

INFLUENCIA DE LA SEÑAL EN LA ESTIMACION DIGITAL DE LOS PARAMETROS DE UN SISTEMA ANALOGICO

Ings. Eugenio J. Tacconi y Ricardo Mantz

Laboratorio de Electrónica Industrial, Control e Instrumentación.
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata

RESUMEN

El objeto del presente trabajo es analizar un aspecto no tratado explícitamente en la bibliografía como es el efecto de la señal de excitación en la estructura y parámetros del modelo digital obtenido a partir de un proceso analógico.

Se analizan brevemente algunos de los métodos de modelización digital más comúnmente empleados en la literatura y se presenta un procedimiento que permite obtener un modelo digital adaptado a una dada forma de señal de entrada.

INTRODUCCION

En la actualidad son utilizados, cada vez con mayor frecuencia, métodos digitales para modelizar, simular o controlar procesos continuos.

Es, por lo tanto, de sumo interés analizar todos los aspectos vinculados a la relación existente entre un proceso analógico y su simil discreto.

Si bien este tema ha sido tratado con profundidad en la literatura, existe un aspecto muy poco analizado que es el de la influencia de la señal de excitación sobre el modelo discreto que simula al proceso.

Teniendo en cuenta este objetivo se analizan brevemente, en primer lugar, los diversos métodos temporales comúnmente empleados para modelizar un proceso analógico.

Posteriormente se estudia, utilizando la descripción por variables de estado, la influencia de la señal de excitación sobre el modelo discreto empleando el método de la transformada Z.

Se presenta además una interpretación física utilizando diferentes reconstructores y se aplican los distintos métodos para modelar una planta analógica.

1. MODELIZACION DISCRETA DE UN PROCESO ANALOGICO

El análisis se limita, por razones de extensión, a sistemas lineales e invariantes en el tiempo. La relación entre las señales de entrada y salida pueden establecerse en el dominio temporal o frecuencial.

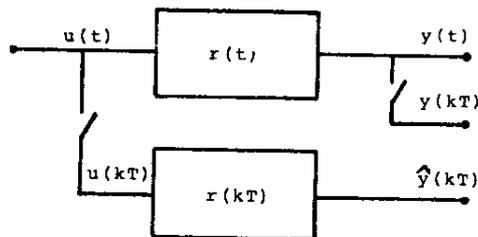


Fig. 1. Diagrama en bloques de la planta analógica y su modelo digital.

En el dominio temporal, las señales de entrada y salida de un sistema lineal, invariante en el tiempo se hallan vinculadas, para procesos monovariantes, a través de una ecuación diferencial del tipo:

$$a_n \ddot{y} + \dots + y = b_m \dot{u}^{(m)} + \dots + b_0 u \quad ; n \geq m \quad \text{ec. (1)}$$

Si r(t) representa la respuesta impulsional del sistema, la salida y(t) puede hallarse a través de la integral de convolución.

$$y(t) = u(t) \otimes r(t) \quad \text{ec. (2)}$$

Si se utiliza la transformación de Laplace es:

$$G(S) = \mathcal{L}[r(t)] = Y(S)/U(S) \quad \text{ec. (3)}$$

Para el caso del sistema dado por la ecuación (1) y considerando condiciones iniciales nulas, la función de transferencia está dada por:

$$G(S) = \frac{b_0 + b_1 S + \dots + b_m S^m}{1 + a_1 S + \dots + a_n S^n} \quad \text{ec. (4)}$$

Las raíces del numerador y denominador de la expresión (4) representan respectivamente los ceros y polos del sistema analógico.

La función de transferencia $G(S)$ del sistema (ec. (4)) es independiente de la señal de excitación empleada. Si sus parámetros son estimados a partir de las señales de entrada y salida, para obtener una buena estimación es necesario que la señal de entrada $u(t)$ excite adecuadamente a todos los modos de oscilación del sistema. [1][2]

1.1. METODOS DE INTEGRACION NUMERICA

Los métodos de integración numérica consisten en aproximar las derivadas de la ecuación (1) por diferencias finitas entre los valores que toma la señal en los instantes de muestreo. [3][4]

La ecuación diferencial (ec. (1)) se transforma en una ecuación de diferencias de la forma:

$$\alpha_n y(k-n) + \dots + y(k) = \beta_m u(k-m) + \dots + \beta_0 u(k) \quad \text{ec. (5)}$$

