

TEORIA DE

SISTEMAS

LINEALES

Patricio Rosero Ortiz
Octubre-1999

CAPITULO VI

SERIES DE FOURIER

Indice	Pagina	
6.1	Introducción	6—1
6.2	Resolución de señales	6—11
6.3	Series de Fourier	6—13
	Serie trigonométrica de Fourier	6—19
6.4	Propiedades de simetría de señales periódicas	6—21
6.5	Propiedades de las series de Fourier	6—28
6.6	Series de Fourier de funciones singulares periódicas	6—40
6.7	Espectro complejo de Fourier	6—48
6.8	Distribución de potencia en las señales periódicas	6—50
6.9	Bibliografía	6—53

CAPÍTULO VI

SERIES DE FOURIER

6. 1 INTRODUCCIÓN

Una vez que hemos estudiado la teoría de las transformaciones para señales discretas, y sus aplicaciones en el análisis de sistemas lineales invariantes discretos, debemos ahora desarrollar la teoría correspondiente para señales y sistemas continuos. La teoría de las transformaciones para señales continuas es rica en contenido y tiene un amplio campo de aplicación. Dedicaremos este capítulo y los dos subsiguientes para su desarrollo.

Como mencionamos al inicio del Capítulo V, discutiremos la teoría de las transformaciones para señales continuas desde un punto de vista ligeramente diferente, este es el de descomponer una señal continua en componentes. Supongamos, por ejemplo, que una señal continua $x(t)$ se pueda descomponer como una suma de señales ponderadas, seleccionadas de algún conjunto, a las que denominaremos componentes, tal que la señal $x(t)$ pueda expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x(t) &= \dots + a_{-k} \zeta_{-k}(t) + \dots + a_{-1} \zeta_{-1}(t) + a_0 \zeta_0(t) + \\ &\quad + a_1 \zeta_1(t) + \dots + a_k \zeta_k(t) + \dots = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta_j(t) \quad \text{Ec. (6.1)}\end{aligned}$$

Debemos definir las señales $\zeta_j(t)$, de manera que la descomposición de $x(t)$ de acuerdo a la Ec.(6.1) sea posible.

Recordemos que en el Capítulo I sobre la sumatoria y la integral de convolución, seleccionamos al conjunto de funciones $\zeta_j(t)$ como una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados, o como una integral ponderada de impulsos desplazados. Estas representaciones de SLI, discretos o continuos, indican cómo la respuestas de tales sistemas a una entrada arbitraria se cons-

1 Aunque en esa oportunidad no dijimos nada sobre la descomposición de una señal continua en componentes, la Ec.(4.1) y la anterior a la Ec.(4.22), que no se encuentra numerada, representan la descomposición de una señal discreta y de una señal continua, respectivamente, en términos de impulsos desplazados.

De tales sistemas a una entrada arbitraria se construyen a partir de las respuestas del sistema a entradas elementales, en ese caso a partir de sus respuestas a la función impulso.

En el presente capítulo estudiaremos otra forma de seleccionar a las funciones $\zeta_1(t)$, de que podamos aprovechar las ventajas que ofrecen las propiedades de los sistemas lineales invariantes, como son las de superposición e invariancia. Seleccionaremos al conjunto de funciones $\zeta_1(t)$ de manera que, la respuesta de un SLI a cada componente $\zeta_1(t)$, sea igual a la misma señal escalada su magnitud en una constante finita. Esto es, queremos que:

$$H [\zeta_i(t)] = C_i \zeta_i(t) \quad \text{Ec. (6.2)}$$

donde C_i son constantes finitas.

En este caso las señales $\zeta_1(t)$ se denominan funciones propias del sistema, y si las constantes C_i son finitas, éstas constituyen los valores propios correspondientes.

De manera que si $x(t)$, definida mediante la Ec.(6.1), representa la señal de entrada a un sistema lineal invariante, éste responderá con una señal de salida $y(t)$ dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} y(t) = H \{ x(t) \} &= \dots + a_{-k} C_{-k} \zeta_{-k}(t) + \dots + a_{-1} C_{-1} \zeta_{-1}(t) + a_0 C_0 \zeta_0(t) + \\ &+ a_1 C_1 \zeta_1(t) + \dots + a_k C_k \zeta_k(t) + \dots = \\ y(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i C_i \zeta_i(t) \quad \text{Ec. (6.3)} \end{aligned}$$

Consecuentemente, la relación entrada—salida del sistema queda definida por sus valores propios C_i .

Para la gran mayoría de sistemas lineales invariantes de interés, las funciones $\zeta_1(t)$ que cumplen con la condición dada en la Ec. (6.2), resulta que son funciones exponenciales de la forma e^{at} , donde el coeficiente exponencial s es un número complejo que se puede expresar como $\sigma + j\omega$; tal que si:

$$y(t) = H [e^{at}]$$

es la respuesta del sistema la señal exponencial e^{at} entonces,

$$H [e^{a(t+\tau)}] = y(t + \tau)$$

es la respuesta del sistema a la señal $e^{a(t+\tau)}$, puesto que el sistema es lineal e invariante.

La respuesta del sistema a la señal $e^{a(t+\tau)}$ puede, sin embargo, expresarse como:

$$H [e^{s(t+\tau)}] = H [e^{s\tau} e^{st}] = e^{s\tau} H [e^{st}] = e^{s\tau} y(t)$$

De manera que:

$$y(t + \tau) = y(t) e^{s\tau} \quad \forall \tau$$

haciendo en esta última expresión $t = 0$, obtenemos:

$$y(\tau) = y(0) e^{s\tau} \quad \forall \tau \quad \text{Ec. (6.4)}$$

La Ec.(6.4) nos dice que, la respuesta de un sistema lineal invariante a la función exponencial e^{at} es igual a la misma función exponencial escalada su magnitud en la constante $y(0)$. De manera que si $y(0)$ es finita, e^{at} es una función propia del sistema y $y(0)$ el valor propio correspondiente. Debemos determinar la condición para la cual $y(0)$ es finita, para ello hagamos que $h(t)$ represente la respuesta a la función impulso del sistema lineal invariante bajo consideración. Puesto que:

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

obtenemos para $y(0)$ la expresión:

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau$$

De manera que la señal e^{at} es una función propia del sistema si el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau$$

es finita.

Para un sistema dado, podemos determinar aquellos valores de s tal que e^{at} sean funciones propias del sistema. Con este propósito escribamos a s como: $s = \sigma + j\omega$ De manera que:

$$\begin{aligned} |y(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-s\tau}| |h(\tau)| d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-(\sigma + j\omega)\tau}| |h(\tau)| d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma\tau} |h(\tau)| d\tau$$

En conclusión, si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma\tau} |h(\tau)| d\tau < \infty \text{ Ec. (6.5)}$$

entonces $|y(0)|$ es finito y la serial e^{at} es una función propia del sistema. La condición de la Ec.(6.5) es suficiente, pero no necesaria, para asegurar un valor finito de $|y(0)|$.

Para un sistema lineal invariante dado, la región en el plano complejo s que contiene todos los valores del coeficiente exponencial s , tal que la condición de la Ec.(6.5) se satisfaga se denomina *la región de absoluta convergencia* del sistema. Notemos que si un punto $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ está situado en la región de absoluta convergencia, todos los puntos $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ para todo valor de ω también estarán situados en la región de absoluta convergencia. De manera que la región absoluta convergencia está constituida por líneas situadas en el plano s . Podemos demostrar posteriormente, que la región de absoluta convergencia debe ser siempre una franja vertical continua situada en el plano s . Por ejemplo las áreas sombreadas en la fig.6.1a, b, y c son posibles regiones de absoluta convergencia, mientras que el área sombreada en la Fig.6.1d no es posible que represente una región de absoluta convergencia. Para demostrar esto, primero demostraremos que para $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ y para cualquier valor de ω , si los puntos $s_1 = \sigma_1 + j\omega$ se encuentran en la RAC² pero los puntos $s_2 = \sigma_2 + j\omega$ no lo están, entonces los puntos $s_3 = \sigma_3 + j\omega$ no pueden estar situados en la RAC. Esto es, queremos demostrar que si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt < \infty$$

y si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt = \infty$$

entonces la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_3 t} |h(t)| dt = \infty$$

también será infinita. Escribamos:

² BAC = región de absoluta convergencia, como antes.

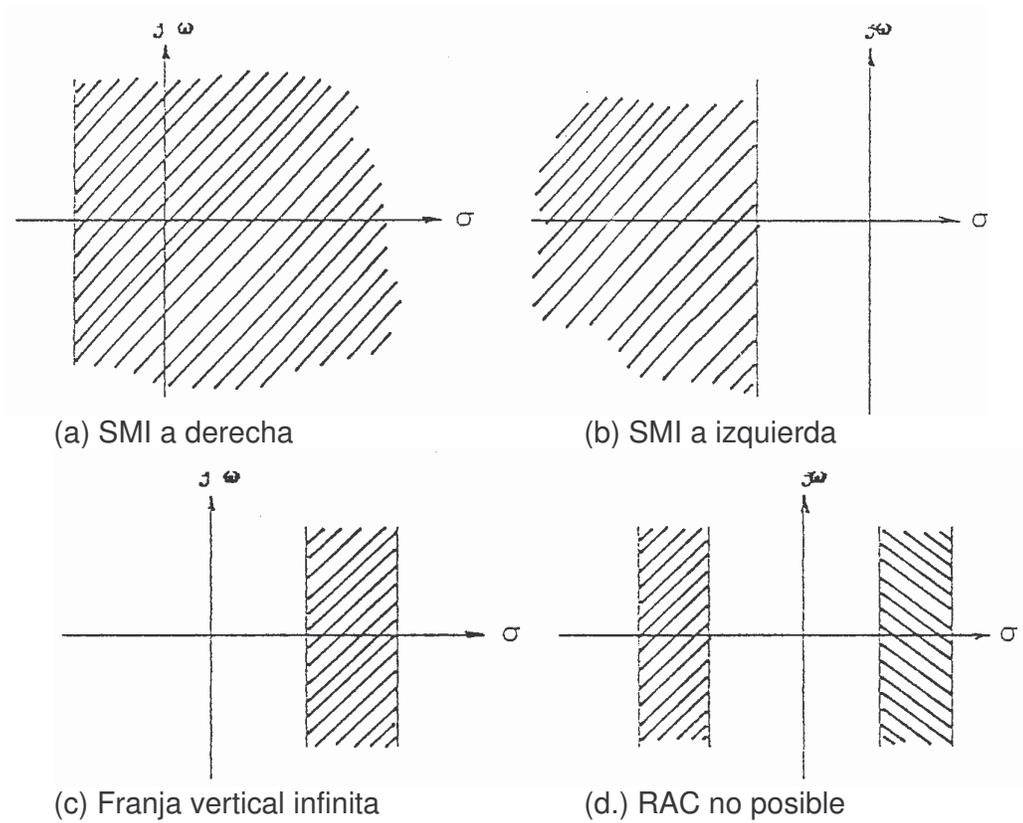


Fig 6.1 a.) b) c) Regiones de absoluta convergencia posible d) No representa a una posible RAC

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt$$

y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt$$

puesto que los valores de:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt \quad ; \text{ y de :}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt$$

son positivos y su suma es finita, el valor de cada una de estas integrales debe ser finito. Que $\sigma_2 > \sigma_1$ implica que:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt$$

Ahora puesto que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt = \infty$$

se sigue que:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt = \infty$$

Por otra parte, puesto que $\sigma_3 > \sigma_2$

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_3 t} |h(t)| dt \geq \int_{-\infty}^0 e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt$$

y puesto que el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma_3 t} |h(t)| dt$$

es positiva, concluimos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_3 t} |h(t)| dt = \infty$$

Lo cual significa que no puede existir una RAC como la indicada en la Fig. De manera similar podemos demostrar que para $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$ si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt < \infty$$

y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt = \infty$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_3 t} |h(t)| dt = \infty$$

Algunas propiedades de un sistema lineal invariante se revelan al conocer su región de absoluta convergencia. Por ejemplo, notemos que un sistema lineal invariante es estable si y solamente si su RAC incluye el eje $j\omega$. A esta conclusión arribamos de una observación efectuada en la Sección 4.7, en la que afirmamos que un sistema lineal invariante es estable si su respuesta impulsiva es absolutamente integrable. Esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

lo cual a su vez implica que $\sigma = 0$ y, por tanto, la inclusión del eje $j\omega$ en la región de absoluta convergencia.

La región de absoluta convergencia de un sistema causal es siempre un semiplano infinito a la derecha de una línea vertical en el plano complejo s . Esta conclusión proviene de la siguiente observación: Si $h(t) = 0$ para $t < 0$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt$$

y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt$$

Consecuentemente, si $\sigma_2 > \sigma_1$, y si:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma_1 t} |h(t)| dt < \infty$$

ello implica con mayor razón que:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma_2 t} |h(t)| dt < \infty$$

Esto demuestra que la RAC de un SLI causal es siempre un semiplano infinito a la derecha de una línea vertical.

Podemos demostrar en forma similar que para algún valor finito t_0 si $h(t) = 0$ para $t < t_0$, la región de absoluta convergencia todavía es un semiplano infinito a la derecha de una línea vertical. De igual manera, podemos demostrar que la región de absoluta convergencia de un sistema no causal es un semiplano infinito a la izquierda de una línea vertical ubicada en el plano complejo s .

Por ejemplo, consideremos que:

$$h(t) = (8e^{-2t} - 4e^{-t}) \mu(t)$$

sea la respuesta impulsiva de un sistema lineal invariante causal. Su RAC la podemos obtener a partir de la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} |h(t)| dt = 8 \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+2)t} dt + 4 \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+1)t} dt$$

La primera integral es finita para toda $\sigma > -2$, mientras que la segunda es finita para toda $\sigma > -1$. Por tanto, su RAC viene dada por:

$$\Re \{s\} > -1$$

como se indica en la Fig.6.2a. Así mismo, sea:

$$h(t) = \begin{cases} -2e^{2t} & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

la respuesta impulsiva de un sistema lineal invariante no causal, entonces su RAC la podemos determinar a partir de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} |h(t)| dt = 2 \int_{-\infty}^0 e^{-(\sigma-2)t} dt$$

integral que es finita si el coeficiente exponencial $\sigma-2$ es negativo. Por lo tanto, la RAC viene dada por:

$$\Re \{s\} < 2$$

como se indica en la Fig.6.2b.

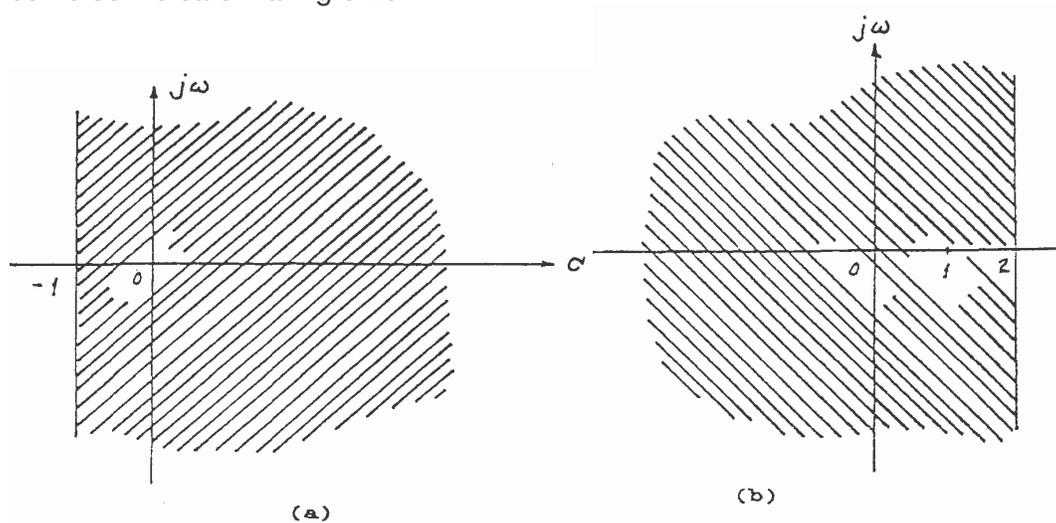


Fig..6.2 Regiones de absoluta convergencia de dos sistemas.

