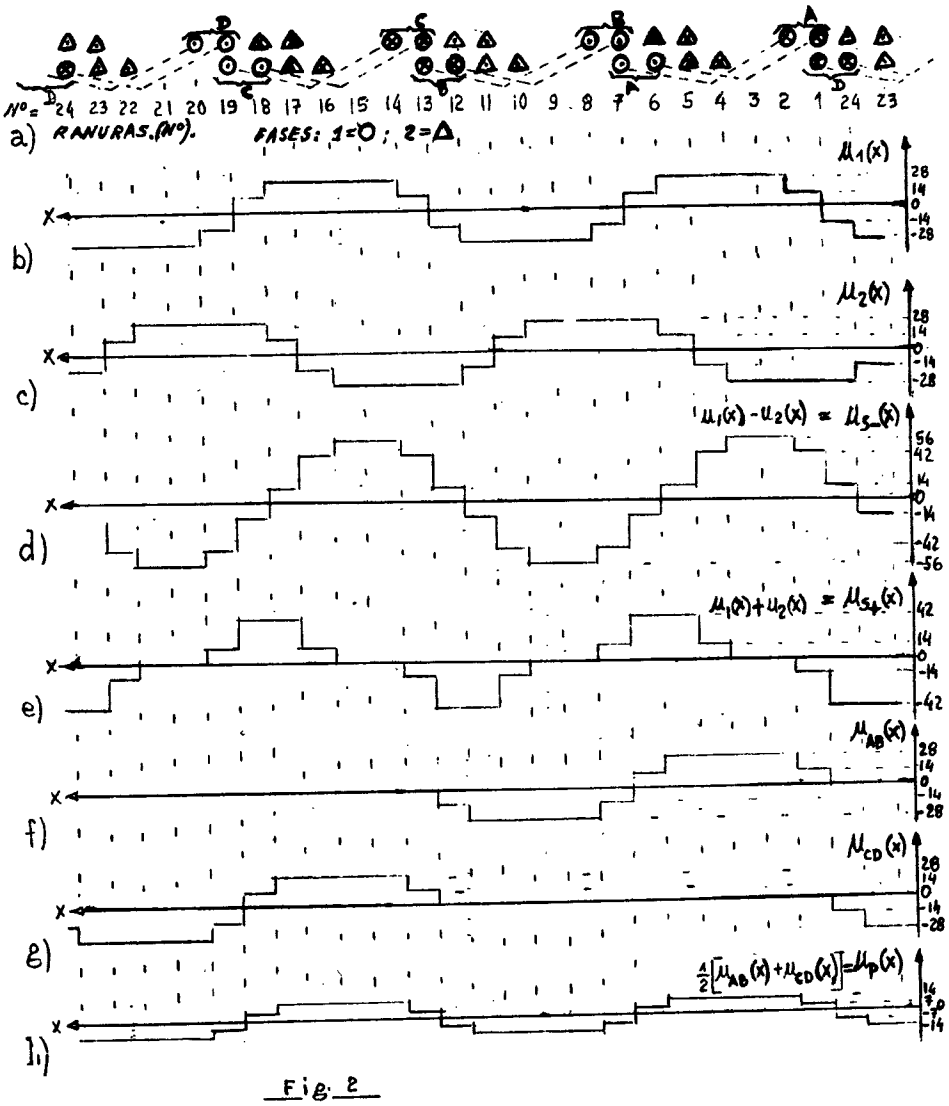

Fig. 2

EDUARDO B. BAMBILL. Graduado como Ingeniero Mecánico y Electricista y Civil en la Argentina, Universidad Nacional de la Plata en 1949, se desempeño en ese país como Profesor en el Area de Máquinas Eléctricas en la Universidad Nacional del Sur, entre 1954 - 1968 y en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, desde 1960 hasta la actualidad en que continua. Ha actuado en las reparticiones nacionales de electricidad y en la actividad privada. Ha asistido a gran número de congresos exponiendo trabajos y hecho numerosas publicaciones de la especialidad, dictado cursos de postgrado y viajado al exterior como Profesor visitante.

