

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

**DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UNA ANTENA
PARABOLICA PRIME FOCUS, PARA RECEPCION
DE TV SATELITAL.**

**Tesis previa a la obtención del Título
de Ingeniero en la especialización de
Electrónica y Telecomunicaciones**

Eddy Jimena Enríquez Yáñez

Galo Rodrigo Erazo Durán

Diciembre 1998

**Certifico que la presente tesis fue
realizada en su totalidad por los
señores:**

**Eddy Jimena Enríquez Yáñez y
Galo Rodrigo Erazo Durán**

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Mario Cevallos V.', written over a horizontal line.

DIRECTOR DE TESIS

DEDICATORIA

**A todos nuestros familiares,
muy especialmente a nuestros
Padres y a Pablo Sebastián**

Jimena y Galo

AGRADECIMIENTO

A todos los que colaboraron con la realización de esta tesis, muy especialmente a los señores: Ing. Mario Cevallos V, Director de Tesis, Galo Erazo H. y Carlos Jaramillo. Sinceramente muchas gracias.

INDICE

INTRODUCCION viii

CAPITULO I:

Principio de Campo Equivalente 1

1. Principio de Campo Equivalente 2

CAPITULO II:

Aperturas 22

2.1 Aperturas rectangulares 23

2.1.1 Distribución uniforme sobre un plano de tierra
infinito 25

2.1.2 Distribución uniforme en el espacio 26

2.1.3 Distribución del modo TE_{10} sobre un plano de
tierra infinito 31

2.2 Aperturas circulares 47

2.2.1 Distribución uniforme sobre un plano de tierra
infinito 50

2.2.2 Distribución de modo TE_{11} sobre un plano de
tierra infinito 54

CAPITULO III:

Bocinas 61

3.1	Generalidades	62
3.2	Bocinas rectangulares	64
3.2.1	Bocina sectoral de plano E	65
3.2.1.1	Campos en la apertura	65
3.2.1.2	Campos radiados	70
3.3	Bocina Piramidal	88
3.3.1	Campos en la apertura, equivalente y campos radiados	89
3.3.2	Directividad	95
3.3.3	Procedimiento de diseño	105
3.4	Bocinas cónicas	107
3.5	Bocinas bicónicas	111

CAPITULO IV:

Parábolas 112

4.1	Introducción	113
4.2	Reflector parabólico con alimentador frontal	118
4.3	Densidad de corriente inducida	122
4.4	Método de la distribución en la apertura	124
4.4.1	Polarización cruzada	
4.5	Método de la distribución de corriente	135
4.5.1	Directividad y eficiencia de la apertura	142
4.6	Diseño del alimentador	160

CAPITULO V:

5. Diseño, construcción y pruebas experimentales 162

5.1	Diseño de la antena prime focus	163
5.2	Diseño del reflector de la antena	171
5.3	Diseño y selección del alimentador	172
5.4	Construcción de la antena	173
5.4.1	Cálculo de las dimensiones de los segmentos de la superficie del reflector	179
5.5	Medición de características de la antena diseñada	181
5.5.1	Método de medida	182
5.5.2	Ganancia de la antena	183
5.5.3	Ancho del rayo y lóbulos laterales	186

CAPITULO VI:

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 188

6.1	Conclusiones	189
6.2	Recomendaciones	190

BIBLIOGRAFIA 193

ANEXOS

1. Ecuaciones adicionales
2. Integrales de Fresnel y funciones de Bessel

INTRODUCCION

Las comunicaciones satelitales en los últimos tiempos están siendo cada vez más utilizadas por diferentes sectores de la población en servicios como TV, transmisión de datos, comunicaciones radiales, telefonía, etc. Una de las partes de un sistema satelital son las antenas parabólicas, siendo crítico tener un buen diseño y construcción, en buena parte, de esto dependerá la "calidad" del enlace.

Esta tesis trata de cubrir el marco teórico, el diseño y la construcción de una antena parabólica Prime Focus. Para ello en primer lugar revisamos el Principio de Equivalencia, el cual se usa para determinar los campos eléctricos y magnéticos generados por antenas, en las que no se puede determinar la distribución de corriente como es el caso de aperturas, bocinas, reflectores, etc.

Se revisan tanto aperturas rectangulares como circulares, cuyos conceptos se utilizan en el análisis de bocinas las mismas que sirven como alimentadores en antenas parabólicas. Se analizan con detalle las bocinas de plano E y las piramidales que son bocinas sectoriales de plano E y plano H.

Se presenta la teoría de los reflectores parabólicos, especialmente de los que tienen alimentador frontal, así como el diseño, la construcción y pruebas experimentales a las que se sometió a la antena fabricada. Debido a que hubo dificultades en la construcción que afectaron a la eficiencia de la antena, se tuvieron que realizar correctivos que permitieron obtener una antena con una eficiencia aceptable; con la que captamos la señal de Direct TV en buenas condiciones.

CAPITULO I:
PRINCIPIO DE CAMPO EQUIVALENTE

1. PRINCIPIO DE CAMPO EQUIVALENTE

Las características de radiación de las antenas de alambre pueden determinarse una vez que se conoce la distribución de corriente en el alambre. Sin embargo, para muchas configuraciones la distribución de corriente no se conoce exactamente y solo por medio de medidas o intuiciones físicas puede darse una estimación razonable. Esto es más evidente en antenas de apertura (aberturas, guías de onda, bocinas, reflectores, lentes). Por lo tanto es conveniente buscar métodos alternativos para computar las características de radiación de este tipo de antenas. Uno de los métodos que da una aproximación razonable de los campos en las vecindades de la antena es el Principio de Campo Equivalente.

La equivalencia de campo se introdujo en 1936 por Schelkunof y su más rigurosa formulación es el principio de Huygens el cual dice que "cada punto sobre un frente de onda primario puede considerarse como la fuente de una onda esférica secundaria. Las ondas esféricas secundarias generadas por los puntos de un frente de onda entonces se combinan para formar un nuevo frente de onda, el nuevo frente de onda sería la envolvente de las ondas esféricas secundarias". Así una onda esférica cuya fuente es un simple punto se propaga como una onda esférica como se muestra en la figura 1.1a. Por otro

lado una onda plana infinita continúa como onda plana como sugiere la figura 1.1b.

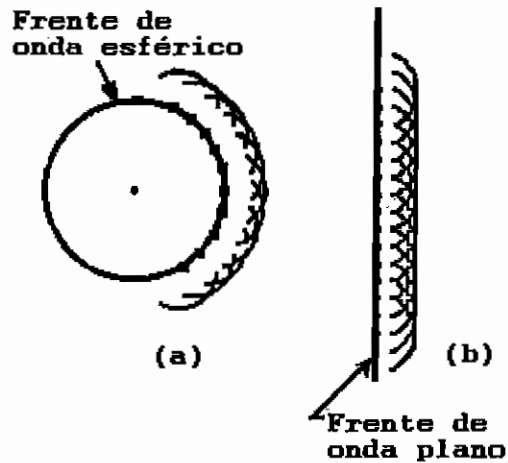


Figura 1.1 **1.1a Frente de onda esférico**

1.1b Frente de onda plano¹ [1]

El principio de campo equivalente es un principio por el que una fuente real, tal como una antena, se reemplaza por una fuente equivalente. La fuente ficticia es equivalente dentro de una región porque produce el mismo campo dentro de esa región que la antena real.

El principio de equivalencia está basado en el teorema que dice que un campo en una región desconocida es únicamente especificado por las fuentes dentro de la región más los componentes tangenciales del campo eléctrico sobre los bordes, o los componentes tangenciales del campo magnético sobre los

¹ Los números indicados entre corchetes corresponden a las referencias bibliográficas que se indican al final de la tesis.

bordes, o las primeras sobre parte del borde y las siguientes sobre el resto del borde.

El campo en un medio conocido es considerado como el límite, cuando las pérdidas van a cero, del correspondiente campo en un medio desconocido.

De este modo si las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético son completamente conocidas en una superficie cerrada, pueden determinarse los campos en una región libre de fuentes.

Los campos fuera de una superficie cerrada imaginaria se obtienen ubicando sobre dicha superficie cerrada densidades apropiadas de corriente eléctrica y magnética las cuales satisfacen las condiciones de borde. Las densidades de corriente se seleccionan de tal forma que los campos dentro de la superficie cerrada sean cero y fuera ellos sean iguales a la radiación producida por las fuentes reales. De este modo la técnica puede usarse para obtener los campos radiados fuera de una superficie cerrada por fuentes dentro de ella. La formulación es exacta pero requiere integración sobre la superficie cerrada. El grado de precisión depende del conocimiento de las componentes tangenciales de los campos sobre la superficie cerrada.

En la mayoría de aplicaciones, la superficie cerrada se selecciona de manera que coincida con las partes conductoras de la estructura física. Esto se prefiere porque el desvanecimiento de las componentes tangenciales eléctricas sobre las partes conductoras de la superficie reduce los límites físicos de integración.

El principio de equivalencia se desarrolló considerando una fuente real radiando, lo cual eléctricamente se representa por densidades de corriente eléctrica $\bar{\mathbf{J}}_1$ y magnética $\bar{\mathbf{M}}_1$ como se muestra en la figura 1.2. La fuente radia campos $\bar{\mathbf{E}}_1$ y $\bar{\mathbf{H}}_1$ en toda dirección. Sin embargo, se desea desarrollar un método que permita conocer los campos fuera de una superficie cerrada. Para cumplir esto, se escoge una superficie cerrada \mathbf{S} , la cual se muestra punteada en la figura 1.2a, la cual encierra las densidades de corriente $\bar{\mathbf{J}}_1$ y $\bar{\mathbf{M}}_1$. El volumen dentro de \mathbf{S} es llamado \mathbf{V}_1 y fuera de \mathbf{S} \mathbf{V}_2 . La primera tarea será reemplazar el problema original, mostrado en la figura 1.2a, por un equivalente en el cual se producen los mismos campos $\bar{\mathbf{E}}_1$ y $\bar{\mathbf{H}}_1$ fuera de \mathbf{S} (dentro de \mathbf{V}_2). La formulación del problema puede ayudarse si la superficie cerrada se escoge adecuadamente de tal forma que los campos se conozcan en toda la superficie o en la mayor parte de ella.

Un problema equivalente al de la figura 1.2a se muestra en la figura 1.2b. Las fuentes originales $\bar{\mathbf{J}}_1$ y $\bar{\mathbf{M}}_1$ se quitan, y

nosotros asumimos que existen campos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ dentro de \mathbf{S} y campos $\bar{\mathbf{E}}_1$ y $\bar{\mathbf{H}}_1$ fuera de \mathbf{S} . Para que estos campos existan dentro y fuera de \mathbf{S} , las componentes tangenciales de campo eléctrico y magnético deben satisfacer las condiciones de borde.

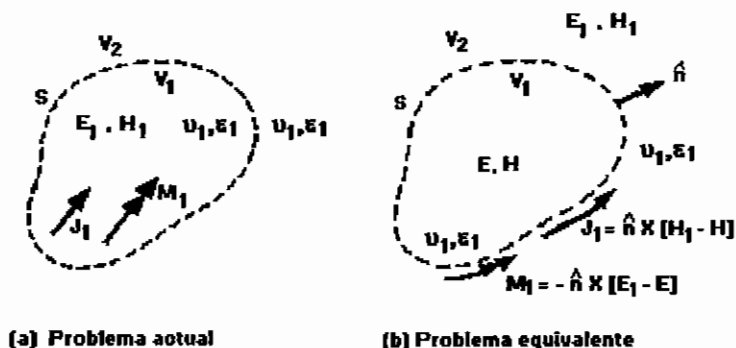


Figura 1.2 Gráfico de los problemas actual y equivalente.[2]

De este modo en la superficie imaginaria \mathbf{S} deben existir las fuentes equivalentes

$$\vec{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times [\vec{\mathbf{H}}_1 - \vec{\mathbf{H}}] \quad \text{Ec. 1.1}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times [\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}] \quad \text{Ec. 1.2}$$

y radian dentro de un espacio ilimitado (el mismo medio físico en todas partes). Las densidades de corriente de 1.1 y 1.2 se dicen equivalentes solo dentro de \mathbf{V}_2 , porque son capaces de producir los campos originales $\bar{\mathbf{E}}_1$ y $\bar{\mathbf{H}}_1$ solo fuera de \mathbf{S} . Unos campos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$, diferentes de los originales ($\bar{\mathbf{E}}_1$ y $\bar{\mathbf{H}}_1$) pueden resultar dentro de \mathbf{V}_1 . Puesto que las corrientes de 1.1 y 1.2 radian en un espacio ilimitado, los campos pueden determinarse utilizando las ecuaciones 1.3 - 1.8 y la geometría de la figura 1.3a.

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad \text{Ec. 1.3}$$

$$\bar{F} = \frac{\epsilon}{4\pi} \iiint_V \bar{M} \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad \text{Ec. 1.4}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_A + \bar{E}_F = -j\omega\bar{A} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \bar{F} \quad \text{Ec. 1.5}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_A + \bar{E}_F = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \bar{H}_A - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \bar{F} \quad \text{Ec. 1.6}$$

$$\bar{H} = \bar{H}_A + \bar{H}_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} - j\omega\bar{F} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{F}) \quad \text{Ec. 1.7}$$

$$\bar{H} = \bar{H}_A + \bar{H}_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \bar{E}_F \quad \text{Ec. 1.8}$$

En la figura 1.3a, R es la distancia desde cualquier punto sobre la superficie S , donde existen \bar{J}_s y \bar{M}_s , al punto de observación.

Debido a la singularidad de los conceptos electromagnéticos, se conoce que sólo las componentes tangenciales de \bar{E} ó de \bar{H} se necesitan para determinar los campos. Esto demuestra que para solucionar el problema equivalente solo se requiere conocer las corrientes magnéticas (tangencial \bar{E}) o solo las corrientes eléctricas (tangencial \bar{H}). Esto exigirá realizar modificaciones al problema equivalente que se muestra en el gráfico de la figura 1.2b.

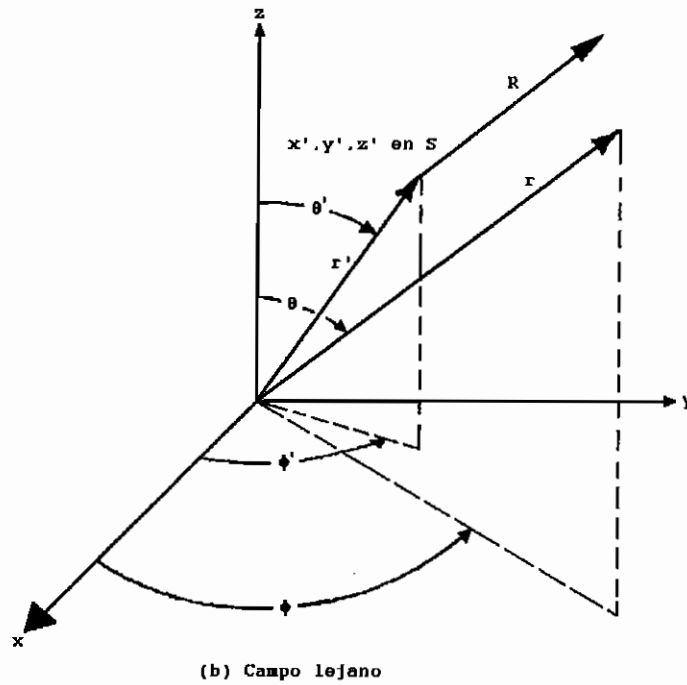
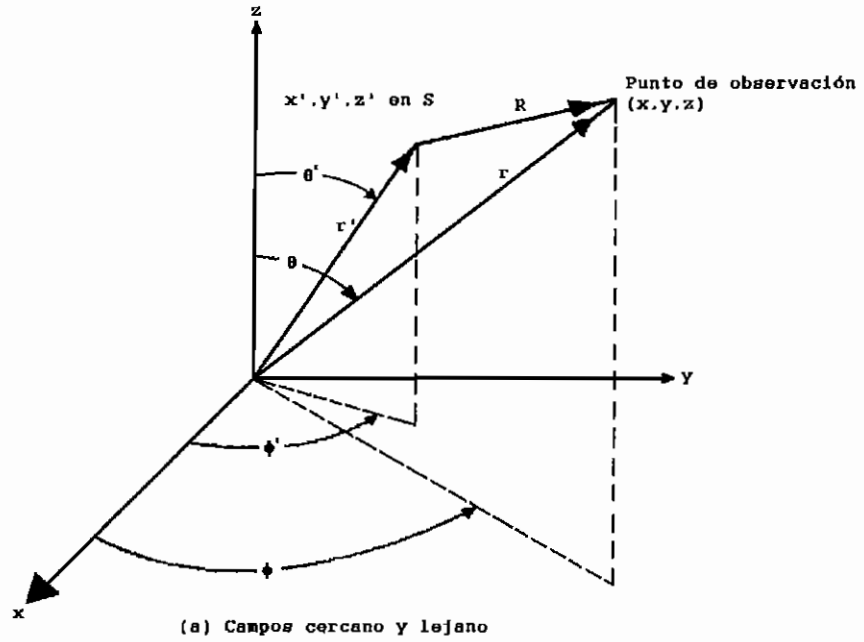


Figura 1.3 Sistema de coordenadas para el análisis de una antena de apertura.[3]

Puesto que los campos \bar{E} y \bar{H} dentro de S pueden ser de cualquier valor (esta no es la región de interés), se puede asumir que son cero. En este caso el problema equivalente de

la figura 1.2b se reduce al problema que se muestra en la figura 1.4a con las densidades de corriente iguales a:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}]_{H=0} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 \quad \text{Ec. 1.9}$$

$$\mathbf{M}_s = -\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}]_{E=0} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 \quad \text{Ec. 1.10}$$

Esta forma del principio de campo equivalente se conoce como el principio de equivalencia de Love [4]. Puesto que las densidades de corriente de las ecuaciones 1.9 y 1.10 están radiando en un medio ilimitado (mismo μ, ϵ en todas las partes del medio) se pueden usar las ecuaciones 1.3 - 1.8 para encontrar los campos en cualquier lugar de la región.

El principio de equivalencia de Love de la figura 1.4a produce un campo eléctrico nulo dentro de la superficie imaginaria \mathbf{S} . Este valor de $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$ no variará si se cambia el medio dentro de \mathbf{S} , vamos asumir que lo reemplazamos por un conductor eléctrico perfecto ($\delta = \alpha$). La introducción del conductor perfecto puede tener un efecto sobre la fuente equivalente $\bar{\mathbf{J}}_s$, y no podríamos usar las ecuaciones 1.3 - 1.8 debido a que las densidades de corriente no son radiadas dentro de un medio ilimitado.

Imagínese que la configuración geométrica del conductor eléctrico es idéntica al perfil de la superficie imaginaria \mathbf{S} , sobre la que existen $\bar{\mathbf{J}}_s$ y $\bar{\mathbf{M}}_s$. Como el conductor eléctrico ocupa

\mathbf{S} , como se muestra en la figura 1.4b, la densidad de corriente eléctrica $\bar{\mathbf{J}}_s$, la cual es tangente a la superficie \mathbf{S} , se cortocircuita por el conductor eléctrico. Entonces el problema equivalente de la figura 1.4a se reduce al de la figura 1.4b. Ahí existe solo una densidad de corriente magnética $\bar{\mathbf{M}}_s$ sobre \mathbf{S} , radiando sobre el conductor eléctrico produciendo fuera de \mathbf{S} los campos originales $\bar{\mathbf{E}}_1$ y $\bar{\mathbf{H}}_1$. Dentro de \mathbf{S} los campos son cero pero, como antes esta no es la región de interés. La dificultad de usar el problema equivalente de la figura 1.4b radica en que no se pueden usar las ecuaciones 1.3 - 1.8, debido a que las densidades de corriente no están radiándose en un medio ilimitado.

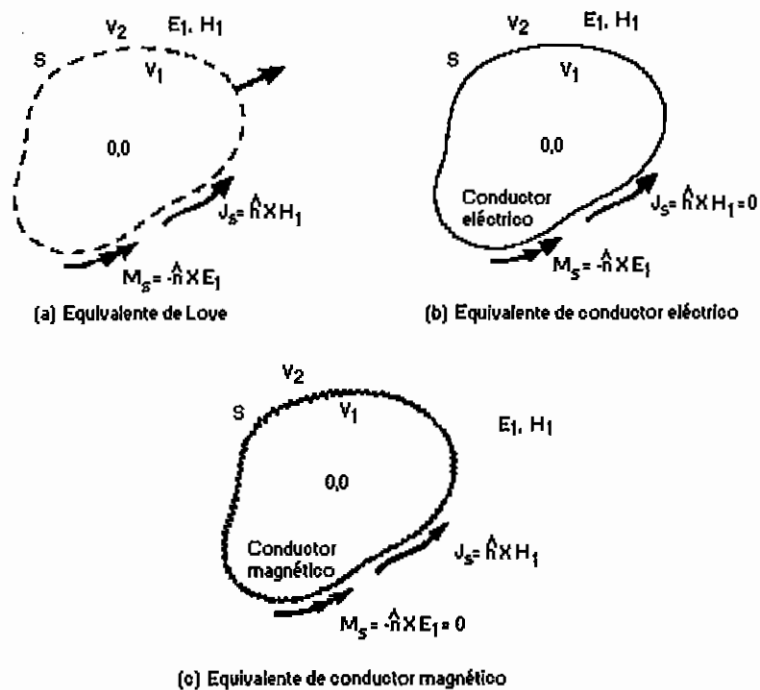


Figura 1.4 Equivalentes principales. [5]

El problema de una corriente magnética radiándose en la presencia de una superficie conductora eléctrica debe solucionarse. Así que el problema equivalente es tan difícil como el mismo problema original.

Refiriéndonos a la figura 1.4a vamos a asumir que en lugar de ubicar un conductor eléctrico perfecto dentro de S introducimos un conductor magnético perfecto en donde se "cortocircuita" la corriente magnética y el problema equivalente se reduce al que se muestra en la figura 1.4c. Pero como sucedía en el problema de la figura 1.4b tampoco se pueden usar las ecuaciones 1.3 - 1.8, así que el problema de la figura 1.4c es igual de difícil que el de la figura 1.4b o el original de la figura 1.2a.

Para comenzar a ver la utilidad del principio de campo equivalente, vamos a usar la figura 1.4b, asumamos que la superficie del conductor eléctrico es bastante delgada y se extiende hasta el infinito como se muestra en la figura 1.5a. Para esta geometría, el problema es determinar como una fuente magnética radia en la presencia de un conductor eléctrico delgado. Desde una teoría imaginaria, este problema se reduce al de la figura 1.5b donde una fuente magnética imaginaria se introduce por el lado del conductor y toma su lugar (reemplaza al conductor). Puesto que la fuente imaginaria esta en la misma dirección de la fuente equivalente, el problema de la

fuente equivalente de la figura 1.5b se reduce al de la figura 1.5c. La corriente magnética se duplica, y esta radiando en un medio ilimitado, y 1.3 - 1.8 pueden usarse. El problema equivalente de la figura 1.5c produce los campos correctos \vec{E} y \vec{H} en el lado derecho de la interfaz.

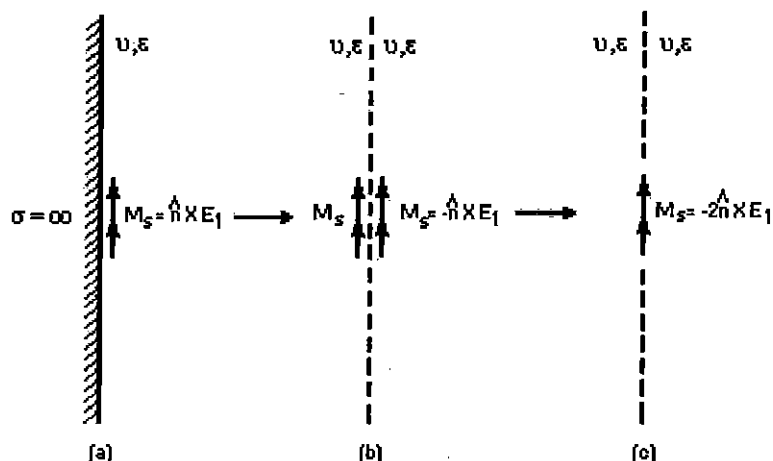


Figura 1.5 Modelo equivalente para una fuente magnética radiando cerca a un conductor eléctrico perfecto. [6]

Para puntos ubicados a gran distancia de la fuente el integral puede simplificarse, y la integración es fácil. Para puntos cercanos a la fuente, sin embargo, la integral no se simplifica pero puede reducirse a una forma conocida como integral de Fresnel (Anexo 2). Esta integral es a menudo evaluada con la ayuda de una curva conocida como el espiral de Cornu. La variación del campo en la cercanía de la fuente obtenida de esta forma es comúnmente llamada modelo de difracción de Fresnel a lo largo de una línea recta paralela a

la fuente y a corta distancia de ésta, la variación de campo se sugiere como la que se muestra en la figura 1.5a, la variación se aproxima a la distribución de campo uniforme en la fuente como se muestra en la figura 1.5b. A medida que la distancia x desde la fuente se incrementa, el modelo de Fresnel cambia a través de una serie de formas transicionales, tal como sugerimos en la figura 1.5b, hasta que a largas distancias ingresamos a la región de Fraunhofer y el modelo asume la forma mostrada en la figura 1.5c. Normalmente este modelo se obtiene rotando la fuente alrededor de su centro de modo que el campo se observa en un radio constante mayor que una distancia constante x . El modelo de campo resultante en coordenadas polares es entonces el de la figura 1.5d. Una vez que hemos ingresado en la región de Fraunhofer, el modelo es igual para cualquier distancia mayor. Un punto ubicado en esta región, debe estar a una suficiente distancia desde la fuente de tal manera que podamos asumir que las líneas que se extienden desde el borde de la fuente a ese punto son paralelas.

Se debe mencionar que el principio de Huygens tiene sus limitaciones. No toma en cuenta la naturaleza del vector de campo electromagnético, también omite el efecto de las corrientes que fluyen desde los bordes de las ranuras de la figura 1.6.

Los pasos que se deben usar para formar y solucionar un problema de apertura son los siguientes:

1. Seleccionar una superficie imaginaria que encierre las fuentes reales (la apertura). La superficie debe escogerse adecuadamente de tal forma que las componentes tangenciales de campo eléctrico y magnético se conozcan, exactamente o aproximadamente sobre toda su extensión. En muchos casos esta superficie es un plano sumamente delgado y que se extiende hasta el infinito.

2. Sobre la superficie imaginaria formar densidades de corriente equivalentes $\bar{\mathbf{J}}_s$ y $\bar{\mathbf{M}}_s$, las que toman una de las siguientes formas:
 - a) $\bar{\mathbf{J}}_s$ y $\bar{\mathbf{M}}_s$ sobre \mathbf{S} asumiendo que los campos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ dentro de \mathbf{S} no son cero
 - b) o $\bar{\mathbf{J}}_s$ y $\bar{\mathbf{M}}_s$ sobre \mathbf{S} asumiendo que los campos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ dentro de \mathbf{S} son cero (teorema de Love)
 - c) o $\bar{\mathbf{M}}_s$ sobre \mathbf{S} ($\bar{\mathbf{J}}_s = 0$) asumiendo que dentro de \mathbf{S} el medio es perfecto conductor eléctrico
 - d) o $\bar{\mathbf{J}}_s$ sobre \mathbf{S} ($\bar{\mathbf{M}}_s = 0$) asumiendo que dentro de \mathbf{S} el medio es un perfecto conductor magnético

3. Solucionar el problema equivalente. Para las formas **a** y **b** pueden usarse las ecuaciones 1.3 - 1.8. Para la forma **c** no pueden usarse estas ecuaciones

directamente porque la densidad de corriente no radía en un medio ilimitado. Si el conductor eléctrico es un plano delgado e infinito, el problema puede solucionarse por la teoría descrita antes (principio de equivalencia de campo). Para la forma **d** el problema otra vez no puede solucionarse usando 1.3 - 1.8 directamente, si el conductor magnético es un plano delgado e infinito, el problema se soluciona utilizando el principio de campo equivalente.

Para demostrar la utilidad del teorema de campo equivalente en la teoría de las antenas de apertura, vamos a considerar un ejemplo.

Una apertura de guía de onda se monta en un plano de tierra infinito, como muestra la figura 1.7a. Asumiendo que las componentes tangenciales de campo eléctrico sobre la apertura se conocen y están dadas por $\bar{\mathbf{E}}_a$, encontrar un problema equivalente que produzca los mismos campos radiados $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ por la apertura en el lado derecho del interfaz.

Primero escogemos una superficie cerrada. Para este problema es apropiado seleccionar un plano delgado extendiéndose desde menos infinito hasta más infinito como se

muestra en la figura 1.7b. Sobre el plano infinito se forman las densidades de corriente equivalentes \bar{J}_s y \bar{M}_s .

Puesto que las componentes tangenciales de \bar{E} y \bar{H} no existen fuera de la apertura, a causa del desvanecimiento en los bordes (condiciones de borde), la densidad de corriente magnética \bar{M}_s solo es diferente de cero sobre la apertura. La densidad de corriente eléctrica \bar{J}_s es diferente de cero en cualquier parte y es sin embargo desconocida. Ahora vamos a asumir que un imaginario conductor eléctrico delgado se acerca a la superficie S y cortocircuita a la densidad de corriente \bar{J}_s en cualquier lugar. \bar{M}_s solo existe sobre el espacio ocupado originalmente por la apertura, y radia en presencia del conductor (ver figura 1.7b).

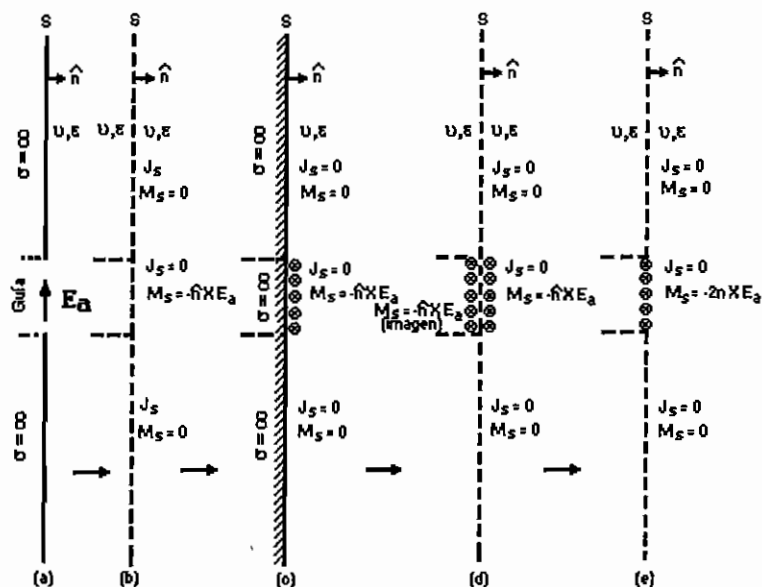


Figura 1.7 Modelos equivalentes para la apertura de una guía de onda montada sobre un plano eléctrico delgado e infinito. [8]

Por la teoría desarrollada el conductor puede removerse y reemplazarse por una fuente imaginaria (equivalente) $\bar{\mathbf{M}}_s$ como muestra la figura 1.7d, la cual es análoga a la figura 1.5b. Finalmente el problema equivalente de la figura 1.7d se reduce al de la figura 1.7e, el cual es análogo al de la figura 1.5c. Entonces el problema original ha sido reducido a un muy simple equivalente, y 1.3 - 1.8 pueden usarse para su solución.

Para campo lejano $\mathbf{R} \approx \mathbf{r}$ en distancia

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}' \cos \psi \quad \text{en fase} \quad \psi = \phi - \phi'$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_s \mathbf{J}_s \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' = \frac{\mu}{4\pi} e^{-j\beta r} \bar{\mathbf{N}}$$

La integral de volumen se reduce a integral de superficie porque la fuente es una superficie

$$\bar{\mathbf{N}} = \int_s \mathbf{J}_s e^{j\beta r' \cos \phi} ds' = \bar{\mathbf{N}}_r + \bar{\mathbf{N}}_\phi + \bar{\mathbf{N}}_\theta$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_s \bar{\mathbf{M}}_s \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r} \bar{\mathbf{L}}$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \int_s \bar{\mathbf{M}}_s e^{j\beta r' \cos \phi} ds' = \bar{\mathbf{L}}_r + \bar{\mathbf{L}}_\phi + \bar{\mathbf{L}}_\theta$$

Para campo lejano (de radiación se tiene solamente las componentes θ y ϕ de los campos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$.

Campos debidos a una fuente $\bar{\mathbf{J}} = \text{potencial } \bar{\mathbf{A}}$

$$\left. \begin{array}{l} E_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{array} \right\} \bar{\mathbf{E}}_A = j\omega \bar{\mathbf{A}}$$

$$\left. \begin{aligned} H_\theta &= j\omega A_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi &= -j\frac{\omega}{\eta} A_\theta = \frac{E_\theta}{\eta} \end{aligned} \right\} \vec{H}_A = \frac{\vec{a}_r}{\eta} \times \vec{E}_A = -j\frac{\omega}{\eta} \vec{a}_r \times \vec{A}$$

Campos debidos a una fuente $\vec{M} \Rightarrow$ **Potencial** \vec{F}

$$\left. \begin{aligned} H_\theta &= -j\omega F_\theta \\ H_\phi &= -j\omega F_\phi \end{aligned} \right\} \vec{H}_F = -j\omega \vec{F}$$

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= j\omega F_\phi = \eta H_\phi \\ E_\phi &= -j\omega F_\theta = -\eta H_\theta \end{aligned} \right\} \vec{E}_F = -\eta \vec{a}_r \times \vec{H}_F = j\frac{\omega}{\eta} \vec{a}_r \times \vec{F}$$

Por superposición

$$E_\theta = -j\omega A_\theta + j\omega F_\phi$$

$$E_\theta = \frac{-j\omega\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r} N_\theta + \frac{j\omega\epsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r} L_\phi$$

$$E_\theta = \frac{-j2\pi f\sqrt{\mu}\sqrt{\mu}\sqrt{\epsilon} e^{-j\beta r}}{4\pi r\sqrt{\epsilon}} N_\theta + \frac{j2\pi f\sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\sqrt{\mu} e^{-j\beta r}}{4\pi\sqrt{\mu}r} L_\phi$$

$$E_\theta = \frac{-j\beta\eta e^{-j\beta r}}{4\pi r} N_\theta + \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r\eta} L_\phi = \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[\frac{L_\phi}{\eta} - \eta N_\theta \right]$$

Ecuación de potenciales

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J} \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv'$$

con origen en el centro de coordenadas

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \vec{J} \frac{e^{-j\beta(r-r'\cos\psi)}}{r} ds'$$

porque es corriente superficial no en el origen.

ψ = ángulo entre los vectores \vec{r} y \vec{r}'

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r} \vec{N}; \vec{N} = \int_S \vec{J}_s e^{+j\beta r' \cos\psi} ds = N_r \vec{a}_r + N_\theta \vec{a}_\theta + N_\phi \vec{a}_\phi$$

$$\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_s \vec{M}_s \frac{e^{-j\beta(r-r' \cos \varphi)}}{r} ds'$$

corriente magnética superficial no en el origen

$$\vec{F} = \frac{\epsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r} \vec{L}; \vec{L} = \int_s \vec{M}_s e^{+j\beta r' \cos \varphi} ds'$$

Campos totales

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F = -j\omega \vec{A} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F}$$

\vec{E}_A campo eléctrico debido al potencial vectorial magnético \vec{A}

\vec{E}_F campo eléctrico debido al potencial vectorial eléctrico \vec{F}

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_F = -j\omega \vec{F} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}$$

Para campos de radiación o campos lejanos por la forma de radiación existen cuando más las componentes

$$E_\theta, E_\phi, H_\phi, H_\theta, E_r = 0 \quad H_r = 0$$

Cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned} (E_A)_\theta &= -j\omega A_\theta & ; & & (E_A)_\phi &= -j\omega A_\phi \\ (E_F)_\theta &= -j\omega \eta F_\phi = \eta (H_F)_\phi & ; & & (E_F)_\phi &= +j\omega \eta F_\theta = -\eta (H_F)_\theta \\ (H_F)_\theta &= -j\omega F_\theta & ; & & (H_F)_\phi &= -j\omega F_\phi \\ (H_A)_\theta &= +j\omega \frac{A_\phi}{\eta} = -\frac{(E_A)_\phi}{\eta} & ; & & (H_A)_\phi &= -j\omega \frac{A_\theta}{\eta} = \frac{(E_A)_\theta}{\eta} \end{aligned}$$

Introduciendo las ecuaciones potenciales solo para campo lejano tenemos:

$$E_{\theta} = \frac{-j\beta e^{j\beta r}}{4\pi r} [L_{\phi} + \eta N_{\theta}] \quad H_{\theta} = \frac{j\beta e^{j\beta r}}{4\pi r} [N_{\phi} - \frac{L_{\theta}}{\eta}]$$

$$E_{\phi} = \frac{+j\beta e^{j\beta r}}{4\pi r} [L_{\theta} - \eta N_{\phi}] \quad H_{\phi} = \frac{-j\beta e^{j\beta r}}{4\pi r} [N_{\theta} + \frac{L_{\phi}}{\eta}]$$

Las componentes L_{θ} , L_{ϕ} , N_{θ} , N_{ϕ} se obtienen de

$$\vec{N} = \iint_S \vec{J}_s e^{j\beta r' \cos \phi} ds' = \iint_S (a_x J_x + a_y J_y + a_z J_z) e^{j\beta r' \cos \phi} ds'$$

$$\vec{L} = \iint_S \vec{M}_s e^{j\beta r' \cos \phi} ds' = \iint_S (a_x M_x + a_y M_y + a_z M_z) e^{j\beta r' \cos \phi} ds'$$

En componentes esféricas

$$N_{\theta} = \iint_S [J_x \cos \theta \cos \phi + J_y \cos \theta \sin \phi - J_z \sin \theta] e^{j\beta r' \cos \phi} ds'$$

$$N_{\phi} = \iint_S [-J_x \sin \phi + J_y \cos \phi] e^{j\beta r' \cos \phi} ds'$$

$$L_{\theta} = \iint_S [M_x \cos \theta \cos \phi + M_y \cos \theta \sin \phi - M_z \sin \theta] e^{j\beta r' \cos \phi} ds'$$

$$L_{\phi} = \iint_S [-M_x \sin \phi + M_y \cos \phi] e^{j\beta r' \cos \phi} ds'$$

CAPITULO II:

APERTURAS

2.1 APERTURAS RECTANGULARES

La apertura rectangular es probablemente, en la práctica, la más común de las antenas usada en microondas. Debido a su configuración, el sistema de coordenadas rectangulares es el más conveniente para expresar los campos en la apertura y realizar la integración. En la figura 2.1a la apertura descansa en el plano $y-z$, en la figura 2.1b en el plano $x-z$, y en la figura 2.1c en el plano $x-y$. Para una distribución de campo dada, las formas analíticas para los campos para cada uno de los arreglos no serian iguales. Sin embargo los valores calculados serán los mismos, puesto que el problema físico es idéntico en todos los casos.

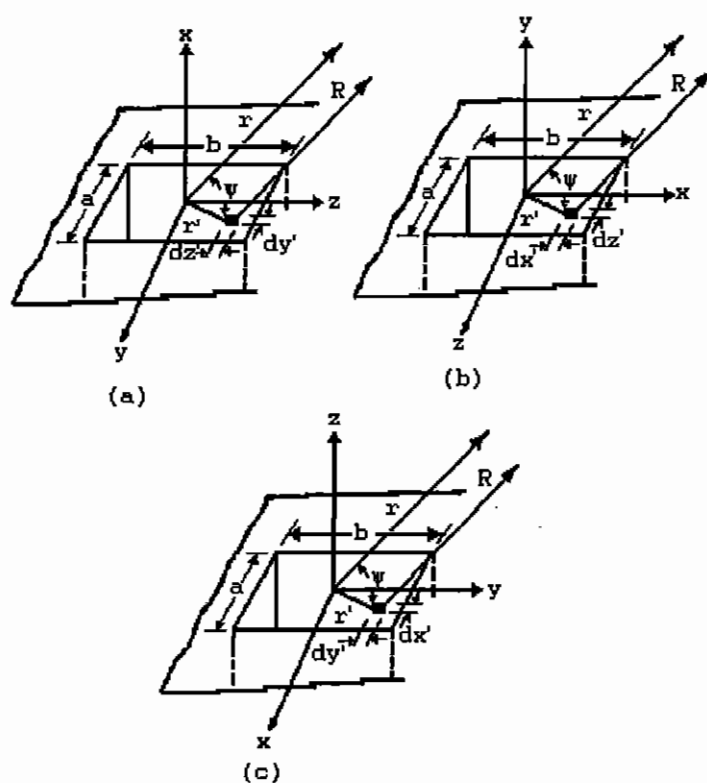


Figura 2.1 Apertura rectangular en diferentes posiciones para analizar un sistema de antena. [2]

Para cada una de las geometrías mostradas en la figura 2.1, la única diferencia en el análisis será la formulación de

1. las componentes de las corrientes equivalentes ($J_x, J_y, J_z, M_x, M_y, M_z$)
2. la diferencia en la trayectoria desde la fuente al punto de observación ($r' \cos \psi$)
3. el diferencial de área ds' .

En general, las componentes diferentes de cero de \bar{J}_s y \bar{M}_s son:

$$J_y, J_z, M_y, M_z \quad [\text{Figura 2.1a}] \quad \text{Ec. 2.1a}$$

$$J_x, J_z, M_x, M_z \quad [\text{Figura 2.1b}] \quad \text{Ec. 2.1b}$$

$$J_x, J_y, M_x, M_y \quad [\text{Figura 2.1c}] \quad \text{Ec. 2.1c}$$

Los diferenciales del trayecto toman la forma de

$$\begin{aligned} r' \cos \psi &= (\bar{r}' \cdot \bar{a}_r = \bar{a}_y y' + \bar{a}_z z') \cdot (\bar{a}_x \sin \theta \cos \phi + \bar{a}_y \sin \theta \sin \phi + \bar{a}_z \cos \theta) \\ &= y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta \quad [\text{figura 1a}] \quad \text{Ec. 2.2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r' \cos \psi &= \bar{r}' \cdot \bar{a}_r = (\bar{a}_x x' + \bar{a}_z z') \cdot (\bar{a}_x \sin \theta \cos \phi + \bar{a}_y \sin \theta \sin \phi + \bar{a}_z \cos \theta) \\ &= x' \sin \theta \cos \phi + z' \cos \theta \quad [\text{figura 1b}] \quad \text{Ec. 2.2b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r' \cos \psi &= \bar{r}' \cdot \bar{a}_r = (\bar{a}_x x' + \bar{a}_y y') \cdot (\bar{a}_x \sin \theta \cos \phi + \bar{a}_y \sin \theta \sin \phi + \bar{a}_z \cos \theta) \\ &= x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi \quad [\text{figura 1c}] \quad \text{Ec. 2.2c} \end{aligned}$$

y los diferenciales de área son representados por:

$$ds' = dy' dz' \quad [\text{Figura 2.1a}] \quad \text{Ec. 2.3a}$$

$$ds' = dx' dz' \quad [\text{Figura 2.1b}] \quad \text{Ec. 2.3b}$$

$$ds' = dx' dy' \quad [\text{Figura 2.1c}] \quad \text{Ec. 2.3c}$$

2.1.1 DISTRIBUCION UNIFORME SOBRE UN PLANO DE TIERRA INFINITO

La primera apertura a examinarse es una apertura rectangular montada sobre un plano de tierra infinito, como se muestra en la figura 2.2. Para reducir las complejidades matemáticas, inicialmente el campo sobre la apertura se asumirá constante y dado por:

$$\bar{E}_a = \bar{a}_y E_0 \quad -a/2 \leq x' \leq a/2, \quad -b/2 \leq y' \leq b/2 \quad \text{Ec. 2.4}$$

donde E_0 es una constante. La tarea será encontrar los campos radiados por la apertura, los niveles de los lóbulos laterales y la directividad. Para cumplir esto, primero debe formarse el problema equivalente.

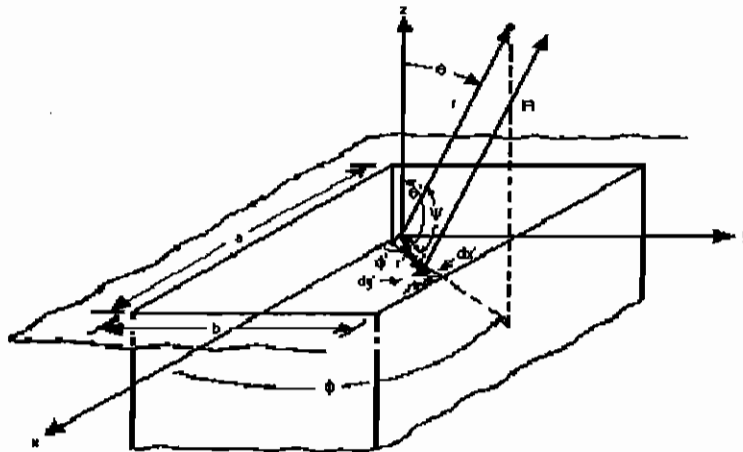


Figura 2.2 Apertura rectangular sobre un plano de tierra eléctrico infinito.[2]

2.1.1.1 EQUIVALENTE

Para formar el equivalente, se escoge una superficie cerrada la cual se extiende desde $-\alpha$ a $+\alpha$ sobre el plano $\mathbf{x-y}$. Puesto que el problema físico de la figura 2.2 es idéntico al de la figura 1.7 (Capítulo 1), sus equivalentes son aquellos de las figuras 1.7a - e. Usando el equivalente de la figura 1.7e.

$$\bar{M}_s = \begin{cases} -2\bar{n} \times \bar{E}_a = -2\bar{a}_x \times \bar{a}_y E_o = +\bar{a}_x E_o & \begin{cases} -a/2 \leq x' \leq a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq b/2 \end{cases} \\ 0 & \text{En cualquier otro lugar} \end{cases}$$

$$\bar{J}_s = 0 \quad \text{En cualquier lugar} \quad \text{Ec. 2.5}$$

2.1.1.2 RADIACION DE CAMPOS: FACTORES ELEMENTALES Y ESPACIALES

Los campos radiados por la apertura de la figura 2.2 en la zona lejana pueden encontrarse usando las ecs. 11.10a - 11.10f, 11.12a - 11.12d del anexo, 2.1, 2.1c, 2.2c, 2.3c y 2.5. Entonces,

$$N_\theta = N_\phi = 0 \quad \text{Ec. 2.6}$$

$$L_\theta = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [M_x \cos \theta \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy'$$

$$L_\theta = \cos \theta \cos \phi \int_{-b/2}^{b/2} \left[\int_{-a/2}^{a/2} M_x e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \right] \quad \text{Ec. 2.6a}$$

En la ecuación 2.6a la integral dentro del corchete representa el factor espacial para una distribución bidimensional. Para las componentes L_θ del vector potencial

$\bar{\mathbf{F}}$, el factor elemental es igual al producto del factor fuera del corchete en 2.6a y el factor fuera del corchete en 11.10c del anexo 1. El campo total es igual al producto de los factores elementales y espaciales, como se expresa en 11.10b y 11.10c del anexo 1.