Antes de concluir esta sección es necesario que clarifiquemos un punto. De acuerdo con lo estudiado en el Capítulo 2, conocemos que un sistema cuya relación entrada—salida se describe mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, es lineal e invariante si y sólo si el sistema se halla inicialmente en reposo. Más aún, si la señal de estímulo del sistema es e^{at} la solución es Ce^{at} . Pero entonces recordemos que la salida contiene también una componente homogénea la cual no se ha incluido en nuestra discusión anterior. Utilizaremos un ejemplo simple para ilustrar como esta aparente discrepancia puede ser resuelta. Para ello, consideremos un sistema lineal invariante cuya relación entrada-salida esté descrita mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4x'(t) \quad \text{Ec. (6.6)}$$

La respuesta impulsiva del sistema viene dada por:

$$h(t) = (8e^{-t} - 4e^{-3t}) \mu(t)$$

Puesto que la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma\tau} |h(\tau)| d\tau$$

es finita para $\sigma > -1$, la región de absoluta convergencia del sistema es el semiplano infinito a la derecha de la línea vertical $\Re\{s\} = -1$, como se indica en la Fig.6.2a. Por ello, de acuerdo a nuestra discusión en los párrafos anteriores, la respuesta del sistema al estímulo e^{at} viene dada por:

$$y(t) = y(0) e^{st} = \left[\int_0^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \right] e^{st} = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} e^{st} \quad \text{Ec. (6.7)}$$

Asumiendo que $\Re\{s\} > -1$

Determinaremos también la respuesta del sistema resolviendo la ecuación diferencial (6.6), haciendo $x(t) = e^{at}$, para toda t . Asumiremos primero que la entrada se aplica al sistema en el instante $t = -T$, esto es, haremos $x(t) = e^{at} \mu(t+T)$ y luego tomaremos el límite cuando T tienda a infinito para obtener la solución deseada. La solución particular viene dada por:

$$y(t) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} e^{st}$$

y la solución total por:

$$y(t) = \left[A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} e^{st} \right] \mu(t+T)$$

Si asumimos que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, entonces: $y(-T-) = 0$ i $y'(-T-)=0$. Además como en el instante $t = -T$, el segundo miembro de la Ec.(6.6) no contiene funciones singulares, ello implica que tanto $y(t)$ como $y'(t)$ sean continuas en $t = -T$, por tanto, $y(-T+) = 0$ i $y'(-T+) = 0$. Este par de valores constituyen las condiciones iniciales para $t > -T$. Haciendo uso de ellas, tenemos que:

$$y(-T+) = 0 = A_1 e^T + A_2 e^{2T} + \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} e^{-sT}$$

$$y'(-T+) = 0 = -A_1 e^T - 2A_2 e^{2T} + \frac{4s^2}{s^2 + 3s + 2} e^{-sT}$$

de donde obtenemos que:

$$A_1 = -\frac{4s}{s+1} e^{-(s+1)T}$$

$$A_2 = \frac{4s}{s+2} e^{-(s+2)T}$$

y la solución completa viene dada por:

$$y(t) = \left[\left(\frac{-4s e^{-(s+1)T}}{s+1} \right) e^{-t} + \left(\frac{4s e^{-(s+2)T}}{s+2} \right) e^{-2t} + \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} e^{st} \right] \mu(t+T) \quad \text{Ec. (6.8)}$$

Evidentemente esta solución difiere de la obtenida en la Ec. (6.7) la misma que consta únicamente de la componente particular. Si asumimos que la componente transitoria decae más rápidamente que la componente en estado estable, entonces, después de un período grande de tiempo la componente transitoria será despreciable comparada con la componente en estado estable. En este caso se dice que se cumple la condición de dominancia. Para el presente ejemplo la condición de dominancia se cumple si:

$$\Re \{ s \} > -1$$

Por ello la componente transitoria decaerá más rápidamente que la componente en estado estable; de manera que luego de un intervalo grande de tiempo la solución total constará únicamente de la componente en estado estable. Esto nos permite concluir que:

Cuando un sistema lineal invariante es excitado mediante una función exponencial de la forma e^{at} , que se aplica en $t = -\infty$ y si el valor de s se encuentra en la RAC del sistema; esto es si se satisface la condición de dominancia, entonces la respuesta del sistema constará únicamente de la componente particular.

Efectivamente, vemos que el límite de la Ec.(6.8) cuando T tiende a infinito hace que $y(t)$ se reduzca a:

$$y(t) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} e^{st}$$

que es igual a la solución dada por la Ec.(6.7)

Por otra parte, si la señal exponencial e^{at} se aplica al sistema en cualquier instante finito de tiempo $t = t_0$ la respuesta del sistema constará tanto de la componen te homogénea como de la solución particular.

Esto es precisamente lo que indica la Ec(6.8), con $T = t_0$. De este modo hemos aclarado la aparente discrepancia que existía al utilizar este método.

6.2 RESOLUCIÓN DE SEÑALES

Volvamos ahora al problema de la descomposición de una señal continua como una suma ordenada o como una integral de funciones exponenciales complejas. Por supuesto, para un sistema lineal invariante dado, tal descomposición es útil únicamente cuando las funciones exponenciales complejas son todas funciones propias del sistema. Nuestro propósito no es llevar a cabo una descomposición para cada señal particular, sino estudiar algunas posibilidades de escoger un grupo de funciones exponenciales complejas de la forma e^{at} de manera que una se dada pueda descomponerse como una suma ordenada o como una integral de esas funciones.

Supongamos que escogemos un grupo de funciones exponenciales complejas e^{at} de modo que s sean puntos equidistantes sobre el eje $j\omega$, como se ilustra en la Fig.6.3a. Esto es, las funciones exponenciales complejas son:

$$\dots, e^{-jk\omega_0 t}, \dots, e^{-j2\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}, 1, e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, \dots, e^{jk\omega_0 t}, \dots$$

donde ω_0 es una constante que hemos escogido, y que representa la frecuencia angular de la señal. Tal señal puede descomponerse como una suma ordenada de estas funciones complejas de la siguiente forma:

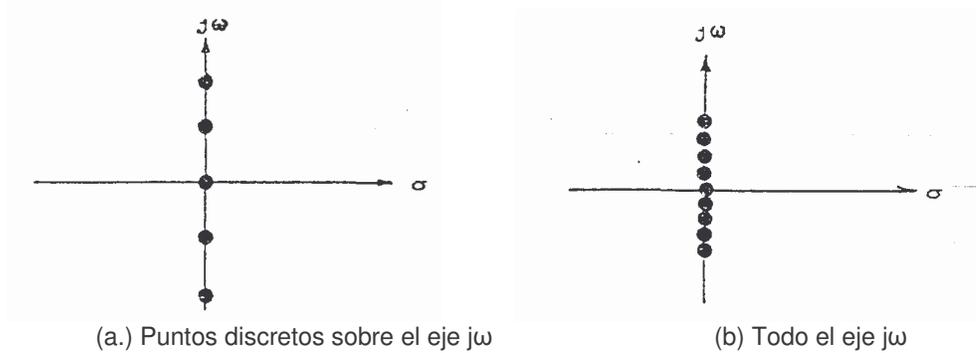


Fig. 6.3 Resolución de una función exponencial

$$x(t) = \dots + x_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + x_{-1}e^{-j\omega_0 t} + x_0 + x_1e^{j\omega_0 t} + \dots + x_k e^{jk\omega_0 t} + \dots =$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde x_n es en general, un número complejo que puede considerarse como la «amplitud» de la función exponencial compleja $\exp[jn\omega_0]$.

Otra forma de seleccionar al conjunto de funciones exponenciales complejas e^{at} , es tomando todos los puntos a lo largo del eje $j\omega$, como se muestra en la Fig.6.3b. Una señal continua $x(t)$ puede expresarse como una integral de funciones exponenciales complejas $e^{j\omega t}$. Así:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

donde $(1/2\pi)X(\omega)$ constituye la amplitud de la función exponencial $e^{j\omega t}$. El factor de escala $1/2\pi$, como veremos posteriormente, aparece por conveniencia. Estudiaremos esta forma de representar una señal continua $x(t)$ en el Capítulo 7, correspondiente a la transformada de Fourier.

No hay ninguna razón para limitarnos a utilizar funciones exponenciales complejas e^{at} , en donde s sean puntos localizados sobre el eje $j\omega$. De modo que, podemos definir a s como puntos localizados a lo largo de cualquier línea vertical ubicada en el plano complejo s , como se indica en la Fig.6.3c. En este caso tenemos funciones exponenciales complejas de la forma:

$$e^{(\sigma_o + j\omega)t}$$

Si hacemos que

$$\frac{1}{2\pi} X(\sigma_o + j\omega)$$

representen las amplitudes de las funciones exponenciales complejas, entonces podemos escribir que:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma_o + j\omega) e^{(\sigma_o + j\omega)t} d\omega$$

Este caso lo estudiaremos en el Capítulo 8 correspondiente a la transformada de Laplace.

No existe otra forma de seleccionar a las funciones e^{at} que sea de utilidad en el análisis de sistemas lineales invariantes.

6.3 LAS SERIES DE FOURIER

Investigaremos la posibilidad de descomponer una señal $x(t)$ como una suma de funciones exponenciales complejas e^{at} en donde s son puntos discretos equidistantes situados sobre el eje $j\omega^3$. Así:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t} \quad \text{Ec. (6.9)}$$

Notemos primero que no todas las señales continuas pueden expresarse mediante esta suma. De acuerdo a la Ec.(6.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_o}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o \left(t + \frac{2\pi}{\omega_o}\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t} e^{j2\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_o t} = x(t) \end{aligned}$$

lo cual implica que $x(t)$ debe ser necesariamente una señal periódica de perio-

³ Aunque la mayoría de señales que encontraremos son reales, los resultados que obtengamos serán igualmente para el caso general de señales complejas.

dica de periodo $(2\pi/\omega_0)$ o $(2\pi/m\omega_0)$ para al entero positivo m . [Una señal continua $x(t)$ se dice que es periódica si $x(t+T) = x(t)$ para alguna constante T . Más aún, el menor valor de T que hace que $x(t+T) = x(t)$ se dice que es el período de $x(t)$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que el período de $x(t)$ es $2\pi/\omega_0$, que también lo denotaremos con T . En efecto, la descomposición de $x(t)$ de acuerdo con la Ec.(6.9) es posible, si $x(t)$ es una señal periódica que satisface las siguientes condiciones:

1. La señal $x(t)$ debe ser absolutamente integrable en un período. Esto es:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$$

2. La señal $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y de mínimos en un período.
3. La señal $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades en un período.

Estas condiciones se conocen como las condiciones de Dirichlet.

Puesto que la función exponencial $\exp[jn\omega_0 t]$ es continua para todo valor de t , la suma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{Ec. (6.10)}$$

deberá también ser continua para todo valor de t . Uno podría, por tanto, requerir por el valor que asumirá la Ec.(6.10) en $t = t_0$, si $x(t)$ posee una discontinuidad en $t = t_0$. [Puesto que, el sumatorio de la Ec.(6.16) asume un único valor en $t = t_0$, este valor podría corresponder a $x(t_0^-)$ o bien a $x(t_0^+)$, o a cualquier valor intermedio]. Resulta que para una señal continua $x(t)$ que satisface las condiciones de Dirichlet se cumple que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2} [x(t^+) + x(t^-)]$$

para todo t . Esto es, si $x(t)$ es continua en $t=t_0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t_0} = x(t_0)$$

y si $x(t)$ posee una discontinuidad en t_0 :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2} [x(t_0^+) + x(t_0^-)]} \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \quad (6.9)$$

Para una señal periódica que satisface las condiciones de Dirichlet, la suma de la Ec.(6.9) se conoce como la representación en series de Fourier de la señal periódica $x(t)$. Las constantes x_n se conoce como los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$, los mismos que se pueden determinar de la forma: Multipliquemos ambos miembros de la Ec.(6.8) por $e^{-jk\omega_0 t}$, así:

$$x(t) e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j(n-k)\omega_0 t}$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación en un período, desde $t = -T/2$ a $t = T/2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j(n-k)\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left[\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt \right] \quad \text{Ec. (6.11)} \end{aligned}$$

Puesto que la señal exponencial es ortogonal se cumple que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

De manera que el segundo miembro de la Ec.(6.11) se reduce a Tx_k . De donde despejaremos a x_k , así:

$$x_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{Ec. (6.12)}$$

Cambiando k por n en la Ec.(6.12), obtenemos relación para el cálculo de los coeficientes de Fourier:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T} t} dt \quad \text{Ec.(6.13)}$$

donde $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La expresión para el cálculo de los coeficientes de Fourier, Ec.(6.13), puede escribirse en una forma más general de la siguiente manera:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2+T_0}^{T/2+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2+T_0}^{T/2+T_0} x(t) e^{-j2\pi n t/T} dt \quad \text{Ec. (6.14)}$$

Para cualquier constante T_0 .

Ejemplo No 1

Supongamos que queremos determinar de Fourier de la señal indicada en la representación en una serie la Fig.6.4, definida por:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{A}{3/2} t - A & -\frac{3}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{A}{3/2} t & 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

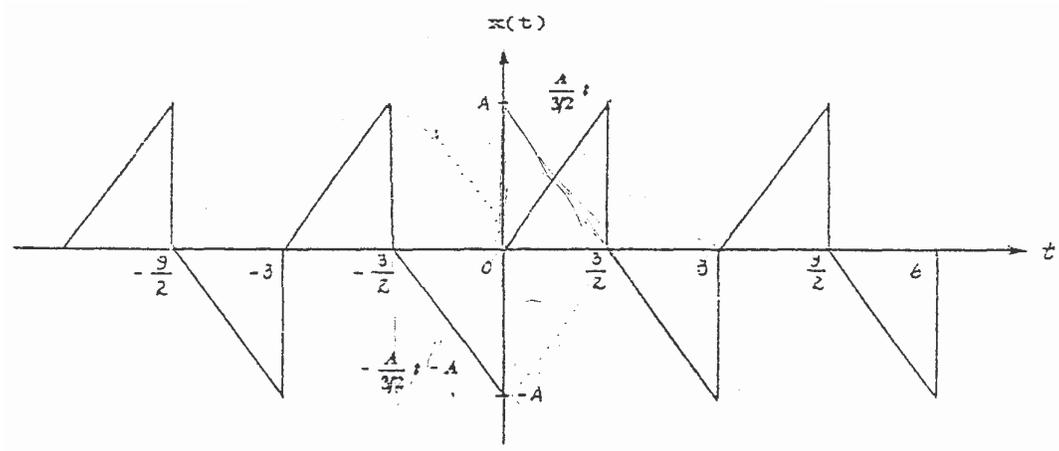


Fig.6.4 Señal periódica del Ejemplo No 1

Los coeficientes de Fourier de esta señal vienen dados por:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{3} \int_{-3/2}^0 \left(-\frac{A}{3/2} t - A \right) e^{-j\frac{2\pi n}{3} t} dt + \frac{1}{3} \int_0^{3/2} \frac{A}{3/2} t e^{-j\frac{2\pi n}{3} t} dt \\ &= -\frac{2A}{9} \int_{-3/2}^0 t e^{-j\frac{2\pi n}{3} t} dt - \frac{A}{3} \int_{-3/2}^0 e^{-j\frac{2\pi n}{3} t} dt + \frac{2A}{9} \int_0^{3/2} t e^{-j\frac{2\pi n}{3} t} dt \\ &= -\frac{A}{\pi^2 n^2} (2 + j \pi n) (1 - \cos \pi n) \end{aligned}$$

En esta expresión debemos notar que el factor $(1 - \cos n\pi)$ se reduce a cero para toda n par, y es igual a 2 para toda n impar. Por tanto

$$x_n = \begin{cases} \frac{-A \cdot 2}{\pi^2 n^2} (2 + j\pi n) & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases} \quad \text{Ec. (6.15)}$$

y la representación de $x(t)$ en series de Fourier viene dada por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty, \pm 3, \dots}^{\infty} -\frac{2 \cdot A}{\pi^2 n^2} (2 + j\pi n) e^{j \frac{2\pi n}{3} t}$$

Como veremos de este ejemplo los coeficientes de Fourier son en general números complejos.