HECTOR R. BAMBILL. Graduado como Ingeniero Electricista en la Argentina, Universidad Nacional del Sur, en 1986, se desempeña en la misma como Ayudante Docente desde 1985 y en la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca desde 1987. Ha trabajado en reparticiones del estado y en la actividad privada. Ha asistido a congresos, expuesto trabajos y hecho publicaciones de la especialidad.

COMPOSICION EN SERIE Y EN PARALELO DE RAMAS DE MAQUINAS ELECTRICAS: SUS ENLACES INDUCTIVOS

por

Eduardo B. Bambill
Ing. Mecánico, Electricista y Civil (UNLP)
Universidad Nacional del Sur y Universidad Tecnológica Nacional, Fac. Reg. Bahía Blanca
8000 - Bahía Blanca
Escuela de Oficiales de la Armada
8111 - Base Naval Puerto Belgrano.

Héctor R. Bambill.
Ing. Electricista (UNS).
Universidad Nacional del Sur y Universidad Tecnológica Nacional, Fac. Reg. Bahía Blanca
8000 - Bahía Blanca

RESUMEN

Se estudia y resuelve el problema de obtener los enlaces inductivos equivalentes u(x), de una rama o circuito compuesto de una máquina eléctrica, formada por otras simples, conectadas en serie o en paralelo, determinándolos a partir de los enlaces inductivos de esas ramas componentes. En el caso del paralelo, se estudian y fijan previamente las condiciones restrictivas de compatibilidad.

Se aplica el concepto de enlaces inductivos, u(x), establecido en el trabajo citado al final como bibliografía B.1, titulado *"APROXIMACION GENERAL PARA CALCULAR OPERADORES INDUCTIVOS DEL TRABAJO DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS, POR DISCRETIZACION DE SU CORRESPONDIENTE RECINTO MAGNETICO": LA FUNCION ENLACES.*

ABSTRACT

The problem of obtaining the equivalent inductive linkages, u(x), of a composed electrical machine branche or circuit, formed by simple ones, connected in series or parallel form, is studied and solved, using the inductive linkages of those component branches. In the parallel case, restrictive conditions of compatibility are studied and fixed first.

The applied concept of "inductive linkages", is that established in the paper quoted at the end as bibliography B.1, titled *"GENERAL APROXIMATION TO CALCULATE INDUCTIVE OPERATORS OF THE ELECTRICAL MACHINE WORK, BY DISCRETIZATION OF THE CORRESPONDING MAGNETIC SPACE": THE LINKAGE FUNCTION.*

INTRODUCCION

Encuadramos este desarrollo como un caso de aplicación del método general expuesto en el trabajo citado al final del texto, al cual nos referimos en adelante como bibliografía y antecedente específico "B.1" y citaremos sus ecuaciones o fórmulas como "Ec....-B.1". En ese trabajo se definen los enlaces inductivos u_{hx} entre cada circuito o rama eléctrica h y cada parcela x del entrehierro discretizado de la máquina, - donde se supone concentrado su campo magnético fundamental de conversión electromecánica de energía - y se establece un método general para determinarlos, a partir de la distribución de los lados activos o conductores de la rama y el largo magnético de la parcela. Como operador o coeficiente inductivo, u_{hx} gobierna la doble relación

$$u_{hx} = a_{xh}/i_h = \Delta g_{hx}/\Delta \phi_x \qquad \text{Ec.34-B.1}$$

donde a_{xh} es la FMM o caída de potencial magnético en la parcela x debida al campo creado por la corriente i_h del circuito h, y Δg_{hx} es el aporte elemental de flujo concatenado por la rama h, asociado a la parcela x del campo, cuyo flujo medio es $\Delta \phi_x$ de modo que el total g_h concatenado por la rama h y debido al campo discretizado en las parcelas x será

$$g_h = \sum^{x} \Delta g_{hx} = \sum^{x} u_{hx} \Delta \phi_x \qquad \text{Ec.32-B.1}$$

