"CONTROL DE POSICION DE TIEMPO MINIMO PARA UN MOTOR DC"

BARRAGAN, MARCO ING.
PAZMAY, FAUSTO
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

RESUMEN

En este trabajo se estudian las ventajas del control de posición de tiempo mínimo del modelo de un motor DC, se desarrolla el algoritmo para la implementación del mismo, y se discuten algunos problemas de carácter práctico sobre su misma implementación.

INTRODUCCION

Cuando se realiza un control de posición, y/o cualquier otro control, hay que satisfacer condiciones de respuesta transitoria, precisión y estabilidad[1]. Normalmente, los sistemas lineales consiguen satisfacer en forma adecuada sobre todo los dos últimos casos, pero, si el problema de transitorios exige una respuesta suficientemente rápida y sin sobretiro, habrá que buscar una mejor solución.

Para comparar la mejoría que se experimenta con los diferentes controles, se tomará como referencia el control de posición lineal de un motor simplificado como en la figura 1.

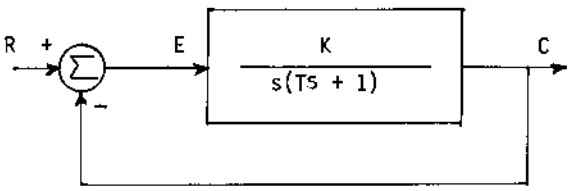


FIG. 1 .- Control lineal de posición de un motor.

Como es un sistema de segundo orden, a las variables de estado se las puede definir como:

$$x_1 = e \qquad x_2 = \dot{e} \qquad (1)$$

en donde $e(t) = e \longleftrightarrow E(s)$

fácilmente se puede probar que las trayectorias en el plano de fase son espirales que van al punto de equilibrio en el origen. (Fig. 2).

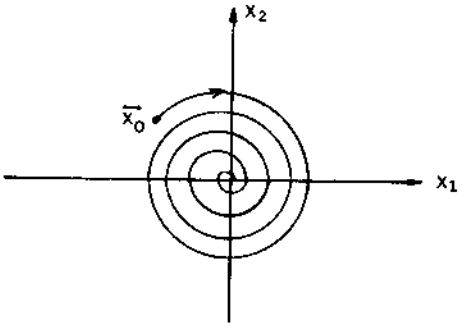


FIG. 2 .- Trayectorias en el plano de fase del control lineal del motor con condición inicial $\vec{x}_0$.

La respuesta en el tiempo, a una función paso será: como en la figura 3, con el menor tiempo de subida sin sobretiro cuando el índice de amortiguamiento es igual a 1.

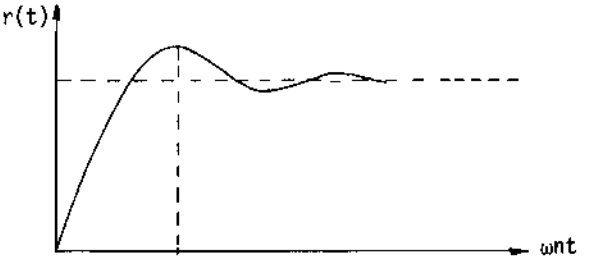


FIG. 3 .- Respuesta a una función paso del sistema de control lineal.

Este sistema puede ser mejorado (sin aumentar su orden), con un control proporcional diferencial (Fig. 4), pues aumenta el índice de amortiguamiento, es decir, la espiral decae más rápidamente al origen.

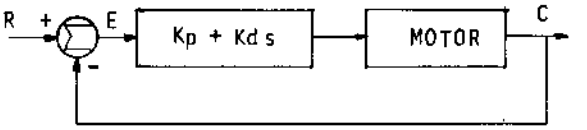


FIG. 4 .- Control lineal con compensación PD.

Nuevamente, el límite de mejoría está sujeto a un índice de amortiguamiento igual a 1.

Luego, habrá en situaciones más exigentes, que recurrir a un control no lineal a relé por ejemplo; el control básico no lineal es el de la figura 5, cuyas trayectorias serían como en la figura 6[2], para un rango permitido, y corresponden a un cierto amortiguamiento.