Diferencia hacia atrás

En esta aproximación se reemplazan las derivadas por la diferencia entre el instante actual y el correspondiente al instante de muestreo previo.

$$d^n y(kT)/dT^n \approx [d^{n-1} y(kT)/dT^{n-1} - d^{n-1} y(kT-T)/dT^{n-1}]/T \quad \text{ec. (6)}$$

Dado que en la transformación de Laplace la operación de derivación se transforma en el operador S , la aproximación anterior corresponde a reemplazar al operador S por la siguiente expresión:

$$S = (1-Z^{-1})/T \quad \text{ec. (7)}$$

Diferencia hacia adelante

Esta aproximación consiste en igualar el segundo miembro de la expresión (6) a:

$$d^n [y(kT-T)]/dT^n$$

y es equivalente a reemplazar al operador S por:

$$S = (Z-1)/T \quad \text{ec. (8)}$$

Integración trapezoidal

Este método que también ha recibido las denominaciones de método de Tustin [3] y transformación bilineal [5] será analizado posteriormente en un ejemplo.

La transformación de la función de transferencia del sistema analógico al muestreo se obtiene mediante el reemplazo siguiente:

$$S = (2/T) (Z-1)/(Z+1) \quad \text{ec. (9)}$$

Los métodos de integración numérica son atractivos por permitir una rápida transformación del modelo continuo al discreto mediante una adecuada sustitución.

Sin embargo las características de ambas funciones de transferencia no siempre son comparables y, dependiendo de la aproximación utilizada, un sistema analógico estable puede conducir a un modelo discreto inestable o viceversa.

Si bien, un análisis más profundo de tal situación excede los alcances de este artículo, algunos conceptos aclaratorios serán vertidos en el ejemplo de aplicación.

1.2. TRANSFORMACION INVARIANTE AL IMPULSO

Consiste en obtener un modelo discreto tal que al aplicar un impulso al sistema la salida del modelo digital coincida con las muestras de la salida del sistema analógico. [4]

El modelo digital se obtiene por aplicación directa de la transformación Z .

$$G(Z) = Z [G(S)] \quad \text{ec. (10)}$$

1.3. CORRESPONDENCIA DE POLOS Y CEROS

A pesar de no hallarse sustentado por un desarrollo teórico preciso, este método es utilizado por su simplicidad [3][5].

Conocida la función de transferencia del sistema analógico $G(S)$, se sintetiza la función de transferencia discreta $G(Z)$ de modo tal que exista una correspondencia de polos y ceros en ambos planos dada por $Z = \exp(ST)$.

El factor de ganancia del sistema discreto es seleccionado de modo que ambos sistemas posean igual ganancia a una dada frecuencia. Por ejemplo $S=0$.

$$G(S) \Big|_{S=0} = G(Z) \Big|_{Z=1} \quad \text{ec. (11)}$$

2. REPRESENTACION EN EL ESPACIO DE ESTADOS

El sistema descrito por la ecuación (1) puede ser representado en el espacio de estados por las ecuaciones (12). [6]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad \text{ec. (12)}$$

Donde $x(t)$ representa al vector de estados y A, B y C son matrices cuyas dimensiones dependen del número de entradas, salidas y estados del sistema bajo análisis.

Para el caso monovariante descrito por la ecuación (1), A es una matriz cuadrada de dimensión n , B un vector columna de n elementos y C un vector fila de n elementos.

Si conocemos las matrices A y B , el vector de estados en un dado instante t_0 y la señal de excitación $u(t)$ a partir de dicho instante, podemos calcular el vector de estados en todo instante $t > t_0$ resolviendo las ecuaciones de estado.

La solución puede hacerse por métodos clásicos o empleando la transformación de Laplace y se obtiene:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta \quad \text{ec. (13)}$$

para $t > t_0$

Donde el término $\exp(At)$ representa a la matriz de transición de estados.

A partir de (12) y (13) la salida del sistema en el instante $t > t_0$ esta dada por:

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta \quad \text{ec. (14)}$$

para $t > t_0$

Nuestro objetivo es obtener una representación discreta del sistema analógico representado por las ecuaciones (13).