Además de esta ley aditiva, en la aproximación lineal del método vale la superposición de FFMMMM en cada parcela x, por efecto ahora de diferentes circuitos, h=1,2,...m, designando a la resultante

$$a_x = \sum^{h} a_{xh} = \sum^{h} u_{hx}\, i_h \qquad \text{Ec.50-B.1}$$

Con estas propiedades se deduce que la inductancia mutua entre dos ramas h,j, será

$$L_{hj} = \sum^{x} u_{hx}\, u_{jx}\, \Delta P_x \qquad \text{Ec.6,7-B.1}$$

donde ΔP_x es la permeancia de cada parcela x. Finalmente, (B.1), en la máquina se sustituyó luego la notación x como número identificatorio de cada parcela, por la de una coordenada lineal circular continua sobre una circunferencia media del entrehierro, de diametro d, que corresponde a cada parcela elemental del mismo, definida entre planos radiales de la máquina, separados por un arco dx y ubicadas en la coordenada x, con lo que cambiamos específicamente la notación, indicando las magnitudes que se consideran, como funciones espaciales de x, vg.: Función enlaces,(FE), $u_h(x) = u_{hx}$; $a_{xh} = a_h(x)$; $p(x) = dP_x/dx$; $b(x) = d\,\phi_x/dx = a(x).p(x)$, etc. A la luz de este método, consideramos ahora el problema especial, de interés tanto para el diseño, como para el análisis del funcionamiento de la máquina, de determinar la FE, u(x), de ramas compuestas de otras, h, de FE $u_h(x)$, conectadas en serie o en paralelo, analizando en este último caso sus condiciones de compatibilidad.

A - LEY ADITIVA DE ENLACES DE RAMAS CONECTADAS EN SERIE

Si se conectan en serie ciertas ramas cualesquiera, h, de las máquinas, formando otra que designamos s, siendo $u_h(x)$, $u_s(x)$, sus respectivas FE, demostraremos que $u_s(x)$ es la suma algebraica de las $u_h(x)$, Ec.1 afectadas de signos + ó - (sumadas o restadas), según que al interconectarse, Fig.1, las convenciones del sentido positivo de sus corrientes i_h, coincidan con la de i_s, (signo +), o resulten opuestas, (signo -), lo que designaremos respectivamente, como conexión "aditiva" (+) o "sustractiva" (-), connotándolo con un "factor de conexión", $K_{ch} = \pm 1$, Ec.2, observando a la vez que toda función u(x) cambia de signo si se invierte la convención de su corriente i positiva en sus terminales (permutando "principio", P, por "fin", F, y viceversa, Fig.1). Expresamos esto

$$u_s(x) = \sum^{h} K_{ch}\, u_h(x) \qquad \text{Ec.1}$$

$$K_{ch} = \frac{i_h}{i_s} = \pm 1 \quad \begin{cases} (+, \text{"aditiva"}; \\ -, \text{sustractiva}) \end{cases} \qquad \text{Ec.2}$$

y en la Fig.1, como ejemplo:

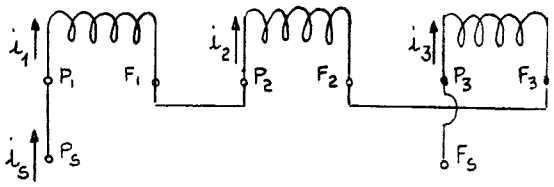

Fig.1

$$i_s = i_1 = i_2 = -i_3 \;;\; K_{c1} = K_{c2} = 1 = -K_{c3} \qquad \text{Ec.3,4}$$

