ALGUNOS PREDICTORES PARA PRUEBAS DE TIEMPOS DE FALLA

Dr. Holger Capa Santos
Faultad de Ciencias
Escuela Politécnica Nacional
Apartado 27-59
Quito, ECUADOR.

RESUMEN

En este trabajo consideramos una prueba de vida, de tipo II con censura, (termilogía anglosajona) de N elementos cuyos tiempos de vida siguen una ley exponencial y construimos un predictor bayesiano empírico del tiempo en que ocurrirá la r-ésima falla, habiendo observado la k-ésima, en la misma prueba. Además comparamos este predictor, con respecto a un predictor clásico y a un predictor bayesiano, a través de la simulación.

1. INTRODUCCION

Consideramos una prueba de vida, de tipo II con censura, de N elementos cuyos tiempos de vida siguen una ley exponencial y construímos un predictor bayesiano empírico del tiempo en que ocurrirá la r-ésima falla, habiendo observado la k-ésima, en la experiencia actual, a partir de observaciones en experiencias precedentes. Para esto, se procede primeramente a definir el predictor bayesiano correspondiente y posteriormente se procede a estimar la ley a priori, que en el contexto bayesiano empírico se la considera desconocida, utilizando experiencias precedentes.

Finalmente comparamos, a través de la simulación estadística, a este predictor con un predictor obtenido por métodos clásicos por Lawless (1971) y a un predictor bayesiano obtenido por Dunsmore (1974).

2. LA PREDICCION ESTADISTICA

La predicción estadística consiste en utilizar las observaciones de un experimento aleatorio (experimento informativo) E para predecir resultados de otro experimento aleatorio (experimento futuro) F. Consideraremos que E y F son independientes.

Supongamos que la información obtenida de la realización de E puede expresarse a través de una variable aleatoria (v.a.) X (o de una estadística suficiente de una muestra de la v.a. X) que tiene por densidad $f(x|\theta)$, donde θ pertenece a un conjunto de parámetros Ω. Buscamos entonces, predecir las observaciones de una v.a. Y que tiene por densidad $f(y|\theta)$ y que describe ciertos resultados de F.

Para situarnos en el contexto bayesiano, supondremos que θ sigue una ley a priori $G(\theta)$, $(\theta\in\Omega)$. Si $G(\theta)$ admite una densidad $f(\theta)$, entonces la densidad predictiva de Y, dada X, se expresa por:

$$f(y|x) = \int_{\Omega} f(y|\theta)f(\theta|x)d\theta \qquad (1)$$

donde $f(\theta|x)$ representa la densidad a posteriori de X.

Para el caso discreto cambiamos, simplemente, el signo de integral por el de suma.

Se puede demostrar que bajo ciertas condiciones de existencia (Capa Santos 1986, por ejemplo), poniendo $E(Y|\theta)=u(\theta)$, donde u es una función dada, entonces el predictor bayesiano se puede expresar por:

$$\rho(x) = E[u(\theta)|x]$$

es decir, utilizando la expresión explicita de la densidad a posteriori $f(\theta|x)$ en la fórmula (1), tenemos:

$$\rho(x) = \int_\Omega u(\theta)f(x|\theta)f(\theta)d\theta \Big/ \int_\Omega f(x|\theta)f(\theta)d\theta \qquad (2)$$

El análisis bayesiano paramétrico considera conocidas $f(x|\theta)$ y $f(\theta)$ y de esta forma se puede calcular $\rho(x)$ utilizando la expresión (2). El análisis bayesiano empírico paramétrico, al contrario, supone conocida $f(x|\theta)$ y asume solamente la existencia de la ley G que sigue θ.

