

DETECCIÓN DE ARMÓNICOS EN UNA SEÑAL SENOIDAL

Emilio Carlos Acocella

Resumen

La Transformada Discreta de Fourier es extremadamente útil en el análisis y proyecto de sistemas de tiempo discreto. Además, la característica de muestreo en frecuencia posibilita su empleo en el análisis espectral de señales. En este trabajo se propone un método sencillo y robusto para la detección de armónicos de una señal sinusoidal.

Abstract

The Discrete Fourier Transform plays a central role in the Discrete-Time Systems analysis and design, as well as, in the signals spectral analysis. In this paper is proposed a simple and robust method to harmonic detection of harmonics existing in a sinusoidal signal.

I. Introducción

En muchas situaciones prácticas, son generados e introducidos, en una señal originalmente sinusoidal, armónicos de la frecuencia fundamental. Estos armónicos a veces son indeseables y provocan una reducción en el desempeño del sistema que procesa o hace uso de dicha señal. Es el caso típico de los sistemas de energía eléctrica en 50 o 60 Hz, en los cuales transformadores o plantas industriales pueden introducir armónicos en la red eléctrica, perjudicando la operación de máquinas y aparatos eléctricos y electrónicos. Para la determinación analógica de la presencia de los armónicos se necesitan aparatos sofisticados y de difícil operación en el campo para obtener resultados precisos y confiables. En este trabajo se propone un procedimiento alternativo más sencillo y económico para la solución del problema por medio de la digitalización de la señal, empleo de una ventana adecuada y determinación de la FFT de la señal digital.

II. Métodos

Sea $x_c(t) = A \cos(\Omega t + \theta)$ una señal sinusoidal analógica de frecuencia angular igual a Ω rad/s, fase igual a θ rad y amplitud A . El muestreo de $x_c(t)$ con periodo T produce la señal de tiempo discreto

$$x_d(n) = x_c(nT) = A \cos(\Omega nT + \theta) = A \cos(\omega n + \theta)$$

con frecuencia digital ω rad/muestra y amplitud y fase iguales a las de la señal analógica. Si la señal $x_d(n)$ es multiplicada por una ventana $w(n)$ de longitud N , se produce una señal $y(n) = x_d(n) \cdot w(n)$

de longitud finita. Así, se puede determinar

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn},$$

la Transformada Discreta de Fourier de la secuencia $y(n)$, cuyos valores se constituyen en muestras de

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot e^{-j \omega n},$$

la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de $y(n)$ [1]. La Figura 1 muestra la secuencia $y(n) = x_d(n) \cdot w(n)$, donde

$$x_d(n) = \cos \frac{2\pi n}{16} \text{ y } w(n) \text{ es una ventana rectangular}$$

de 64 puntos y amplitud unitaria.

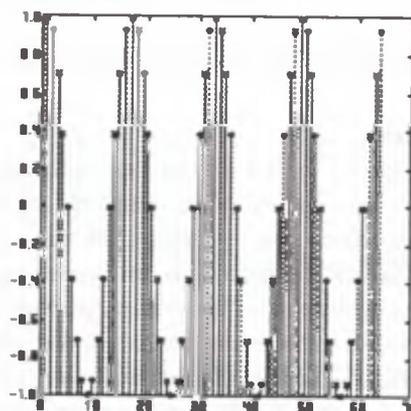


Figura 1: Secuencia sinusoidal de longitud finita $y(n)$

Las Figuras 2 y 3 presentan las Transformadas de Fourier de $x_d(n)$ y $y(n)$, respectivamente. En la Figura 4 se observa la DFT de $y(n)$ con 64 puntos. Las Figuras 5 y 6 presentan la Transformada de Fourier y la DFT de la secuencia $y(n)$ introduciéndose el segundo, el tercero y el cuarto armónicos de la frecuencia fundamental con amplitud 0.1. Así, se observa que es posible detectar la presencia de los armónicos a través de la DFT.