$$u_s(x) = u_1(x) + u_2(x) - u_3(x) \qquad \text{Ec.5}$$

La Ley aditiva expresada en Ec.1 se demuestra facilmente, observando, primero, que se cumple directamente en sus respectivas funciones primitivas de densidad o carga de los conductores, $n_s(x)$, $n_h(x)$ (Ec.43-B.1), ya que al definirse éstas como simples sumas algebraicas de un impulso +1 ó -1, por cada conductor activo, al contener $n_s(x)$

todos los conductores activos de las $n_h(x)$, su sumatoria contiene todos los términos de las sumatorias de las componentes h, lógicamente afectadas de los factores K_{ch}, (Ec.2), según se haya hecho la conexión, (Ec.6). En consecuencia, también satisfarán la Ley aditiva las integrales definidas de las anteriores, $u_s(x_o,x)$, $u_h(x_o,x)$, (Ec.46-B.1) entre los mismos puntos x_o, x, y con ello las constantes de integración que de ellas dependen $u_s(x_o)$, $u_h(x_o)$ (Ec.63-B.1), y finalmente, las mismas FE, con ambos términos así determinadas: $(u(x)= u(x_o,x)+u(x_o))$ (Ec.65-B.1). Resumiendo, con

$$n_s(x)= \sum^{h} K_{ch}\ n_h(x) \qquad \text{Ec.6}$$

$$u_s(x_o,x)= \sum^{h} K_{ch}\ u_h(x_o,x) \qquad \text{Ec.7}$$

$$u_s(x_o)= \sum^{h} K_{ch}\ u_h(x_o) \qquad \text{Ec.8}$$

y su suma, con "Ec.65-B.1", da la Ec.1.

La composición de las FE de Ec.1, está asociada con la correspondiente composición de las respectivas FFMMMM $a_s(x)$, $a_h(x)$ y flujos concatenados g_s, g_h como se verifica a continuación (con Ec.49,32,25 y 51-B.1)

$$a_s(x)= u_s(x)\ i_s= \sum^{h} (K_{ch}\ u_h(x)\ i_s)=$$

$$= \sum^{h} u_h(x)\ i_h= \sum^{h} a_h(x) \qquad \text{Ec.9}$$

$$g_s=\int_{\pi d} dx\ b(x)\ u_s(x)=$$

$$= \sum^{h} \int_{\pi d} dx\ b(x)\ u_h(x)\ K_{ch}= \sum^{h} K_{ch}\ g_h \qquad \text{Ec.10}$$

(donde la integral total en la circunferencia πd del entrehierro sustituye a la sumatoria de x), Ec.16-B.1).

Si se considera que todo circuito puede considerarse formado por cierto número N_c de espiras en serie por período c, que designaremos $h=1,2,3,...N_c$, - esta ley aditiva permite obtener su FE u(x) como suma de las funciones $u_h(x)$ de los que denominaremos "Circuitos Unidad", formados por una sola espira "h" por período c, según se aplicará para hacer su desarrollo poliarmónico en otro trabajo.

B - COMPOSICION EN PARALELO DE RAMAS COMPATIBLES; ENLACES EQUIVALENTES

En el diseño de las máquinas eléctricas de estructura circular cíclica de período c, se requiere en determinados casos disponer ramas en paralelo, para subdividir las corrientes e igualar las tensiones en sus terminales comunes. Para ello las Condiciones de Compatibilidad necesarias, (1), como Inducidos y (2) como Inductores, serán:

(1), que las ramas, h, concatenen iguales flujos, g_h, para evitar tensiones inducidas diferentes que alimenten corrientes de circulación entre ellas;

(2), que la Onda de FMM resultante que producen en el entrehierro, $a_h(x)$, sea del período c establecido para la estructura, aunque las individuales de las ramas no lo sean, $(a_h(x) \neq a_h(x\pm c))$, manteniéndose en este caso la periodicidad del sistema.

Resolveremos el problema planteado, analizándolo y expresándolo básicamente por medio de las FE de las ramas, $u_h(x)$.

