

EMPLEO DE CONTROLADORES PREDICTIVOS EN SISTEMAS DE CONTROL

Ings. Eugenio Tacconi, Juan Carasi y  
Ricardo Mantz

Laboratorio de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación, Universidad Nacional de La Plata.

RESUMEN

Se describe en primer lugar el método de compensación predictivo de Smith para sistemas con retardo.

Posteriormente, se demuestra como la inclusión de un predictor dentro de un lazo de control de un sistema sin retardo puede introducir apreciables mejoras desde el punto de vista de su estabilidad.

Se hacen consideraciones sobre la causalidad y realizabilidad del predictor y se muestran los resultados experimentales obtenidos.

INTRODUCCION

Un predictor permite, a partir de las señales pasadas y presentes, de entrada y de salida, de un sistema físico, predecir su comportamiento futuro.<sup>1</sup>

El empleo de un predictor en un sistema realimentado de control, fue introducido por Smith para mejorar la estabilidad de sistemas con retardo puro.

Luego de una breve descripción del método de Smith, se analizan las mejoras obtenidas mediante el empleo de un predictor lineal digital en el lazo de realimentación de un sistema de control sin retardo.

El objetivo del presente trabajo no consiste en realizar un estudio exhaustivo de los problemas vinculados al control predictivo, sino fundamentalmente en explicar el comportamiento de un predictor lineal incorporado en el lazo de realimentación, y mostrar mediante algunos ejemplos el grado de estabilidad obtenida.

1. METODO DE SMITH<sup>2</sup>

Dado un sistema con retardo de función de transferencia  $G_T(S)$  (expresión 1), el objetivo perseguido por Smith consiste en obtener una determinada respuesta temporal, idéntica a la que se obtendría con el mismo sistema libre de retardo pero retardada en un tiempo  $T$

$$G(S) = G(S) e^{-ST_r} \quad (1)$$

Para lograr tal objetivo, se debe modelizar, por medio de una transferencia  $G_0(S)$ , el sistema sin considerar el retardo y luego proyectar un compensador  $C(S)$  en cascada con la planta para obtener la respuesta  $y_p(t)$  deseada (Figura 1).

Si las condiciones iniciales y las funciones de transferencia del modelo  $G_0(S)$  y de la planta sin retardo  $G(S)$  son idénticas, la señal  $y_p(t)$  representa una predicción sin error, en un tiempo  $T_r$  de la señal de salida,

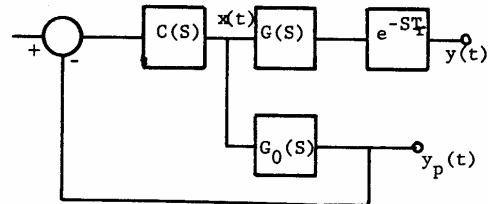


Fig. 1.-Esquema básico del método de compensación de Smith.

Por tal motivo el modelo  $G_0(S)$  puede ser considerado como un predictor de la señal  $y(t)$ , que utiliza como entrada únicamente la excitación de la planta  $x(t)$ .

El diagrama en bloques de la figura 1 incluye normalmente otros lazos de realimentación que permiten reducir los errores debidos a diferencias en las condiciones iniciales y entre las funciones de transferencia del sistema y del modelo.

El método de predicción de Smith permite por lo tanto reducir los problemas de inestabilidad introducidos por un retardo puro, a punto tal de obtener el mismo grado de estabilidad que para el sistema libre de retardo.

2. CONTROL PREDICTIVO DE SISTEMAS SIN RETARDO.

El diagrama en bloques de la figura 2 puede interpretarse como una generalización del método de Smith, en la medida en que no se introduzcan restricciones a la función de transferencia de la planta  $G(S)$  ni a la estructura del predictor  $P(S)$ .

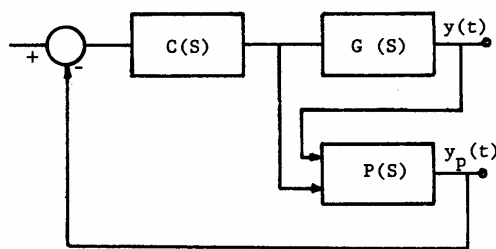


Fig. 2.-Generalización del esquema básico del método de compensación de Smith.

