendencia, predicciones, residuos, etc.

3.4. APLICACIONES CON STATGRAPHICS 5.1

Para las aplicaciones con este paquete se volverá a utilizar la serie anterior con el objeto de realizar comparaciones entre los resultados obtenidos con

ambos paquetes. Para el efecto, los análisis se realizarán en el siguiente orden:

3.4.1. MÉTODO DESCRIPTIVO

Al entrar a este menú aparecerá la siguiente pantalla:

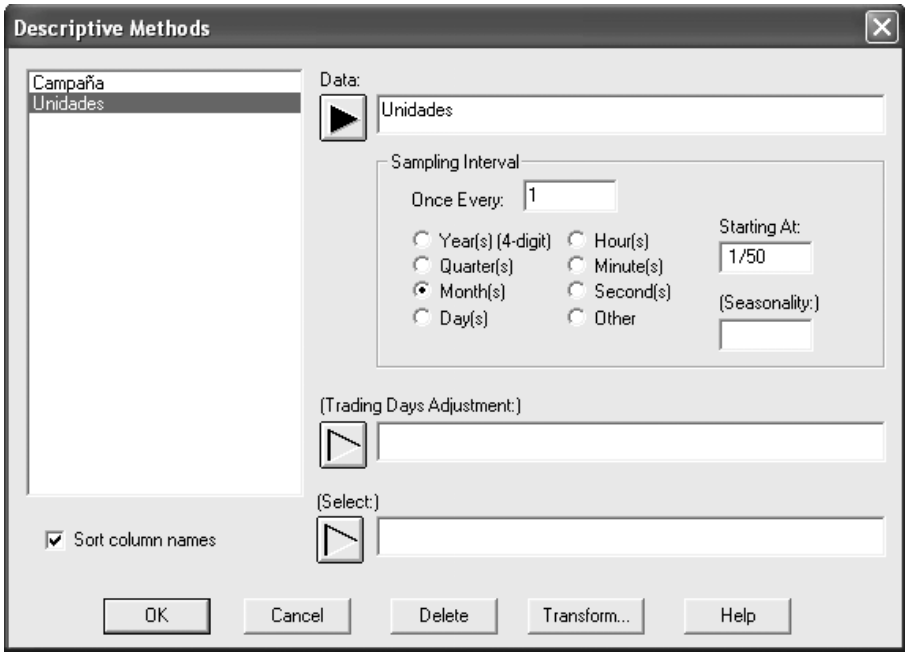
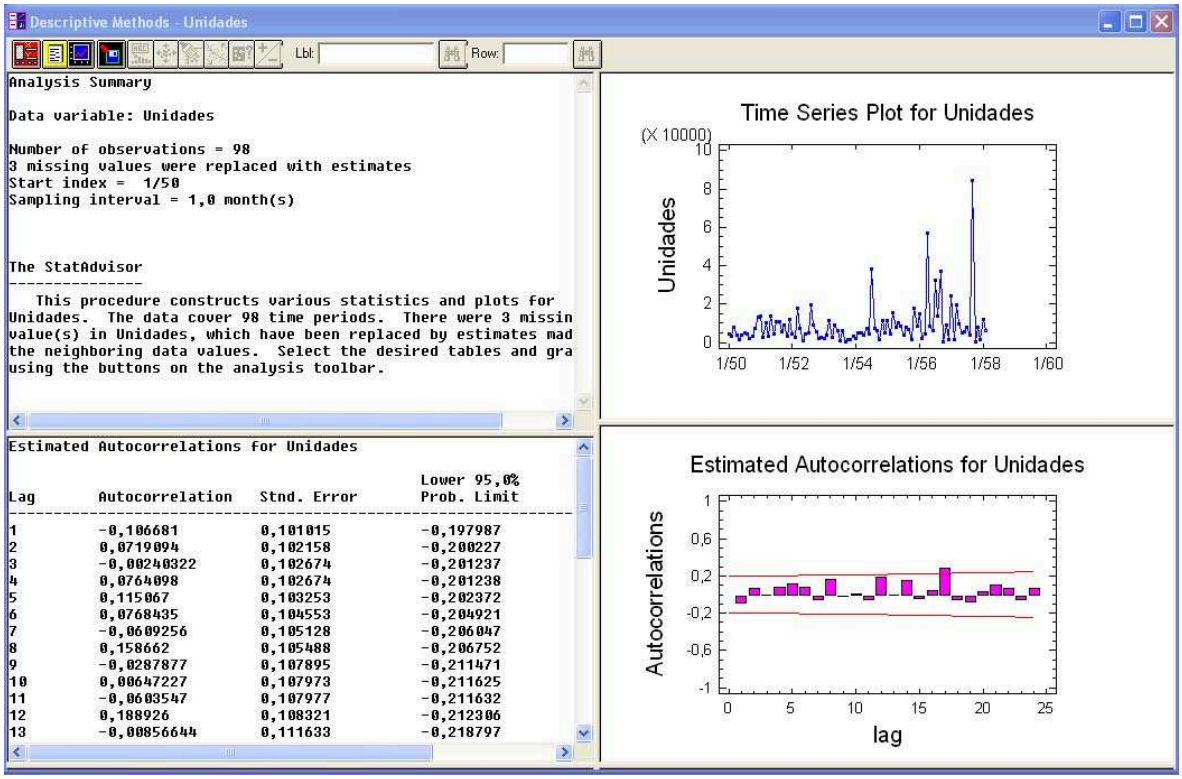


Figura 3.20: Pantalla de selección de datos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se debe especificar el nombre de la serie, los intervalos de tiempo, estacionalidad (si ya se la conoce). Una vez que se ha realizado esto, aparecerá una pantalla con los cálculos realizados en la izquierda y los gráficos a la derecha. Por defecto, se obtienen dos análisis y dos gráficos, pero se pueden escoger los que falten con las opciones de análisis y de gráficos. Estos métodos son utilizados reiteradamente durante los procesos de análisis; pero más específicamente en el caso de la predicción manual.

La pantalla que se obtiene es la que sigue a continuación:



Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

3.4.2. PREDICCIÓN AUTOMÁTICA

Este tipo de análisis es el más simple de todos, porque el programa se encarga de probar algunos de los modelos posibles y escoger el que más se ajuste al proceso. En este caso, una vez que los datos han sido ingresados, aparecerá la pantalla siguiente:

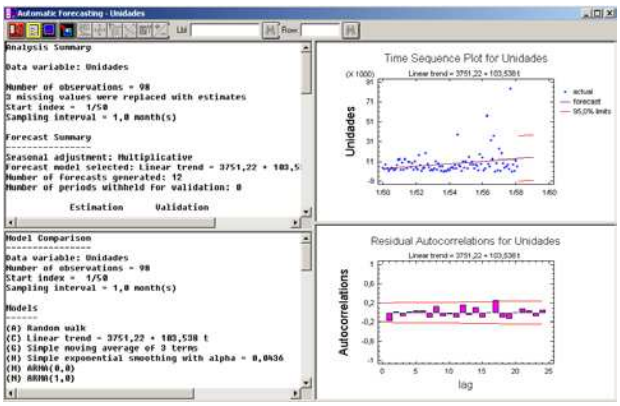


Figura 3.22: Pantalla de salida de predicción automática

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Al dar un clic derecho en la pantalla aparece un menú en el cual, una de las opciones es “Analysis Options”, que al ser ejecutado permite que se introduzca en el modelo todas las transformaciones que se desee.

