

# PROPAGACION DE ONDAS CORTAS A GRANDES DISTANCIAS. APROXIMACION ADIABATICA

FISIC, PALMA, ROCIO  
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

## RESUMEN

La aproximación adiabática aplicada a las ecuaciones de onda en un medio débilmente no homogéneo permite reducir el número de parámetros que determinan las características más importantes de la propagación de ondas de radio cortas a grandes distancias.

Empleando el lenguaje de la mecánica y la óptica geométrica se obtiene para la trayectoria del rayo una expresión que se integra en cuadratura. Esta expresión es exacta para cuando las variaciones del medio, en este caso la ionósfera, en la dirección horizontal son suficientemente lentas o adiabáticas.

### 1. INTRODUCCION

Quando la recepción de la señal se realiza luego de uno o dos saltos, puede suponerse la ionósfera variable solo en una dirección: la altura  $z$  con respecto a la tierra. Pero cuando el rayo se propaga a grandes distancias pasa por espacios de la ionósfera con características esencialmente diferentes como son: su lado diurno y nocturno; sus zonas: ecuatorial, de latitudes medias y polar; en este caso se hace prioritario el análisis tomando en cuenta la no uniformidad del medio tanto en la dirección vertical cuanto en la horizontal.

En la actualidad la teoría está en un proceso de desarrollo quedando aún muchos problemas por ser resueltos, como son: resonancia, influencia del campo magnético de la tierra, dispersión, enfoque y otros efectos ondulatorios.

#### 1.1. IONOSFERA ESFERICAMENTE SIMETRICA

Un problema bastante bien estudiado y que puede ser considerado como una primera aproximación en el estudio, es el que considera la ionósfera esféricamente simétrica. Sin embargo de que es el caso más simple permite obtener muchas de las características más importantes de la propagación.

Así, partiendo de las ecuaciones de Maxwell.

$$\begin{aligned} \nabla_{\times} \vec{E} &= -i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= P \\ \nabla_{\times} \vec{H} &= +i\omega\tilde{\epsilon}\vec{E} + \vec{J} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - \frac{i\sigma}{\omega}$$

$\vec{J}$  y  $P$  - densidad de corriente y carga de la fuente.

Para campos libres  $\vec{J} = 0$  y  $P = 0$  de 1) obtenemos la ecuación:

$$\Delta \vec{E} - \nabla \nabla \cdot \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0 \quad ; \quad K^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon}(r) \mu \quad (2)$$

que describe la propagación de ondas electromagnéticas lejos de las fuentes (antenas); en un medio no uniforme  $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$ . En el caso general la resolución es compleja pero cuando  $\epsilon = \epsilon(r)$  o sea el medio puede considerarse esféricamente simétrico (2) se simplifica ya que pueden obtenerse ecuaciones separadas para cada una de las componentes del campo.

De acuerdo con principios generales una función vectorial arbitraria  $\vec{J}$  puede ser expresada como la superposición de dos funciones  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  tales que:

$$\nabla_{\times} \vec{J}_1 \neq 0 \quad \nabla \cdot \vec{J}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 0$$

$$\nabla_{\times} \vec{J}_2 = 0 \quad \nabla \cdot \vec{J}_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 = \frac{1}{\omega} \nabla \cdot \vec{J}_2$$

Es más cómodo buscar los campos a través de funciones radiales arbitrarias, así

$$\vec{E}_1 = \nabla_{\times} \vec{A}_1 \quad , \quad \vec{A}_1 = A_1 \vec{e}_r$$

$$\vec{J}_1 = \nabla_{\times} \vec{J} \quad , \quad \vec{J} = j \vec{e}_r$$

Definiendo adecuadamente la  $\nabla \cdot \vec{A}_1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \text{Sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{Sen} \theta \frac{\partial A_1}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2} \text{Sen}^2 \theta \frac{\partial^2 A_1}{\partial \phi^2} + \\ + K^2 A_1 = -i\omega \mu j \end{aligned} \quad (3)$$

Los campos excitados por  $\vec{J}_2$  los obtenemos -  
definiendo

$$\vec{H}_2 = \nabla_X \vec{A}_2$$

$$\vec{J}_2 = \nabla_G$$

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \text{Sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{Sen} \theta \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} + K^2 A_2 = -g_r \quad (4)$$

$$\vec{g} = GV \ln c$$

Las soluciones (3) y (4) es natural buscar las por el método de separación de variables.