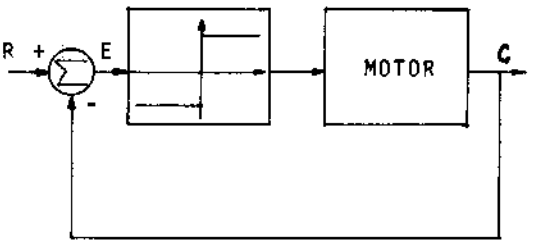


FIG. 5 .- Control de posición de un motor a relé.

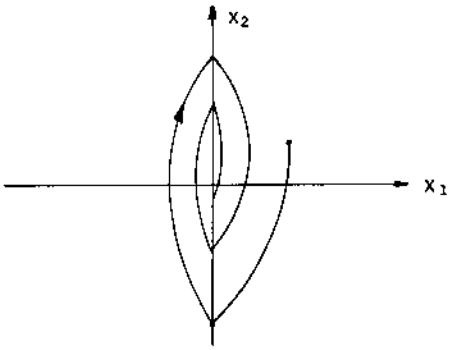


FIG. 6 .- Trayectorias aproximadas para el control no lineal.

Debe notarse que el relé conmuta en la recta $x_1 = 0$

El sistema puede hacerse más amortiguado si se introduce un controlador proporcional diferencial. (figura 7).

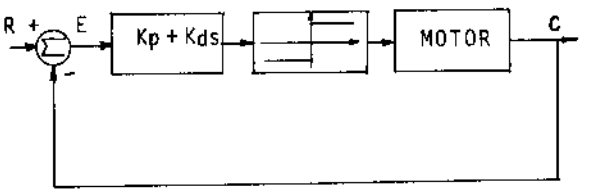


FIG. 7 .- Control no lineal con compensación PD.

Las trayectorias se conservan esencialmente las mismas, pero la conmutación de ellas ocurre sobre la recta $Kp\ x_1 + Kd\ x_2 = 0$. (figura 8).

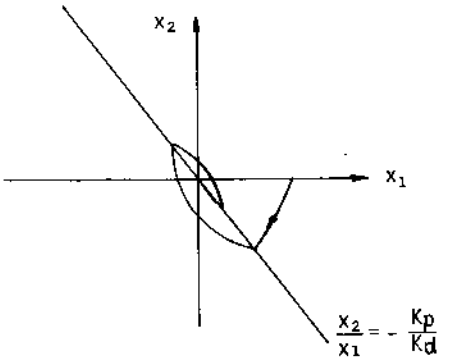


FIG. 8 .- Trayectorias para el problema de la figura 7.

Ahora, si se consiguiera utilizar como curva de conmutación a las propias trayectorias que pasan por el origen, se llegaría en este caso al mismo cuando más con una conmutación, sin sobre tiro y en el menor tiempo posible. Figura 9[3].

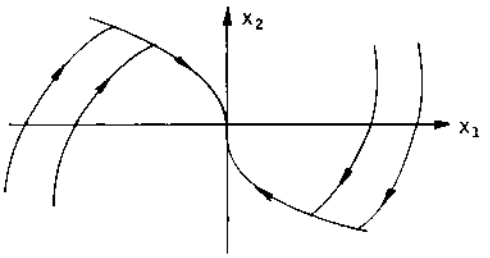


FIG. 9 .- Curva de conmutación para tiempo mínimo.

El problema radica en determinar e implementar el algoritmo que permita que el relé conmute sobre esta curva, y que se lo detalla a continuación, variando ligeramente la definición de las variables de estado de aquella propuesta en la ecuación (1).