Ejemplo No 2

Consideremos ahora la se indicada en la Fig.6.5, cuya representación en series de Fourier queremos encontrar.

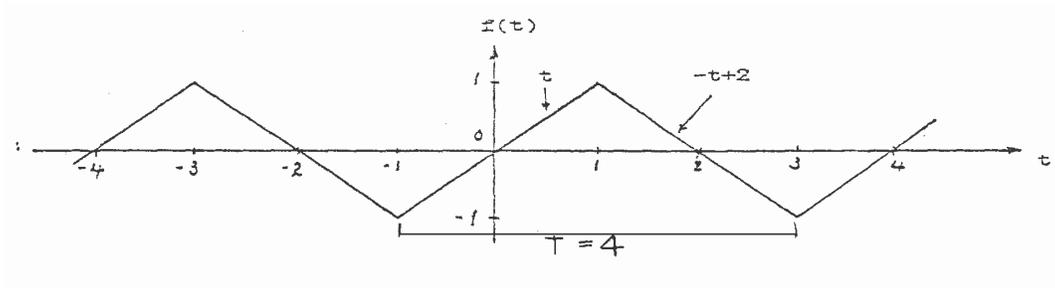


Fig 6.5 Señal periódica del Ejemplo No 2

Los coeficientes de Fourier se calculan como:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 t e^{-j \frac{\pi n}{2} t} dt + \frac{1}{4} \int_1^3 (-t+2) e^{-j \frac{\pi n}{2} t} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 t e^{-j \frac{\pi n}{2} t} dt - \frac{1}{4} \int_1^3 t e^{-j \frac{\pi n}{2} t} dt + \frac{1}{2} \int_1^3 e^{-j \frac{\pi n}{2} t} dt \\ &= j \left[\frac{1}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{-2}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] (1 - e^{-j\pi n}) \end{aligned}$$

que se simplifican a la siguiente expresión:

$$f_n = \begin{cases} j \frac{-4}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases} \quad \text{Ec. (6.16)}$$

La representación en series de Fourier de esta señal viene dada por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty, \pm 3, \dots}^{\infty} j \frac{-4}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) e^{j\frac{\pi n}{2}t}$$

Ejemplo No 3

Sea la señal periódica indicada en la Fig.6.6, determinaremos su representación en una serie de Fourier.

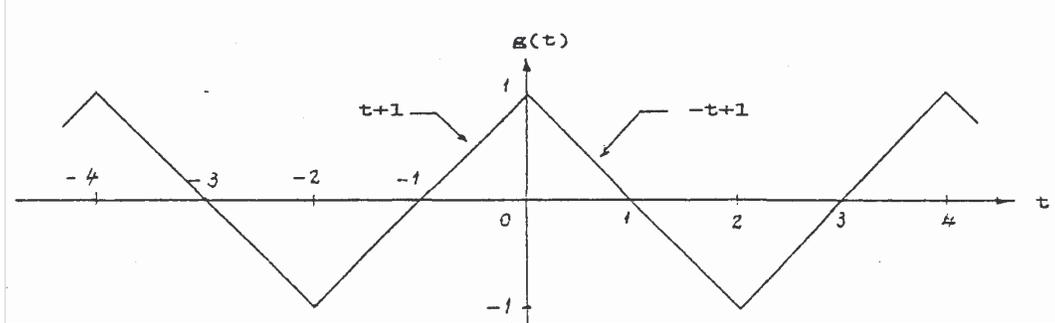


Fig.6.6 Señal periódica del ejemplo No 3

Los coeficientes de Fourier se determinan a partir de la expresión:

$$g_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 (t+1) e^{-j\frac{\pi n}{2}t} dt + \frac{1}{4} \int_0^2 (-t+1) e^{-j\frac{\pi n}{2}t} dt$$

luego de una manipulación algebraica, ésta se reduce a:

$$g_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 n^2} & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases} \quad \text{Ec. (6.17)}$$

La representación de esta señal en series de Fourier viene dada por:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty, \pm 3, \dots}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} e^{j\frac{\pi n}{2}t}$$

Como analizaremos en la siguiente Sección, algunas propiedades de simetría de las señales periódicas se reflejan en sus coeficientes de Fourier. Por tanto no es coincidencia que una señal periódica par tenga coeficientes de Fourier puramente reales, ni que una señal periódica impar tenga coeficientes de Fourier puramente imaginarios, ni que una señal periódica que no tenga ni simetría par ni simetría impar tenga coeficientes de Fourier que consten tanto de una parte real como de una parte imaginaria, como podemos observar en los ejemplos 1, 2 y 3 acabados de presentar.

SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Cuando la señal periódica $x(t)$ es una función real de tiempo, es posible obtener otra representación en series de Fourier para $x(t)$. Para obtener esta representación-alterna, recordemos que los coeficientes de Fourier son en general números complejos, de manera que el conjugado de:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

viene dado por:

$$x_n^* = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^*(t) e^{jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) e^{jn\omega_s t} dt = x_{-n}$$

De manera que:

$$x_n^* = x_{-n}$$

Por ello:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n e^{jn\omega_s t} + x_{-n} e^{-jn\omega_s t} \right] = \\ &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[x_n e^{jn\omega_s t} + x_n^* e^{-jn\omega_s t} \right] \end{aligned}$$

Haciendo en esta ecuación $x_n = a_n + jb_n$, y por tanto: $x_n^* = a_n - jb_n$, obtenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n + jb_n) e^{jn\omega_s t} + (a_n - jb_n) e^{-jn\omega_s t} \right] = \\ &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_n \cos(n\omega_s t) - \sum_{n=1}^{\infty} 2 b_n \sen(n\omega_s t) \end{aligned}$$

De modo que para una señal periódica real $x(t)$, la representación alterna en una serie trigonométrica de Fourier viene dada por:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_s t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sen(n\omega_s t) \quad \text{Ec. (6.18)}$$

donde:

$$\rightarrow A_0 = x_0 = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) dt$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A_n = 2a_n = 2 \Re \{ x(n) \} &= 2 \Re \left[\frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B_n = -2b_n = -2 \Im \{ x(n) \} &= -2 \Im \left[\frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Por ejemplo, para obtener la representación en una serie trigonométrica de Fourier de la señal mostrada en la Fig.6.4, Ejemplo No 1, debemos primero obtener los coeficientes de Fourier de la siguiente manera:

$$A_0 = x_0 = 0$$

$$A_n = 2\Re\{x_n\} = \frac{-8A}{\pi^2 n^2} \quad \forall n \text{ impar}$$

$$B_n = -2\Im\{x_n\} = \frac{2A}{\pi n} \quad \forall n \text{ impar}$$

de manera que:

$$x(t) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{-4A}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{3} t\right) + \frac{2A}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3} t\right) \quad \text{Ec. (6.19)}$$

Los términos de la Ec.(6.19) se denominan las componentes de frecuencia de $x(t)$. En particular el término A_0 se denomina la componente continua o valor medio de $x(t)$. Los términos $A_1 \cos(\omega_0 t)$ y $B_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$ se conocen como las componentes de frecuencia fundamental de $x(t)$, y para $n > 1$ los términos $A_n \cos(n\omega_0 t)$ y $B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$ se conocen como las n -ésimas armónicas de $x(t)$. Extendiendo esta terminología a la representación de una señal $x(t)$ en una serie exponencial de Fourier, Ec(6.8), denotaremos a x_0 como la componente continua o valor medio de la señal $x(t)$, los términos $x_{-1} e^{-j\omega_0 t}$ y

$x_1 e^{j\omega_0 t}$ como las componentes de frecuencia fundamental de $x(t)$ y los términos $x_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$ y $x_n e^{jn\omega_0 t}$ como las enésimas armónicas de $x(t)$.

La frecuencia fundamental de $x(t)$ se define como $\omega_0 / 2\pi$ ciclos por segundo. El hecho de que una señal contenga diferentes componentes de frecuencia es un concepto fundamental en todo sistema eléctrico. Cualitativamente hablando, las componentes de más altas frecuencias en las series de Fourier se deben a variaciones rápidas de $x(t)$. Por ello, las componentes de altas frecuencias serán más prominentes en señales que contengan discontinuidades agudas que en aquellas señales de variaciones suaves.

6.4 PROPIEDADES DE SIMETRIA DE SEÑALES PERIODICAS

Mencionamos ya que las propiedades de simetría de una señal periódica $x(t)$, se reflejaban en la representación de la señal en una serie de Fourier. A continuación estudiaremos con mayor detalle esta circunstancia.

Simetría par

Recordemos que una función $x(t)$ se dice que es par si $x(t) = x(-t)$. Puesto que $\cos(n\omega_0 t)$ es una función par, la suma de términos de la forma $A_n \cos(n\omega_0 t)$ también será una función par. Demostraremos a continuación que la representación en series de Fourier de una señal periódica par, consta únicamente de *armónicas coseno*. Lo cual implica que los coeficientes B_n sean iguales a cero. Efectivamente vemos que:

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^0 x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\pi/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt =$$

Haciendo en la primera integral $t = -\tau$, obtenemos:

$$B_n = -\frac{2}{T} \int_{\pi/2}^0 x(-\tau) \operatorname{sen}(-n\omega_0 \tau) d\tau + \frac{2}{T} \int_0^{\pi/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Considerando que la señal $x(t)$ es una función par, y cambiando los límites de la primera integral finalmente obtenemos:

$$B_n = -\frac{2}{T} \int_0^{\pi/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{\pi/2} x(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt = 0$$

Lo cual implica que la representación en una serie trigonométrica de Fourier conste únicamente de armónicas coseno. Además, puesto que:

$$B_n = -2 \Im \{x_n\} = 0$$

los coeficientes de Fourier x_n serán números reales puros.

Así, la señal $g(t)$ del ejemplo No 3 es una señal par, sus coeficientes encontramos que venían dados la Ec.(6.17), así:

$$g_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} \quad \forall n \text{ impar}$$

que son números reales. De manera que:

$$A_0 = 0 ; \quad A_n = 2 \Re \{x_n\} = \frac{8}{\pi^2 n^2} ; \quad B_n = -2 \Im \{x_n\} = 0$$

y la representación en una serie trigonométrica de esta señal constará únicamente de armónicas coseno. Así:

$$g(t) = \sum_{1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos \left(\frac{\pi n}{2} t \right)$$

Simetría impar

De igual forma, si $x(t)$ es una función periódica impar, entonces $\cos(n\omega_0 t)$ es una función impar, por tanto, siguiendo el mismo procedimiento podemos demostrar que $A_n=0$ Esto significa que su representación en una serie trigonométrica de Fourier constará únicamente de armónicas seno. También, puesto que:

$$A_n = \Re \{x_n\} = 0$$

los coeficientes de Fourier x_n serán imaginarios puros.

Efectivamente, la señal $f(t)$ del ejemplo No 2 es una señal impar, sus coeficientes de Fourier, Ec.(6.16), resultaron puramente imaginarios, de manera que:

$$A_n = 0 ; \quad B_n = \frac{8}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{2} \right) \quad \forall n \text{ impar}$$

y su representación en una serie trigonométrica constará únicamente de armónicas seno. Así:

$$f(t) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{2} t \right)$$

Señales que no tienen ni simetría par ni simetría impar

Por otra parte, la representación de una señal $x(t)$ que no tenga ni simetría par ni simetría impar constará tanto de armónicas coseno como de armónicas seno Así:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

En este caso, como mencionamos en el Capítulo 1, $x(t)$ puede expresarse como la suma de una componente par $x_p(t)$ y de una componente impar $x_i(t)$. Así:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

cuyas representaciones vendrían dadas por:

$$x_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t)$$

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

El valor medio A_0 de la señal $x(t)$, se asocia normalmente con la componente par $x_p(t)$, puesto que debido a la simetría impar de la otra componente, su valor medio es igual a cero. Cada componente es igual a:

$$x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

Una señal como tal, la encontramos en el ejemplo No 1, cuya forma de onda se indica en la Fig.6.4. En la Fig.6.7a y b se muestran sus componentes par e impar, respectivamente.

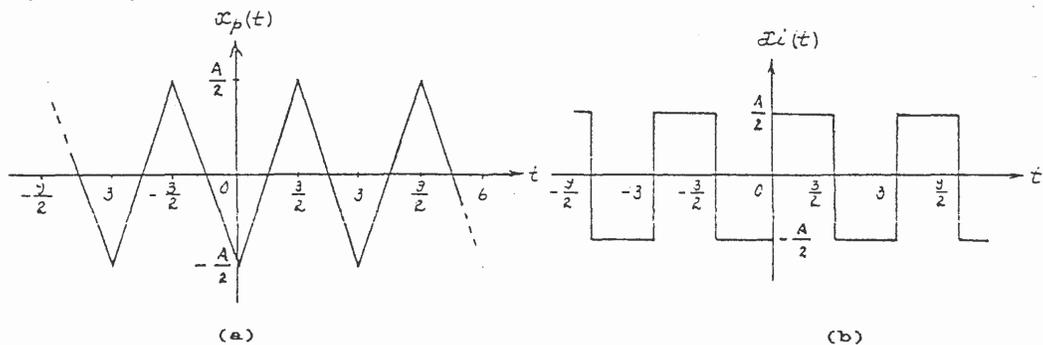


Fig.6.7 Componente par e impar de la señal de la Fig.6.4

Su representación en una serie trigonométrica de Fourier ya la tuvimos anteriormente. Esta viene dada por la Ec.(6.19), que la volvemos a escribir de la siguiente manera:

$$x(t) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{-2A}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{3} t\right) + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{3} t\right)$$

El lector puede comprobar que el primer sumatorio corresponde a la componente par de $x(t)$ indicada en la Fig.6.7a, mientras que el segundo sumatorio corresponde a la componente impar de $x(t)$ indicada en la Fig.6.7b

Simetría de rotación

Si $x(t)$ es una señal periódica tal que:

$$x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -x(t)$$

entonces se dice que $x(t)$ tiene simetría de rotación o simetría de media onda. Por ejemplo, las señales mostradas en las Fig.6.4, 6.5, y 6.6 en los ejemplos No 1, 2 y 3 son señales que poseen simetría de rotación. La representación de estas señales en series de Fourier vimos que constan únicamente de armónicas impares. Esto se debe a que los coeficientes de Fourier « x_n » son cero para « n =par» En efecto:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{Ec. (6.20)}$$

haciendo $t=T+T/2$ en la segunda integral de la Ec.(6.20) obtenemos

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x\left(\tau + \frac{T}{2}\right) e^{-jn\omega_0\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} d\tau = \\ &= \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] (1 - e^{-jn\pi}) = 0 \quad \text{para } n \text{ par} \end{aligned}$$

Se sigue que $A_n=B_n=0$ para n par. Esto es, la representación en series de Fourier de $x(t)$ contiene únicamente armónicas impares.

