

# DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN SISTEMA DE PENDULO INVERTIDO ESTABILIZANTE EN LA POSICION VERTICAL SUPERIOR

Ing. Pablo Guevara Espinosa  
Ingeniero en Electrónica y Control  
Escuela Politécnica Nacional, 1999

Ing. Marco Barragán  
Msc. Ingeniería de Sistemas  
Profesor Principal Escuela Politécnica Nacional

Ing. Galo Zapata Vargas  
Ingeniero en Electrónica y Control  
Escuela Politécnica Nacional, 1999

## Resumen

Este trabajo se refiere a la construcción de un sistema de péndulo invertido que pueda ser utilizado como un prototipo de laboratorio en el que se pueda implementar diversos algoritmos de control.

El algoritmo empleado en este caso, para estabilizar el sistema es el de un Regulador Cuadrático Lineal (L.Q.R.), además se implementó un interfaz de usuario que permite el control y supervisión de la planta en tiempo real mediante un computador personal.

## Abstract

This work encompasses the construction of an inverted pendulum system that could be used as a laboratory prototype in the one which could be implemented many control algorithms.

The algorithm employed in this case is a Linear Quadratic Regulator (L.Q.R.), furthermore was implemented a user interface that permit the control and supervision of the plant in real time through a personal computer.

## 1. Introducción

El Péndulo Invertido ha sido, históricamente uno de los sistemas más utilizados por ingenieros, educadores e investigadores en el área de Control para desarrollar algoritmos de control clásicos (*e.g.*, PID), modernos (*e.g.*, realimentación de estado) e inteligentes (*e.g.*, lógica fuzzy y redes neuronales).

## Correspondencia a:

Ing. Pablo Guevara E-mail: pabguev@ecuabox.com

Ing. Galo Zapata E-mail: galo\_zapata@hotmail.com

Este dispositivo pertenece a la familia de sistemas subactuados, es decir, hay más variables por controlar que actuadores. Esta característica hace que el péndulo invertido sea particularmente interesante ya que se pueden implementar técnicas modernas de control tanto lineal como no lineal.

En una institución de educación superior como la Escuela Politécnica Nacional, es fundamental poseer prototipos de sistemas que permitan ilustrar los conceptos y algoritmos de sistemas de control.

## 2. Análisis matemático del sistema

Básicamente el péndulo invertido, consiste en un péndulo acoplado a un carro el cual es impulsado por una fuerza de control; el péndulo puede girar libremente alrededor de su pivote describiendo una trayectoria circular, mientras que el carro tendrá un desplazamiento lineal restringido tan solo por la longitud de la región de movimiento [1].

El sistema péndulo – carro es el que se presenta en la figura 1, en la cual:

- $f$  = fuerza que actúa sobre el carro  
(*i.e.*, entrada de control)
- $g$  = aceleración debido a la gravedad
- $l$  = longitud del péndulo
- $M$  = masa del carro
- $m$  = masa del péndulo
- $\theta$  = ángulo del péndulo (posición angular)
- $w$  =  $\dot{\theta}$  = velocidad del péndulo
- $x$  = posición del carro (posición lineal)
- $v$  =  $\dot{x}$  = velocidad del carro

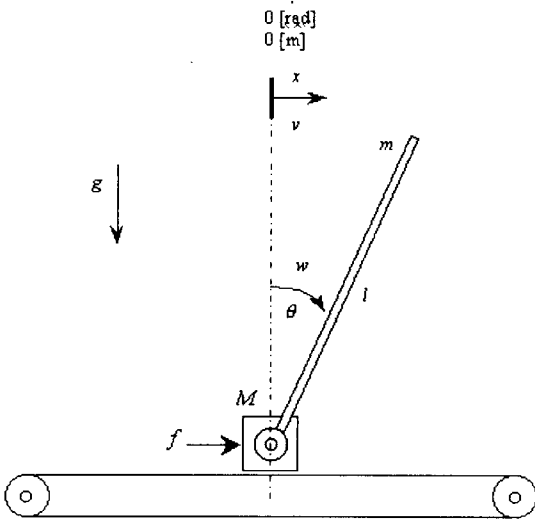


Figura 1. Péndulo invertido (Sistema péndulo – carro)

Para obtener el modelo analítico se utiliza el *METODO VARIACIONAL* o más conocido como *METODO DE LAGRANGE*; en el cual se trabaja con las energías del sistema (e.g., energía cinética y energía potencial).