Si la función de transferencia de la planta  $G(S)$  no presenta un retardo puro, diversos problemas relativos a la causalidad y realizabilidad del predictor deben ser tenidos en cuenta.

Dado que se utiliza un predictor digital, algunos aspectos relativos a la estabilidad de sistemas digitales de control son analizados.

Las mejoras introducidas por el solo empleo del predictor en el lazo de realimentación, son analizadas mediante un par de ejemplos.

### 2.1 Efecto estabilizador del predictor

Si se realimenta negativamente en forma unitaria una planta analógica de primer orden de función de transferencia  $G(S)$  (Ec. 2) se obtiene un sistema que es estable para cualquier valor de ganancia  $K$ .

$$G(S) = \frac{K}{1 + S \cdot \tau} \quad (2)$$

El diagrama de locación de raíces del sistema en lazo cerrado en función del factor de amplificación  $K$  se muestra en la Fig. 3.

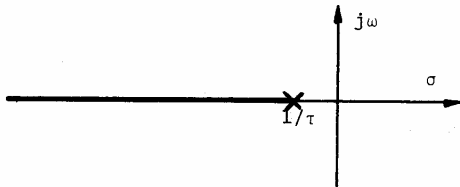


Fig.3.-Diagrama de locación de raíces para un sistema de primer orden.

Al aumentar el factor de amplificación se incrementa el ancho de banda y la velocidad de respuesta del sistema realimentado, sin afectarse la estabilidad (el polo se mantiene sobre el eje real negativo).

Si en cambio, se muestrea a la planta y se utiliza para generar la señal de excitación un reconstructor de orden cero ( $R_0$ ) (Fig.4) se puede analizar la estabilidad del sistema observando su comportamiento en los instantes de muestreo utilizando la transformada  $Z$ .

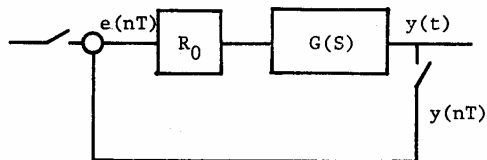


Fig.4.-Diagrama básico de un sistema de control muestreado.

La función de transferencia en el plano  $S$  del reconstructor de la señal  $R_0(S)$  está dada por

$$R_0(S) = \frac{1 - e^{-S \cdot T}}{S} \quad (3)$$

Donde  $T$  representa al período de muestreo.

La función de transferencia en el plano  $Z$  de la amplificación total de lazo abierto ( $A(Z)$ ) será:

$$A(z) = \frac{z - 1}{z} \cdot Z\left(\frac{G(S)}{S}\right) \quad (4)$$

donde  $z = e^{-ST}$  y  $Z(*)$  significa transformada  $Z$  de (\*).

Reemplazando (2) en (4) y calculando la transformada  $Z$  se obtiene

$$A(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{K(1 - e^{-T/\tau})}{z - e^{-T/\tau}} \quad (5)$$

El diagrama de locación de raíces en el plano  $Z$  en función del factor de amplificación  $K$  se ha graficado en la Fig. 5. Se observa que la incorporación del muestreador y su reconstructor de señal reduce la estabilidad del sistema realimentado, ya que existen valores de ganancia para los cuales el diagrama de lugar de raíces cruza el círculo unitario.

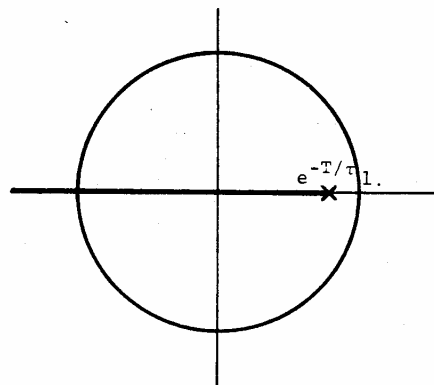


Fig.5.-Diagrama de locación de raíces para un sistema muestreado de control de primer orden.