Usando la integral

$$\int_{-c/2}^{+c/2} e^{jaz} dz = c \left[\frac{\sin(\frac{a}{2}c)}{\frac{a}{2}c} \right] \quad \text{Ec. 2.7}$$

2.6a se reduce a

$$L_{\phi} = 2ab E_0 \left[\cos\theta \cos\phi \left(\frac{\sin X}{X} \right) \left(\frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \quad \text{Ec. 2.8}$$

Donde

$$X = \frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi \quad \text{Ec. 2.8a}$$

$$Y = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi \quad \text{Ec. 2.8b}$$

Similarmente puede mostrarse que

$$L_{\phi} = -2ab E_0 \left[\sin\phi \left(\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{\sin y}{y} \right) \right] \quad \text{Ec. 2.9}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.6, 2.8 y 2.9 en las ecuaciones 11.10a - 11.10f del anexo 1, los campos radiados por la apertura pueden escribirse como:

$$E_r = 0 \quad \text{Ec. 2.10a}$$

$$E_{\theta} = j \frac{abk E_0 e^{jkr}}{2\pi r} \left[\sin\phi \left(\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{\sin y}{y} \right) \right] \quad \text{Ec. 2.10b}$$

$$E_{\phi} = j \frac{abk E_0 e^{jkr}}{2\pi r} \left[\cos\theta \cos\phi \left(\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{\sin y}{y} \right) \right] \quad \text{Ec. 2.10c}$$

$$H_r = 0 \quad \text{Ec. 2.10d}$$

$$H_{\theta} = -\frac{E_{\phi}}{\eta} \quad \text{Ec. 2.10e}$$

$$H_{\phi} = +\frac{E_{\theta}}{\eta} \quad \text{Ec. 2.10f}$$

Las ecuaciones 2.10a - 2.10f representan las distribuciones tridimensionales de campo radiados por la apertura en la zona lejana. Para el problema de la figura 2.2, el modelo de plano **E** está en el plano **y-z** ($\phi=\pi/2$) y el plano **H** esta en el plano **x-z** ($\phi=0$). Entonces

Plano E ($\phi=\pi/2$)

$$E_r = E_{\theta} = 0 \quad \text{Ec. 2.11a}$$

$$E_{\theta} = j \frac{abk E_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta} \right] \quad \text{Ec. 2.11b}$$

Plano H ($\phi=0$)

$$E_r = E_{\theta} = 0 \quad \text{Ec. 2.12a}$$

$$E_{\phi} = j \frac{abk E_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \left\{ \cos \theta \left[\frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta} \right] \right\} \quad \text{Ec. 2.12b}$$

Para demostrar las técnicas, en las figuras 2.3 y 2.4 se muestran modelos tridimensionales.

Las dimensiones de la apertura se indican en cada figura. Debido a que las dimensiones de la apertura son mayores a una longitud de onda, aparecen múltiples lóbulos. El número de lóbulos crece cuando las dimensiones de la apertura aumentan. Para la apertura cuyas dimensiones son $a=3\lambda$ y $b=2\lambda$ (figura 2.3)

hay un total de cinco lóbulos en el plano principal plano **H** y tres lóbulos en el plano principal **E**.

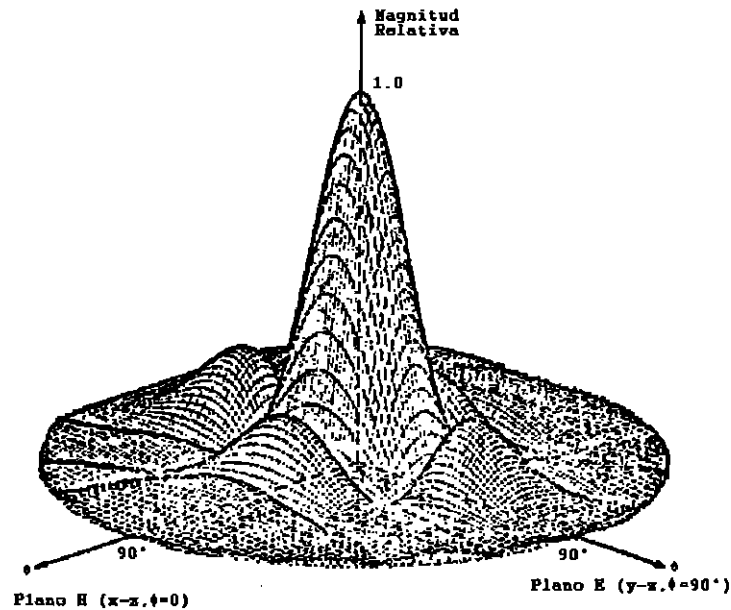


Figura 2.3 **Modelo de campo tridimensional de una apertura rectangular de campo constante montada sobre un plano de tierra infinito ($a=3\lambda$, $b=2\lambda$).**[2]

El modelo en el plano **H** es función solo de la dimensión **a** mientras que el del plano **E** es solo influenciado por **b**. En el plano **E**, el lóbulo lateral formado en cada lado del lóbulo principal es resultado de $\lambda \leq b \leq 2\lambda$. En el plano **H**, el primer lóbulo menor sobre cada lado del lóbulo principal se forma cuando $2\lambda \leq a \leq 3\lambda$.

Lóbulos adicionales se forman cuando una o las dos dimensiones de la apertura aumentan. Esto se muestra en la figura 2.4 para una apertura con dimensiones $a=b=3\lambda$.

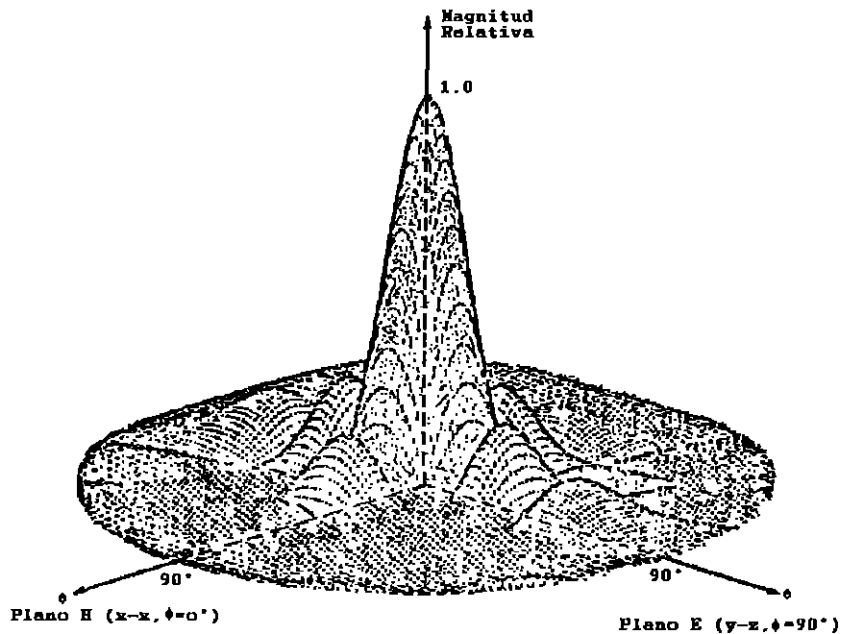


Figura 2.4 Modelo de campo tridimensional de una apertura cuadrada de campo constante ubicada sobre un plano de tierra infinito ($a=b=3\lambda$). [2]

El principal modelo bidimensional para una apertura con $a=3\lambda$, $b=2\lambda$ se muestra en la figura 2.5. Para esta y para todas las aperturas de cualquier tamaño montadas sobre un plano de tierra infinito, el modelo de plano **H** sobre el plano de tierra desaparece. Esto es por las condiciones de borde.

El modelo de plano **E**, en general, no desaparece sobre el plano de tierra, a menos que la dimensión de la apertura en ese plano (en este caso **b**) sea múltiplo de la longitud de onda.

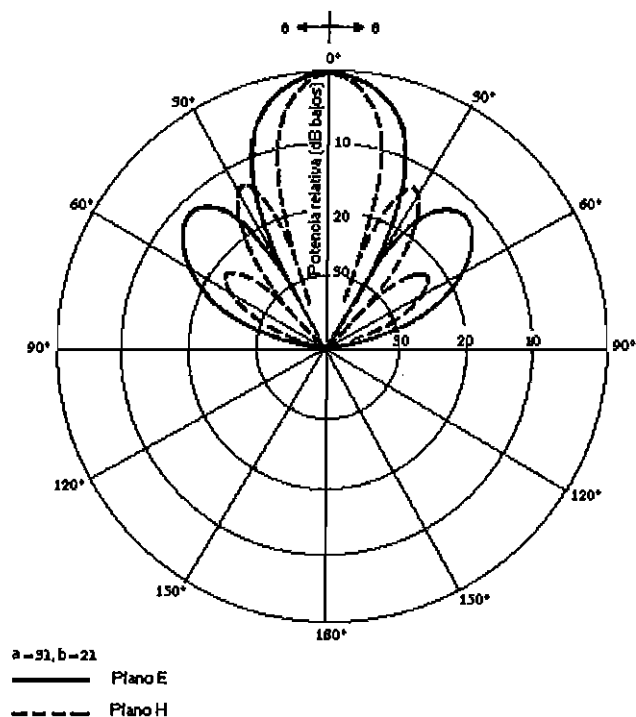


Figura 2.5 Gráficos de la amplitud de campo \bar{E} y \bar{H} para una apertura de distribución uniforme ubicada sobre un plano de tierra infinito ($a=3\lambda, b=2\lambda$). [2]

El modelo calculado anteriormente asume que la apertura está ubicada sobre un plano de tierra infinito. En la práctica, planos de tierra infinitos no son realizables, pero pueden aproximarse por estructuras largas. Los efectos de borde, sobre los modelos de aperturas ubicadas sobre planos de tierra finitos pueden calcularse usando técnicas de difracción.

2.1.1.3 ANCHO DEL RAYO

Para el modelo de plano **E** dado por la ecuación 2.11b la

radiación máxima está ubicada sobre el eje z ($\theta=0$). Los valores nulos (cero) ocurrirán cuando

$$\frac{kb}{2} \sin \theta|_{\theta=\theta_n} = n\pi, \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{Ec. 2.13}$$

para los ángulos

$$\begin{aligned} \theta_n &= \sin^{-1}\left(\frac{2n\pi}{kb}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{b}\right)\text{rad} \\ &= 57.3 \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{b}\right) \text{ grados}, \quad n=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.13a}$$

si $b \gg n\lambda$, la ecuación 2.13a se reduce aproximadamente a

$$\theta_n \approx \frac{n\lambda}{b} \text{ rad} = 57.3 \left(\frac{n\lambda}{b}\right) \text{ grados}, \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{Ec. 2.13b}$$

El ancho total del rayo entre nulos está dado por

$$\begin{aligned} \theta_n &= 2\theta_n = 2 \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{b}\right)\text{rad} \\ &= 114.6 \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda}{b}\right)\text{grados}, \quad n = 1,2,3,\dots \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.14}$$

aproximadamente (para aperturas largas, $b \gg n\lambda$) por

$$\theta_n \approx \frac{2n\lambda}{b} \text{ rad} = 114.6 \left(\frac{n\lambda}{b}\right) \text{ grados}, \quad n=1,2,3,\dots \quad \text{Ec. 2.14a}$$

El primer nulo del ancho del rayo (**FNBW**) se obtiene haciendo $n=1$. Los puntos de media potencia ocurren cuando:

$$\frac{kb}{2} \sin \theta|_{\theta=\theta_n} = 1.391 \quad \text{Ec. 2.15}$$

para ángulos

$$\theta_n = \sin^{-1}\left(\frac{2.782}{kb}\right)\text{rad}; \quad \theta_n = 57.3 \sin^{-1}\left(\frac{0.443\lambda}{b}\right) \text{ grados} \quad \text{Ec. 2.15a}$$

Entonces el ancho total de media potencia (**HPBW**) esta dado por:

$$\theta_h = 2\theta_h = 2\sin^{-1}\left(\frac{0.443\lambda}{b}\right) \text{ rad} = 114.6 \sin^{-1}\left(\frac{0.443\lambda}{b}\right) \text{ grados} \quad \text{Ec. 2.16}$$

El máximo del primer lóbulo lateral ocurre cuando

$$\frac{kb}{2} \sin\theta_{\theta=\theta_s} = 4.494 \quad \text{Ec. 2.17}$$

$$\theta_s = \sin^{-1}\left(\frac{8.988}{kb}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1.43\lambda}{b}\right) \text{ rad} = 57.3 \sin^{-1}\left(\frac{1.43\lambda}{b}\right) \text{ grados} \quad \text{Ec. 2.17a}$$

El ancho total del rayo entre los máximos de los primeros lóbulos laterales (**FSLBW**) está dado por:

$$\theta_s = 2\theta_s = 2\sin^{-1}\left(\frac{1.43\lambda}{b}\right) \text{ rad} = 114.6 \sin^{-1}\left(\frac{1.43\lambda}{b}\right) \text{ grados} \quad \text{Ec. 2.17b}$$

2.1.1.4 NIVEL DEL LOBULO LATERAL

El máximo del primer lóbulo lateral esta dado por

$$|E_{\theta}(\theta=\theta_s)| = \left|\frac{\sin(4.494)}{4.494}\right| = 0.217 = -13.26\text{dB} \quad \text{Ec. 2.18}$$

lo que indica que tenemos 13.26 dB desde el máximo del lóbulo principal.

Un valor aproximado del máximo del primer lóbulo lateral puede obtenerse asumiendo que el máximo ocurre cuando el numerador es máximo, esto es cuando

$$\frac{kb}{2} \sin\theta_{\theta=\theta_s} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{Ec. 2.19}$$

Entonces

$$|E_{\theta}(\theta = \theta_s)| = \frac{1}{3\pi/2} = 0.212 = -13.47\text{dB} \quad \text{Ec. 2.20}$$

Este valor es muy cercano al valor exacto dado por la ecuación 2.18.

Un procedimiento similar puede seguirse para encontrar los nulos, los puntos de -3dB, el ancho del rayo entre nulos y puntos de -3dB, el ángulo en el que ocurre el máximo del primer lóbulo lateral, y su magnitud en ese punto para el modelo de plano **H**. Una comparación entre los modelos de plano $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ muestra que son muy similares (\mathbf{E}_{θ} y \mathbf{E}_{ϕ}) excepto por el término $\cos\theta$ que aparece para \mathbf{E}_{ϕ} . Analizando los términos se ve que $\cos\theta$ varía mucho más lentamente que el término $\sin(ka \sin\theta/2)/(ka \sin\theta/2)$, especialmente cuando **a** es grande.

2.1.1.5 DIRECTIVIDAD

La directividad para la apertura se puede encontrar usando 2.10a - 2.10c, 2.13 - 2.13a y 10.18 - 10.22 del anexo 1. Los detalles analíticos usando este procedimiento, especialmente el cálculo del integral de la potencia radiada (\mathbf{P}_{rad}), son muy difíciles.

Debido a que la apertura esta ubicada sobre un plano

infinito de tierra, puede usarse una alternativa mucho más fácil para calcular la potencia radiada. Se establece primero la densidad de flujo de potencia promedio usando los campos en la apertura, y se la integra sobre los límites físicos de la apertura. Usando la figura 2.2 y asumiendo que el campo magnético de la apertura esta dado por:

$$H_a = -a_x \frac{E_o}{\eta} \quad \text{Ec. 2.21}$$

donde η es la impedancia intrínseca, la potencia radiada se reduce a:

$$P_{\text{rad}} = \iint_S W_{\text{av}} ds = \frac{|E_o|^2}{2\eta} \times \iint_{S_a} ds = ab \frac{|E_o|^2}{2\eta} \quad \text{Ec. 2.22}$$

El máximo de la radiación de potencia (U_{max}), usando los campos de 2.10a y 2.10b, ocurren cuando θ va hacia 0 y es igual a

$$U_{\text{max}} = \frac{(ab)^2 |E_o|^2}{\lambda^2 2\eta} \quad \text{Ec. 2.23}$$

Entonces la directividad es igual a

$$D_o = \frac{4\pi U_{\text{max}}}{P_{\text{rad}}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} ab = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_p = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{em}} \quad \text{Ec. 2.24}$$

donde :

A_p = área física de la apertura

A_{em} = máxima área efectiva de la apertura

El área física y la máxima área efectiva de una

apertura de distribución constante son iguales.

El ancho del rayo, los niveles de los lóbulos laterales, la directividad de ésta y otras aperturas se resumen en la tabla 1.

2.1.2 DISTRIBUCION UNIFORME EN EL ESPACIO

La segunda apertura que examinaremos es la de la figura 2.2 cuando esta montada sobre un plano de tierra no infinito. La distribución de campo esta dada por:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_a &= \vec{a}_y E_0 \\ \vec{H}_a &= -\vec{a}_x \frac{E_0}{\eta} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -a/2 \leq x' \leq a/2 \\ -b/2 \leq y' \leq b/2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 25}$$

donde E_0 es una constante. La geometría de la apertura para este problema es idéntica al anterior, sin embargo los equivalentes y los campos radiados son diferentes, debido a que la apertura está montada sobre un plano de tierra finito.

2.1.2.1 EQUIVALENTE

Para formar el equivalente, se escoge una superficie cerrada la cual se extiende desde $-\alpha$ a $+\alpha$ sobre el plano $x-y$. Se forman sobre toda la superficie \vec{J}_s y \vec{M}_s . La dificultad encontrada en este problema es que ambas \vec{J}_s y \vec{M}_s son diferentes de cero fuera de la apertura y expresiones para ellas no se conocen ahí. Reemplazando el medio semi-

infinito de la izquierda de la frontera (negativo z) por un conductor imaginario eléctrico o magnético solo se eliminará uno de las dos densidades de corrientes ($\bar{\mathbf{J}}_s$ o $\bar{\mathbf{M}}_s$) pero no ambas. Entonces aunque existe en principio un equivalente exacto para este problema, éste no puede usarse prácticamente debido a que los campos fuera de la apertura se desconocen a priori. Nosotros estamos por lo tanto forzados a adoptar un equivalente aproximado.

La más precisa recreación será asumir que ambos $\bar{\mathbf{E}}_a$ y $\bar{\mathbf{H}}_a$ (y a su turno $\bar{\mathbf{M}}_s$ y $\bar{\mathbf{J}}_s$) existen sobre la apertura pero son cero fuera de ella. Se ha visto, por comparación con las medidas y otros datos disponibles, que este equivalente aproximado produce los mejores resultados.

2.1.2.2 CAMPOS RADIADOS

Usando un procedimiento similar al de la sección previa, pueden derivarse las características de radiación de esta apertura. Un resumen de ellas se muestra en la tabla 1.

Las componentes de campo de esta apertura son idénticas a las de la apertura que estaba montada sobre un plano de tierra infinito si el término $(1 + \cos\theta)$ en cada componente se reemplaza por 2. Entonces para pequeños valores de θ (principalmente en el lóbulo principal y especialmente

cerca a su máximo), los modelos de las aperturas son casi idénticos.

Este procedimiento puede usarse, en general, para relacionar los campos de una apertura cuando ella está montada sobre un plano de tierra infinito o finito. Sin embargo, el sistema de coordenadas debe tener el eje z perpendicular a la apertura.

Se calculó un modelo tridimensional para una apertura con $a=3\lambda$, $b=2\lambda$, y se lo muestra en la figura 2.6. Las dimensiones de esta apertura son las mismas de las que produjo el modelo de la figura 2.3. Sin embargo los límites angulares sobre los que ahora existen los campos radiados se extienden desde $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Aunque la estructura general de los dos modelos es similar, no son idénticos. Debido al limitado espacio (no es infinito) sobre el cual los campos existen, se forman lóbulos menores adicionales.

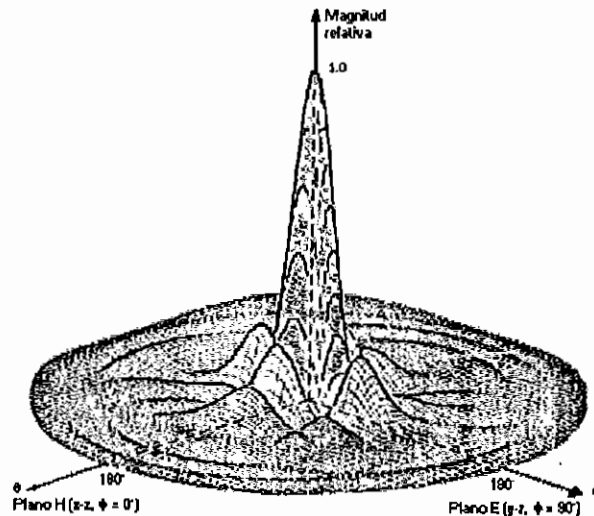


Figura 2.6 **Modelo tridimensional de campo de una apertura rectangular de campo constante ($a=3\lambda$, $b=2\lambda$). [2]**

TABLA 1 [2]

	DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE UNA APERTURA SOBRE UN PLANO DE TIERRA	DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE UNA APERTURA EN EL ESPACIO LIBRE	DISTRIBUCIÓN DE UNA APERTURA EN EL MODO TE ₁₀ SOBRE UN PLANO DE TIERRA
Distribución de las componentes tangenciales de una apertura (analíticamente)	$E_a = a_x E_0$ $-\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2}$ $-\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}$	$E_a = a_x E_0$ $H_a = -a_x \frac{E_0}{\eta}$ $-\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2}$ $-\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}$	$E_a = a_x E_0 \cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right)$ $-\frac{a}{2} \leq x' \leq \frac{a}{2}$ $-\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2}$
Distribución de las componentes tangenciales de una apertura (gráficamente)			
Equivalente	$M_s = -2nXE_0$ $J_s = 0$ $J_s = 0$	$M_s = -nXE_0$ $J_s = nXE_0$ $M_s \approx J_s \approx 0$	$-2nXE_0$ 0 0
Campos en la zona lejana	$X = \frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi$ $Y = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi$ $C = j \frac{abkE_0 e^{-jkr}}{2\pi r}$	$E_r = H_r = 0$ $E_\theta = \frac{C}{2} \sin\phi (1 + \cos\theta) \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y}$ $E_\phi = \frac{C}{2} \cos\phi (1 + \cos\theta) \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y}$ $H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta}$ $H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$	$E_r = H_r = 0$ $E_\theta = -\frac{\pi}{2} C \sin\phi \frac{\cos X}{X^2 - (\frac{a}{2})^2} \frac{\sin Y}{Y}$ $E_\phi = -\frac{\pi}{2} C \cos\phi \frac{\cos X}{X^2 - (\frac{a}{2})^2} \frac{\sin Y}{Y}$ $H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta}$ $H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$

	Apertura con distribución uniforme en un plano de tierra	Apertura con distribución uniforme en el espacio libre	Apertura con distribución en el modo TE ₁₀ en un plano de tierra
Ancho del rayo de media potencia (grados)	Plano E $b \gg \lambda$ $\frac{50.6}{b/\lambda}$	$\frac{50.6}{b/\lambda}$	$\frac{50.6}{b/\lambda}$
	Plano H $a \gg \lambda$ $\frac{50.6}{a/\lambda}$	$\frac{50.6}{a/\lambda}$	$\frac{68.8}{a/\lambda}$
Ancho del primer nulo (grados)	Plano E $b \gg \lambda$ $\frac{114.6}{b/\lambda}$	$\frac{114.6}{b/\lambda}$	$\frac{114.6}{b/\lambda}$
	Plano H $a \gg \lambda$ $\frac{114.6}{a/\lambda}$	$\frac{114.6}{a/\lambda}$	$\frac{171.9}{a/\lambda}$
Primer máximo del lóbulo lateral (principal máximo) (dB)	Plano E -13.26	-13.26	-13.26
	Plano H -13.26 $a \gg \lambda$	-13.26 $a \gg \lambda$	-23 $a \gg \lambda$
Directividad Do (adimensional)	$\frac{4\pi}{\lambda^2}(\text{area}) = 4\pi \left(\frac{ab}{\lambda^2}\right)$	$\frac{4\pi}{\lambda^2}(\text{area}) = 4\pi \left(\frac{ab}{\lambda^2}\right)$	$\frac{8}{\pi^2} \left[4\pi \left(\frac{ab}{\lambda}\right) \right] = 0.81 \left[4\pi \left(\frac{ab}{\lambda^2}\right) \right]$

2.1.2.3 ANCHO DEL RAYO Y NIVELES DE LOS LOBULOS LATERALES

Para encontrar el ancho del rayo y el ángulo en que ocurre el máximo del lóbulo lateral, usualmente se asume que el término $(1+\cos\theta)$ tiene una variación menor que los términos $\sin(ka \sin\theta/2)/(ka \sin\theta/2)$ o el término $\sin(kb \sin\theta/2)/(kb \sin\theta/2)$. Esta es una aproximación, y es más válida para aperturas grandes (largo **a** y/o **b**) y para ángulos cercanos al ángulo en el que ocurre el máximo principal. Resultados más precisos pueden obtenerse considerando el término $(1+\cos\theta)$. Entonces pueden usarse las ecuaciones 2.13 - 2.20, como una buena aproximación, para calcular el ancho del rayo y los niveles de los lóbulos laterales. Un resumen se incluye en la tabla 1.

2.1.2.4 DIRECTIVIDAD

Aunque la geometría de la apertura de este problema es idéntica al de la distribución uniforme en un plano de tierra infinito, sus directividades no son iguales. Esto es evidente examinando las expresiones para campo lejano para las dos aperturas o analizando que los campos de las aperturas sobre el plano **x-y** no son exactamente los mismos.

Encontrar una expresión exacta para la directividad de esta apertura puede ser una tarea muy difícil. Puesto que

de esperar, puesto que la distribución de campo del modo TE_{10} sobre el plano E (plano $y-z$) es también constante. Este no es el caso para el plano H o para todos los otros puntos que no están en los planos principales. Para demostrar esto, un modelo tridimensional se calculó para el modo TE_{10} de una apertura con $a=3\lambda$, $b=3\lambda$ y se lo muestra en la figura 2.7. Este modelo debe compararse con el de la figura 2.3.

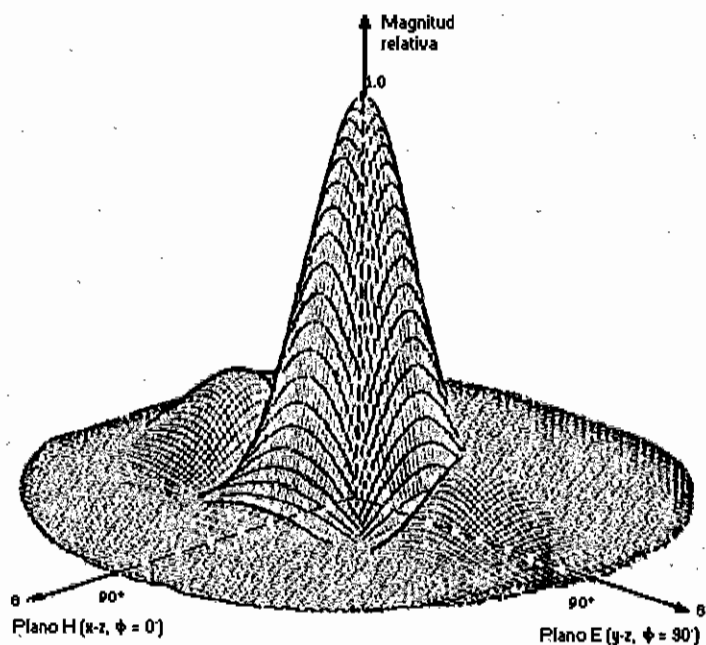


Figura 2.7 Modelos de campo tridimensional de una guía de onda rectangular de modo TE_{10} ubicada en un plano de tierra infinito ($a=3\lambda$, $b=2\lambda$). [2]

Las expresiones para el ancho del rayo y los niveles del lóbulo lateral en el plano E son idénticas a las dadas por las ecs. 2.13 - 2.20. Sin embargo las expresiones para el plano H son más complejas, y no se dispone de un procedimiento simple. Los resultados para $HPBW$, $FNBW$, $FSLBW$, $FSLMN$ en los planos \bar{E}

y \bar{H} se muestran gráficamente en las figuras 8 y 9.

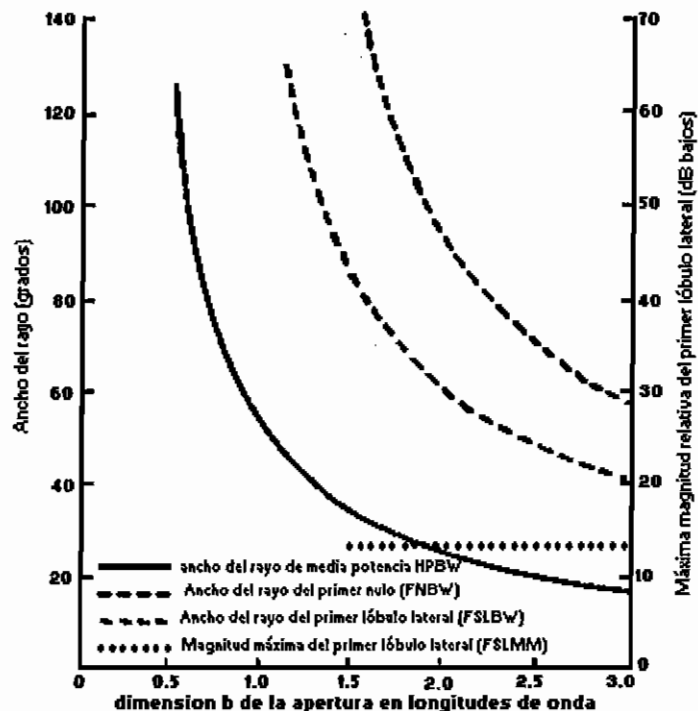


Figura 2.8 Ancho del rayo en el plano E y la máxima magnitud relativa del primer lóbulo lateral de una guía de onda rectangular en el modo TE₁₀ ubicada sobre un plano de tierra infinito. [2]

2.1.3.2 DIRECTIVIDAD Y EFICIENCIA DE LA APERTURA

La directividad de esta apertura se encuentra de la misma forma que la de la apertura de distribución uniforme en un plano de tierra infinito.

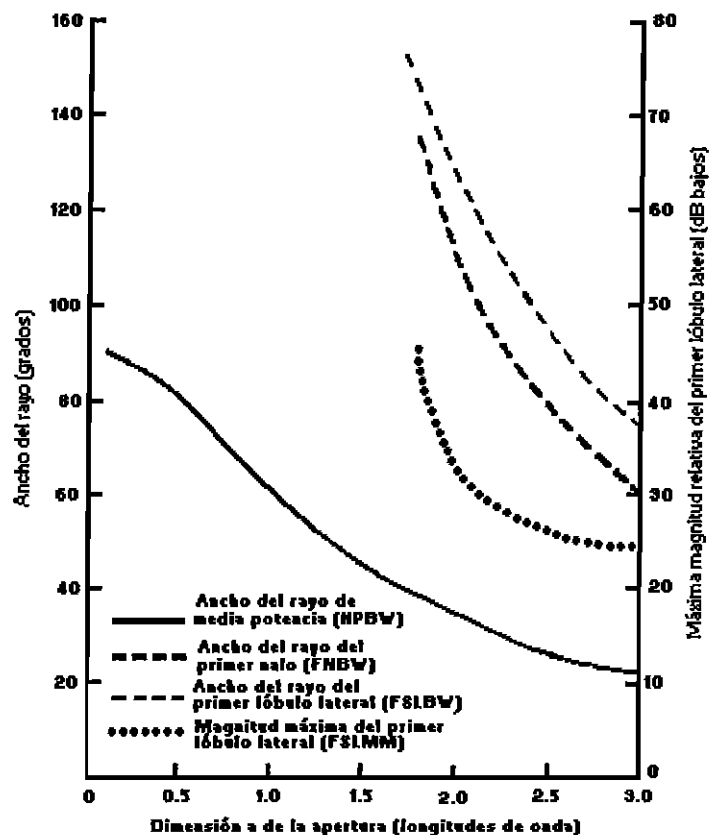


Figura 2.9 Ancho del rayo en el plano H y la máxima magnitud relativa del primer lóbulo lateral de una guía de onda rectangular en el modo TE_{10} montada sobre un plano de tierra infinito.[2]

Usando el campo eléctrico de la apertura de la ec. 2.26, y asumiendo que el campo magnético de la apertura esta relacionado con el campo eléctrico por medio de la impedancia intrínseca η , la potencia radiada puede escribirse como:

$$Prad = \iint_S W_{av} \cdot ds = ab \frac{|E_o|^2}{4\eta} \quad \text{Ec. 2.26a}$$

La máxima intensidad de radiación ocurre cuando $\theta=0^\circ$, y esta dada por

$$BE = \frac{\text{potencia transmitida (recibida) dentro del angulo conico } \theta_1}{\text{potencia transmitida (recibida) por la antena}} \quad \text{Ec. 2.28}$$

Cuando la apertura está montada sobre el plano $x-y$, la eficiencia del rayo puede calcularse usando

$$BE = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} U(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \quad \text{Ec. 2.28a}$$

La eficiencia del rayo puede usarse para juzgar la capacidad de una antena para discriminar entre las señales recibidas por su lóbulo principal y las recibidas por sus lóbulos menores.

2.2 APERTURAS CIRCULARES

Una antena usada ampliamente en microondas es la apertura circular. Una de las características atractivas de esta configuración es la simplicidad de construcción. Además pueden obtenerse expresiones para los campos de todos los modos que existan sobre la apertura.

El procedimiento para determinar los campos radiados por una apertura circular es idéntico al de la apertura rectangular. Las principales diferencias radican en la formulación de las corrientes equivalentes ($J_x, J_y, J_z, M_x, M_y, M_z$), el diferencial de la trayectoria desde la fuente al punto de observación ($r' \cos\psi$), y el diferencial de área (ds').

Debido al perfil circular de la apertura, es a menudo conveniente adoptar coordenadas cilíndricas para la solución de los campos. En muchos casos, por lo tanto, las componentes de campo eléctrico y magnético sobre la apertura circular se conocerán en forma cilíndrica, esto es, $E_p, E_\phi, E_z, H_p, H_\phi, H_z$. Entonces las componentes de las corrientes equivalentes \bar{M}_0 y \bar{J}_0 deben expresarse convenientemente en forma cilíndrica ($M_p, M_\phi, M_z, J_p, J_\phi, J_z$). Además, la integración requerida sobre la apertura para encontrar $N_\theta, N_\phi, L_\theta$ y L_ϕ de 11.12a-11.12d del anexo 1, deben darse en coordenadas cilíndricas. Es entonces deseable reformular $r' \cos \psi$ y ds' que están dados por las ecuaciones 2.2a-2.3c.

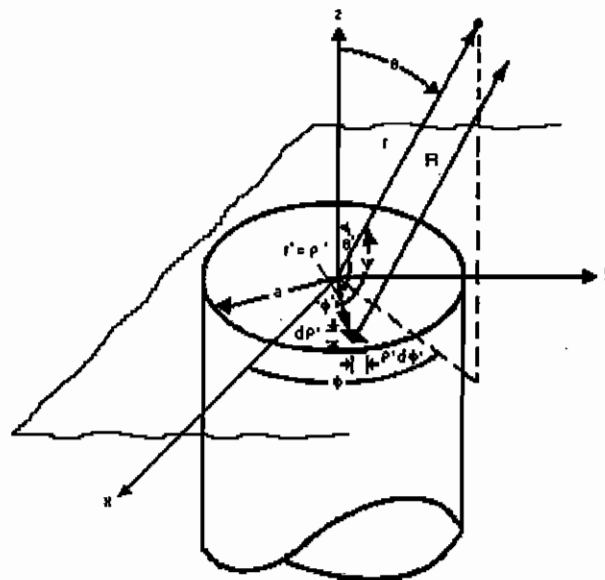


Figura 2.10 **Apertura circular montada en un plano de tierra infinito.**[2]

La posición más conveniente para ubicar la apertura es la

que se muestra en la figura 2.10 (la apertura sobre el plano $\mathbf{x-y}$). La transformación entre las componentes rectangulares y cilíndricas de $\bar{\mathbf{J}}_s$ está dada por

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 & 0 & J_\rho \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 & J_\phi \\ 0 & 0 & 1 & J_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2.29a}$$

Una transformación similar existe para las componentes de $\bar{\mathbf{M}}_s$. Las coordenadas rectangulares y cilíndricas están relacionadas por

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos \phi' \\ y' &= \rho' \sin \phi' \\ z' &= z' \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.29b}$$

Usando 2.29a y 11.12a - 11.12d del anexo 1 pueden escribirse como

$$N_\theta = \iint_S [J_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + J_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi') - J_z \sin \theta] X e^{jk' r \cos \psi} ds' \quad \text{Ec. 2.30a}$$

$$N_\phi = \int_S [-J_\rho \sin(\phi - \phi') + J_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{+j' k r \cos \psi} ds' \quad \text{Ec. 2.30b}$$

$$L_\theta = \iint_S [M_\rho \cos \theta \cos(\phi - \phi') + M_\phi \cos \theta \sin(\phi - \phi') - M_z \sin \theta] X e^{j' k r \cos \psi} ds' \quad \text{Ec. 2.30c}$$

$$L_\phi = \int_S [-M_\rho \sin(\phi - \phi') + M_\phi \cos(\phi - \phi')] e^{+j' k r \cos \psi} ds' \quad \text{Ec. 2.30d}$$

donde $\mathbf{r}' \cos \psi$ y ds' pueden escribirse usando 2.2c y 2.29b, como

$$r' \cos \psi = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi = \rho' \sin \theta \cos(\phi - \phi') \quad \text{Ec. 2.31a}$$

$$ds' = dx' dy' = \rho d\rho' d\phi' \quad \text{Ec. 2.31b}$$

En resumen, para una antena de apertura circular los campos radiados pueden obtenerse por una de las siguientes formas

1. Si las componentes rectangulares de los campos sobre la apertura se conocen, usando el mismo procedimiento para las aperturas rectangulares con 2.31a y 2.31b sustituyendo en 11.12a - 11.12d del anexo 1.
2. Si se conocen las componentes cilíndricas de los campos sobre la apertura, usando el mismo procedimiento para la apertura rectangular con 2.30a-2.30d junto con 2.31a y 2.31b, tomando el lugar de 11.12a - 11.12d del anexo 1.

2.2.1 DISTRIBUCION UNIFORME SOBRE UN PLANO DE TIERRA INFINITO

Para demostrar los métodos, se determinará el campo radiado por una apertura circular montada sobre un plano de tierra infinito. Para simplificar los detalles matemáticos, el campo sobre la apertura se asumirá constante e igual a

$$\bar{E}_a = \bar{a}_y E_0 \quad p' \leq a \quad \text{Ec. 2.32}$$

donde E_0 es una constante.

2.2.1.1 EQUIVALENTES Y CAMPOS RADIADOS

El problema equivalente es idéntico al de la figura 2.2

esto es:

$$\vec{M}_s = \begin{cases} -2\vec{n} \times E_a = \vec{a}_x 2 E_o & \rho' \leq a \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

$$\vec{J}_a = 0 \quad \text{en cualquier parte} \quad \text{Ec. 2.33}$$

Entonces,

$$N_\theta = N_\phi = 0 \quad \text{Ec. 2.34}$$

$$L_\theta = 2 E_o \cos\theta \cos\phi \int_0^a \rho' \left[\int_0^{2\pi} e^{+jk\rho' \sin\theta \cos(\phi-\phi')} d\phi' \right] d\rho' \quad \text{Ec. 2.35}$$

Debido a que

$$\int_0^{2\pi} e^{+jk\rho' \sin\theta \cos(\phi-\phi')} d\phi' = 2\pi J_0(k\rho' \sin\theta) \quad \text{Ec. 2.36}$$

la ec. 2.35 puede escribirse como

$$L_\theta = 4\pi E_o \cos\theta \cos\phi \int_0^a J_0(k\rho' \sin\theta) \rho' d\rho' \quad \text{Ec. 2.37}$$

donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de primera clase de orden cero. Haciendo la sustitución

$$t = k\rho' \sin\theta$$

$$dt = k \sin\theta d\rho' \quad \text{Ec. 2.37a}$$

la ec. 2.37 se reduce a

$$L_\theta = \frac{4\pi E_o \cos\theta \cos\phi}{k \sin^2\theta} \int_0^{ka \sin\theta} t J_0(t) dt \quad \text{Ec. 2.37b}$$

puesto que

$$\int_0^\beta J_0(z) dz = z J_1(z) \Big|_0^\beta = \beta J_1(\beta) \quad \text{Ec. 2.38}$$

donde $J_1(\beta)$ es la función de Bessel de orden 1, 2.37b toma la forma de

$$L_\theta = 4\pi a^2 \left\{ E_o \cos\theta \cos\phi \left[\frac{J_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta} \right] \right\} \quad \text{Ec. 2.39}$$

similarmente

$$L_{\phi} = -4\pi a^2 E_o \sin \phi \left[\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \quad \text{Ec. 2.40}$$

Usando 2.34, 2.39 y 2.40, las componentes de campo eléctrico de 11.10a - 11.10c del anexo 1 pueden escribirse como

$$E_r = 0 \quad \text{Ec. 2.41a}$$

$$E_{\theta} = j \frac{ka^2 E_o e^{-jkr}}{r} \sin \phi \left[\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \quad \text{Ec. 2.41b}$$

$$E_{\phi} = j \frac{ka^2 E_o e^{-jkr}}{r} \cos \theta \cos \phi \left[\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \quad \text{Ec. 2.41c}$$

En los principales planos \bar{E} y \bar{H} , las componentes de campo eléctrico se simplifican a

Plano E ($\phi = \pi/2$)

$$E_r = E_{\phi} = 0 \quad \text{Ec. 2.42a}$$

$$E_{\theta} = j \frac{ka^2 E_o e^{-jkr}}{r} \left[\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \quad \text{Ec. 2.42b}$$

Plano H ($\phi = 0$)

$$E_r = E_{\theta} = 0 \quad \text{Ec. 2.43a}$$

$$E_{\phi} = j \frac{ka^2 E_o e^{-jkr}}{r} \left\{ \cos \theta \left[\frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right] \right\} \quad \text{Ec. 2.43b}$$

Un modelo tridimensional se ha calculado para el campo constante de una antena de apertura circular de $a=1.5\lambda$, y se muestra en la figura 2.11. El modelo en esta figura tiende a ser simétrico.

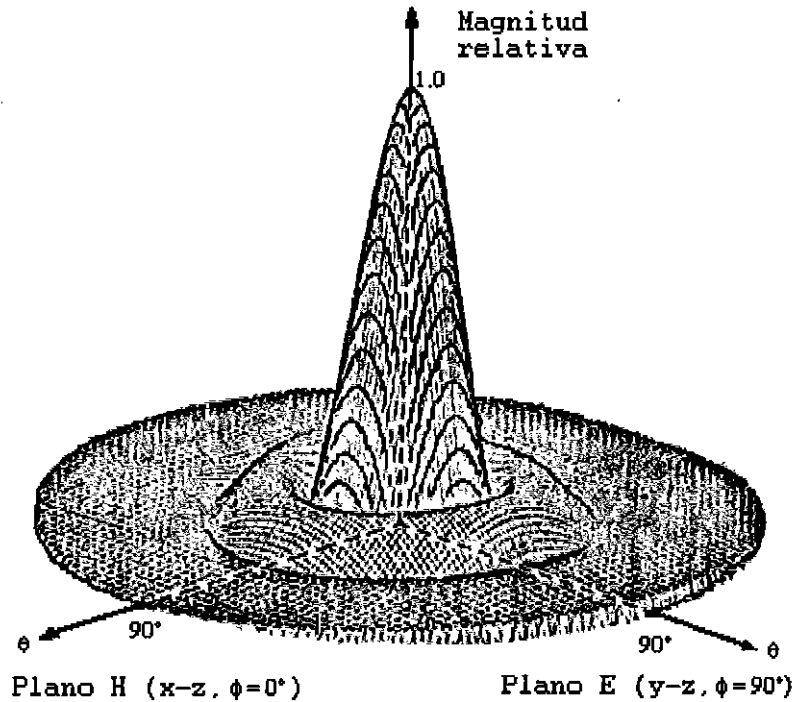


Figura 2.11 Modelo de campo tridimensional de una apertura circular de campo constante montada sobre un plano de tierra infinito. [2]

Sin embargo, observaciones cercanas, especialmente modelos bidimensionales de los planos \bar{E} y \bar{H} , revelan que no es el caso. Sin embargo, posee características casi simétricas.

2.2.1.2 ANCHO DEL RAYO, NIVEL DEL LOBULO LATERAL Y DIRECTIVIDAD

Expresiones exactas para el ancho del rayo y para los niveles de los lóbulos laterales no pueden obtenerse fácilmente. Sin embargo expresiones aproximadas están

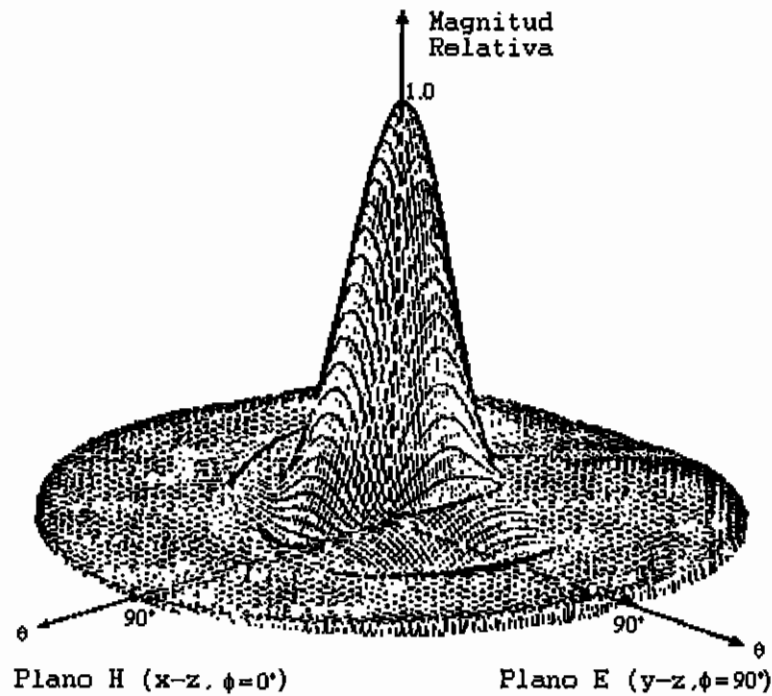


Figura 2.12 **Modelo de campo tridimensional de una guía de onda circular de modo TE_{11} montada sobre un plano de tierra infinito.[2]**

En la figura 2.12 se muestra un modelo tridimensional para $a=1.5\lambda$. Este modelo puede compararse con el de la figura 2.11 para la apertura con distribución de campo constante.