Para encontrar una regla de decisión en el contexto bayesiano empírico, suponemos que el experimento E se ha realizado varias veces en el pasado, de manera independiente entre ellas y que θ sigue en todos los casos la misma ley a priori, desconocida (esto puede ser de mucha utilidad en los procesos en los que no existen cambios demasiado bruscos en ciertos periodos de tiempo, permitiendonos utilizar la información precedente). Es decir en el momento de tomar la decisión actual, disponemos de una serie de elementos aleatorios independientes:

$$(x_1,\theta_1),\ (x_2,\theta_2),\ldots,(x_n,\theta_n)=(x,\theta)$$

Los elementos $\theta_1,\ldots,\theta_n=\theta$ son, evidentemente, desconocidos y no observables. Supondremos también que S tiene una interpretación frecuencial y utilizaremos los valores $x_1,\ldots,x_n = x$ para obtener la información sobre G que nos permita deducir una regla de decisión $\delta_n(x) = \delta_n(x,x_1,\ldots,x_{n-1})$ que aproxime, en un cierto sentido, al predictor bayesiano ρ. δ_n se llamará un predictor bayesiano empírico (p.b.e).

Lemon y Krutchkoff (1969) proponen la estimación de la función de distribución G (o ley a priori) por una función en escalera, con saltos de tamaño 1/n el los puntos $\hat{\theta}_i(i=1,\ldots,n)$, donde $\hat{\theta}_i$ es una estimación clásica de θ en la i-ésima experiencia, en el pasado, basada en estadisticas suficientes.

3. CONSTRUCCION DE UN PREDICTOR BAYESIANO EMPIRICO

Supongamos que deseamos medir el tiempo de vida de M elementos idénticos e independientes. Probaremos a la vez estos elementos y detendremos la experiencia en el momento que ocurra la p-ésima falla ($1\leq p\leq M$). Los elementos que fallan durante el experimento no se cambiarán. Definiremos a esta prueba como una prueba de tipo (M,B,p), lo que corresponde en la literatura anglosajona a las pruebas censuradas de tipo II.

La v.a. T representará el tiempo de vida de un elemento y $(T_1,\ldots,T_p)$, a la muestra ordenada de tiempos de falla. Supondremos que T sigue una ley exponencial estándar de parámetro θ ($\theta>0$), cuya densidad está

dada por la fórmula:

$$f(t) = \theta\exp(-\theta t) \quad (t>0)$$

Si deseamos predecir en la misma prueba el r-ésimo tiempo de falla, habiendo observado la k-ésima falla, tenemos el problema de que las experiencias informativa y futura no son independientes. Sin embargo, utilizaremos el hecho de que si el tiempo de vida T sigue una ley exponencial estándar de parámetro θ, entonces (Tanis, 1964) las variables aleatorias S_k y Y, definidas por las siguientes expresiones:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i + (N-k)T_k \quad y \quad Y = T_r - T_k$$

son independientes. Además S_k sigue una ley $\Gamma(k,\theta)$ y Y tiene por densidad:

$$f(y|\theta) = \theta\exp(-(N-r+1)\theta y)*$$
$$(1-\exp(-\theta y))^{r-k-1}*$$
$$(B(N-r+1,r-k))^{-1}$$

donde,

$$B(N-r+k,r-k)=(N-k)![(N-r)!(r-k-1)!]^{-1}$$

Tenemos entonces:

$$E(Y|\theta) = (N-k)![\theta(N-r)!]^{-1}*$$
$$\sum_{i=0}^{r-k-1} (-1)^i[i!(r-k-1-i)!(N-r+i+1)^2]^{-1}$$

Es decir,

$$E(Y|\theta)=\theta^{-1}u(N,r,k)$$

donde u es una función de las tres variables indicadas e independiente de θ.

Esto nos permite obtener el predictor bayesiano de Y (sabiendo que $S_k=s$):

$$\rho(s) = u(N,r,k)E(\theta^{-1}|s)$$

Sitúemonos en el contexto b.e. y supongamos aún que los datos $(k_1,s_{k1}),\ldots,(k_{n-1},s_{kn-1}),(k_n,s_{kn})=(k,s_k)$, donde s_k es el tiempo de prueba observado hasta la k-ésima falla en la prueba actual, sean disponibles.

Si $S_k=s$ y $\delta_n(s)$ es un estimador b.e. de $1/\theta$ basado en los datos precedentes (el cálculo se hará siguiendo los procedimientos mencionados en (2)), entonces:

$$Y_n = u(N,r,k)\delta_n(s)$$

es un predictor b.e. de Y. Esto nos permite dar un predictor b.e. $T_{r,n}$ de T_r:

$$T_{r,n} = Y_n + T_k$$

Es necesario señalar que el valor de T_k debe conocerse en la prueba actual.