Transformando la Ec.(4) al dominio temporal se obtiene

$$y_n = e^{-T/\tau} \cdot y_{n-1} + (K(1 - e^{-T/\tau})) \cdot x_{n-1} \quad (6)$$

con  $x_n = x(n \cdot T)$

$y_n = y(n \cdot T)$

La expresión anterior indica que el sistema muestreado posee un retardo puro de una muestra. De modo que conocida la entrada y

La salida actual es posible determinar la salida del sistema en el próximo instante de muestreo (predicción ideal de una muestra):

$$\hat{y}_{n+1} = e^{-T/\tau} \cdot y_n + (K(1-e^{-T/\tau})) \cdot x_n \quad (7)$$

La Fig. 6a representa al sistema de control muestreado incorporando en el lazo de realimentación un predictor ideal de una muestra mientras que la Fig. 6b muestra una posible implementación del predictor ideal de una muestra basado en la Ec. (7).

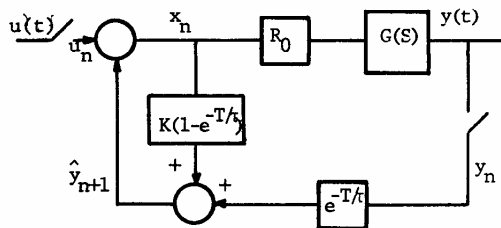
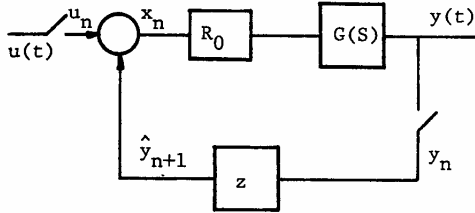


Fig. 6 a.-Sistema de control muestreado con inclusión de un predictor en el lazo de realimentación.

b.-Posible estructura para la implementación del controlador predictivo.

La función de transferencia de lazo abierto  $A'(z)$  estará dada por

$$A'(z) = \frac{z \cdot K(1-e^{-T/\tau})}{z - e^{-T/\tau}} \quad (8)$$

El correspondiente diagrama de localización de raíces se ha graficado en la Fig. 7. Se observa que el sistema muestreado con el predictor ideal incorporado en el lazo de realimentación es estable para todo valor del factor de amplificación  $K$ .

Es decir que se han recuperado las condiciones de estabilidad del sistema analógico a pesar de utilizar un muestreador y un reconstructor de señal.

Puede verificarse fácilmente que el sistema continuo y el sistema muestreado con predictor no son totalmente equivalentes ya que para un mismo factor de amplificación (igual error de estado estacionario) ambos sistemas poseen diferente velocidad

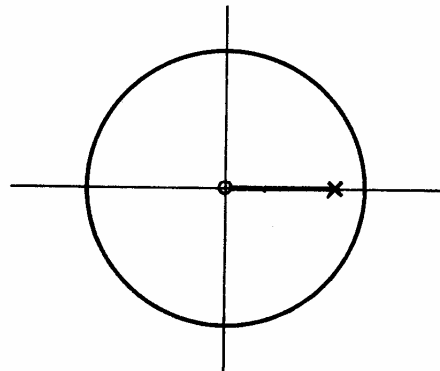


Fig. 7.-Diagrama de localización de raíces para un sistema de primer orden con compensación predictiva.

de respuesta.

Para poder comparar el grado de estabilidad de un sistema continuo con el de su correspondiente discreto que posee un predictor en el lazo de realimentación, se analiza a continuación el caso de una planta analógica de tercer orden

$$G(s) = \frac{K}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)^2} \quad (9)$$

En la Fig. 8 a y b se representan los correspondientes diagramas de amplitud y fase en función de la frecuencia para  $K=100$ ,  $\tau_1 = 500$  mseg y  $\tau_2 = 5$  mseg.

Los márgenes de fase  $\phi$  y de ganancia  $a$  valen:

$$\phi = 22^\circ \quad a = (6,4)\text{dB}$$

Si bien para el factor de amplificación adoptado ( $K=100$ ) el error de estado estacionario puede resultar satisfactorio ( $e=1/101=1\%$ ) el reducido valor del margen de fase indica que la respuesta transitoria es excesivamente subamortiguada.

Por otra parte un predictor ideal representa un adelanto puro y su función de transferencia en función de la frecuencia  $P(s)$  posee amplitud unitaria y constante y fase positiva y lineal con la frecuencia,

$$P(s) = e^{j\omega T_p}$$

donde  $T_p$  representa el tiempo de predicción.

Los diagramas de amplitud y fase del predictor se han indicado en la Fig. 9 (a y b) para un tiempo de predicción  $T_p = 5$  mseg.