Para llegar a este modelo, se asume que el péndulo es un cuerpo sólido que tiene su masa distribuida uniformemente, por lo que su centro de masa se puede ubicar en su centro geométrico; además, se asume la ausencia de fuerza de amortiguamiento y fuerza de fricción, las que se pueden evitar con una adecuada construcción del sistema mecánico.

A partir de las expresiones para la energía cinética y potencial del sistema se obtiene el Lagrangiano:

$$L = \left\{ \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l \dot{\theta} \dot{x} \cos \theta \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m g l \cos \theta \right\} \quad (1)$$

Evaluando el Lagrangiano para cada coordenada variacional del sistema se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f$$

$$(M+m) \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \dot{\theta}^2 \cos \theta - \frac{1}{2} m l \ddot{\theta} \sin \theta = f \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m l \ddot{x} \cos \theta - \frac{1}{2} m g l \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) describen el comportamiento dinámico del sistema péndulo – carro, teniendo en cuenta que la señal de control es una fuerza aplicada al mismo.

Reestructurando dichas ecuaciones a partir de (3) se tiene que:

$$\ddot{\theta} = g \operatorname{tg} \theta - \frac{2}{3} l \dot{\theta}^2 \sec \theta$$

por lo tanto la dinámica de la planta puede expresarse de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m) g \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} m l \dot{\theta}^2 \sec \theta - f}{\frac{2}{3} (M+m) l \sec \theta - \frac{1}{2} m l \cos \theta} \quad (4)$$

$$\ddot{x} = \frac{-\frac{3}{4} m g \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} m l \dot{\theta}^2 \sin \theta + f}{M+m - \frac{3}{4} m \cos^2 \theta} \quad (5)$$

Reemplazando los estados del sistema, por:  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = x$  y  $x_4 = \dot{x}$

y evaluando el sistema anterior con:  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , se

obtienen los siguientes puntos de equilibrio, para una señal de control  $f = 0$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi & x_2 &= 0 \\ x_3 &= \text{constante} & x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Por las características físicas de la planta, ya que el riel para el movimiento del carro es de longitud finita, se considera a la variable de estado  $x_3$  igual a cero.

Puesto que el objetivo es mantener el péndulo en la posición vertical superior, el punto de equilibrio de interés que se va a estudiar es:

$$\mathbf{x}_e^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Obviamente esta posición es un punto de equilibrio inestable, ya que péndulo siempre tenderá a caer. Para demostrar la inestabilidad del punto  $\mathbf{x}_e$ , se puede utilizarla la teoría de Lyapunov.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M+m)g & 0 & 0 & 0 \\ [^2_3(M+m) - ^1_2m]l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - ^3_4mg & 0 & 0 & 0 \\ M + ^1_4m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ [^2_3(M+m) - ^1_2m]l \\ 0 \\ 1 \\ M + ^1_4m \end{bmatrix}$$

sistema, es decir, el sistema de la ecuación (6) es ahora:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 38.0048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.6014 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20.8907 \\ 0 \\ 6.2672 \end{bmatrix} v_u$$

Debido a las limitaciones físicas de la planta, como por ejemplo el hecho de tener una trayectoria limitada del carro, es necesario dar una mayor ponderación a la posición del carro en la matriz **Q** como se puede ver a continuación:

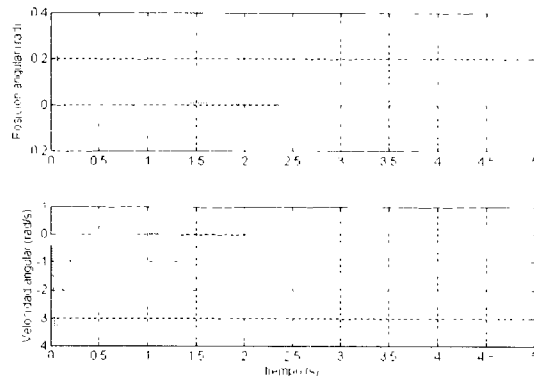
$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente se elige un **R** = [0.01].