Tomando como estimador clásico de θ_i al estimador de máxima verosimilitud:

$$\hat{\theta}_i = k_i/s_{ki} \quad (i=1,\ldots,n)$$

utilizando el procedimiento de Lemon y Krutchkoff y puesto que S_k sigue una ley $\Gamma(k,\theta)$, obtenemos el p.b.e. de T_r siguiente:

$$pbe = u(N,r,k)\ [\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i^{k-1}\exp(-\hat{\theta}_i s_k)]*$$
$$[\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i^{k}\exp(-\hat{\theta}_i s_k)]^{-1} + t_k \quad (3)$$

4. COMPARACION DE LOS PREDICTORES

Con la finalidad de tener una idea sobre el cómportamiento de los predictores b.e. de T_r, consideremos el predictor definido por la fórmula (3) y otros dos predictores obtenidos por métodos diferentes. El primero es un predictor bayesiano (denotado pb), encontrado por Dunsmore (1974) utilizando una ley gamma $\Gamma(g,h)$ como ley a priori para θ, pues estas leyes definen una familia de conjugadas naturales. Para el caso r=k+1 pb está definido por:

$$pb = H/(N-k)(G-1) \quad (G>1)$$

donde,

$$H = h + S_k \quad y \quad G = g + k$$

El segundo predictor, es el calculado por Lawless (1971) a través de métodos clásicos, y que corresponde al predictor bayesiano con respecto a una ley no informativa para θ; es decir, cuando tomamos h = g = 0. El predictor de Lawless se expresa entonces como sigue:

$$pc = S_k/(N-k)(k-1) \quad (k>1)$$

La metodología elegida para comparar los predictores puede describirse de la siguiente manera:

Hemos elegido como ley a priori para θ una ley gamma $\Gamma(g,h)$, pues esta nos permite construir un predictor bayesiano utilizando el criterio de las familias conjugadas naturales. Varias combinaciones de los parámetros han hecho posible la comparación de los predictores con respecto a diferentes leyes a priori $\Gamma(g,h)$.

Cuando se ha fijado una combinación de parámetros (g,h), se generan n observaciones $\theta_1,\ldots,\theta_n$ de una ley $\Gamma(g,h)$. Con cada una de las primeras (n-1) observaciones construimos (n-1) muestras completas de una ley exponencial estándar, todas del mismo tamaño (tomamos $k_i=6$, y entonces tenemos $k_{i-1}=5$, $(i=1,\ldots,n-1)$). Estas muestras deben ser independientes, condicinalmente a los θ_i, y ordenadas para calcular los tiempos de prueba S_i.

Con la última observación θ_n generamos una muestra completa, independiente de las precedentes, de tamaño N=10, de una ley exponencial estándar de parámetro θ_n, con la cual efectuaremos nuestras previsiones. Luego de ordenarla, calculamos S_n y $(k_n=6)$.

Finalmente calculamos el estimador de máxima verosimilitud de θ_i, con la información de la i-ésima muestra, de acuerdo a lo indicado en la sección precedente.

Ahora procedemos a calcular los diversos predictores de T_r (es decir, hemos tomado r=k+1=7) en la prueba actual (la n-ésima). Hay que recordar que s y k corresponden, respectivamente, a s_n y $k_n=6$.

Los valores de n considerados varían entre 2 y 21. Nos limitaremos a presentar ciertos resultados hasta n=11, pues luego de este valor no constatamos diferencias importantes. Puesto que, con observaciones simples era difícil obtener conclusiones definitivas, para cada valor de n repetimos la experiencia 100 veces, lo que nos permitió aproximar los riesgos bayesianos de los predictores por sus riesgos empíricos, con la fórmula:

$$\left[\sum_{j=1}^{100} (\text{valor } j\text{-ésima previsión} - t_r)^2 \right]/100$$

Para ciertos análisis complementarios, también calculamos las varianzas empíricas de estas aproximaciones de los riesgos bayesianos.