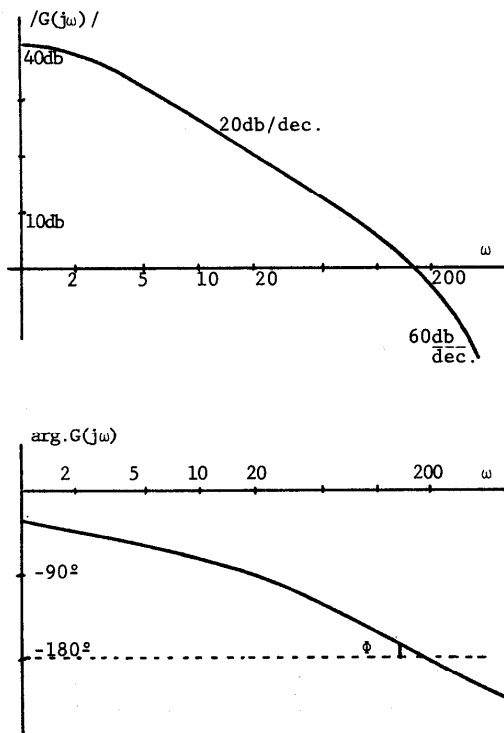


Fig. 8. a y b. -Diagramas de amplitud y fase del sistema representado por la ecuación (9).

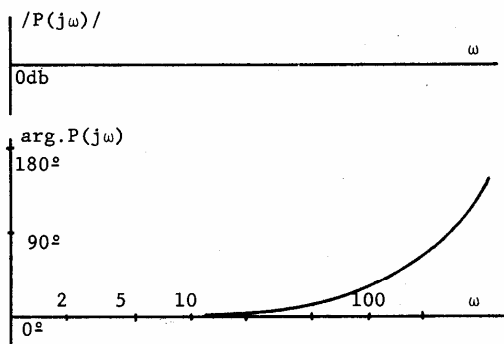


Fig. 9a y b. -Diagrama de amplitud y fase de un predictor con  $T_p = 5mseg$ .

Un predictor analógico ideal  $P(s)$  es un dispositivo que al no cumplir con el principio de causalidad no es físicamente realizable careciendo de significado el análisis de su estabilidad. Sin embargo, puede realizarse un predictor que se aproxime al ideal en una banda limitada de frecuencias.

Conectando tal predictor en serie con la planta analógica  $G(s)$ , el diagrama de amplitud de la función de transferencia de lazo

abierto no se modifica, alterándose en cambio el diagrama de fase; el que se obtiene sumando los diagramas de las Figs. 8b y 9b (Fig. 10). Se observa que el margen de fase se ha incrementado a un valor de  $61^\circ$ , mejorando la respuesta transitoria del sistema realimentado. Por otra parte al no variar el diagrama de amplitud, el error de estado estacionario se mantiene constante.

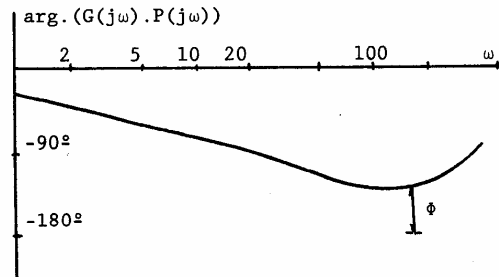


Fig. 10. -Diagrama de fase de la transferencia de lazo abierto con la inclusión del predictor.

## 2.2 Causalidad del predictor

Para analizar la realizabilidad del sistema se ha graficado en la Fig. 11b la respuesta a un pulso rectangular, de la planta  $G(s)$  representada por la Ec. 9 (línea llena).

En la figura se ha indicado además en línea de trazos la respuesta que debería tener el sistema si se le incorporara un predictor ideal que anticipe la respuesta en un tiempo de predicción  $T_p = 0,01$  seg.

Evidentemente el sistema con predictor no es físicamente realizable, ya que la señal de salida precede a la excitación que la provoca. Sin embargo, un predictor digital ideal puede ser en ciertos casos realizable.

Para implementar un predictor digital se toman muestras de la entrada y de la salida del sistema, y luego de procesarlas se genera la señal analógica mediante un reconstructor.