Con estos parámetros para un periodo de muestreo de 1 ms, en MATLAB usando la instrucción **lqrd**, se obtiene la siguiente matriz de ganancias:

$$K = [-55.1811 \quad -10.0557 \quad -21.2620 \quad -17.9433]$$

La respuesta dinámica del sistema para estas condiciones es la que se presenta en la figura 2.



La planta implementada en esta investigación presenta los parámetros indicados en la Tabla I, reemplazando estos valores en el modelo a variables de estado del sistema ya linealizado, se obtiene:

TABLA I  
Parámetros de la planta

Parámetros	Valor	Unidad
Masa del carro	<i>M</i>	0.460 Kg
Masa del péndulo	<i>m</i>	0.106 Kg
Longitud del péndulo	<i>l</i>	0.45 m.
Región de movimiento del carro	± 0.17	m.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 38.0048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.6014 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.8517 \\ 0 \\ 2.0555 \end{bmatrix}$$

por lo que el sistema de péndulo invertido linealizado alrededor del punto de equilibrio **x<sub>e</sub> = 0**, es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 38.0048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.6014 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6.8517 \\ 0 \\ 2.0555 \end{bmatrix} f \tag{6}$$

### 3. Algoritmo de control

Para el cálculo de la matriz de ganancia **K**, se usan las matrices **A** y **B** del modelo linealizado del sistema de péndulo invertido [2], controlado por una señal bipolar de voltaje la cual a su vez controla el torque del motor y por ende la fuerza del carro del

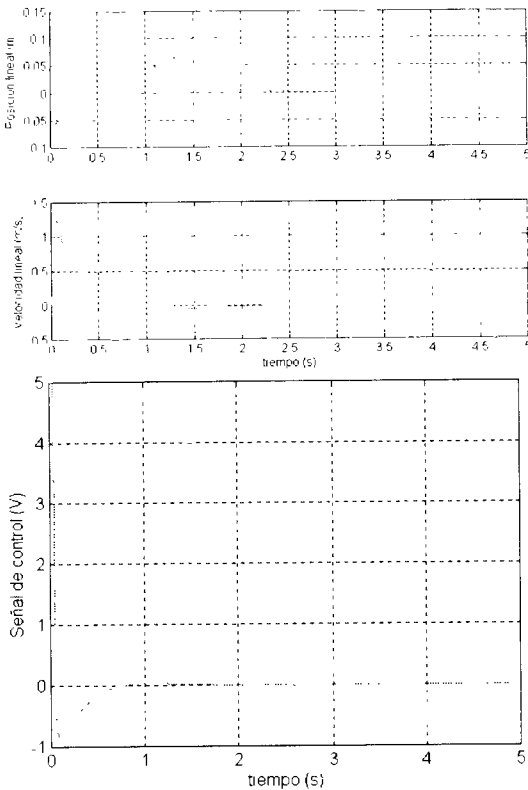


Figura 2. Respuesta del sistema y señal de voltaje de control si la matriz  $Q = \text{diag}(0.1 \ 0.1 \ 5 \ 1)$

#### 4. Construcción del sistema

El control diseñado en la sección anterior, fue comprobado satisfactoriamente en el sistema de péndulo invertido construido. La figura 5, presenta el sistema antes mencionado.

El sistema de péndulo invertido, consiste de un péndulo acoplado a un carro. El carro es accionado por un motor DC y puede desplazarse sobre un sistema de rieles de longitud limitada (34 cm aproximadamente). En el acoplamiento péndulo – carro no existe ningún actuador; además, se lo ha diseñado de tal forma que el péndulo puede oscilar libremente describiendo una trayectoria de  $360^\circ$ . Basándose en lo anterior, el propósito del sistema de control, como se mencionó, es balancear el péndulo en la posición vertical superior ( $0^\circ$ ), la cual corresponde a un punto de equilibrio inestable. Para la construcción del sistema descrito, se utilizó un sistema de riel – carro de los que se encuentran en las impresoras; de ahí, el reto era el idear un sistema lo suficientemente aproximado a sistemas de péndulo invertido comerciales, como por

ejemplo el distribuido por la empresa *Quanser Consulting* a un precio de USD.\$ 4550.