Si T representa al intervalo de muestreo, la expresión (13) nos permite calcular el estado del sistema en un dado instante de muestreo en función del estado en el instante precedente y de la señal de excitación aplicada.

$$x(kT+T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta \quad \text{ec. (15)}$$

Mediante un cambio de variables se obtiene:

$$x(kT+T) = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\eta} B u(kT+T-\eta) d\eta \quad \text{ec. (16)}$$

$$y(kT+T) = C x(kT+T)$$

Si denominamos $s.u(kT)$ al término representado por la integral:

$$s.u(kT) = \int_0^T e^{A\eta} B u(kT+T-\eta) d\eta \quad \text{ec. (17)}$$

s es un vector de n dimensiones que depende de la señal de excitación aplicada al sistema entre los instantes kT y $kT+T$.

Las ecuaciones (16) y (17) ponen de manifiesto que el vector s y por lo tanto el modelo discreto del sistema analógico va a ser función de la forma en que la señal de excitación varíe entre los instantes de muestreo.

Si por ejemplo la señal de excitación está formada por funciones impulsivas de Dirac aplicadas en los instantes de muestreo (kT) y de área $u(kT)$ es:

$$s = B \quad \text{ec. (18)}$$

Si en cambio la señal de excitación permanece constante entre instantes de muestreo, es:

$$s = \int_0^T e^{A\eta} B d\eta \quad \text{ec. (19)}$$

Si se aplica la transformación Z a ambos lados de la ecuación (18) y se considera el caso monodimensional de la ec. (1) con condiciones iniciales nulas es:

$$X(Z) [I - Z^{-1} e^{AT}] = Z^{-1} [s.u(kT)] = D(Z).U(Z) \quad \text{ec. (20)}$$

$$G(Z) = Y(Z)/U(Z) = D(Z)/(C [I - Z^{-1} \exp(AT)]) \quad \text{ec. (21)}$$

Donde $D(Z)$ representa un polinomio en Z que, en virtud de lo expresado en el parágrafo precedente, es función del tipo de señal de excitación empleada.

El denominador de la expresión (21) es coincidente con el que se obtiene aplicando los métodos de invarianza al impulso o correspondencia de polos y ceros.

Es decir que cualquiera sea la forma de la señal los polos de la función de transferencia muestreada pueden hallarse directamente por correspondencia de los polos, del sistema analógico, del plano S al Z .

El número y ubicación de los ceros del modelo digital, es decir el orden y las raíces del numerador $D(Z)$, son en cambio función del tipo de señal de excitación utilizada.

3. UTILIZACION DE UN RECONSTRUCTOR DE SERIAL

El desarrollo realizado pone de manifiesto que si muestreamos la señal de excitación a una planta analógica no existe un modelo digital simple que procesando dicha información genere una secuencia discreta que coincida con el muestreo de la salida de la planta.

Por el contrario los modelos paramétricos planteados dependen tanto en orden como en valor de sus parámetros de la señal de excitación empleada.

Se muestra en esta sección una interpretación de esta situación basada en el empleo de un reconstructor.

El problema radica en que el modelo digital debe generar la secuencia de salida basada exclusivamente en el valor que toma la señal de excitación en los instantes de muestreo mientras que el proceso analógico tiene en cuenta lo que sucede entre muestras.

El comportamiento del modelo digital puede entonces analizarse mediante un simul analógico (Fig. 2) tal que a partir de la secuencia de entrada discreta, reconstruya la señal continua de excitación a la planta analógica.

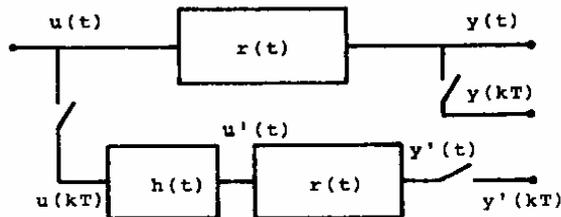


Fig. 2. Diagrama en bloques de la planta analógica y de un modelo que utiliza reconstructor

Si la señal reconstruida $u'(t)$ difiere de la señal original $u(t)$ también la salida $y'(t)$ diferirá de $y(t)$.

Utilizando transformada Z podemos hallar una equivalencia entre el modelo con reconstructor y un modelo digital.

$$G(Z) = \mathcal{Z} [H(S) \cdot G(S)] \quad \text{ec. (22)}$$

Por lo tanto tendremos tantos modelos como reconstructores y su precisión dependerá del tipo de señal empleada.