Las opciones que se da se encuentran en la siguiente pantalla:

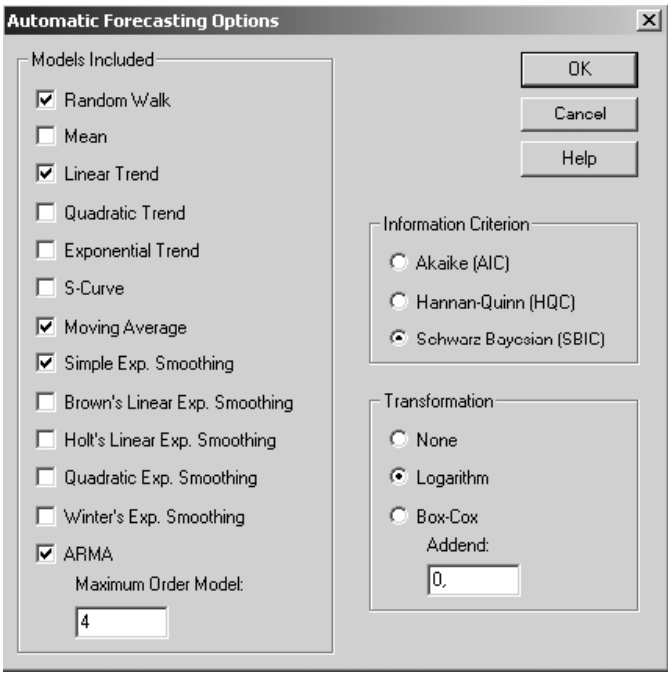


Figura 3.23: Opciones de Análisis

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Una vez que se tiene el modelo se puede acceder a todos los análisis disponibles, para lo cual, se debe ingresar al icono llamado “Tabular options” en el que aparece el siguiente menú:

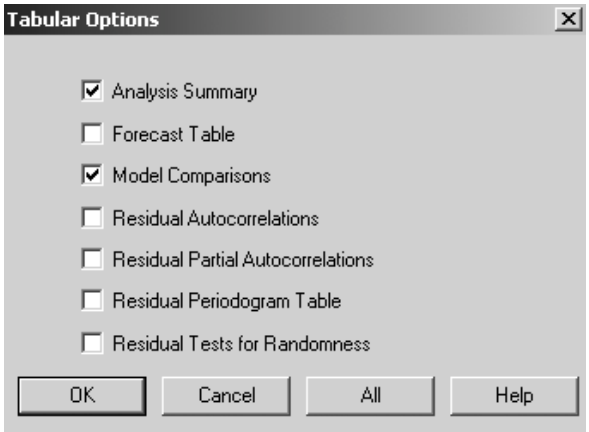


Figura 3.24: Opciones de datos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Cuando ya se han escogido todos los cálculos que se deseen realizar, se procede a escoger los gráficos. Para esto se debe ir al icono “Graphical options” y aparecerán las siguientes opciones:

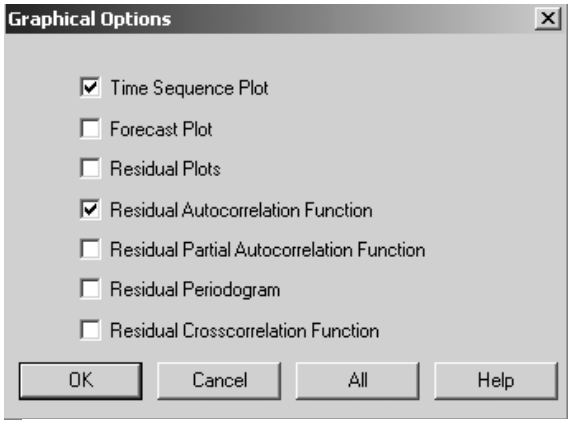


Figura 3.25: Opciones gráficas

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Como este es un menú automático, faltarían observar los resultados, sean estos analíticos o gráficos.

Si se toma en cuenta los analíticos, se tendrán las siguiente salidas:

Resumen del análisis: indica el modelo escogido, los valores de los coeficientes y también los valores de los estadísticos de prueba.

```
Analysis Summary

Data variable: Unidades

Number of observations = 98
3 missing values were replaced with estimates
Start index =  1/50
Sampling interval = 1,0 month(s)

Forecast Summary
----------------
Seasonal adjustment: Multiplicative
Forecast model selected: Linear trend = 3751,22 + 103,538 t
Number of forecasts generated: 12
Number of periods withheld for validation: 0

           Estimation      Validation
Statistic  Period          Period
---------------------------------------------
RMSE       11225,8
MAE        6465,82
MAPE       183,762
ME         -1,11367E-13
MPE        -157,255

                        Trend Model Summary
Parameter          Estimate        Stnd. Error     t               P-value
-------------------------------------------------------------------------------
Constant           3751,22         2285,43         1,64136         0,103994
Slope              103,538         40,086          2,58289         0,011307
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 3.26: Resumen del Análisis

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Los estadísticos utilizados son los que se encuentran en la siguiente tabla:

Notación	Significado
RMSE	Error cuadrático de las raíces
MAE	Error absoluto de la media
MAPE	Error absoluto de la media (%)
ME	Error de la media
MPE	Error de la media (%)

Tabla 3.2: Pruebas realizadas a residuos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Salida de Pronósticos: Se muestra el número de previsiones que se haya querido, con sus respectivos límites de confianza.

Period	Forecast	Lower 95,0% Limit	Upper 95,0% Limit
3/58	14001,5	-8738,8	36741,8
4/58	14105,0	-8649,18	36859,2
5/58	14208,6	-8559,83	36976,9
6/58	14312,1	-8470,75	37094,9
7/58	14415,6	-8381,93	37213,2
8/58	14519,2	-8293,39	37331,7
9/58	14622,7	-8205,11	37450,5
10/58	14726,2	-8117,1	37569,6
11/58	14829,8	-8029,35	37688,9
12/58	14933,3	-7941,87	37808,5
1/59	15036,9	-7854,66	37928,4
2/59	15140,4	-7767,71	38048,5

Figura 3.27: Salida de pronósticos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Models

(A) Random walk
(C) Linear trend = 3751,22 + 103,538 t
(G) Simple moving average of 3 terms
(H) Simple exponential smoothing with alpha = 0,0443
(M) ARMA(0,0)
(N) ARMA(1,0)
(O) ARMA(2,1)
(P) ARMA(3,2)
(Q) ARMA(4,3)

Estimation Period

Model	RMSE	MAE	MAPE	ME	MPE	SBIC
(A)	17174,9	9652,6	380,037	15,3711	-322,853	19,5024
(C)	11225,8	6465,82	183,762	-1,11367E-13	-157,255	18,7455
(G)	13423,2	7631,79	258,989	35,1333	-222,048	19,0095
(H)	11497,3	6020,29	158,007	1294,46	-127,026	18,7465
(M)	11549,4	6404,74	173,829	2,9141E-12	-151,459	18,7556
(N)	11542,9	6432,94	157,075	-1,58511	-133,538	18,8012
(O)	11642,6	6432,38	155,246	0,582272	-131,508	18,912
(P)	11763,7	6433,2	156,342	4,93529	-132,513	19,0263
(Q)	11718,3	6155,39	137,211	805,464	-106,341	19,1121

Model	RMSE	RUNS	RUNM	AUTO	MEAN	VAR
(A)	17174,9	**	***	***	OK	***
(C)	11225,8	OK	OK	OK	OK	***
(G)	13423,2	OK	*	*	OK	***
(H)	11497,3	OK	OK	OK	OK	***
(M)	11549,4	OK	OK	OK	*	***
(N)	11542,9	OK	OK	OK	**	***
(O)	11642,6	OK	OK	OK	**	***
(P)	11763,7	OK	OK	OK	**	***
(Q)	11718,3	OK	OK	OK	OK	***

Figura 3.28: Modelos utilizados

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Modelos comparados: Muestra todos los modelos que se han aplicado, así como también los valores de los estadísticos de las pruebas realizadas a los mismos. En este panel se puede observar otros estadísticos, cuyas nomenclaturas se explican en la siguiente tabla:

Notación	Significado	Notación	Significado
RUNS	Prueba de excesivos altos y bajos	OK	No es significante
RUNM	Prueba de excesivos altos y bajos en mediana	*	Marginalmente significante
AUTO	Prueba de Box-Pierce	**	Significante
MEAN	Prueba de diferencia en media	***	Muy significante
VAR	Prueba de diferencia en varianza		

Tabla 3.3: Pruebas a los modelos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

También se pueden obtener los datos correspondientes a: autocorrelaciones estimadas, autocorrelaciones parciales estimadas de los residuos, periodigrama y los residuos de la serie.

Si se toman en cuenta los gráficos, se tendrán las siguiente salidas:

Autocorrelaciones estimadas y parciales de los residuos:

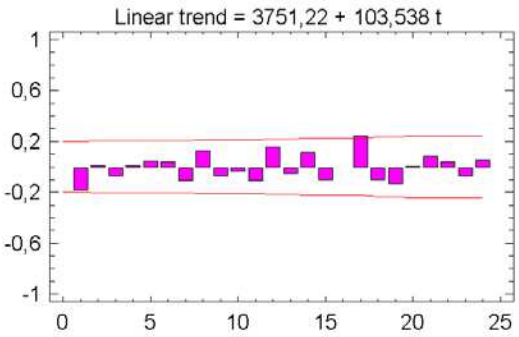


Figura 3.29: Autocorrelaciones estimadas de los residuos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

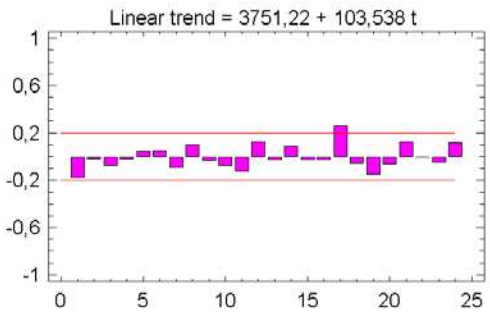


Figura 3.30: Autocorrelaciones parciales estimadas de los residuos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Periodigrama de residuos:

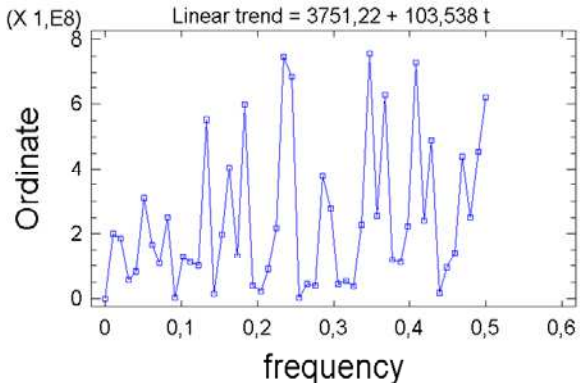


Figura 3.31: Periodigrama de los residuos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Gráfico de residuales:

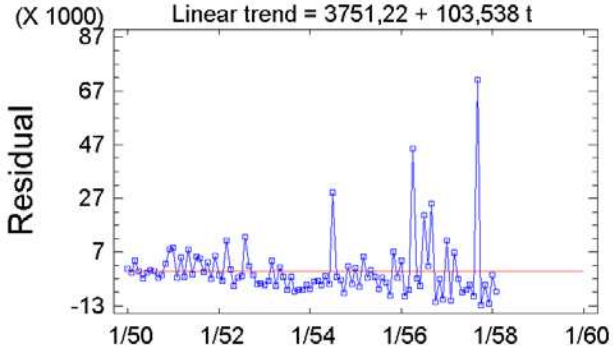


Figura 3.32: Residuos de la serie

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Gráfico de pronósticos: Ya que el modelo escogido es lineal, la gráfica de los pronósticos tiene la siguiente forma:

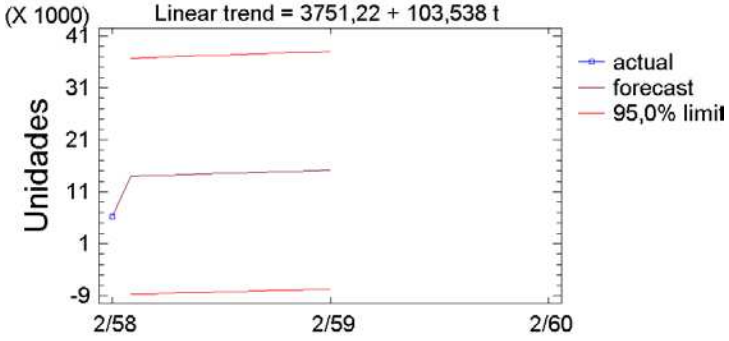


Figura 3.33: Gráfico de pronósticos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Si se toma en cuenta la validez de los pronósticos, los valores pronosticados están muy lejos de los reslaes, por lo que hasta el momento se tienen mejores resultados con el paquete Demetra 2.0.

3.4.3. DESESTACIONALIZACIÓN

Se realiza nuevamente el análisis de la serie anterior con el proceso de la desestacionalización. Cabe recordar que este proceso no realiza pronósticos en la serie, sino que descompone a la serie en sus diferentes componentes para que se pueda estudiar su tendencia en la mayoría de los casos.

Una vez que se ingresaron los datos, se tiene la siguiente salida analítica:

Tabla de datos: Contiene los datos originales y sus respectivas componentes: tendencia-ciclo, estacionalidad e irregular, así como también el ajuste estacional obtenido.

Data	Trend-Cycle	Seasonality	Irregular	Seasonally Adjusted
4670,0				4348,75
3079,0				7154,66
7815,0				5083,96
3871,0				3519,09
1457,0				1397,82
3669,0				5105,56
17107,0	7805,5	219,166	138,451	10806,8
4304,0	8159,33	52,7494	44,0106	3590,97
2050,0	8238,33	24,8837	27,5753	2271,74
13104,0	8300,79	157,864	241,832	20074,0
7379,0	8771,42	84,1255	106,191	9314,44
20699,0	9298,75	222,6	229,795	21368,0
13594,0	9068,29	149,907	139,595	12658,9
2647,0	9080,29	29,151	67,7382	6150,82
10143,0	9487,67	106,907	69,5473	6598,42
3042,0	9472,63	32,1136	29,1941	2765,45
13581,0	9131,42	148,728	142,687	13029,3
4201,0	8574,79	48,9924	68,1749	5845,86
11044,0	7830,54	141,037	89,0959	6976,7
10655,0	7457,17	142,883	119,212	8889,82
5476,0	7773,08	70,4482	78,0685	6068,33
9317,0	8265,54	112,721	172,677	14272,7
2977,0	7923,04	37,574	47,4292	3757,84
11742,0	7407,54	158,514	163,638	12121,5
4689,0	7156,13	65,5243	61,0169	4366,44
2591,0	7275,38	35,6133	82,7544	6020,7
17781,0	7787,25	228,335	148,541	11567,2
7223,0	7769,46	92,9666	84,515	6566,36
1180,0	7583,17	15,5608	14,9287	1132,07
4230,0	7181,46	58,9017	81,964	5886,21
4981,0	6704,5	74,2934	46,9325	3146,59

Figura 3.34: Informe de datos ajustados estacionalmente

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En cuanto a las salidas gráficas, se tienen las siguientes:

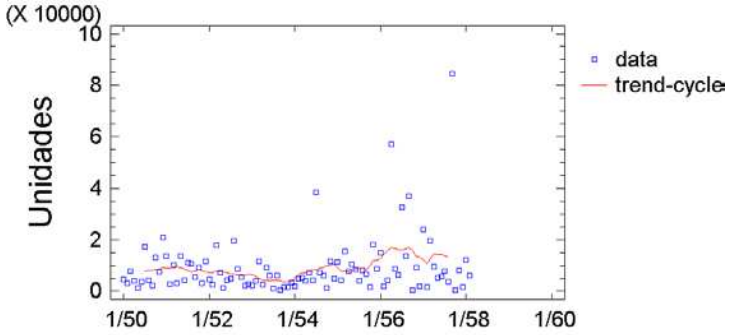


Figura 3.35: Gráfico de la tendencia-ciclo de la serie

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

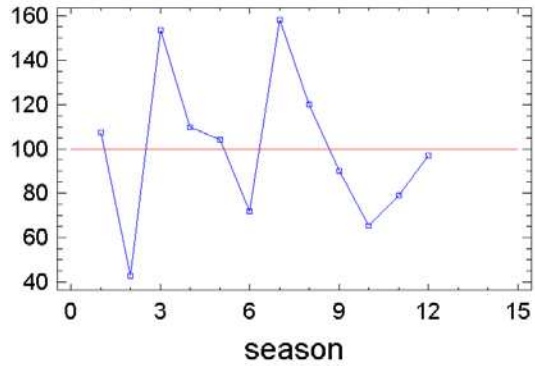


Figura 3.36: Índices de estacionalidad

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

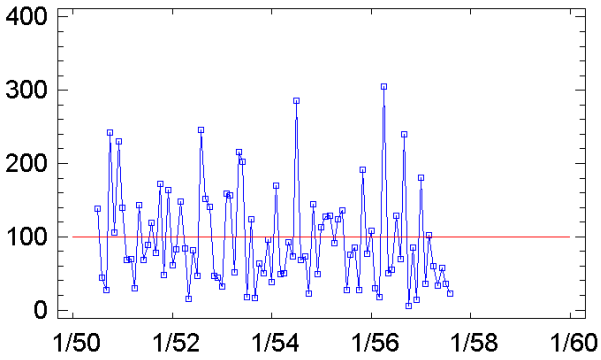


Figura 3.37: Gráfico de la componente irregular

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

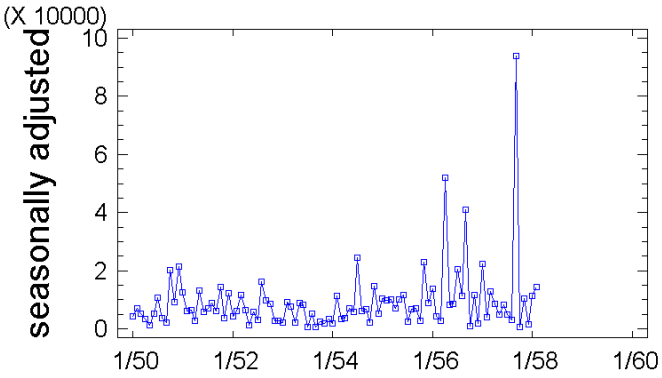


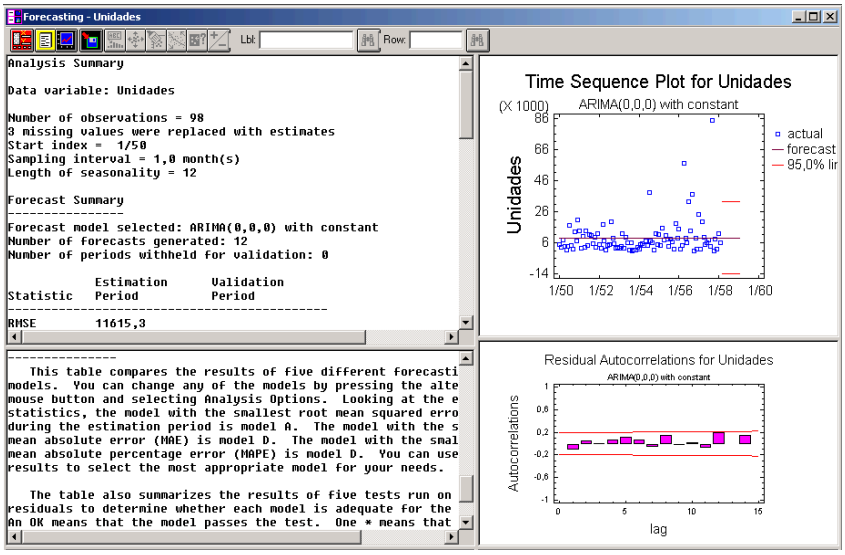
Figura 3.38: Gráfico de la serie ajustada estacionalmente

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Esta sección resulta pobre en comparación al paquete Demetra 2.0, ya que no permite realizar cálculos sobre las componentes de la serie y menos aún pronósticos. Un aspecto que Demetra 2.0 no posee y que si está implementado en Statgraphics, es la introducción de un factor de inflación dentro de la descomposición de la serie.

3.4.4. PREDICCIÓN

Este procedimiento es quizás el más complicado cuando se analiza series temporales debido a que depende en su mayoría de la interpretación que se dé a los gráficos que se obtienen de la serie temporal. Sin embargo, la misma serie será tratada por este procedimiento para ver que tan buenos pronósticos es posible obtener manualmente. Cuando los datos ya han sido ingresados, se obtiene la siguiente pantalla:



Figu Pantalla de salida del método de predicción

anbal Ecuador S.A.

Lo importante dentro de esta pantalla es la observaciones de la serie y de la función de autocorrelación, para ver la necesidad de diferenciar la serie. Como en este caso la función de autocorrelación no decrece en forma progresiva,se concluye que no existe necesidad de diferenciar la serie.

Una vez realizado esto, es necesario observar si existen retardos fuera de la banda de confianza, en las autocorrelaciones de los residuos o en las autocorrelaciones parciales cuyas gráficas se presentan a continuación:

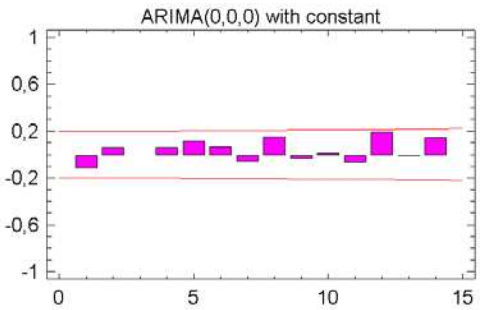


Figura 3.40: Función de Autocorrelación parcial

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

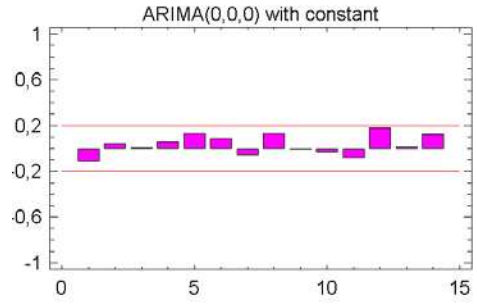


Figura 3.41: Función de Autocorrelación

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Hasta el momento se ha observado que los parámetros *p* y *q* son nulos. Se concluye entonces que es necesario aumentar un valor en las partes SAR Y SMA.

Se debe entonces probar con los modelos:

1. SARIMA(0,0,0)$(1,0,1)_{12;}$
2. SARIMA(0,0,0)$(0,0,1)_{12;}$
3. SARIMA(0,0,0)$(1,0,0)_{12.}$

Cada uno de estos modelos deben ser analizado en sus funciones de autocorelación (no deben existir barras fuera de las bandas de confianza), los parámetros deben pasar la prueba t-student (el valor p de la prueva debe ser menor de 0,05) y la varianza del ruido blanco debe ser lo menor posible.