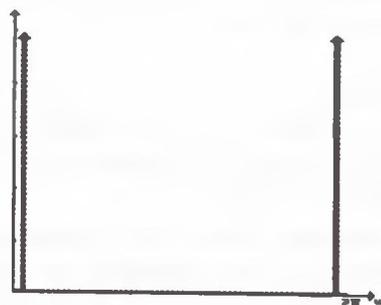


Figura 2: Transformada de Fourier de $x_d(n)$

Correspondencia a: Tcml. Ing. Emilio C. Acocella, Vicerrectorado de Investigaciones y Desarrollo de la ESPE - Av. El Progreso s/n - Sangolquí - Ecuador - Apartado 231-B - Correo Electrónico: emilio@espe.edu.ec - Fax: 861-393

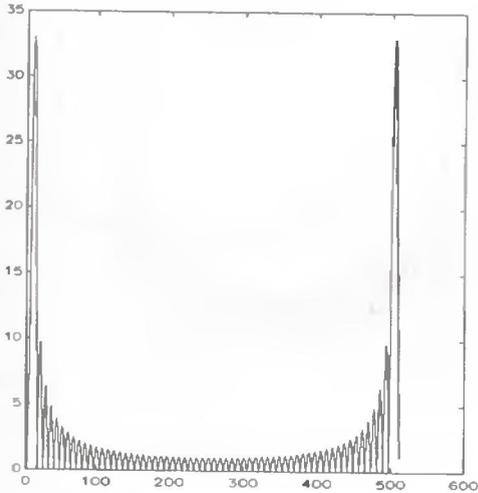


Figura 3: Transformada de Fourier de $y(n)$

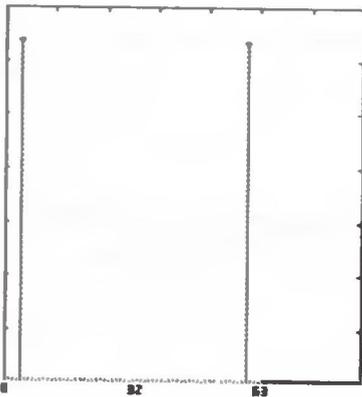


Figura 4: Transformada Discreta de Fourier de $y(n)$ con 64 puntos

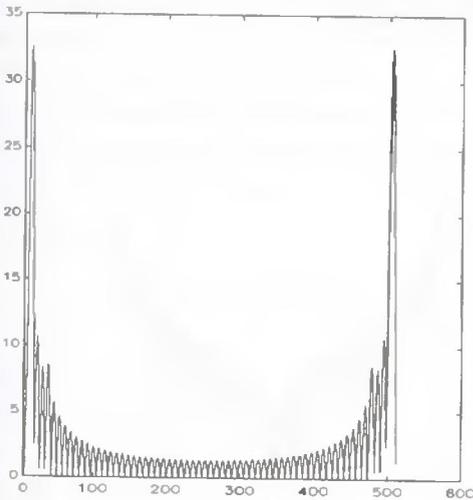


Figura 5: Transformada de Fourier de $y(n)$ con armónicos introducidos

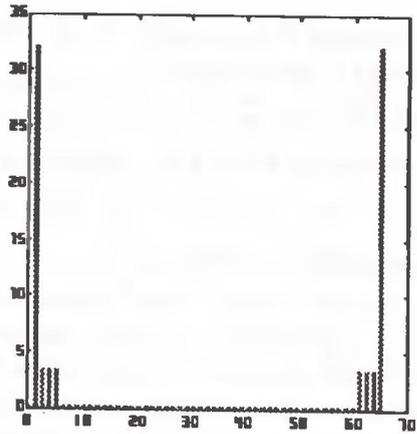


Figura 6: Transformada Discreta de Fourier de $y(n)$ con armónicos introducidos

El método que se propone consiste básicamente de 4 etapas:

- digitalización de la señal analógica con una frecuencia de muestreo adecuada;
- multiplicación de la señal de tiempo discreto por una ventana apropiada;
- determinación de la DFT;
- identificación de los armónicos presentes.

Para el desarrollo del método, considérese que $\omega_0 = \Omega_0 \cdot T$ y que:

$$x_c(t) = A_1 \cdot \cos(\Omega_0 t) + \sum_{k=2}^M A_k \cdot \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)$$

$$\text{y } x_d(n) = A_1 \cos(\omega_0 n) + \sum_{k=2}^M A_k \cdot \cos(k\omega_0 n + \theta_k).$$