El ancho del rayo y los niveles de los lóbulos laterales en los planos \bar{E} y \bar{H} son diferentes, y no se han obtenido expresiones exactas. Sin embargo, pueden calcularse usando métodos iterativos, y los datos se muestran en las figuras 13 y 14 para los planos \bar{E} y \bar{H} respectivamente.

		Apertura con distribución uniforme sobre el plano de tierra	Apertura con distribución en el modo TE ₁₁ en un plano de tierra
Ancho del rayo de media	Plano E $a \gg \lambda$	$\frac{29.2}{a/\lambda}$	$\frac{29.2}{a/\lambda}$
Potencia (grados)	Plano H $a \gg \lambda$	$\frac{29.2}{a/\lambda}$	$\frac{37.0}{a/\lambda}$
Ancho del primer nulo (grados)	Plano E $a \gg \lambda$	$\frac{69.9}{b/\lambda}$	$\frac{69.9}{b/\lambda}$
	Plano H $a \gg \lambda$	$\frac{69.9}{a/\lambda}$	$\frac{98.0}{a/\lambda}$
Primer máximo del lóbulo lateral (principal máximo) (dB)	Plano E	-17.6	-17.6
	Plano H	-17.6	-26.2
Directividad Do (adimensional)		$\frac{4\pi}{\lambda^2} (\text{area}) = \frac{4\pi}{\lambda^2} (\pi a^2) = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2$	$0.836 \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 = 10.5\pi \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$

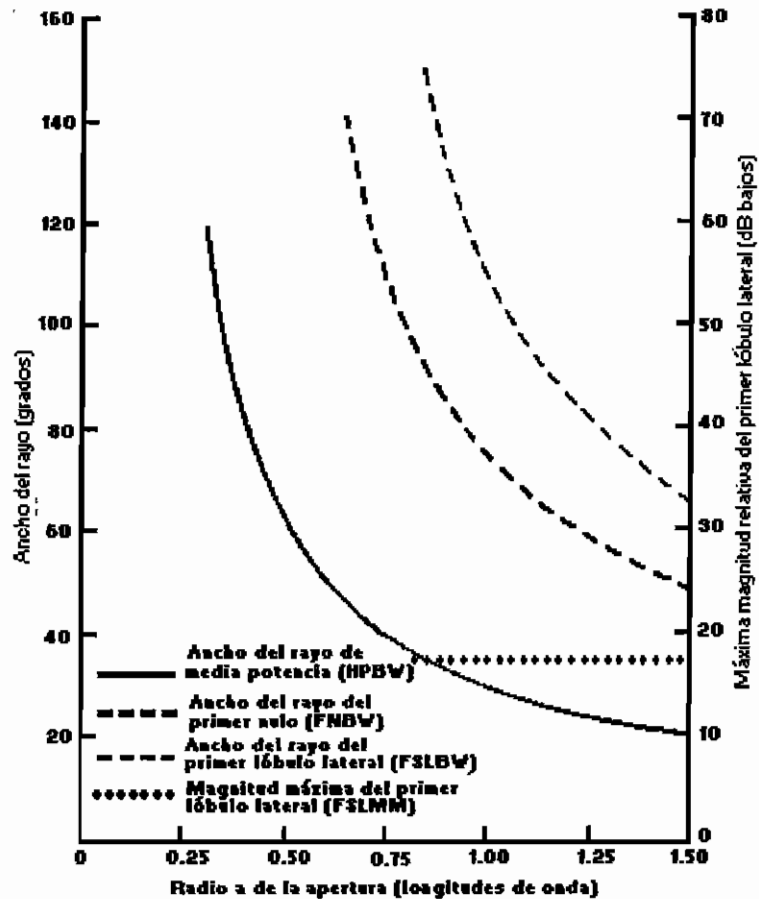


Figura 2.13 Ancho del rayo en el plano E y máxima magnitud relativa del primer lóbulo lateral de una apertura circular en el modo TE_{11} montada sobre un plano de tierra infinito.[2]

2.2.2.1 EFICIENCIA DEL RAYO

La eficiencia del rayo, definida por la ecuación 2.28a y calculada por la ecuación 2.28b, para aperturas circulares montadas sobre planos de tierra no infinitos, se muestra en la figura 2.15.

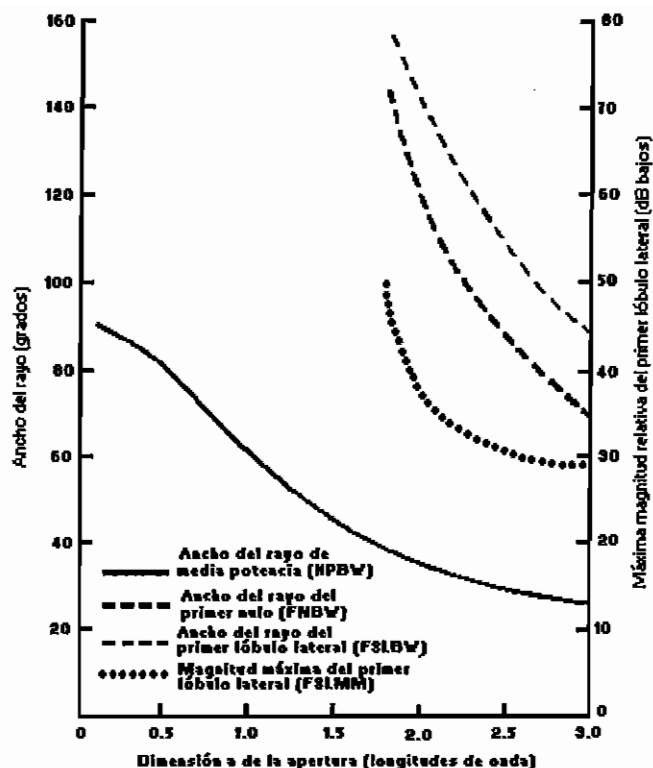


Figura 2.14 Ancho del rayo en el plano H y máxima magnitud relativa del primer lóbulo lateral de una apertura circular en el modo TE_{11} montada sobre un plano de tierra infinito.[2]

En la figura 2.15 la escala menor de las abscisas(en grados) está en términos del ángulo de la mitad del cono θ_1 (en grados), y debe usarse solamente cuando el radio de la apertura es 20λ ($a=20\lambda$). La escala superior de las abscisas está en términos de u ($u = ka \sin\theta_1$), y puede usarse para aperturas circulares de cualquier radio.

El procedimiento para encontrar la eficiencia del rayo de una apertura circular es similar al de una rectangular.

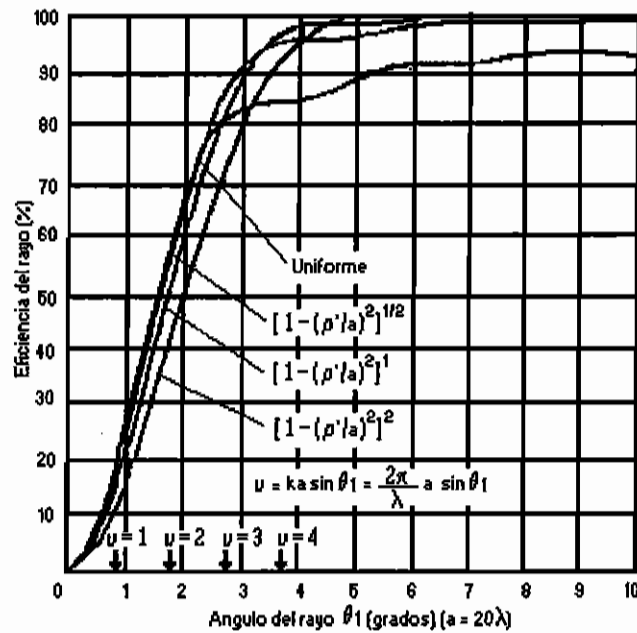


Figura 2.15 Eficiencia del rayo versus el ángulo de la mitad del cono θ_1 , para una apertura circular con diferentes distribuciones de campo. La apertura está montada en un plano de tierra no infinito.[3]

CAPITULO III:

BOCINAS

3.1 GENERALIDADES

Este tipo de antenas se usan ampliamente como elementos de alimentación para antenas parabólicas que rastrean satélites y en otros sistemas de comunicaciones que se encuentran instalados en todo el mundo. Además de su utilidad como un alimentador para reflectores y lentes, sirven como estándar universal para calibración y medición de ganancia de otras antenas de alta ganancia. Su amplia aplicabilidad se debe entre otras cosas a su simplicidad de construcción, facilidad de excitación, versatilidad y alta ganancia.

Varios tipos de bocinas se ilustran en la figura 3.1 las de la columna izquierda son bocinas rectangulares. Todas estas son energizadas por guías de onda rectangulares. Las de la columna derecha son circulares. Para minimizar las reflexiones de las ondas guiadas, se ha diseñado una bocina cuya región de transición o bocina esta dada por una curva exponencial como se muestra en la figura 3.1a. Sin embargo, en la práctica se hacen bocinas con acampanamiento recto como se ve en los otros tipos de bocinas de la figura 3.1 (izquierda). El tipo, la dirección y el largo de la pirámide (bocina) tienen un profundo efecto sobre el desempeño del elemento como radiador.

Despreciando los efectos de borde, los modelos de radiación de una bocina pueden determinarse si se conocen las

dimensiones de la apertura y la distribución de campo en la misma. Para una apertura dada la directividad es máxima con una distribución uniforme. Variaciones en la magnitud o fase del campo a través de la apertura disminuyen la directividad.

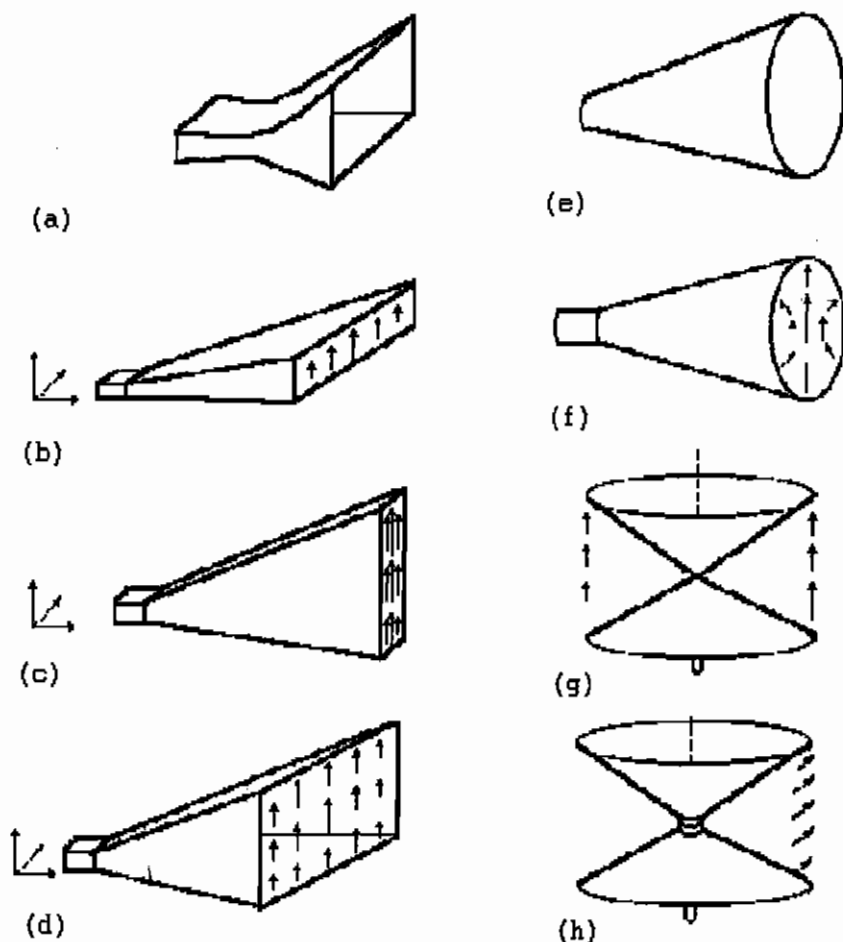


Figura 3.1 Tipos de bocinas rectangulares y circulares.[1]

Para obtener una distribución en la apertura lo más uniforme posible, se requiere una bocina muy larga con un pequeño ángulo de acampanamiento. Sin embargo, desde el punto de vista práctico la bocina debe ser tan corta como se pueda. Una bocina óptima debe estar entre estos límites y tendrá el mínimo ancho del rayo sin un excesivo nivel de lóbulos

laterales para una longitud dada.

3.2 BOCINAS RECTANGULARES

Las bocinas de las figuras 3.1 (b y c) son sectoriales. Son bocinas rectangulares con acampanamiento en una sola dimensión. Asumiendo que la guía de onda rectangular es energizada con una onda de campo eléctrico del modo TE_{10} (\bar{E} en la dirección y), la bocina en la figura 3.1b es acampanada en un plano perpendicular a \bar{E} . Este es el plano del campo magnético \bar{H} . En consecuencia este tipo de bocina se llama bocina sectorial acampanada en el plano H o simplemente bocina sectorial en el plano H .

La bocina de la figura 3.1c es acampanada en el plano del campo eléctrico, y, debido a ello se la llama bocina sectorial en el plano E . Una bocina rectangular acampanada en los dos planos como la de la figura 3.1d es una bocina piramidal. Con una onda TE_{10} en la guía de onda la magnitud del campo eléctrico es completamente uniforme en la dirección y a través de las bocinas de las figuras 3.1b, c y d pero termina en cero en la dirección x a través de las aperturas.

Esta variación es sugerida por las flechas en las aperturas de las figuras 3.1b, c y d. Las flechas indican la dirección del campo eléctrico \bar{E} , y su longitud da

una aproximación de la magnitud de la intensidad del campo. Para pequeños ángulos de acampanamiento la variación del campo a través de la apertura de las bocinas rectangulares es similar a la distribución sinusoidal del modo TE_{10} a través de la guía de onda.

3.2.1 BOCINA SECTORAL DE PLANO E

Esta bocina tiene su apertura en la dirección del campo \vec{E} , y se la muestra en la figura 3.2a. Una geometría más detallada se puede ver en la figura 3.2b.

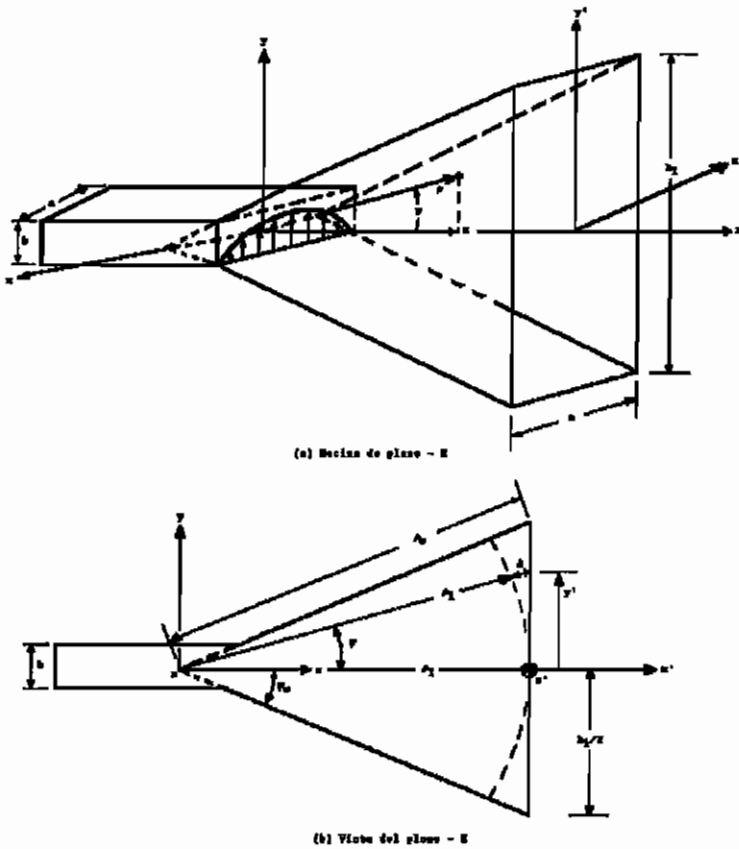


Figura 3.2 Bocina de plano E y sistema de coordenadas. [2]

3.2.1.1 CAMPOS EN LA APERTURA

La bocina puede tratarse como una antena de apertura. Para encontrar sus características de radiación, se puede usar la técnica del principio de equivalencia. Para encontrar un equivalente exacto, es necesario que se conozcan las componentes tangenciales de campo eléctrico y magnético sobre una superficie cerrada. La superficie cerrada usualmente seleccionada es un plano infinito que coincide con la apertura de la bocina. Cuando la bocina se ubica sobre un plano finito de tierra, los campos fuera de la apertura no son conocidos y no puede formarse un equivalente exacto. Sin embargo se asume que los campos fuera de la apertura son cero, como se hizo para las antenas de apertura.

Los campos en la apertura de la bocina pueden encontrarse tratando a la bocina como una guía de onda radial. Los campos dentro de la bocina pueden expresarse en términos de funciones de ondas cilíndricas **TE** y **TM** las que incluyen funciones de Hankel. Este método encuentra los campos no solo en la apertura de la bocina sino también dentro de ella.

Se puede demostrar que si los campos de la guía de onda alimentadora son los del modo dominante **TE₁₀** y la longitud de la bocina es grande comparada con las dimensiones de la apertura, los campos en la apertura de la bocina están dados por

$$\mathbf{E}_z' = \mathbf{E}_x' = \mathbf{H}_y' = 0 \quad \text{Ec. 3.1a}$$

$$E_y'(x', y') \approx E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j(ky'^2/2\rho_1)} \quad \text{Ec. 3.1b}$$

$$H_z'(x', y') \approx jE_1 \left(\frac{\pi\eta}{ka}\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j(ky'^2/2\rho_1)} \quad \text{Ec. 3.1c}$$

$$H_x'(x', y') \approx -\frac{E_1}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j(ky'^2/2\rho_1)} \quad \text{Ec. 3.1d}$$

$$P_I = P_e \cos \psi_e \quad \text{Ec. 3.1e}$$

donde E_1 es una constante. La notación con primas se usa para indicar los campos en la apertura de la bocina. Las expresiones son similares a los campos del modo TE_{10} para una guía de onda rectangular con dimensiones a y b_1 ($b_1 > a$). La única diferencia es el término exponencial complejo el cual se usa para representar la variación cuadrática de fase del campo sobre la apertura de la bocina.

La necesidad del término cuadrático de fase en las ecs. 3.1b - 3.1d puede ilustrarse geoméricamente. La longitud axial de la bocina es ρ_1 , la apertura es b_1 , y el ángulo de acampanamiento total es ψ_0 . La longitud $\delta(y')$ es la diferencia en la longitud de la trayectoria para una onda que alcanza la apertura en el eje y otra que alcanza la apertura en un lado de la bocina. Si $\delta(y')$ es una fracción suficientemente pequeña de longitud de onda, el campo es casi uniforme sobre toda la apertura. Para una longitud axial constante ρ_1 , la directividad de la bocina aumenta (el ancho del rayo

disminuye) mientras la apertura b_1 y el ángulo de acampanamiento ψ_0 aumentan. Sin embargo, si b_1 y θ_0 llegan a ser tan grandes que $\delta(\mathbf{y}')$ es equivalente a 180° eléctricamente, el campo en el lado de la apertura esta en fase opuesta al campo sobre el eje. Para valores muy grandes del ángulo de acampanamiento la relación $\rho_1/(\rho_1+\delta(\mathbf{y}'))$ es casi uno, de tal forma que el efecto de la longitud adicional de la trayectoria $\delta(\mathbf{y}')$ sobre la distribución de la magnitud de campo puede despreciarse. Sin embargo, cuando $\delta(\mathbf{y}') = 180^\circ$, la fase reversa en los bordes de la apertura reduce la directividad (incrementa los lóbulos laterales). Esto indica que la máxima directividad ocurre para grandes valores del ángulo de acampanamiento para los que $\delta(\mathbf{y}')$ no excede cierto valor (δ_0). Entonces, las dimensiones de una bocina óptima están dadas por

$$\delta_0 = \frac{\rho_1}{\cos(\phi_0/2)} - \rho_1 \quad \text{ó} \quad \rho_1 = \frac{\delta_0 \cos(\phi_0/2)}{1 - \cos(\phi_0/2)} \quad \text{ó} \quad \phi_0 = 2 \arccos \frac{\rho_1}{\rho_1 + \delta_0} \quad \text{Ec. 3.2}$$

El valor de δ_0 debe usualmente estar en el rango de 0.1 a 0.4 longitudes de onda. La diferencia en la trayectoria de viaje, designada como $\delta(\mathbf{y}')$, puede obtenerse refiriéndose a la figura 3.2b.

Para cualquier punto y'

$$[\rho_1 + \delta(y')]^2 = \rho_1^2 + (y')^2 \quad \text{Ec. 3.3}$$

o

$$\delta(y') \approx -\rho_1 + [\rho_1^2 + (y')^2]^{\frac{1}{2}} = -\rho_1 + \rho_1 \left[1 + \left(\frac{y'}{\rho_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ec. 3.3a}$$

usando la expansión binomial y reteniendo solo los dos primeros términos, la ecuación 3.3a se reduce a

$$\delta(y') \approx -\rho_1 + \rho_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{\rho_1} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{y'^2}{\rho_1} \right) \quad \text{Ec. 3.3b}$$

Cuando la ecuación 3.3b se multiplica por el factor de fase k , el resultado es idéntico al término de fase cuadrática en las ecuaciones. 3.1b - 3.1d.

La longitud de la trayectoria, o efecto $\delta(y')$, que discutimos anteriormente es una limitación inherente de todas las bocinas del tipo convencional. Las relaciones de la ecuación 3.2 pueden aplicarse a todas las bocinas de la figura 3.1 para determinar sus dimensiones óptimas. Sin embargo, el valor apropiado de δ_0 puede ser diferente. Otra limitación de las bocinas es que para tener una distribución de campo más uniforme en la apertura deben suprimirse modos de orden superior. Esto determina que la relación entre el ancho de la guía de onda y la garganta de la bocina debe estar entre 1/2 y 1 longitud de onda, o si el sistema de excitación es simétrico, aunque estos modos no sean energizados, el ancho debe estar entre 1/2 y 3/2 longitudes de onda.

Ejemplo 1:

Diseñar una bocina sectoral de plano \mathbf{E} de manera que la máxima desviación de fase en la apertura de la bocina sea de 56.72° . Las dimensiones de la bocina son $a=0.5\lambda$, $b=0.25\lambda$, $b_1=2.75\lambda$.

SOLUCION

Usando 3.3b

$$\Delta\phi|_{\max} = k\delta(y)|_{y=b_1/2} = \frac{k(b_1/2)^2}{2\rho_1} = 56.72\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

o

$$\rho_1 = \left(\frac{2.75}{2}\right)^2 \frac{180}{56.72} \lambda = 6\lambda$$

El ángulo total de acampanamiento de la apertura debe ser igual a

$$2\psi_e = 2 \tan^{-1}\left(\frac{b_1/2}{\rho_1}\right) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{2.75/2}{6}\right) = 25.81^\circ$$

3.2.1.2 CAMPOS RADIADOS

Para encontrar los campos radiados por la bocina, deben conocerse sólo las componentes tangenciales de los campos $\bar{\mathbf{E}}$ y/o $\bar{\mathbf{H}}$ sobre una superficie cerrada. La superficie cerrada se escoge de manera que coincida con un plano infinito pasando a través de toda la boca de la bocina. Para encontrar los campos, se usa el equivalente aproximado de la antena de apertura rectangular. Esto es,

$$\mathbf{J} = -\frac{E_1}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-jk\delta(y')} \quad -a/2 \leq x' \leq a/2$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_x = -E_1 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-jk\delta(y')} \quad -b/2 \leq y' \leq b/2 \quad \text{Ec. 3.4}$$

y

$$\bar{\mathbf{J}}_s = \bar{\mathbf{M}}_s = 0 \quad \text{en cualquier otro lugar}$$

Usando

$$\mathbf{N}_\theta = -\frac{E_1}{\eta} \cos\theta \sin\phi \bar{\mathbf{I}}_1 \bar{\mathbf{I}}_2 \quad \text{Ec. 3.5}$$

donde

$$\bar{\mathbf{I}}_1 = \int_{-a/2}^{+a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{jkx' \sin\theta \cos\phi} d'x$$

$$= -\left(\frac{\pi a}{2}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)}{\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] \quad \text{Ec. 3.5a}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_2 = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-jk[\delta(y') - y' \sin\theta \sin\phi]} d'y \quad \text{Ec. 3.5b}$$

Esta integral puede evaluarse en términos de las integrales de Fresnel. Haciendo esto $\bar{\mathbf{I}}_2$ puede escribirse, completando el cuadrado, como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_2 &= \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-j[ky'^2/(2\rho_1) - k_y y']} dy' \\ &= e^{j(k_y^2 \rho_1/2k)} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-j[(k_y' - k_y \rho_1)^2/2k\rho_1]} dy' \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.6}$$

donde

$$k_y = k \sin\theta \sin\phi$$

Haciendo un cambio de variable

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} t = \sqrt{\frac{1}{2k\rho_1}} (k'y - k_y\rho_1) \quad \text{Ec. 3.7a}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{\pi k\rho_1}} (k'y - k_y\rho_1) \quad \text{Ec. 3.7b}$$

$$dt = \sqrt{\frac{k}{\pi k\rho_1}} dy' \quad \text{Ec. 3.7c}$$

reduce 3.6 a

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \sqrt{\frac{\pi\rho_1}{k}} e^{j(k_y^2\rho_1/2k)} \int_{t_1}^{t_2} e^{-j(\pi/2)t^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi\rho_1}{k}} e^{j(k_y^2\rho_1/2k)} \int_{t_1}^{t_2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \right] dt \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.8}$$

y toma la forma de

$$\bar{I}_2 = \sqrt{\frac{\pi\rho_1}{k}} e^{j(k_y^2\rho_1/2k)} \{ [C(t_2) - C(t_1)] - j[S(t_2) - S(t_1)] \} \quad \text{Ec. 3.9}$$

donde

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi k\rho_1}} \left(-\frac{kb_1}{2} - k_y\rho_1 \right) \quad \text{Ec. 3.9a}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi k\rho_1}} \left(\frac{kb_1}{2} - k_y\rho_1 \right) \quad \text{Ec. 3.9b}$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad \text{Ec. 3.9c}$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad \text{Ec. 3.9d}$$

$C(x)$ y $S(x)$ se conocen como las integrales seno y coseno de Fresnel y se encuentran tabuladas (ver anexo 2). Subrutinas computacionales también están disponibles para una evaluación numérica eficiente.

Usando las ecuaciones 3.5a y 3.9, 3.5 puede escribirse como

$$N_{\theta} = E_1 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_1}{k}} e^{j(k_y^2 \rho_1 / 2k)}$$

$$\times \left\{ \frac{\cos \theta \sin \phi}{\eta} \left[\frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] F(t_1, t_2) \right\}$$

Ec. 3.10

donde

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi \quad \text{Ec. 10a}$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi \quad \text{Ec. 3.10b}$$

$$\bar{F}(t_1, t_2) = [C(t_2) - C(t_1)] - j[S(t_2) - S(t_1)] \quad \text{Ec. 3.10c}$$

De manera similar \bar{N}_{ϕ} , \bar{L}_{θ} , \bar{L}_{ϕ} de 11.12b - 11.12d del anexo 2 se reducen a

$$\bar{N}_{\phi} = E_1 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_1}{k}} e^{j(k_y^2 \rho_1 / 2k)} \left\{ \frac{\cos \phi}{\eta} \left[\frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] \bar{F}(t_1, t_2) \right\}$$

Ec. 3.11a

$$\bar{L}_{\theta} = E_1 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_1}{k}} e^{j(k_y^2 \rho_1 / 2k)}$$

$$\times \left\{ -\cos \theta \cos \phi \left[\frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] \bar{F}(t_1, t_2) \right\}$$

Ec. 3.11b

$$\bar{L}_{\phi} = E_1 \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_1}{k}} e^{j(k_y^2 \rho_1 / 2k)} \left\{ \sin \phi \left[\frac{\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] \bar{F}(t_1, t_2) \right\}$$

Ec. 3.11c

Las componentes de campo eléctrico radiado por la

bocina pueden obtenerse usando 11.10a - 11.10c del anexo, y 3.10 - 3.11c. Así

$$E_r = 0 \quad \text{Ec. 3.12a}$$

$$\vec{E}_\theta = -j \frac{a\sqrt{\pi k \rho_1} E_1 e^{-jkr}}{8r}$$

$$\times \{ e^{j(k_y^2 \rho_1 / 2k)} \sin \phi (1 + \cos \theta) \left[\frac{\cos(\frac{k_x a}{2})}{(\frac{k_x a}{2})^2 - (\frac{\pi}{2})^2} \right] F(t_1, t_2) \} \quad \text{Ec. 3.12b}$$

$$\vec{E}_\phi = -j \frac{a\sqrt{\pi k \rho_1} E_1 e^{-jkr}}{8r}$$

$$\times \{ e^{j(k_y^2 \rho_1 / 2k)} \cos \phi (\cos \theta + 1) \left[\frac{\cos(\frac{k_x a}{2})}{(\frac{k_x a}{2})^2 - (\frac{\pi}{2})^2} \right] F(t_1, t_2) \} \quad \text{Ec. 3.12c}$$

donde t_1 , t_2 , k_x , k_y , y $F(t_1, t_2)$ son dados respectivamente por 3.9a, 3.9b, 3.10a, 3.10b, y 3.10c. Las correspondientes componentes de campo \vec{H} son obtenidas usando 11.10d - 11.10f del anexo. En los planos principales \mathbf{E} y \mathbf{H} , el campo eléctrico se reduce a

Plano E ($\phi = \pi/2$)

$$E_r = E_\phi = 0 \quad \text{Ec. 3.13a}$$

$$\vec{E}_\theta = -j \frac{a\sqrt{\pi k \rho_1} E_1 e^{-jkr}}{8r} \left\{ -e^{j(k \rho_1 \sin^2 \theta / 2)} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 (1 + \cos \theta) F(t_1', t_2') \right\} \quad \text{Ec. 3.13b}$$

$$t_1' = \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} \left(-\frac{b_1}{2} - \rho_1 \sin \theta \right) \quad \text{Ec. 3.13c}$$

$$t_2' = \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} \left(+\frac{b_1}{2} - \rho_1 \sin \theta \right) \quad \text{Ec. 3.13d}$$

Plano H ($\phi = 0$)

$$E_r = E_\theta = 0 \quad \text{Ec. 3.14a}$$

$$E_\theta = -j \frac{a \sqrt{\pi k \rho_1} E_1 e^{-jkr}}{8r} \left\{ (1 + \cos\theta) \left[\frac{\cos\left(\frac{ka}{2} \sin\theta\right)}{\left(\frac{ka}{2} \sin\theta\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \right] \bar{F}(t_1'', t_2'') \right\} \quad \text{Ec. 3.14b}$$

$$t_1'' = -\frac{b_1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} \quad \text{Ec. 3.14c}$$

$$t_2'' = +\frac{b_1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} \quad \text{Ec. 3.14d}$$

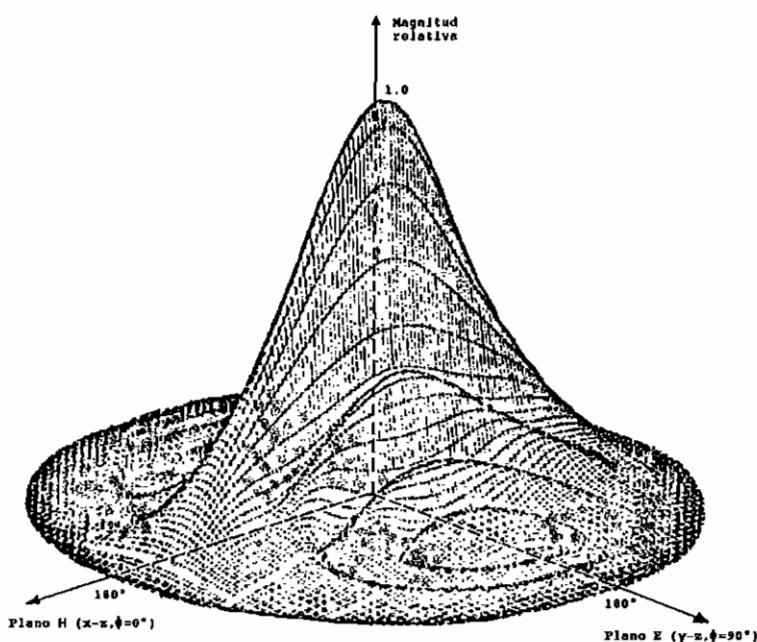


Figura 3.3 Modelo tridimensional de campo para una bocina sectorial de plano E. [2]

Para entender mejor el desempeño y la ganancia de una bocina sectorial de plano **E** como un radiador eficiente, un campo tridimensional normalizado se ha dibujado en la figura 3.3 utilizando 3.12a - 3.12c. Como se esperaba, el modelo de plano **E** es mucho más estrecho que el de plano **H** debido al acampanamiento y la mayor dimensión de la bocina en esa dirección. La figura 3.3 provee una excelente

visualización del rendimiento total de la radiación de la bocina.

Para mostrar detalles adicionales, se ilustran en la figura 3.4 los correspondientes modelos normalizados de los planos **E** y **H** (en dB).

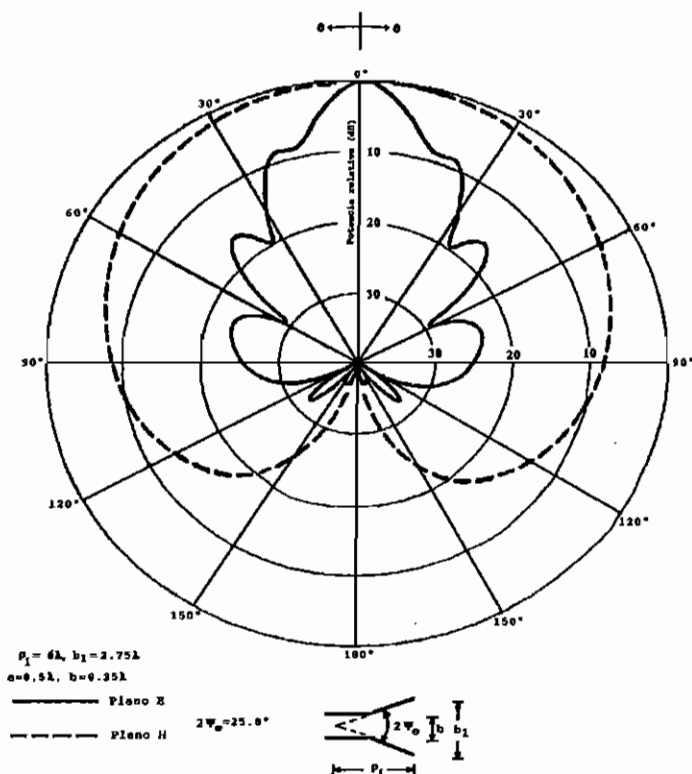


Figura 3.4 Modelos de plano E y Plano H de una bocina sectoral de plano E.[2]

Estos modelos también ilustran la estrechez de plano **E** y provee información sobre los niveles relativos de los modelos en estos dos planos.

Para examinar el comportamiento del modelo como función del acampanamiento, se muestra en la figura 3.5 el modelo del

plano **E** para una bocina con $\rho_1=15\lambda$ y con ángulos de acampanamiento entre $20^\circ \leq 2\psi_e \leq 35^\circ$.

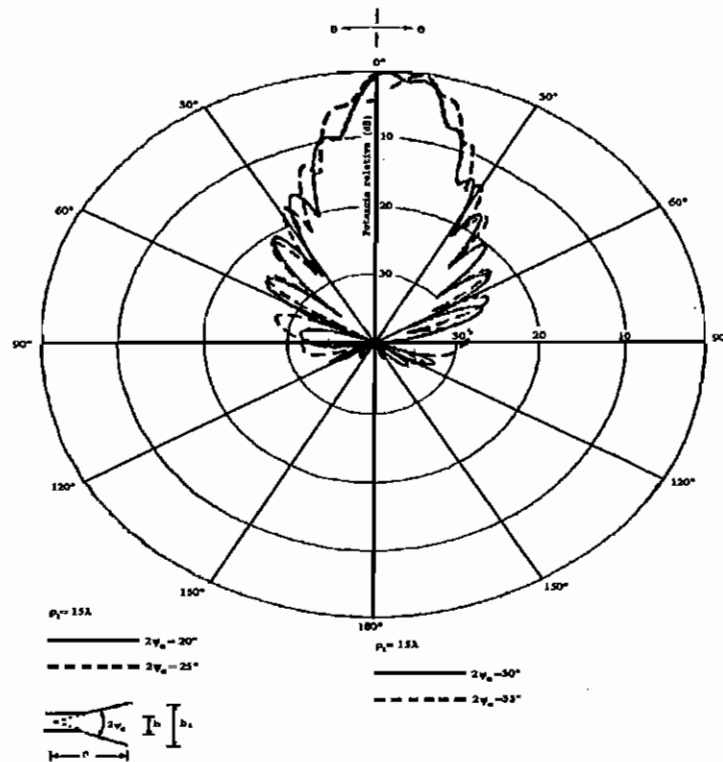


Figura 3.5 **Modelo de plano E de una bocina sectoral de plano E para una longitud constante y diferentes ángulos de acampanamiento. [2]**

Se presentan un total de cuatro modelos. Puesto que cada modelo es simétrico, se dibuja solo la mitad de cada uno de ellos. Para ángulos pequeños, los modelos son estrechos.

Eventualmente los modelos comienzan "ensanchados", llegando a ser estrechos alrededor del lóbulo principal, la fase ahusada de la apertura es tal que el principal máximo no ocurre sobre el eje. Esto se ilustra en la figura 3.5 para el modelo con $2\psi_e = 35^\circ$. Para compensar este movimiento del máximo

relación de voltaje) a un ángulo de $\theta=90^\circ$ usando las curvas universales de la figura 3.6.

Solución

Usando 3.15d

$$s = \frac{b_1^2}{8\lambda\rho_1} = \frac{(2.75)^2}{8(6)} = 0.1575 = \frac{1}{6.3}$$

Ninguna de las curvas en la figura 3.6 representa $s=1/63$. Por lo tanto debe realizarse interpolación entre las curvas de $s=1/4$ y $s=1/8$.

A $\theta=90^\circ$

$$\frac{b_1}{\lambda} \sin \theta = 2.75 \sin(90^\circ) = 2.75$$

y en este punto la intensidad de campo entre las curvas $s=1/4$ y $s=1/8$ es casi -20 dB. Por lo tanto la intensidad de campo en $\theta=90^\circ$ es igual a

$$E_\theta = -20 + 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \cos 90^\circ}{2} \right) = -20 - 6 = -26 \text{ dB}$$

o como relación normalizada de voltaje de

$$E_\theta = 0.05$$

valores muy cercanos a los de la figura 3.4.

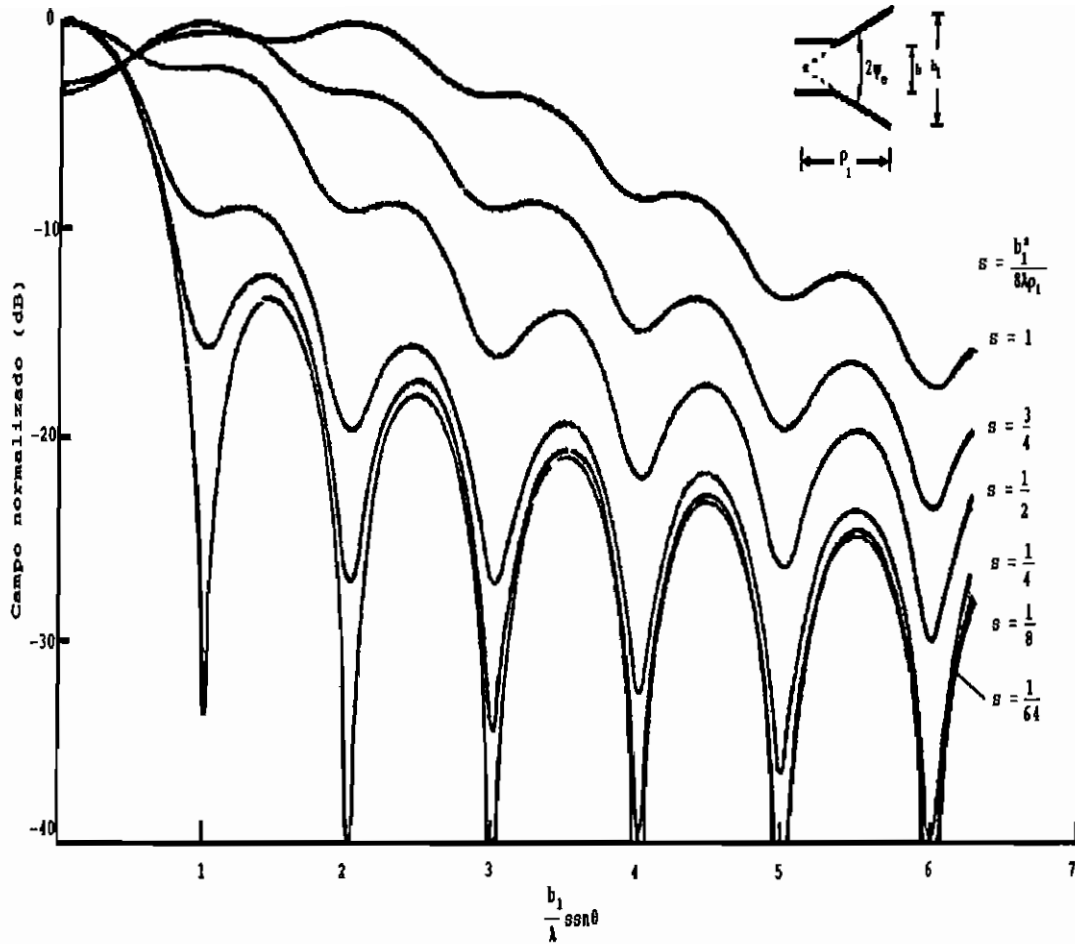


Figura 3.6 Modelos universales del plano E para bocinas sectoral de plano E y piramidal.[4]

3.2.1.3 DIRECTIVIDAD

La directividad es un parámetro a menudo utilizado como figura de mérito para describir el desempeño de una antena. Para encontrar la directividad debe calcularse la máxima radiación. Esto es,

$$U_{\max} = U(\theta, \phi)|_{\max} = \frac{r^2}{2\eta} |\bar{E}|_{\max}^2 \quad \text{Ec. 3.16}$$

Para la mayoría de antenas de bocinas, $|E|_{\max}$ esta direccionada

cercana al eje z ($\theta = 0$). Así

$$|E|_{\max} = \sqrt{|E_{\theta}|_{\max}^2 + |E_{\phi}|_{\max}^2} = \frac{2a\sqrt{\pi k \rho_1}}{\pi^2 r} |E_1| |F(t)| \quad \text{Ec. 3.17}$$

Usando 3.12b, 3.12c, y 3.10c

$$|E_{\theta}|_{\max} = \frac{2a\sqrt{\pi k \rho_1}}{\pi^2 r} |E_1 \sin \phi F(t)| \quad \text{Ec. 3.17a}$$

$$|E_{\phi}|_{\max} = \frac{2a\sqrt{\pi k \rho_1}}{\pi^2 r} |E_1 \cos \phi F(t)| \quad \text{Ec. 3.17b}$$

$$F(t) = [C(t) - jS(t)] \quad \text{Ec. 3.17c}$$

$$t = \frac{b_1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} = \frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \quad \text{Ec. 3.17d}$$

puesto que

$$k_x = k_y = 0 \quad \text{Ec. 3.17e}$$

$$t_1 = -t = -\frac{b_1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} = -\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \quad \text{Ec. 3.17f}$$

$$t_2 = +t = +\frac{b_1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi \rho_1}} = \frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \quad \text{Ec. 3.17g}$$

$$C(-t) = -C(t) \quad \text{Ec. 3.17h}$$

$$S(-t) = -S(t) \quad \text{Ec. 3.17i}$$

Así

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \frac{r^2}{2\eta} |E|_{\max}^2 = \frac{2a^2 k \rho_1}{\eta \pi^3} |E_1|^2 |F(t)|^2 \\ &= \frac{4a^2 \rho_1 |E_1|^2}{\eta \lambda \pi^2} |F(t)|^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.18}$$

donde

$$|F(t)|^2 = \left[C^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}}\right) + S^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}}\right) \right] \quad \text{Ec. 3.18a}$$

La potencia total radiada puede encontrarse simplemente integrando la densidad de potencia promedio sobre la apertura de la bocina.

Usando 3.1a - 3.1d

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \iint_{s_0} \text{Re}(\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2\eta} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-a/2}^{+a/2} |E_1|^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a} x'\right) dx' dy' \quad \text{Ec. 3.19}$$

lo cual se reduce a

$$P_{\text{rad}} = |E_1|^2 \frac{b_1 a}{4\eta} \quad \text{Ec. 3.19a}$$

Usando 3.18 y 3.19a, la directividad para la bocina de plano \mathbf{E} puede escribirse como

$$D_E = \frac{4\pi U_{\text{max}}}{P_{\text{rad}}} = \frac{64a \rho_1}{\pi \lambda b_1} |F(t)|^2$$

$$= \frac{64a \rho_1}{\pi \lambda b_1} \left[C^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}}\right) + S^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}}\right) \right] \quad \text{Ec. 3.20}$$

El rendimiento total de una antena puede a menudo ser juzgado por el ancho del rayo y/o por su directividad. El ancho del rayo de los puntos de media potencia (**HPBW**), como función del ángulo de acampanamiento, para diferentes longitudes de la bocina se muestra en la figura 3.7.