Hemos calculado además, la media téorica (media de las observaciones marginales):

$$m_t = h(g-1)^{-1} \sum_{i=1}^{r} (N-i+1)^{-1}$$

al igual que las medias empíricas de T_r.

En la tabla 1 presentamos algunos resultados de los ensayos numéricos, con los que podemos constatar la concordancia con los análisis téoricos. Por ejemplo, los riesgos del predictor bayesiano son casi siempre más pequeños que aquellos de los otros predictores. Es necesario observar que los riesgos del pb y los del pbe están bastante cerca y los del pbe son más pequeños que los del pc; esto se puede también constatar en la fig. 1, donde hemos representado los comportamientos de pb, pc y pbe, para una ley a priori $\Gamma(4,6)$. Notemos, que en el caso en que los riesgos empíricos tengan valores muy cercanos, las varianzas empíricas de los riesgos de pc son, en general, más grandes que las otras.

5. CONCLUSIONES

La información que presentamos contiene resultados de tipo bayesiano; esto nos ha permitido controlar la calidad de las simulaciones. Recordemos, sin embargo, que en la mayoría de problemas la ley a priori de θ es desconocida; sería entonces, más interesante comparar los comportamientos del predictor b.e. y el predictor clásico. El predictor pbe, tiene un comportamiento similar al pb y además se lo puede calcular rápidamente con una calculadora de bolsillo, lo que nos haría preferirlo en la práctica.

Aunque no hemos presentado aquí los resultados concernientes a los intervalos predictivos, señalemos las principales conclusiones a las que llegamos por medio de estos ensayos numéricos: Se puede elegir el intervalo predictivo b.e. si se espera que la observación por predecir sea grande. Por el contrario, si esta es pequeña, sería preferible utilizar el intervalo predictivo clásico.

BIBLIOGRAFIA

CAPA SANTOS H. (1986), Méthodes bayesiennes empiriques. Aplications en fiabilité, Tesis Doctoral, Universidad de París (París VI), París, Francia.

DUNSMORE I. (1974), The Bayesian Predictive Distribution in Life Testing Models, Technometrics. V. 16, N° 3, pp. 455-460.

LAWLESS J. (1971), A prediction problem concerning samples from the exponential distributions, with application in life testing, Technometrics, V. 13, pp. 725-730.

LEMMON G. y KRUTCHKOFF R. (1969), An empirical Bayes smoothing technique, Biometrika, V. 56, pp. 361-365.

TANIS E. A. (1964), Linear forms in the statistics from an exponencial distribution, Ann. Math. Statist., V. 35, pp. 270-276.

TABLA 1

	pb	pbe	pc	obs.
n=2				
medias empíricas:	2,16	2,16	2,25	2,13
riesgos empíricos:	0,17	0,20	0,27	
var. emp. riesgos:	0,09	0,11	0,25	
n=3				
medias empíricas:	2,29	2,30	2,40	2,19
riesgos empíricos:	0,26	0,30	0,40	
var. emp. riesgos:	1,26	1,17	1,27	
n=4				
medias empíricas:	2,12	2,12	2,22	1,86
riesgos empíricos:	0,50	0,53	0,56	
var. emp. riesgos:	2,02	1,83	1,67	
n=5				
medias empíricas:	1,93	1,93	1,99	1,86
riesgos empíricos:	0,15	0,17	0,21	
var. emp. riesgos:	0,09	0,09	0,14	
n=6				
medias empíricas:	2,41	2,43	2,54	2,35
riesgos empíricos:	0,19	0,24	0,35	
var. emp. riesgos:	0,10	0,19	0,54	

	pb	pbe	pc	obs.
n=7				
medias empíricas:	1,97	1,97	2,04	1.90
riesgos empíricos:	0,16	0,17	0,22	
var. emp. riesgos:	0,14	0,15	0,20	
n=8				
medias empíricas:	2,26	2,28	2,36	2,19
riesgos empíricos:	0,26	0,23	0,30	
var. emp. riesgos:	0,44	0,20	0,23	
n=9				
medias empíricas:	2,07	2,09	2,16	2,15
riesgos empíricos:	0,35	0,38	0,36	
var. emp. riesgos:	0,50	0,70	0,59	
n=10				
medias empíricas:	2,20	2,22	2,30	2,28
riesgos empíricos:	0,52	0,50	0,53	
var. emp. riesgos:	3,16	2,35	2,69	
n=11				
medias empíricas:	2,22	2,23	2,32	2,28
riesgos empíricos:	0,27	0,30	0,39	
var. emp. riesgos:	0,59	0,64	0,78	