El primer problema es la selección de la frecuencia de muestreo de la señal analógica. Considerándose que el máximo armónico es de orden M , entonces la frecuencia angular de muestreo debe cumplir con la condición del Teorema de Nyquist:

$$\Omega_s > 2 \cdot M \cdot \Omega_0. \tag{1}$$

La frecuencia de muestreo $\Omega_s = 2\pi/T$ corresponde a la frecuencia digital $\omega_s = 2\pi$ rad/muestra y, si son utilizados N puntos en la DFT, los coeficientes de la misma equivalen a las frecuencias digitales $2\pi k/N$, $0 \leq k \leq N-1$. Así, un valor en general adecuado para Ω_s es $\Omega_s = \Omega_0 \cdot P$, con $P > 2M$ y N múltiplo de P . De esta forma, los armónicos de Ω_0 corresponderán exactamente a los $\frac{N}{P}k$ -ésimos coeficientes de la DFT, la fundamental Ω_0 a $k = N/P$ y el nivel DC a $k=0$. Cuando se utiliza, como en los ejemplos a ser presentados, el algoritmo Raiz-2 en la determinación de la FFT, N es una potencia de 2 y, en consecuencia, P también. Entonces, para la

selección del menor P que cumpla con la condición de la Ecuación (1), se debe hacer:

$$B = \min_{k \text{ entero}} [k > \log_2(2M)] \text{ y } P = 2^B. \quad (2)$$

Por ejemplo, si $M=50$ y $\Omega_0 = 2\pi 60 \text{ rad/s}$,

$$B = \min_{k \text{ entero}} [k > \log_2 100] = 7, P = 2^7 = 128 > 2M$$

y $\Omega_s = 2\pi 60 \times 128 = 2\pi 7680 \text{ rad/s}$.

La siguiente etapa, que consiste en la selección de la ventana más apropiada, está asociada al ancho del lóbulo principal y energía de los lóbulos secundarios de su Transformada de Fourier. Las Figuras 7, 8, 9, 10 y 11 muestran las magnitudes de los espectros de las ventanas más utilizadas y la Tabla 1 sus respectivas expresiones en el dominio del tiempo.

VENTANA	EXPRESIÓN DE $w[n]$
RECTANGULAR	$\begin{cases} 1, 0 \leq n \leq M \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$
BARTLETT	$\begin{cases} 2n/M, 0 \leq n \leq M/2 \\ 2-2n/M, M/2 < n \leq M \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$
HAMMING	$\begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), 0 \leq n \leq M \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$
HANNING	$\begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), 0 \leq n \leq M \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$
BLACKMAN	$\begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + \\ + 0.08 \cos(4\pi n/M), 0 \leq n \leq M \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$

Tabla 1: Expresiones de las ventanas más empleadas

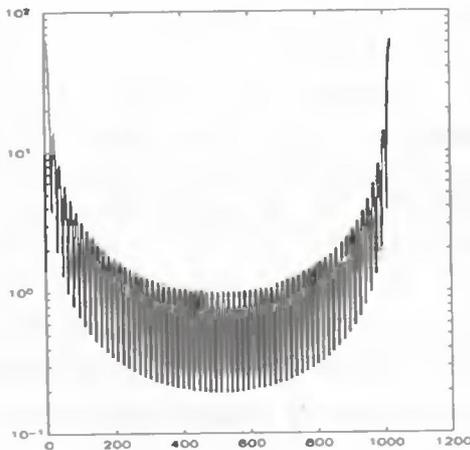


Figura 7: Magnitud de la Transformada de Fourier de la ventana rectangular de 64 puntos

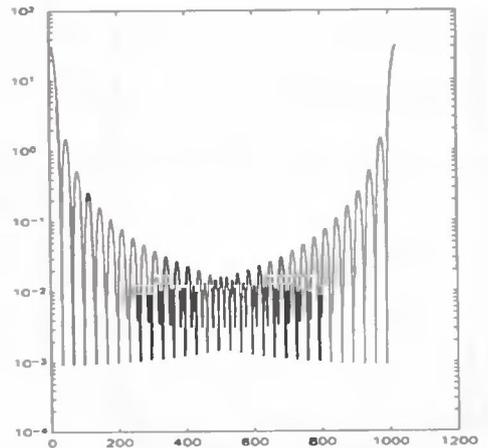


Figura 8: Magnitud de la Transformada de Fourier de la ventana de Bartlett de 64 puntos