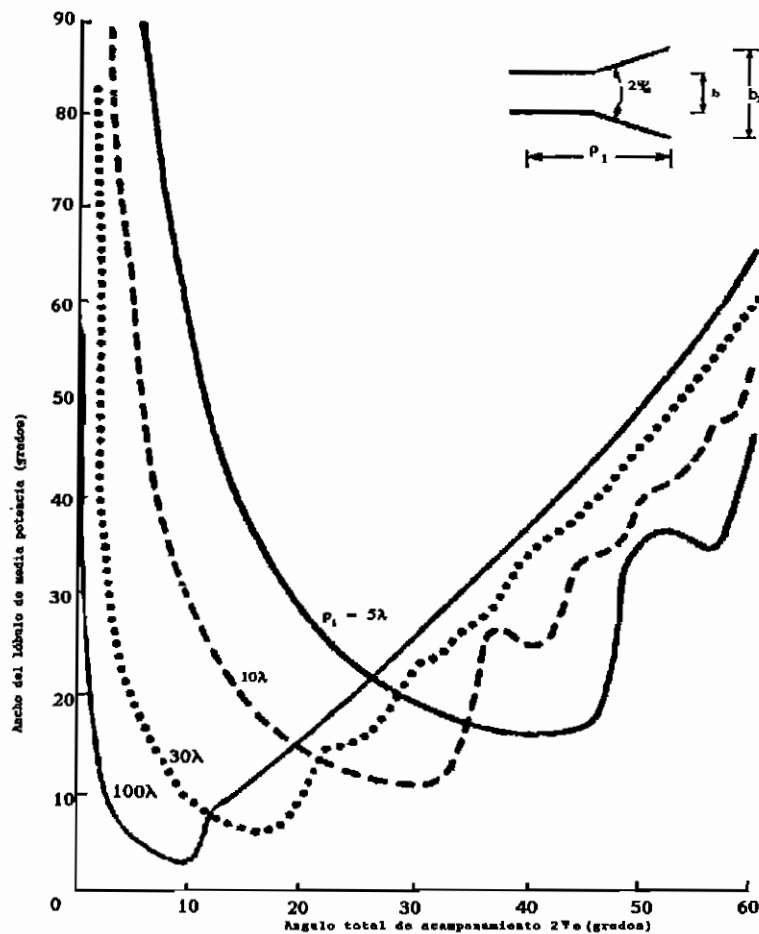


Figura 3.7 Ancho del rayo entre los puntos de media potencia de la bocina sectoral de plano E como función del ángulo de acampanamiento para diferentes longitudes de la bocina.[2]

Además, la directividad (normalizada con respecto a la dimensión constante de la apertura a) se muestra en la figura 3.8.

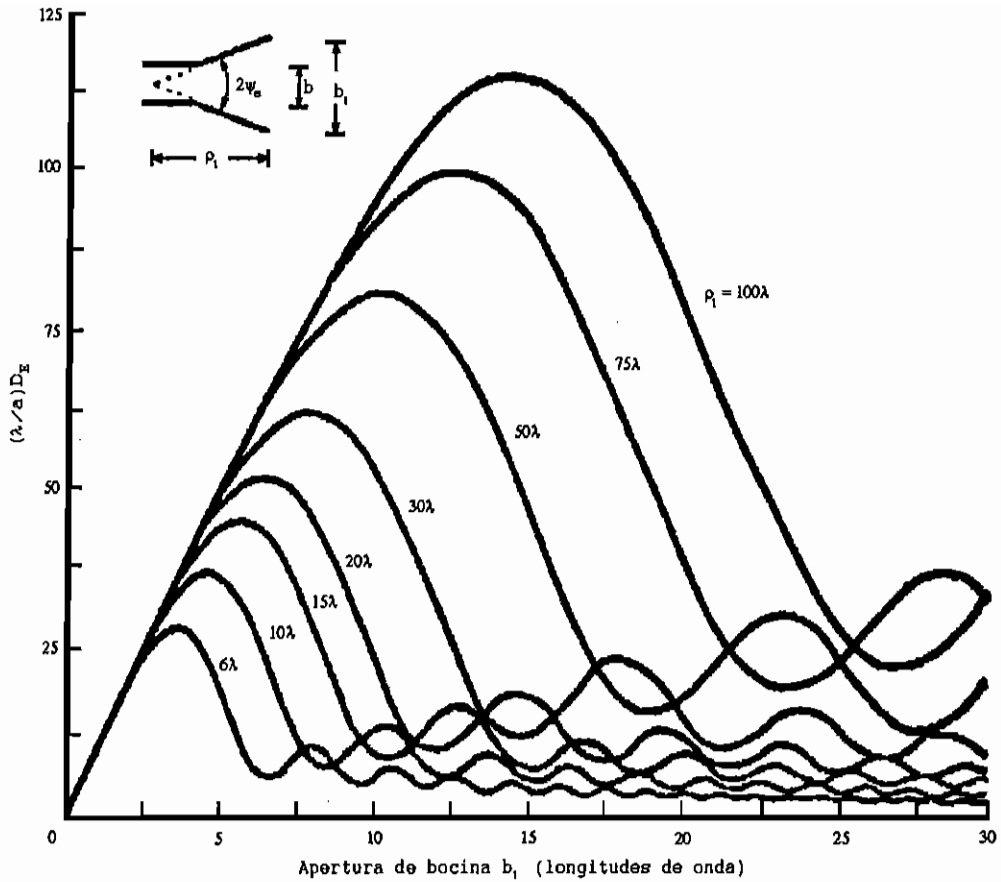


Figura 3.8 Directividad normalizada de una bocina sectoral de plano E como función del tamaño de la apertura y para diferentes longitudes. [5]

Para una longitud dada, las bocinas muestran un decrecimiento monótonico en el ancho del rayo de los puntos de media potencia y un aumento de la directividad hasta cierto ángulo de acampanamiento. Más allá de este punto un crecimiento monótonico en el ancho del rayo y una disminución de la directividad se presenta seguidas de subidas y bajadas. El incremento en el ancho del rayo y la disminución de la directividad más allá de un cierto acampanamiento indica el ensanchamiento del rayo principal.

Si los valores de b_1 (en λ), lo cual corresponde a las máximas directividades en la figura 3.8, se dibujan versus sus correspondientes valores de ρ_1 (en λ), se puede demostrar que la óptima directividad ocurre cuando

$$b_1 \approx \sqrt{2\lambda\rho_1} \quad \text{Ec. 3.20a}$$

con un correspondiente valor de s igual a

$$s|_{b_1=\sqrt{2\lambda\rho_1}} = s_{\text{opt}} = \frac{b_1^2}{8\lambda\rho_1} \Big|_{b_1=\sqrt{2\lambda\rho_1}} = \frac{1}{4} \quad \text{Ec. 3.20b}$$

La directividad de una bocina sectoral de plano **E** puede también calcularse usando el siguiente procedimiento

1. Calculando **B** mediante

$$B = \frac{b_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_e/\lambda}} \quad \text{Ec. 3.21a}$$

2. Usando este valor de **B**, encontrar el correspondiente valor de G_E de la figura 3.9. Si, sin embargo, el valor de **B** es más pequeño que 2, calcular G_E usando

$$G_E = \frac{32}{\pi} B \quad \text{Ec. 3.21b}$$

3. Calcular D_E usando el valor de G_E de la figura 3.9 o de la ecuación 3.21.b. Entonces

$$D_E = \frac{a}{\lambda} \frac{G_E}{\sqrt{\frac{50}{\rho_e/\lambda}}} \quad \text{Ec. 3.21c}$$

Ejemplo 3:

Una bocina sectoral de plano **E** tiene dimensiones de $a=0.5\lambda$, $b=0.25\lambda$, $b=2.75\lambda$, y $\rho_1=6\lambda$. Encuentre la directividad

usando 3.20 y 3.21c. Compare las respuestas.

Solución:

Para esta bocina

$$\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda\rho_1}} = \frac{2.75}{\sqrt{2(6)}} = 0.794$$

Por lo tanto del anexo 2

$$[C(0.794)]^2 = (0.72)^2 = 0.518$$

$$[S(0.794)]^2 = (0.24)^2 = 0.0576$$

Usando la ecuación 3.20

$$D_E = \frac{64(0.5)6}{2.75\pi}(0.518 + 0.0576) = 12.79 = 11.07\text{dB}$$

Para encontrar la directividad usando 3.21c, se evalúan los siguientes parámetros

$$\rho_e = \lambda \sqrt{(6)^2 + \left(\frac{2.75}{2}\right)^2} = 6.1555\lambda$$

$$\sqrt{\frac{50}{\rho_e/\lambda}} = \sqrt{\frac{50}{6.1555}} = 2.85$$

$$B = 2.75(2.85) = 7.84$$

Para $B = 7.84$, de la figura 3.9 $G_E = 73.5$. Así, usando 3.21c

$$D_E = \frac{0.5(73.5)}{2.85} = 12.89 = 11.10\text{dB}$$

Obviamente una excelente aproximación entre los resultados de 3.20 y 3.21c.

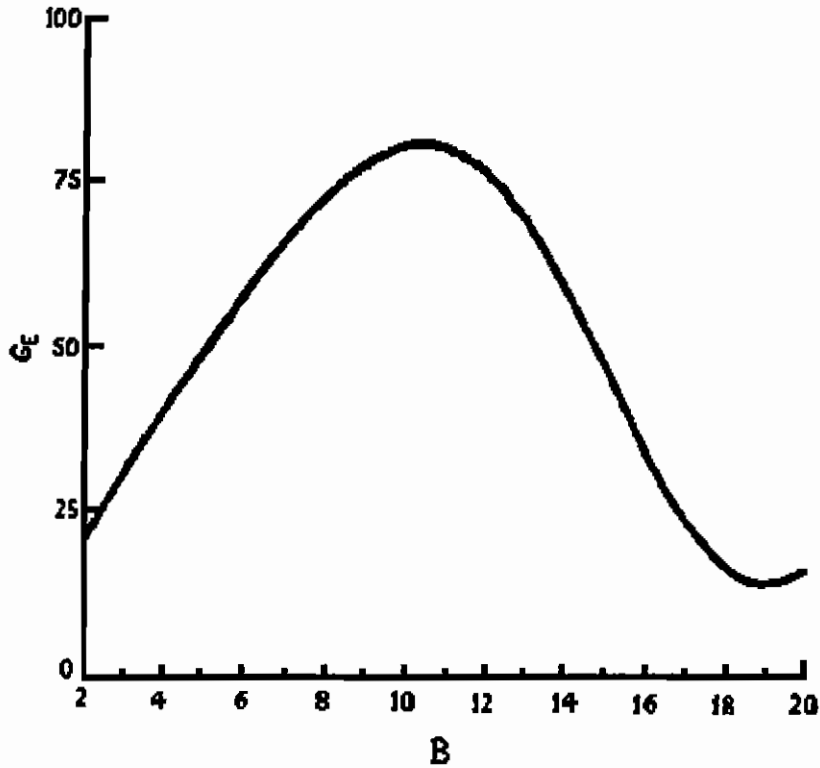


FIGURA 3.9 GE en función de B.[6]

Para bocinas que trabajan en una banda de frecuencias es deseable determinar las dimensiones óptimas para la mayor frecuencia a usarse, puesto que $\delta(y')$ en longitud de onda es mayor a esta frecuencia.

3.3 BOCINA PIRAMIDAL

La bocina más ampliamente utilizada es aquella que es acampanada en ambas direcciones, como se muestra en la figura

3.10. Esta es ampliamente referida como una bocina piramidal, y sus características de radiación son esencialmente una combinación de las de las bocinas sectoriales de plano **E** y **H**.

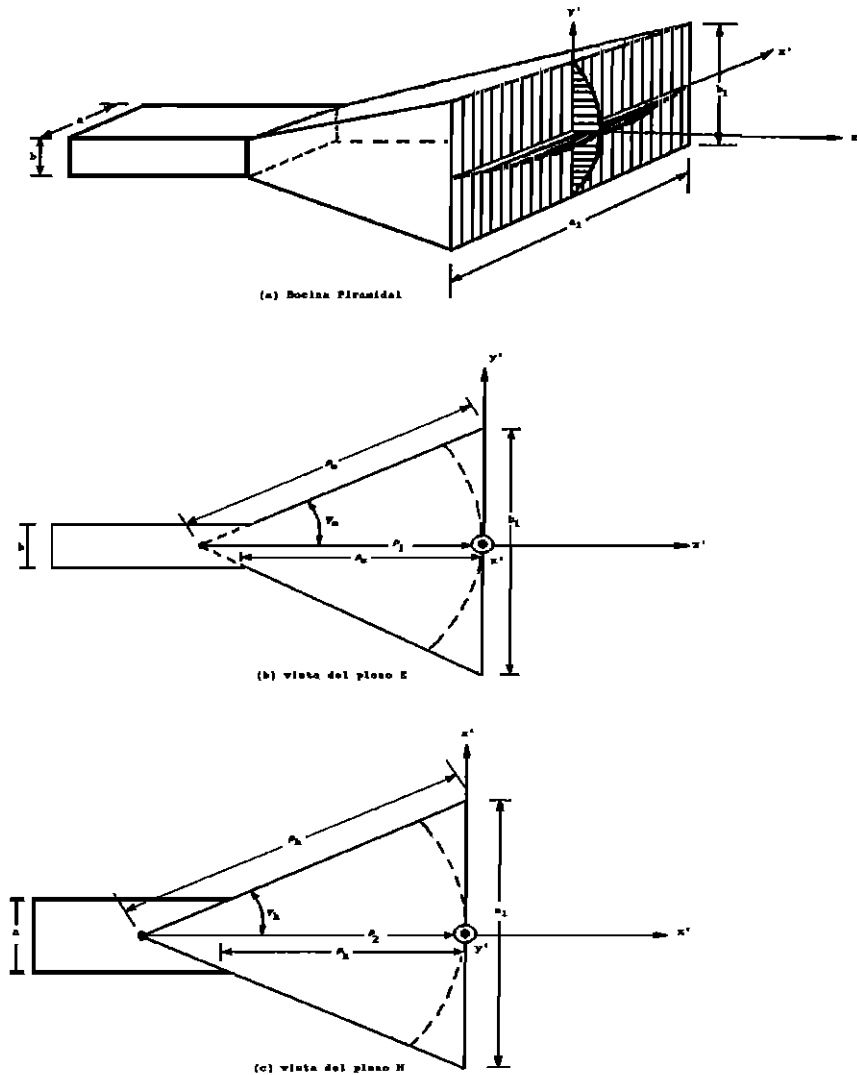


Figura 3.10 Bocina piramidal y sistema de coordenadas.[2]

3.3.1 CAMPOS EN LA APERTURA, EQUIVALENTE, Y CAMPOS RADIADOS.

Para simplificar el análisis y mantener un modelo compatible con los datos experimentales, las componentes tangenciales de los campos \vec{E} y \vec{H} sobre la apertura de la bocina son aproximadamente

$$E_y'(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1)/2} \quad \text{Ec. 3.22a}$$

$$H_x'(x', y') = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1)/2} \quad \text{Ec. 3.22b}$$

y las densidades de corriente equivalentes

$$J_y(x', y') = -\frac{E_0}{\eta} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1)/2} \quad \text{Ec. 3.23a}$$

$$M_x(x', y') = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk(x'^2/\rho_2 + y'^2/\rho_1)/2} \quad \text{Ec. 3.23b}$$

Las expresiones anteriores contienen una distribución cosinusoidal de amplitud en la dirección x' y variaciones cuadráticas de fase en ambas direcciones x' y y' , similar a aquellas de las bocinas sectoriales de plano E y H .

N_θ , N_ϕ , L_θ y L_ϕ pueden formularse y puede mostrarse que están dadas por

$$N_\theta = -\frac{E_0}{\eta} \cos\theta \sin\phi I_1 I_2 \quad \text{Ec. 3.24a}$$

$$N_\phi = -\frac{E_0}{\eta} \cos\phi I_1 I_2 \quad \text{Ec. 3.24b}$$

$$L_\theta = E_0 \cos\theta \cos\phi I_1 I_2 \quad \text{Ec. 3.24c}$$

$$L_\phi = -E_0 \sin\phi I_1 I_2 \quad \text{Ec. 3.24d}$$

donde

$$I_1 = \int_{-a_1/2}^{+a_1/2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-jk[x'^2/(2\rho_1) - x' \sin\theta \cos\phi]} dx' \quad \text{Ec. 3.24e}$$

$$I_2 = \int_{-b_1/2}^{+b_1/2} e^{-jk[y'^2/(2\rho_1) - y' \sin\theta \sin\phi]} dy' \quad \text{Ec. 3.24f}$$

Por otra parte, en el análisis de los campos radiados por una bocina sectoral de plano \mathbf{H} se tiene que

$$N_0 = \iint_S J_y \cos \theta \cos \phi e^{+jkr' \cos \psi} d's = -\frac{E_2}{\eta} \cos \theta \sin \phi I_1 I_2 \quad \text{Ec. 3.25}$$

donde

$$I_1 = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{+jky \sin \theta \sin \phi} dy' = b \left[\frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi\right)}{\frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi} \right] \quad \text{Ec. 3.25a}$$

$$I_2 = \int_{-a_1/2}^{+a_1/2} \cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) e^{-jk[\delta(x') - x' \sin \theta \cos \phi]} dx' \quad \text{Ec. 3.25b}$$

Pero reescribiendo $\cos[(\pi/a_1)x']$ como

$$\cos\left(\frac{\pi}{a_1} x'\right) = \left[\frac{e^{j(\pi/a_1)x'} + e^{-j(\pi/a_1)x'}}{2} \right] \quad \text{Ec. 3.26}$$

la ecuación 3.25b puede expresarse como

$$I_2 = I_2' + I_2'' \quad \text{Ec. 3.27}$$

donde

$$I_2' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_2}{k}} e^{j(k_x'^2 \rho_2 / 2k)} \{ [C(t_2') - C(t_1')] - j[S(t_2') - S(t_1')] \} \quad \text{Ec. 3.28}$$

$$t_1' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(-\frac{ka_1}{2} - k_x' \rho_2 \right) \quad \text{Ec. 3.28a}$$

$$t_2' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(+\frac{ka_1}{2} - k_x' \rho_2 \right) \quad \text{Ec. 3.28b}$$

$$k_x' = k \sin \theta \cos \phi + \frac{\pi}{a_1} \quad \text{Ec. 3.28c}$$

$$I_2'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_2}{k}} e^{j(k_x''^2 \rho_2 / 2k)} \{ [C(t_2'') - C(t_1'')] - j[S(t_2'') - S(t_1'')] \} \quad \text{Ec. 3.29}$$

$$t_1'' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(-\frac{ka_1}{2} - k_x'' \rho_2 \right) \quad \text{Ec. 3.29a}$$

$$t_2'' = \sqrt{\frac{1}{\pi k \rho_2}} \left(+\frac{ka_1}{2} - k_x'' \rho_2 \right) \quad \text{Ec. 3.29b}$$

$$k_x'' = k \sin \theta \cos \phi - \frac{\pi}{a_1} \quad \text{Ec. 3.29c}$$

Usando 3.25b, 3.27, 3.28, y 3.29, la ecuación 3.24e puede expresarse como

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \rho_2}{k}} \left(e^{j(k_x'' \rho_2 / 2k)} \{ [C(t_2') - C(t_1')] - j[S(t_2') - S(t_1')] \} \right. \\ \left. + e^{j(k_x'' \rho_2 / 2k)} \{ [C(t_2'') - C(t_1'')] - j[S(t_2'') - S(t_1'')] \} \right) \quad \text{Ec. 3.30}$$

donde t_1' , t_2' , k_x' , t_1'' , t_2'' , y k_x'' , están dadas por las ecuaciones 3.28a - 3.28c y 3.29a - 3.29c. Similarmente usando 3.6 - 3.9d, I_2 de 3.24f puede escribirse como

$$I_2 = \sqrt{\frac{\pi \rho_1}{k}} e^{j(k_y' \rho_1 / 2k)} \{ [C(t_2) - C(t_1)] - j[S(t_2) - S(t_1)] \} \quad \text{Ec. 3.31}$$

donde k_y' , t_1 , y t_2 están dadas por 3.6a, 3.9a y 3.9b.

Combinando 3.24a - 3.24d, las componentes de campo de la zona lejana $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ de 11.10a - 11.10c del anexo se reducen a

$$E_r = 0 \quad \text{Ec. 3.32a}$$

$$E_\theta = -j \frac{k e^{jkr}}{4\pi r} [L_\theta + \eta N_\theta] \\ = j \frac{k E_0 e^{jkr}}{4\pi r} [\sin \phi (1 + \cos \theta) I_1 I_2] \quad \text{Ec. 3.32b}$$

$$E_\phi = +j \frac{k e^{jkr}}{4\pi r} [L_\phi - \eta N_\phi]$$

$$= j \frac{k E_0 e^{-jkr}}{4\pi r} [\cos\phi(\cos\theta+1)I_1 I_2] \quad \text{Ec. 3.32c}$$

donde I_1 e I_2 son dadas por 3.30 y 3.31 respectivamente.

Los campos radiados por una bocina piramidal, dados por 3.32a - 3.32c, son válidos para todos los ángulos de observación. Una revisión a esas ecuaciones revela que el modelo principal de plano $\mathbf{E}(\phi = \pi/2)$ de una bocina piramidal, excepto por un factor de normalización, es idéntico al modelo de plano \mathbf{E} de una bocina sectoral de plano \mathbf{E} . De forma similar el plano $\mathbf{H}(\phi=0)$ es idéntico a aquel de una bocina sectoral de plano \mathbf{H} . Por lo tanto el modelo de una bocina piramidal es muy estrecho en ambos planos principales, y, en realidad, en todos los planos. Esto se ilustra en la figura 3.11.

Para demostrar que la radiación máxima de una bocina piramidal no está necesariamente direccionada a lo largo de su eje, el modelo de campo tridimensional para una bocina con $\rho_1=\rho_2=6\lambda$, $\mathbf{a}_1=12\lambda$, $\mathbf{b}_1=6\lambda$, $\mathbf{a}=0.50\lambda$ y $\mathbf{b}=0.25\lambda$ se indica en la figura 3.12. Los correspondientes modelos bidimensionales de planos \mathbf{E} y \mathbf{H} se presentan en la figura 3.13. El máximo no ocurre en el eje debido a que los rayos emanados desde las diferentes partes de la apertura hacia el eje no están en fase.

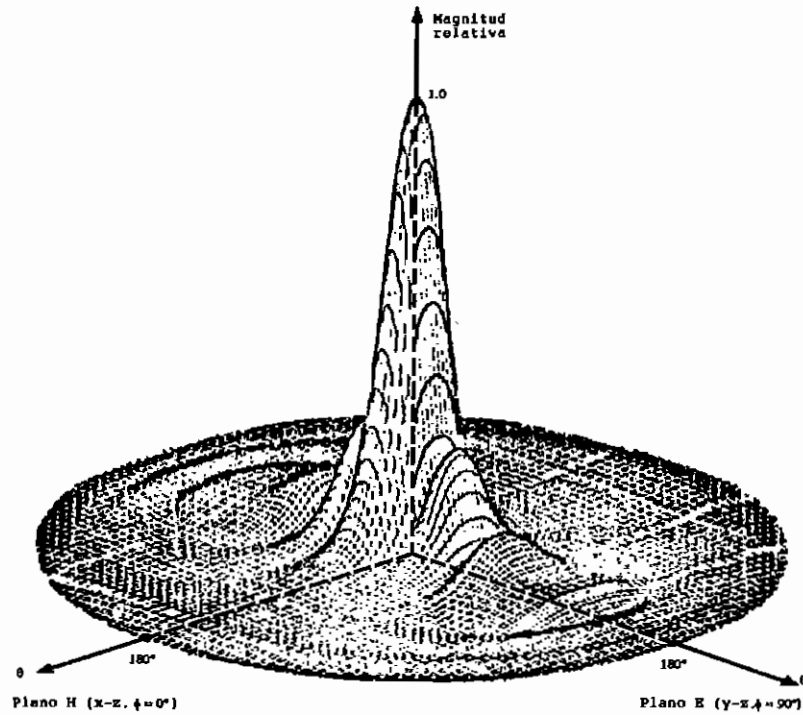


Figura 3.11 Modelo tridimensional de campo de una bocina piramidal ($\rho_1=\rho_2=6\lambda$, $a_1=5.5\lambda$, $b_1=2.75\lambda$, $a=0.5\lambda$, $b=0.25\lambda$). [2]

Para construir físicamente una bocina piramidal, la dimensión ρ_e de la figura 3.10b dada por

$$\rho_e = (b_1 - b) \left[\left(\frac{\rho_e}{b_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \quad \text{Ec. 3.33a}$$

deberá ser igual a la dimensión ρ_h de la figura 3.10c dada por

$$\rho_h = (a_1 - a) \left[\left(\frac{\rho_h}{a_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \quad \text{Ec. 3.33b}$$

Las dimensiones elegidas para las figuras 3.11 y 3.12 satisfacen estos requerimientos. Para la bocina de la figura 3.11, $\rho_e=6.1555\lambda$, $\rho_h=6.6\lambda$, y $\rho_e=\rho_h=5.4544\lambda$, mientras que

para la figura 3.12, $\rho_e=6.7082\lambda$, $\rho_h=8.4853\lambda$, y $\rho_e=\rho_h=5.75\lambda$.

Los campos de 3.32a - 3.32c proveen modelos exactos para regiones angulares próximas al lóbulo principal y a sus lóbulos menores más cercanos.

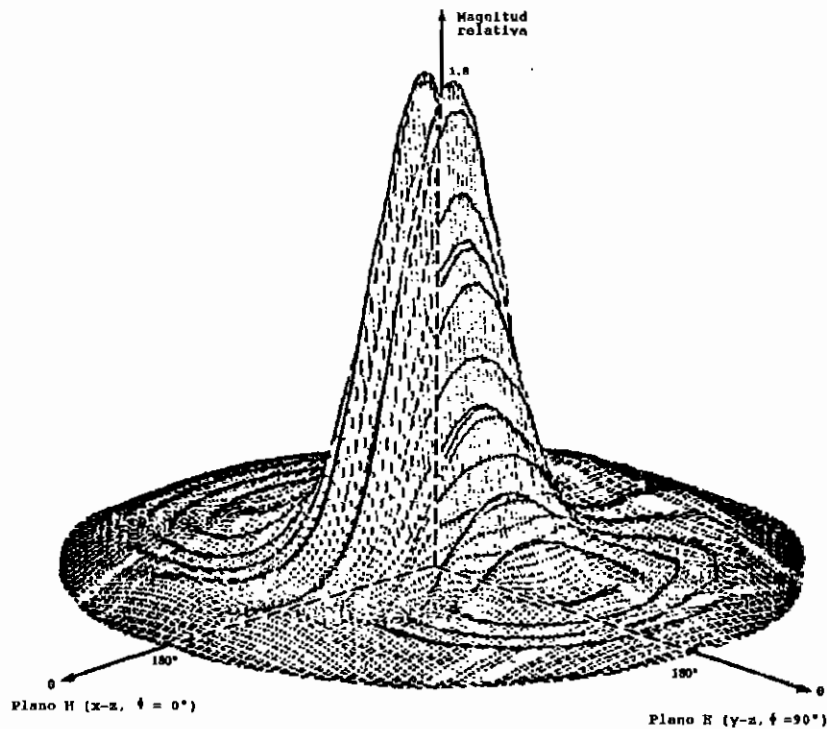


Figura 3.12 Modelo tridimensional de campo de una bocina piramidal con el máximo no sobre el eje ($\rho_1=\rho_2=6\lambda$, $a_1=12\lambda$, $b_1=6\lambda$, $a=0.5\lambda$, $b=0.25$). [2]

3.3.2 DIRECTIVIDAD.

Como para las bocinas sectoriales de plano **E** y **H**, la directividad de la configuración piramidal es vital para el diseño de la antena. La radiación máxima de la bocina

piramidal se direcciona a lo largo del eje z ($\theta=0$). Es un muy simple ejercicio demostrar que $|E_\theta|_{\max}$, $|E_\phi|_{\max}$, y U_{\max} pueden ser escritas, usando 3.32b y 3.32c, como

$$|E_\theta|_{\max} = |E_0 \sin \phi| \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{r} \{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \}^{1/2} \\ \times \left\{ C^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) + S^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) \right\}^{1/2} \quad \text{Ec. 3.34a}$$

$$|E_\phi|_{\max} = |E_0 \cos \phi| \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{r} \{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \}^{1/2} \\ \times \left\{ C^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) + S^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) \right\}^{1/2} \quad \text{Ec. 3.34b}$$

$$U_{\max} = \frac{r^2}{2\eta} |E|_{\max}^2 = |E_0|^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{2\eta} \{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \} \\ \times \left\{ C^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) + S^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) \right\} \quad \text{Ec. 3.34c}$$

donde u y v se definen por

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda \rho_2}}{a_1} + \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \rho_2}} \right) \quad \text{Ec. 3.35a}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\lambda \rho_2}}{a_1} - \frac{a_1}{\sqrt{\lambda \rho_2}} \right) \quad \text{Ec. 3.35b}$$

Puesto que

$$P_{\text{rad}} = |E_0|^2 \frac{a_1 b_1}{4\eta} \quad \text{Ec. 3.36}$$

la directividad de la bocina piramidal puede escribirse como

$$D_p = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{8\pi \rho_1 \rho_2}{a_1 b_1} \{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \} \\ \times \left\{ C^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) + S^2 \left(\frac{b_1}{\sqrt{2\lambda \rho_1}} \right) \right\} \quad \text{Ec. 3.37}$$

la cual reduce a una relación satisfactoria que es usada

ampliamente en el diseño de bocinas piramidales:

$$D_p = \frac{\pi \lambda^2}{32ab} D_E D_H \quad \text{Ec. 3.37a}$$

donde D_E es la directividad de la bocina de plano E dada por la ecuación 3.20; y D_H la directividad de las bocinas sectoriales de plano H dada por

$$D_H = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{4\pi b \rho_2}{a_1 \lambda} \times \{ [C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2 \} \quad \text{Ec. 3.38}$$

además puede demostrarse que la máxima directividad ocurre cuando

$$a_1 \approx \sqrt{3\lambda \rho_2} \quad \text{Ec. 3.38a}$$

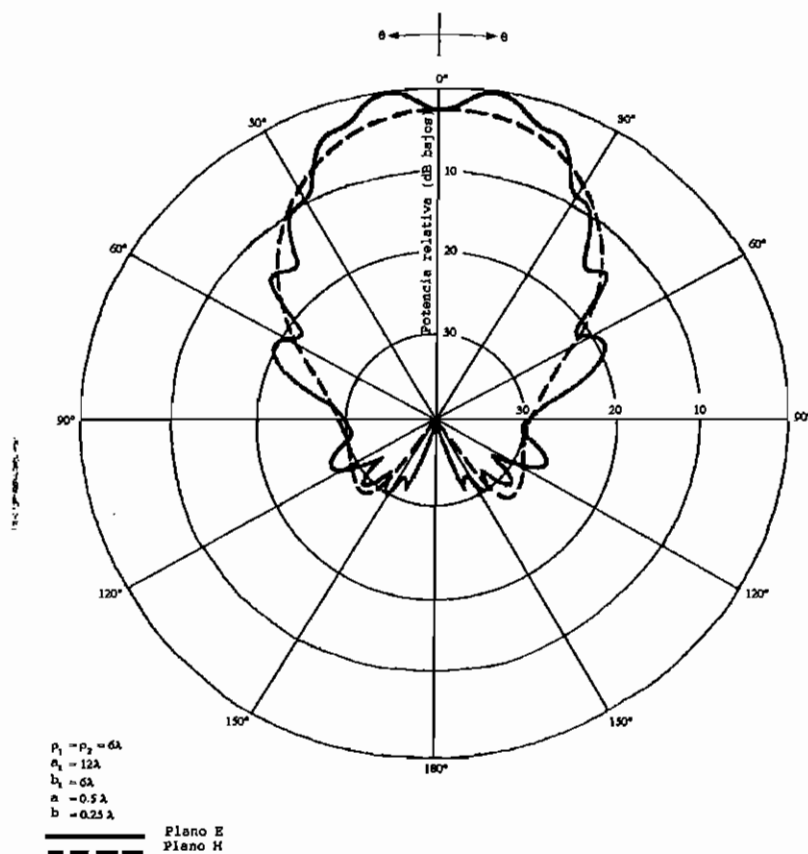


Figura 3.13 Amplitud de los modelos \bar{E} y \bar{H} para una bocina piramidal con el máximo no sobre el eje.[2]

La directividad (en dB) de una bocina piramidal, respecto a una isotrópica, puede también aproximarse por

$$D_0(\text{dB}) = 10[1.008 + \log_{10}(\frac{a_1 b_1}{\lambda^2})] - (L_e + L_h) \quad \text{Ec. 3.39}$$

donde L_e y L_h representan, respectivamente, las pérdidas (en dB) debido a errores de fase en los planos **E** y **H** de la bocina graficadas en la figura 3.14.

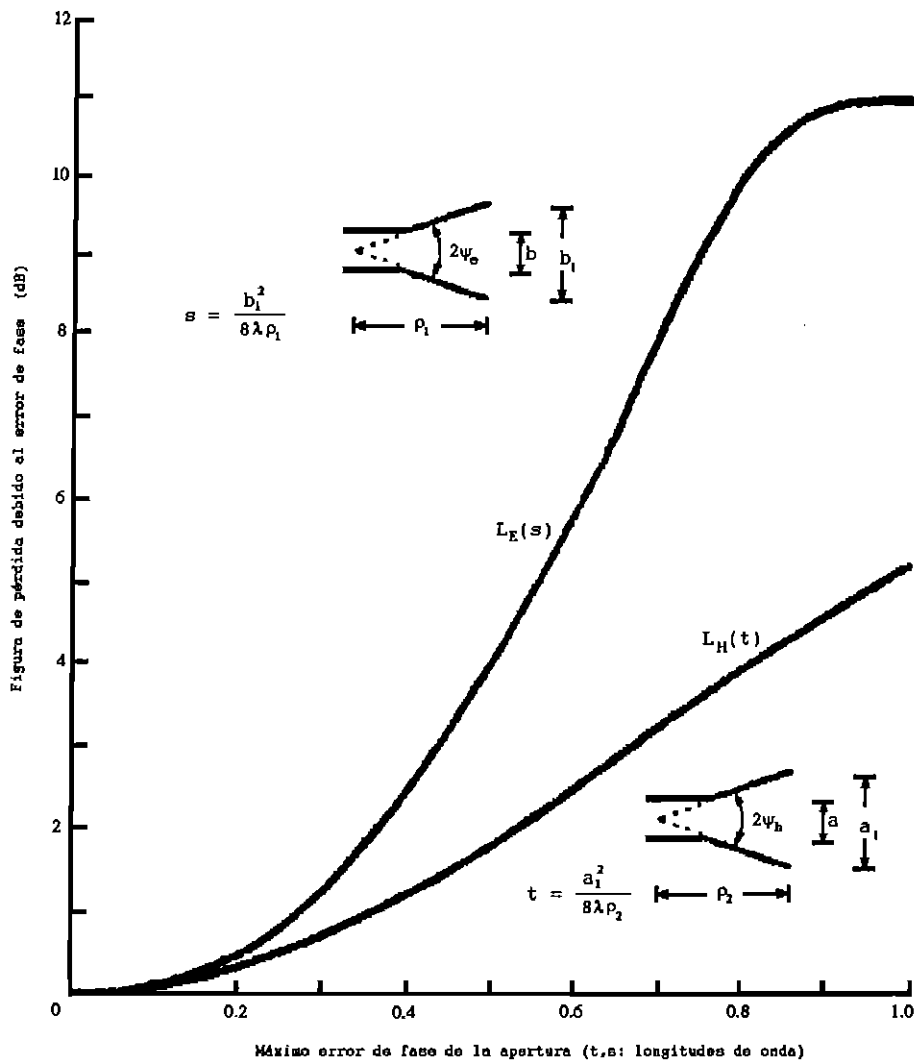


Figura 3.14 Pérdidas para los planos E y H debido a errores de fase. [4]

La directividad de una bocina piramidal puede también

calcularse haciendo lo siguiente.

1. Calcular

$$A = \frac{a_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_h/\lambda}} \quad \text{Ec. 3.40a}$$

$$B = \frac{b_1}{\lambda} \sqrt{\frac{50}{\rho_o/\lambda}} \quad \text{Ec. 3.40b}$$

2. Usando **A** y **B**, encontrar **G_H** y **G_E**, respectivamente, de las figuras 3.9 y 3.15. Si los valores de **A** o **B** o ambos son más pequeños que 2, entonces calcular **G_E** y/o **G_H** por

$$G_E = \frac{32}{\pi} B \quad \text{Ec. 3.40c}$$

$$G_H = \frac{32}{\pi} A \quad \text{Ec. 3.40d}$$

3. Calcular **D_p** usando los valores de **G_E** y **G_H** de la figura 3.9 y 3.15 o desde 3.40c y 3.40d. Así

$$\begin{aligned} D_p &= \frac{G_E G_H}{\frac{32}{\pi} \sqrt{\frac{50}{\rho_o/\lambda}} \sqrt{\frac{50}{\rho_h/\lambda}}} = \frac{G_E G_H}{10.1859 \sqrt{\frac{50}{\rho_o/\lambda}} \sqrt{\frac{50}{\rho_h/\lambda}}} \\ &= \frac{\lambda^2 \pi}{32ab} D_E D_H \quad \text{Ec. 3.40e} \end{aligned}$$

donde **D_E** es la directividad dada en 3.21.c; y **D_H** está dada por

$$D_H = \frac{b}{\lambda} \frac{G_h}{\sqrt{\rho_h/\lambda}} \quad \text{Ec. 3.41}$$

Esta es la directividad real de la bocina. El procedimiento anterior ha inducido a resultados con una precisión de 0.01 dB para una bocina con $\rho_o = \rho_h = 50\lambda$.

Una bocina típica en la banda **X** (8.2 - 12.4 GHz) se muestra en la figura 3.16. Es una bocina de precisión, liviana, la cual usualmente se hace de aluminio, y puede usarse como

1. estándar para calibración de otras antenas
2. alimentador para reflectores y lentes
3. bocinas para muestreo de potencia
4. antenas de recepción y/o transmisión

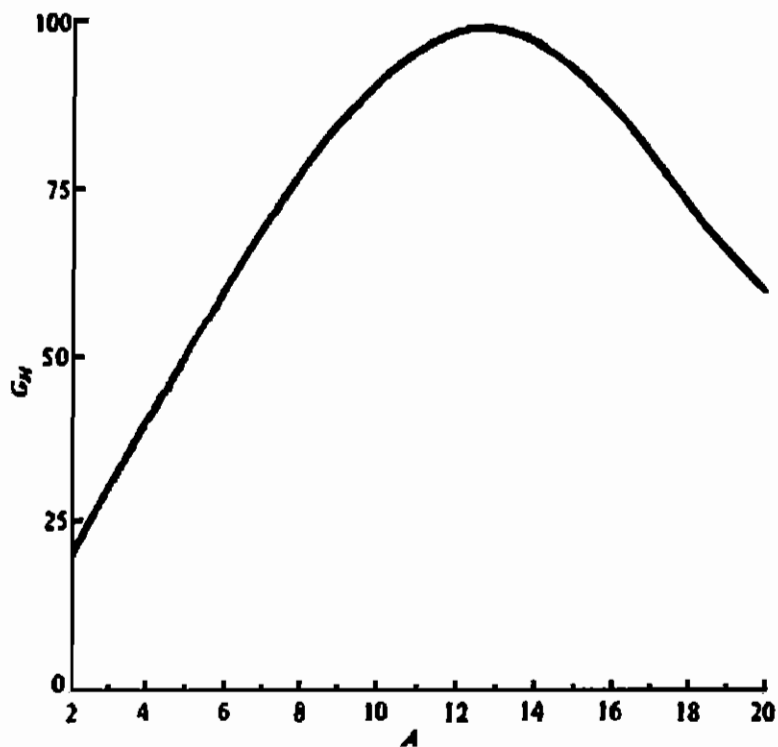


Figura 3.15 G_H en función de A . [6]

Posee una terminación exponencial, sus dimensiones y características típicas de ganancia se indican en la figura 3.16.

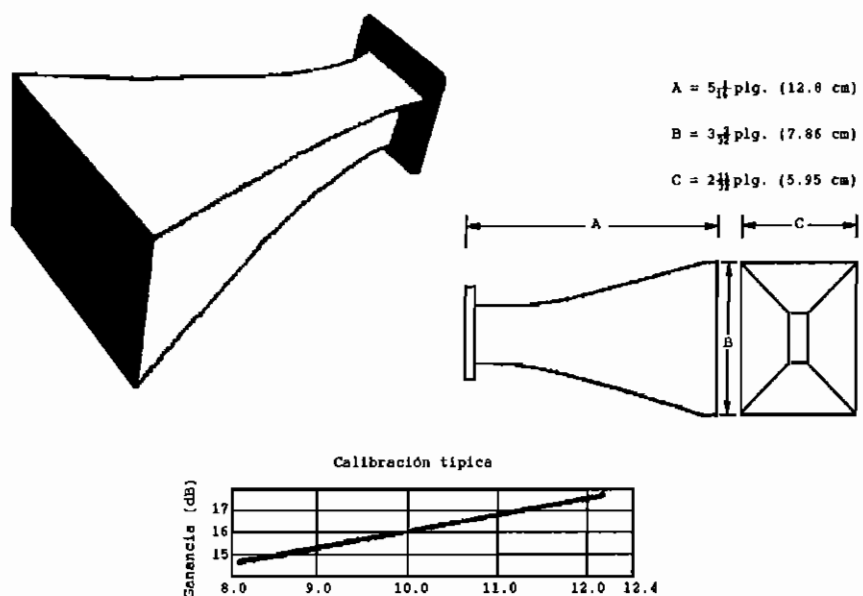


Figura 3.16 **Bocina piramidal con ganancia estándar y sus características. [2]**

El ancho del rayo entre los puntos de media potencia en los dos planos **E** y **H** es casi 28° mientras los lóbulos laterales en los planos **E** y **H** son, respectivamente, casi 13 y 20 dB abajo.

Ejemplo 4:

Una bocina piramidal tiene dimensiones de $\rho_1 = \rho_2 = 6\lambda$, $a_1 = 5.5\lambda$, $b_1 = 2.75\lambda$, $a = 0.5\lambda$, y $b = 0.25\lambda$.

- Determinar si la bocina puede ser construida físicamente.
- Calcular la directividad usando 3.37a, 3.39, y 3.40c

SOLUCION

De los ejemplos anteriores

$$\rho_e = 6.1555\lambda$$

$$\rho_h = 6.6\lambda$$

Así

$$\rho_e = (2.75 - 0.25)\lambda \sqrt{\left(\frac{6.1555}{2.75}\right)^2 - \frac{1}{4}} = 5.454\lambda$$

$$\rho_h = (5.5 - 0.5)\lambda \sqrt{\left(\frac{6}{5.5}\right)^2 - \frac{1}{4}} = 5.454\lambda$$

Por lo tanto la bocina puede construirse físicamente.

Usando 3.37a con los valores de D_E y D_H calculados usando respectivamente 3.20 y 3.38 da

$$D_p = \frac{\pi\lambda^2}{32ab} D_E D_H = \frac{\pi}{32(0.5)(0.25)} (12.79)(7.52) = 75.54 = 18.78 \text{ dB}$$

Utilizando los valores de D_E y D_H calculados usando respectivamente 3.21c y 3.41, la directividad de 3.40e es igual a

$$D_p = \frac{\pi\lambda^2}{32ab} D_E D_H = \frac{\pi}{32(0.5)(0.25)} (12.89)(8.338) = 84.41 = 19.26 \text{ dB}$$

Para esta bocina

$$s = \frac{b_1^2}{8\lambda\rho_1} = \frac{(2.75)^2}{8(6)} = 0.1575$$

$$t = \frac{a_1^2}{8\lambda\rho_2} = \frac{(5.5)^2}{8(6)} = 0.63$$

Para esos valores de s y t

$$L_E = 0.20 \text{ dB}$$

$$L_H = 2.75 \text{ dB}$$

De la figura 3.14. Usando la ecuación 3.39

$$D_0 = 10\{1.008 + \log_{10}[5.5(2.75)]\} - (0.20 + 2.75) = 18.93 \text{ dB}$$

La aproximación es mejor entre las directividades de 3.37a y 3.39

3.3.3 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO

La bocina piramidal es ampliamente usada como un estándar para realizar mediciones de ganancia de otras antenas, y como tal es a menudo referida como una bocina de ganancia estándar. Para diseñar una bocina piramidal, usualmente se conoce la ganancia deseada G_0 y las dimensiones a , b de la guía de onda rectangular de alimentación. El objetivo del diseño es determinar las dimensiones restantes (a_1 , b_1 , ρ_e , ρ_h , ρ_e y ρ_h) que inducirán a una óptima ganancia. El siguiente procedimiento puede usarse para cumplir esto.

Las ecuaciones de diseño se derivan seleccionando los valores de b_1 y a_1 que inducen a, respectivamente, óptimas directividades para bocinas sectoriales de plano E y H usando 3.20a y 3.38a. Puesto que la eficiencia total (incluida la

eficiencia de la antena y de la apertura) de una bocina es casi 50%, la ganancia de la antena puede relacionarse con su área física. Así esto puede escribirse usando 11.39c, 11.40 del anexo, 3.20a, y 3.38a como

$$G_0 = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{\lambda^2} (a_1 b_1) = \frac{2\pi}{\lambda^2} \sqrt{3\lambda \rho_2} \sqrt{2\lambda \rho_1} = \frac{2\pi}{\lambda^2} \sqrt{3\lambda \rho_h} \sqrt{2\lambda \rho_e} \quad \text{Ec. 3.42}$$

puesto que para bocinas largas $\rho_2 \approx \rho_h$ y $\rho_1 \approx \rho_e$. Para que una bocina piramidal sea físicamente realizable, ρ_e y ρ_h de 3.33a y 3.33b deben ser iguales. Usando esta igualdad, se puede demostrar que 3.42 se reduce a

$$\left(\sqrt{2\chi} - \frac{b}{\lambda}\right)^2 (2\chi - 1) = \left(\frac{G_0}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\chi}} - \frac{a}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{G_0^2}{6\pi^3} \frac{1}{\chi} - 1\right) \quad \text{Ec. 3.43}$$

donde

$$\frac{\rho_e}{\lambda} = \chi \quad \text{Ec. 3.43a}$$

$$\frac{\rho_h}{\lambda} = \frac{G_0^2}{8\pi^3} \left(\frac{1}{\chi}\right) \quad \text{Ec. 3.43b}$$

La ecuación 3.43 es la ecuación de diseño de la bocina.