Utilizando el mismo argumento, se puede demostrar que si $x(t+T/2) = x(t)$, entonces la representación de $x(t)$ en series de Fourier

contendrá únicamente armónicas pares. Sin embargo, debe ser claro que en este caso el período de $x(t)$ es $T/2$ en lugar de T . Consecuentemente, la frecuencia armónica fundamental de $x(t)$ es $2/T$, lo cual asegura la existencia solamente de armónicas pares.

Ejemplo No 4

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo. Hagamos que $x(t)$ sea una señal periódica de período $T=4$, definida en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ por:

$$x(t) = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

como se indica en la Fig.6.8.

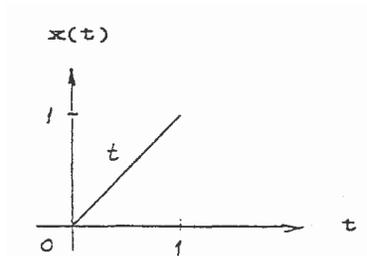


Fig 6.8 Señal $x(t)$ definida en el intervalo entre 0 y 1

Queremos graficar las señales tales que:

1. La representación de $x(t)$ contenga armónicas coseno impares.
 2. La representación de $x(t)$ contenga armónicas seno impares.
 3. La representación de $x(t)$ contenga armónicas coseno pares.
 4. La representación de $x(t)$ contenga armónicas seno pares.
1. Sí la señal debe tener una representación en series de Fourier que conste únicamente de armónicas coseno impares, $x(t)$ debe ser una función par que tenga simetría de rotación. Por ello como se indica en la Fig.6.9a b, y c, la señal debe obtenerse tal que cumpla con estas propiedades.

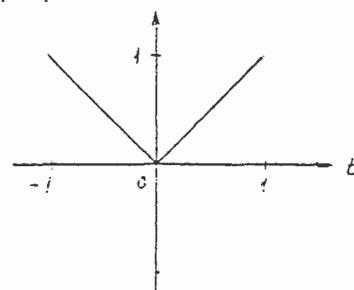
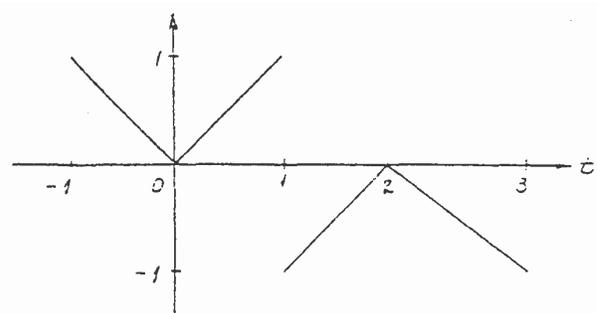


Fig.6.9 (a) Simetría par



(b) Simetría de rotación

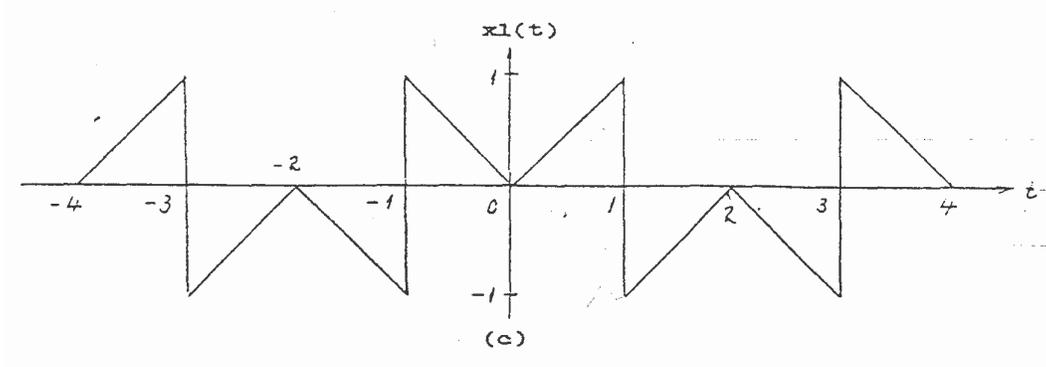
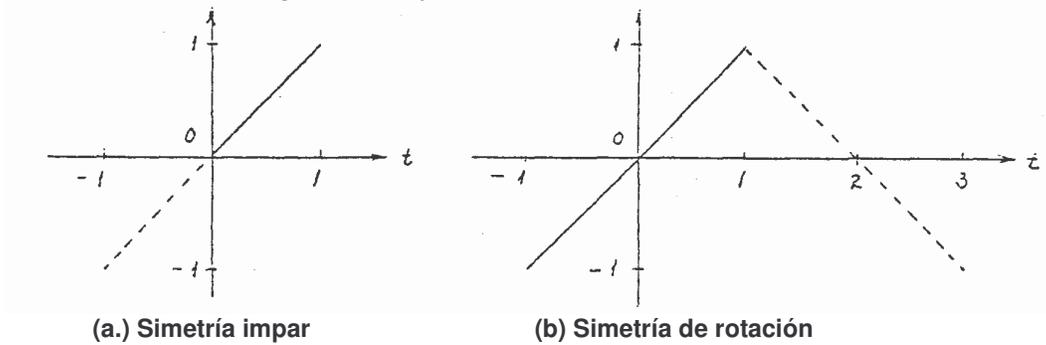


Fig 6.9 Señal par que tiene simetría de rotación

2. Si la representación debe constar sólo de armónicas seno impares, $x(t)$ debe ser una señal impar con simetría de rotación. Su construcción se indica en la Fig.6.10a, b y c.



(a.) Simetría impar

(b) Simetría de rotación

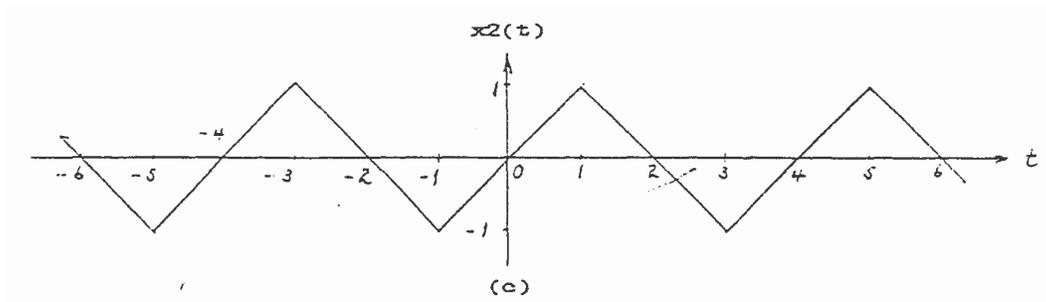


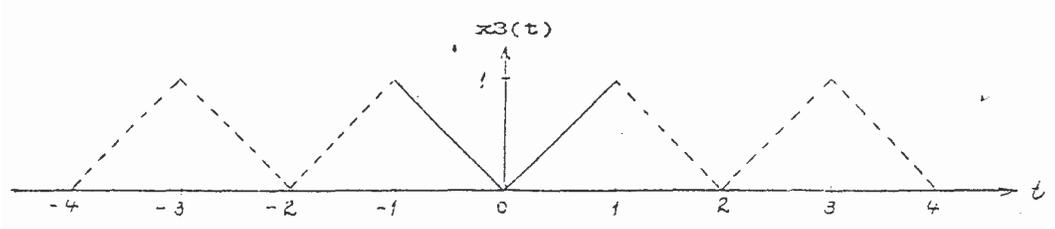
Fig..6.10 Señal impar con simetría de rotación

3. Si la representación de $x(t)$ debe constar sólo de armónicas coseno pares, $x(t)$ debe ser una función par que cumpla con la siguiente condición:

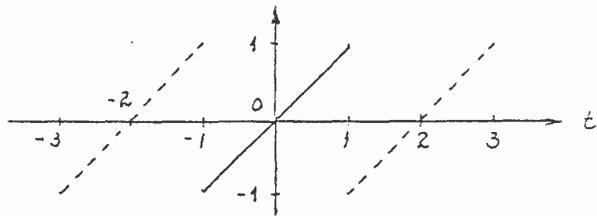
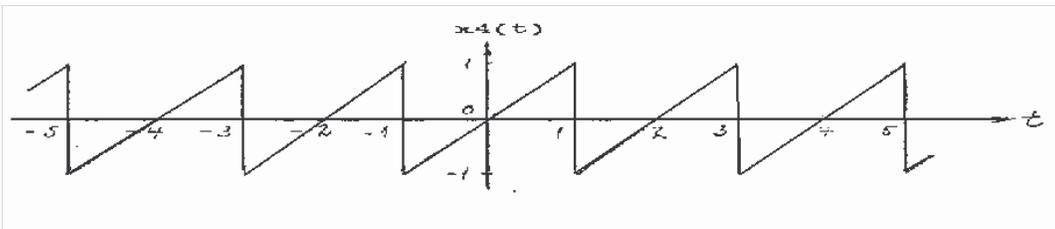
$$x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = x(t) \quad \text{Ec. (6.21)}$$

cual implica que el período se ha reducido a la mitad. Por ello a partir de la Fig. 6.9a, construimos la señal $x_3(t)$.

4. Finalmente, si la representación de $x(t)$ debe constar sólo de armónicas seno pares, $x(t)$ debe ser una

Fig. 6.11 Señal par con período $T=2$

señal impar que satisface la Ec.(621). Por ello a partir de la Fig.6.10a, obtenemos la señal $x_4(t)$.

(a) Construcción de la señal $x_4(t)$ 

Después de la siguiente sección la cual estudiaremos las propiedades de las series de Fourier, comprobaremos que cada una de estas señales cumple con las propiedades anotadas.

SIMETRÍA OCULTA:

En algunas ocasiones una señal periódica $x(t)$ aparentemente no goza de ninguna de las simetrías anotadas, sin embargo, sus coeficientes de Fourier o bien son números reales puros o bien números imaginarios puros, indicándonos que tal señal tiene simetría par o bien simetría impar. En estos casos, es normal que la simetría se encuentre escondida por el valor medio de la señal.

Comprobaremos lo que acabamos de mencionar considerando el siguiente ejemplo.

Ejemplo No 5

Sea la señal mostrada en la Fig.6.13, la misma que se encuentra definida en un período mediante la siguiente expresión:

$$x(t) = \frac{A}{2\pi} t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

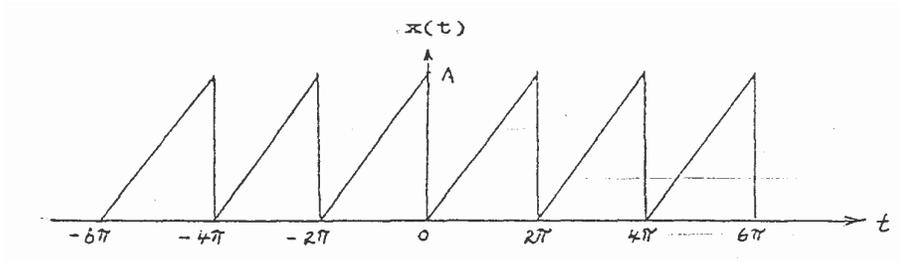


Fig. 6.3 Señal periódica con simetría oculta

Aparentemente esta señal no tiene ninguna de las simetrías anotadas. No obstante si calculamos los coeficientes de Fourier encontraremos que estos son números imaginarios puros. Efectivamente:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2\pi}\right) t e^{-jn\pi} dt = j \frac{A}{2\pi n} \quad \forall n \neq 0$$

$$x_0 = \frac{A}{2}$$

Siendo números imaginarios puros, la señal debe gozar de simetría impar. Efectivamente, si trazamos una línea horizontal por el punto $A/2$, que corresponde al valor medio de la señal, descubriremos que ésta tiene simetría impar.

6.5 PROPIEDADES DE LAS SERIES DE FOURIER

Cuando una señal periódica $x(t)$ se traslada, se transpone, se deriva, se integra, o se suma con otra señal de igual período, los coeficientes de Fourier de las señales resultantes pueden obtenerse de los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$ original.

Propiedades de transposición

Es claro que el período de una señal transpuesta $x(-t)$ también será igual a T . Los coeficientes de Fourier de la señal $x(-t)$ se calculan de la siguiente forma:

$$\frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(-t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\tau) e^{jn\omega_0 \tau} d\tau = \underline{x_{-n}} \quad \text{Ec. (6.22)}$$

$t = -\tau$

Esto es, los coeficientes de Fourier de una señal transpuesta $x(-t)$ se pueden obtener a partir de los coeficientes de Fourier x_n de la señal $x(t)$, cambiando en la expresión de x_n a n por $-n$

Efectivamente, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo No 6

Sea la señal $w(t)$ indicada en la Fig.6.14. Esta señal es la transpuesta de la señal $x(t)$ mostrada en la Fig.6.4 correspondiente al Ejemplo No 1. De modo que:

$$w(t) = x(-t)$$

De acuerdo a la Ec.(6.22), se debe cumplir que:

$$w_n = x_{-n}$$

o:

$$w_n = -\frac{A}{\pi^2 n^2} (2 - j\pi n) \quad \forall n \text{ impar}$$

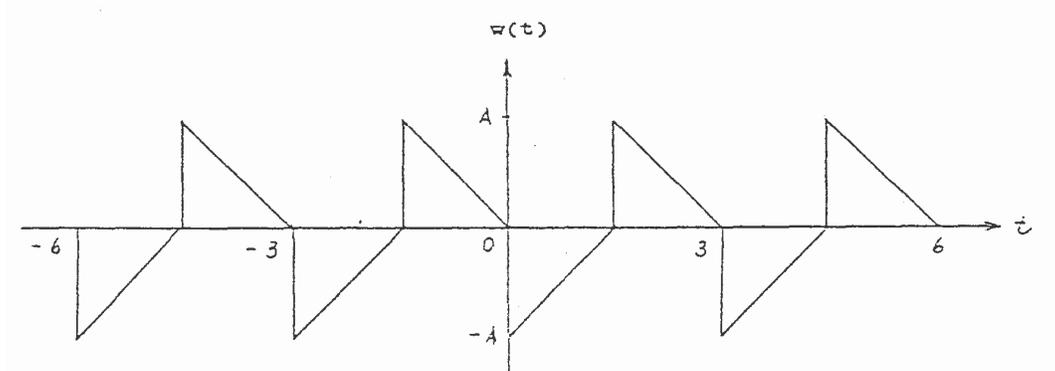


Fig.6.14 Transpuesta de la señal de la Fig.6.4

$$w(t) = \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots}^{\pm \infty} -\frac{A}{\pi^2 n^2} (2 - j\pi n) e^{j\frac{2\pi n}{3}t}$$

Propiedad de desplazamiento

La señal periódica trasladada $x(t+t_0)$ también es de período T . Los coeficientes de Fourier vienen dados por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} x(\tau) e^{-jn\omega_0(\tau-t_0)} d\tau = \frac{e^{jn\omega_0 t_0}}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t_0}^{\frac{T}{2}+t_0} x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \\ &= e^{jn\omega_0 t_0} x_n \quad (\text{Ec. (6.23)}) \end{aligned}$$

Esto es, el n ésimo coeficiente de Fourier de $x(t+t_0)$ es igual al n ésimo coeficiente de Fourier de la señal original $x(t)$ multiplicada por el factor: $e^{jn\omega_0 t_0}$

Debemos notar que si $x(t)$ se expresa como una suma de sinusoides y de cosinusoides, las magnitudes de los términos $\cos(n\omega_0 t)$ y de los términos $\text{sen}(n\omega_0 t)$ cambiarán cuando la señal $x(t)$ sea trasladada. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo No 7

La señal $g(t)$, Fig.6.6 del Ejemplo No 3, es la señal $f(t)$, Fig. 6.5 del Ejemplo No 2, adelantada una unidad de tiempo, como lo podemos comprobar al comparar las dos señales indicadas. De manera que:

$$g(t) = f(t+1)$$

por tanto, de acuerdo con la Ec.(6.23) se deb cumplir que:

$$\begin{aligned} g_n &= e^{jn\omega_0} f_n = e^{j\frac{\pi n}{2}} f_n = \left(\cos\frac{\pi n}{2} + j \text{sen}\frac{\pi n}{2} \right) f_n = \\ &= j \text{sen}\frac{\pi n}{2} f_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} \text{sen}^2\frac{\pi n}{2} \quad \forall n \text{ impar} \end{aligned}$$

de donde:

$$g_n = \frac{4}{\pi^2 n^2} \quad n \text{ impar}$$

que es igual al resultado obtenido para g_n en la Ec.(6.17).