$$A_i(r, \theta, \phi) = Z(r) Y(\theta, \phi)$$

La parte angular de ambas ecuaciones se expresa a través de funciones esféricas. Para la parte radial tenemos:

$$\text{Para (3)} \quad \frac{d^2 Z}{dr^2} + \left( K^2 + \frac{C}{r^2} \right) Z = 0 \quad (5)$$

$C = -P(p+1)$  - para una función  $Y(\theta, \phi)$  del orden  $P$

Para (4) introduciendo nuevas variables -  
 $\psi(r) = Z(r) \sqrt{\epsilon r}$  y  $\zeta = \ln r$

tenemos:

$$\frac{d^2 \psi}{d\zeta^2} + [C + W(\zeta)] \psi = 0$$

$$W(\zeta) = K^2 r^2 - \sqrt{\epsilon r} \frac{d^2}{d\zeta^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon r}} \right)$$

esta puede ser reducida a (5) si se toma en cuenta que  $\epsilon(r)$  varía lentamente.

Analizando (5) y haciendo

$$K^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \tilde{\epsilon}(r) \mu = K_0^2 n^2(r)$$

$$Z = r - R_0$$

$R_0$  - radio de la tierra

$$\frac{d^2 \psi}{dZ^2} + K_0^2 (E - U(Z)) \psi = 0 \quad (6)$$

$$E = -\frac{C}{K_0^2}$$

$$U(Z) = -n^2(Z) + \frac{2Z}{R_0} E$$

$$0 \leq -E \leq 1$$

Para obtener esta expresión no se ha tomado en cuenta la parte imaginaria de  $\epsilon$ , ni la influencia del campo magnético de la tierra, situación que tiene lugar cuando:

$$\omega^2 \gg \omega_B^2 ; \quad \omega_B = \frac{eB}{m}$$

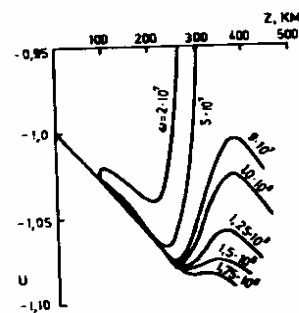
$$\omega \gg \nu ; \quad \nu \text{ frecuencia de}$$

las colisiones. O sea frecuencias suficientemente altas, que, para que puedan propagarse deben ser emitidas bajo ángulos pequeños con el horizonte terrestre. En este caso

$$\tilde{\epsilon}(r) = 1 - \frac{\omega p^2}{\omega^2} ; \quad \omega p^2 = \frac{N(z)e^2}{mc\omega}$$

$N(z)$  concentración de los electrones

La función  $U(z)$  está determinada por  $N(z)$ ; como es conocida la ionósfera posee capas bien definidas, al pasar la frontera de separación de dichas capas  $N(z)$  sufre variaciones abruptas por lo que  $U(z)$  es en general una función no monótona de la altura.



Perfil característico de la función  $U(Z)$  para la ionósfera nocturna.

GRAFICO N° 1

Como se puede apreciar a frecuencias no muy grandes  $U(Z)$  tiene uno - dos máximos que corresponden a la capa E y F. La influencia de la ionósfera se debilita con la frecuencia  $\omega$ .

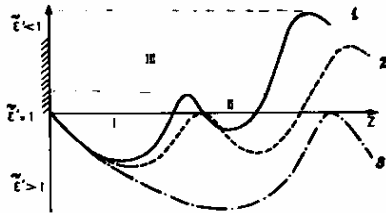
La ecuación (6) es idéntica a la ecuación de Schrödinger para una partícula que se mueve en un pozo potencial correspondiente a los mínimos de la función  $U(Z)$ .

En el lenguaje ondulatorio significa que en los mínimos de  $U(Z)$  aparecen canales en los cuales puede propagarse la onda electromagnética.

La superficie de la tierra refleja bastante bien estas ondas por lo que en  $Z = 0$  forma una barrera potencial de altura infinita.

La función E, constante para una frecuencia determinada en este contexto tiene sentido de energía.

La onda puede propagarse entre la tierra y la capa E (Canal I), la tierra y la capa F (Canal III) y entre la capa E y la F (Canal II).