1. Como un primer paso de diseño, encontrar el valor de χ el cual satisface 3.43 para una ganancia deseada G_0 (adimensional). Use una técnica iterativa y comience con un valor tentativo de

$$\chi(\text{trial}) = \chi_1 = \frac{G_0}{2\pi\sqrt{2\pi}} \quad \text{Ec. 3.44}$$

2. Una vez que se encontró el correcto χ , determine ρ_e y ρ_h , usando 3.43a y 3.43b, respectivamente.

3. Encontrar los valores correspondientes de a_1 y b_1 usando 3.20a y 3.38a o

$$a_1 = \sqrt{3\lambda\rho_2} - \sqrt{3\lambda\rho_h} = \frac{G_0}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2\pi\chi}} \lambda \quad \text{Ec. 3.45a}$$

$$b_1 = \sqrt{2\lambda\rho_1} - \sqrt{2\lambda\rho_e} = \sqrt{2\chi}\lambda \quad \text{Ec. 3.45b}$$

4. Los valores de ρ_e y ρ_h pueden encontrarse usando 3.33.a y 3.33b.

Ejemplo 5:

Diseñar una bocina piramidal en la banda X (8.2 - 12.4 GHz) en ganancia óptima tal que esta ganancia (citada isotrópica) en $f = 11\text{GHz}$ es 22.6 dB. La bocina es alimentada por una guía de onda rectangular WR 90 con dimensiones interiores de $a = 0.9$ pulgadas (2.286 cm) y $b = 0.4$ pulgadas (1.016 cm).

SOLUCION

Convertimos la ganancia G_0 desde dB a cantidades dimensionales. Así

$$G_0(\text{dB}) = 22.6 = 10 \log_{10} G_0 \Rightarrow G_0 = 10^{2.26} = 181.97$$

Puesto que $f = 11\text{GHz}$, $\lambda = 2.7273$ cm y

$$a = 0.8382\lambda$$

$$b = 0.3725\lambda$$

1. El valor inicial de χ es dado, usando 3.44, como

$$\chi_i = \frac{181.97}{2\pi\sqrt{2\pi}} = 11.5539$$

lo cual no satisface 3.43 para las especificaciones de diseño deseadas.

Después de pocas iteraciones, un valor más aproximado es $\chi = 11.1157$

2. Usando 3.43a y 3.43b

$$\rho_e = 11.1157\lambda = 30.316 \text{ cm} = 11.935 \text{ pulgadas}$$

$$\rho_h = 12.0094\lambda = 32.753 \text{ cm} = 12.895 \text{ pulgadas}$$

3. Los valores correspondientes de a_1 y b_1 son

$$a_1 = 6.002\lambda = 16.370 \text{ cm} = 6.445 \text{ pulgadas}$$

$$b_1 = 4.715\lambda = 12.859 \text{ cm} = 5.063 \text{ pulgadas}$$

4. Los valores de ρ_e y ρ_h son iguales a

$$\rho_e = \rho_h = 10.005\lambda = 27.286 \text{ cm} = 10.743 \text{ pulgadas}$$

Los parámetros derivados del diseño concuerdan con aquellos de una bocina de ganancia comercial disponible en el mercado.

Como una comprobación, la ganancia de la bocina diseñada fue calculada usando 3.37a y 3.39, asumiendo una eficiencia de antena ϵ_t de 100%, y la ecuación 3.42. Los valores fueron

$$G_0 \approx D_0 = 22.4 \text{ dB}$$

por 37a

$$G_0 \approx D_0 = 22.1 \text{ dB} \quad \text{por 39}$$

$$G_0 = 22.5 \text{ dB} \quad \text{por 42}$$

Los tres valores calculados casi concuerdan con el valor de diseño de 22.6 dB.

3.4 BOCINAS CONICAS

La bocina mostrada en la figura 3.1f es cónica. Mientras las bocinas piramidales, sectorial de plano **E** y de plano **H** son alimentadas usualmente por una guías de onda rectangulares, la alimentación de una bocina cónica es frecuentemente una guía de onda circular generalmente usando el modo TE_{11} , la distribución de campo eléctrico en la apertura se muestra con flechas. Las bocinas de las figuras 1g y h son bicónicas. La de la figura 3.1g se excita en el modo TEM por un radiador vertical mientras que la de la figura 3.1h se excita en el modo TE_{01} por una pequeña antena de lazo horizontal. Las bocinas bicónicas son no direccionales en el plano horizontal.

En la figura 3.17 se muestra más detalladamente la geometría de una bocina cónica.

El primer tratamiento riguroso de los campos radiados por una bocina cónica es el de Schorr y Beck. Los modos dentro de la bocina se encuentran introduciendo un sistema de

$$D_c(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left[\epsilon_{\text{ap}} \frac{4\pi}{\lambda^2} (\pi a^2) \right] = 10 \log_{10} \left(\frac{C}{\lambda} \right)^2 - L(s) \quad \text{Ec. 3.46}$$

donde a es el radio de la bocina en la apertura y

$$L(s) = -10 \log_{10} (\epsilon_{\text{ap}}) \quad \text{Ec. 3.46a}$$

El primer término en 3.46 representa la directividad de una apertura circular uniforme mientras que el segundo término, representado por 3.46a, es una corrección a la figura para el cálculo de las pérdidas de directividad debido a la eficiencia de apertura. Usualmente el término en 3.46a se llama (figura de pérdidas) **loss figure** la cual puede calcularse (en dB) usando

$$L(s) = (0.8 - 1.7s + 26.25s^2 - 17.79s^3) \quad \text{Ec. 3.46b}$$

donde s es la máxima desviación de fase (en números de longitud de onda), y está dada por

$$s = \frac{d_m^2}{8\lambda} \quad \text{Ec. 3.46c}$$

La directividad de una bocina cónica es óptima cuando su diámetro es igual a

$$d_m = \sqrt{3\lambda} \quad \text{Ec. 3.47}$$

la cual corresponde a una máxima desviación de fase de la apertura de $s=3/8$ (longitudes de onda) y una figura de pérdidas de casi 2.9 dB (o una eficiencia de apertura de cerca de 51%)

3.5 BOCINAS BICONICAS

Este tipo de bocinas pueden considerarse como bocinas piramidales modificadas con un ángulo de acampanamiento de 360° en el plano horizontal. El óptimo ángulo de acampanamiento en el plano vertical es casi igual al de una bocina sectoral de la misma sección transversal excitada en el mismo modo.

CAPITULO IV:

PARABOLAS

La mayoría de antenas usadas actualmente en enlaces de microondas se han diseñado basándose en combinaciones de superficies parabólicas o circulares, las cuales son formas geométricas familiares descubiertas por los antiguos griegos. Cualquier señal reflejada en estas superficies puede concentrarse en un punto o en una serie de puntos llamados "puntos focales".

Las características de radiación de un reflector (modelo, eficiencia, discriminación de la polarización, etc.) pueden mejorarse si la configuración estructural de su superficie se perfecciona. Se puede demostrar por la óptica geométrica que si un haz de rayos paralelos incide sobre un reflector el cual tiene la forma de una parábola, la radiación convergirá a un punto el cual se conoce como el punto focal.

En la misma forma, si una fuente puntual se ubica en el punto focal, los rayos reflejados por un reflector parabólico emergerán como un haz paralelo. Esta es una forma del principio de reciprocidad y está demostrada geoméricamente en la figura 4.1(c). El punto de simetría en la superficie parabólica se conoce como vértice. Los rayos que emergen en una formación paralela son usualmente llamados colimados, en la práctica la colimación se usa para describir

características de alta direccionalidad de una antena aunque la emanación de los rayos no sea exactamente paralela. Cuando la antena primaria (transmisora o receptora) se ubica en el punto focal de la parábola, la configuración usualmente se conoce como de alimentación frontal (front-fed).

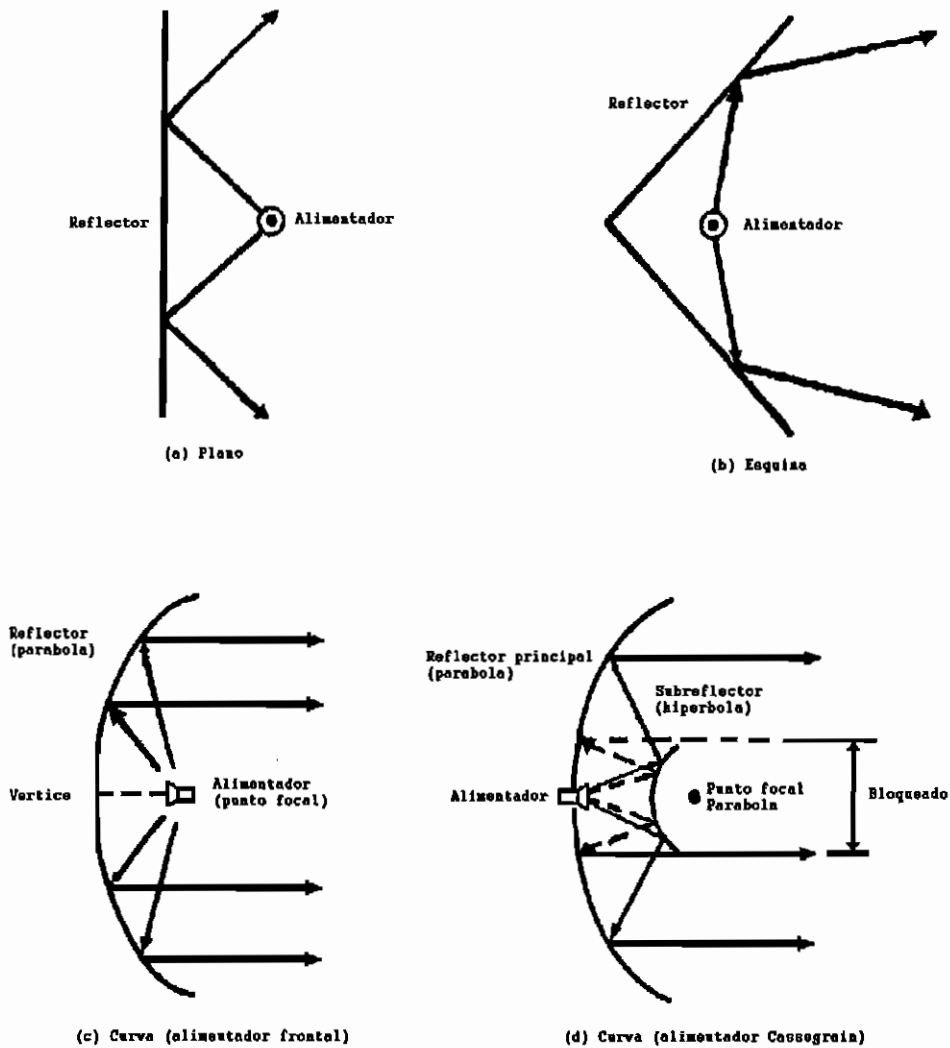


Figura 4.1 Configuración geométrica para algunos sistemas reflectores.[1]

La desventaja del arreglo con alimentación frontal es que la línea de transmisión que va desde el alimentador usualmente es muy larga para alcanzar los equipos de transmisión o

recepción, los cuales están a menudo ubicados detrás o debajo del reflector. Esto implica el uso de líneas de transmisión largas cuyas pérdidas no pueden tolerarse en muchas aplicaciones especialmente en sistemas de recepción de bajo ruido. En ciertos casos, los equipos de recepción y transmisión están ubicados en el punto focal para evitar la necesidad de largas líneas de transmisión. Sin embargo, en algunas aplicaciones, especialmente para transmisiones en que se necesitan grandes amplificadores y para sistemas de recepción de bajo ruido donde se necesita enfriamiento y acondicionadores de clima, esta configuración no es útil. Además si ubica el equipo en el alimentador, puede ser demasiado pesado y voluminoso y provocar bloqueos de la señal.

Un arreglo que evita ubicar el alimentador (transmisor y/o receptor) en el punto focal es el que se muestra en la figura 4.1(d), y se conoce como alimentador Cassegrain. Mediante la óptica geométrica, Cassegrain, un famoso astrónomo, demostró que los rayos paralelos incidentes pueden enfocarse a un punto utilizando dos reflectores. Para completar esto, el reflector principal (primario) debe ser una parábola, el reflector secundario (subreflector) una hipérbola, y el alimentador ubicarse sobre el eje de la parábola usualmente cerca o en el vértice.

Cassegrain usó este esquema para construir un telescopio

óptico, y su diseño fue copiado para usarlo en sistemas de radio frecuencia. En este arreglo, los rayos emanados desde el alimentador iluminan el subreflector y son reflejados por éste en la dirección del reflector primario, como si éstos fueran originados en el punto focal de la parábola (reflector primario). Los rayos son entonces reflejados por el disco primario y convertidos en rayos paralelos. Debe tomarse en cuenta las difracciones que ocurren en los bordes del subreflector y del reflector primario, para predecir el modelo total del sistema, especialmente en regiones de baja intensidad. Con el arreglo Cassegrain, el equipo de transmisión y/o recepción se ubica detrás del reflector primario. Este esquema hace al sistema más accesible para servicio y ajuste.

Un reflector parabólico puede tomar dos formas diferentes. Una configuración es la de un cilindro parabólico recto, mostrado en la figura 4.2(a) cuya energía es colimada en una línea paralela al eje del cilindro a través del punto focal del reflector. Los alimentadores más ampliamente usados para este tipo de reflector son los dipolos lineales, un arreglo lineal o una guía de onda con abertura.

La otra configuración es la de la figura 4.2(b) la cual se forma rotando la parábola alrededor de su eje, y se refiere como un paraboloides (parábola de revolución). Una bocina piramidal o cónica se usa como alimentador para este arreglo.

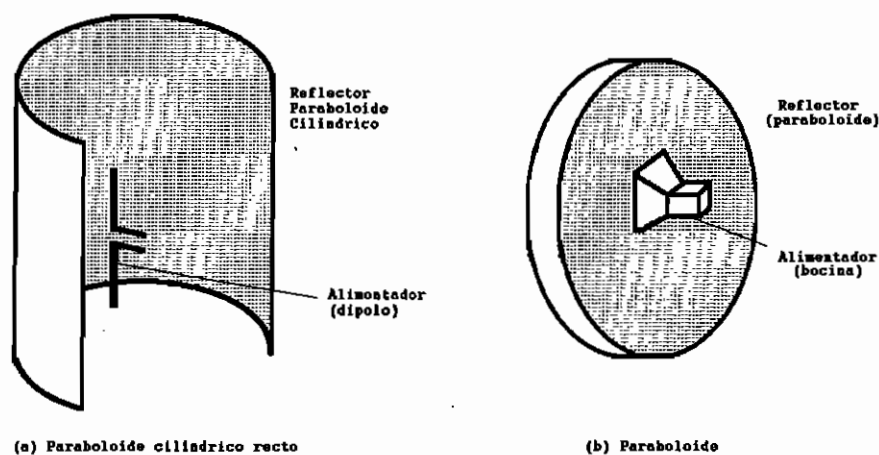


Figura 4.2 Cilindro parabólico recto y parabolóide.[1]

Para eliminar algunas de las deficiencias de las configuraciones simétricas, se ha desarrollado un reflector parabólico tipo indirecto (offset) para sistemas de reflector simples y duales. Debido a la asimetría del sistema, el análisis es más complejo, sin embargo el avance de la tecnología computacional ha permitido que esté disponible la formulación y optimización de su diseño. El diseño del reflector indirecto (offset) reduce el bloqueo en la apertura y la VSWR. Además, esto permite el uso de mayores relaciones f/d mientras se mantienen estructuras rígidas aceptables.

Por muchos años, bocinas o guías de ondas, operando en un solo modo TE o TM, se han usado como alimentadores para antenas reflectoras. Sin embargo se ha comprobado que pueden usarse como alimentadores bocinas corrugadas que soportan modos de campo híbridos (combinaciones de modos TE y TM). Tales elementos emparejan eficientemente los campos de los

alimentadores con la distribución deseada y pueden reducir la polarización cruzada.

Existen dos técnicas para analizar el desempeño de un sistema reflector. Una es el método de distribución en la apertura y el otro es el método de distribución de corriente. Ambas técnicas se presentan para mostrar las similitudes y diferencias, primero analizaremos las características de un reflector parabólico con alimentación frontal.

4.2 REFLECTOR PARABÓLICO CON ALIMENTADOR FRONTAL

La superficie de un reflector paraboloidal se forma rotando una parábola alrededor de su eje. Esta superficie es un paraboloidal de revolución de modo que los rayos emanados desde el foco del reflector se transforman en ondas planas. El diseño está basado sobre técnicas ópticas y no se toma en cuenta ninguna deformación (difracción) del borde del reflector. Refiriéndose a la figura 4.3 y escogiendo un plano perpendicular al eje del reflector a través del foco, se tiene que

$$OP + PQ = \text{CONSTANTE} = 2f$$

Puesto que

$$OP = r'$$

$$PQ = r' \cos\theta$$

entonces

$$OP + PQ = r'(1 + \cos \theta) = 2f$$

o

$$r' = \frac{2f}{1 + \cos \theta'} = f \sec^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \quad \theta \leq \theta_0 \quad \text{Ec. 4.1}$$

puesto que un paraboloides es una parábola de revolución (alrededor de su eje) la ecuación 4.1 es además la ecuación de un paraboloides en términos de las coordenadas esféricas r' , θ' , ϕ' . Respecto a su simetría rotacional, no hay variaciones respecto a ϕ' .

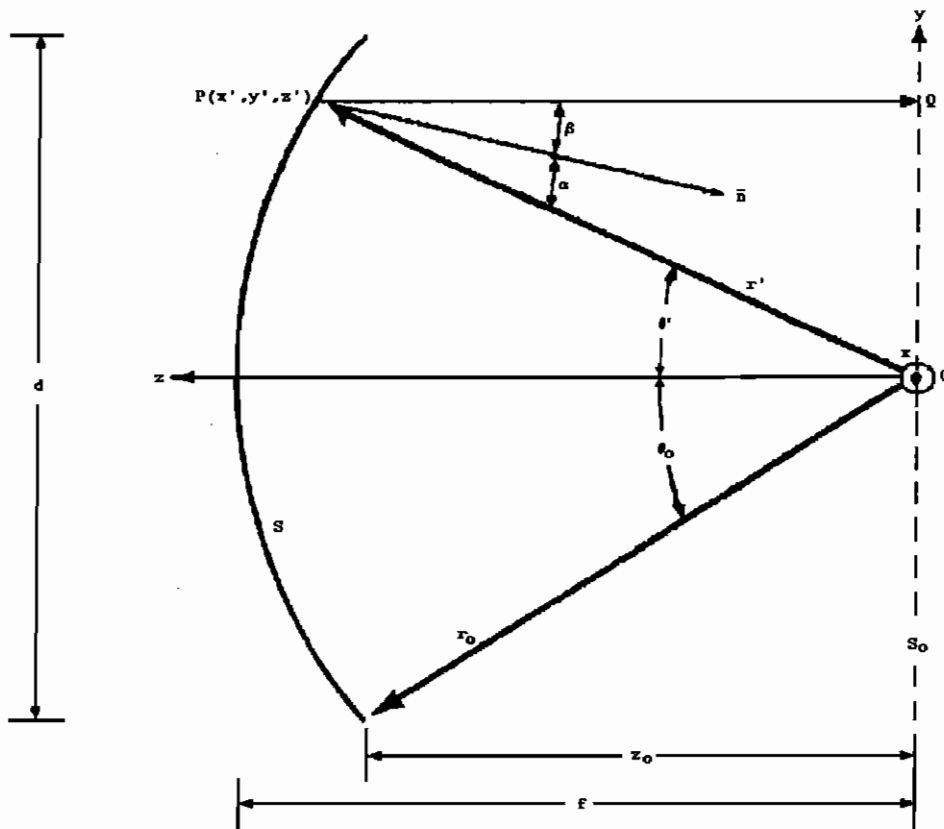


Figura 4.3 Configuración bidimensional de un reflector paraboloides. [1]

La ecuación 4.1 también puede escribirse en términos de coordenadas rectangulares x' , y' , z' . Esto es

$$r' + r' \cos \theta' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + z' = 2f \quad \text{Ec. 4.2}$$

o

$$(x')^2 + (y')^2 = 4f(f - z') \quad \text{con } (x')^2 + (y')^2 \leq (d/2)^2 \quad \text{Ec. 4.3}$$

En el análisis de reflectores parabólicos, es deseable encontrar un vector unitario que sea normal a la tangente en el punto de reflexión de la superficie. Para hacer esto, la ecuación 4.1 puede expresarse como

$$f - r' \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) = S = 0 \quad \text{Ec. 4.4}$$

y entonces se toma un gradiente para formar una normal a la superficie. Esto es

$$\begin{aligned} \bar{N} = \nabla[f - r' \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)] &= \bar{a}'_r \frac{\delta S}{\delta r'} + \bar{a}'_{\theta} \frac{1}{r'} \frac{\delta S}{\delta \theta'} = -\bar{a}'_r \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \\ &+ \bar{a}'_{\theta} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.5}$$

un vector unitario, normal a S, se forma de la ecuación 4.5 como

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = -\bar{a}'_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \bar{a}'_{\theta} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.6}$$

Para encontrar el ángulo entre el vector unitario \bar{n} el cual es normal a la superficie en el punto de reflexión, y un vector direccionado desde el punto al foco, formamos

$$\alpha = \bar{a}'_r \cdot \bar{n} = -\bar{a}'_r \cdot [-\bar{a}'_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \bar{a}'_{\theta} \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)] = \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.7}$$

De manera similar podemos encontrar el ángulo entre el vector unitario \bar{n} y el eje z. Esto es

$$\beta = -\bar{a}_z \cdot \bar{n} = -\bar{a}_z \cdot [-\bar{a}'_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \bar{a}'_0 \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)] \quad \text{Ec. 4.8}$$

Usando una transformación la ecuación 4.8 puede escribirse como

$$\beta = -(\bar{a}'_r \cos\theta' - \bar{a}'_0 \sin\theta') \cdot [-\bar{a}'_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + \bar{a}'_0 \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)] = \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.9}$$

la cual es idéntica a la ecuación 4.7. Esto no es más que una verificación de la ley de Snell para la reflexión para cada diferencial de superficie.

Otra expresión usualmente muy importante en el análisis de reflectores es la relación entre el ángulo subtendido θ_0 y la relación f/d. Usando la geometría de la figura 4.3

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{d/2}{Z_0}\right) \quad \text{Ec. 4.10}$$

donde Z_0 es la distancia sobre el eje del reflector desde el punto focal y el borde de la parábola. De la ecuación 4.3

$$Z_0 = f - \frac{x_0^2 + y_0^2}{4f} = f - \frac{(d/2)^2}{4f} = f - \frac{d^2}{16f} \quad \text{Ec. 4.11}$$

Sustituyendo la ecuación 4.11 en la ecuación 4.10

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{d}{2}}{f - \frac{d^2}{16f}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{f}{d}\right)}{\left(\frac{f}{d}\right) - \frac{1}{16}}\right) \quad \text{Ec. 4.12}$$

Esto también puede escribirse como

$$f = \left(\frac{d}{4}\right) \cot\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.13}$$

4.3 DENSIDAD DE CORRIENTE INDUCIDA

Para determinar las características de radiación (modelo, ganancia, eficiencia, polarización, etc) de un reflector parabólico, debe conocerse la densidad de corriente inducida sobre su superficie.

La densidad de corriente \bar{J}_s puede determinarse usando

$$\bar{J}_s = \bar{n} \times \bar{H} = \bar{n} \times (\bar{H}_i + \bar{H}_r) \quad \text{Ec. 4.14}$$

donde \bar{H}_i y \bar{H}_r representan respectivamente, las componentes de campo magnético incidente y reflejado en la superficie del conductor, y \bar{n} es un vector unitario normal a la superficie. Si la superficie reflectante puede aproximarse a un plano infinito (esta condición se cumple parcialmente para una parábola), entonces por el método de las imágenes

$$\bar{n} \times \bar{H}_i = \bar{n} \times \bar{H}_r$$

y la ecuación 4.14 se reduce a

$$\bar{J}_s = \bar{n} \times (\bar{H}_i + \bar{H}_r) = 2\bar{n} \times \bar{H}_i = 2\bar{n} \times \bar{H}_r \quad \text{Ec. 4.15}$$

La aproximación para la densidad de corriente de la ecuación 4.15 se conoce como la aproximación de la física óptica, y es válida cuando las dimensiones transversales

del reflector son grandes comparadas con la longitud de onda, (radio de curvatura del objeto reflectante, y el radio de curvatura de la onda incidente).

Si la superficie reflectante está en el campo lejano de la fuente generadora de las ondas incidentes, entonces la ecuación 4.15 puede escribirse como

$$J_s = 2\eta \times H_i \approx \frac{2}{\eta} [\eta \times (S_i \times E_i)] \quad \text{Ec. 4.16}$$

o

$$J_s = \eta \times H_r \approx \frac{2}{\eta} [\eta \times (S_r \times E_r)] \quad \text{Ec. 4.17}$$

donde η es la impedancia intrínseca de el medio, S_i y S_r son vectores radiales unitarios sobre el camino de las ondas incidentes y reflejadas (como se muestra en la figura 4.4), y E_i y E_r son los campos eléctricos incidente y reflejado respectivamente.

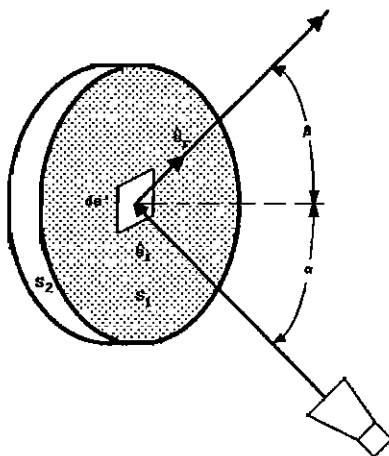


Figura 4.4 Superficie reflectante con boundary Γ . [2]

4.4 METODO DE LA DISTRIBUCION EN LA APERTURA

Para el método de la distribución en la apertura, se encuentra primero el campo reflejado por la superficie del paraboloide sobre un plano perpendicular al eje del reflector. Usualmente se emplean técnicas de geometría óptica para determinar el campo. En muchos casos, el plano se toma a través del punto focal, y es llamado el plano de la apertura, como se muestra en la figura 4.5.

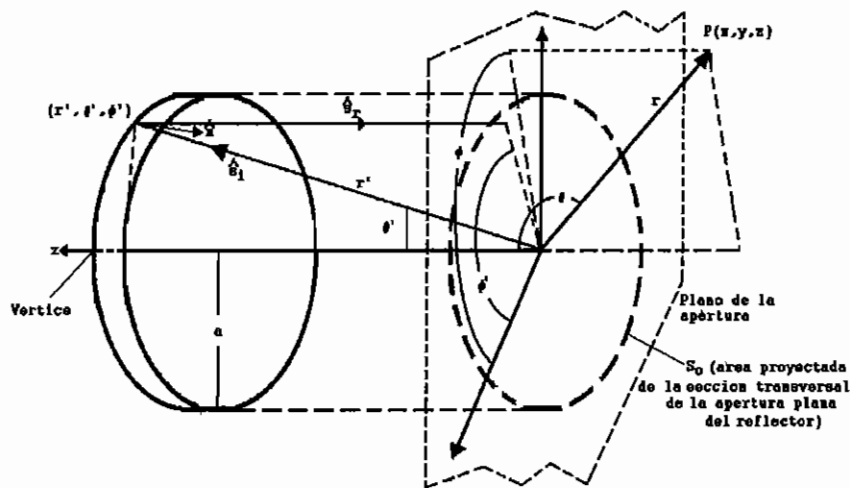


Figura 4.5 Geometría tridimensional de un sistema reflector paraboloide [2]

Sobre este plano se forman entonces fuentes equivalentes. Usualmente se asume que las fuentes equivalentes son cero fuera del área proyectada del reflector sobre el plano de la apertura. Estas fuentes equivalentes son usadas para calcular los campos radiados utilizando las técnicas empleadas para las aperturas.

Por el método de la distribución de corriente, la aproximación de la física óptica para la densidad de corriente inducida \vec{J}_s dada por la ecuación 4.15 se formula sobre el lado iluminado del reflector (S_1) de la figura 4.4. Esta densidad de corriente se integra sobre toda la superficie del reflector para determinar los campos en la zona lejana de radiación.

Para el reflector de la figura 4.4 las aproximaciones comunes a ambos métodos son:

1. La densidad de corriente es cero sobre el lado no iluminado (S_2) del reflector.
2. La discontinuidad de la densidad de corriente sobre el borde (Γ) del reflector es despreciable.
3. La radiación directa desde el alimentador y el bloqueo en la apertura por el alimentador son despreciables.

Estas aproximaciones conducen a resultados precisos, usando cualquiera de los dos métodos. La ventaja del método de la distribución en la apertura es que la integración sobre el plano de la apertura puede realizarse con la misma facilidad para cualquier modelo o posición del alimentador. La integración sobre la superficie del reflector que se requiere para el método de distribución de corriente, se hace totalmente compleja y consume mucho tiempo cuando el modelo

del alimentador es asimétrico y/o el alimentador está ubicado fuera del eje.

Asumimos que una fuente polarizada n con una función de ganancia de $G_f(\theta', \phi')$ se ubica en el punto focal del reflector paraboloide. La intensidad de radiación de esta fuente esta dada por

$$U(\theta', \phi') = \frac{P_t}{4\pi} G_f(\theta', \phi') \quad \text{Ec. 4.18}$$

donde P_t es la potencia total radiada. Refiriéndose a la figura 4.5 en el punto r' en la zona lejana de la fuente

$$\bar{U}(\theta', \phi') = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E}(\theta', \phi') \times \bar{H}^*(\theta', \phi')] = \frac{1}{2\eta} |\bar{E}(\theta', \phi')|^2 \quad \text{Ec. 4.19}$$

o

$$|\bar{E}(\theta', \phi')| = [2\eta U(\theta', \phi')]^{1/2} = \left[\eta \frac{P_t}{2\pi} G_f(\theta', \phi') \right]^{1/2} \quad \text{Ec. 4.20}$$

El campo incidente, con una dirección perpendicular a la distancia radial puede escribirse como

$$\bar{E}_i(r', \theta', \phi') = \bar{e}_i \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{P_t}{2\pi} G_f(\theta', \phi') \right]^{1/2} \frac{e^{-jk'r}}{r'} = \bar{e}_i C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-jk'r}}{r'} \quad \text{Ec. 4.21}$$

$$C_1 = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/4} \left(\frac{P_t}{2\pi} \right)^{1/2} \quad \text{Ec. 4.22}$$

donde \bar{e}_i es un vector unitario perpendicular a $\bar{a}_{r'}$ y paralelo al plano formado por $\bar{a}_{r'}$ y $\bar{a}_{\phi'}$ como se muestra en la figura 4.6.

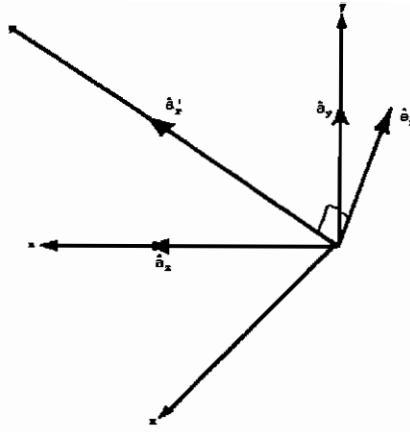


Figura 4.6 Vector unitario alineado para un sistema de reflector paraboloides. [2]

Puede demostrarse que en la superficie del reflector

$$J_s = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{n} \times (\mathbf{S}_i \times \mathbf{E}_i)] = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-j'kr}}{r'} \mathbf{u} \quad \text{Ec. 4.23}$$

donde

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \times (\mathbf{a}_r' \times \mathbf{e}_i) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{a}_r' - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_r') \mathbf{e}_i \quad \text{Ec. 4.24}$$

lo cual se reduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & [-\mathbf{a}_x \sin \theta' \sin(\frac{\theta'}{2}) \sin \phi' \cos \phi' + \mathbf{a}_y \cos(\frac{\theta'}{2}) (\sin^2 \phi' \cos \theta' + \cos^2 \phi')] \\ & - \mathbf{a}_z \cos \theta' \sin \phi' \sin(\frac{\theta'}{2}) \sqrt{1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi'} \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.25}$$

Para encontrar el campo de la apertura E_{ap} en el plano del punto focal, debido a las corrientes en el reflector de la ecuación 4.23, se encuentra primero el campo reflejado \mathbf{E}_r en \mathbf{r}' (la reflexión puntual). Este es de la forma

$$\mathbf{E}_r = \bar{\mathbf{e}}_r C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-j'kr}}{r'} \quad \text{Ec. 4.26}$$

donde $\bar{\mathbf{e}}_r$ es un vector unitario que describe la polarización

del campo reflejado. De la ecuación 4.17

$$\mathbf{J}_s = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\bar{\mathbf{n}} \times (\bar{\mathbf{s}}_r \times \mathbf{E}_r)] \quad \text{Ec. 4.27}$$

Debido a que $\bar{\mathbf{s}}_r = -\bar{\mathbf{a}}_z$, la ecuación anterior puede escribirse, usando la ecuación 4.26, como

$$\mathbf{J}_s = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{jkr}}{r'} \bar{\mathbf{u}} \quad \text{Ec. 4.28}$$

donde

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{n}} \times (-\bar{\mathbf{a}}_z \times \bar{\mathbf{e}}_r) = -\bar{\mathbf{a}}_z (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r) - \bar{\mathbf{e}}_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.29}$$

Puesto que $\bar{\mathbf{u}}$ en las ecuaciones 4.28 y 4.29 es igual al de las ecuaciones 4.23 - 4.25, puede demostrarse por un extensivo trabajo matemático que

$$\bar{\mathbf{e}}_r = \frac{\bar{\mathbf{a}}_x \sin \phi' \cos \phi' (1 - \cos \theta') - \bar{\mathbf{a}}_y (\sin^2 \phi' \cos \theta' + \cos^2 \phi')}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi'}} \quad \text{Ec. 4.30}$$

Entonces el campo $\bar{\mathbf{E}}_r$ en el punto de reflexión $\bar{\mathbf{r}}'$ esta dada por la ecuación 4.26 donde $\bar{\mathbf{e}}_r$ esta dada por la ecuación 4.30. En el plano que pasa por el punto focal, el campo esta dado por

$$\mathbf{E}_{\text{ap}} = \bar{\mathbf{e}}_r C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{jkr(1+\cos\theta')}}{r'(1+\cos\theta')} = \bar{\mathbf{a}}_x E_{x\alpha} + \bar{\mathbf{a}}_y E_{y\alpha} \quad \text{Ec. 4.31}$$

donde $\bar{\mathbf{E}}_{x\alpha}$ y $\bar{\mathbf{E}}_{y\alpha}$ representan las componentes x y y del campo reflejado sobre la apertura. Para valores de θ' cercanos a

90°, la ecuación 4.31 se reduce a

$$\vec{E}_{ap} = \vec{e}_r C_1 \sqrt{G_f(\theta', \phi')} \frac{e^{-j'kr(1+\cos\theta')}}{r'} = \vec{a}_x E_{xa} + \vec{a}_y E_{ya} \quad \text{Ec. 4.32}$$

Usando las componentes de campo eléctrico (E_{xa} y E_{ya}) dadas por la ec. 4.31, un equivalente se forma en el plano de la apertura. Esto es

$$\vec{J}_s' = \vec{n} \times \vec{H}_a = -\vec{a}_z \times \left(\vec{a}_x \frac{E_{ay}}{\eta} - \vec{a}_y \frac{E_{ax}}{\eta} \right) = -\vec{a}_x \frac{E_{ax}}{\eta} - \vec{a}_y \frac{E_{ay}}{\eta} \quad \text{Ec. 4.33}$$

$$\vec{M}_s' = -\vec{n} \times \vec{E}_a = +\vec{a}_z \times (\vec{a}_x E_{ax} + \vec{a}_y E_{ay}) = -\vec{a}_x E_{ay} + \vec{a}_y E_{ax} \quad \text{Ec. 4.34}$$

Los campos radiados pueden calcularse usando las ecuaciones 4.33 y 4.34, y las formulaciones de las ecuaciones de radiación. La integración se restringe sólo sobre el área de la sección transversal proyectada S_o del reflector en el plano de la apertura mostrada punteada en la figura 4.5. Esto es,

$$\begin{aligned} E_{\theta s} = & \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (1 - \cos\theta) \int_{S_o} \int (-E_{ax} \cos\phi - E_{ay} \sin\phi) \\ & \times e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} dx' dy' \quad \text{Ec. 4.35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\phi s} = & \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (1 - \cos\theta) \int_{S_o} \int (-E_{ax} \sin\phi - E_{ay} \cos\phi) \\ & \times e^{jk(x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi)} dx' dy' \quad \text{Ec. 4.36} \end{aligned}$$

Por medio de técnicas de integración numérica eficientes, se usa el método de distribución en la apertura para calcular los modelos de radiación de reflectores esféricos y parabólicos. Los campos dados por las

ecuaciones 4.35 y 4.36 representan únicamente el modelo secundario debido a la dispersión del reflector. El modelo total del sistema se representa por la suma del modelo secundario y el modelo primario del elemento alimentador. Para muchos alimentadores tal como bocinas, el modelo primario en la dirección del frente del reflector es de muy baja intensidad y usualmente puede despreciarse.

Para demostrar la utilidad de las técnicas, se calcularon los modelos principal y secundario **E** y **H** de un reflector de 35 GHz, con un $f/d = 0.82$, $f = 20.48$ cm, $d = 24.99$ cm y alimentado por una bocina cónica de modo dual, y los resultados se muestran en la figura 4.7. Puesto que la bocina alimentadora tiene modelos idénticos **E** y **H** y el reflector se alimenta simétricamente, los modelos **E** y **H** del reflector son también idénticos y no poseen ninguna componente de polarización cruzada.

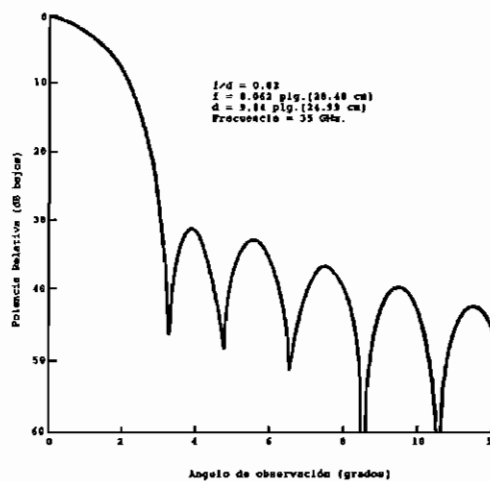


Figura 4.7 Modelo de plano principal **E** o **H** de un reflector parabólico simétrico front-fed.[7]

Para mostrar simultáneamente la intensidad de campo asociada con cada punto en el plano de la apertura del reflector, se usó un computador para generar los gráficos. Las regiones de campo, muestran contornos cuantizados de amplitud constante en la apertura del plano, como se ilustra en la figura 4.8.

Se usa un símbolo para representar cada región de -3 dB. La intensidad de campo dentro de los límites del plano de apertura del reflector esta dentro del rango de 0 a -15 dB.

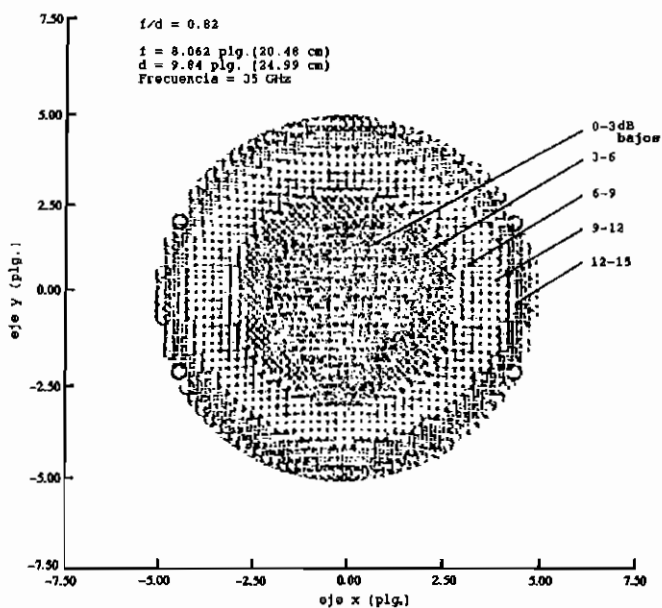


Figura 4.8 Localización de puntos de campo de contornos de amplitud constante en el plano de apertura de un reflector paraboloide front-fed simétrico.[7]

4.4.1 POLARIZACION CRUZADA

El campo reflejado por el paraboloide, dado por las

ecuaciones 4.26 - 4.30 del método de distribución en la apertura, contiene componentes x y y si el campo incidente esta polarizado en y . La componente y se llama polarización principal y la componente x se llama polarización cruzada. Esto se ilustra en la figura 4.9. Es también evidente que simétricamente (con respecto a los planos principales) las componentes de polarización cruzada están 180° fuera de fase. Sin embargo, para reflectores de rayo delgado es decir, para ángulos cercanos al eje ($\theta' \approx 0$) la componente de polarización cruzada x disminuye y desaparece sobre el eje ($\theta' = 0$). Puede usarse un procedimiento general para mostrar que para un campo incidente polarizado en x , la superficie reflectante descompone a la onda en un campo polarizado en y , además de su componente polarizada en x .

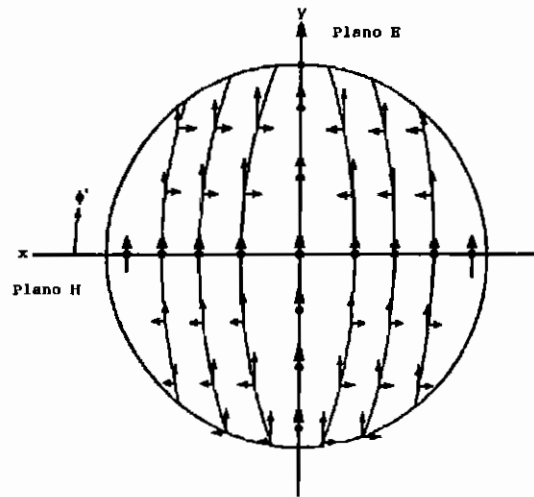


Figura 4.9 Componentes principal (dirección y) y polarización cruzada (dirección x) de un reflector paraboloidal. [8]

Una observación interesante a cerca del fenómeno de polarización de un reflector parabólico puede hacerse si primero asumimos que el elemento alimentador es un dipolo eléctrico infinitesimal ($l \ll \lambda$) alineado con el eje \mathbf{y} . Para este alimentador, el campo reflejado esta dado por la ecuación 4.26

$$G_r \sqrt{G_r(\theta', \phi')} = j\eta \frac{kI_0 l}{4\pi} \sin \psi = j\eta \frac{KI_0 l}{4\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = j\eta \frac{KI_0 l}{4\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi'} \quad \text{Ec. 4.37}$$

El ángulo ψ se mide desde el eje \mathbf{y} hacia el punto de observación.

Cuando se inserta la ecuación 4.37 en la ecuación 4.26, podemos escribir con la ayuda de la ecuación 4.30 que

$$\vec{E}_r = [\vec{a}_x \sin \phi' \cos \phi' (1 - \cos \theta') - \vec{a}_y (\sin^2 \phi' \cos \theta' + \cos^2 \phi')] \times j\eta \frac{kI_0 l e^{jkr'}}{4\pi r'} \quad \text{Ec. 4.38}$$

Ahora asumamos que un dipolo magnético infinitesimal, alineado con el eje \mathbf{x} o un pequeño lazo de corriente con su área paralela al plano $\mathbf{y-z}$ y con un momento magnético de $-\vec{a}_x M_x$, se ubica en el punto focal y se usa como alimentador. Se puede demostrar que el campo reflejado por el paraboloide tiene componentes \mathbf{x} y \mathbf{y} . Sin embargo la componente \mathbf{x} de este dipolo magnético tiene signo contrario al de la componente \mathbf{x} del dipolo eléctrico.

Haciendo que la relación del momento del dipolo eléctrico

al magnético sea igual a $\sqrt{\mu/\epsilon}$, las dos componentes reflejadas de polarización cruzada (componentes \times) pueden igualarse en magnitud y su suma desaparecer (debido al signo contrario). Por lo tanto puede usarse una combinación de dipolo magnético y eléctrico localizados en el punto focal de un paraboloide para inducir corrientes sobre la superficie del conductor las cuales serán paralelas en cualquier lugar. Esto se ilustra gráficamente en la figura 4.10..

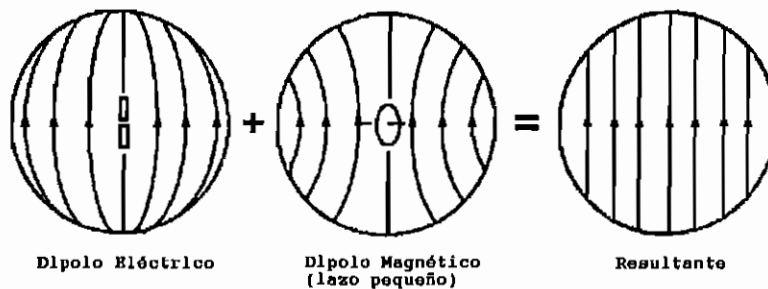


Figura 4.10 Campos de dipolo eléctrico y magnético combinados para formar una fuente de Huygens con polarización ideal para alimentador de reflector. [9]

La dirección del flujo de la corriente inducida determina la polarización de la antena en el campo lejano. Por lo tanto usando una combinación de dipolos eléctrico y magnético como alimentador, la radiación de campo lejano estará libre de polarización cruzada. Este tipo de alimentador es "ideal" pues no requiere que la superficie del reflector sea sólida sino que puede estar formada por conductores paralelos muy poco espaciados entre sí. Debido a sus características ideales, es

a menudo referido como una **fente de Huygens**.

4.5 METODO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CORRIENTE

El método de la distribución de corriente se introdujo como una técnica que puede usarse para aproximar mejor, comparado con los métodos de la óptica geométrica. Usualmente la principal dificultad para aplicar este método es la aproximación de la densidad de corriente sobre la superficie del reflector.