Propiedad de escalamiento

La señal $x(at)$ es una señal periódica de período T/a . De modo que la frecuencia fundamental de $x(at)$ es $a\omega_0/2\pi$. Los coeficientes de Fourier de $x(at)$ se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{a}{T} \int_{-T/2a}^{T/2a} x(at) e^{-jn\omega_0 t} dt &= \frac{a}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} \frac{d\tau}{a} = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau = x_n \quad \text{Ec. (6.24)} \end{aligned}$$

Esto es, los coeficientes de Fourier de una señal no cambian cuando la escala del tiempo es contraída o expandida. No obstante, las frecuencias de las armónicas cambian de $n\omega_0/2\pi$ a $na\omega_0/2\pi$ lo cual es equivalente a decir que las frecuencias de las armónicas cambian de « nf_0 » a « anf_0 »; donde f_0 es la frecuencia fundamental.

Propiedad de diferenciación

Si $x(t)$ es una señal periódica de periodo T , entonces $dx(t)/dt$ también es una señal periódica de período T . Asumiremos por el momento que $x(t)$ es una señal periódica que no tiene discontinuidades, los coeficientes de Fourier de la señal $dx(t)/dt$ se calculan como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx(t)}{dt} e^{-jn\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \left[x(t) e^{-jn\omega_0 t} \right]_0^T + \frac{jn\omega_0}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T} [x(T) - x(0)] + jn\omega_0 x_n = \\ \hat{X}_n &= jn\omega_0 x_n \quad \text{para toda } n \neq 0 \end{aligned}$$

Este resultado dice que para $n \neq 0$, el enésimo coeficiente de Fourier de $dx(t)/dt$ es igual a enésimo coeficiente de $x(t)$ multiplicado por $jn\omega_0$.

Si repetimos este procedimiento, podremos demostrar que los coeficientes de Fourier de la señal $d^2x(t)/dt^2$ vienen dados por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{d^2x(t)}{dt^2} e^{-jn\omega_0 t} dt = (jn\omega_0)^2 x_n \quad \forall n \neq 0$$

y en general los coeficientes de Fourier de la derivada k -ésima de una señal $d^kx(t)/dt^k$, para n diferente de 0, vienen dados por:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{d^kx(t)}{dt^k} e^{-jn\omega_0 t} dt = (jn\omega_0)^k x_n \quad \text{Ec. (6.25)}$$

Esta propiedad es, quizás, una de las más importantes, pues como lo comprobaremos con diferentes ejemplos posteriormente, permite la simplificación en el cálculo de los coeficientes de Fourier.

Propiedad de integración

Hagamos ahora que $x^{-1}(t)$ represente una señal periódica, tal que en el intervalo $-T/2 < t < T/2$, ésta sea igual a:

$$x^{-1}(t) = \int_{-\pi/2}^t x(\tau) d\tau$$

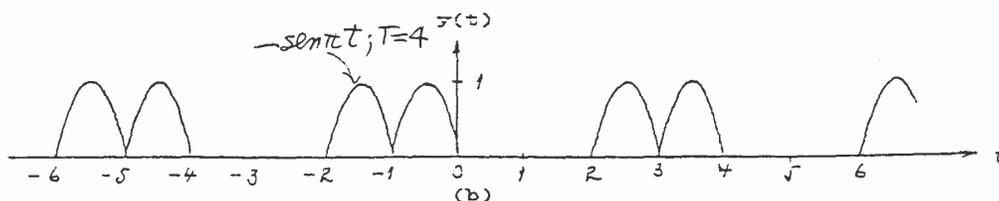
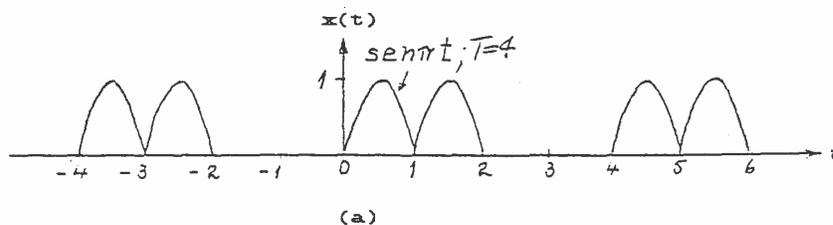
Del desarrollo anterior se sigue que para n diferente de cero, el n -ésimo coeficiente de Fourier de $x^{-1}(t)$ es igual al n -ésimo coeficiente de $x(t)$ dividido por $j n \omega_0$. Esto es:

$$\frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{-1}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{jn\omega_0} x_n \quad \forall n \neq 0 \quad \text{Ec. (6.26)}$$

Propiedad de linealidad

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales periódicas de igual período T , y x_n y y_n sus coeficientes de Fourier. La señal $x(t)+y(t)$ es una señal cuyo período es T o bien T/m , donde « m » es un entero positivo. Por ejemplo las señales $x(t)$ y $y(t)$ indicadas en la Fig.6.15a y b tienen período $T=4$, no obstante el período de la suma $x(t)+y(t)$ es 1. Los coeficientes de Fourier de la señal suma vienen dados por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [x(t) + y(t)] e^{jn\omega_0 t} dt &= \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \\ &= x_n + y_n \quad \text{Ec. (6.27)} \end{aligned}$$



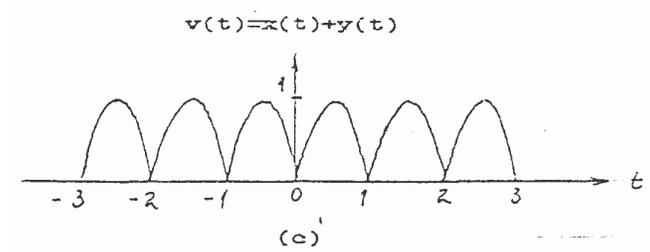


Fig. 6.15 Suma de dos señales periódicas de igual período

Esto es el n -ésimo coeficiente de Fourier de $x(t)$ es igual a la suma del n -ésimo coeficiente de Fourier de la señal $x(t)$ más el n -ésimo coeficiente de Fourier de $y(t)$.

Notemos que al calcular los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)+y(t)$ no es necesario determinar si su período es T o T/m . Podemos asumir siempre que el período de $x(t)+y(t)$ es T . Si resulta que el período de $x(t)+y(t)$ es T/m , el n -ésimo coeficiente de Fourier que no sea múltiplo de m será igual a cero.

De las propiedades acabadas de estudiar, quizás la de menos utilidad sea la propiedad de integración. Todas las demás tienen un mayor campo de aplicación. A continuación presentaremos varios ejemplos en los que utilizaremos las diferentes propiedades de las Series de Fourier enunciadas.

Simplificación en los cálculos de los coeficientes de Fourier

La propiedad de diferenciación definida en la Ec.(6.25), permite simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier. Si una señal periódica $x(t)$ dada, es tal que luego de sucesivas derivaciones finalmente es igual a una suma de funciones singulares que ocurren en diferentes instantes de tiempo, la integral de la Ec. (6.25) se reduce a sumar la función exponencial $e^{jn\omega_0 t}$ evaluada en los instantes en los cuales las funciones singulares ocurren; lo cual representa una enorme simplificación en el cálculo de esa integral. Una de tales integrales tiene la siguiente forma:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+T_0}^{\frac{T}{2}+T_0} \delta^p(t + t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

la misma que, de acuerdo con la Ec.(1.42) dada en el Capítulo 1, es igual a:

$$(-1)^p (-jn\omega_0)^p e^{+jn\omega_0 t_0}$$

De manera que:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} + t_0}^{\frac{T}{2} + t_0} \delta^p(t + t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt = (jn\omega_0)^p e^{jn\omega_0 t_0} \quad \text{Ec. (6.28)}$$

Los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$ original, para toda «n» diferente de cero, se obtendrán, de acuerdo con la Ec.(6.25), dividiendo el valor de la integral para $(jn\omega_0)^k$. El valor medio « x_0 » lo obtendremos a partir de la ecuación:

$$x_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

que representa el área de $x(t)$ en un período dividido para el período.

Unos cuantos ejemplos nos ayudaran a clarificar las ideas expuestas.

Ejemplo No 7

Consideremos nuevamente la señal $x(t)$ mostrada en la Fig.6.4 definida en el Ejemplo No 1. Volveremos a calcular los coeficientes de Fourier pero ahora empleando esta técnica de diferenciación. Para ello, procederemos a derivar gráficamente la señal $x(t)$ dos veces en forma consecutiva. El resultado se indica en la Fig.6.16

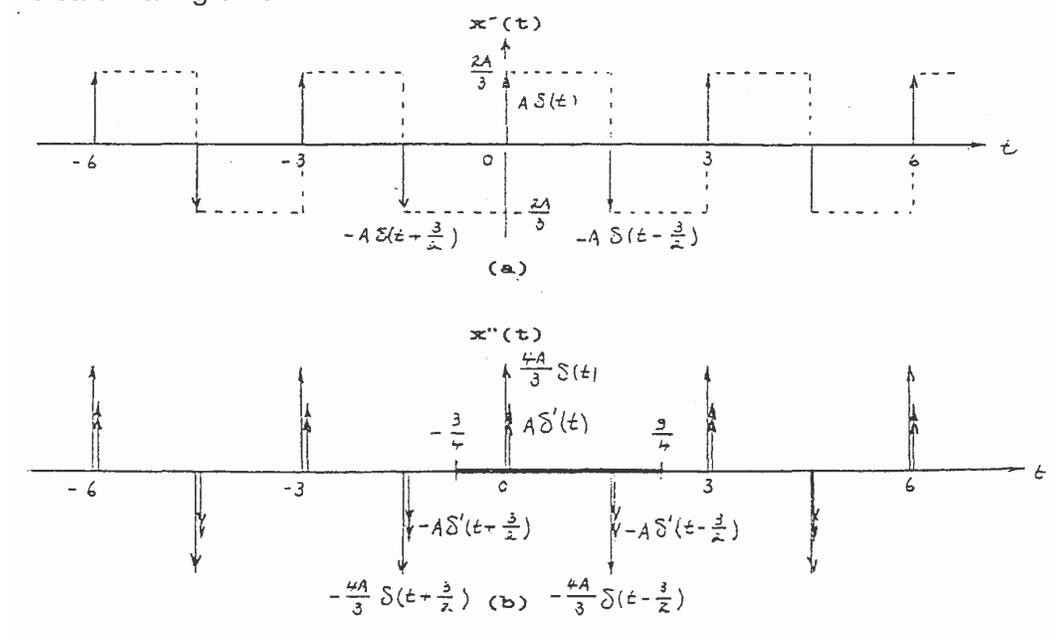


Fig.6.16 Primera y segunda derivada de la señal $x(t)$ de la Fig.6.3

De acuerdo con la Ec.(6.25), los coeficientes de Fourier de la señal $x''(t)$ vienen dados por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left(j \frac{2\pi n}{3} \right)^2 x_n &= \frac{1}{3} \int_{-3/4}^{3/4} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} e^{-j \frac{2\pi n}{3} t} dt = \\ &= \frac{A}{3} \int_{-3/4}^{3/4} \left[\delta'(t) + \frac{4}{3} \delta(t) - \delta' \left(t - \frac{3}{2} \right) - \frac{4}{3} \delta \left(t - \frac{3}{2} \right) \right] e^{-j \frac{2\pi n}{3} t} dt \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} x_n &= - \frac{3A}{4\pi^2 n^2} \left[\int_{-3/4}^{3/4} \delta'(t) e^{-j \frac{2\pi n}{3} t} dt + \frac{4}{3} \int_{-3/4}^{3/4} \delta(t) e^{-j \frac{2\pi n}{3} t} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-3/4}^{3/4} \delta' \left(t - \frac{3}{2} \right) e^{-j \frac{2\pi n}{3} t} dt - \frac{4}{3} \int_{-3/4}^{3/4} \delta \left(t - \frac{3}{2} \right) e^{-j \frac{2\pi n}{3} t} dt \right] \end{aligned}$$

Cada una de estas cuatro integrales tiene la forma indicada en la Ec.(6.28) por tanto cada integral se evaluará de acuerdo con esta ecuación. Notemos que el valor de k en la Ec.(6.25) es 2, puesto que hemos derivado dos veces la señal $x(t)$, y que el mayor valor de p en la última ecuación es 1, lo cual está de acuerdo con la observación de que $p \leq k$. Efectuando las integraciones respectivas en la última ecuación obtenemos que:

$$\begin{aligned} x_n &= - \frac{3A}{4\pi^2 n^2} \left(j \frac{2\pi n}{3} + \frac{4}{3} - j \frac{2\pi n}{3} e^{-j\pi n} - \frac{4}{3} e^{-j\pi n} \right) = \\ &= - \frac{A}{2\pi^2 n^2} (2 + j\pi n) (1 - e^{-j\pi n}) \end{aligned}$$

que finalmente se simplifica a:

$$x_n = \begin{cases} - \frac{A}{\pi^2 n^2} (2 + j\pi n) & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases}$$

que es el mismo resultado que obtuvimos en el Ejemplo No 1.