Diferentes aspectos del potencial característico U:

- 1)  $f < f_{MUF,E}$  2)  $f = f_{MUF,E}$  3)  $f = f_{MUF,F}$

Las líneas entrecortadas separan diferentes espacios de propagación o canales.

GRAFICO N° 2

### 1.2. IONOSFERA HORIZONTALMENTE NO UNIFORME

Sin embargo que en condiciones reales la ionósfera varía muy lentamente en la dirección horizontal X, matemáticamente esto se expresa como:

$$n = n(Z, X)$$

$$\left| \frac{\partial n / \partial X}{\partial n / \partial Z} \right| \sim 10^{-2}$$

Estas variaciones horizontales serán determinantes en la propagación a grandes distancias.

Debido a que con gran aproximación se cumple la condición

$$\frac{\lambda}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial Z} \ll 1$$

$\lambda$ , longitud de onda. Es factible utilizar la aproximación de la óptica geométrica.

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp iS(\vec{r})$$

$\vec{E}_0(\vec{r})$  - amplitud de variación lenta con  $\vec{r}$

$S(\vec{r})$  - eiconal, función de variación rápida con  $\vec{r}$ .

En este caso el coeficiente de refracción n se expresa a través de S como:

$$|\nabla S| = n, \quad \vec{l} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \text{ vector unitario tangente a la trayectoria}$$

$$(n)^2 = (\nabla S)^2 = \epsilon(r)\mu \quad (7)$$

En coordenadas esféricas:

$$\vec{n} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \left\{ \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta}, \frac{1}{r} \text{Sen}\theta \frac{\partial S}{\partial \phi} \right\} =$$

$$\{n_r, n_\theta, n_\phi\}$$

Tomando la gradiente de (7) obtenemos:

$$\left[ n_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n_r}{r} + \frac{n_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{n_\phi}{r \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] n_r =$$

$$= -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n^2)$$

$$\left[ n_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n_r}{r} + \frac{n_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{n_\phi}{r \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] n_\theta =$$

$$\frac{\text{ctg}\theta}{r} n_\phi^2 = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (n^2)$$

$$\left[ n_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n_r}{r} + \frac{n_\theta}{r} + \frac{n_\theta}{r} \text{ctg}\theta + \frac{n_\phi}{r \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] n_\phi =$$

$$= -\frac{1}{2r \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (n^2)$$

Las ecuaciones de las características para este sistema de ecuaciones nos da:

$$\frac{d_r}{n_r} = \frac{rd_\theta}{n_\theta} = \frac{r \text{Sen}\theta d_\phi}{n_\phi} = \frac{dn_r}{\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (n^2) - \frac{n_r}{r}} =$$

$$= \frac{dn_\theta}{\text{ctg}\theta \frac{n_\phi}{r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial n^2}{\partial \theta} - \frac{n_r n_\theta}{r}} = \quad (8)$$

$$= \frac{dn_\phi}{\frac{1}{2r \text{Sen}\theta} \frac{\partial n^2}{\partial \phi} - \frac{n_\theta}{r} \text{ctg}\theta n_\phi - \frac{n_r n_\phi}{r}}$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{d r}{d \theta} = \frac{r n_r}{n_\theta}$$

$$\frac{d \phi}{d \theta} = \frac{n_\phi}{n_\theta \text{Sen} \theta}$$

Diferenciando estas relaciones por  $\theta$  y expresando  $\frac{dn_r}{d\theta}$ ,  $\frac{dn_\phi}{d\theta}$  y  $\frac{dn_\theta}{d\theta}$  con ayuda de (8) tenemos:

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{1}{2n_\theta^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n^2) - \frac{r n_r}{2n_\theta^3} \frac{\partial n^2}{\partial \theta} - \frac{r n_r n_\phi}{n_\theta^2} \text{ctg} \theta + \frac{r n_r^2}{n_\theta^2}; \frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + 2 \text{Ctg} \theta \frac{d\phi}{d\theta} + \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 =$$

(10)

$$= \frac{1}{2n_\theta^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} n^2 - \frac{1}{2n_\theta^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} n^2 - \frac{1}{2n_\theta^2} \frac{d\phi}{d\theta} \frac{\partial n^2}{\partial \theta}$$

En una ionósfera débilmente no uniforme en la dirección horizontal y ondas que se propaguen bajo ángulos pequeños podemos definir los siguientes parámetros.

$$\frac{\Delta Z}{R_0} \sim v \ll 1; \quad \alpha_0 \ll 1; \quad \frac{K_r}{K} \ll 1$$

$$\delta \sim \frac{\frac{1}{R_0} \frac{\partial N_e}{\partial \theta}}{\frac{\partial N_e}{\partial Z}} \sim 10^{-2} \quad \delta \sim \frac{\frac{\partial N_e}{\partial \phi}}{\frac{\partial N_e}{\partial Z}} \sim 10^{-2}$$

En este caso la solución de (10) puede ser buscada como serie en potencias de estos parámetros.