Para analizar al reflector usando esta técnica, nos referiremos a las integrales de radiación y las funciones auxiliares de potencial formuladas en el capítulo 3. Usando los métodos de la función potencial y refiriéndose al sistema de coordenadas de la figura 4.11 se puede demostrar que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} radiados por las fuentes $\bar{\mathbf{J}}$ y $\bar{\mathbf{M}}$ pueden escribirse como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j \frac{1}{4\pi\omega\epsilon} \int_V [(\mathbf{J} \cdot \nabla) \nabla + k^2 \mathbf{J} + j\omega\epsilon \bar{\mathbf{M}} \times \nabla] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad \text{Ec. 4.39}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = -j \frac{1}{4\pi\omega\mu} \int_V [(\bar{\mathbf{M}} \cdot \nabla) \nabla + k^2 \bar{\mathbf{M}} - j\omega\mu \mathbf{J} \times \nabla] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \quad \text{Ec. 4.40}$$

lo cual para observaciones en el campo lejano se reduce a

$$\mathbf{E} \approx -j \frac{\omega\mu}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_r) \mathbf{a}_r + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \bar{\mathbf{M}} \times \mathbf{a}_r] e^{+jkr \cdot \mathbf{a}_r} dv' \quad \text{Ec. 4.41}$$

$$\vec{H} \approx -j \frac{\omega \epsilon}{4\pi r} e^{-jkr} \int_V [\vec{M} - (\vec{M} \cdot \vec{a}_r) \vec{a}_r - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{J} \times \vec{a}_r] e^{+jkr \cdot \vec{a}_r} dv' \quad \text{Ec. 4.42}$$

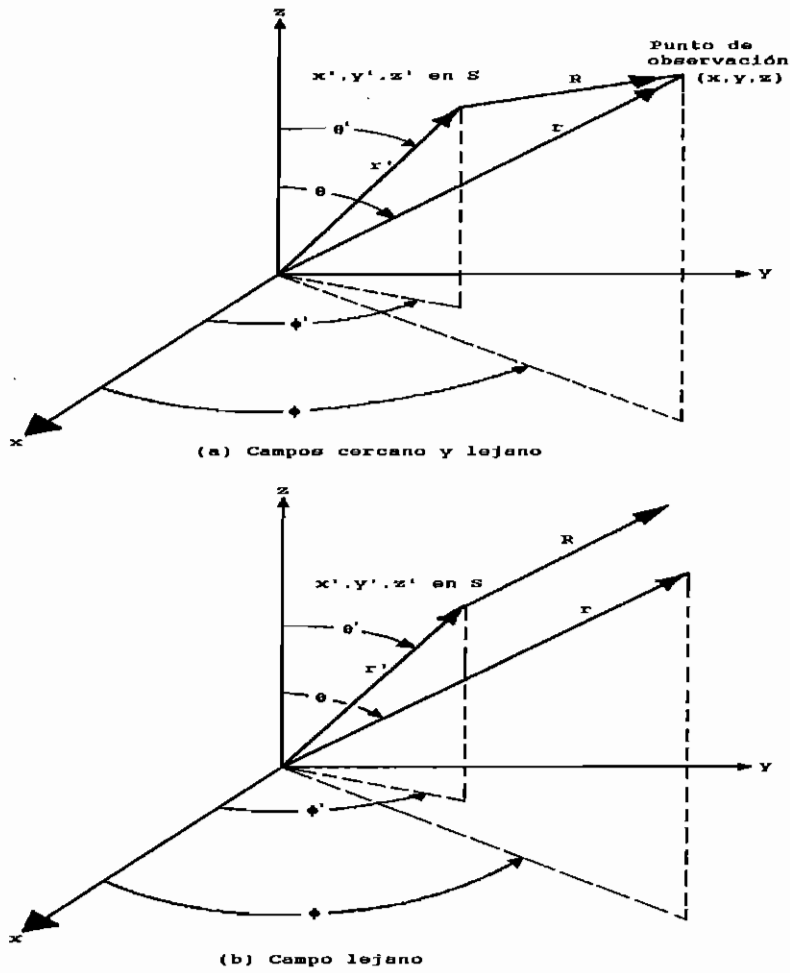


Figura 4.11 Campos cercano y lejano. [2]

Si las distribuciones de corriente se inducen por campos eléctricos y magnéticos incidentes sobre la superficie de un conductor eléctrico perfecto ($\sigma = \infty$) mostrado en la figura 4.12, los campos creados por estas corrientes se refieren como campos diseminados.

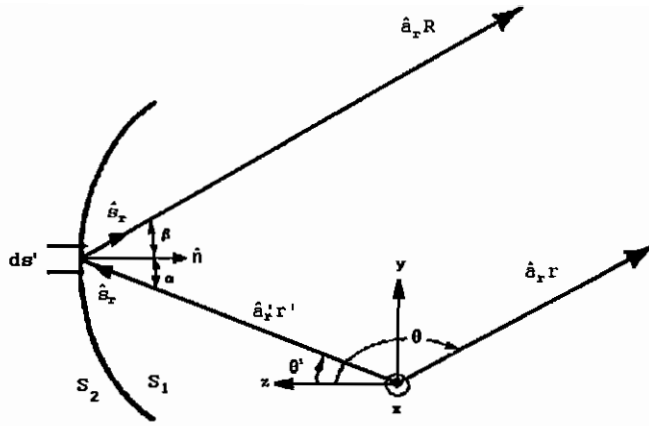


Figura 4.12 **Arreglo geométrico de una superficie reflectante. [2]**

Si la superficie conductora es cerrada, los campos en la zona lejana se obtiene usando las ecuaciones 41 y 42 haciendo $\bar{\mathbf{M}}=0$ y reduciendo las integrales de volumen a integrales de superficie con la densidad de corriente superficial $\bar{\mathbf{J}}$ reemplazada por la densidad lineal de corriente $\bar{\mathbf{J}}_s$. Entonces

$$\bar{\mathbf{E}}_s = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \iint_s [\bar{\mathbf{J}}_s - (\bar{\mathbf{J}}_s \cdot \bar{\mathbf{a}}_r) \bar{\mathbf{a}}_r] e^{+jkr \cdot \bar{\mathbf{a}}_r} ds' \quad \text{Ec. 4.43}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_s = +j \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{4\pi r} e^{-jkr} \iint_s [\bar{\mathbf{J}}_s \times \bar{\mathbf{a}}_r] e^{+jkr \cdot \bar{\mathbf{a}}_r} ds' \quad \text{Ec. 4.44}$$

Los campos eléctricos y magnéticos diseminados por la superficie cerrada del reflector de la figura 4.4, y dados por las ecuaciones 4.43 y 4.44, son válidas si es que las funciones densidad - fuente (corriente y carga) satisfacen las ecuaciones de continuidad. Esto puede satisfacerse si el objeto diseminador es una superficie lisa. Para la geometría

de la figura 4.4, la distribución de corriente es discontinua a través del borde Γ (siendo cero sobre el área oscura S_2) la cual divide las áreas iluminada S_1 y oscura S_2 .

Se puede demostrar que la ecuación de continuidad se satisface si se introduce una distribución apropiada de fuentes lineales de carga sobre el borde Γ . Por lo tanto el campo total diseminado será la suma de

1. las corrientes superficiales sobre el área iluminada,
2. las cargas superficiales sobre el área iluminada, y
3. la distribución lineal de carga sobre el borde Γ .

Las contribuciones de la densidad de carga superficial se toman en cuenta en la distribución de corriente a través de la ecuación de continuidad. Sin embargo puede demostrarse que en la zona lejana la contribución debido a la distribución lineal de carga cancela la componente longitudinal introducida por la corriente superficial y la densidad de carga.

Puesto que en la zona lejana las componentes de campo son predominantemente transversales, la contribución debido a la distribución lineal de carga no necesita incluirse y las ecuaciones 4.43 y 4.44 pueden usarse para una superficie abierta.

En esta sección las ecuaciones 4.43 y 4.44 se usarán para

calcular el campo diseminado desde la superficie de un reflector parabólico. Generalmente el campo radiado por las corrientes en la región opuesta del reflector es muy pequeño comparado con el campo total, y las corrientes y campos pueden igualarse a cero. El campo diseminado por el lado iluminado (cóncavo) del reflector parabólico puede formularse, usando el método de la distribución de corriente, usando las ecuaciones 4.43 y 4.44 donde la integración se restringe al área iluminada.

El campo total del sistema puede obtenerse por una superposición de la radiación debida a la fuente primaria en direcciones mayores a θ_0 ($\theta > \theta_0$) y la diseminada por la superficie usando el método de la distribución en la apertura o el método de la distribución de corriente.

Generalmente, los efectos de borde son despreciables. Sin embargo la inclusión de campos difractados por el borde del reflector no sólo que introduce campos en la región oscura del reflector, sino que también modifica los de la zona de transición entre oscura e iluminada. Cualquier discontinuidad introducida por métodos de óptica geométrica sobre la región de transición (entre las regiones iluminada y oscura) se remueve por las componentes difractadas.

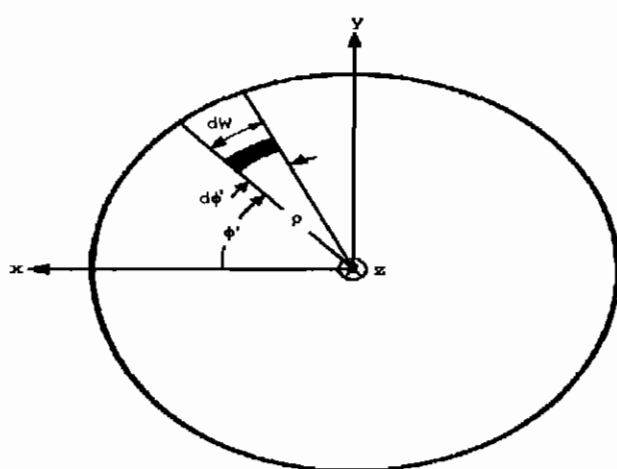
El campo eléctrico en la zona lejana de un reflector

parabólico, despreciando la radiación directa, esta dada por la ecuación 4.43. Usando la geometría de la figura 4.12 ésta se convierte en

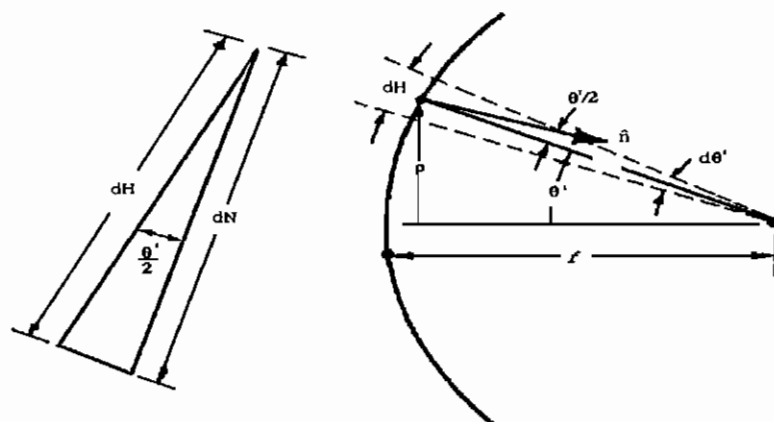
$$\vec{E}_\theta = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \iint_{S_1} \vec{a}_\theta \cdot \vec{J}_s e^{+jkr' \cdot \vec{a}} ds' \quad \text{Ec. 4.45}$$

$$\vec{E}_\phi = -j \frac{\omega \mu}{4\pi r} e^{-jkr} \iint_{S_1} \vec{a}_\phi \cdot \vec{J}_s e^{+jkr' \cdot \vec{a}} ds' \quad \text{Ec. 4.46}$$

De acuerdo a la geometría de la figura 4.13



(a) Proyección de la sección transversal



(b) Vista lateral

Figura 4.13 Proyección de la sección transversal y vista lateral de un reflector. [2]

$$ds' = dWdN = (r' \sin \theta' d\phi')[r' \sec(\frac{\theta'}{2})d\theta'] = (r')^2 \sin \theta' \sec(\frac{\theta'}{2})d\theta'd\phi' \quad \text{Ec. 4.47}$$

puesto que

$$dW = r' \sin \theta' d\phi' \quad \text{Ec. 4.48}$$

$$dH = -\bar{a}_r' \cdot d\bar{N} = -\bar{a}_r' \cdot \bar{n} dN = -\bar{a}_r' [-\bar{a}_r' \cos(\frac{\theta'}{2}) + \bar{a}_\theta' \sin(\frac{\theta'}{2})] dN = \cos(\frac{\theta'}{2}) dN \quad \text{Ec. 4.49}$$

$$dN = \sec(\frac{\theta'}{2}) dH = \sec(\frac{\theta'}{2}) r' d\theta' = r' \sec(\frac{\theta'}{2}) d\theta' \quad \text{Ec. 4.50}$$

Por lo tanto, puede demostrarse que las ecuaciones 4.45 y 4.46 pueden expresarse con la ayuda de las ecuaciones 4.28, 4.29 y 4.47, como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix} &= -j \frac{\omega \mu}{2\pi r} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} C_1 e^{-jkr} \begin{bmatrix} \bar{a}_\theta \cdot \bar{I} \\ \bar{a}_\phi \cdot \bar{I} \end{bmatrix} \\ &= -j \frac{\omega \mu e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{P_t}{2\pi} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} \bar{a}_\theta \cdot \bar{I} \\ \bar{a}_\phi \cdot \bar{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.51}$$

donde

$$\bar{I} = \bar{I}_t + \bar{I}_z \quad \text{Ec. 4.52}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_t &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \bar{e}_r \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \frac{\sqrt{G_f(\theta', \phi')}}{r'} e^{-jkr'[1 - \sin\theta' \sin\theta \cos(\phi' - \phi) - \cos\theta' \cos\theta]} \\ &\quad \times (r')^2 \sin\theta' \sec\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' d\phi' \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.53}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_z &= -\bar{a}_z \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (\bar{n} \cdot \bar{e}_r) \frac{\sqrt{G_f(\theta', \phi')}}{r'} e^{-jkr'[1 - \sin\theta' \sin\theta \cos(\phi' - \phi) - \cos\theta' \cos\theta]} \\ &\quad \times (r')^2 \sin\theta' \sec\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' d\phi' \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.54}$$

Comparando 4.51 con 4.26, las componentes de

campo radiado formulado por los métodos de la distribución en la apertura y la distribución de corriente conducen a resultados similares dado que la contribución de \bar{I}_z es despreciable. Mientras la relación apertura longitud de onda (d/λ) se incrementa, el método de la distribución de corriente reduce los resultados con respecto a los de la distribución en la apertura y el modelo angular se hace cada vez más estrecho.

Para variaciones cercanas a $\theta = \pi$ la contribución de \bar{I}_z es despreciable por

$$\begin{aligned} \bar{a}_\theta \cdot [-\bar{a}_z \cdot (\hat{n} \cdot \hat{e}_r)] &= [\bar{a}_x \sin \theta \cos \phi + \bar{a}_y \cos \theta \sin \phi - \bar{a}_z \sin \theta] \cdot [-\bar{a}_z (\hat{n} \cdot \hat{e}_r)] \\ &= (\hat{n} \cdot \hat{e}_r) \sin \theta \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.55}$$

$$\bar{a}_\phi \cdot [-\bar{a}_z (\hat{n} \cdot \hat{e}_r)] = [-\bar{a}_x \sin \phi + \bar{a}_y \cos \phi] \cdot [-\bar{a}_z (\hat{n} \cdot \hat{e}_r)] = 0 \quad \text{Ec. 4.56}$$

4.5.1 DIRECTIVIDAD Y EFICIENCIA DE LA APERTURA

En el diseño de antenas, la directividad es una figura de mérito muy importante. El propósito de esta sección es examinar la dependencia de la directividad y la eficiencia de la apertura sobre el modelo primario del alimentador $G_E(\theta', \phi')$ y la relación f/d del reflector. Para simplificar el análisis, asumiremos que el modelo del alimentador $G_E(\theta', \phi')$ es simétricamente circular (no una función de ϕ') y que $G_E(\theta') = 0$ para $\theta' > 90^\circ$.

El modelo secundario (formado por la superficie del reflector) esta dado por la ecuación 4.51. Aproximando la $\bar{\mathbf{I}}$ de la ecuación 4.52 por $\bar{\mathbf{I}}_t$, el campo \mathbf{E} total en la dirección $\theta' = \pi$ está dado por \mathbf{E}_θ o \mathbf{E}_ϕ de la ecuación 4.51.

Asumiendo que la alimentación es circular y simétrica, linealmente polarizada en la dirección \mathbf{y} , y con contribuciones de polarización cruzada despreciables, se puede demostrar con la ayuda de la ecuación 4.1 que la ecuación 4.51 se reduce a

$$\mathbf{E}(r, \theta = \pi) = -j \frac{2\omega\mu f}{r} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{P_t}{2\pi} \right]^{1/2} e^{-jk(r+2b)} \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \quad \text{Ec. 4.57}$$

La intensidad de radiación (potencia/unidad de ángulo sólido) en la dirección frontal $\mathbf{U}(\theta = \pi)$ está dada por

$$U(\theta = \pi) = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\bar{\mathbf{E}}(r, \theta = \pi)|^2 \quad \text{Ec. 4.58}$$

la cual usando la ecuación 4.57 se reduce a

$$U(\theta = \pi) = \frac{16\pi^2}{\lambda^2} f^2 \frac{P_t}{4\pi} \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \quad \text{Ec. 4.59}$$

La directividad de la antena en la dirección frontal puede escribirse usando la ecuación 4.59 como

$$D_o = \frac{4\pi U(\theta = \pi)}{P_t} = \frac{U(\theta = \pi)}{P_t/4\pi} = \frac{16\pi^2}{\lambda^2} f^2 \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \quad \text{Ec. 4.60}$$

La longitud focal esta relacionando el espectro angular y

el diámetro de la apertura d por la ecuación 4.13. Entonces la ecuación 4.60 se reduce a

$$D_o = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 \left\{ \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \right. \quad \text{Ec. 4.61}$$

El factor $(\pi d/\lambda)^2$ es la directividad de una apertura uniformemente iluminada con fase constante; la parte restante es la eficiencia de la apertura definida como

$$\epsilon_{ap} = \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) d\theta' \right|^2 \quad \text{Ec. 4.62}$$

Es evidente mediante la examinación de la ecuación 62 que la eficiencia de la apertura es una función del ángulo subtendido (θ_0) y el modelo del alimentador $G_f(\theta')$ del reflector. Entonces para un modelo de alimentador dado, todos los paraboloides con la misma relación f/d tienen idénticas eficiencias de aperturas.

Para ilustrar la variación de la eficiencia de la apertura como una función del modelo del alimentador y la extensión angular del reflector, Silver consideró una clase de alimentadores cuyos modelos están definidos por

$$G_f(\theta') = \begin{cases} G_o^{(n)} \cos^n(\theta') & 0 \leq \theta' \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta' \leq \pi \end{cases} \quad \text{Ec. 4.63}$$

donde $G_o^{(n)}$ es una constante para un dado valor de n . Aunque idealmente, estos modelos se escogieron porque pueden obtenerse formas de soluciones aproximadas, y porque estas a menudo se usan para representar la mayor parte

del lóbulo principal de varias antenas prácticas.

La constante $G_o^{(n)}$ puede determinarse de la relación

$$\iint_s G_f(\theta') d\Omega = \iint_s G_f(\theta') \sin \theta' d\theta' d\phi' = 4\pi \quad \text{Ec. 4.64}$$

por lo que la ec. 4.63 se convierte en

$$G_o^{(n)} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta' \sin \theta' d\theta' = 2 \Rightarrow G_o^n = 2(n+1) \quad \text{Ec. 4.65}$$

Sustituyendo 4.63 y 4.65 en 4.62 conduce, para los valores pares de $n=2$ hasta $n=8$, a

$$\epsilon_{ap}(n=2) = 24 \left\{ \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ln \left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right] \right\}^2 \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.66}$$

$$\epsilon_{ap}(n=4) = 40 \left\{ \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ln \left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right] \right\}^2 \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.67}$$

$$\epsilon_{ap}(n=6) = 14 \left\{ 2 \ln \left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right] + \frac{[1 - \cos(\theta_0)]^3}{3} + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0) \right\}^2 \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.68}$$

$$\epsilon_{ap}(n=8) = 18 \left\{ \frac{1 - \cos^4(\theta_0)}{4} - 2 \ln \left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right] - \frac{[1 - \cos(\theta_0)]^3}{3} - \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0) \right\}^2 \cot^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{Ec. 4.69}$$

Las variaciones de las ecuaciones 4.66 - 4.69, como una función de la apertura angular del reflector θ_0 y la relación f/d , se muestran graficadas en la figura 4.14, donde es evidente que para un modelo de alimentador dado (n = constante):

1. Hay un solo reflector con una apertura angular dada o relación f/d la cual conduce a una máxima eficiencia de la apertura.

2. Para cada caso la máxima eficiencia de apertura, mostrada en línea punteada, está en la vecindades del 82-83%.
3. La máxima eficiencia de apertura, para cualquiera de los modelos dados, es casi igual al de cualquiera de los otros.
4. Cuando los modelos de los alimentadores comienzan a ser más directivos (n se incrementa), la apertura angular del reflector que alcanza la máxima eficiencia es menor.

La eficiencia de la apertura es el resultado de la

1. fracción de la potencia total que es radiada por el alimentador, interceptada y colectada por la superficie reflectante (generalmente conocida como eficiencia de "derrame" (spillover) ϵ_s)
 2. uniformidad de la distribución de amplitud del modelo del alimentador sobre la superficie del reflector (generalmente conocida como eficiencia de "ahusamiento" (taper) ϵ_t)
 3. uniformidad de fase del campo sobre el plano de la apertura (generalmente conocida como eficiencia de fase ϵ_p)
 4. uniformidad de la polarización del campo sobre el plano de apertura (generalmente conocida como eficiencia de polarización ϵ_x)
 5. eficiencia de bloqueo ϵ_b
5. eficiencia de error aleatorio sobre la superficie del reflector ϵ_r .

Entonces en general

$$\epsilon_{ap} = \epsilon_s \epsilon_t \epsilon_p \epsilon_x \epsilon_b \epsilon_r$$

Ec. 4.70

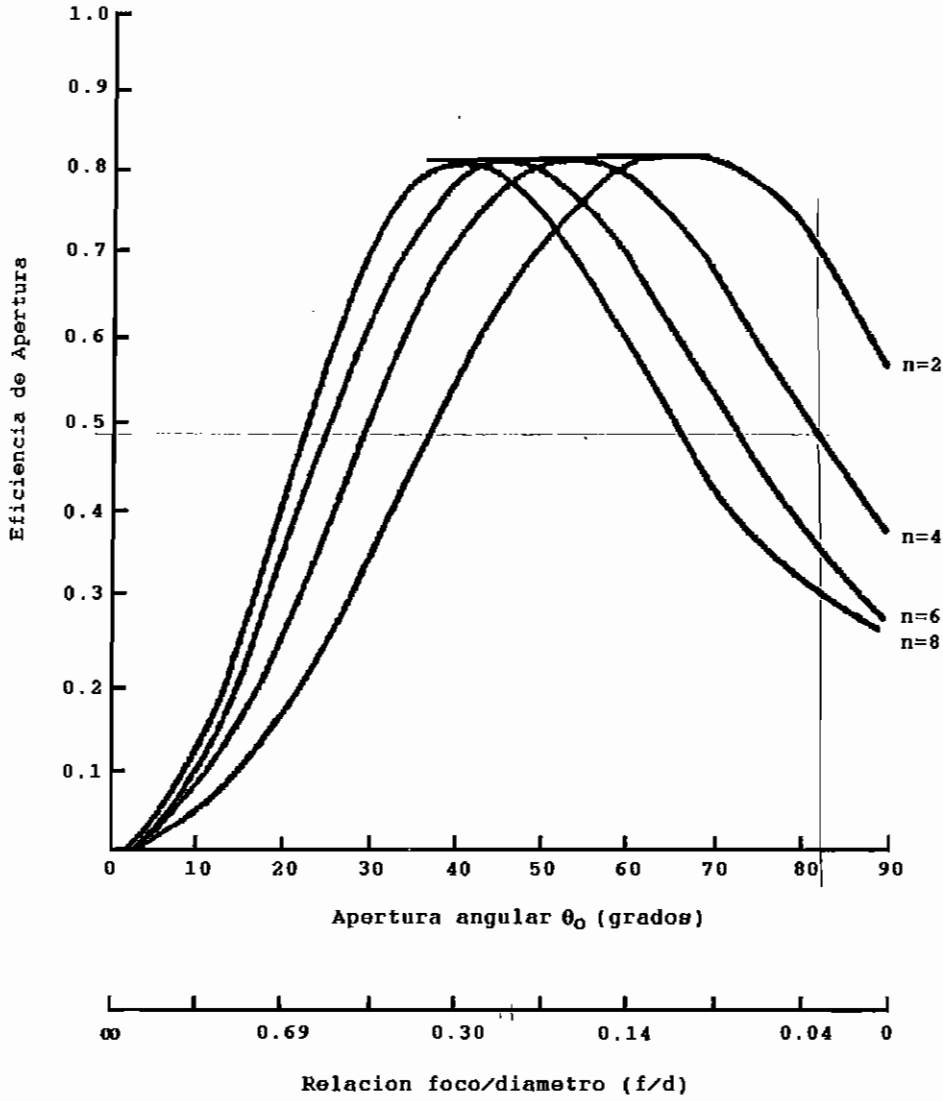


Figura 4.14 Eficiencia de apertura de un reflector en función de la apertura angular (o relación f/d) para diferentes modelos de alimentadores. [8]

Para alimentadores con modelos simétricos

$$\epsilon_s = \frac{\int_0^{\theta_0} G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'}{\int_0^\pi G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'}$$

Ec. 4.71

$$\epsilon_t = 2 \cot^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \frac{\left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \right|^2}{\int_0^{\theta_0} G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'} \quad \text{Ec. 4.72}$$

usando la ecuación 4.13 también podemos escribir la ecuación 4.72 como

$$\epsilon_t = 32 \left(\frac{f}{d} \right)^2 \frac{\left| \int_0^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta')} \tan \left(\frac{\theta'}{2} \right) d\theta' \right|^2}{\int_0^{\theta_0} G_f(\theta') \sin \theta' d\theta'} \quad \text{Ec. 4.73}$$

Entonces es claro que

1. $100 (1 - \epsilon_s) =$ porcentaje de potencia perdida debido al "derrame" de la energía al pasar desde el alimentador al reflector principal.
2. $100 (1 - \epsilon_t) =$ porcentaje de potencia perdida debido a la distribución no uniforme de amplitud sobre la superficie del reflector.
3. $100 (1 - \epsilon_p) =$ porcentaje de potencia perdida si el campo sobre el plano de apertura no está en fase en cualquier lugar.
4. $100 (1 - \epsilon_x) =$ porcentaje de potencia perdida si hay campos con polarización cruzada sobre el plano de apertura de la antena.
5. $100 (1 - \epsilon_b) =$ porcentaje de potencia perdida debido al bloqueo realizado por el alimentador y/o soportes (también por el subreflector para un reflector dual).
6. $100 (1 - \epsilon_r) =$ porcentaje de potencia perdida debido

a errores aleatorios en la superficie del reflector.

Un factor adicional que reduce la ganancia de la antena es la atenuación en el alimentador y la línea de transmisión asociada.

Para alimentadores con

1. modelos simétricos
2. centro de fase alineados
3. sin componentes de polarización cruzada
4. sin bloqueo
5. superficie sin errores aleatorios

los dos factores principales que contribuyen a la eficiencia de la apertura son el "derrame" (spillover) y las pérdidas debidas a la distribución no uniforme de la amplitud (taper). Debido a que estas pérdidas dependen principalmente del modelo del alimentador, debe hacerse un compromiso entre las eficiencias de "spillover" y "taper". Puede alcanzarse una muy alta eficiencia de "spillover" mediante un modelo muy estrecho con un bajo lóbulo secundario a expensas de una muy baja eficiencia de "taper".

Se consigue iluminación uniforme y eficiencia ideal de "taper" cuando el modelo de la potencia del alimentador es

$$G_f(\theta') = \begin{cases} \sec^4\left(\frac{\theta'}{2}\right) & 0 \leq \theta' \leq \theta_0 \\ 0 & \theta' > \theta_0 \end{cases} \quad \text{Ec. 4.74}$$

lo que se muestra graficado en la figura 4. 15. Aunque tal modelo es "ideal" e impráctico de alcanzar, muchos esfuerzos se han dedicado para diseñar alimentadores cuyas características por lo menos se aproximen.

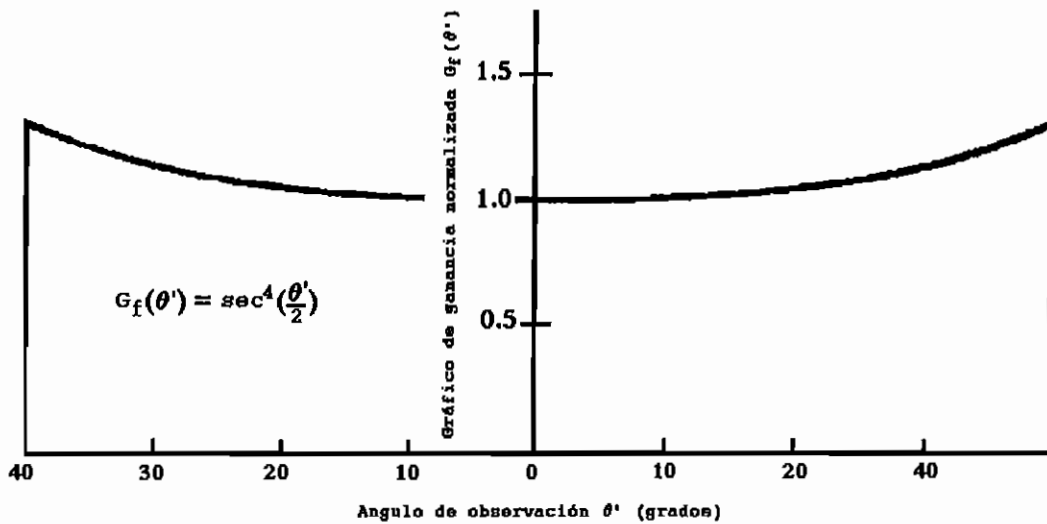


Figura 4. 15 Modelo de ganancia normalizada de un alimentador para una amplitud con iluminación uniforme de un reflector paraboloides con un ángulo subtendido total de 80°. [2]

Para diseñar alimentadores prácticos que produzcan altas eficiencias de apertura, es instructivo examinar la intensidad relativa de campo en los bordes del reflector ($\theta' = 0$) para modelos que conducen a eficiencias óptimas.

Para los modelos de la ecuación 4.63 cuando usamos con reflectores que resulten en eficiencias óptimas como se demuestra gráficamente en la figura 4.14, la intensidad relativa de campo en los bordes de sus límites angulares ($\theta' = \theta_0$) se muestra graficada en la figura 4.16. Entonces para $n = 2$ la intensidad de campo del modelo en $\theta' = \theta_0$ es 8 dB menos que en el máximo. Mientras el modelo se estrecha (n crece), la intensidad relativa de campo en los bordes para máxima eficiencia se reduce como se ilustra en la figura 4.14. Desde $n=2$ hasta $n=10$ la intensidad de campo está entre 8 y 10.5 dB menos que el máximo, para muchos alimentadores prácticos la figura usada es 9-10 dB.

Otro parámetro a examinar para los modelos de la ecuación 4.63, cuando los usamos con reflectores que conducen a óptimas eficiencias, es la amplitud variable de la iluminación de la apertura principal del reflector que se define como la relación de la intensidad de campo en los bordes de la superficie del reflector a la intensidad en el vértice. La iluminación de la apertura es una función del modelo del alimentador y de la relación f/d del reflector.

Para obtener esto, la relación de la variación angular del modelo en los dos puntos [$G_f(\theta'=0)/G_f(\theta'=\theta_0)$] se multiplica por el factor de atenuación espacial $(r_0/f)^2$ donde f es la distancia focal del reflector y r_0 es la distancia desde el

punto focal al borde del reflector.

Para cada uno de los modelos, la iluminación en el borde del reflector para máxima eficiencia es 11 dB por debajo del valor en el vértice.

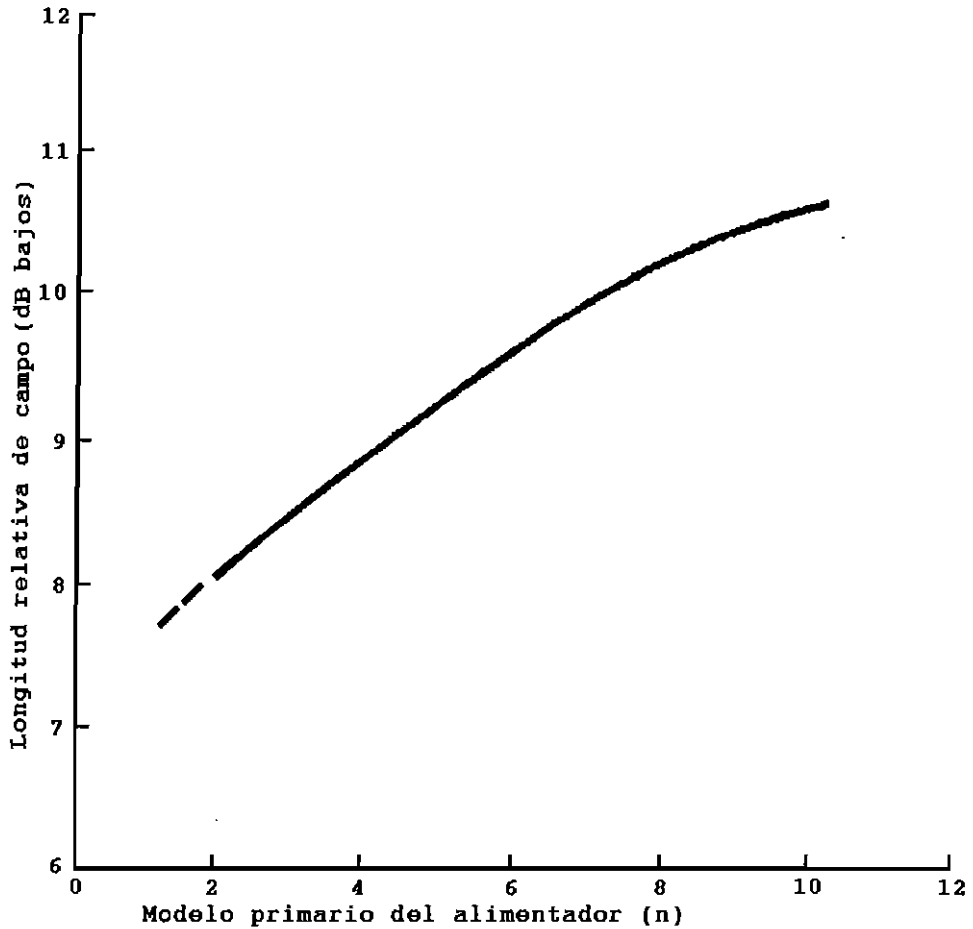


Figura 4.16 Longitud de campos relativos de modelos de alimentadores sobre los bordes de un reflector en función del modelo primario ($\cos^n\theta$) [8]

Los resultados obtenidos con los modelos ideales de la ecuación 4.63 deben tomarse como típicos, porque se asume que

1. la intensidad de campo para $\theta' > 90^\circ$ es cero

2. el alimentador está ubicado en el centro de fase del sistema
3. los modelos son simétricos
4. no hay componentes de campo con polarización cruzada
5. no hay bloqueo
6. no existen errores aleatorios en la superficie del reflector

En la práctica, las máximas eficiencias de un reflector están en el rango de 65 al 80%. Para demostrar esto, se calcularon eficiencias de reflectores paraboloides con alimentadores cuadrados corrugados, y se muestran en la figura 4.17.

Las correspondientes eficiencias de amplitud variable (taper) y derrame (spillover) se muestran en la figura 4.18. Cada una de las bocinas tiene dimensiones $8\lambda \times 8\lambda$, sus modelos fueron simétricos y se calcularon usando las técnicas de las bocinas corrugadas.

De los datos graficados, es evidente que la máxima eficiencia de la apertura para cada modelo del alimentador esta en el rango del 74 al 79%, y que el producto de las eficiencias de taper y spillover es aproximadamente igual al eficiencia total de la apertura.

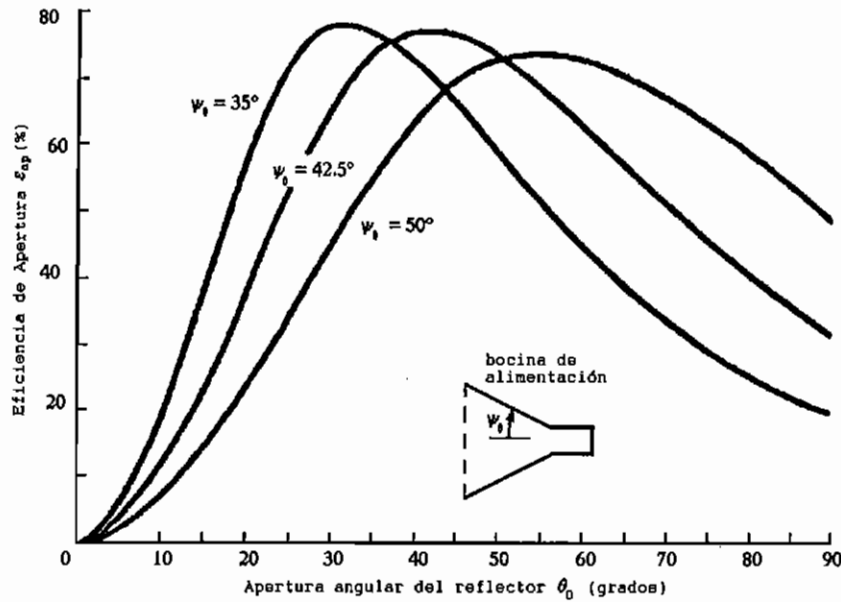


Figura 4.17 Eficiencia de la apertura del reflector parabólico en función de la apertura angular para una bocina alimentadora cuadrada corrugada de 8x8 con ángulo flare total de $2=70^\circ$, 85° y 100° . [2]

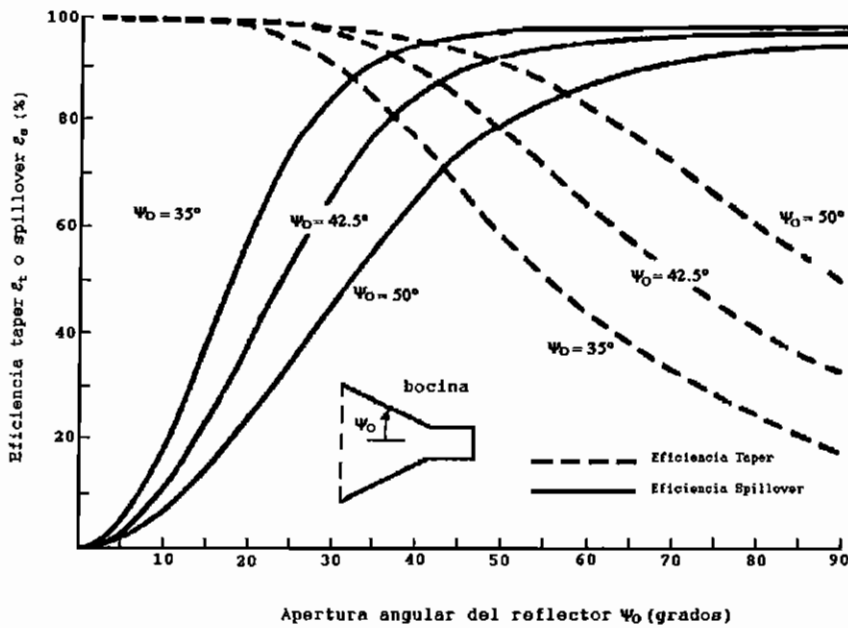


Figura 4.18 Eficiencias taper y spillover de un reflector parabólico en función de la apertura del reflector para diferentes bocinas alimentadoras corrugadas. [2]

ERROR DE FASE

Cualquier desviación de fase, sobre la apertura de la antena, puede conducir a una disminución significativa de su directividad. Para un sistema de reflector paraboloidal, el error de fase es el resultado de

1. desplazamiento (desenfocamiento) de el centro de fase del alimentador del punto focal.
2. desviación de la superficie del reflector de la forma parabólica o errores aleatorios de la superficie del reflector
3. desviación del frente de ondas del alimentador de la forma esférica.

El efecto del desenfocamiento puede reducirse primero ubicando el centro de fase del alimentador de la antena y entonces ubicándolo en el punto focal del reflector. Para bocinas, usadas ampliamente como alimentadores para reflectores, el centro de fase esta localizado entre la apertura de la bocina y el ápice formado por la intersección de las paredes inclinadas de la bocina.

Se han derivado expresiones muy simples para predecir las pérdidas de directividad para aperturas rectangulares y circulares cuando se conocen los valores picos de la desviación de fase de la apertura. Cuando los errores de fase

se asumen relativamente pequeños, no es necesario conocer la amplitud exacta o función de distribución sobre la apertura.

Asumiendo que la máxima radiación ocurre sobre el eje del reflector, y que la mayor desviación de fase sobre la apertura del reflector puede representarse como

$$|\Delta\phi(z)| = |\phi(z) - \bar{\phi}(z)| \leq m, \quad -1 \leq z \leq 1 \quad \text{Ec. 4.75}$$

donde $\phi(z)$ es la función de fase en la apertura y $\bar{\phi}(z)$ es su valor promedio, entonces la relación de la directividad con (D) y sin errores de fase (D_0) puede escribirse como

$$\frac{D}{D_0} = \frac{\text{directividad con error de fase}}{\text{directividad sin error de fase}} \geq \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)^2 \quad \text{Ec. 4.76}$$

y la máxima reducción fraccional en directividad como

$$\frac{\Delta D}{D_0} = \frac{D_0 - D}{D_0} \leq m^2 \left(1 - \frac{m^2}{4}\right) \quad \text{Ec. 4.77}$$

Ejemplo 1.

Un reflector de diámetro 10m, con una relación $f/d = 0.5$, esta operando en los 3 GHz. El reflector se alimenta con una antena cuyo modelo primario es simétrico y el cual puede aproximarse por $G_f(\theta') = 6 \cos^2\theta'$. Encontrar

- eficiencia de la apertura
- directividad total
- eficiencias spillover y taper
- la directividad cuando la máxima desviación de fase

de la apertura es $\pi/8$ rad

SOLUCION

Usando la ecuación 4.12, la mitad del ángulo subtendido del reflector es igual a

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left[\frac{0.5(0.5)}{(0.5)^2 - \frac{1}{16}} \right] = 53.13^\circ$$

(a) la eficiencia de la apertura se obtiene

$$\epsilon_{ap} = 24 \{ \sin^2(26.57^\circ) + \ln[\cos 26.57^\circ] \}^2 = 0.75 = 75\%$$

lo cual concuerda con el dato de la figura 4.14

(b) La directividad total se obtiene de la ecuación 4.61 o

$$D = 0.75[\pi(100)]^2 = 74022.03 = 48.69 \text{ dB}$$

(c) la eficiencia de spillover se calcula usando la ecuación 4.71 donde el límite superior de la integral en el denominador ha sido reemplazado por $\pi/2$. Entonces

$$\epsilon_s = \frac{\int_0^{53.13^\circ} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'}{\int_0^{90^\circ} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta'} = \frac{2 \cos^3 \theta' \Big|_0^{53.13^\circ}}{2 \cos^3 \theta' \Big|_0^{90^\circ}} = 0.784 = 78.4\%$$

De manera similar, la eficiencia de alimentación (taper) se calcula usando la ecuación 4.72.

Puesto que el numerador en la ecuación 4.72 es idéntico en forma a la eficiencia de la apertura, la eficiencia de alimentación puede encontrarse multiplicando la ecuación 4.69

por 2 y dividiendo para el denominador de la ecuación 4.72. Entonces,

$$\varepsilon_t = \frac{2(0.75)}{1.568} = 0.9566 = 95.66\%$$

El producto de ε_s y ε_t es igual a

$$\varepsilon_s \varepsilon_t = 0.784(0.9566) = 0.75$$

y es idéntica a la eficiencia total de la apertura calculada antes.

(d) La directividad para un máximo error de fase de $m=\pi/8=0.3927$ rad pueden calcularse usando la ecuación 4.76

$$\frac{D}{D_0} \geq \left(1 - \frac{m^2}{2}\right)^2 = \left[1 - \frac{(0.3927)^2}{2}\right]^2 = 0.8517 = -0.69 \text{ dB}$$

o

$$D \geq 0.8517 D_0 = 0.8517(74022.03) = 63046.94 = 48.0 \text{ dB}$$

Los efectos causados por la rugosidad de la superficie en la directividad de la antena fueron examinados por Ruze, quien estableció que existe una longitud de onda (λ_{\max}) a la cual la directividad alcanza un máximo. Esta longitud de onda depende de la desviación RMS (σ) de la superficie del reflector de un paraboloide ideal. Esto esta relacionado por

$$\lambda_{\max} = 4\pi\sigma \quad \text{Ec. 4.78}$$

Entonces la directividad de la antena de la ecuación 4.61 se modifica de la siguiente manera

$$D = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 \epsilon_{ap} e^{-(4\pi\sigma/\lambda)^2} \quad \text{Ec. 4.79}$$

Usando la ec.4.78 la máxima directividad de la ecuación 4.79 puede escribirse como

$$D_{max} = 10^{2q} \epsilon_{ap} \left(\frac{e^{-1}}{16}\right) \quad \text{Ec. 4.80}$$

donde q es el índice de lisura definido por

$$\frac{d}{\sigma} = 10^{+q} \quad \text{Ec. 4.81}$$

En decibelios, la ec.4.80 se reduce a

$$D_{max} \text{ (dB)} = 20q - 16.38 + 10 \log_{10}(\epsilon_{ap}) \quad \text{Ec. 4.82}$$

Para una eficiencia de apertura de uno ($\epsilon_{ap}=1$), la directividad de la ecuación 4.79 se muestra en la figura 4.19, como una función de (d/λ) , para valores de $q=3.5$, 4.0 y 4.5.

Es evidente que para cada valor de q y un diámetro de reflector dado d , hay una máxima longitud de onda donde la directividad alcanza un máximo valor. Esta máxima longitud de onda esta dada por la ecuación 4.78.