DEDUCCION DEL ALGORITMO DE CONTROL OPTIMO

La función de transferencia del motor, para el control de posición y asumiendo un modelo lineal es:

$$\frac{\theta(s)}{Ea(s)} = \frac{K}{(1 + T\,s)S} \qquad (2)$$

donde:

$$K = \frac{K_T}{Ra\ Beq + K_T\ Ke} \qquad T = \frac{Ra\ J_{eq}}{Ra\ Beq + K_T\ Ke}$$

con:

- K_T = constante del par motor
- K_e = constante de fuerza contraelectromotriz
- Ra = resistencia de la armadura
- B_{eq} = coeficiente de fricción viscosa equivalente.
- J_{eq} = momento de inercia equivalente
- E_a = tensión de armadura

de la ecuación (2) se tiene:

$$\dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)T = K\ Ea(t) \qquad (3)$$

despejando $\dot{\theta}(t)$:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{1}{T}\dot{\theta}(t) + \frac{K}{T}E_a$$

para poner el modelo del motor en notación de variable de estado se realizan los siguientes reemplazos:

$$x_1(t) = \theta(t) \quad y \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) \qquad (4)$$

con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{T}x_2(t) + \frac{K}{T}E_a \end{aligned} \qquad (5)$$

ó

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \bar{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{K}{T} \end{bmatrix} E_a$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} ; \quad \dot{\bar{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

el vector inicial puede ser en forma general:

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Además existe la restricción $|E_a| \leq |V|$; donde V es el voltaje de la fuente, y según se explica en la teoría general de control óptimo[3], la solución es un control tipo bang-bang.

De acuerdo a la notación general de variable de estado

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\,\bar{x}(t) + \bar{B}\,\bar{\mu}(t) \qquad (8)$$

para este caso:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$\bar{\mu}(t) = E_a$ = voltaje de salida del relé.

se hallan los valores propios de la matriz $\bar{A}$, con la ecuación $|\lambda\,\bar{I} - \bar{A}| = 0$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{T}$$

Por lo tanto de acuerdo al teorema de Existencia[3], existe un control óptimo que transfiere cualquier estado inicial al origen.

Para ver si cumple las condiciones necesarias para el vector de control primero se escribe el hamiltoniano[3].

$$H(\bar{x}(t),\bar{\mu}(t),\bar{p}(t),t) = 1 + \bar{p}^T(t)\,[\bar{A}\,(\bar{x}(t),t) + \bar{B}\,(\bar{x}(t),t)\,\bar{\mu}(t)] \qquad (10)$$

$$H(\bar{x}(t),\bar{\mu}(t),\bar{p}(t),t) = 1 + [p_1\ p_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [p_1\ p_2]\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix} E_a$$

$$= 1 + p_1\,x_2(t) - \frac{1}{T}\,p_2\,x_2(t) + p_2\,\frac{K}{T}\,E_a$$

Se comprueban las condiciones:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\partial H}{\partial p_1} = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -\frac{1}{T}\,x_2(t) + \frac{K}{T}\,E_a \qquad (11)$$

que se puede comprobar, son las mismas ecuaciones de estado.

Los multiplicadores de Lagrange[4] se los obtiene de:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} = 0$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} = -p_1 - \frac{p_2}{T} \qquad (12)$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$p_1 = A \qquad p_2 = C\,e^{-t/T} - TA \qquad (13)$$

donde A y C son constantes.

Ahora de acuerdo al principio de Pontryagin[4] se minimiza el término que contiene el vector de control

$$p_2\,\frac{K}{T}\,E_a^* \leq p_2\,\frac{K}{T}\,E_a \qquad (14)$$

para todo Ea admisible; y para todo $t \in [t_0, t_f]$ (intervalo de control).

de donde:

$$E_a^*(t) = \begin{cases} -V & \text{para } p_2 > 0 \\ +V & \text{para } p_2 < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

ó

$$Ea^*(t) = -V\,sg\,(p_2(t))$$

por lo tanto el control óptimo para un estado inicial debe ser de una de las siguientes formas:

$$Ea^*(t) = \begin{cases} +V \text{ para todo } t \in [t_0,t^*] \\ -V \text{ para todo } t \in [t_0,t^*] \\ +V \text{ para todo } t \in [t_0,t_1] \text{ y } -V \text{ para todo } t \in [t_1,t^*] \\ -V \text{ para todo } t \in [t_0,t_1] \text{ y } V \text{ para todo } t \in [t_1,t^*] \end{cases} \qquad (16)$$

en donde $t_0 \leq t_1 \leq t^*$

Ahora para saber el comportamiento del sistema en el espacio de estado se calcula la trayectoria del mismo.