El control se lo implementó en un computador personal utilizando software y hardware de adquisición de datos de ©National Instruments (LabVIEW 5.0 [3] y tarjeta Lab-PC-1200 [4]). Como sensores de posición del sistema se utilizaron potenciómetros lineales de precisión multivuelta, puesto que se presentaron algunos problemas al utilizar codificadores ópticos en cuadratura como sensores de posición del sistema, por limitaciones propias del hardware de adquisición de datos.

El actuador del sistema lo conforman un servoamplificador en modo de corriente y un servomotor DC de 24 [V], 2.5 [A].

En la figura 3 se presenta el interfaz de usuario que permite la supervisión y control de la planta implementado en LabVIEW 5.0.,

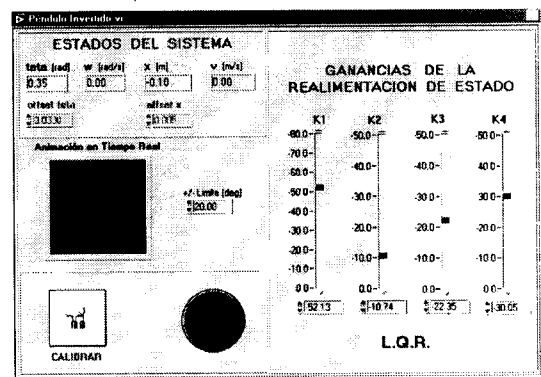
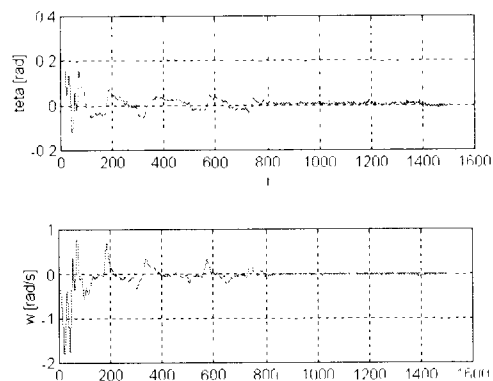


Figura 3. Interfaz de usuario en LabVIEW 5.0

La figura 4 presenta los resultados experimentales obtenidos al equilibrar el péndulo, para ciertas condiciones iniciales.



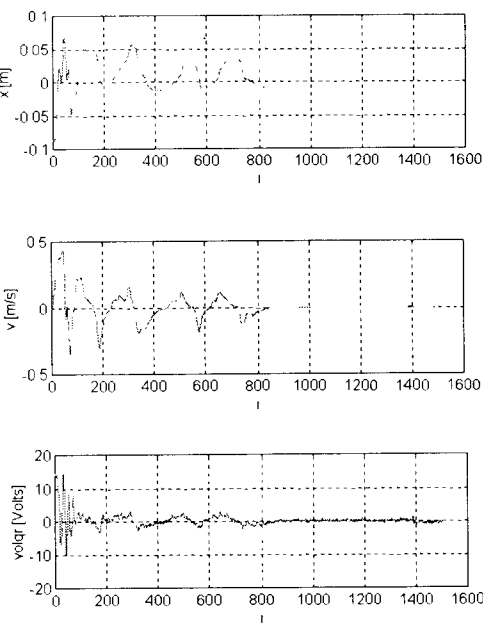


Figura 4. Estabilización del sistema.

En esta figura, el eje horizontal corresponde a "i", es decir, el número de iteraciones efectuadas por el programa de control.

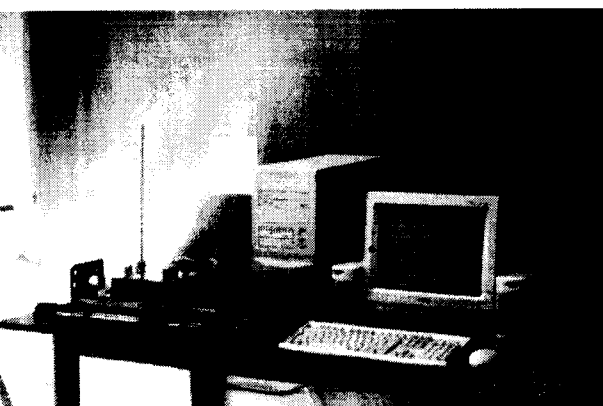


Figura 5. Fotografía del sistema implementado.