La aproximación cero de (10) es:

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + 2 \text{ctg} \theta \frac{d\phi}{d\theta} + \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 = 0$$

de aquí:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = - \frac{C}{\text{Sen} \theta \sqrt{\text{Sen}^2 \theta - C^2 \text{Cos}^2 \theta}} \quad (11)$$

$$\text{tg} \text{Sen} (\phi - \beta) = C$$

C y  $\beta$  constante de integración

(11) Representa la familia de curvas que se obtiene al intersectar una esfera con planos que pasan por su centro. Por lo tanto en la aproximación cero la trayectoria del rayo se encuentra en los planos de los círculos mayores.

La salida del rayo de este plano se describe con la aproximación de primer orden.

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} + 2 \text{ctg} \theta \frac{d\phi}{d\theta} + \text{Cos} \theta \text{Sen} \theta \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 \sim \frac{1}{2} *$$

$$* (1 + \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)_0 \text{Sen} \theta) \left\{ \frac{1}{\text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial n^2}{\partial \theta} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_0 \frac{\partial n^2}{\partial \theta} \right\}$$

Aquí se ha tomado en cuenta que las correcciones en la trayectoria no son muy grandes, matemáticamente:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)_0 + \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)_1; \quad \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right|_1 \ll \left| \frac{d\phi}{d\theta} \right|_0$$

## 2. APROXIMACION ADIABATICA

Se ha dado un parámetro  $P_1$  que puede ser la altura efectiva del canal; si dicho parámetro varía lentamente durante un período de oscilación del rayo  $\theta$ , o sea

$$\theta \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \ll P_1 \quad (12)$$

Se dice que  $P_1$  varía adiabáticamente

El parámetro

$$\mu = \frac{\theta}{Z} \frac{\partial P_1}{\partial \theta P_1} \ll 1$$

Se denomina parámetro de adiabaticidad

Si existe una función de  $P_1$  que varíe con el mismo "ritmo" y por lo tanto la relación  $f = f(P_1)$  permanece constante se dice que dicha relación es un invariante adiabático.

Como se demostrará al analizar los canales ionosféricos se encontrarán integrales aproximadas que con gran exactitud determinan la trayectoria del rayo. Estas integrales se denominan invariantes adiabáticas.

$$\frac{dZ}{d\theta} = \frac{rK_z}{K_0} = \pm \frac{R_0 \sqrt{E-U}}{\sqrt{-E}} = R_0 \sqrt{E-U}$$

aquí se han utilizado las relaciones

$$K^2 = K_z^2 + K_0^2, \quad Z = r - R_0; \quad z \ll R_0$$

$rK_0 = q$  Ley de Snell para medios esféricamente estratificados

$$-E = \frac{q^2}{K_0^2 R_0^2}$$

Diferenciando por  $\theta$  nuevamente

$$\frac{d^2 Z}{d\theta^2} = -\frac{R_0^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (14)$$

esta ecuación es el análogo clásico de la ecuación de Schrödinger.

Ahora podemos suponer que  $n$  es una función de variación lenta con  $\theta$ , y utilizar (13) pero  $E$  ya no sería una función constante y estaría por definirse.

$$\frac{1}{R_0^2} \left( \frac{dZ}{d\theta} \right)^2 + U = E(\theta)$$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{2}{R_0^2} \frac{dZ}{d\theta} \frac{d^2 Z}{d\theta^2} + \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{dZ}{d\theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Tomando en cuenta (14)