En la Fig. 11c se ha representado en trazo continuo la respuesta del sistema con el agregado de un muestreador de período  $T = T_p$  y un reconstructor de orden cero.

Para un instante cualquiera  $t$ , la salida del sistema muestreado coincide con la que poseía el sistema analógico  $t_1$  seg. antes. De modo que existe un retardo  $t_1$  variable entre 0 y  $T$  seg. Por tal motivo la incorporación del conjunto muestreador-reconstructor reduce el margen de fase deteriorando en general el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

Sin embargo, si la función de transferencia de la planta  $G(s)$  es conocida y la excitación a la misma sólo se modifica en los instantes de muestreo, puede predecirse perfectamente en una muestra la señal de salida.

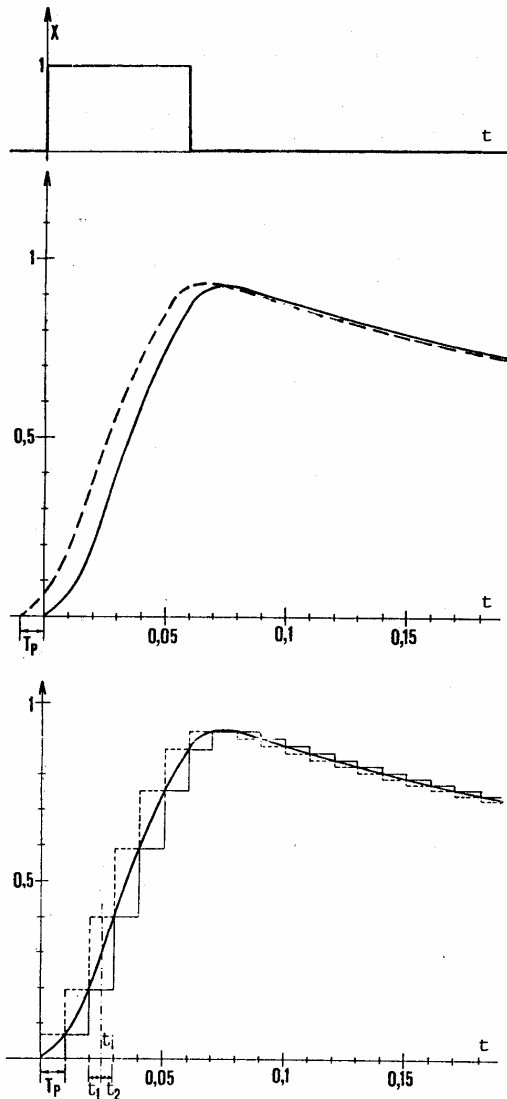


Fig. 11a. -Pulso de excitación.  
 b. -Respuesta y su predicción del sistema de tercer orden.  
 c. -Respuesta continua, muestreada (y reconstituida) y su predicción.

En la fig. 11c se ha representado en línea de trazos la salida del predictor digital ideal de una muestra. Se observa que la salida del predictor satisface el principio de causalidad (la salida no precede a la causa que la provoca) y está adelantada respecto a la salida de la planta analógica en un tiempo  $t_2$  variable entre 0 y T seg.

Al existir un adelanto de tiempo con respecto al sistema analógico, el margen de fase se incrementa mejorando la estabilidad relativa del sistema.

Por otra parte el predictor digital de una

muestra es físicamente realizable, presentándose en una sección posterior una posible implementación del mismo.

### 2.3 Análisis del Sistema Muestreado con Predictor.

Previamente al estudio del sistema con predictor se analizará el deterioro sobre el comportamiento del sistema de lazo cerrado generado por el muestreador y reconstructor de orden cero.

La función que vincula la entrada y la salida del sistema con muestreador y reconstructor en los instantes de muestreo es:

$$A(z) = \frac{c(z-d_1)(z-d_2)}{(z-p_1)(z-p_2)^2} = K.F(z) \quad (11)$$

donde para  $T = 10$  mseg., resulta

$$\begin{aligned} c &= K.5,38.10^{-3} \\ p_1 &= 0,98 \\ p_2 &= 0,135 \\ d_1 &= -0,0876 \\ d_2 &= -1,529 \end{aligned}$$

Los diagramas de Bode correspondientes a la expresión anterior se han graficado en la Fig. 12 a y b hasta la mitad de la frecuencia de muestreo y se obtuvieron reemplazando a  $z$  por  $e^{j\omega T}$ .