SARIMA(0,0,0)(1,0,1)$_{12}$

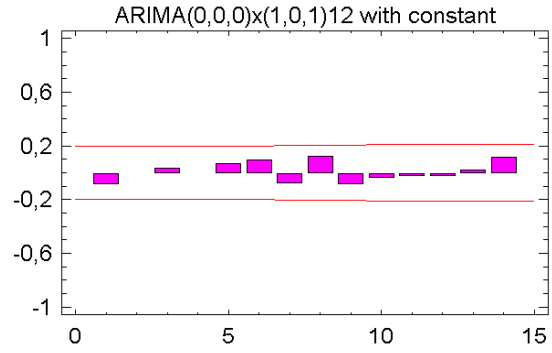


Figura 3.42: Autocorrelación residual SARIMA(0,0,0)(1,0,1)$_{12}$

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

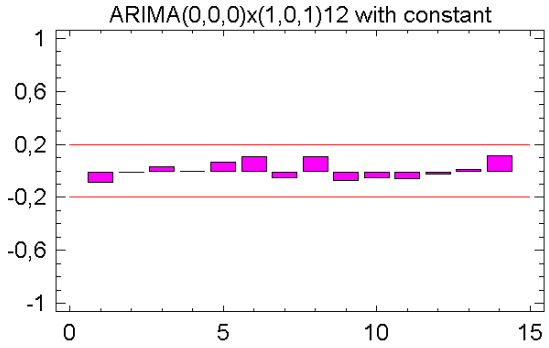


Figura 3.43: Autocorrelación parcial residual SARIMA(0,0,0)(1,0,1)$_{12}$

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Stnd. Error	t	P-value
SAR(1)	0,640024	0,469237	1,36397	0,175801
SMA(1)	0,252595	0,487217	0,518443	0,605354
Mean	9683,45	2122,75	4,56174	0,000015
Constant	3485,8			

Varianza del ruido blanco: 1,26983E8

Error absoluto en media: 6448,34

Pasa la prueba de Box-Pierce

Este modelo no tiene problemas en ninguna de sus funciones de autocorrelación, sin embargo sus parámetros no pasan la prueba t-student, por lo que se debe rechazar el modelo. El parámetro SMA es el que excede más de 0,05 por lo que este debe ser el parámetro que posiblemente debe ser

retirado del modelo, por lo que se debe realizar el modelo SARIMA(0,0,0)(0,0,1)$_{12}$ para verificar esta hipótesis.

SARIMA(0,0,0)(0,0,1)$_{12}$

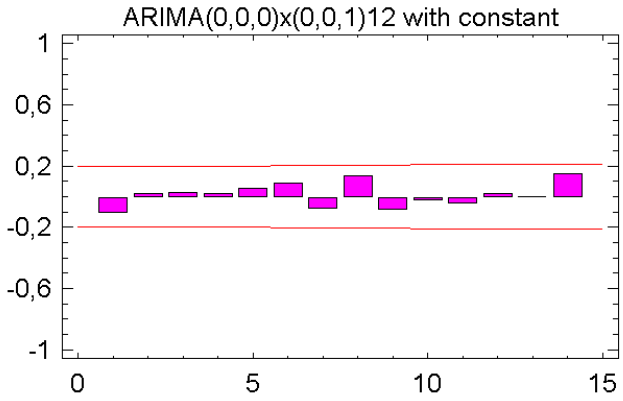


Figura 3.44: Autocorrelación residual SARIMA(0,0,0)(0,0,1)$_{12}$

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

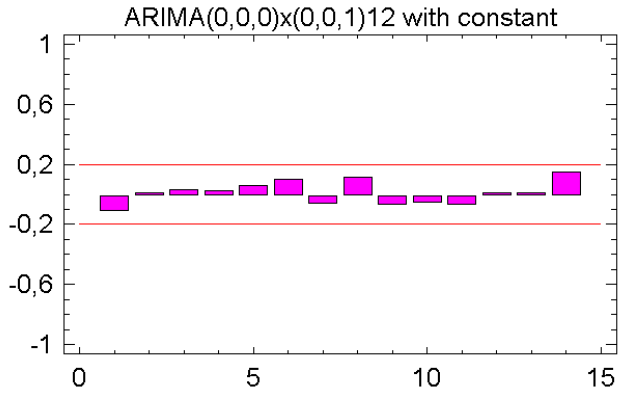


Figura 3.45: Autocorrelación parcial residual SARIMA(0,0,0)(0,0,1)$_{12}$

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Stnd. Error	t	P-value
SMA(1)	-0,278561	0,12306	-2,26363	0,025849
Mean	9218,33	1429,68	6,44785	0,000000
Constant	9218,33			

Varianza del ruido blanco: 1,28725E8

Error absoluto en media: 6514,01

Pasa la prueba de Box-Pierce

Este modelo no tiene problemas en ninguna de sus funciones de autocorrelación ni con sus parámetros, por lo que es considerado un modelo válido.

SARIMA(0,0,0)(1,0,0)$_{12}$

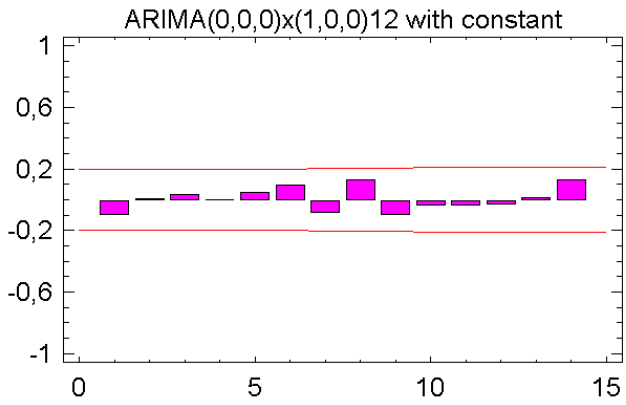


Figura 3.46: Autocorrelación residual SARIMA(0,0,0)(1,0,0)$_{12}$

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

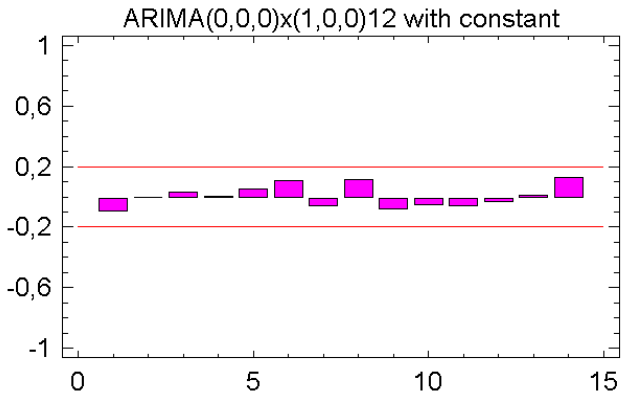


Figura 3.47: Autocorrelación parcial residual SARIMA(0,0,0)(1,0,0)$_{12}$

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

ARIMA Model Summary

Parameter	Estimate	Stnd. Error	t	P-value
SAR(1)	0,376125	0,13014	2,89016	0,004761
Mean	9381,22	1645,21	5,70215	0,000000
Constant	5852,71			

Varianza del ruido blanco: 1,26382E8

Error absoluto en media: 6476,40

Pasa la prueba de Box-Pierce

Este modelo no tiene problemas en ninguna de sus funciones de autocorrelación ni con sus parámetros, por lo que es considerado como un modelo válido.

Al momento se tienen dos modelos válidos, por lo que es necesario escoger el que tenga menor varianza del ruido blanco o el de menor error absoluto en media, y que pase la prueba de Box-Pierce, cuyos valores se presentan a continuación:

Modelo	Box-Pierce	Error absoluto en media	Varianza del ruido blanco
SARIMA(0,0,0)(1,0,0)12	Ok	6476,40	1,26382E8
SARIMA(0,0,0)(0,0,1)12	Ok	6514,01	1,28725E8

Tabla 3.4: Modelos válidos

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Por lo tanto el modelo escogido es un SARIMA(0,0,0)(1,0,0)12, coincidiendo con los resultados obtenidos con Demetra 2.0.

Las predicciones obtenidas con este modelo, mediante Statgraphics 5,1 son:

Period	Forecast	Lower 95,0% Limit	Upper 95,0% Limit
3/58	13217,2	-9097,95	35532,4
4/58	9466,52	-12848,7	31781,7
5/58	7740,48	-14574,7	30055,7
6/58	8060,94	-14254,2	30376,1
7/58	8799,28	-13515,9	31114,5
8/58	7242,87	-15072,3	29558,1
9/58	37662,3	15347,1	59977,5
10/58	6041,15	-16274,0	28356,3
11/58	8934,68	-13380,5	31249,9
12/58	6457,9	-15857,3	28773,1
1/59	10402,7	-11912,5	32717,9
2/59	8170,02	-14145,2	30485,2

Como se puede observar, aún cuando los datos se han ajustado al mismo modelo, sus pronósticos son completamente diferentes. Esto se produce porque cada uno de los paquetes estadísticos tiene su propia metodología y procesamiento.

Otro aspecto que se debe tomar en cuenta es que Statgraphics no realiza un análisis de intervención de sus atípicos, por tanto, no corrige los efectos que estos tienen sobre la serie, afectando en gran manera a los pronósticos.

La metodología que se utliza en Yanbal Ecuador S.A. para la medición de pronósticos, es la utilización del promedio de aciertos realizados. Cada acierto es el resultado de realizar un cociente entre los valores pronosticados y los valores reales.

Como los pronósticos son superiores o inferiores a los valores referenciales, siempre se realiza este cociente de tal forma que dé como resultado un porcentaje menor o igual al 100%.

Para el ejemplo de aplicación, se tuvieron los siguientes resultados:

	Demetra 2.0	
Real	**Pronóstico**	**Acierto (%)**
9515	9940,4	0,96
7502	7332,2	0,98
4986	5554,9	0,90
6200	5940,0	0,96
6896	6719,5	0,97
5864	4873,8	0,83
20548	18579,0	0,90
	Promedio	0,93
	Error Medio Cuadrático	885.57

Tabla 3.5: Resultados obtenidos con Demetra 2.0