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{Z=Z(\theta)} \quad (15)$$

Prolongando la analogía mecánica del movimiento de una partícula en un pozo potencial de variaciones adiabáticas con el tiempo, recordando que en este caso se define el invariante  $I$  adiabático como

$$I = C \int p dq$$

$p$  impulso,  $q$  coordenada

y suponiendo que nuestra función  $E$  juega el papel de la energía, podemos definir un invariante adiabático para la propagación de las ondas en una ionósfera horizontalmente-uniforme como:

$$I = \frac{4}{R_0} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \sqrt{E-U} dZ \quad (16)$$

$Z_{\min}$ ,  $Z_{\max}$  a los puntos de reflexión, y pueden ser determinados de la siguiente manera:

En la aproximación de la óptica geométrica la solución a(6) se escribe como:

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{K(Z)}} e^{i \int K(Z) dZ}; \quad K(Z) = \pm K_0 \sqrt{E-U(Z)}$$

En el canal la onda resultante es la superposición de las ondas incidente y reflejada por eso

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{K(Z)}} \text{Sen} \left( \int_{Z_{\min}}^Z K(Z) dZ + C \right) = \frac{C}{\sqrt{K(Z)}} * \\ * \text{Cos} \left( \int_Z^{Z_{\max}} K(Z) dZ + \chi \right)$$

$\chi$  una variación de fase que depende de las características de reflexión de la barrera.

$Z_{\min}$  y  $Z_{\max}$  puntos de reflexión se determinan de la condición

$$K(Z) = 0 \quad \delta \quad E - U(Z) = 0 \quad (17)$$

Aunque  $Z_{\min}$ ,  $Z_{\max}$ ,  $E$  y  $U$  varían con  $\theta$  la función  $I$  definida por (16) permanece casi constante si se cumple la condición  $\mu \ll 1$ ; comprobemos:

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{2}{R_0} \left\{ (\sqrt{E-U})_{Z_{\max}} \frac{dZ_{\max}}{d\theta} + (\sqrt{E-U})_{Z_{\min}} * \right. \\ * \left. \frac{dZ_{\min}}{d\theta} \right\} + \frac{2}{R_0} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \frac{dE}{d\theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{dZ}{\sqrt{E-U}} dZ \sim 0$$

Donde se han utilizado las expresiones (15) y (17).

Por otro lado como se puede apreciar  $I$  es una integral aproximada de la trayectoria definida por (14) y se conserva en un canal ionosférico cuyas características varían lentamente. Esta solución se denomina a aproximación adiabática.

La trayectoria del rayo en esta aproximación se determina por  $E$ , su dependencia con  $\theta$  se obtiene de la conservación del invariante adiabático.

$$I(E, \theta) = I_0$$

$$E = E(\theta, I_0)$$

Esta última relación define la variación de  $E$  a lo largo de la trayectoria para un valor inicial  $I_0$ .

Otras características importantes de la propagación se definen a través de  $E(\theta)$  de la siguiente manera:

$$\text{De} \quad E(\theta) - U(Z_m, \theta) = 0 \quad (18)$$

obtenemos  $Z_{\min}$  y  $Z_{\max}$  trayectoria en el plano vertical o sea la dependencia de

$Z(\theta)$  se obtiene de (14).

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{R_0} \int_{Z_0}^Z \frac{dZ}{\sqrt{E(\theta, I_0) - U(Z, \theta)}} \quad (19)$$

El período de oscilación del rayo

$$\theta = \frac{2}{R_0} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \frac{dZ}{\sqrt{E(\theta, I_0) - U(Z, \theta)}} = \frac{dI}{dE}$$

En el gráfico 2 con líneas punteadas se han separado diferentes espacios de propagación. La línea 1 diferencia los canales II y III; 2 I y III, 3 limita el canal III.

La posición de estas líneas se encuentran de las relaciones:

$$E_{mi}(\theta) - U_{mi}(Z, \theta) = 0 \quad i=1,2,3$$

y determinan trayectorias muy particulares del rayo.

Los invariantes adiabáticos que corresponden a estas trayectorias serán:

$$I_{mi} = \frac{4}{R_0} \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} |U_{mi} - U(Z)|^{1/2} dZ$$

El invariante adiabático de cualquier onda que se propaga por el canal es menor que el invariante máximo  $I_m$  para el canal.

$$I_m = I_m(r, \theta, \phi)$$

Analicemos la trayectoria de un rayo caracterizado por un invariante  $I_0 = \text{Const.}$  El rayo se propagará en el canal hasta que:

$$I_0 < I_m(\theta)$$

de lo contrario saldrá del canal, recordemos que  $I$  es una función de la frecuencia principalmente y la forma de  $U(Z)$ .