Los reconstructores, denominados algunas veces convertidores de señales digitales en analógicas, se utilizan operando en tiempo real y obedecen por tanto al principio de causalidad.

Esto significa que el reconstructor no interpola entre puntos discretos de la señal analógica, como los métodos de integración numérica, sino que extrapola a partir de las muestras más recientes hacia la próxima por venir.

La salida actual de un reconstructor de orden m se obtiene a partir de una función de extrapolación basada en las últimas $m+1$ muestras de la señal.

Normalmente la función de extrapolación es un polinomio de orden m que coincide con los valores discretos en los instantes de muestreo [7] [8].

$$h(kT+) = a_m \zeta^m + \dots + a_1 \zeta + a_0 \quad \text{ec. (23)}$$

$$h(kT) = u(kT) \quad \text{para todo } k$$

Si la frecuencia de muestreo es suficientemente elevada con respecto al espectro en frecuencia de la señal, los diversos reconstructores darán salidas equivalentes y no habrá una diferencia apreciable entre las salidas de los diferentes modelos.

En la práctica, teniendo en cuenta la posible contaminación por ruido y la precisión finita de los convertidores, rara vez se opera en las condiciones anteriores [1], [9].

Si la señal de excitación tiene una banda limitada en frecuencia y se utiliza una frecuencia de muestreo igual o superior a la frecuencia de Nyquist podría emplearse un filtro ideal para reconstruir la señal.

Tal reconstructor dará lugar a un modelo digital único para todas las señales de excitación de banda limitada a la mitad de la frecuencia de muestreo.

Sin embargo la utilización de un filtro ideal conduce a un interpolador o reconstructor no causal que no puede realizarse en tiempo real.

4. INFLUENCIA DE LA FORMA DE LA SEÑAL DE EXCITACION

Con el fin de comparar los distintos métodos en lo referente a la influencia de la forma de la señal de excitación, se analizará el caso de una planta analógica de función de transferencia:

$$G(S) = Y(S)/U(S) = a/(S+a) \quad \text{ec. (24)}$$

Que corresponde a la ecuación diferencial:

$$\dot{y}(t) = -a y(t) + a u(t) \quad \text{ec. (25)}$$

Integrando en ambos miembros resulta:

$$y(kT+T) = y(kT) + \int_{kT}^{kT+T} f(t) dt \quad \text{ec. (26)}$$

Donde $f(t) = -a \cdot y(t) + a \cdot u(t)$

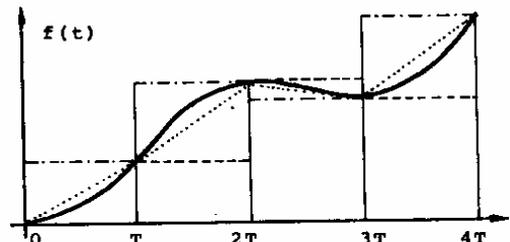


Fig. 3. --- Rectángulo hacia adelante
- - - Rectángulo hacia atrás
... Trapecio

Los métodos de integración numérica reciben dicho nombre porque aproximan en forma discreta la integral de la ecuación (26) [3]. En la figura 3, se han representado las distintas aproximaciones.

Los resultados que se obtienen aplicando los distintos métodos de la sección 1 son los siguientes:

Rectángulo hacia adelante:

$$G(Z) = aT / (Z-1+aT) \quad \text{ec. (27)}$$

Rectángulo hacia atrás:

$$G(Z) = aT \cdot Z / [Z(1+aT)-1] \quad \text{ec. (28)}$$

Trapecio:

$$G(Z) = aT(Z+1)/[Z(2+aT)+aT-2] \quad \text{ec. (29)}$$

Correspondencia polo-cero:

$$G(Z) = [1-\exp(-aT)]/[Z-\exp(-aT)] \quad \text{ec. (30)}$$

Transformación invariante al impulso:

$$G(Z) = a \cdot Z / [Z-\exp(-aT)] \quad \text{ec. (31)}$$

4.1. REPRESENTACION EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Para el caso presente las matrices de la expresión (12) están dadas por:

$$A = -a ; B = a ; C = 1$$

La ecuación (16) resulta:

$$y(kT+T) = e^{-aT} y(kT) + \int_0^T e^{-a(T-\tau)} u(kT+T-\tau) d\tau \quad \text{ec. (32)}$$

Para obtener un modelo discreto es necesario aproximar la integral de la ecuación (32) que es función de la señal de excitación a la planta.