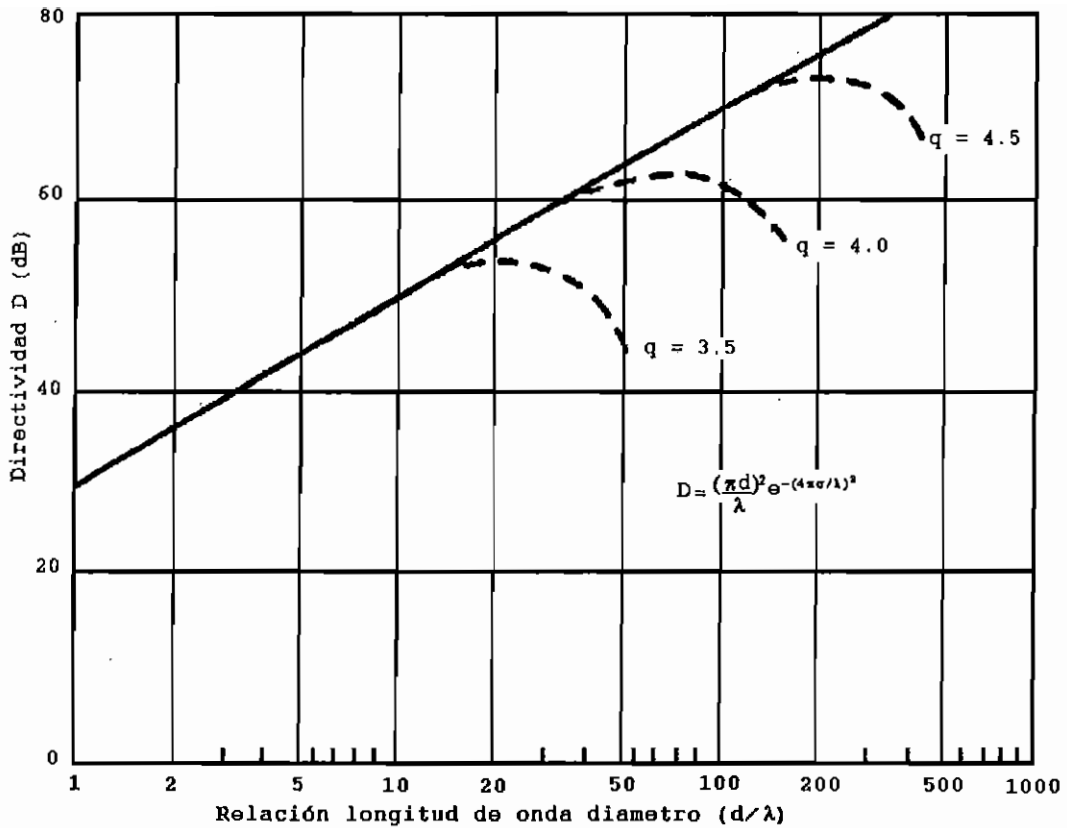


Figura 4.19 Efecto de la rugosidad de la superficie del reflector sobre la directividad de la antena.[9]

4.6 DISEÑO DEL ALIMENTADOR

El amplio uso de reflectores parabólicos ha estimulado el interés de obtener alimentadores con mejores eficiencias de apertura y mayor discriminación de ruido radiado por la tierra. En los últimos años, los dos principales problemas que conciernen al diseño de alimentadores son la eficiencia de la apertura y obtener baja polarización cruzada.

En el modo de recepción, un alimentador ideal y una

carga acoplada deben absorber toda la energía interceptada por la apertura cuando ondas planas linealmente polarizadas incidían normalmente sobre ella.

La estructura del campo del alimentador debe hacerse igual a la estructura del campo de la región focal formado por las características de reflexión, dispersión y difracción del reflector.

Por reciprocidad, un alimentador ideal en el modo de transmisión debe ser uno que radia solo dentro del ángulo sólido de la apertura y establece una onda viajera externa idéntica. Para este sistema ideal de alimentador, las estructuras de campo de los modos de transmisión y recepción dentro de la región focal son idénticas sólo con la dirección de propagación reversa.

Un análisis óptico indica los campos en la región focal, formados por la reflexión de ondas planas linealmente polarizadas incidiendo normalmente sobre un reflector axialmente simétrico.

CAPITULO V:
DISEÑO, CONSTRUCCION Y PRUEBAS EXPERIMENTALES

5.1 DISEÑO DE LA ANTENA PRIME FOCUS

Para realizar este diseño vamos a considerar los siguientes aspectos:

- Usamos los datos del satélite PAS-3 de la familia Panamsat que trabaja en la banda ku con frecuencias dowlink de 12.500 a 12.750 GHz, 12 canales de 54MHz, y una potencia de 63 vatios. Este satélite es uno de los que más baja potencia entrega.
- Vamos a considerar que la eficiencia de la antena sea del 60% y que el umbral de recepción del decodificador es 12 dB. Dejaremos un margen de 2 dB para buena recepción, entonces, la fórmula del enlace es:

$$C/N = p.i.r.e.(dBW) - L_p(dB) + (G_R/T_R) (dBK^{-1}) - k(dBK) \quad \text{Ec.5.1}$$

En donde:

C/N = relación de densidad de portadora a ruido

p.i.r.e.= potencia radiada isotrópica efectiva

L_p = pérdida de trayectoria de espacio libre

(G_R/T_R) = coeficiente de calidad

K = constante de Boltzmann : $10 \log (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}) = -228.6 \text{ dBK}$

- La **densidad de portadora a ruido** es el promedio de la relación de densidad de potencia a ruido de la

portadora de banda ancha. La potencia de portadora de banda ancha es la potencia combinada del conducto y sus bandas laterales asociadas. El ruido es el ruido térmico presente en un ancho de banda de 1 Hz normalizado. Generalmente, para enlaces descendentes, la relación C/N está entre 10 y 20 dB, para nuestro caso tomaremos un valor de 14 dB.

- La **potencia radiada isotrópica efectiva (pire)**, se define como una potencia de transmisión equivalente de la portadora del enlace descendente del satélite. Para nuestro caso, según los datos del satélite, es de $10 \log 63$ es decir 18dBW.
- Las **pérdidas de trayectoria de espacio libre** están dadas por:

$$L_d = \left(\frac{4\pi r}{\lambda_\mu} \right)^2$$

$$\lambda_\mu = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^{10} \text{ cm/s}}{12.625 \times 10^9 \text{ 1/s}} = 2.37 \text{ cm.}$$

$$\Rightarrow L_d = \left(\frac{4\pi \times 3.6 \times 10^9}{2.37} \right)^2 = 3.6244 \times 10^{20}$$

$$L_d = 10 \log 3.6244 \times 10^{20} = 205.62 \text{ dB}$$

- El **factor de calidad** se define como la relación entre la ganancia de la antena de la estación terrena y la temperatura de ruido del receptor (G_R/T_R)

La temperatura de ruido del sistema está dada por:

$$T_{\text{sistema}} = T_{\text{antena}} + T_{\text{LNB}} + T_{\text{línea transmisión}} \quad \text{Ec. 5.2}$$

Para el cálculo de la temperatura de ruido de la antena se utiliza el circuito equivalente de la figura 5.1.

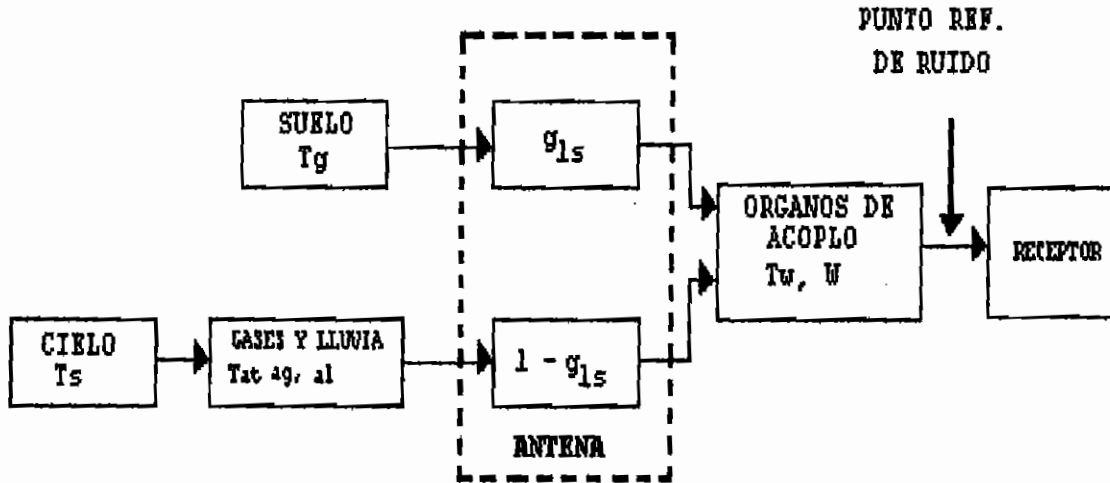


Figura 5.1 **Circuito equivalente**

En esta figura se observan las diferentes contribuciones de ruido existentes.

1. Radiación cósmica de fondo, a la temperatura de ruido del cielo T_s . Esta fuente resulta afectada por un factor de ganancia de antena $(1-g_{1s})$.
2. Terreno circundante a la antena, con una temperatura efectiva de ruido del suelo T_g . Fuente afectada por un factor de ganancia de lóbulos laterales de la antena g_{1s} .
3. Gases atmosféricos y lluvia, con una temperatura efectiva T_{at} y atenuaciones respectivas a_g y a_l .
4. Organos pasivos (no radiantes) de acoplo de antena al

receptor, con una temperatura física T_w y una atenuación w .

Los factores de pérdida anteriores están en valores absolutos. Se representa con subíndice 1 las temperaturas equivalentes cuando existe absorción por lluvia, y con subíndice 0 cuando no la hay.

En el primer caso, la temperatura de ruido total de la antena, relativa al punto de referencia de ruido, será:

$$T_{A_1} = \frac{T_g \cdot g_{ls}}{w} + \left[T_s + T_m (a_g a_1 - 1) \cdot \frac{(1 - g_{ls})}{a_g \cdot a_1 w} + \frac{T_w (w - 1)}{w} \right]$$

Ec. 5.3

De la misma manera, en condiciones de cielo despejado, es decir en ausencia de atenuación por lluvia se tiene:

$$T_{A_0} = \frac{T_g \cdot g_{ls}}{w} + \left[T_s + T_m (a_g - 1) \cdot \frac{(1 - g_{ls})}{a_g \cdot w} + \frac{T_w (w - 1)}{w} \right]$$

Ec. 5.4

Cuando se tiene un ángulo de elevación grande, g_{ls} es aproximadamente igual a cero.

Otra manera de calcular el ruido de la antena se presenta a continuación.

La temperatura de ruido de la antena está dada por la ecuación:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} G(\theta, \phi) T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

Ec. 5.5

En donde

$G(\theta, \phi)$ = función de ganancia de la antena = $4\pi P(\theta, \phi) / P_T$

$P(\theta, \phi)$ = potencia radiada por unidad de ángulo sólido en la dirección θ, ϕ

P_T = Potencia total liberada por la antena

(θ, ϕ) = coordenadas esféricas

$T(\theta, \phi)$ = distribución de la temperatura sobre todos los ángulos alrededor de la antena.

Por la simetría circular alrededor del zenit, la función $T(\theta, \phi)$ es independiente de ϕ y la distribución de temperatura sólo depende de θ .

Para calcular esta dependencia el espacio se divide en tres regiones cada una caracterizada para una función específica de θ , dada por:

$$T(\theta, \phi) = T(\theta) = (2.2/\cos\theta + 0.8)^\circ\text{K para } 0 < \theta < 87.5^\circ$$

$$T(\theta, \phi) = T(\theta) = 290 - (90 - \theta)95.5^\circ\text{K para } 87.5^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$T(\theta, \phi) = T(\theta) = 290^\circ\text{K para } 90^\circ < \theta < 180^\circ$$

Para el caso general cuando el eje de la antena es direccionado a θ_0, ϕ_0 , la temperatura de ruido de la antena es una función de θ_0 y ϕ_0 ,

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} T(\theta, \phi) G(\theta - \theta_0, \phi - \phi_0) \sin \theta d\theta d\phi$$

Usando esta expresión para una antena isotrópicamente radiada en un hemisferio, para el que G es constante, tenemos:

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} 2T(\theta) \sin \theta d\theta d\phi$$

Ec. 5.6

Donde

$$\theta_1 = \theta_0 - \pi/2$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \pi/2, \text{ y}$$

$$\phi_1 = -\text{arc sen}(\cot \theta \cot \theta_0)$$

En nuestro caso, tenemos el dato del satélite, $\theta_0 = 43^\circ$, con lo que resulta:

$$\theta_1 = -47^\circ$$

$$\theta_2 = 133^\circ \text{ y}$$

$$\phi_1 = -\text{arc sen}(\cot \theta \cot 43^\circ)$$

reemplazando tenemos:

$$T_A(43^\circ) = \frac{1}{4\pi} \int_{-47^\circ}^{133^\circ} \int_{-\text{arcsen}(\cot \theta \cot 43^\circ)}^{\pi/2} 2\left(\frac{2.2}{\cos \theta} + 0.8\right) \sin \theta d\theta d\phi$$

El cálculo de esta integral es muy complicado, una vez que se obtiene el valor debe multiplicarse por el porcentaje de pérdidas para obtener la cantidad de temperatura de ruido introducida por los lóbulos laterales secundarios, a este valor debe agregarse, el ruido introducido por la lluvia ya que se desprecian las otras fuentes de ruido como son el sol, la luna por cuanto están muy alejados de la antena.

$$T_A = T_{AL} + T_{AL}$$

El valor de T_A se encuentra graficada en función del ángulo de elevación de la antena como se muestra en la figura 5.2, por lo que obtenemos para 43° el valor de $T_A = 22^\circ\text{K}$. En cuanto a la temperatura de ruido del LNB, se tiene que es igual a 20°K (comercial), y la temperatura de ruido de la línea de transmisión, consideramos que es de 18°K , por lo tanto, la temperatura de ruido del sistema será de:

$$T_{\text{sistema}} = 23 + 20 + 18 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$T_{\text{sistema}} = 61 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$T_{\text{sistema}} = 10\log 61 \text{ dBK} = 17.85 \text{ dBK}$$

"Para el caso de enlace de TV satelital, al ocuparse la portadora para un solo canal de banda ancha, no existe ruido de intermodulación, por lo que la portadora de televisión se transmite completa, en saturación" [11].

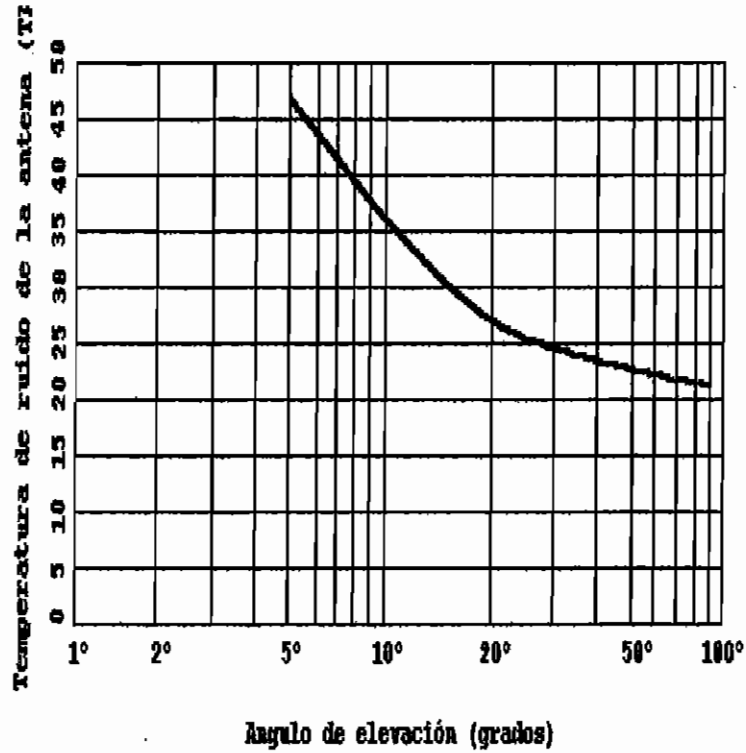


Figura 5.2 Curva temperatura de ruido de una antena en función del ángulo de elevación.[10]

En consecuencia, la ecuación 5.1 se transforma en:

$$C/N = p.i.r.e. (dBW) - L_p (dB) + (G_R/T_R) (dBK^{-1}) - k (dBJK^{-1}) - B (dBs^{-1})$$

Ec. 5.7

En la ecuación anterior, B es el ancho de banda, el cual en nuestro caso es $10\log(54 \times 10^6) = 77.32 \text{ dBs}^{-1}$

En la ecuación del enlace (ec.5.7) reemplazamos los valores y calculamos la ganancia del sistema de antena

$$G_R (dB) = C/N - p.i.r.e. + L_p + T_R + k + B$$

$$G_R (dB) = 14 (dB) - 18 (dBW) + 205.6 (dB) + 17.85 (dBK) - 228.6 (dBJK^{-1}) + 77.32 (dBs^{-1})$$

$$G_R = 68.17 \text{ dB}$$

$$G_R = G_{LNB} + G_{ANT}$$

$$G_{LNB} \approx 30 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow G_{ANT} = 68.17 - 30 = 38.17 \text{ dB}$$

5.2 DISEÑO DEL REFLECTOR

Una vez calculada la ganancia, podemos obtener el diámetro del reflector de la siguiente manera:

$$G_{ANT} \text{ (dB)} = 10 \log g_{ANT}$$

$$g_{ANT} = 6561.45$$

$$G_{ANT} = E(\pi D/\lambda)^2 \Rightarrow G = E(\pi)^2 D^2/\lambda^2 \quad \text{Ec. 5.8}$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{G \cdot \lambda^2}{E \cdot (3.14)^2} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{3.14} \sqrt{\frac{G}{E}} \quad \text{Ec. 5.9}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2.37}{3.14} \sqrt{\frac{6561.45}{0.6}}$$

$d = 78.93 \text{ cm} \rightarrow$ mínimo diámetro para esta señal.

Como vamos a construir esta antena en malla y para no tener problemas con la señal a recibir y con los efectos del ruido, especialmente el introducido por lluvia, hemos decidido dar un margen de 41.07 cm de diámetro. Entonces construiremos una antena de 1,2 metros en malla.

Una vez conocido el diámetro, procedemos a calcular la forma de la antena, utilizando la fórmula general de la

parábola con vértice en el origen y eje el eje X:

$$x = \frac{y^2}{4f} \quad \text{Ec.5.10}$$

Donde f es la distancia focal, la cual calculamos a partir de la relación f/d (distancia focal sobre diámetro) que para nuestro caso, refiriéndonos a la figura 4.14 del capítulo cuarto, será de 0.35.

$$f/d = 0.35 \text{ y } d = 120 \text{ cm}$$

$$f = 0.35(120 \text{ cm}) = 42 \text{ cm}$$

Si graficamos dando valores a y en la ecuación general de la parábola (ec.5.9) tendremos:

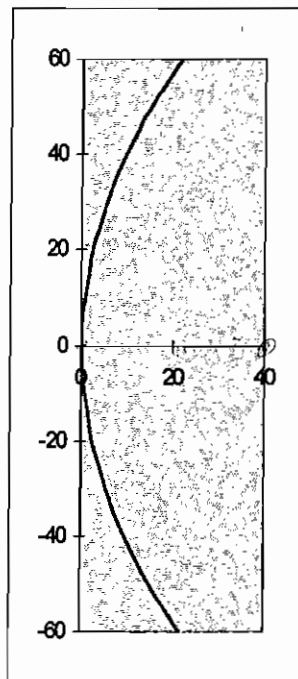


Fig. 5.3 Forma del plato de la antena Prime Focus

5.3 DISEÑO Y SELECCIÓN DEL ALIMENTADOR

Dado que utilizaremos un LNB comercial que viene con

alimentador no es necesario diseñar ni construir la bocina, sin embargo, comprobaremos que la bocina es la adecuada realizando el diseño de la misma, para esto usaremos la ecuación número 47 del capítulo tercero.

$$dm = \sqrt{3\lambda}$$

La frecuencia de la banda ku va de 12GHz a 18GHz (según anotaciones de IEEE), siendo la frecuencia que determina el diámetro mayor la de 10GHz. Entonces

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 * 10^{10} \text{ cm/s}}{10 * 10^9 \text{ 1/s}} = 3. \text{ cm}$$
$$dm = \sqrt{3 * 3} = 3 \text{ cm}$$

5.4 CONSTRUCCIÓN DE LA ANTENA

Una vez que hemos determinado el diámetro del reflector y el tipo de alimentador que vamos a usar, el siguiente paso fue construir la antena. Previo a la construcción tuvimos que realizar un análisis respecto a que tipo de materiales sería necesario utilizar para obtener el modelo y la antena misma, que garanticen un buen desempeño, que soporten las inclemencias del tiempo por un largo período manteniendo sus características de funcionamiento, que la estructura de soporte sea fuerte y que además no resulte demasiado costosa.

Primero enfocamos nuestros esfuerzos a la

construcción del reflector parabólico y que además constituía el principal elemento a fabricar. En la superficie de la antena decidimos usar aluminio dadas sus características de dilatación uniforme (nos garantiza mejor desempeño a largo plazo) y poco peso. Además pensamos en usar malla de un mínimo grosor de manera que presente menor resistencia al viento de manera que obtener la forma curva parabólica en este material no requiera el uso de maquinaria sofisticada y que además no requiera un soporte demasiado fuerte.

Dado que se iba a usar malla en la superficie, era necesario que la forma parabólica se logre en otros elementos de la antena que además sujeten a la malla. Para esto pensamos que en lugar de construir "diámetros" parabólicos era mejor, para que la estructura del disco tuviera consistencia, usar "radios". Para obtener el molde usamos madera de 2cm de espesor. En esta tabla dibujamos la parábola con los datos obtenidos en 5.2. Una vez obtenido el modelo se debía conseguir el material para los "radios" parabólicos.

El número de divisiones adecuado para el diámetro de esta antena es de 12, esto nos garantizaba que el tamaño de la malla sea manejable y mantenga su forma (no se pandee). Para los "radios" parabólicos en primer lugar usamos platina de hierro de 1/4 por 1/8, pero la estructura resultó

demasiado débil, entonces decidimos usar perfil de aluminio tipo E, con lo que conseguimos una estructura fuerte. Cabe anotar que para obtener que los radios parabólicos tuvieran la forma lo más cercano a lo ideal se debían cortar más largos ya que el doblado se realizó a mano. Estos "radios" parabólicos se juntaban en el centro con pernos de acero inoxidable de 1/2 pulgada a una circunferencia de tol de 15 cm de diámetro y en la parte exterior descansan sobre un "anillo" hecho de perfil de aluminio en I de 1 y 1/2 pulgadas.

Sobre estos radios se procedió a colocar la malla y la sujetamos a estos por medio de alambre galvanizado de acero, la malla fue cortada de un tamaño mayor del área que iba a cubrir, esto y la superficie de la malla causaron problemas ya en las pruebas, pero a eso nos referiremos luego.

Una vez que se tenía el reflector se debió construir el soporte del alimentador y del LNB, para los brazos del soporte usamos tubo de aluminio de 1/2 pulgada, pero lo más difícil fue conseguir que este soporte este ubicado en el sitio deseado (foco de la antena), este soporte lo hicimos uniendo dos mitades de un tubo de hierro por medio de una bisagra, que se unieron a los brazos del soporte con pernos de acero inoxidable de 1/2 por 1 y 1/2 pulgadas.

El soporte para la antena debía considerar varios aspectos, ser lo suficientemente fuerte pero además permitir realizar ajustes tanto en azimut como en altitud para "apuntar" al satélite deseado. Para lograr el movimiento en azimut utilizamos un "cabezal" que además permite unir el reflector parabólico con el soporte que lo construimos de tubo de hierro de 2 y 1/2 pulgadas con una base cuadrangular hecha en tol de 15 cm de lado con cuatro agujeros de 1/2 pulgada para los pernos de anclaje que sujetaran el soporte en el piso. El cabezal lo fabricamos de ángulo de hierro de 1 y 1/2 pulgadas unido en cada extremo con pernos de 1/2 pulgada de grosor y 2 pulgadas de largo. Este cabezal se une al soporte, cuando estos pernos están flojos permite realizar movimientos de la antena en azimut.

Para el movimiento en elevación se utiliza un perno "sin fin" de 10 pulgadas de largo y de 1/2 pulgada de diámetro con una argolla entre dos tuercas, las tuercas permiten fijar la elevación del reflector en el punto deseado.

Ya en las pruebas experimentales se pudo determinar que la eficiencia del reflector parabólico era bastante menor al 50% por lo que se debieron hacer algunos cambios en la antena.

Dado que la malla que se consiguió en el mercado no era

totalmente lisa la superficie obtenida hacía que los rayos incidentes no se reflejen directamente al foco de la antena, además al ser los pedazos de malla más grandes que la superficie que debían cubrir, se superponían presentando irregularidades que afectaban a la eficiencia de la antena. Por estas razones se hicieron los siguientes cambios: Dado que el alimentador en este caso era una bocina exponencial, hubo la necesidad de construir un soporte de manera que la apertura de la bocina se ubique en el foco de la parábola, con esto ya se obtuvo una mejora de aproximadamente 6 dB, sin embargo la eficiencia alcanzada todavía no era suficiente por lo que se hizo necesario cambiar la superficie reflectora. Debido a la dificultad de conseguir materiales totalmente lisos de poco grosor (inferior a 0.5 mm.), formamos una superficie reflectora de prueba de cartón número 9 el cual se forro de papel aluminio obteniéndose una mejora de aproximadamente 5 dB. más, pero esta superficie no soportaría la lluvia ni el viento por lo que sería inconveniente para funcionar un tiempo prolongado a la intemperie. El único material que conseguimos en el mercado con grosor inferior a 0.5 mm fueron planchas de aluminio de 0.4 mm sin perforar, con este material se hizo la superficie reflectora pero teniendo en cuenta que los pedazos de aluminio no se sobrepongan, con esta superficie se logró una eficiencia de aproximadamente 51.88%.

El costo aproximado de la antena en las condiciones que queda funcionando se detalla a continuación:

- Para el reflector:

4m de perfil de aluminio (tipo I)	S/. 60.000
12m de perfil de aluminio tipo E	96.000
2m ² de aluminio de 0.4 mm de espesor	57.000
0.16m ² de plancha de hierro de 1/8"	40.000
Angulo de hierro de 1" x 1/8"	20.000

- Para la base o soporte

1.5m de tubo de hierro de 2 y 1/2"	50.000
441cm ² de plancha de hierro de 3/8"	25.000
900 cm ² de plancha de hierro de 1/4"	25.000
3m de ángulo de hierro de 2" X 1/4"	48.000
30 cm de varilla de 3/8"	15.000

- Soporte del alimentador

2m de tubo de aluminio de 1/2"	19.700
1 visagra	5.000

- Varios

Pernos niquelados de varios tamaños	70.000
1 lb de alambre de acero	2.700
1 litro de pintura de aluminio	36.500
1 litro de pintura negra	15.000
4 pernos de anclaje	40.000

- Otros

Total	S/. 680.900
-------	-------------

5.4.1 CALCULO DE LAS DIMENSIONES DE LOS SEGMENTOS DE LA SUPERFICIE DEL REFLECTOR

Una vez construido el soporte del reflector, nos interesa calcular las dimensiones de los pedazos de material que se van a colocar en cada parte, para esto, dado que se trata de una superficie paraboloides, nos ayudamos del cálculo integral para conocer la longitud de los brazos (L).

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(y)^2} dy$$

En donde

$f'(y)$ = derivada de la ecuación de la parábola

$$f(y) = y^2/4f = y^2/4(42) = y^2/168$$

$$f'(y) = 2y/4f = 2y/4(42) = y/84$$

Reemplazando en la ecuación de la longitud:

$$L = \int_{7,5}^{60} \sqrt{1 + \frac{y^2}{84^2}} dy$$

Los límites de la integral están dados por las respectivas proyecciones en el eje y que corresponden a los radios de las circunferencias interna (de sujeción central) y externa de la parábola.

$$L = \frac{1}{84} \int_{7,5}^{60} \sqrt{7065 + y^2} dy$$

Resolviendo esta integral tenemos:

$$L = \frac{1}{84} \left[\frac{y}{2} \sqrt{7056 + y^2} + \frac{7056}{2} \ln \left(y + \sqrt{7056 + y^2} \right) \right]_{7,5}^{60}$$
$$L = 57,26 \text{ cm.}$$

La longitud total desde el centro de la parábola, utilizando el mismo procedimiento, es de $L_p = 64.71$ cm.

Para calcular el segmento de arco superior, sabemos que el radio de la circunferencia es de 60cm (mitad del diámetro de la parábola), el arco será de $2\pi r/n$, donde n es el número de divisiones que en nuestro caso es de 12; por lo tanto, el arco será de 31.42cm

Procedemos a calcular los puntos correspondientes en el eje x de los límites de la integral, para luego sacar los radios.

Para 60cm:

$$x = y^2/168 = 60^2/168 = 21.43 \text{ cm}$$

Entonces el radio será:

$$r_p = \sqrt{60^2 + 21.43^2} = 63.71 \text{ cm}$$

Para el círculo interno en el vértice de la parábola, el

radio será:

$$x = y^2/168 = 7.5^2/168 = 0.33\text{cm}$$

$$r_c = 7.51 \text{ cm}$$

Longitud del arco: 3.93 cm

Sabemos que el ángulo interno es de $360/12 = 30^\circ$, entonces calculamos la longitud de las cuerdas.

$$\text{Cuerda exterior} = 64.71 \text{ sen}30^\circ/\text{sen}75^\circ = 33.5 \text{ cm.}$$

$$\text{Cuerda interior} = 7.51 \text{ sen}30^\circ/\text{sen}75 = 3.89 \text{ cm}$$

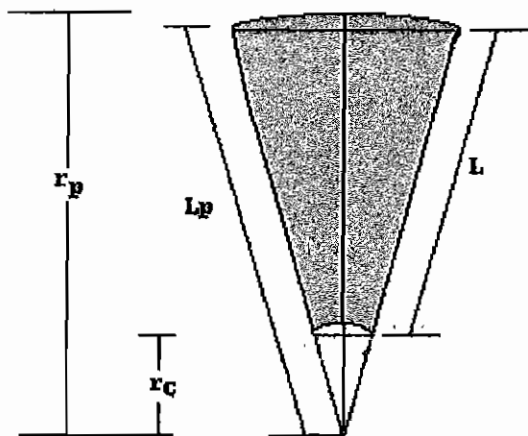


Figura 5.3 Segmento de la superficie de la parábola

5.5 MEDICIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA ANTENA DISEÑADA

Una vez terminada la construcción de la antena, medimos los parámetros que nos permitieron determinar la calidad del diseño y construcción. Para esto utilizamos los equipos disponibles en el Laboratorio de microondas de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, que fueron los siguientes:

- Modulador fuente Gunn
- Bocinas exponenciales
- Medidor de SWR
- Diodo pin
- Diodo gunn
- Oscilador
- Aislador

Con la fuente moduladora, el oscilador, el diodo pin, el aislador y la bocina formamos un generador de microondas. La fuente genera la señal modulante, mientras que el oscilador genera la portadora. El diodo pin se encarga de mezclar las señales y el aislador impide el ingreso de señales captadas por la bocina a la fuente. En el otro lado la antena de recepción en primer lugar estaba constituido por la bocina exponencial, luego se incorporaba el reflector parabólico, el resto del equipo que se usaba era el mismo en los dos casos un diodo detector que envía la señal al medidor de SWR.

Con estos equipos se midió la ganancia de la antena, ancho del lóbulo principal y los lóbulos laterales.

5.5.1 MÉTODO DE MEDIDA

El enlace utilizado es el que se muestra en la figura 5.4, la frecuencia de trabajo fue de 10.25 GHz, los equipos

estuvieron separados 8 metros. Como bocina de recepción se utilizó la bocina Narda modelo 640 de 8.20 - 12.4 Ghz. que tiene una ganancia de 16.5 dB.

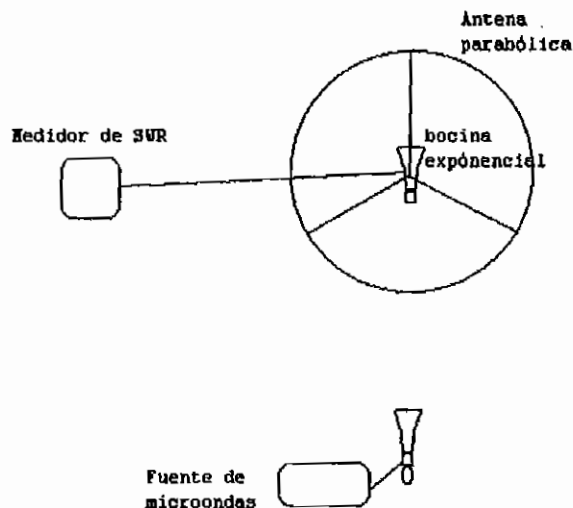


Figura 5.4 **Enlace de microondas usado.**

5.5.2 GANANCIA DE LA ANTENA

Lo primero que determinamos fue la cantidad de energía emitida por el generador de microondas que era recibida por la bocina exponencial, para esto ubicamos las aperturas de las bocinas frente a frente, el segundo paso era determinar que cantidad de energía aumentaba cuando la bocina ubicada en el foco de la antena era puesta de frente al reflector, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- Cuando la superficie reflectora era de malla:

51.6 dB con las bocinas frente a frente

42 dB con la bocina como alimentador de la parábola.

Resultando una ganancia de $56.1 - 42 = 14.1$ dB. A este valor se debe agregar la ganancia de la bocina que es de 16.5 dB, entonces tenemos:

$$G = 14.1 + 16.5 = 30.6 \text{ dB}$$

- Cuando se utilizó el soporte de manera de tal manera que la bocina exponencial se ubique en el foco de la parábola:
 - 51.6 dB con las bocinas frente a frente
 - 36 dB con la bocina como alimentador de la parábola; con lo que se obtuvo una ganancia de 32.1 dB.

Al calcular la eficiencia de la antena:

$$G = \text{inv log } 3.21 = 1621.81$$

$$G = \text{eficiencia} \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2$$

$$\text{eficiencia} = G \left(\frac{\lambda}{\pi D} \right)^2$$

$$\lambda = \frac{c}{f}; f = 10.25 \text{ GHz}, c = 300.000 \text{ Km/s}$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}}{1.025 \cdot 10^{10} \text{ 1/s}} = 2.92 \text{ cm}$$

$$\text{eficiencia} = 1621.81 \left(\frac{2.92}{3.14 \cdot 115} \right)^2$$

$$\text{eficiencia} = 0.106 = 10.6\%.$$

Debido a esta baja eficiencia vimos la necesidad de cambiar la superficie reflectora, con la que obtuvimos:

- Superficie reflectora de prueba (cartón forrado de papel aluminio):

51.6 dB con las bocinas frente a frente

31 dB con la bocina como alimentador de la parábola.

Por lo tanto una ganancia de $21.6 + 16.5 = 38.1$ dB, y una eficiencia de apertura de

$$G = \text{inv log } 3.81 = 6456.54$$

$$G = \text{eficiencia} \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2$$

$$\text{eficiencia} = G \left(\frac{\lambda}{\pi D} \right)^2$$

$$\text{eficiencia} = 6456.54 \left(\frac{2.92}{3.14 * 115} \right)^2$$

$$\text{eficiencia} = 0.422 = 42.2\%.$$

Con lo que se obtuvo una mejora significativa; esto nos llevó a decidir utilizar una nueva superficie reflectora que al mismo tiempo nos permita aumentar la eficiencia y ser resistente a la intemperie.

- Con la superficie de aluminio de 0.4 mm de espesor
51.6 dB con las bocinas frente a frente
29.1 dB con la bocina como alimentador de la parábola.

Calculando la ganancia del reflector para este último dato tenemos:

$$\text{Aporte del reflector} = 51.6\text{dB} - 29.1\text{dB} = 22.5\text{dB}$$

$$G = 22.5 + 16.5 \text{ dB} = 39 \text{ dB}$$

$$10 \log G = 39 \text{ dB}$$

$$G = \text{inv log } 3.9 = 7943.28$$

$$\text{eficiencia} = G \left(\frac{\lambda}{\pi D} \right)^2$$

$$\lambda = 2.92 \text{ cm}$$

$$\text{eficiencia} = 7943.28 \left(\frac{2.92}{3.14 * 115} \right)^2$$

$$\text{eficiencia} = 0.5188 = 51.88\%$$

5.5.3 ANCHO DEL RAYO Y LOBULOS LATERALES

Utilizamos el mismo enlace anterior pero en este caso con movimientos de la antena en azimut de manera de obtener los puntos de media potencia. Las medidas nos indican que estos puntos no son simétricos, esto se puede deber a que la antena esta junto a una pared y esta puede haber provocado variaciones en las lecturas.

Los valores obtenidos fueron: 1.1° para el punto de media potencia para el lado izquierdo de la antena, y 1.09° por el lado derecho, tomando como frente la parte reflectora de la antena. Entonces el ancho del rayo es de 2.19° .

En cuanto a los lóbulos laterales, se obtuvo el máximo del primer lóbulo lateral izquierdo a 3.89° con un nivel de -24 dB con respecto al máximo del lóbulo principal, el mínimo de este tenía un nivel de -29 dB. El máximo del primer lóbulo lateral derecho está a 4.44° con un nivel de -22 dB y su

mínimo tiene un nivel de -28 dB respecto al máximo.

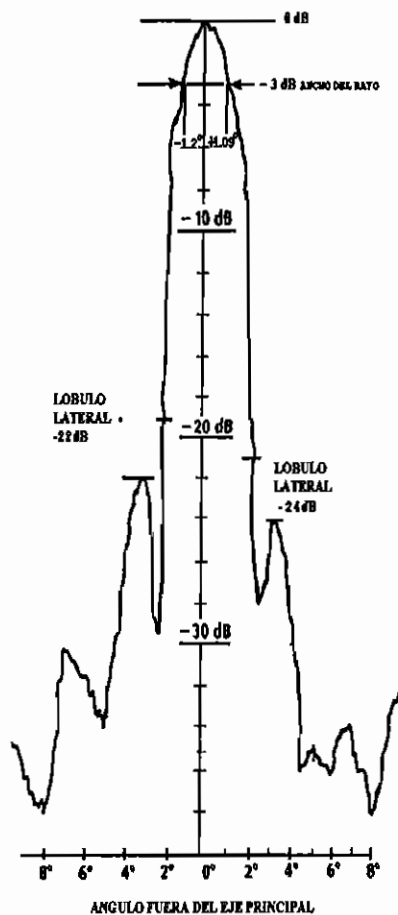


Figura 5. **Ancho del rayo y lóbulos laterales medidos.**

El resto del gráfico es una aproximación ya que no se pudieron tomar datos debido a los equipos usados.

Para comprobar el desempeño de la antena captamos la señal de Direct TV, para lo cual utilizamos el alimentador y el block de esta empresa. La señal fue nítida garantizando con esto que la antena estaba funcionando correctamente.

CAPITULO VI:
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. CONCLUSIONES

- La principal dificultad que encontramos durante la construcción de la antena fue lograr que la superficie reflectora se ajustará a la forma parabólica ideal, aquí influyeron algunos factores como nuestra inexperiencia en este tipo de trabajo, la falta de materiales adecuados en el mercado y también que no teníamos herramientas apropiadas. Pero hay que tomar en cuenta que las antenas comerciales tienen una eficiencia de alrededor del 60%, claro que en esto influye la sombra del alimentador sobre el disco, pero también tiene que ver las imperfecciones de la superficie reflectora, lo que nos indica que conseguir la curva no es tarea fácil.

- Es necesario que los mecanismos de ajuste de la antena tanto en azimut como en elevación permitan realizar movimientos milimétricos, ya que variaciones de posición de milímetros en la antena representan kilómetros en el espacio. Si no se garantiza esto es muy difícil captar la señal del satélite deseado.

- Variaciones de posición del foco casi imperceptibles hacen que se degrade en algunos dB las señales, por lo

que también constituye crítico no solo lograr la correcta ubicación del alimentador en el foco de la parábola, sino que además el soporte debe garantizar que permanecerá en este sitio a pesar de los fuertes vientos.

- Conforme se fue mejorando tanto el ensamblaje como la superficie reflectora mismo, se vio que la eficiencia de la antena también se incrementó. En todo caso, como en un inicio trabajamos con malla, se podría pensar que los resultados hubieran mejorado al colocar la malla sin cruces entre los gajos.

- El cambio de malla a superficie llena (material sin agujeros) del reflector se realizó porque la malla que conseguimos en el mercado presentaba pequeños salientes, además era preferible que exista separación entre pedazos antes que superposición (cruces). Sin embargo, la separación no debe ser exagerada puesto que también perjudica en el desempeño de la antena.

6.2 RECOMENDACIONES

- Para complementar el presente trabajo, se podría realizar un estudio y diseño de un L.N.B (por sus siglas en inglés Low Noise Block) ya que no resulta fácil conseguir información técnica de este tipo de dispositivo en el mercado.

- Para mejorar la antena fabricada, sería necesario que para la obtención de los gajos, se fabrique un molde que sea lo más perfecto posible, tanto en la curva de la parábola como en la forma circular del borde. Sería bueno que este molde sea de un material fuerte de manera que permita realizar un premoldeo de los gajos antes de ensamblarlos.

- Se podría optimizar el ensamblaje de la antena si en lugar de tener los soportes parabólicos armados y luego poner la superficie reflectora, se tienen los pedazos enteros, es decir soportes y superficie incorporados, de esta manera se podría tener mayor facilidad en el armado, se utilizaría menor herramienta para el caso de trabajo en el campo, y también se conseguiría que no exista separaciones entre ellos, ya que en estas frecuencias la separación es crítica.

- Para la superficie reflectora de una antena parabólica, es mejor utilizar metal perforado o malla totalmente lisa, caso contrario no se obtendrán buenos resultados, hay que tomar en cuenta que los agujeros ya sea del metal perforado o de la malla no deben exceder $1/10$ de la longitud de onda de trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1. Kraus, John D., Antennas, McGraw-Hill, New York, 1950, 553p.
2. Balanis, Constantine A., Antenna Theory Analysis and Design, Harper & Row Publishers, New York, 1980, 789p.
3. Fink D.G., Electronics Enginners Handbook, McGraw-Hill, New York, 1975.
4. Johnson R.C. Jasik H., Antenna Enginering Handbook, McGraw-Hill, New York, 1976.
5. Schelkunoff S.A., Electromagnetics fields, Blaidfell, 1963.
6. Braun, E.H., Some Data for the Desing of Electromagnetic Horns, IRE Trans. Antennas Propag. Vol.AP-4, No.1, Jan 1956.
7. Bailey M.C., Nasa Langley Research Center.
8. Silver S. Microwave Antenna Theory and Desing, Dover Publications Inc., New York 1965, 624p
9. Love A.W., Electromagnetic Horn Antennas, IEEE Press, New York, 1976
10. COMITÉ CONSULTIVO INTERNACIONAL DE RADIOCOMUNICACION, Manual de Telecomunicaciones por satélite Servicio fijo por satélite, Unión Internacional de Telecomunicaciones, Ginebra
11. Hernando Rábanos J.M., Transmisión por radio, Centro de estudios Ramón Areces, Madrid, 1993.