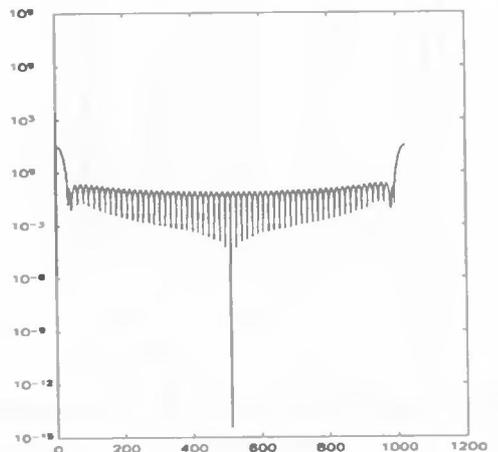


Figura 9: Magnitud de la Transformada de Fourier de la ventana de Hamming de 64 puntos

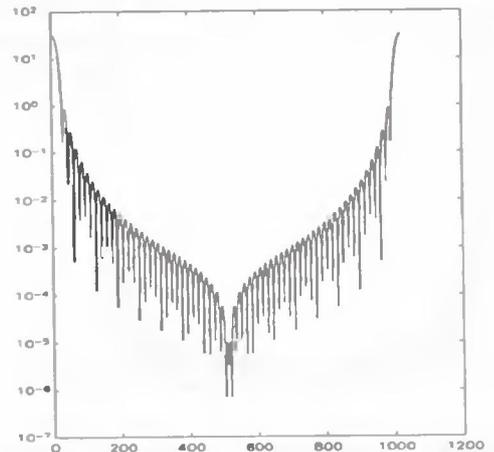


Figura 10: Magnitud de la Transformada de Fourier de la ventana de Hanning de 64 puntos

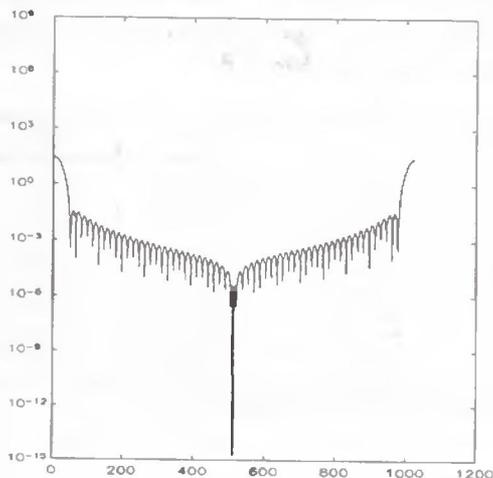


Figura 11: Magnitud de la Transformada de Fourier de la ventana de Blackman de 64 puntos

Como la multiplicación en el tiempo $y(n) = x_d(n) \cdot w(n)$ equivale a una convolución en la frecuencia [2], es decir,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\alpha}) \cdot W(e^{j(\omega-\alpha)}) d\alpha, \quad (3)$$

entonces el valor de $Y(e^{j\omega})$ en cada valor de la frecuencia ω es determinado por todos los valores de $X_d(e^{j\omega})$ en el intervalo de $-\pi$ a π . Para que el valor de $Y(e^{j\omega})$ en cada armónico $k\omega_0$ de la fundamental $\omega_0 = \Omega_0 \cdot T$, siendo T el periodo de muestreo, dependa significativamente del menor número posible de armónicos, la ventana seleccionada debe ser la que presente menor energía en los lóbulos secundarios. Observando las Figuras 7 a 11, concluimos que la ventana más adecuada es la de Blackman, una vez que presenta la menor amplitud máxima de los lóbulos secundarios (-57 dB) [2] y la energía de los mismos se reduce más rápidamente a medida en que se aleja del lóbulo principal. De esta forma, $Y(e^{j\omega})$ puede ser aproximado por:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega-2\omega_c}^{\omega+2\omega_c} X(e^{j\alpha}) \cdot W(e^{j(\omega-\alpha)}) d\alpha \quad (4)$$

donde $2\omega_c$ es el ancho del lóbulo principal de la ventana de Blackman, que es aproximadamente igual a $2\pi/N$ [2], por lo tanto, $\omega_c = 6\pi/N$. Como $2\pi/P$ equivale a la distancia en frecuencia entre dos armónicos sucesivos, se concluye a partir de la ecuación (4) que en $\omega_k = \frac{2\pi}{P}k$ (la frecuencia