## 5. Conclusiones

- La trayectoria restringida del sistema péndulo - carro, limita la acción de control para perturbaciones externas grandes, puesto que el sistema requeriría un mayor movimiento del carro para poder equilibrar al péndulo.
- Al tener un sistema con baja fricción, la cual se obtuvo en base al material empleado en las partes mecánicas móviles de la planta y lubricación de la misma, el comportamiento del

sistema experimental se aproxima al caso ideal (*i.e* fricción cero) considerado al momento de modelar la planta.

- La principal ventaja de utilizar potenciómetros de precisión, es su bajo costo respecto a otro de sensores de posición como los codificadores ópticos.
- Si bien los potenciómetros de precisión poseen ciertas ventajas al momento de implementar el control con la tarjeta *Lab-PC-1200*, el continuo desgaste que presenta este tipo de sensores, afecta a las características como: linealidad, precisión, etc., lo cual afecta directamente al sistema de control del péndulo invertido.
- El utilizar un hardware externo a la tarjeta, que realiza operaciones que pudieron ser implementadas en *LabVIEW*, permitió al software dedicarse a tareas más específicas como son el control y supervisión del sistema.
- Una limitación que tiene la tarjeta de adquisición de datos *Lab-PC-1200*, es tanto el tipo de contadores que posee como el número de los mismos, sobre todo si se desea trabajar con codificadores ópticos.
- Por ser *LabVIEW* un lenguaje de programación orientado sobre todo al análisis y/o medición de datos, presenta ciertas limitaciones para lo que es control en tiempo real, ya que si bien se puede implementar algoritmos de control básicos como PID, Realimentación de Estado, ON-OFF, a medida que se aumente la complejidad del algoritmo o la constante de tiempo del sistema a controlar sea muy baja, es necesario emplear herramientas más poderosas tanto de hardware como de software, que suplan las deficiencias de *LabVIEW*.
- El error en la posición del carro con respecto al punto de equilibrio, es producido sobre todo porque la magnitud de la señal de control en ese instante es tan pequeña que no logra vencer la inercia del sistema.

## 6. Reconocimientos

Queremos reconocer todo el trabajo y ayuda prestada por el Dr. Rafael Fierro durante la elaboración de este trabajo.

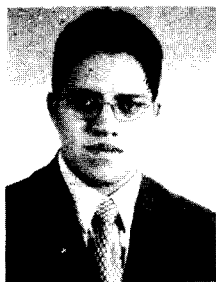
## 7. Referencias

- [1] P. Guevara, G. Zapata, "*Diseño y construcción de un péndulo invertido estabilizante en la posición vertical superior,*" Tesis de Grado, E.P.N., Octubre 1999.
- [2] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, México-Englewood Cliffs: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1993.
- [3] *LabVIEW Data Acquisition Basics Manual*, ©National Instruments, Enero 1996.
- [4] *LabVIEW Tutorial Manual*, ©National Instruments, Enero 1996.



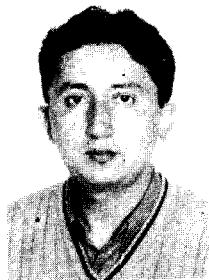
**Marco Barragán Bedoya.-** Realizó sus estudios superiores en la Escuela Politécnica Nacional, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones en enero de 1973. Posteriormente realizó sus estudios de Post - grado en la Universidad de Sao Paulo, Brasil obteniendo el título de Master en Ciencias, especialidad Ingeniería de Sistemas en diciembre de 1977. Actualmente se desempeña como profesor a tiempo completo en la Escuela Politécnica Nacional de Quito.

## 8. Biografías



**Pablo Guevara Espinosa.-** Nació en Quito, Ecuador el 25 de marzo de 1975. Obtuvo el título de Bachiller en Humanidades Modernas especialización Físico-Matemático en el colegio San Felipe Neri de la ciudad de Riobamba en 1992. Realizó sus estudios

superiores en la Escuela Politécnica Nacional, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica y Control en 1999.



**Galo Zapata Vargas.-** Nació en Quito, Ecuador el 3 de febrero de 1974. Obtuvo el título de Bachiller en Humanidades Modernas especialización Físico-Matemático en el colegio técnico F.A.E. de Quito en 1992. Realizó sus estudios superiores en la Escuela

Politécnica Nacional, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica y Control en 1999.