Ejemplo No 8

Consideremos un ejemplo en el cual aparentemente no es posible de efectuar este tipo de simplificación. Sea la señal periódica sinusoidal $x(t)$, de período $T=4$, indicada en la Fig.6.17a. Para calcular los coeficientes de Fourier de esta señal procederemos a derivar dos veces consecutivas la señal $x(t)$; tal como se indica en

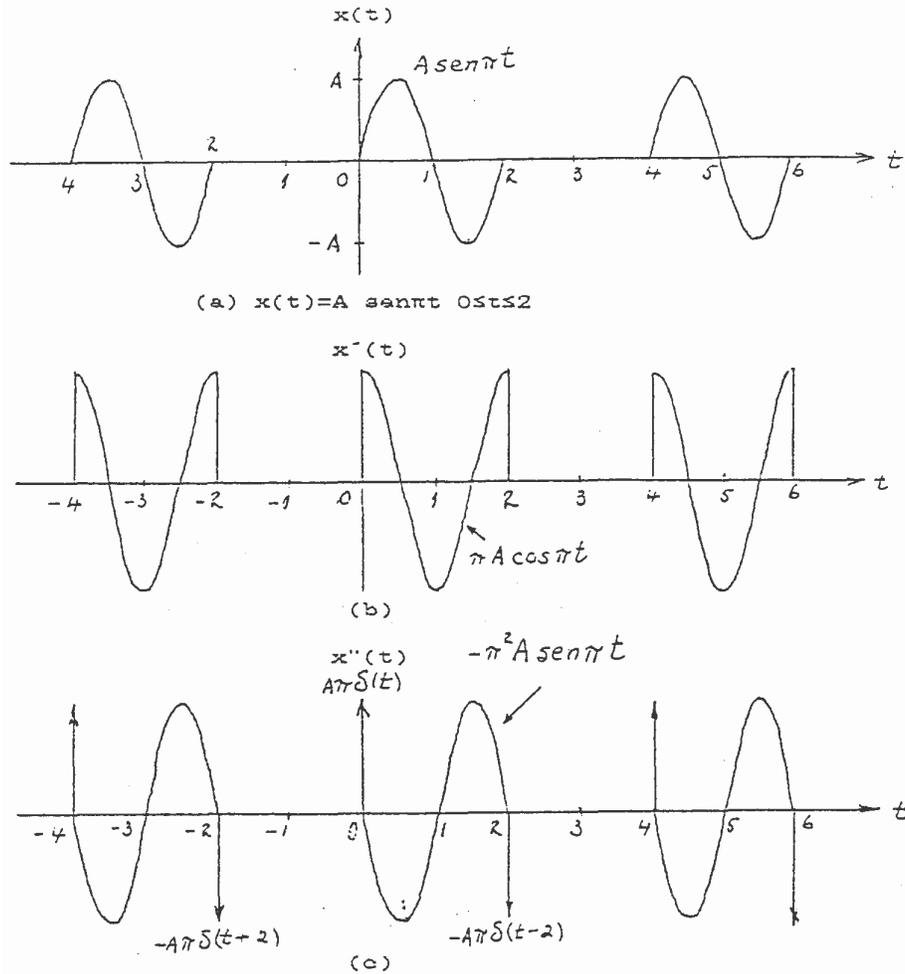


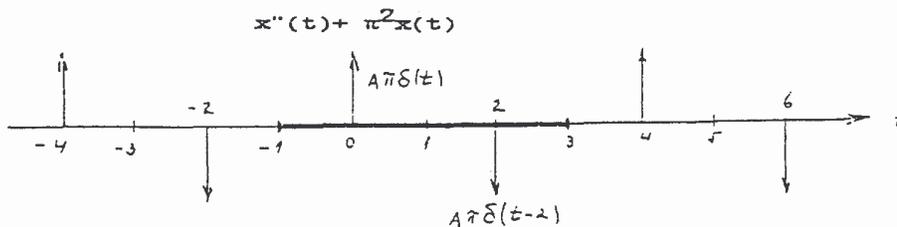
Fig.6.17 Señal periódica sinusoidal. Ejemplo 8

De la Fig.6.17c, tenemos para $0 \leq t \leq 2$ que:

$$\begin{aligned} x''(t) &= -A\pi^2 \text{sen } \pi t + A\pi[\delta(t) - \delta(t-2)] \\ &= -A\pi^2 x(t) + A\pi[\delta(t) - \delta(t-2)] \end{aligned}$$

Si a la señal $x(t)$, de período $T=4$, le sumamos la señal $A\pi^2 x(t)$, que tiene igual período $T=4$, el resultado es una señal de período $T=4$, compuesta únicamente de funciones impulso, como se muestra en la Fig.6.18. Tal que en el intervalo entre $0 \leq t \leq 2$ esta señal viene dada por:

$$x''(t) + A\pi^2 x(t) = A\pi[\delta(t) - \delta(t-2)]$$



cuyos coeficientes de Fourier vienen dados por:

$$\left[\pi^2 + \left(j \frac{\pi n}{2} \right)^2 \right] x_n = \frac{A\pi}{4} \int_{-1}^3 [\delta(t) - \delta(t-2)] e^{-j\frac{\pi n}{2}t} dt$$

donde x_n son los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$ original, que estamos buscando. Despejando x_n de esta última ecuación obtenemos:

$$x_n = \begin{cases} \frac{2A}{\pi(4 - n^2)} & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases}$$

Su representación en una serie trigonométrica de Fourier viene dada por:

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4A}{\pi(4-n^2)} \cos\left(\frac{\pi n}{2}t\right)$$

Finalmente procederemos a calcular la representación en series de Fourier de las señales $x(t)$, $y(t)$ y $x(t)+y(t)$, indicadas en la Fig.6.14, en donde aplicaremos las propiedades de escalamiento de la variable tiempo y de linealidad.

Ejemplo No 10

Con este objeto definamos la señal $w(t)$ indicada en la Fig.6.19a. En la Fig.6.19b y c, se indican las señales $w'(t)$ y $w''(t)$ mostradas únicamente en el intervalo entre $0 \leq t \leq 2$.

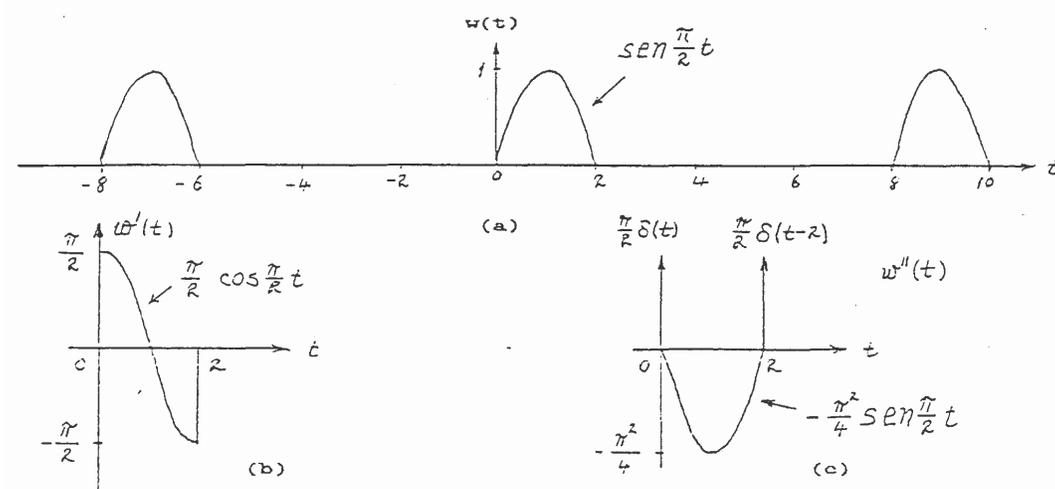


Fig.6.19 Ejemplo No 10

Los coeficientes de Fourier se obtienen a partir de la señal $w''(t)$, así:

$$w''(t) = -\frac{\pi^2}{4} w(t) + \frac{\pi}{2} [\delta(t) + \delta(t-2)]$$

$$w''(t) + \frac{\pi^2}{4} w(t) = \frac{\pi}{2} [\delta(t) + \delta(t-2)]$$

De acuerdo con las propiedades de las series de Fourier, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) w_n &= \frac{1}{8} \int_{-4}^4 \frac{\pi}{2} [\delta(t) + \delta(t-2)] e^{-j\frac{\pi n}{4} t} dt \\ &= \frac{\pi}{16} \left(1 + e^{j\frac{\pi n}{2}}\right) \end{aligned}$$

de donde:

$$w_n = \frac{1 + e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{\pi(4 - n^2)} \quad \text{Ec.(6.29)}$$

La Ec.(6.29) tiene una indeterminación de la forma «cero sobre cero» para « $n=\pm 2$ ». Debemos levantar la indeterminación de acuerdo con la regla de L'Hospital del Cálculo Diferencial. Haciendo esto resulta que:

$$w_n = \begin{cases} \frac{1 + e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{\pi(4 - n^2)} & \forall n \neq \pm 2 \\ \mp j \frac{1}{8} & n = \pm 2 \end{cases}$$

Así mismo definamos la señal periódica $f(t)$, de período $T=4$, mostrada en la Fig.6.20.

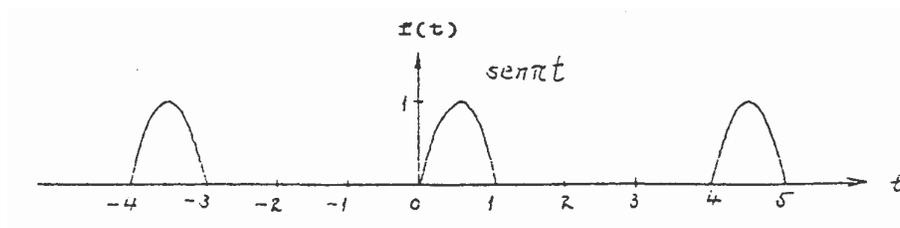


Fig.6.20 Señal periódica auxiliar

Puesto que:

$$f(t) = w(2t) \rightarrow f_n = w_n$$

De las Figs.6.14 y 6.21 vemos que:

$$x(t) = f(t) + f(t-1) \rightarrow x_n = f_n + e^{-j\frac{\pi n}{2}} f_n = \left[1 + e^{-j\frac{\pi n}{2}} \right] f_n$$

De donde:

$$x_n = \frac{\left(1 + e^{-j\frac{\pi n}{2}} \right)^2}{\pi(4 - n^2)}$$

De las mismas figuras, 6.14 y 6.21, vemos que:

$$y(t) = x(t+2) \rightarrow y_n = e^{j2\pi n} x_n = \frac{\left(1 + e^{-j\frac{\pi n}{2}} \right)^2}{\pi(4 - n^2)} e^{j2\pi n}$$

Finalmente tenemos que:

$$v(t) = x(t) + y(t) \rightarrow v_n = x_n + y_n = (1 + e^{j2\pi n}) x_n$$

$$v_n = \frac{\left(1 + e^{-j\frac{\pi n}{2}} \right)^2}{\pi(4 - n^2)} (1 + e^{j2\pi n})$$

Como podemos comprobar los coeficientes de $v(t)=x(t)+y(t)$ son cero para toda «n» que no sea múltiplo de 4, que es el factor en el cual el período de la suma $x(t)+y(t)$ se redujo. Efectivamente vemos que:

$$v_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & n=0 \\ 0 & n=1 \\ 0 & n=2 \\ 0 & n=3 \\ -\frac{2}{3\pi} & n=4 \end{cases}$$

Creemos que este ejemplo ha sido bastante ilustrativo y nos ha permitido manejar con buen criterio las diferentes propiedades de las series de Fourier.

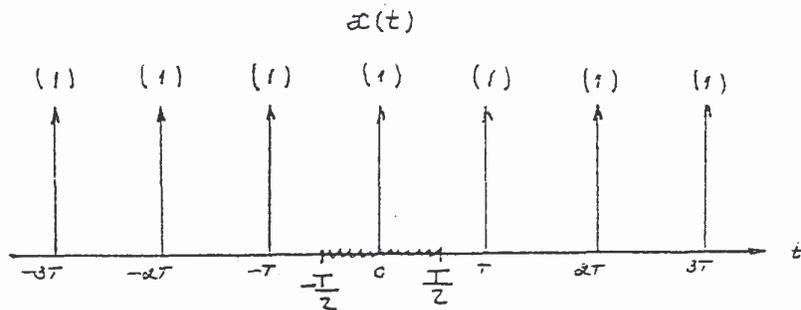
6.6 SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES SINGULARES PERIODICAS

Las señales periódicas de funciones singulares, no satisfacen las condiciones de Dirichlet y por tanto no pueden tener una representación en series de Fourier. Tal representación, sin embargo, se puede justificar con la ayuda de la teoría de las Funciones Generalizadas. Ignoraremos los rigores matemáticos y extenderemos los resultados obtenidos en las secciones anteriores para incluir a este tipo de señales periódicas en la representación en series de Fourier. A continuación consideraremos algunos ejemplos ilustrativos. Sea la señal periódica:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

mostrada en la Fig.6.21, a la cual le denominaremos «tren de impulsos». Los coeficientes de Fourier de esta señal se calculan de la siguiente manera:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T}$$



De tal manera que:

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{T} t} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \quad \text{Ec. (6.30)}$$

Podemos ver, de acuerdo a la Ec.(6.30), que efectivamente el valor de $x(t)$ en $t=0, \pm T, \pm 2T, \dots$ es infinito. Notemos que los instantes $t=0, \pm T, \pm 2T, \dots$ son los instantes en los cuales ocurren los diferentes impulsos, y como sabemos estos tienen magnitud infinita y área unitaria, lo cual concuerda con los resultados acabados de obtener.

Similarmente, consideremos un tren de dobletes definido por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(t - nT)$$

cuyos coeficientes de Fourier vienen dados por:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} (jn\omega_0)$$

En general, los coeficientes de Fourier del k-ésimo tren definido por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^k(t - nT)$$

vienen dados por:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta^k(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} (jn\omega_0)^k$$

Finalmente indicaremos un método alternativo para el cálculo de los coeficientes de Fourier, basado en la técnica de derivación de la señal periódica original hasta obtener funciones singulares.

Ejemplo No 10

Supongamos que deseamos obtener la representación en series de Fourier del par de señales $x(t)$ i $y(t)$ indicadas en la Fig.6.22a y b.

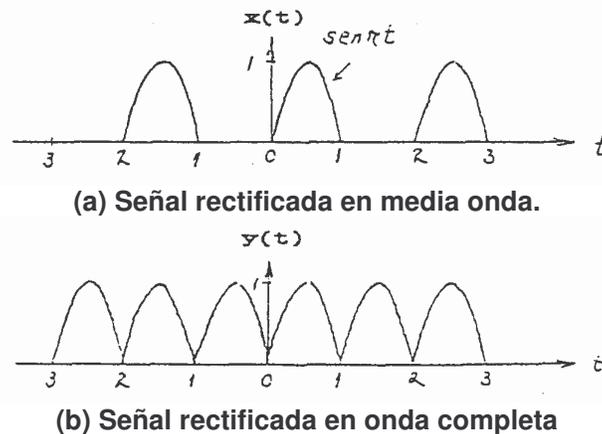
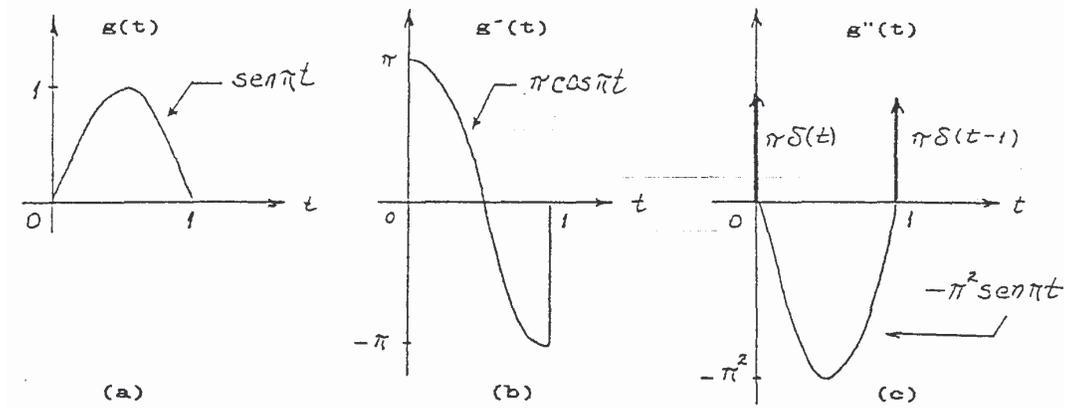


Fig. 6.22 Señal rectificada en media onda y onda completa Ejemplo No 10

Con este objeto definiremos una señal genérica $g(t)$, como se indica en la Fig.6.23a. La representación en series de Fourier de la señal genérica $g(t)$; esto es la función:

Fig. 6.23 Señal generalizada $g(t)$ y sus derivadas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{j\omega_n t}$$

tendrá dentro del intervalo $0 \leq t \leq 1$ a la función $sen \pi t$ y, fuera de este intervalo tendrá a una función periódica cuyo período lo podemos ajustar a nuestra conveniencia. Por ejemplo, si hacemos $T=2$ el sumatorio tenderá a la señal periódica $x(t)$ indicada en la Fig. 6.22a. Por el contrario, si hacemos $T=1$, el sumatorio tenderá ahora a la señal periódica $y(t)$ indicada en la Fig. 6.22b.