Los márgenes de amplitud y fase son ambos negativos de modo que si el sistema es realimentado negativamente en forma unitaria resulta inestable.

La comparación de las Figs. 8 y 12 revela que el comportamiento del conjunto muestreador-reconstructor se aproxima al de un retardo puro dentro de la banda de frecuencias analizada y provoca la inestabilización del sistema realimentado.

El predictor digital debe proyectarse de modo de introducir un adelanto de fase adicional que cancele el deterioro anteriormente analizado.

La función de transferencia del sistema de lazo abierto con un predictor de una muestra incorporado en el lazo de realimentación está dada por:

$$A'(z) = z.A(z) \quad (12)$$

En la Fig. 13 se han graficado los diagramas de amplitud y fase en función de la frecuencia hasta la mitad de la frecuencia de muestreo correspondientes a  $A'(z)$ .

Los diagramas de amplitud de las Figs. 12 y 13 son efectivamente coincidentes, en cambio los diagramas de fase revelan el adelanto de fase introducido por el predictor.

Los márgenes de fase y de ganancia son ambos positivos y valen:

$$\phi = 61,7^\circ \quad a = 20\text{dB}$$

La comparación de las Figs. 10 y 13 muestra

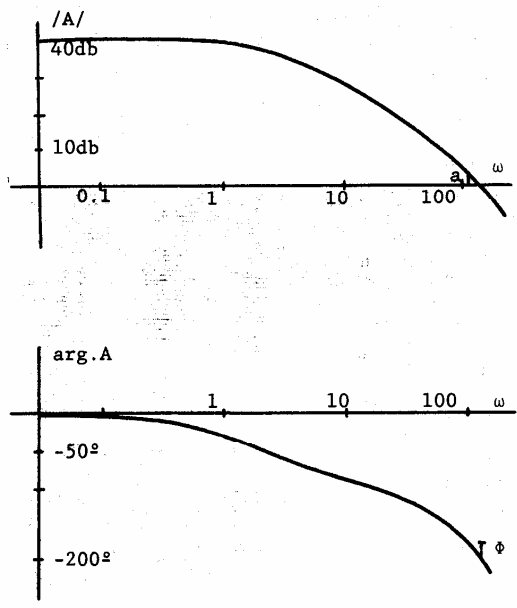


Fig.12.-Diagrama de amplitud y fase del sistema de tercer orden muestreado.

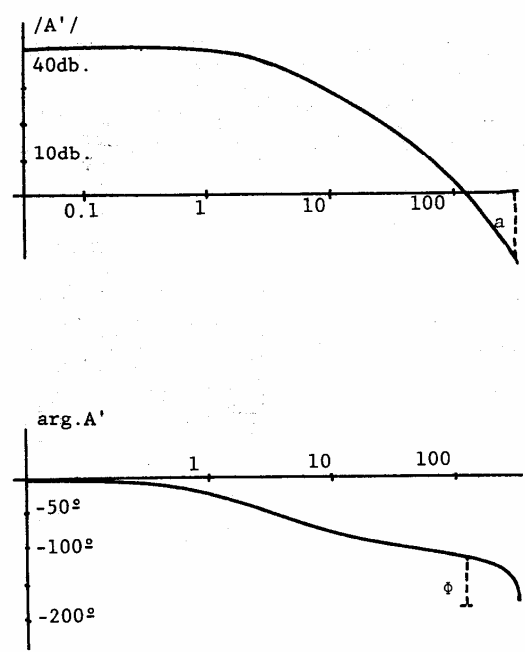


Fig.13a y b.-Diagramas de amplitud y fase del sistema muestreado empleando compensación predictiva.

que el conjunto muestreador, predictor, re- constructor se comporta en forma equivalente a un adelanto puro de aproximadamente  $T/2 = 5$  mseg dentro de la banda de frecuencias analizada compensando la respuesta transitoria del sistema realimentado.

La compensación del sistema analógico puede entonces lograrse incorporando el predictor digital ideal de una muestra en el lazo de realimentación.