Al efecto designamos genéricamente $h=1,2,3,...m$ a las ramas de un conjunto de m de ellas en paralelo, y "p", a la rama compuesta que así forman, y asimismo, i_h,

[illegible] corrientes, esta última suma o resultante de las anteriores, y también , $u_h(x)$, a sus (FE); g_h, a los flujos que concatenan y $a_h(x)$ a las Ondas de FMM que producen, introduciendo además una FE Virtual Equivalente para la rama compuesta "p", $u_p(x)$, que sólo existirá si se cumplen las Condiciones de Compatibilidad (1), (2), antedichas.

Para sintetizar el análisis, adoptamos para todas las variables las mismas Convenciones de Signos respecto a las referencias comunes (terminales del paralelo, sentido radial del entrehierro, etc.). Así expresamos esas condiciones:

(1) Para toda onda de campo, de flujo específico b(x) en el entrehierro, de período c, (Ec.51-B.1), deben ser iguales los flujos g_h concatenados por las ramas, y a la vez, iguales al convencional, g_p, asignado a la rama "p", por medio de $u_p(x)$

$$g_h = \int_{\pi d} dx\, b(x)\, u_h(x) = \sum^{h} \frac{g_h}{m} = g_p$$

$$g_p = \int_{\pi d} dx\, b(x)\, u_p(x) \qquad \text{Ec.11}$$

$$b(x) = b(x \pm c) \qquad \text{Ec.12}$$

(2) La suma de las ondas $a_h(x) = i_h\, u_h(x)$, (Ec.49-B.1) producidas por las ramas debe ser de período c, e igual a la $a_p(x)$ determinada con $u_p(x)$ e i_p:

$$\sum^{h} i_h\, u_h(x) = \sum^{h} i_h\, u_h(x \pm c) = i_p\, u_p(x) = a_p(x)$$

Ec.13

$$\text{con} \qquad i_p = \sum^{h} i_h \qquad \text{Ec.14}$$

De estas condiciones para las funciones u(x), (Ec.11-13), surgen las correspondientes a $u_p(x)$ que la identifican y determinan:

$$\text{de (1),}\quad u_p(x) = \sum^{h} \frac{u_h(x)}{m} \qquad \text{Ec.15}$$

$$\text{de (2),}\quad u_p(x) = \sum^{h} r_{ih}\, u_h(x) \qquad \text{Ec.16}$$

$$\text{con} \qquad r_{ih} = \frac{i_h}{i_p} \qquad \text{Ec.17}$$

Para que sean válidas simultáneamente ambas expresiones de $u_p(x)$, surge como Condición (3) adicional, que sean iguales los Fraccionarios r_{ih} (de Ec.17) de división de las i_h (y por ende éstas también, lo que exige que sean iguales las Impedancias z_h de las ramas, (aparte de sus flujos g_h, con (1)). Luego,

$$\text{de (3):}\quad r_{ih} = 1/m\ , \quad (\text{iguales } z_h,\ i_h)$$

Ec.18

y cumpliendo las $u_h(x)$ las condiciones (1), (2), (3) de Ec.11,13,18 se tiene

$$u_p(x) = \sum^{h} \frac{u_h(x)}{m} = u_p(x \pm c) \qquad \text{Ec.19}$$

(con $u_h(x)$ de Ec.11,13,18)

Resumiendo: las Condiciones del paralelo, exigen,

(1), que las Funciones $u_h(x)$, moduladas por otra onda b(x) de período c, tengan iguales valores medios en el intervalo "πd" de la circunferencia media del entrehierro;

(2), que su suma (equivalente a conectarlas virtualmente en serie, Ec.1), sea una onda m $u_p(x)$ de período c, y

(3), que sean iguales los fraccionarios r_{ih} de las ramas.

Si las ramas son iguales y coincidentes, y

del período c de la máquina, con valores iguales z_h, i_h, la Solución Trivial es $u_h(x) = u_p(x)$, Ec.20.