del k -ésimo armónico), si $12\pi/N < 2\pi/P$, es decir, $N > 6P$, entonces solamente el valor de $X_d(e^{j\omega})$ en $\omega = \omega_k$ contribuye para el valor de $Y(e^{j\omega})$ en $\omega = \omega_k$ (Figura 12). Como la Transformada de Fourier de $x_d(n)$ se constituye en un tren de impulsos, es decir,

$$X_d(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=1}^M A_k \cdot e^{j\theta_k} \delta(\omega - \omega_k), \quad 0 \leq \omega < \pi,$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{P}k, \quad 1 \leq k \leq M$$

entonces la ecuación (4) puede ser reescrita como:

$$Y(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{2} A_k \cdot W(e^{j\theta_k}) \cdot e^{j\theta_k} \quad (5)$$

y, por lo tanto,

$$|Y(e^{j\omega_k})| = \left| \frac{1}{2} A_k W(e^{j\theta_k}) \cdot e^{j\theta_k} \right| = \frac{1}{2} A_k W(e^{j\theta_k}), \quad (6)$$

una vez que la amplitud A_k y el valor de $W(e^{j\omega})$ en $\omega = 0$ son positivos.

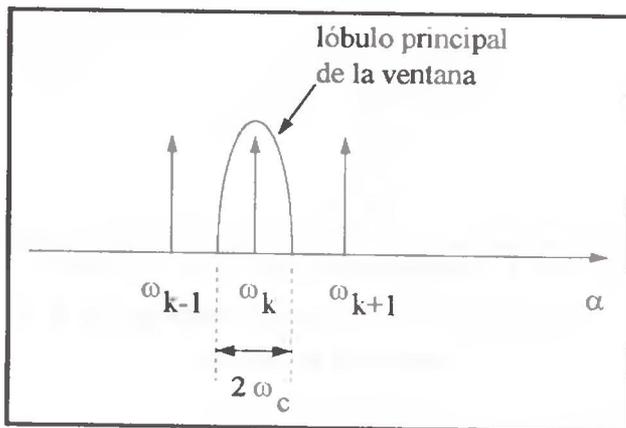


Figura 12: Superposición entre $X_d(e^{j\alpha})$ y el lóbulo principal de $W(e^{j(\omega_k-\alpha)})$

La etapa siguiente consiste en la determinación de la FFT de $y(n) = x_d(n) \cdot w(n)$ con N puntos empleándose un algoritmo Raíz-2 [2]. Como N es una potencia de 2 y debe cumplir con $N > 6P = 6 \times 2^B$, entonces se debe escoger $N = 8P$.

La última etapa del método, consiste en la determinación de la amplitud de los armónicos de ω_0 . Si $\omega_0 = 2\pi/P$, entonces el valor de A_k es obtenido directamente de la Ecuación (6) y del $\frac{N}{P}k$ -ésimo coeficiente de la DFT:

$$A_k = 2 \frac{|Y(kN/P)|}{W(e^{j\theta_k})} \quad (7)$$

siendo $\omega_k = \frac{2\pi}{P}k$ y $Y\left(k \frac{N}{P}\right) = Y(e^{j\omega_k})$

Sin embargo, pueden ocurrir desvios en la frecuencia fundamental. En este caso, los coeficientes de la DFT dejarán de coincidir con las frecuencias de los armónicos ω_k , apesar de esto siguen dependiendo cada uno del valor de un único armónico de $X_d(e^{j\omega})$, por cumplirse la condición $N > 6P$, como muestra la Figura 13. De esta forma, se puede determinar, para cada valor de k , el coeficiente r de la DFT tal que $\omega_r = 2\pi r/N$ y $|\omega_r - \omega_k|$ sea mínimo. En este caso,