12. Cevallos V. Mario, A mixer preamplifier for a satellite communication ground station receiver, Philips International Institute of technological studies. 1976.
13. Tomasi Wayne, Sistemas de Comunicaciones Electrónicas, Prentice Hall Hispanoamericana. S.A., 1996.
14. Egas Carlos, Comunicaciones por Satélite, folleto EPN, 1996.
15. Leithold L., El Cálculo con Geometría Analítica, Harla S.A., 1972

ANEXOS

ANEXO 1:

ECUACIONES ADICIONALES

$$U = B_o F(\theta, \phi) \approx \frac{1}{2\eta} \left[|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2 \right] \quad \text{Ec. 10.18}$$

$$U_{\max} = B_o F(\theta, \phi) |_{\max} = B_o F_{\max}(\theta, \phi) \quad \text{Ec. 10.19}$$

$$P_{\text{rad}} = \iiint U(\theta, \phi) \delta\Omega = B_o \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin\theta \delta\theta \delta\phi \quad \text{Ec. 10.20}$$

$$D_o = (\theta, \phi) = 4\pi \frac{F(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin\theta \delta\theta \delta\phi} \quad \text{Ec. 10.21}$$

$$D_o = 4\pi \frac{F(\theta, \phi) |_{\max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin\theta \delta\theta \delta\phi} \quad \text{Ec. 10.22}$$

$$A_{\text{em}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_o \quad \text{Ec. 10.99}$$

Ecuaciones 11.10

$$E_r \cong 0 \quad (\text{a})$$

$$E_\theta \cong -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \quad (\text{b})$$

$$E_\phi \cong +\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (L_\theta - \eta N_\phi) \quad (\text{c})$$

$$H_r \cong 0 \quad (\text{d})$$

$$H_\theta \cong \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left(N_\phi - \frac{L_\theta}{\eta} \right) \quad (\text{e})$$

$$H_\phi \cong -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left(N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta} \right) \quad (\text{f})$$

Ecuaciones 11.12

$$N_\theta = \iint_S \left[J_x \cos\theta \cos\phi + J_y \cos\theta \sin\phi - J_z \sin\theta \right] e^{+jkr' \cos\psi} \delta s' \quad (\text{a})$$

$$N_\phi = \iint_S \left[-J_x \sin\phi + J_y \cos\phi \right] e^{+jkr' \cos\psi} \delta s' \quad (\text{b})$$

$$L_\theta = \iint_S \left[M_x \cos\theta + M_y \cos\theta \sin\phi - M_z \sin\theta \right] e^{+jkr' \cos\psi} \delta s' \quad (\text{c})$$

$$L_\phi = \iint_S \left[-M_x \sin\phi + M_y \cos\phi \right] e^{+jkr' \cos\psi} \delta s' \quad (\text{d})$$

Ecuación 11.13

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{2} R_o \left[(a_\theta E_\theta + a_\phi E_\phi) X (a_\theta H_\theta + a_\phi H_\phi) \right] = \frac{1}{2\eta} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2)$$

Ecuación 11.13a

$$U_n(\theta, \phi) = \frac{1}{2\eta} (|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2) = B_o F(\theta, \phi)$$

ANEXO 2:

INTEGRALES DE FRESNEL Y FUNCIONES DE BESSEL

Appendix IV Fresnel Integrals

$$C_0(x) = \int_0^x \frac{\cos(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau \quad (IV-1)$$

$$S_0(x) = \int_0^x \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau \quad (IV-2)$$

$$C(x) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \quad (IV-3)$$

$$S(x) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \quad (IV-4)$$

$$C_1(x) = \int_1^\infty \cos(\tau^2) d\tau \quad (IV-5)$$

$$S_1(x) = \int_1^\infty \sin(\tau^2) d\tau \quad (IV-6)$$

$$C(x) - jS(x) = \int_0^1 e^{-j(\pi/2)\tau^2} d\tau = \int_0^{(\pi/2)x^2} \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau$$

$$C(x) - jS(x) = C_0\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) - jS_0\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \quad (IV-7)$$

$$C_1(x) - jS_1(x) = \int_1^\infty e^{-j\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau$$

$$C_1(x) - jS_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-j\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}} d\tau \right\}$$

$$C_1(x) - jS_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right] - [C_0(x^2) - jS_0(x^2)] \right\}$$

$$C_1(x) - jS_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C_0(x^2) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S_0(x^2) \right] \right\} \quad (IV-8)$$

x	C ₁ (x)	S ₁ (x)	C(x)	S(x)
0.0	0.62666	0.62666	0.0	0.0
0.1	0.52666	0.62632	0.10000	0.00052
0.2	0.42669	0.62399	0.19992	0.00419
0.3	0.32690	0.61766	0.29940	0.01412
0.4	0.22768	0.60536	0.39748	0.03336
0.5	0.12977	0.58518	0.49234	0.06473
0.6	0.03439	0.55532	0.58110	0.11054
0.7	-0.05672	0.51427	0.65965	0.17214
0.8	-0.14119	0.46092	0.72284	0.24934
0.9	-0.21606	0.39481	0.76482	0.33978
1.0	-0.27787	0.31639	0.77989	0.43826
1.1	-0.32285	0.22728	0.76381	0.53650
1.2	-0.34729	0.13054	0.71544	0.62340
1.3	-0.34803	0.03081	0.63855	0.68633
1.4	-0.32312	-0.06573	0.54310	0.71353
1.5	-0.27253	-0.15158	0.44526	0.69751
1.6	-0.19886	-0.21861	0.36546	0.63889
1.7	-0.10790	-0.25905	0.32383	0.54920
1.8	-0.00871	-0.26682	0.33363	0.45094
1.9	0.08680	-0.23918	0.39447	0.37335
2.0	0.16520	-0.17812	0.48825	0.34342
2.1	0.21359	-0.09141	0.58156	0.37427
2.2	0.22242	0.00743	0.63629	0.45570
2.3	0.18833	0.10054	0.62656	0.55315
2.4	0.11650	0.16879	0.55496	0.61969
2.5	0.02135	0.19614	0.45742	0.61918
2.6	-0.07518	0.17454	0.38894	0.54999
2.7	-0.14816	0.10789	0.39249	0.45292
2.8	-0.17646	0.01329	0.46749	0.39153
2.9	-0.15021	-0.08181	0.56237	0.41014
3.0	-0.07621	-0.14690	0.60572	0.49631
3.1	0.02152	-0.15883	0.56160	0.58181
3.2	0.10791	-0.11181	0.46632	0.59335
3.3	0.14907	-0.02260	0.40570	0.51929
3.4	0.12691	0.07301	0.43845	0.42965
3.5	0.04965	0.13335	0.53257	0.41525
3.6	-0.04819	0.12973	0.58795	0.49231
3.7	-0.11929	0.06258	0.54195	0.57498
3.8	-0.12649	-0.03483	0.44810	0.56562
3.9	-0.06469	-0.11030	0.42233	0.47521
4.0	0.03219	-0.12048	0.49842	0.42052
4.1	0.10690	-0.05815	0.57369	0.47580
4.2	0.11228	0.03885	0.54172	0.56320
4.3	0.04374	0.10751	0.44944	0.55400
4.4	-0.05287	0.10038	0.43833	0.46227
4.5	-0.10884	0.02149	0.52602	0.43427
4.6	-0.08188	-0.07126	0.56724	0.51619
4.7	0.00810	-0.10594	0.49143	0.56715
4.8	0.08905	-0.05381	0.43380	0.49675
4.9	0.09277	0.04224	0.50016	0.43507
5.0	0.01519	0.09874	0.56363	0.49919

x	C ₁ (x)	S ₁ (x)	C(x)	S(x)
5.1	-0.07411	0.06405	0.49979	0.56239
5.2	-0.09125	-0.03004	0.43889	0.49688
5.3	-0.01892	-0.09235	0.50778	0.44047
5.4	0.07063	-0.05976	0.55723	0.51403
5.5	0.08406	0.03440	0.47843	0.55369
5.6	0.00641	0.08900	0.45171	0.47004
5.7	-0.07642	0.04296	0.53846	0.45953
5.8	-0.06919	-0.05135	0.52984	0.54604
5.9	0.01998	-0.08231	0.44859	0.51633
6.0	0.08245	-0.01181	0.49953	0.44696
6.1	0.03946	0.07180	0.54950	0.51647
6.2	-0.05363	0.06018	0.46761	0.53982
6.3	-0.07284	-0.03144	0.47600	0.45555
6.4	0.00835	-0.07765	0.54960	0.49649
6.5	0.07574	-0.01326	0.48161	0.54538
6.6	0.03183	0.06872	0.46899	0.46307
6.7	-0.05828	0.04658	0.54674	0.49150
6.8	-0.05734	-0.04600	0.48307	0.54364
6.9	0.03317	-0.06440	0.47322	0.46244
7.0	0.06832	0.02077	0.54547	0.49970
7.1	-0.00944	0.06977	0.47332	0.53602
7.2	-0.06943	0.00041	0.48874	0.45725
7.3	-0.00864	-0.06793	0.53927	0.51894
7.4	0.06582	-0.01521	0.46010	0.51607
7.5	0.02018	0.06353	0.51601	0.46070
7.6	-0.06137	0.02367	0.51564	0.53885
7.7	-0.02580	-0.05958	0.46278	0.48202
7.8	0.05828	-0.02668	0.53947	0.48964
7.9	0.02638	0.05752	0.47598	0.53235
8.0	-0.05730	0.02494	0.49980	0.46021
8.1	-0.02238	-0.05752	0.52275	0.53204
8.2	0.05803	-0.01870	0.46384	0.48589
8.3	0.01387	0.05861	0.53775	0.49323
8.4	-0.05899	0.00789	0.47092	0.52429
8.5	-0.00080	-0.05881	0.51417	0.46534
8.6	0.05767	0.00729	0.50249	0.53693
8.7	-0.01616	0.05515	0.48274	0.46774
8.8	-0.05079	-0.02545	0.52797	0.52294
8.9	0.03461	-0.04425	0.46612	0.48856
9.0	0.03526	0.04293	0.53537	0.49985
9.1	-0.04951	0.02381	0.46661	0.51042
9.2	-0.01021	-0.05338	0.46291	0.48135
9.3	0.05354	0.00485	0.47628	0.52467
9.4	-0.02020	0.04920	0.51803	0.47134
9.5	-0.03995	-0.03426	0.48729	0.53100
9.6	0.04513	-0.02599	0.50813	0.46786
9.7	0.00837	0.05086	0.49549	0.53250
9.8	-0.04983	-0.01094	0.50192	0.46758
9.9	-0.02916	-0.04124	0.49961	0.53215

x	$C_1(x)$	$S_1(x)$	$C(x)$	$S(x)$
10.0	0.02554	0.04298	0.49989	0.46817
10.1	-0.04927	0.00478	0.49961	0.53151
10.2	0.01738	-0.04583	0.50186	0.46885
10.3	0.03233	0.03621	0.49575	0.53061
10.4	-0.04681	0.01094	0.50751	0.47033
10.5	0.01360	-0.04563	0.48849	0.52804
10.6	0.03187	0.03477	0.51601	0.47460
10.7	-0.04595	0.00848	0.47936	0.52143
10.8	0.01789	-0.04270	0.52484	0.48413
10.9	0.02494	0.03850	0.47211	0.50867
11.0	-0.04541	-0.00202	0.52894	0.49991
11.1	0.02845	-0.03492	0.47284	0.49079
11.2	0.01008	0.04349	0.52195	0.51805
11.3	-0.03981	-0.01930	0.48675	0.47514
11.4	0.04005	-0.01789	0.50183	0.52786
11.5	-0.01282	0.04155	0.51052	0.47440
11.6	-0.02188	-0.03714	0.47890	0.51755
11.7	0.04164	0.00962	0.52679	0.49525
11.8	-0.03580	0.02267	0.47489	0.49013
11.9	0.00977	-0.04086	0.51544	0.52184
12.0	0.02059	0.03622	0.49993	0.47347
12.1	-0.03919	-0.01309	0.48426	0.52108
12.2	0.03792	-0.01555	0.52525	0.49345
12.3	-0.01914	0.03586	0.47673	0.48867
12.4	-0.00728	-0.03966	0.50951	0.52384
12.5	0.02960	0.02691	0.50969	0.47645
12.6	-0.03946	-0.00421	0.47653	0.50936
12.7	0.03445	-0.01906	0.52253	0.51097
12.8	-0.01783	0.03475	0.49376	0.47593
12.9	-0.00377	-0.03857	0.48523	0.51977
13.0	0.02325	0.03064	0.52449	0.49994
13.1	-0.03530	-0.01452	0.48598	0.48015
13.2	0.03760	-0.00459	0.49117	0.52244
13.3	-0.03075	0.02163	0.52357	0.49583
13.4	0.01744	-0.03299	0.48482	0.48173
13.5	-0.00129	0.03701	0.49103	0.52180
13.6	-0.01421	-0.03391	0.52336	0.49848
13.7	0.02639	0.02521	0.48908	0.47949
13.8	-0.03377	-0.01313	0.48534	0.51781
13.9	0.03597	-0.00002	0.52168	0.50737
14.0	-0.03352	0.01232	0.49996	0.47726
14.1	0.02749	-0.02240	0.47844	0.50668
14.2	-0.01916	0.02954	0.51205	0.51890
14.3	0.00979	-0.03357	0.51546	0.48398
14.4	-0.00043	0.03472	0.48131	0.48819
14.5	-0.00817	-0.03350	0.49164	0.52030
14.6	0.01553	0.03052	0.52113	0.50538
14.7	-0.02145	-0.02640	0.50301	0.47856
14.8	0.02591	0.02168	0.47853	0.49869
14.9	-0.02903	-0.01683	0.49971	0.52136
15.0	0.03103	0.01217	0.52122	0.49926

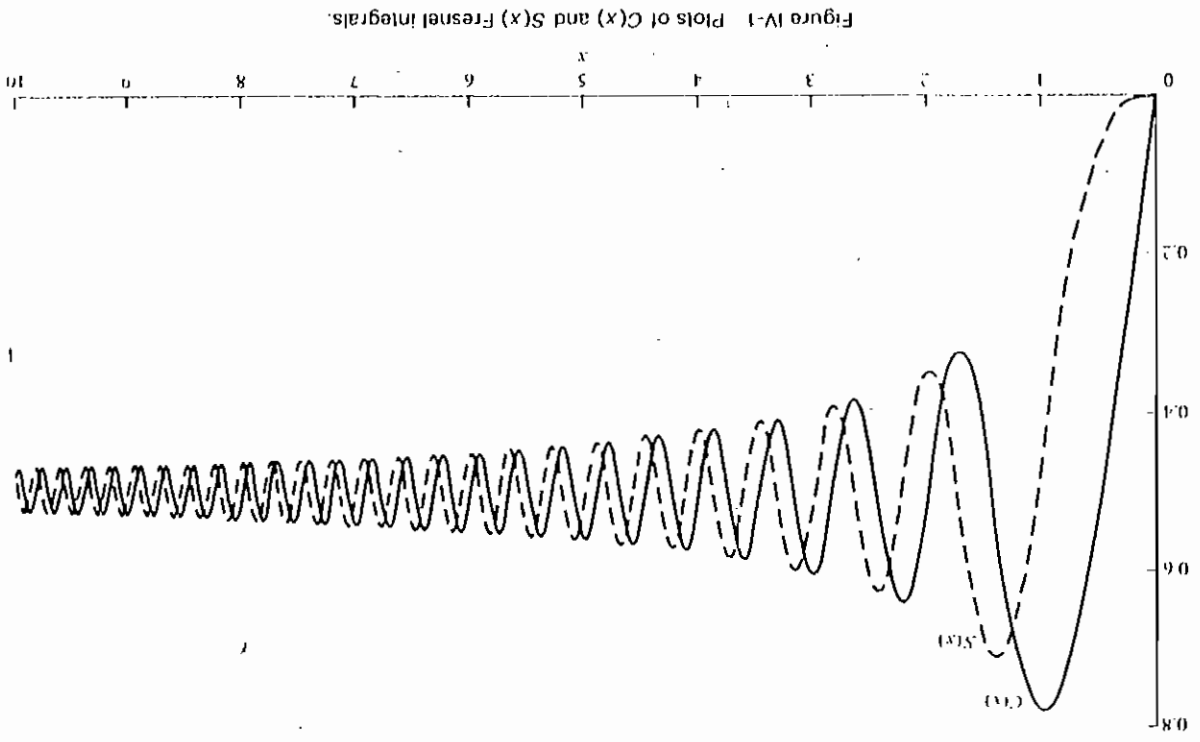


Figure IV-1 Plots of $C(x)$ and $S(x)$ Fresnel Integrals.

Appendix V Bessel Functions

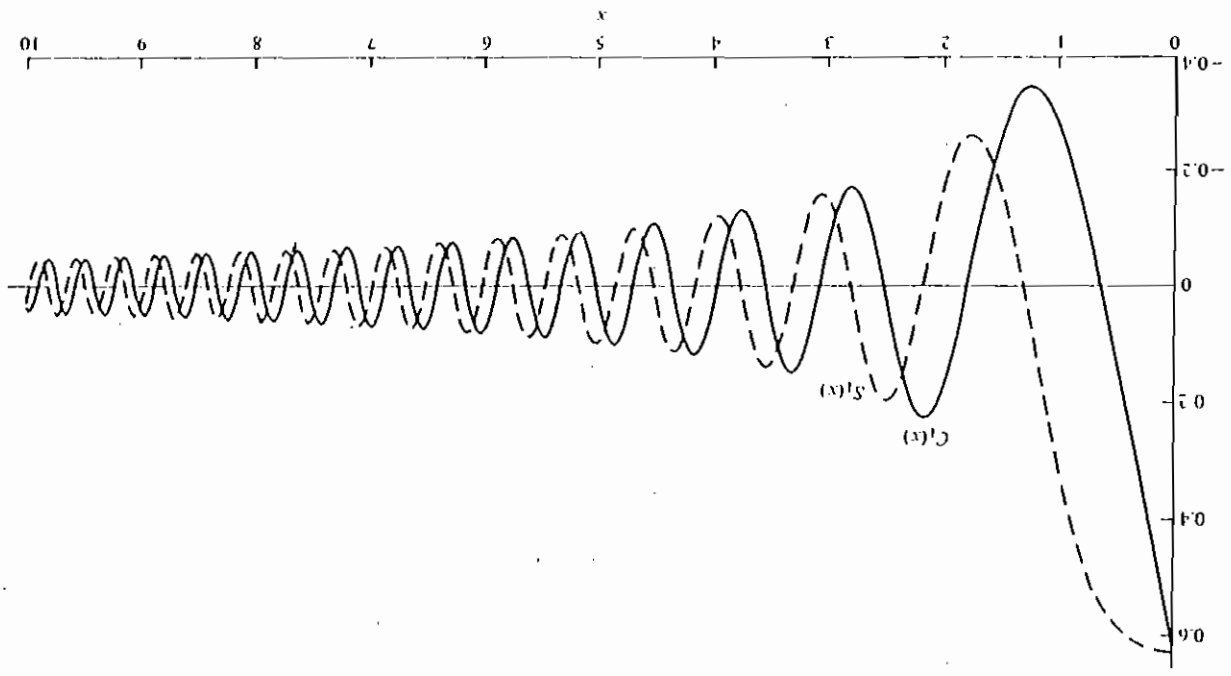


Figure IV-2 Plots of $C_1(x)$ and $S_1(x)$ Fresnel integrals

Bessel's equation can be written as

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{V-1}$$

Using the method of Frobenius, we can write its solutions as

$$y(x) = A_1 J_p(x) + B_1 J_{-p}(x), \quad p = 0 \text{ or integer} \tag{V-2}$$

or

$$y(x) = A_2 J_n(x) + B_2 Y_n(x), \quad p = n = 0 \text{ or integer} \tag{V-3}$$

where

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+p}}{m!(m+p)!} \tag{V-4}$$

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m-p}}{m!(m-p)!} \tag{V-5}$$

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \tag{V-6}$$

$$m! = \Gamma(m+1) \tag{V-7}$$

$J_p(x)$ is referred to as the Bessel function of the first kind of order p . $Y_p(x)$ as the Bessel function of the second kind of order p , and $\Gamma(x)$ as the gamma function.

When $p = n = \text{integer}$, using (V-5) and (V-7) it can be shown that

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{V-8}$$

and no longer are the two Bessel functions independent of each other. Therefore a second solution is required and it is given by (V-3). It can also be shown that

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} Y_p(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \tag{V-9}$$

When the argument of the Bessel function is negative and $p = n$, using (V-4) leads to

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \tag{V-10}$$

In many applications, Bessel functions of small and large arguments are required. Using asymptotic methods, it can be shown that

$$J_0(x) \approx 1 \tag{V-11}$$

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) \quad x \rightarrow 0$$

$$\gamma = 1.781$$

$$J_p(x) \approx \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^p \quad x \rightarrow 0$$

$$Y_p(x) \approx -\frac{(p-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^p \quad p > 0$$

and

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) \quad x \rightarrow \infty$$

$$Y_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right) \quad x \rightarrow \infty$$

For wave propagation it is often convenient to introduce Hankel functions defined as

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + jY_p(x) \tag{V-14}$$

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - jY_p(x) \tag{V-15}$$

where $H_p^{(1)}(x)$ is the Hankel function of the first kind of order p and $H_p^{(2)}(x)$ is the Hankel function of the second kind of order p . For large arguments

$$H_p^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j(x - p(\pi/2) - \pi/4)}, \quad x \rightarrow \infty \tag{V-16}$$

$$H_p^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j(x - p(\pi/2) - \pi/4)}, \quad x \rightarrow \infty \tag{V-17}$$

A derivative can be taken using either

$$\frac{d}{dx} [Z_p(\alpha x)] = \alpha Z_{p-1}(\alpha x) - \frac{p}{x} Z_p(\alpha x) \tag{V-18}$$

or

$$\frac{d}{dx} [Z_p(\alpha x)] = -\alpha Z_{p+1}(\alpha x) + \frac{p}{x} Z_p(\alpha x) \tag{V-19}$$

where Z_p can be a Bessel function (J_p, Y_p) or a Hankel function [$H_p^{(1)}, H_p^{(2)}$].

A useful identity relating Bessel functions and their derivatives is given by

$$J_p(x) Y_p'(x) - Y_p(x) J_p'(x) = \frac{2}{\pi x} \tag{V-20}$$

and it is referred to as the Wronskian. The prime (') indicates a derivative. Also

$$J_p(x) J_{-p}'(x) - J_{-p}(x) J_p'(x) = -\frac{2}{\pi x} \sin(p\pi) \tag{V-21}$$

Some useful integrals of Bessel functions are

$$\int x^{p-1} J_p(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} x^{p+1} J_{p+1}(\alpha x) + C \quad (\text{V-22})$$

$$\int x^{1-p} J_p(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} x^{1-p} J_{p-1}(\alpha x) + C \quad (\text{V-23})$$

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C \quad (\text{V-24})$$

$$\int x^5 J_1(x) dx = x^6 J_2(x) - 4x^5 J_3(x) + 8x^4 J_4(x) + C \quad (\text{V-25})$$

$$\int J_3(x) dx = -J_2(x) - \frac{2}{x} J_1(x) + C \quad (\text{V-26})$$

$$\int x J_1(x) dx = -x J_0(x) + \int J_0(x) dx + C \quad (\text{V-27})$$

$$\int x^{-1} J_1(x) dx = -J_1(x) + \int J_0(x) dx + C \quad (\text{V-28})$$

$$\int J_2(x) dx = -2J_1(x) + \int J_0(x) dx + C \quad (\text{V-29})$$

$$\int x^m J_n(x) dx = x^m J_{n+1}(x) - (m-n-1) \int x^{m-1} J_{n+1}(x) dx \quad (\text{V-30})$$

$$\int x^m J_n(x) dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1) \int x^{m-1} J_{n-1}(x) dx \quad (\text{V-31})$$

$$J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (\text{V-32})$$

$$\frac{1}{x} J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta \quad (\text{V-33})$$

$$J_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) \cos 2\theta d\theta \quad (\text{V-34})$$

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} e^{jn\phi} d\phi \quad (\text{V-35})$$

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi) e^{ix \cos \phi} d\phi \quad (\text{V-36})$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \phi - n\phi) d\phi \quad (\text{V-37})$$

$$J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \phi) \cos(2n\phi) d\phi \quad (\text{V-38})$$

$$J_{2n}(x) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \phi) \cos(2n\phi) d\phi \quad (\text{V-39})$$

The integrals

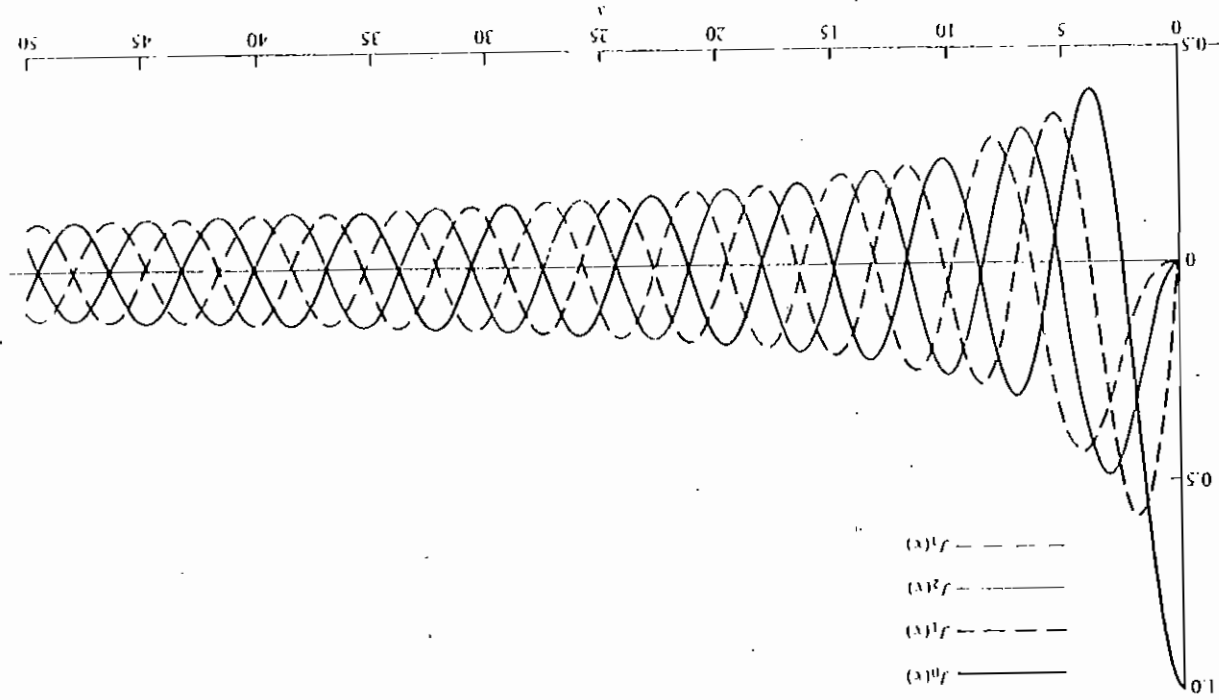
$$\int_0^x J_0(\tau) d\tau \quad \text{and} \quad \int_0^x Y_0(\tau) d\tau \quad (\text{V-40})$$

often appear in solutions of problems but cannot be integrated in closed form. Graphs and tables for each, obtained using numerical techniques, are included.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	1.00000	0.0	$-\infty$	$-\infty$
0.1	0.99750	0.04994	-1.53424	-6.45895
0.2	0.99003	0.09950	-1.08110	-3.32382
0.3	0.97763	0.14832	-0.60727	-2.29310
0.4	0.96040	0.19503	-0.60602	-1.78087
0.5	0.93847	0.24227	-0.44452	-1.47147
0.6	0.91201	0.28670	-0.30851	-1.26039
0.7	0.88120	0.32900	-0.19056	-1.10325
0.8	0.84629	0.36884	-0.08580	-0.97814
0.9	0.80752	0.40595	0.00563	-0.87313
1.0	0.76520	0.44005	0.08826	-0.78121
1.1	0.71962	0.47090	0.16216	-0.69812
1.2	0.67113	0.49829	0.22808	-0.62114
1.3	0.62009	0.52202	0.28654	-0.54852
1.4	0.56686	0.54195	0.33789	-0.47915
1.5	0.51183	0.55794	0.38245	-0.41231
1.6	0.45540	0.56990	0.42043	-0.34758
1.7	0.39799	0.57777	0.45203	-0.28473
1.8	0.33999	0.58152	0.47743	-0.22366
1.9	0.28182	0.58116	0.49682	-0.16441
2.0	0.22389	0.57673	0.51038	-0.10703
2.1	0.16661	0.56829	0.51829	-0.05168
2.2	0.11036	0.55596	0.52078	0.00149
2.3	0.05554	0.53987	0.51807	0.05228
2.4	0.00251	0.52019	0.51041	0.10049
2.5	-0.04638	0.49710	0.49807	0.14592
2.6	-0.09681	0.47082	0.48133	0.18836
2.7	-0.14245	0.44161	0.46050	0.22763
2.8	-0.18504	0.40972	0.43592	0.26354
2.9	-0.22432	0.37544	0.40791	0.29594
3.0	-0.26005	0.33906	0.37686	0.32467
3.1	-0.29206	0.30092	0.34310	0.34963
3.2	-0.32019	0.26134	0.30705	0.37071
3.3	-0.34430	0.22066	0.26909	0.38785
3.4	-0.36430	0.17923	0.22962	0.40101
3.5	-0.38013	0.13738	0.18902	0.41019
3.6	-0.39177	0.09547	0.14771	0.41539
3.7	-0.39923	0.05383	0.10607	0.41667
3.8	-0.40256	0.01282	0.06450	0.41411
3.9	-0.40183	-0.02724	0.02338	0.40782
4.0	-0.39715	-0.06604	-0.01594	0.39793
4.1	-0.38868	-0.10328	-0.05609	0.38459
4.2	-0.37657	-0.13865	-0.09375	0.36801
4.3	-0.36102	-0.17190	-0.12960	0.34653
4.4	-0.34226	-0.20278	-0.16334	0.32597
4.5	-0.32054	-0.23106	-0.19471	0.30100
4.6	-0.29614	-0.25655	-0.22346	0.27375
4.7	-0.26933	-0.27908	-0.24939	0.24450
4.8	-0.24043	-0.29850	-0.27230	0.21356
4.9	-0.20974	-0.31470	-0.29205	0.18125

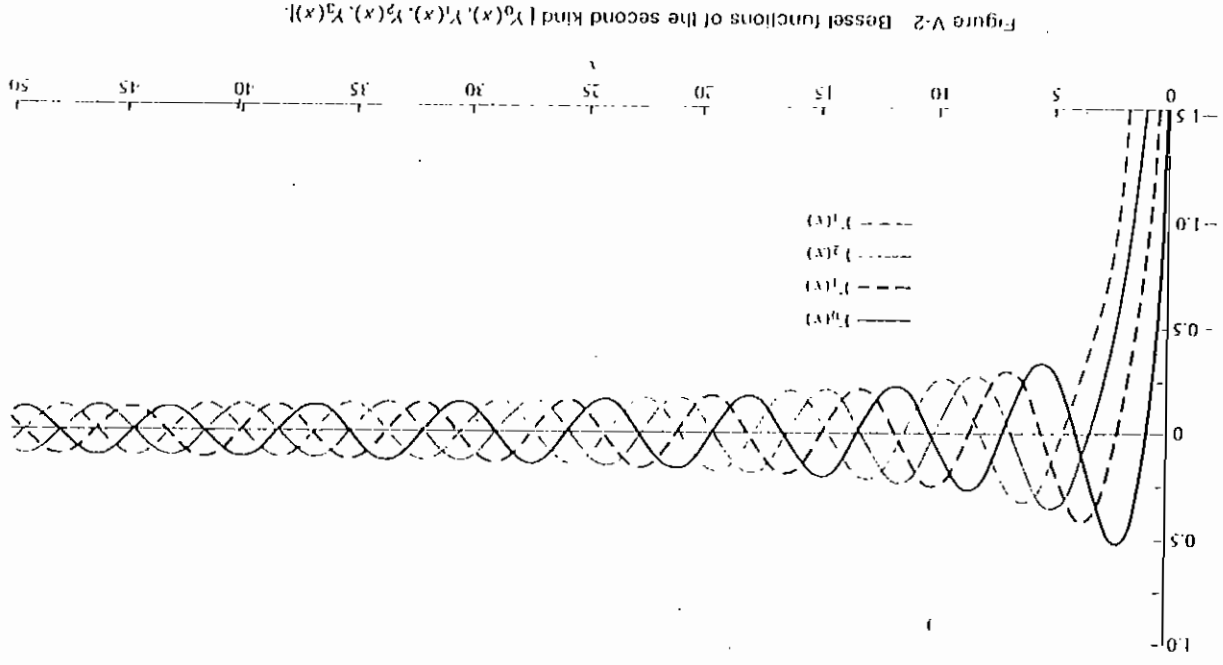
x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
5.0	-0.17760	-0.32758	-0.30852	0.14786
5.1	-0.14434	-0.33710	-0.32160	0.11374
5.2	-0.11029	-0.34322	-0.33125	0.07919
5.3	-0.07580	-0.34596	-0.33744	0.04455
5.4	-0.04121	-0.34534	-0.34017	0.01013
5.5	-0.00684	-0.34144	-0.33948	-0.02376
5.6	0.02897	-0.33433	-0.33544	-0.05681
5.7	0.05992	-0.32415	-0.32816	-0.08872
5.8	0.09170	-0.31103	-0.31775	-0.11923
5.9	0.12203	-0.29514	-0.30437	-0.14808
6.0	0.15065	-0.27668	-0.28819	-0.17501
6.1	0.17729	-0.25587	-0.26943	-0.19981
6.2	0.20175	-0.23292	-0.24831	-0.22228
6.3	0.22381	-0.20809	-0.22506	-0.24225
6.4	0.24331	-0.18164	-0.19995	-0.25956
6.5	0.26009	-0.15384	-0.17324	-0.27409
6.6	0.27404	-0.12498	-0.14523	-0.28575
6.7	0.28506	-0.09534	-0.11619	-0.29446
6.8	0.29310	-0.06522	-0.08643	-0.30019
6.9	0.29810	-0.03490	-0.05625	-0.30292
7.0	0.30008	-0.00468	-0.02595	-0.30267
7.1	0.29905	0.02515	0.00418	-0.29948
7.2	0.29507	0.05433	0.03385	-0.29342
7.3	0.28822	0.08257	0.06277	-0.28459
7.4	0.27860	0.10962	0.09068	-0.27311
7.5	0.26634	0.13525	0.11731	-0.25913
7.6	0.25160	0.15921	0.14243	-0.24280
7.7	0.23456	0.18131	0.16580	-0.22432
7.8	0.21541	0.20136	0.18723	-0.20388
7.9	0.19436	0.21918	0.20652	-0.18172
8.0	0.17165	0.23464	0.22352	-0.15806
8.1	0.14752	0.24761	0.23809	-0.13315
8.2	0.12222	0.25800	0.25012	-0.10724
8.3	0.09601	0.26574	0.25951	-0.08060
8.4	0.06916	0.27079	0.26622	-0.05348
8.5	0.04194	0.27312	0.27021	-0.02617
8.6	0.01462	0.27276	0.27146	0.00108
8.7	-0.01252	0.26972	0.27000	0.02801
8.8	-0.03923	0.26407	0.26587	0.05436
8.9	-0.06525	0.25590	0.25916	0.07987
9.0	-0.09033	0.24531	0.24994	0.10431
9.1	-0.11424	0.23243	0.23834	0.12747
9.2	-0.13675	0.21741	0.22449	0.14911
9.3	-0.15765	0.20041	0.20857	0.16906
9.4	-0.17677	0.18163	0.19074	0.18714
9.5	-0.19393	0.16126	0.17121	0.20318
9.6	-0.20898	0.13952	0.15018	0.21706
9.7	-0.22180	0.11664	0.12787	0.22866
9.8	-0.23228	0.09284	0.10453	0.23789
9.9	-0.24034	0.06837	0.08038	0.24469

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
10.0	-0.24594	0.04347	0.05567	0.24902
10.1	-0.24903	0.01840	0.03066	0.25084
10.2	-0.24962	-0.00662	0.00558	0.25019
10.3	-0.24772	-0.03132	-0.01930	0.24707
10.4	-0.24337	-0.05547	-0.04375	0.24155
10.5	-0.23665	-0.07885	-0.06753	0.23370
10.6	-0.22764	-0.10123	-0.09042	0.22363
10.7	-0.21644	-0.12240	-0.11219	0.21144
10.8	-0.20320	-0.14217	-0.13264	0.19729
10.9	-0.18806	-0.16035	-0.15158	0.18132
11.0	-0.17119	-0.17679	-0.16885	0.16371
11.1	-0.15277	-0.19133	-0.18428	0.14464
11.2	-0.13299	-0.20385	-0.19773	0.12437
11.3	-0.11207	-0.21426	-0.20910	0.10294
11.4	-0.09021	-0.22245	-0.21829	0.08074
11.5	-0.06765	-0.22838	-0.22523	0.05794
11.6	-0.04462	-0.23200	-0.22987	0.03477
11.7	-0.02133	-0.23330	-0.23218	0.01145
11.8	0.00197	-0.23229	-0.23216	-0.01179
11.9	0.02505	-0.22898	-0.22983	-0.03471
12.0	0.04769	-0.22345	-0.22524	-0.05710
12.1	0.06967	-0.21575	-0.21844	-0.07874
12.2	0.09077	-0.20598	-0.20952	-0.09942
12.3	0.11080	-0.19426	-0.19859	-0.11895
12.4	0.12956	-0.18071	-0.18578	-0.13714
12.5	0.14689	-0.16549	-0.17121	-0.15384
12.6	0.16261	-0.14874	-0.15506	-0.16888
12.7	0.17659	-0.13066	-0.13750	-0.18213
12.8	0.18870	-0.11143	-0.11870	-0.19347
12.9	0.19885	-0.09125	-0.09887	-0.20282
13.0	0.20693	-0.07032	-0.07821	-0.21008
13.1	0.21289	-0.04885	-0.05692	-0.21521
13.2	0.21665	-0.02707	-0.03524	-0.21817
13.3	0.21830	-0.00518	-0.01336	-0.21895
13.4	0.21773	0.01660	0.00848	-0.21756
13.5	0.21499	0.03805	0.03008	-0.21402
13.6	0.21013	0.05896	0.05122	-0.20839
13.7	0.20322	0.07914	0.07169	-0.20074
13.8	0.19434	0.09839	0.09130	-0.19116
13.9	0.18358	0.11653	0.10986	-0.17975
14.0	0.17108	0.13338	0.12719	-0.16664
14.1	0.15695	0.14879	0.14314	-0.15198
14.2	0.14137	0.16261	0.15754	-0.13592
14.3	0.12449	0.17473	0.17028	-0.11862
14.4	0.10649	0.18503	0.18123	-0.10026
14.5	0.08755	0.19343	0.19030	-0.08104
14.6	0.06787	0.19986	0.19742	-0.06115
14.7	0.04764	0.20426	0.20252	-0.04079
14.8	0.02708	0.20660	0.20557	-0.02016
14.9	0.00639	0.20688	0.20555	-0.00053
15.0	-0.01422	0.20511	0.20546	0.02107

Figure V-1 Bessel functions of the first kind [$J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$].

$J_1(x)/x$ FUNCTION

x	$J_1(x)/x$	x	$J_1(x)/x$	x	$J_1(x)/x$
0.0	0.50000	5.0	-0.06552	10.0	0.00435
0.1	0.49938	5.1	-0.06610	10.1	0.00182
0.2	0.49750	5.2	-0.06600	10.2	-0.00065
0.3	0.49440	5.3	-0.06528	10.3	-0.00304
0.4	0.49007	5.4	-0.06395	10.4	-0.00533
0.5	0.48454	5.5	-0.06208	10.5	-0.00751
0.6	0.47783	5.6	-0.05970	10.5	-0.00955
0.7	0.46999	5.7	-0.05687	10.7	-0.01144
0.8	0.46105	5.8	-0.05363	10.8	-0.01316
0.9	0.45105	5.9	-0.05002	10.9	-0.01471
1.0	0.44005	6.0	-0.04611	11.0	-0.01607
1.1	0.42809	6.1	-0.04194	11.1	-0.01724
1.2	0.41524	6.2	-0.03757	11.2	-0.01820
1.3	0.40156	6.3	-0.03303	11.3	-0.01896
1.4	0.38710	6.4	-0.02838	11.4	-0.01951
1.5	0.37196	6.5	-0.02367	11.5	-0.01986
1.6	0.35618	6.6	-0.01894	11.6	-0.02000
1.7	0.33986	6.7	-0.01423	11.7	-0.01994
1.8	0.32306	6.8	-0.00959	11.8	-0.01969
1.9	0.30587	6.9	-0.00506	11.9	-0.01924
2.0	0.28836	7.0	-0.00067	12.0	-0.01862
2.1	0.27061	7.1	0.00354	12.1	-0.01783
2.2	0.25271	7.2	0.00755	12.2	-0.01688
2.3	0.23473	7.3	0.01131	12.3	-0.01579
2.4	0.21674	7.4	0.01481	12.4	-0.01457
2.5	0.19884	7.5	0.01803	12.5	-0.01324
2.6	0.18108	7.6	0.02095	12.6	-0.01180
2.7	0.16356	7.7	0.02355	12.7	-0.01029
2.8	0.14633	7.8	0.02582	12.8	-0.00871
2.9	0.12946	7.9	0.02774	12.9	-0.00707
3.0	0.11302	8.0	0.02933	13.0	-0.00541
3.1	0.09707	8.1	0.03057	13.1	-0.00373
3.2	0.08167	8.2	0.03146	13.2	-0.00205
3.3	0.06687	8.3	0.03202	13.3	-0.00039
3.4	0.05271	8.4	0.03224	13.4	0.00124
3.5	0.03925	8.5	0.03213	13.5	0.00282
3.6	0.02652	8.6	0.03172	13.6	0.00434
3.7	0.01455	8.7	0.03100	13.7	0.00578
3.8	0.00337	8.8	0.03001	13.8	0.00713
3.9	-0.00699	8.9	0.02875	13.9	0.00838
4.0	-0.01651	9.0	0.02726	14.0	0.00953
4.1	-0.02619	9.1	0.02554	14.1	0.01055
4.2	-0.03301	9.2	0.02363	14.2	0.01145
4.3	-0.03998	9.3	0.02155	14.3	0.01225
4.4	-0.04609	9.4	0.01932	14.4	0.01285
4.5	-0.05135	9.5	0.01697	14.5	0.01334
4.6	-0.05578	9.6	0.01453	14.6	0.01369
4.7	-0.05938	9.7	0.01202	14.7	0.01389
4.8	-0.06219	9.8	0.00947	14.8	0.01396
4.9	-0.06423	9.9	0.00691	14.9	0.01388
				15.0	0.01367



$\int_0^x J_0(\tau) d\tau$ AND $\int_0^x Y_0(\tau) d\tau$ FUNCTIONS

x	$\int_0^x J_0(\tau) d\tau$	$\int_0^x Y_0(\tau) d\tau$	x	$\int_0^x J_0(\tau) d\tau$	$\int_0^x Y_0(\tau) d\tau$
0.0	0.00000	0.00000	5.0	0.71531	0.19971
0.1	0.09991	-0.21743	5.1	0.69920	0.16818
0.2	0.19933	-0.34570	5.2	0.68647	0.13551
0.3	0.29775	-0.43928	5.3	0.67716	0.10205
0.4	0.39469	-0.50952	5.4	0.67131	0.06814
0.5	0.48968	-0.56179	5.5	0.66891	0.03413
0.6	0.58224	-0.59927	5.6	0.66992	0.00035
0.7	0.67193	-0.62409	5.7	0.67427	-0.03284
0.8	0.75834	-0.63786	5.8	0.68187	-0.06517
0.9	0.84106	-0.64184	5.9	0.69257	-0.09650
1.0	0.91973	-0.63706	6.0	0.70622	-0.12595
1.1	0.99399	-0.62447	6.1	0.72263	-0.15385
1.2	1.06355	-0.60490	6.2	0.74160	-0.17975
1.3	1.12813	-0.57911	6.3	0.76290	-0.20344
1.4	1.18750	-0.54783	6.4	0.78628	-0.22470
1.5	1.24144	-0.51175	6.5	0.81147	-0.24338
1.6	1.28982	-0.47156	6.6	0.83820	-0.25931
1.7	1.33249	-0.42788	6.7	0.86618	-0.27239
1.8	1.36939	-0.38136	6.8	0.89512	-0.28252
1.9	1.40048	-0.33260	6.9	0.92470	-0.28956
2.0	1.42577	-0.28219	7.0	0.95464	-0.29377
2.1	1.44528	-0.23071	7.1	0.98462	-0.29486
2.2	1.45912	-0.17871	7.2	1.01435	-0.29295
2.3	1.46740	-0.12672	7.3	1.04354	-0.28811
2.4	1.47029	-0.07526	7.4	1.07190	-0.28043
2.5	1.46798	-0.02480	7.5	1.09917	-0.27002
2.6	1.46069	0.02420	7.6	1.12508	-0.25702
2.7	1.44871	0.07132	7.7	1.14941	-0.24159
2.8	1.43231	0.11617	7.8	1.17192	-0.22392
2.9	1.41181	0.15839	7.9	1.19243	-0.20421
3.0	1.38756	0.19765	8.0	1.21074	-0.18269
3.1	1.35992	0.23367	8.1	1.22671	-0.15959
3.2	1.32928	0.26620	8.2	1.24021	-0.13516
3.3	1.29602	0.29502	8.3	1.25112	-0.10966
3.4	1.26056	0.31956	8.4	1.25939	-0.08335
3.5	1.22330	0.34090	8.5	1.26494	-0.05650
3.6	1.18467	0.35775	8.6	1.26777	-0.02940
3.7	1.14509	0.37044	8.7	1.26787	0.00230
3.8	1.10496	0.37896	8.8	1.26528	0.02451
3.9	1.06471	0.38335	8.9	1.26005	0.05078
4.0	1.02473	0.38366	9.0	1.25226	0.07625
4.1	0.98541	0.38000	9.1	1.24202	0.10069
4.2	0.94712	0.37250	9.2	1.22946	0.12395
4.3	0.91021	0.36131	9.3	1.21473	0.14552
4.4	0.87502	0.34665	9.4	1.19799	0.16550
4.5	0.84186	0.32872	9.5	1.17944	0.18361
4.6	0.81100	0.30775	9.6	1.15927	0.19969
4.7	0.78271	0.28413	9.7	1.13772	0.21360
4.8	0.75721	0.25802	9.8	1.11499	0.22523
4.9	0.73468	0.22977	9.9	1.09134	0.23448
			10.0	1.06701	0.24129

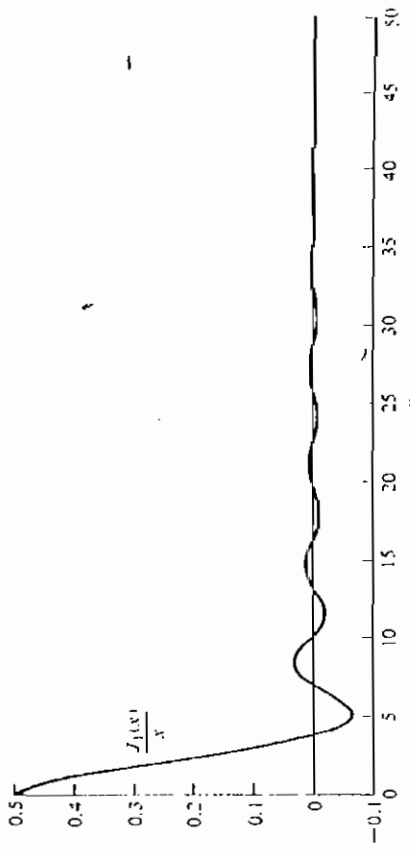


Figure V-3 Plot of $J_1(x)/x$ function.

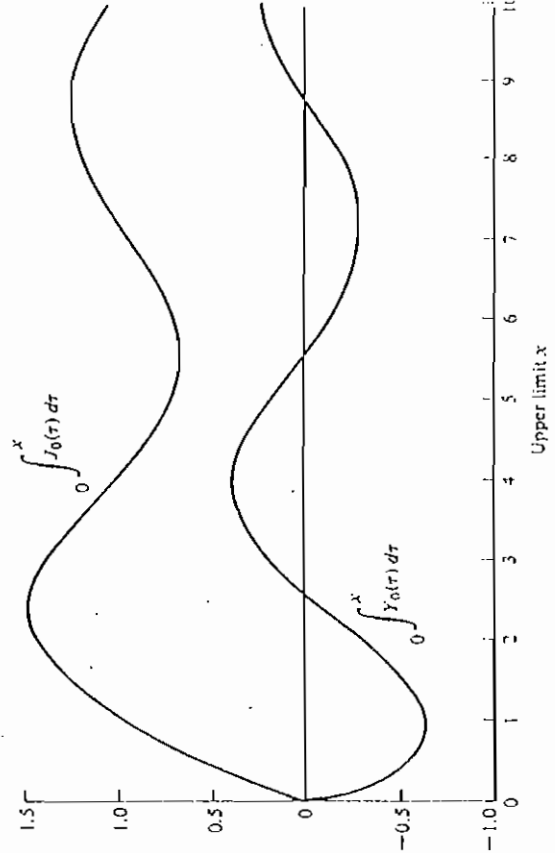


Figure V-4 Plots of $\int_0^x J_0(\tau) d\tau$ and $\int_0^x Y_0(\tau) d\tau$ functions