La solución normalmente usada en la práctica, es formar cada una de las m ramas, uniendo en serie un mismo número r_c' de bloques o circuitos componentes iguales, "j", distribuidos regularmente a razón de m' de ellos, por cada uno de los r_c períodos c de la máquina (Ec.36-B.1), y tales que sus funciones enlaces $u_{bj}(x)$ sean iguales, aunque desplazadas determinados números enteros K_{bj} de períodos c cada una, respecto de la número 1 = j , tomada como referencia (K_{b1} = 0), lo que, siendo n el número total de bloques, expresamos:

$$n = m\, r_c' = m'\, r_c \qquad \text{Ec.21}$$

$$j = 1,2,3,\ldots n \qquad \text{Ec.22}$$

$$u_{bj}(x) = u_{b1}(x - K_{bj}.c) \qquad \text{Ec.23}$$

$$K_{bj} = \text{entero} \qquad \text{Ec.24}$$

$$\sum^{j} u_{bj}(x) = \sum^{h} u_h(x) = m\, u_p(x) = m\, u_p(x \pm c) \qquad \text{Ec.25}$$

Esta disposición, por Ec.23 asegura que todos los bloques concatenen iguales flujos g_j de todo campo b(x) de período c,

$$g_j = \int_{\pi d} dx\, b(x)\, u_{bj}(x) = \sum^{j} g_j / n \qquad \text{Ec.26}$$

$$g_h = r_c'\, g_j \qquad \text{Ec.27}$$

y por ende, por Ec.10 que sean también iguales los correspondientes de las ramas, g_h, Ec.27, cumpliéndose la condición (1). Además por Ec.25 se asegura la condición (2), por repetirse en cada período c sus m' bloques y equivaler su suma a la m $u_p(x)$ de las ramas. Finalmente, las ramas, de igual desarrollo modular, satisfarán la condición (3). Generalmente las m ramas se hacen iguales y desplazadas ciertos números enteros, K_h, de períodos c respecto a la primera, h=1 tomada como referencia, resultando

$$u_h(x) = u_1(x - K_h\, c) \qquad \text{Ec.28}$$

En forma análoga puede lograrse además que el circuito resultante "p" sea también Periódico Regular, (PR), o sea que cumpla la condición (4) adicional

$$(4) \qquad u_p(x) = -u_p(x \pm c/2) \qquad \text{Ec.29}$$

Para ello, los factores enteros K_{bj} cuentan ahora los desplazamientos en semiperíodos, c/2, entre los bloques y sus funciones $u_{bj}(x)$, con la condición de que los bloques de K_{bj} impar deben conectarse en forma inversa (sustractiva) respecto a los de K_{bj} par, lo que indicamos con factores de conexión $K_{cj} = \pm 1$ respectivamente. Designamos asimismo $m_P = m'/2$, Ec.30, al número entero de bloques iguales por semiperíodo c/2 (con los mismos K_{bj}, K_{cj}). Se tiene así, con $P = 2r_c$ semiperíodos (o polos):

$$n = m\, r_c' = m_P\, P = m' r_c \qquad \text{Ec.31}$$

$$u_{bj}(x) = K_{cj}\, u_{b1}(x - K_{bj} c/2) \qquad \text{Ec.32}$$

$$\text{con } K_{bj} = \pm 1, \text{ si } K_{bj} = \begin{matrix} \text{PAR} \\ \text{IMPAR} \end{matrix} \qquad \text{Ec.33,34}$$

$$\sum^{j} u_{bj}(x) = \sum^{h} u_h(x) = m\, u_p(x) = m\, u_p(x \pm c) =$$

$$= m\, u_p(x \pm c) = -m\, u_p(x \pm c/2) \qquad \text{Ec.35}$$

Como antes, con Ec.32 se verifica que así serán iguales todos los flujos g_j para todo campo periódico regular (PR), $b(x) = -b(x \pm c/2)$, Ec.36 y por ello serán también iguales los de las ramas, $g_h = r_c'\, g_j$, Ec.37, satisfaciéndose la condición (1). Las (2) y ahora la (4) también, se cumplen con la distribución periódica regular de