$$A_k = 2 \frac{|Y(r)|}{|W(e^{j(\omega_r - \omega_k)})|} \quad (8)$$

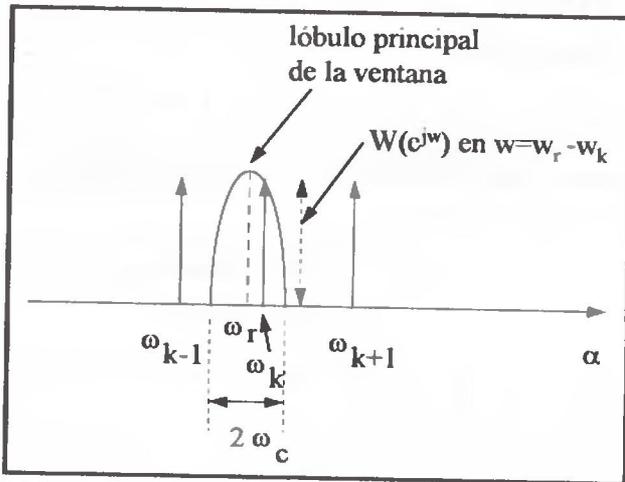


Figura 13: Superposición entre $X_d(e^{j\alpha})$ y el lóbulo principal de $W(e^{j(\omega_r - \alpha)})$ cuando ocurren desvios en la frecuencia fundamental

III. Resultados

A continuación, se presentan varios ejemplos a título de verificación del método propuesto. En todos los casos, se considera que $\Omega_0 = 2\pi(60 \pm 0.5) \text{ rad/s}$ y que solamente los 50 primeros armónicos pueden presentar amplitud significativa. Esto puede ser garantizado por un filtro pasa-bajo con frecuencia de corte $\omega_c = 2\pi 3000 \text{ rad/s}$. Así, se utiliza $P=128$ y, en consecuencia, una frecuencia de muestreo de $2\pi 7680 \text{ rad/s}$. Además, se emplea una ventana de Blackman con longitud $N=8P=1024$. Para esta ventana, $W(e^{j0}) = 430.08$.

Caso 1:

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 60 \text{ rad/s} \text{ y } \omega_0 = \frac{2\pi}{128} \text{ rad/muestra}$$

$$x(t) = 100 \cos(\Omega_0 t) + \cos(10\Omega_0 t) + 4 \cos(20\Omega_0 t) + 5 \cos(30\Omega_0 t) + 3 \cos(40\Omega_0 t) + 6 \cos(50\Omega_0 t)$$

$$x(n) = 100 \cos(\omega_0 n) + \cos(10\omega_0 n) + 4 \cos(20\omega_0 n) + 5 \cos(30\omega_0 n) + 3 \cos(40\omega_0 n) + 6 \cos(50\omega_0 n)$$

La Tabla 2 presenta los armónicos detectados con amplitud mayor que el 1% de la amplitud de la fundamental con los respectivos errores y la Figura 14 muestra el espectro detectado.

$k/8$	ω_k	A_k	Error
1	$2\pi/128$	100,00016	$1,6 \cdot 10^{-4}$
10	$5\pi/32$	1,000013	$1,6 \cdot 10^{-4}$
20	$5\pi/16$	4,0000033	$3,3 \cdot 10^{-6}$
30	$15\pi/32$	5,0000015	$1,5 \cdot 10^{-6}$
40	$15\pi/16$	3,0000011	$1,1 \cdot 10^{-6}$
50	$25\pi/32$	6,0000004	$4,3 \cdot 10^{-7}$

Tabla 2: Armónicos detectados en el Caso 1

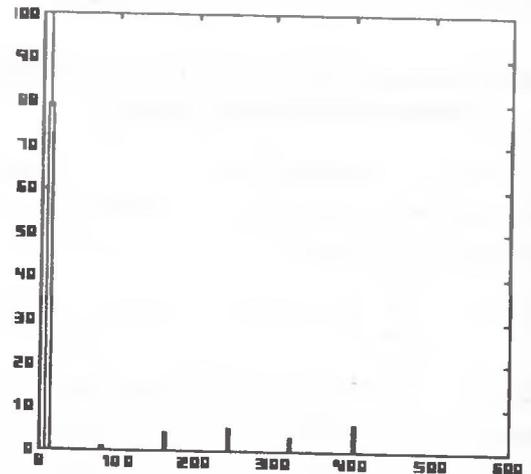


Figura 14: Espectro detectado en el Caso 1

Caso 2:

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 60 \text{ rad/s} \text{ y } \omega_0 = \frac{2\pi}{128} \text{ rad/muestra}$$

$$x(t) = 100 \cos(\Omega_0 t) + \cos(10\Omega_0 t + \pi/7) + 4 \cos(20\Omega_0 t - \pi/8) + 5 \cos(30\Omega_0 t + 2\pi/9) + 3 \cos(40\Omega_0 t - 3\pi/10) + 6 \cos(50\Omega_0 t + 4\pi/19)$$

$$x(n) = 100 \cos(\omega_0 n) + \cos(10\omega_0 n + \pi/7) + 4 \cos(20\omega_0 n - \pi/8) + 5 \cos(30\omega_0 n + 2\pi/9) + 3 \cos(40\omega_0 n - 3\pi/10) + 6 \cos(50\omega_0 n + 4\pi/19)$$

La Tabla 3 y la Figura 15 muestran los resultados obtenidos en este caso.