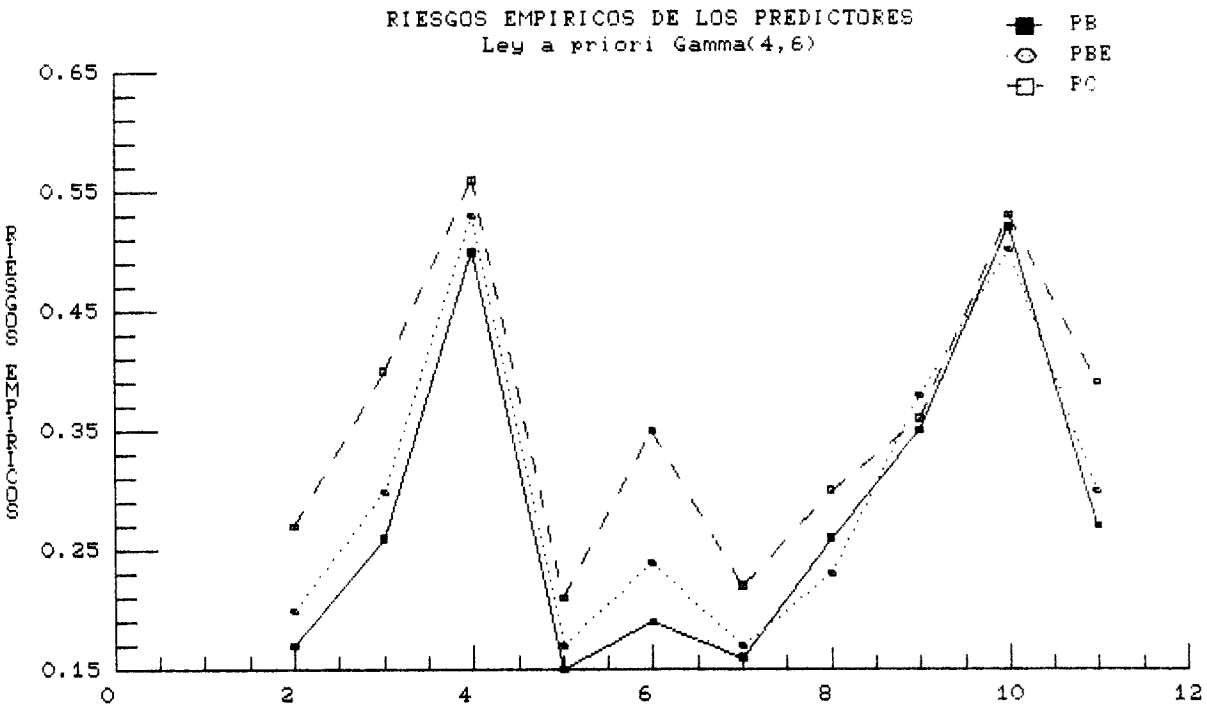

FIGURA 1

BIOGRAFIA:

Holger Capa Santos, nació en Loja, el 15 de agosto de 1955. Obtuvo el título de Matemático en la Escuela Politécnica Nacional en 1979 y su Doctorado en la Universidad de París en 1986.

Actualmente ocupa los siguientes cargos: Profesor Principal T.C. de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, Profesor Principal T. M. de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central del Ecuador y Gerente del Centro de Investigaciones Matemáticas Aplicadas a la Ciencia y Tegnología (CIMACYT).

Sus publicaciones recientes se han realizado en los campos de Series de Tiempo, Teoría de la Confiabilidad, Cálculo Actuarial y Control de Calidad.