Con el objeto de calcular los coeficientes de Fourier g_n de la señal generalizada $g(t)$, derivaremos esta señal dos veces consecutivas, como se indica en la Fig. 6.23b y c. De manera que:

$$g''(t) + \pi^2 g(t) = \pi [\delta(t) + \delta(t-1)] \quad \text{Ec. (6.31)}$$

De acuerdo con las propiedades de las series de Fourier, tenemos que los coeficientes g_n de la señal generalizada $g(t)$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} (jn\omega)^2 g_n + \pi^2 g_n &= -\pi^2 \left(\frac{4n^2}{T^2} - 1 \right) g_n = \frac{\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} [\delta(t) + \delta(t-1)] e^{-j\frac{2\pi n}{T} t} dt = \\ &= \frac{\pi}{T} \left[1 + e^{-j\frac{2\pi n}{T}} \right] \end{aligned}$$

De donde:

$$g_n = - \frac{1 + e^{-j\frac{2\pi n}{T}}}{\pi T \left[\frac{4n^2}{T^2} - 1 \right]} \quad \text{Ec. (6.32)}$$

Debemos señalar que al calcular los coeficientes g_n , Ec(6.31), se deben considerar todos los impulsos que aparecen en la segunda derivada de la señal generalizada $g(t)$. Esto es efectivamente así sólo al emplear este método. Si por el contrario, empleamos el método delineado anteriormente, se deberán considerar únicamente aquellas funciones singulares que se encuentran perfectamente definidas dentro de un período T . Aclaremos este punto posteriormente.

Si en la Ec.(6.32) hacemos $T=2$, obtendremos los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$. Esto es:

$$x_n = g_n|_{T=2} = -\frac{1 + e^{-jn\pi}}{2\pi(n^2 - 1)} = \begin{cases} \frac{-1}{\pi(n^2 - 1)} & \text{para } n \text{ par} \\ \mp \frac{j}{4} & \text{para } n = \pm 1 \\ 0 & \text{para } n \text{ impar } \neq \pm 1 \end{cases}$$

Cuya representación exponencial viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{j}{4} e^{j\pi t} + \frac{j}{4} e^{-j\pi t} - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{\pi(n^2-1)} e^{jn\pi t}$$

o también:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi t) - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2}{\pi(n^2-1)} \cos(n\pi t)$$

$$\text{donde : } \begin{cases} A_0 = x_0 = \frac{1}{\pi} \\ A_n = 2 \Re \{ x_n \} = -\frac{2}{\pi(n^2-1)} \quad \forall n \text{ par} \\ B_1 = -2 \Im \{ x_n \} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si en la ecuación generalizada (6.32) hacemos $T=1$, obtendremos los coeficientes de Fourier y_n de la señal $y(t)$. Así:

$$y_n = g_n|_{T=1} = -\frac{1 + e^{-2jn\pi}}{\pi(4n^2 - 1)} = -\frac{2}{\pi(4n^2 - 1)} \quad \text{Ec. (6.33)}$$

tal que su representación en series de Fourier vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(4n^2 - 1)} e^{j2\pi n t} = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)} \cos(2\pi n t) = \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2\pi t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4\pi t) - \frac{4}{35\pi} \cos(6\pi t) - \dots
 \end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que:

$$y(t) = x(t) + x(t-1)$$

los coeficientes de Fourier de la señal $y(t)$, de acuerdo con las propiedades de las series, vendrán dados por:

$$\begin{aligned}
 y_n &= (1 + e^{-jn}) x_n = \begin{cases} 2 x_n & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \\
 &= - \frac{2}{\pi(n^2 - 1)} \quad \forall n \text{ par} \quad \text{Ec. (6.34)}
 \end{aligned}$$

Al parecer existe una contradicción con el resultado obtenido anteriormente en la Ec.(6.33), en lo referente a las armónicas, pues mientras la Ec.(6.33) indica que el resultado es válido para toda «n», par e impar, la Ec.(6.34) indica que el resultado es válido sólo para armónicas pares. No obstante, si consideramos que el último desarrollo se efectuó a partir de la señal $x(t)$ que tiene un período $T=2$ y, por tanto una frecuencia angular fundamental $\omega_0 = \pi$ el hecho que «n» pueda tomar sólo valores pares asegura la igualdad en las frecuencias de las diferentes armónicas, como podemos ver a partir del siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= - \frac{2}{\pi} - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2}{\pi(n^2 - 1)} e^{jn t} = - \frac{2}{\pi} - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi(n^2 - 1)} \cos(\pi n t) = \\
 &= - \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos(2\pi t) - \frac{4}{15\pi} \cos(4\pi t) - \frac{4}{35\pi} \cos(6\pi t) - \dots
 \end{aligned}$$

Efectivamente, este resultado es igual al obtenido anteriormente. Finalmente consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo No 11

Sean las señales $f(t)$ y $v(t)$ mostradas en la Fig.6.24a y b.

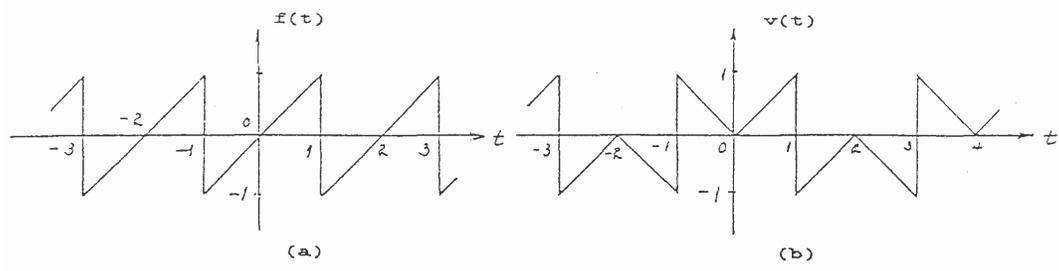


Fig.6.24 Señales periódicas

Para determinar la representación en series de Fourier de cada una de ellas, definiremos primero la señal generalizada g(t) mostrada en la Fig.6.25a, a la cual derivaremos dos veces consecutivamente, obteniendo:

$$g''(t) = \delta(t) - 2 \delta'(t-1) - \delta(t-2)$$

cuyos coeficientes de Fourier vendrán dados por:

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} g_n = \frac{1}{T} \left[1 - j \frac{4\pi n}{T} e^{-j\frac{2\pi n}{T}} - e^{-j\frac{4\pi n}{T}} \right]$$

donde hemos supuesto que T es lo suficientemente grande para considerar a todos los impulsos que ocurren entre 0 y 2. De modo que

$$g_n = -\frac{T}{4\pi^2 n^2} \left[1 - j \frac{4\pi n}{T} e^{-j\frac{2\pi n}{T}} - e^{-j\frac{4\pi n}{T}} \right] \quad \text{Ec. (6.35)}$$

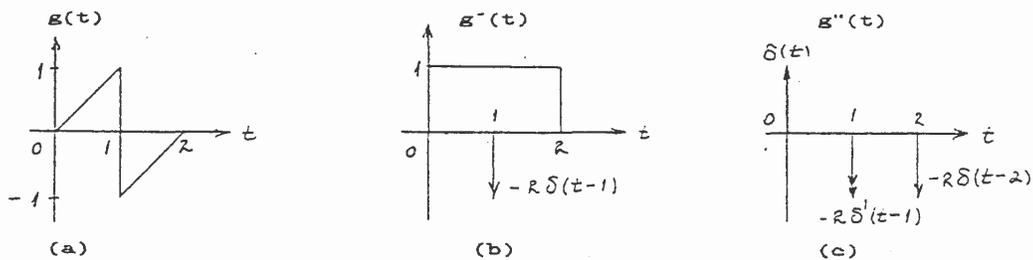


Fig.6.25 Señal generalizada g(t) y sus derivadas

Para calcular los coeficientes de Fourier f_n de la señal f(t), hagamos en la Ec.(6.35) $T=2$; obteniendo:

$$f_n = g_n|_{T=2} = -\frac{1}{2\pi^2 n^2} \left[1 - j2\pi n e^{-j\pi n} - 1 \right] = j \frac{(-1)^n}{\pi n} \quad n \neq 0$$

de donde:

$$A_0 = 0; \quad A_n = 2 \Re \{f_n\} = 0; \quad B_n = -2 \Im \{f_n\} = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n}$$

tal que su representación en series de Fourier vendrá dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n t)$$

Para calcular los coeficientes de Fourier v_n de la señal $v(t)$, primero notemos que:

$$v(t) = g(t) - g(t-2)$$

de manera que:

$$v_n = \left[1 - e^{-j \frac{4\pi n}{T}} \right] g_n \quad \text{Ec. (6.36)}$$

Haciendo en las Ecs.(6.35) y (6.36), $T=4$, obtenemos:

$$v_n = - \frac{1}{\pi^2 n^2} \left[1 - j\pi n e^{-j \frac{\pi n}{2}} - e^{-j\pi n} \right] (1 - e^{-j\pi n})$$

de donde:

$$v_n = \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{\pi n} - \frac{2}{\pi^2 n^2} & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases}$$

y su representación en series de Fourier viene dada por:

$$v(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{\pi n} - \frac{8}{\pi^2 n^2} \right] \cos\left(\frac{\pi n}{2} t\right)$$

Si calculamos los coeficientes de Fourier empleando el primero de los métodos estudiados, necesitamos obtener la derivada de la señal periódica $f(t)$; como se indica en la Fig.6.26.

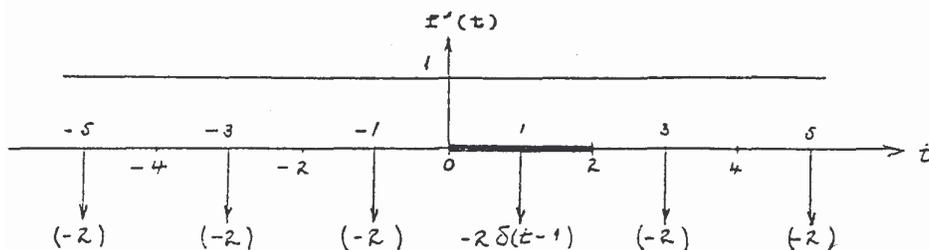


Fig.6.26 Derivada de la señal $f(t)$

De modo que los coeficientes de Fourier de $f(t)$ vienen dados por:

$$(j\pi n) f_n = \frac{1}{2} \int_0^2 -2\delta(t-1) e^{-j\pi n t} dt = -e^{-j\pi n}$$

de donde:

$$f_n = j \frac{1}{\pi n} e^{-j\pi n} = j \frac{1}{\pi n} (-1)^n$$

que es igual al resultado obtenido anteriormente por otro método.

Así mismo, derivando dos veces consecutivas a la señal $v(t)$, como se indica en la Fig.6.27, obtenemos para los coeficientes de Fourier v_n la siguiente expresión:

$$(j \frac{\pi n}{2})^2 v_n = \frac{1}{4} \int_{-1,5}^{2,5} [2\delta'(t+1) + 2\delta(t) - 2\delta'(t-1) - 2\delta(t-2)] e^{-j\frac{\pi n}{2}t} dt$$

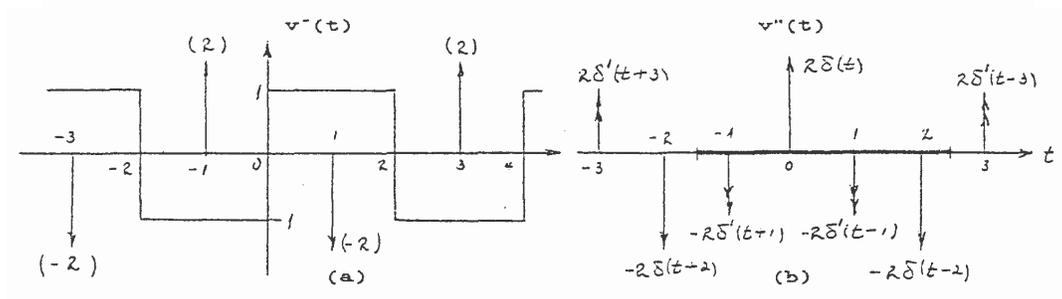


Fig.6.27. Primera y segunda derivadas de $v(t)$

de donde se obtiene que:

$$v_n = \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

que es igual al resultado obtenido anteriormente. También en este caso los límites de la integral (-1,5 y 2,5) se han escogido de manera que la ocurrencia de las funciones singulares no coincidan con los mismos.

6.7 ESPECTRO COMPLEJO DE FOURIER

Hemos afirmado que la representación de una función periódica $x(t)$ en series de Fourier, equivale realmente a descomponer la señal en sus componentes de frecuencia. Una función periódica de período T tiene componentes de frecuencias, $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n \omega_0$, donde $\omega_0=2\pi/T$. De manera que una señal

periódica $x(t)$ posee su espectro de frecuencias. Si se especifica a $x(t)$ podemos encontrar su espectro de frecuencias. Contrariamente, si el espectro es conocido, podemos determinar la correspondiente señal periódica $x(t)$. Por ello, tenemos dos formas de especificar a una señal periódica $x(t)$:

- La representación en el dominio del tiempo en la cual $x(t)$ se expresa como una función de tiempo y ,
- la representación en el dominio de la frecuencia en la cual el espectro (esto es, las amplitudes de las diferentes componentes de frecuencia) está especificado.

Notemos que el espectro existe únicamente en $\omega = \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, etc. De modo que el espectro no es una curva continua sino que existe solamente para algunos valores discretos de ω . Esto es, es un espectro discreto, referido en ocasiones como espectro de línea. Podemos representar al espectro gráficamente, dibujando una línea vertical en $\omega = \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, etc, con alturas proporcionales a las amplitudes de las componentes de frecuencia correspondiente, como hemos representado a toda señal discreta.

Podemos utilizar la serie trigonométrica o la serie exponencial para representar el espectro de frecuencia. La forma exponencial, sin embargo, es más útil para nuestro propósito, puesto que ella permite representar a una señal periódica dada como una suma discreta de funciones exponenciales, de frecuencias $0, \pm \omega_0, \pm 2\omega_0, \dots$, etc. Ambas señales: $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$ oscilan a la frecuencia ω . Podrían pensarse como dos fasores que giran en direcciones opuestas con la misma velocidad angular, y cuya suma da como resultado una función real de tiempo. Así:

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos(\omega t)$$

Para una señal periódica $x(t)$ de período T , la serie exponencial viene dada por:

$$x(t) = x_0 + x_1 e^{j\omega_0 t} + x_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + x_n e^{jn\omega_0 t} + \dots \\ + x_{-1} e^{-j\omega_0 t} + x_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots + x_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \dots$$

Así tenemos frecuencias $0, \omega_0, -\omega_0, 2\omega_0, -2\omega_0, \dots, n\omega_0, -n\omega_0, \dots$, etc, y las amplitudes respectivas de las componentes de frecuencias correspondientes: $X_0, X_1, X_{-1}, X_2, X_{-2}, \dots, X_n, X_{-n}, \dots$, etc.