m_F bloques por semiperíodo c/2 y las conexiones inversas K_{cj}. Finalmente la condición (3) surge de la igualdad modular de las ramas. Generalmente, también aquí las ramas se hacen iguales y desplazadas ciertos números enteros, K_h, de semiperíodos c/2 respecto a la h=1 tomada como referencia, conectándose en forma inversa (indicada con factores $K_{ch}=\pm 1$) los de K_h par respecto a los de K_h impar, resultando

$$u_h(x)= K_{ch}\, u_1(x-K_h c/2) \qquad \text{Ec.38}$$

$$\text{con } K_{ch}= \pm 1 \ , \quad \text{según } K_h= \begin{matrix} \text{PAR} \\ \text{IMPAR} \end{matrix} \qquad \text{Ec.39}$$

Es interesante observar este último caso en las armaduras continuas a conmutador de las máquinas de corriente continua, que entre las escobillas terminales configuran un sistema de ramas en paralelo periódico regular (PR), donde, si bien en reposo los m_F bloques de cada semiperíodo (o polo), c/2, no coinciden idénticamente entre sí por su disposición intercalar típica, en cambio sí tienen la misma configuracón media cinemática entre escobillas cuando giran y conmutan continuamente. (Aquí m_F es el conocido número de "multiplicidad" del devanado).

C - EJEMPLO DE APLICACION

Consideramos el mismo devanado del motor de 5 HP del ejemplo (C), del trabajo citado en B.1, cuyas capas de conductores de las fases o circuitos 1 y 2 se representan en corte en la Fig.2.a), con la numeración de sus 24 ranuras y los dibujos respectivamente de circulos ○, (fase 1), y triángulos △, (fase 2), para sus lados de bobinas de 14 conductores cada uno, con la convensión gráfica de sus sentidos axiales para las corrientes positivas, (x) (+) y (•) (-), no habiéndose representado el devanado de la fase 3 de aquel ejemplo.

Se propone ahora lo siguiente:

1º) Obtener $u_{S-}(x)$ y $u_{S+}(x)$ de conectar en serie respectivamente sustractiva (-) y aditiva (+), las fases 1 y 2, de FE $u_1(x)$ y $u_2(x)$ representadas en Fig.2.b) y c).

Las soluciones se muestran en las Fig.2.d), con $u_{S-}(x)= u_1(x) - u_2(x)$ y Fig.2.e), con $u_{S+}(x)= u_1(x) + u_2(x)$.

2º) Obtener $u_F(x)$ de conectar en paralelo 2 bloques AB y CD iguales y desplazados un período c (de 12 pasos de ranura), en un sistema de r_G= 2 períodos, formados por los 4 pares de bobinas A, B, C, D, (un par por fase y polo del devanado primitivo 1) tomando para el AB, los pares A y B en serie normal, y para el CD, los pares C y D igualmente en serie normal, como muestra la Fig.2.a), y cuyas FE respectivas designamos $u_{AB}(x)$ y $u_{CD}(x)$, según se representan en las Fig.2.f) y g).

La solución se da en la Fig.2.h), con $u_F(x)= 1/2(u_{AB}(x)+ u_{CD}(x))$.

BIBLIOGRAFIA

B.1 "*Aproximación General Para Calcular Operadores Inductivos Del Trabajo De Las Máquinas Eléctricas Por Discretización De Su Correspondiente Recinto Magnético": LA FUNCION ENLACES, (FE)*, por el Ing. Eduardo B. Bambill, publicado en la Revista ELECTROTECNICA, de Marzo/Abril 1989, Buenos Aires, Argentina.