Comparando esta expresión con la utilizada en los métodos de integración numérica (ecuación 26) se visualiza la diferencia entre ambos métodos.

En los métodos de integración numérica la aproximación se realiza sobre una función $f(t)$ que depende no solo de las entradas a la planta sino además de su salida.

Cuando se emplea la representación en el espacio de estados solo debe aproximarse a la forma de la señal de excitación a la planta. El efecto del estado anterior sobre el actual es tenido en cuenta a través de la matriz de transición de estados.

Cuando la frecuencia de muestreo no es muy superior a la frecuencia de corte del sistema análogo, la diferencia entre ambas aproximaciones resulta esencial.

El modelo discreto obtenido en el espacio de estados preserva las características principales de respuesta libre del sistema análogo cualquiera sea la aproximación utilizada.

Los métodos de integración numérica, en cambio, al aproximar no solo el efecto de la señal de entrada sino además la influencia de la salida previa sobre la actual, no preservan las características del sistema original.

Esto significa que la respuesta transitoria del modelo discreto obtenido mediante los métodos de integración numérica depende de la aproximación utilizada y puede diferir notablemente de la de su símil analógico. Incluso, como se ha mencionado anteriormente, un sistema analógico estable puede dar lugar a un modelo discreto inestable y viceversa.

Para el caso particular de una planta de primer orden, si modelamos a la señal de excitación con funciones impulsivas de Dirac aplicadas en los instantes de muestreo $(kT+)$ y de área $u(kT)$ se obtiene:

$$G(Z) = a \cdot Z / [Z - \exp(-aT)] \quad \text{ec. (33)}$$

Si se supone en cambio que la señal de excitación permanece constante entre dos instantes de muestreo sucesivos, se obtiene:

$$G(Z) = [1 - \exp(-aT)] / [Z - \exp(-aT)] \quad \text{ec. (34)}$$

4.2. RECONSTRUCTORES

La obtención de un modelo digital equivalente mediante la utilización de reconstructores permite interpretar físicamente las aproximaciones realizadas en el espacio de estados y es analizada únicamente, por razones de extensión, en sistemas de una entrada, una salida, aun cuando puede fácilmente ser extendido a sistemas multivariables.

La función de transferencia del modelo digital utilizando el método del reconstructor equivalente está dado por:

$$G(Z) = \mathcal{Z} [H(S) \cdot G(S)] \quad \text{ec. (35)}$$

La figura 4 permite visualizar la aproximación realizada por el empleo de diversos reconstructores.

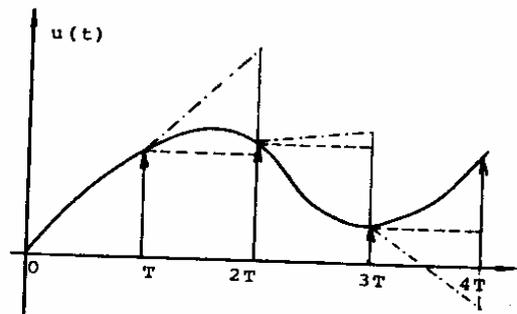


Fig. 4. ↑ Muestreador Ideal
 --- Reconstructor de orden 0
 - - - Reconstructor de orden 1

Muestreador Ideal:

Un muestreador ideal está formado por una llave que si bien se cierra durante un intervalo de tiempo infinitesimal es capaz de suministrar energía a una planta analógica.

Es decir que su salida se compone de funciones impulsivas de Dirac de área proporcional a la amplitud de la excitación en el instante de muestreo.