$k/8$	ω_k	A_k	Error
1	$2\pi/128$	100,00016	$1,6 \cdot 10^{-4}$
10	$5\pi/32$	1,000013	$1,6 \cdot 10^{-4}$
20	$5\pi/16$	4,0000023	$2,3 \cdot 10^{-6}$
30	$15\pi/32$	5,0000015	$1,5 \cdot 10^{-6}$
40	$15\pi/16$	2,9999998	$0,2 \cdot 10^{-6}$
50	$25\pi/32$	6,0000004	$4,3 \cdot 10^{-7}$

Tabla 3: Armónicos detectados en el Caso 2

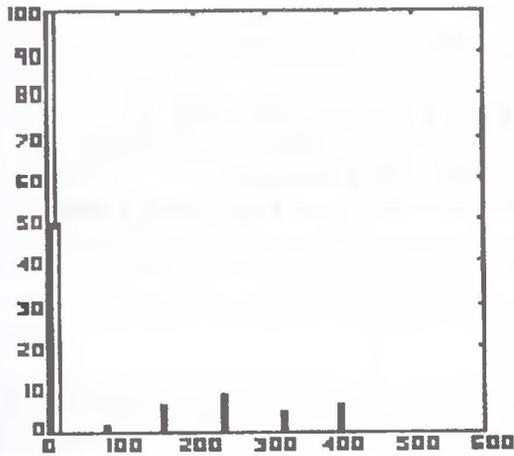


Figura 15: Espectro detectado en el Caso 2

Caso 3:

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 60 \text{ rad/s} \text{ y } \omega_0 = \frac{2\pi}{128} \text{ rad/muestra}$$

$$x(t) = 100 \cos(\Omega_0 t) + 10 \cos(2\Omega_0 t + \pi/7) + 5 \cos(3\Omega_0 t - \pi/8) + 15 \cos(4\Omega_0 t + 2\pi/9)$$

$$x(n) = 100 \cos(\omega_0 n) + 10 \cos(2\omega_0 n + \pi/7) + 5 \cos(3\omega_0 n - \pi/8) + 15 \cos(4\omega_0 n + 2\pi/9)$$

La Tabla 4 y la Figura 16 muestran los resultados obtenidos en este caso.

$k/8$	ω_k	A_k	Error
1	$2\pi/128$	100,00024	$2,4 \cdot 10^{-4}$
2	$2\pi/64$	10,000669	$6,69 \cdot 10^{-4}$
3	$6\pi/128$	5,000270	$2,7 \cdot 10^{-4}$
4	$2\pi/32$	15,000113	$1,13 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4: Armónicos detectados en el Caso 3

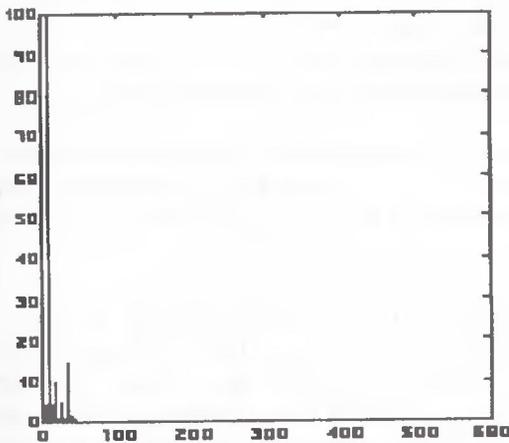


Figura 16: Espectro detectado en el Caso 3

de ser económico y sencillo. Adicionalmente, los resultados comprueban que el método es robusto a las variaciones de la fase de los armónicos.

V. Referencias

[1] E. C. Acocella y C. J. Tierra, "Problemas en la Interpretación de la FFT", XVI Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica - Escuela Politécnica Nacional, a ser publicado, 1995.
 [2] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.

IV. Discusión

Del análisis de los resultados se puede concluir que el método propuesto es eficiente y preciso para la detección de los armónicos, además