A partir de (6) y (7)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{[S\bar{I} - \bar{A}]^{-1}\,\bar{x}(0) + [S\bar{I} - \bar{A}]^{-1}\,\bar{B}\,\mu(S)\right\} =$$

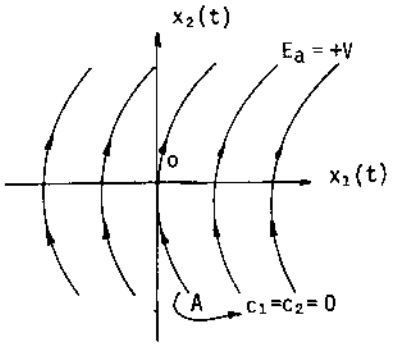
$$= \begin{bmatrix} C_1 + C_2T - KEaT + KEat - (C_2T - KEaT)\,e^{-t/T} \\ KEa + (C_2 - KEa)\,e^{-t/T} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

para hallar la trayectoria de estados se debe tener

$x_1(t) = f(x_2(t))$; despejando t de la ecuación de $x_2(t)$ y reemplazándolo en la de $x_1(t)$:

$$x_1(t) = (c_1 + c_2T) - T\,x_2(t) - k\,EaT\,\ell n\left(\frac{x_2(t) - k\,Ea}{c_2 - k\,Ea}\right) \qquad (18)$$

Si en esta ecuación se hace Ea = V y luego Ea = -V darán las siguientes trayectorias:



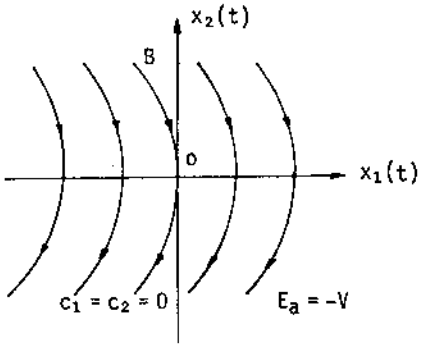


FIG. 10.- Trayectorias de estado.

Quiere decir que el sistema podrá llegar al origen siempre que esté sobre la trayectoria AO ó BO. Según se planteó en la introducción, uniendo estos 2 segmentos se construye la trayectoria de conmutación óptima. (fig. 11).

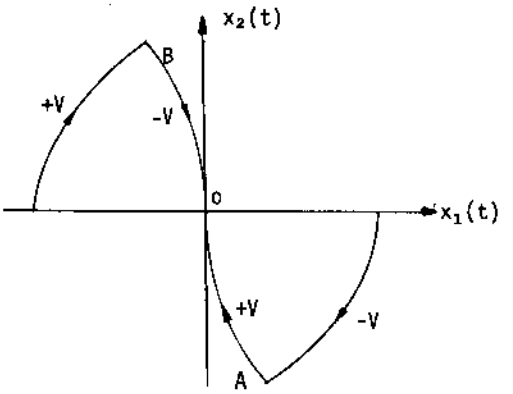


FIG. 11.- Trayectoria óptima BOA.

La Fig. 11 significa que siempre que el estado inicial esté hacia arriba de la curva BOA, el sistema será controlado por Ea = -V hasta llegar al punto A; en donde Ea conmuta a +V y el sistema llega al origen. De igual manera si el estado inicial está hacia abajo de la curva BOA la secuencia de control será primero Ea = V y al llegar a B, Ea = -V.

Para hallar la expresión de la curva AO , se hace $c_1 = c_2 = 0$ en (17) y se reemplaza Ea = V

$$x_1(t) = -\,T\,x_2(t) - k\,V\,T\,\ell n\left(1 - \frac{x_2(t)}{kV}\right) \qquad (19)$$

para BO ; Ea = -V

$$x_1(t) = -\,T\,x_2(t) + k\,V\,T\,\ell n\left(1 + \frac{x_2(t)}{kV}\right) \qquad (20)$$

para hallar la expresión de BOA se debe unificar (19) y (20) de la siguiente forma:

$$x_1(t) = -\,T\,x_2(t) + (sg\ x_2(t))\ k\,V\,T\,\ell n\left(1 + \frac{|x_2(t)|}{kV}\right) \qquad (21)$$

Siendo ésta la ecuación que representa a BOA.