2.4 Predictor adaptable

Una posible estructura del predictor puede obtenerse calculando la función de transferencia de lazo cerrado  $T(z)$  del sistema con predictor

$$T(z) = \frac{A(z)}{1+z \cdot A(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (13)$$

Reemplazando (11) en (13) y multiplicando numerador y denominador por  $z^{-3}$

$$T(z) = \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + b_3 \cdot z^{-3}}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - a_3 \cdot z^{-3}} = \frac{N(z)}{1-D(z)}$$

Transformando la ecuación anterior al dominio temporal se obtiene:

$$y_n = b_1 \cdot u_{n-1} + b_2 \cdot u_{n-2} + b_3 \cdot u_{n-3} + a_1 \cdot y_{n-1} + a_2 \cdot y_{n-2} + a_3 \cdot y_{n-3} \quad (14)$$

El diagrama en bloques del predictor basado en la ecuación anterior se ha representado en la Fig. 14.

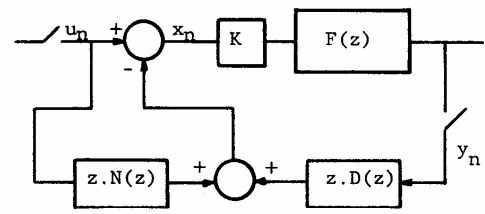


Fig.14.-Posible estructura de implementación para el compensador predictivo.

Los coeficientes del predictor ideal considerado resultan independientes de la señal de excitación de entrada al sistema. Sin embargo, dichos coeficientes son función de los parámetros de la planta a controlar y de la frecuencia de muestreo utilizada. De modo que si los parámetros característicos de la planta son variables en el tiempo o no se conocen con exactitud, las caracterís

ticas del predictor pueden degradarse considerablemente.

Resulta por lo tanto conveniente utilizar un predictor cuyos coeficientes se ajusten en forma automática. Un predictor adaptable puede realizarse ajustando sus coeficientes de modo de hacer mínimo el error de predicción ( $e_p$ ) definido como la diferencia entre la entrada al predictor y su correspondiente salida retardada (Fig. 15).

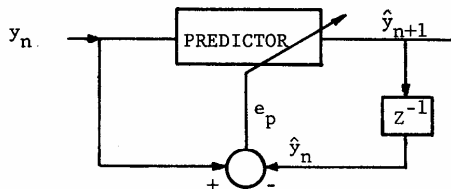


Fig.15.-Esquema básico del predictor adaptable.

De los diferentes algoritmos que pueden utilizarse para estimar en forma iterativa los coeficientes del predictor resulta conveniente emplear el de Widrow por requerir menor número de operaciones y ser fácilmente implementable con un microprocesador.<sup>4,5</sup>

### 3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Las experiencias realizadas, han permitido verificar las propiedades de estabilización que presentan los controladores predictivos, que han sido analizadas en secciones previas.

A solo modo de ejemplo se muestran un par de fotografías que permiten observar las mejoras obtenidas por la introducción de un predictor en el lazo de control implementado con un sistema de microcómputo.

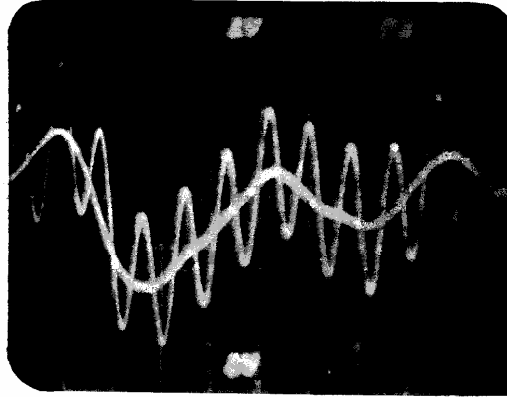
En cada una de las fotografías pueden verse en forma superpuesta la excitación y respuesta de un sistema realimentado de tercer orden. La excitación (la misma para ambas fotografías) es un ruido coloreado obtenido a partir de un generador de ruido que permite obtener una misma señal en forma repetitiva.

La primera fotografía corresponde al sistema sin compensar, como puede observarse la respuesta es netamente oscilatoria. En la fotografía 2 puede verse como al introducir el predictor en el lazo de control, el sistema se estabiliza, quedando la respuesta superpuesta a la excitación. Cabe destacar que el predictor implementado es del tipo adaptable cuyo esquema básico corresponde al de la figura 15.