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

La gráfica de comparación de resultados, se presenta a continuación:

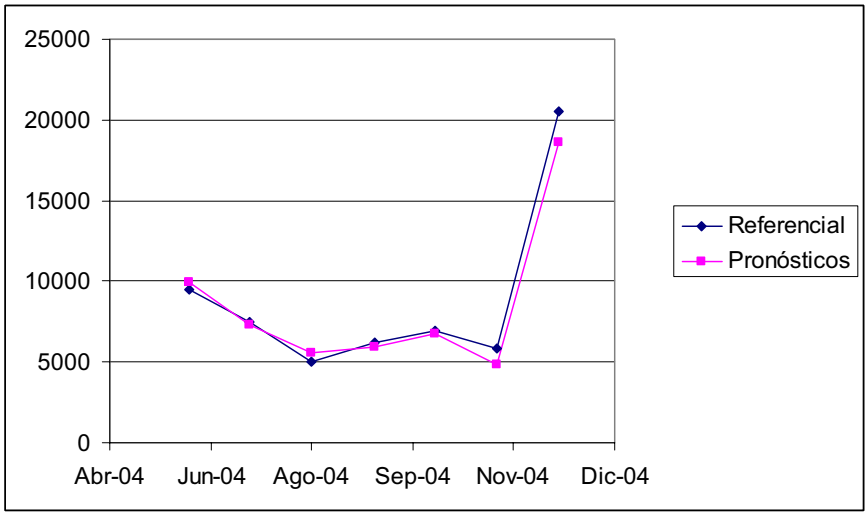


Figura 3.48: Comparación de resultados con Demetra 2.0

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

En el caso de Statgraphics 5.1 se obtuvo los siguientes resultados:

	Statgraphics 5.1	
Real	**Pronóstico**	**Acierto (%)**
9515	13217	0,72
7502	9466,5	0,79
4986	7740,4	0,64
6200	8060,9	0,77
6896	8799,2	0,78
5864	7242,8	0,81
20548	37662,0	0,55
	Promedio	0,72
	Error Medio Cuadrático	6835.05

Tabla 3.6: Resultados obtenidos con Statgraphics 5.1

La gráfica de los resultados obtenidos se presenta a continuación:

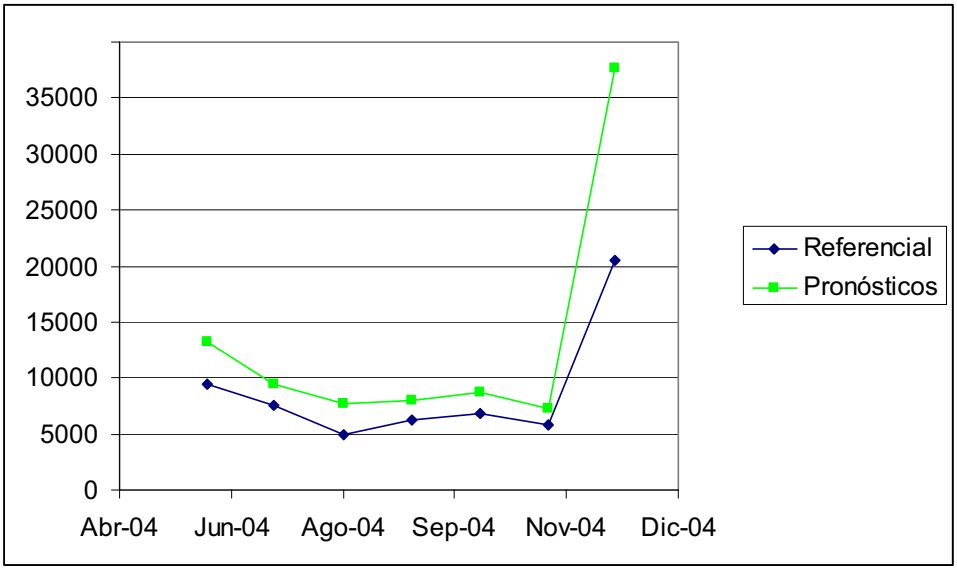


Figura 3.49: Comparación de resultados con Statgraphics 5.1

Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Por lo tanto, se prefirió utilizar el paquete estadístico Demetra 2.0 de manera que se obtuviesen mejores pronósticos de los valores de ventas.

Fue bastante fácil demostrar que esta técnica ya debería ser aplicada en este tipo de ventas, ya que el acierto del estimado actualmente está por debajo del 25%, mientras que utilizando este paquete estadístico se obtuvo un acierto promedio del 72% para el producto estudiado.

La siguiente tabla muestra el resumen entre los datos predichos y los datos referenciales para varios productos cosméticos:

Producto	Referencial	Pronóstico actual	Acierto	Pronóstico anterior	Acierto
Jun-04	951	9940,	0,96	200	0,21
Jul-04	750	7332,	0,98	175	0,23
Ago-04	498	5554,	0,90	155	0,31
Sep-04	620	594	0,96	750	0,12
Oct-04	689	6719,	0,97	170	0,25
Nov-04	586	4873,	0,83	100	0,17
Dic-04	2054	1857	0,90	5025	0,41
		Promedio	**0,93**	**Promedio**	**0,24**
		EMC	**885,5**	**EMC**	**12328,4**

Tabla 3.7: Comparación de resultados
Fuente: Yanbal Ecuador S.A.

Se obtuvo un avance significativo en la realización de pronósticos para estos productos. Los cálculos eran realizados anteriormente al ojo, o en el mejor de los casos, mediante regresiones lineales; debido a la falta de conocimientos estadísticos que poseen las personas que están a cargo de las previsiones, motivo por el cual, los inventarios se incrementan en gran magnitud constantemente.

Algunas veces los estimados son modificados manualmente, para no pasar las estimaciones en ventas de unidades que se ha hecho a inicios del año. Esto lejos de mejorar los pronósticos provoca grandes errores, cuyo manejo a desconcertado a la Gerencia General.

En otras ocasiones, se corrian los estimados al apuro, para cumplir con las exigencias de los importadores, por lo que estos aspectos deberían ser regulados con prontitud para que la empresa no siga perdiendo dinero.

CAPITULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. CONCLUSIONES

- La descomposición de la serie temporal en sus diferentes componentes es de gran ayuda para entender el comportamiento de las series de ventas, especialmente para hacer análisis de la tendencia.

- La desestacionalización de series cronológicas por modelos de tipo aditivo o multiplicativo, produce mejoras en las previsiones de la tendencia cuando se detectan y estiman valores atípicos.

- Para obtener resúmenes de la tendencia existen varios métodos como son: regresión lineal, medias móviles y medianas móviles. De todos estos métodos, los de las medianas móviles resultan ser los más efectivos, pues eliminan las perturbaciones provocadas por valores anómalos y conservan la secuencia lineal observada.

- Es preferible utilizar medianas móviles de orden impar ya que las de orden par necesitan ser corregidas, lo que implica realizar más cálculos y no necesariamente mejores resultados.

- Debido a que las medianas móviles presentan oscilaciones, es necesario realizar re-alisados; otra técnica es la llamada del doblaje, que se concentra en los residuos de la serie alisada para corregir la representación de la tendencia.

- Las medianas móviles ponderadas son las más eficaces. Las más robustas son: “3RH”, “5RI”, “53H”, “4253H”.

- Existen varios tipos de datos atípicos dentro de las series cronológicas, entre ellos: aditivos, innovativos, cambios de nivel y shocks transitorios. La presencia de estos datos dentro de las series temporales provoca errores en las funciones de autocorrelación, en las estimaciones de los parámetros

y residuos del modelo. Es por esta razón que es muy importante identificarlos, determinar el tipo al que pertenecen y mediante el análisis de intervención modelar los efectos que estos provocan dentro de las series.

- Muchas veces existen valores faltantes dentro de las series de ventas. En la mayoría de series estudiadas, estos se debían a campañas de ventas que tienen como objetivo disminuir la oferta para provocar mayor demanda. La mayoría de paquetes estadísticos necesitan tener todos los datos para realizar los análisis, motivo por el cual, la estimación de datos faltantes es primordial para cualquier tipo de estudio que se desee realizar. Para estimar estos datos se puede utilizar la interpolación inversa y la razón de máxima verosimilitud para posteriormente tratarlos como atípicos aditivos. La mayoría de paquetes utilizan el promedio de los valores cercanos al valor faltante para la estimación de los mismos.