Para un rayo que se propaga cerca de la línea de separación existe un punto crítico  $\theta = \theta_S$  definida por

$$I_m(\theta_S) = I_0$$

Es importante que en el entorno de este punto dejan de cumplirse las condiciones para la aplicabilidad del método: En este punto  $\theta$  diverge y la condición  $\mu \ll 1$  no tiene lugar.

Este caso exige un análisis especial que lleva a la conclusión que en  $\theta = \theta_S$  el invariante adiabático varía de un salto

$$I_0|_{\theta_S} = I_0(\theta_S + 0) - I_0(\theta_S - 0)$$

$E$  y  $\theta$  son continuas

$$E(\theta_S - 0) = E(\theta_S + 0)$$

$$Z(\theta_S - 0) = Z(\theta_S + 0)$$

y la fase  $\phi$  de las oscilaciones es discontinua la magnitud del salto puede encontrarse determinando la trayectoria hasta el punto más cercano de giro  $\theta_M$ . De satisfacerse la relación  $\phi(\theta_M) - \phi(\theta_m) = \pi$

$$\theta_m > \theta_S$$

Por ejemplo para salir del canal II  $I_0$  que era igual a  $I_{m2}$  - invariante máximo de II, varía a  $I_{0m} = I_{m3}$  - invariante mínimo del canal III.

Las expresiones anteriores pueden considerarse condiciones de borde para el problema planteado.

Concretamente la trayectoria del rayo se construirá de la siguiente manera:

Para un valor inicial  $I_0$  se busca el primer punto de discontinuidad  $\theta_{S1}$  ó  $I_0 =$

$I_m(\theta_{S1})$  hasta  $\theta_{S1}$ .  $E(\theta, I_0)$  se determina a través de  $I_0$  y se calculan los puntos extremos de (18),  $\theta = \theta(Z)$  con (19).

En el punto  $\theta = \theta_{S1}$ ,  $I = I_{01}$  y para  $\theta > \theta_{S1}$   $E = E(\theta, I_{01})$ ; en (18) y (19) se sustituye este nuevo valor de  $E$  y se obtienen  $Z_{\min}$ ,  $Z_{\max}$  y  $\theta$ . La existencia de la discontinuidad abrupta se deben a la aproximación utilizada. La solución numérica de las ecuaciones de onda en  $\theta_S$  muestra que no existe una transición abrupta gracias a la existencia de otros efectos ondulatorios que en esta aproximación no se tomaron en cuenta.

## CONCLUSIONES

En una ionósfera débilmente no homogénea las ecuaciones de la óptica geométrica para la trayectoria del rayo, en la aproximación adiabática se integran en cuadratura. Esta aproximación permite definir todas las características fundamentales como son la trayectoria y la fase de las oscilaciones.

Para valores de  $\mu \ll 1$  esta aproximación de una solución suficientemente satisfactoria.  $\mu$  depende esencialmente del modo elegido para la ionósfera.


## REFERENCIAS

- LANDAU-LIFSHITZ Mecánica cuántica (Teoría no relativista) Ed. Reverté 1967. Cap.VII.
- LANDAU-LIFSHITZ Mecánica Ed. Reverté - 1965 - § 49

GUREVICH-SHEDILINA Propagación de ondas cor-  
tas a grandes distan-  
cias Ed. NAUKA 1979 (RU-  
SO).

BORICOV -GUREVICH Teoría ondulatoria de la  
propagación de ondas cor-  
tas en una ionósfera ho-  
rizontalmente no unifor-  
me. Ed. NAUKA 1979 (RUSO)

#### BIOGRAFIA



ROCIO AMPARO PALMA AGUAS.,  
Nació en Quito el 5 de Mar-  
zo de 1954, obtuvo el títu-  
lo de Físico en la Facul-  
tad de Física de la Univer-  
sidad Lomonosov, Moscú en  
1981. Ingresó a la Facul-  
tad de Ingeniería Eléctri-  
ca de la Escuela Politécni-  
ca Nacional en 1982, donde tuvo a su cargo-  
las cátedras de Teoría Electromagnética, Pro-  
pagación de ondas de Radio y Otras. Actual-  
mente presta sus servicios en la Facultad  
de Ciencias E.P.N., Departamento de Física.