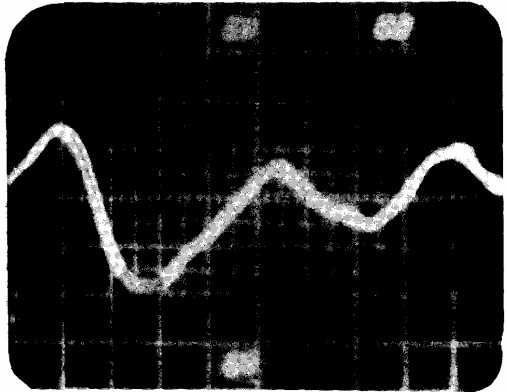
### 4. CONCLUSIONES

En base al análisis realizado puede decirse que la diferencia principal de un compensador predictivo frente a otro tipo de controladores es que presenta, dentro de la banda de frecuencias de interés, un adelanto de

fase, siendo su curva de amplitud constante. Esta característica permite la compensación del sistema con la sola elección del tiempo de predicción necesario para obtener un determinado adelanto de fase en la frecuencia correspondiente al margen de fase. Desde este punto de vista el análisis por medio de los diagramas de amplitud y fase, presenta ventajas sobre otros métodos.



Fotografía 1.-Excitación y respuesta oscilatoria de un sistema realimentado de tercer orden



Fotografía 2.-Excitación y respuesta del mismo sistema que el de la fotografía 1, con compensación predictiva adaptable.

### Agradecimiento

Los autores quieren agradecer la valiosa colaboración prestada por el Director del Laboratorio Ing. Carlos F. Christiansen, como así también a la Srta. Mónica Caviglia y al Sr. Sergio Rodriguez.

### Referencias

- <sup>1</sup> Box G. and Jenkins G., "Time series analysis, Forecasting and control". Holden-Day 1976.
- <sup>2</sup> Marshall J.E., "Control of time-delay Systems". Institution of Electrical Engineers 1979.
- <sup>3</sup> Franklin G. and Powell J., "Digital control of dynamic systems". Addison-wesley. 1980.
- <sup>4</sup> Widrow b., "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter". Proceedings of the IEEE, agosto 1976.
- <sup>5</sup> Tacconi E., Mantz R. y Carasi J. "Implementación de un predictor digital". VI Jornadas de Ingeniería Eléctrica y Electrónica". Mayo 1985. Escuela Politécnica Nacional. Quito Ecuador.
- <sup>6</sup> Tacconi E., Mantz R. y Carasi J., "Utilización de un predictor adaptable como compensador de un sistema realimentado de control". Publicación del P.N.E. febrero de 1983.
- <sup>7</sup> Tacconi E., Mantz R. y Carasi J., "Estabilización de un sistema de control mediante predicción lineal". Publicación del P.N.E. Diciembre de 1982.



RICARDO J. MANTZ. Nació en Argentina en 1955. Se graduó en Ingeniería en Telecomunicaciones en la Facultad de Ingeniería de la Univ. Nac. de la Plata en marzo de 1979. A partir de abril de 1979 es integrante del Lab. de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación de la U.N.L.P. Desde abril de 1980 se desempeña como docente de la Univ. Nac. de la Plata. Actualmente es Investigador Asistente de la Comisión de Inv. Científicas de la Provincia de Buenos Aires.



**BIOGRAFIAS**  
EUGENIO J. TACCONI. Nació en Argentina en 1944. Se graduó en Ingeniería en Telecomunicaciones en la Universidad Nacional de La Plata en 1968. Desde su graduación trabajó en el Laboratorio de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación. Dto. de Física U.N.L.P. en el desarrollo de instrumentos electrónicos. Actualmente es Profesor Adjunto del Dto. de Electrotécnica de la Facultad de Ingeniería, e Investigador Adjunto del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.



JUAN J. CARASI. Nació en Argentina en 1955. Se graduó de Ingeniero en Telecomunicaciones en la Universidad Nacional de la Plata, Argentina en octubre de 1979. A partir de noviembre de 1979 es integrante del Laboratorio de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación (LEICI). Desde abril de 1979 se desempeña como docente de la Facultad de Ingeniería de la Univ. Nac. de la Plata. Actualmente es becario del Consejo Nac. de Invest. Científicas y Técnicas.