Esto es equivalente a no utilizar reconstructor. Es decir que $H(S) = 1$.

$$G(Z) = \mathcal{Z} [G(S)] = a \cdot Z / [Z - \exp(-aT)] \quad \text{ec. (36)}$$

Reconstructor de Orden 0:

$$G(Z) = [(Z-1)/Z] \mathcal{Z} [G(S)/S] = [1 - \exp(-aT)] / [Z - \exp(-aT)] \quad \text{ec. (37)}$$

Reconstructor de Primer Orden:

$$G(Z) = \frac{(Z-1)}{Z} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(S+1/T)}{S} \right]^k G(S) \quad \text{ec. (38)}$$

$$G(Z) = \frac{A(Z+B)}{Z [Z - \exp(-aT)]} \quad \text{ec. (39)}$$

Donde:

$$A = [2aT - 1 + (1-aT)\exp(-aT)] / aT$$

$$B = [1 - aT - \exp(-aT)] / [2aT - 1 + (1-aT)\exp(-aT)]$$

5. COMPARACION DE LOS METODOS ANALIZADOS

Empleando los métodos de integración numérica, tanto los ceros como los polos del modelo digital dependen de la aproximación empleada.

La posición relativa de las raíces empleando distintos métodos depende de la frecuencia de muestreo empleada. Si aumentamos la frecuencia de muestreo las raíces del sistema analógico corresponden a raíces en el plano Z que se acercan al valor $Z=1$.

Si en la función de transferencia obtenida empleando un reconstructor de orden cero se reemplaza la exponencial por su desarrollo en serie limitado a dos términos se obtiene la función de transferencia correspondiente al método de integración numérica con aproximación rectangular hacia adelante.

Para comparar modelos digitales con diferente configuración cero-polar se suele excitar a los mismos con una señal de referencia y se mide la diferencia entre sus salidas.

Se ha mostrado que el modelo digital depende de la forma elegida para la señal de entrada. Esto significa que el comportamiento de cada modelo mejora en la medida en que la forma de la señal de excitación se aproxima a la elegida y se degrada en caso contrario.

Esto explica porque la respuesta en frecuencia de los modelos digitales invariantes al impulso puede diferir considerablemente de la de su similitud analógico.

Por esta razón cuando se desea que los modelos analógico y digital tengan similar respuesta en frecuencia se utilizan métodos frecuenciales, cuyo objetivo consiste precisamente en que el comportamiento de ambos modelos se aproxime en una dada banda de frecuencias. [5]

En base al desarrollo presentado aquí este objetivo también podría lograrse en el plano temporal empleando señales cuya distribución espectral de potencia coincida con la banda de frecuencias utilizadas [10].

6. CONCLUSIONES

Del análisis realizado sobre la obtención de un modelo digital a partir de su similitud analógico, se desprende que la forma de la señal de excitación tiene suma importancia.

Por tal motivo para modelizar digitalmente a un proceso analógico es importante tener en cuenta el objetivo de la modelización a realizar.

Si para modelizar a la planta se dispone de su respuesta a una excitación tipo (impulso, escalón, senoide etc.) y se posee además de un conocimiento a priori de la forma real de la señal de excitación en operación; para obtener un modelo adecuado es de fundamental importancia utilizar el conocimiento que se dispone.

Se ha presentado un método que permite obtener un modelo digital a partir del conocimiento a priori de la señal real de excitación al proceso analógico.

Este método resulta especialmente útil en los casos de control digital en los cuales la forma de la señal de excitación es conocida por provenir de un reconstructor de orden dado.

REFERENCIAS

- [1] Isermann R., Digital Control Systems Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1981.
- [2] Astrom K., Eykhoff P., Automatica, Vol. 7, pp 123-162. Pergamon Press, 1971.
- [3] Franklin G., Powell D., Digital Control, Capítulo 3, Addison-Wesley, Sydney, 1980.
- [4] Oppenheim A., Digital Signal Processing, Cap. 5, Prentice-Hall, 1975
- [5] Rabiner L., Gold B., Theory and Application of Digital Signal Processing, Capítulo 4, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [6] Strojic V., State Space Theory of Discrete Linear Control, John Wiley, New York, 1981.
- [7] Cadzow J., Martens H., Discrete-Time and Computer Control Systems, Cap. 3 Prentice-Hall, New York, 1970.
- [8] Tretter S., Introduction to Discrete Time Signal Processing, Capítulo 3, John Wiley, New York, 1976.
- [9] Sinha N., et al., Choice of the sampling interval for the identification of continuous-time systems from samples of input/output data, IEEE Proceedings, Vol. 132, No 6, pp 263-267, Noviembre 1985.
- [10] Miller D., A time-domain approach to Z-domain model identification, Int. J. Control, pp 1285-1295, Vol 44, No 5., 1986.