De donde:

$$s(\overline{x}(t)) \overset{\Delta}{=} x_1(t) + T\,x_2(t) - (sg\ x_2(t))\ k\,V\,T\,\ell n\left(1 + \frac{|x_2(t)|}{kV}\right) = 0 \qquad (22)$$

es la curva de conmutación para control de tiempo mínimo, y quiere decir que si:

$s(\overline{x}(t)) > 0$; $\overline{x}(t)$ está hacia arriba de la curva BOA.
$s(\overline{x}(t)) < 0$; $\overline{x}(t)$ está hacia abajo de la curva BOA.
$s(\overline{x}(t)) = 0$; $\overline{x}(t)$ está en la curva BOA.

y

$$Ea^*(t) = \begin{cases} -V \ ; \text{ si } \overline{x}(t) \text{ es tal que } s(\overline{x}(t)) > 0 \\ +V \ ; \text{ si } \overline{x}(t) \text{ es tal que } s(\overline{x}(t)) < 0 \\ -V \ ; \text{ si } \overline{x}(t) \text{ es tal que } s(\overline{x}(t)) = 0 \text{ y } x_2(t) > 0 \\ +V \ ; \text{ si } \overline{x}(t) \text{ es tal que } s(\overline{x}(t)) = 0 \text{ y } x_2(t) < 0 \\ 0 \ ; \text{ si } \overline{x}(t) = 0 \end{cases}$$

Un diagrama de este control sería (Fig. 12).

CONSIDERACIONES DE CARACTER PRACTICO

- El algoritmo de control puede ser implementado sin dificultad de varias maneras; una de ellas sería: construir el circuito que realice la función teniendo como entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$; asunto relativamente fácil si se utilizan circuitos integrados análogos.

- La potencia del motor sólo condiciona al relé y

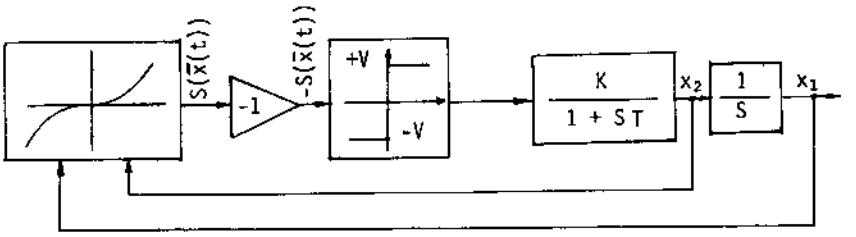


FIG. 12.- Interpretación del control óptimo.

no al controlador en sí.

- El algoritmo es de carácter general y por tanto aplicable a cualquier motor de parámetros conocidos.
- Una dificultad que se encuentra en la práctica es la adecuada interpretación del algoritmo porque no se pueden medir directamente las variables θ y $\dot{\theta}$ sino a través de un potenciómetro y un tacómetro respectivamente. No obstante, la introducción de estos elementos lo único que hace es que el plano de fase en consideración sea otro, en que cada eje es proporcional al original.

CONCLUSIONES

- Este artículo ha propuesto un tipo de control aplicable en casos más exigentes en cuanto a tiempo de subida se refiere, y que puede ser implementado relativamente sin mayores dificultades.

REFERENCIAS

1.- Shinners, Stanley.- Control System Design, 2da. Edición.- John Wiley & Sons. Inc. 1976.

2.- Elgerd,Olle I.- Control System Theory.- Mc Graw-Hill. 1967.

3.- Kirk,Donald.- Optimal Control Theory, and Introduction.- Prentice Hall. 1970.

4.- Bryson Jr. Arthur; Ho, Yu-Chi.- Applied Optimal Control.- John Wiley & Sons, 1975.

ING. MARCO BARRAGAN BEDOYA

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones (EPN, 1973)
Master en Ingeniería de Sistemas (EPUSP, Brasil, 1976)
Profesor Principal a tiempo completo (EPN).

FAUSTO PAZMAY

Egresado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica (EPN, 1982)
Ayudante de Cátedra en el Instituto de Informática (EPN).