- El paquete estadístico Demetra 2.0 parece mucho más eficaz para realizar análisis de series temporales bajo la presencia de valores atípicos. El proceso de desestacionalización es simple y permite realizar cálculos sobre sus componentes, de los que no se disponen usualmente.

- En las series de ventas estudiadas, se logró aumentar el acierto al estimado del 25% al 72% en los pronósticos de las ventas, aspecto muy importante en el desarrollo de estimados para mejorar la administración de la demanda. Se tomaron en cuenta siete datos pronosticados por los requerimientos gerenciales, al momento de realizar los cálculos.

- El uso de herramientas estadísticas en las empresas debe ser primordial, porque muchas veces las previsiones se hacen por intuición y sus errores provocan demasiado capital en inventario si fueron demasiado altas o, pérdidas en la oportunidad del negocio, en el caso de ser subestimadas.

- Este problema es el más común en las empresas de venta directa. Las distribuidoras de los productos reciben premios por alcanzar ciertos montos de venta. Si un producto es requerido y no existe en el inventario, la

empresa se debe adueñar de la pérdida y darle el premio a la distribuidora, aún cuando no se haya vendido ese producto por falta de inventario. Entonces al costo de oportunidad perdido por no vender el producto, se le debe aumentar el valor perdido por un obsequio, que tampoco está dentro de lo planificado. Es por este motivo que se debe dar la importancia que requieren los pronósticos para evitar pérdidas o falta de ganancias.

- Normalmente se realizan regresiones para hacer previsiones y como existen datos faltantes, estos son llenados con ceros en la mayoría de los casos. Esto produce terribles errores dentro de los modelos y por ende en el acierto al estimado decrece; además en estos modelos no se incorpora la estacionalidad.

- Algunos productos son francamente impronosticables, debido a que, los datos faltantes están en mayor cantidad que los datos observados. En este caso es imposible realizar buenos pronósticos y normalmente se refieren a productos que son sacados a la venta muy esporádicamente.

- Como muchos de los productos son elaborados en el país, cada uno de ellos tiene aproximadamente treinta componentes, las cuales tienen un tiempo de fabricación específico y provienen de países diferentes. Por este motivo, hacer pronósticos coherentes ayuda a la empresa en planificar correctamente cada una de las importaciones de componentes que debe realizar, porque si están mal hechas las previsiones, en ocasiones se debe realizar transportes aéreos que resultan muy costosos.

4.2. RECOMENDACIONES

- Siempre es mejor utilizar las medianas móviles a las medias móviles por problemas de estabilidad en cuanto a valores anómalos.

- Se debería invertir en estudios estadísticos que mejoren los pronósticos en vez de contratar expertos que realicen el trabajo, cuando se lo podría hacer en la misma empresa y sin poner en peligro información muy delicada.

- Es preferible utilizar en este tipo de análisis el paquete Demetra 2.0 por la cantidad de información que provee, siendo la más importante las previsiones de la tendencia que realiza.

- Muchas veces el entender la estacionalidad que posee una serie no es tan evidente. Statgraphics 5.1 no la detecta y es necesario hacer un estudio previo antes de ingresar al programa. En el caso de Demetra 2.0 detecta, por defecto, en el caso de existir estacionalidad en la serie estudiada.

- Otro aspecto importante es el costo de los paquetes. Demetra 2.0 es de libre utilización mientras que Statgraphics 5.1 tiene un costo de $1.200 por la licencia individual.

- Se debería implementar el uso de archivos que contengan las intenciones de compra para comparar los valores con las estimaciones de los datos faltantes hechas por el paquete.

- Usualmente se utiliza la serie de ventas para realizar pronósticos. Se deberían utilizar las series de la demanda, porque el pronosticar con valores de venta cero, cuando realmente se demandaba un cierto número de unidades diferente de cero, provoca previsiones bajas en la mayoría de los casos.

- Se debería realizar un análisis de Pareto, para establecer cuales son los productos que aportan más en venta o en unidades a la Compañía, para hacer los pronósticos por medio de las series temporales, en aquellos más relevantes.

- Se debería establecer un modelo general para hacer las previsiones de manera global. En este tipo de negocio, existen muchas variables de tipo cualitativo que no se han tomado en cuenta y que probablemente son muy significativas dentro del modelo.

- Las variables que deberían ser estudiadas son:
  - ✓ Número de página en el catálogo;
  - ✓ Indicador de oferta millonaria (50% de descuento);
  - ✓ Indicador de si no estuvo a la venta por planificación en el mes pasado;
  - ✓ Indicador de si no estuvo a la venta por falta en el inventario el mes pasado;
  - ✓ Número de distribuidoras que han adquirido el producto;
  - ✓ Ventas del producto realizadas en el mes;
  - ✓ Indicador de día festivo (que implique obsequios) en el mes;
  - ✓ Porcentaje de descuento a la consultora;
  - ✓ Número de semanas dentro del mes (premios por monto);
  - ✓ Indicador de si el producto está por última vez en el catálogo;
  - ✓ Indicador 2x1;
  - ✓ Porcentaje de descuento en el producto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- "Time Series Análisis. Forecasting and Control", 2da. Edición, Box y Jenkins, Holden Day, 1994.

- "Course de Séries Temporelles", Gourieroux Chirstian, Monfort Alain, Economica, Paris, 1983.

- "Limitaciones de las Series desestacionalizadas para el análisis de la tendencia de corto plazo", Dagum Estela, Estadística, Revista del Instituto Interamericano de Estadística, Argentina, Junio 2000.

- "Smoothing seasonal time series for cyclical análisis", Dagum Estela, Estadística, Revista del Instituto Interamericano de Estadística, Argentina, Diciembre 2000.

- "Introduction to Statistical Time Series", Fuller Wayne, John Wiley & Sons, Estados Unidos, S.A.

- "El análisis de las series cronológicas y de las distribuciones de variables observadas a intervalos regulares", Ladiray Domenique, Laboratoire de Mèthodologie du Traitment des dones, Revista Methodologica, Bélgica, 1993.

- "A Course in Time Series Análisis", Peña Daniel, Tiao George, Tsay Ruey, John Wiley & Sons, Canada, 2001.

- "Análisis de datos atípicos en regresión lineal múltiple y series temporales", Delgado Pozo William Henry, Proyecto de Titulación, Febrero 2002.

- "Programs TRAMO AND SEATS", Gómez V. Y Maravall A, Documento de Trabajo n. 9628, Banco de España, 1996.

- “Seasonal Adjustment and Signal Extraction in economic time series”, Gómez V. Y Maravall A, Documento de Trabajo n. 9809, Banco de España, 1998.
- “Demetra 2.0 User Guide”, European Communities, Dosée Jens, 1999.

PÁGINAS WEB VISITADAS

- http://www.bde.es/servicio /software/tramo/sloutlier.pdf
- http://www.ine.es/daco/daco42/daco4214/cbtcs.pdf

Significado de las abreviaturas de la salida de Demetra 2.0[24]

SERIES DE TIEMPO RESULTANTES	ABREVIATURAS
Final Components	
Final Seasonally Adjusted Series	fa
Final Trend	ft
Final Seasonal Factors/Component	fs
Final Irregular Factors/Component	fi
Final Transitory Factors/Component	fc
Business Cycle (from Hodrick-Prescott filter)	b
Final Long-Term Trend (from Hodrick-Prescott filter)	fl
Business Cycle (from H-P filter) + Irregular	bi
Forecasted Final Components	
Forecasted Final Seasonally Adjusted Series	ft_f
Forecasted Final Trend	ft_f
Forecasted Final Cyclical Factors (Comp.)	fc_f
Forecasted Final Seasonal Factors (Comp.)	fs_f
Forecasted Final Irregular Factors (Comp.)	fi_f
Fcstd. Business Cycle (from Hodrick-Prescott filter)	b_f
Fcstd. Final Long-Term Trend (from Hodrick-Prescott filter)	fl_f
Fcstd. Business Cycle (from H-P filter) + Irregular	bi_f
Forecasted Original Uncorrected Series	o_f
Preliminary Result Series	
Seasonally Adjusted Series	a
Trend	t
Cyclical Factors (Component)	c
Seasonal Factors (Component)	s
Irregular Factors (Component)	i
Linearised series	l
Residuals	res
Interp. Series Corr. for Calendar Effects	omce
Standard Error of Seasonally Adjusted Series	sea
Standard Error of Trend	set
Standard Error of Seasonal Factors/Component	ses
Standard Error of Transitory Factors/Component	sec
Forecasted Preliminary Result Series	
Forecasted Seasonally Adjusted Series	a_f
Forecasted Trend	t_f
Forecasted Cyclical Factors (Component)	c_f
Forecasted Seasonal Factors (Component)	s_f

[24] Copyright © European Communities, 1999-2002. All rights reserved.

Pre-adjustment Factors (or Components)	
Aggregate Pre-Adjustment Factors (Component)	p
Aggregate Outlier Effects	po
Transitory Changes	ptc
Level Shifts	pls
Aggregate Trading Day Effects	pt
Easter Effect	pse
Non-Alloc. User-Regr. Effects (Sep. Comp.)	pun
User-Regr. Effects Allocated to Seas. Comp.	pus
User-Regr. Effects Allocated to Trend	put
User-Regr. Effects Allocated to Irreg. Comp.	pui
User-Regr. Effects Allocated to Seas. Adj. S.	pua
User-Regr. Effects Allocated to Cycle	puc
Forecasted Pre-Adjustment Factors (or Components)	
Forecasted Aggregate Pre-Adj. Factors (Comp.)	p_f
Forecasted Aggregate Outlier Effects	po
Forecasted Transitory Changes	ptc_f
Forecasted Level Shifts	pls_f
Forecasted Aggregate Trading Day Effects	pt_f
Forecasted Easter Effect	pse_f
Fcstd. Non-Alloc. User-Regr. Effects (Sep. Comp.)	pun_f
Fcstd. User-Regr. Effects Alloc. to Seas. Comp.	pus_f
Fcstd. User-Regr. Effects Alloc. to Trend	put_f
Fcstd. User-Regr. Effects Alloc. to Irreg. Comp.	pui_f
Fcstd. User-Regr. Effects Alloc. to Seas. Adj. S.	pua_f
Fcstd. User-Regr. Effects Alloc. to Cycle	puc_f