En general, las amplitudes x_n son complejas, de aquí que pueden describirse por su magnitud y por su ángulo de fase. Por ello, en general necesitamos dos espectros de línea: un espectro de magnitud y otro espectro de fase, para la representación de una señal en el dominio de la frecuencia. En la mayoría de los casos, sin embargo, las amplitudes de las componentes de frecuencia o son

reales o son imaginarias, y así es posible describir la función mediante un solo espectro.

Por ejemplo, consideremos la señal sinusoidal rectificada en onda completa $y(t)$ de la Fig.6.22b, cuyos coeficientes de Fourier x_n están dados en la Ec.(6.33), y cuyo espectro exponencial viene dado por:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} e^{j2\pi t} - \frac{2}{15\pi} e^{j4\pi t} - \frac{2}{35\pi} e^{j6\pi t} - \dots$$

$$- \frac{2}{3\pi} e^{-j2\pi t} - \frac{2}{15\pi} e^{-j4\pi t} - \frac{2}{35\pi} e^{-j6\pi t} - \dots$$

Este es un espectro que existe en $\omega=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$, etc, cuyas amplitudes son $2/\pi, -2/3\pi, -2/15\pi, -2/35\pi, \dots$, etc, Puesto que todas las amplitudes son reales, es necesario dibujar únicamente un espectro. El espectro de frecuencia requerido se indica en la Fig.6.28. Es claro, de este gráfico, que el espectro de frecuencias es simétrico alrededor del eje de las ordenadas; esto es, el espectro de frecuencias tiene simetría Par. Esto no es una coincidencia, ya que el espectro de toda señal periódica tiene simetría par. Efectivamente, puesto que:

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_f} dt \quad y : \quad x_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{jn\omega_f} dt$$

Es evidente de este par de ecuaciones que x_n y x_{-n} son complejos conjugados, de manera que:

$$x_n = x_{-n}^* \quad \text{de aquí que: } |x_n| = |x_{-n}|$$

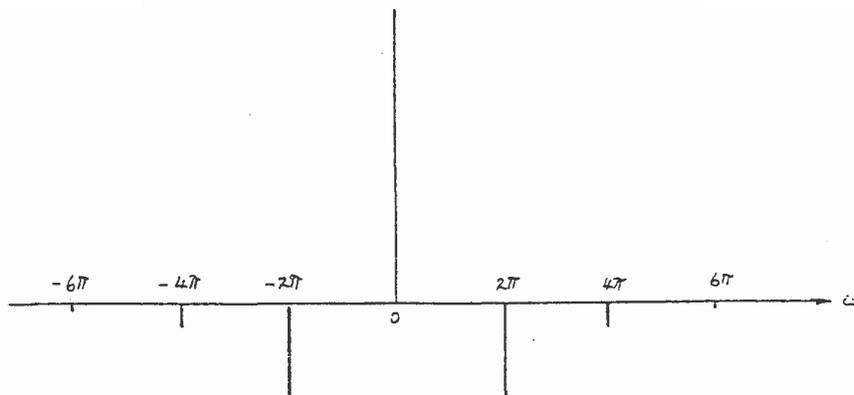


Fig.6.28 Espectro de línea de una señal sinusoidal rectificada en onda completa.

Por ello, se sigue que, el espectro de magnitud es simétrico alrededor del eje de las ordenadas, siendo por ello funciones pares de ω . Si x_n es real, entonces x_{-n} también es real, y los dos son iguales: $x_n = x_{-n}$. Si x_n es complejo, entonces:

$$x_n = |x_n| e^{j\theta_n}$$

$$\text{y: } x_{-n} = |x_n| e^{-j\theta_n}$$

La fase de x_n es θ_n sin embargo la fase de x_{-n} es $-\theta_n$ en. De aquí que el espectro de fase sea antisimétrico alrededor del eje de las ordenadas; esto es, el espectro de fase es una función impar de ω .

6.8 DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA. EN LAS SEÑALES PERIÓDICAS

Para una señal periódica $x(t)$ de período T , la potencia promedio en $x(t)$ se define como:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x(t)|^2 dt \quad \text{Ec. (6.37)}$$

La integral de la Ec.(6.37) puede calcularse como sigue:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) x^*(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} \right] dt$$

intercambiando el orden de la suma y de la integración obtenemos:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* \left[\frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \quad \text{Ec. (6.38)}$$

De modo que de acuerdo a la potencia promedio en $x(t)$ es igual a la suma de las potencias promedias en sus componentes de frecuencia. Debemos tener presente que, en general, la potencia promedio en una señal no es igual a la suma de las potencias promedias de sus componentes. Sin embargo, en la representación en series de Fourier de una señal periódica, la potencia cruzada

entre ellas es igual a cero, debido a que las componentes de frecuencia son funciones ortogonales.

Como ejemplo consideremos la señal sinusoidal rectificada en media onda de la Fig.6.22b._El cálculo de la potencia promedio contenida en esta se da:

$$P_m = \frac{1}{2} \int_0^1 [\text{sen}(\pi t)]^2 dt = \frac{1}{4} \quad \text{Ec. (6.39)}$$

De acuerdo con la Ec.(6.38), la potencia promedio en $x(t)$ también es igual a:

$$\begin{aligned} P_m &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(n^2 - 1)} = \\ &= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(n^2 - 1)} = \\ &= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{16} + \frac{2}{9\pi^2} + \frac{2}{225\pi^2} + \dots = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De manera que la potencia contenida en la componente de d.c. es aproximadamente 0,10 y la potencia en la componente de frecuencia fundamental 0,125, cuya suma constituye el 90% de la potencia total contenida en $x(t)$, quedando apenas un 10% para las restantes componentes de frecuencia, como se muestra en la Fig.6.29.

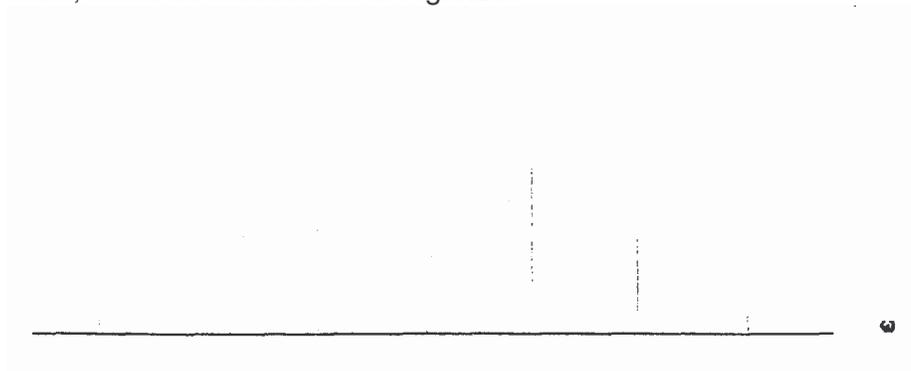


Fig. 6.29 Espectro de potencia de la señal sinusoidal rectificada en media onda

Consideremos ahora la secuencia numérica: $\dots, |x_{-1}|^2, |x_0|^2, |x_1|^2, |x_2|^2, \dots, |x_n|^2, \dots$. Nos preguntamos si ellos constituyen los coeficientes de Fourier de alguna señal periódica. La respuesta a esta interrogante es afirmativa. Efectivamente, ellos son los coeficientes de Fourier de la función de tiempo:

$$r(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau) x(\tau + t) d\tau$$

La función $r(t)$ se denomina la función de *autocorrelación* de señal $x(t)$. Es fácil demostrar que $r(t)$ es una señal periódica de período igual a T . Efectivamente:

$$\begin{aligned} r(t+T) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau) x(\tau+t+T) d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau) x(\tau+t) d\tau = \\ &= r(t) \end{aligned}$$

Los coeficientes de Fourier de la señal $r(t)$ se pueden calcular como:

$$r_n = \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau) x(\tau+t) d\tau \right] e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \right\}$$

Haciendo $t+\tau=\lambda$ se obtiene:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau) x(\lambda) d\tau \right] e^{-j\frac{2\pi n(\lambda-\tau)}{T}} d\lambda = \\ &= \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\lambda) e^{-j\frac{2\pi n\lambda}{T}} d\lambda \right] \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(\tau) e^{j\frac{2\pi n\tau}{T}} d\tau \right] = |x_n|^2 \end{aligned}$$

La secuencia de números..., $|x_{-1}|^2$, $|x_0|^2$, $|x_1|^2$, $|x_2|^2$,..., $|x_n|^2$,... se denomina el *espectro de potencia* de la señal $x(t)$, porque son iguales a las potencias promedias de las componentes de frecuencia de $x(t)$. El gráfico correspondiente es simétrico alrededor del eje de las ordenadas, como se puede verificar en el ejemplo de la señal rectificadora en onda completa, acabado de realizar y que se indica en la Fig. 629.

6.9 BIBLIOGRAFIA

- [1] **HSU, H.P.:** “Análisis de Fourier”, Fondo Educativo Internacional S.A, 1973.
- [2] **LAGO, G., y L.M. BENNINGFIELD:** “Teoría de Sistemas y Circuitos”, Editorial limusa, México, 1964.
- [3] **LATHI, B.P.:** “Signals, Systemas and Communication”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- [4] **LIU, C.L, y J.W.S. LIU:** “Linear Systems Analysis’, Mc Graw Hill Book Cornpany, New York, 1975.
- [5] **OPPENHEIM A.V., y ALAN S. WILLSKY:** “Señales y Sistemas, Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México, 1994.
- [6] **PAPOULIS, A.:** “Circuits and Systems a Approach”, Holt-Saunders Japan, Ltd., Tokyo, 1981.
- [6] **POULARIKAS, A.D., y S. SEELY:** “Signals and Systems”, Pws Engineering, Boston, 1984.
- [7] **ZIEMER, R., TRANTER, W. y R. FANNIN:** “Signals and Systems: Continuos and Discrete”, Macmillan Publishing Company, New York, 1993

CAPITULO VII

TRANSFORMADA DE FOURIER

Índice	Página	
7.1	Introducción	7—1
7.2	Propiedades de simetría	7—7
7.3	Propiedad de dualidad	7-10
7.4	Propiedades de la transformada de Fourier	7—11
7.5	Propiedad de convolución	7—18
7.6	Convolución en frecuencia	7—22
7.7	Transformada de Fourier de funciones singulares	7—27
7.8	Transformada de Fourier de señales periódicas	7—33
7.9	Descripción de sistemas mediante sus funciones de transferencias	7—37
7.10	Distribución de energía en señales periódicas	7—45
7.11	Bibliografía	7—47

CAPITULO 7

TRANSFORMADA DE FOURIER

7.1 INTRODUCCIÓN

Como puntualizamos en el Capítulo 6, sólo las señales periódicas se pueden expresar como una suma ordenada de funciones exponenciales complejas de la forma $e^{jn\omega_0 t}$. Queremos ahora estudiar la forma de descomponer una señal continua aperiódica $x(t)$ como una suma «continua» de funciones exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega t}$.

Por el momento asumiremos que $x(t)$ es una señal periódica de periodo $T=2\pi/\omega_0$ que satisface las condiciones de Dirichlet, de manera que $x(t)$ puede representarse en una serie de Fourier, así:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} = \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} = \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \quad \text{Ec. (7.1)}\end{aligned}$$

A medida que el período T se hace cada vez mayor, la velocidad angular ω_0 se hace cada vez más pequeña. En el límite, como T se aproxima al infinito, ω_0 llega a ser el infinitesimal $d\omega$, $n\omega_0$ viene a ser ω , el sumatorio se convierte en integral y la señal $x(t)$ deja de ser una señal periódica transformándose en una señal aperiódica. En este caso la Ec.(7.1) se convierte en:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \quad \text{Ec. (7.2)}$$

La Ec.(7.2) nos da la posibilidad de expresar a una señal continua aperiódica $x(t)$, como una suma continua (integral) de funciones exponenciales eternas. En particular si hacemos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Ec. (7.3)}$$

entonces:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Ec. (7.4)}$$

Si $(1/2\pi)X(\omega)d\omega$ representan las “amplitudes de las funciones exponenciales $e^{j\omega t}$ ” habremos conseguido descomponer a la señal $x(t)$ como una suma continua de componentes de diferentes frecuencias, tal como lo hicimos con una señal periódica.

El procedimiento seguido es informal y de ninguna manera constituye una prueba de los resultados obtenidos. Pero esa no era precisamente nuestra intención. No obstante, si $x(t)$ satisface las siguientes condiciones:

1. Ser absolutamente integrable; esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. Tener un número finito de máximos y de mínimos en un intervalo finito.
3. Tener un número finito de discontinuidades en un intervalo finito.

podemos demostrar que $x(t)$ se puede expresar como una integral de funciones exponenciales, Ec.(7.3), donde $X(\omega)$ se calcula mediante la Ec.(7.4). Estas tres condiciones se denominan las condiciones de Dirichlet.

Desde un punto de vista matemático, $x(t)$ y $X(\omega)$ son dos funciones relacionadas mediante las Ecs.(7.3) y (7.4), tal que $x(t)$ puede obtenerse a partir de $X(\omega)$ mediante la Ec.(7.3) y $X(\omega)$ puede obtenerse a partir de $x(t)$ mediante la Ec.(7.4). De manera que $x(t)$ puede pensarse como otra forma de representar a $X(\omega)$ y, $X(\omega)$ otra forma de representar a $x(t)$. Al par de Ecs.(7.3) y (7.4) se las denomina el par de transformadas de Fourier. Mientras la Ec. (7.4) representa la transformada directa de Fourier de la señal $x(t)$, la Ec.(7.3) representa la transformada inversa de Fourier de la señal $X(\omega)$. Las operaciones de integración involucradas en las Ecs.(7.3) y (7.4) se las puede representar, respectivamente, mediante los operadores:

$$\mathcal{F} \text{ y } \mathcal{F}^{-1}$$

Tal que a las Ecs.(7.3) y (7.4) las escribiremos también como:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ X(\omega) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Ec. (7.5)}$$

$$X(\omega) = \mathcal{F} \{ x(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Ec. (7.6)}$$

Consideraremos a continuación algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1

Sea la señal exponencial $x(t) = e^{-\alpha} \mu(t)$. Su transformada de Fourier viene dada por:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \text{Ec. (7.7)} \end{aligned}$$

Como podemos ver en este ejemplo, la transformada de Fourier de una señal continua es en general un número complejo y, como tal, podemos escribirlo en forma polar como magnitud y ángulo de fase; así:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta}$$

o empleando la notación simbólica como:

$$x(\omega) = |X(\omega)| \angle X(\omega)$$

en la cual:

$$\angle X(\omega) = \theta$$

Para la señal exponencial del presente ejemplo tenemos que:

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}}$$

Tal que:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$$

La expresión de $|X(\omega)|$, o bien su representación gráfica, se conoce como el «*espectro de Fourier*»; y la expresión de $\angle X(\omega)$, o bien su representación gráfica, se denomina «*el ángulo de fase*». En la Fig.7.1b y c, se indica el espectro de Fourier y el ángulo de fase para la señal $X(\omega)$ del presente ejemplo.

Recordemos que un número complejo también se puede escribir en forma rectangular, como parte real más parte imaginaria. Así:

$$X(\omega) = \Re \{ X(\omega) \} + j \Im \{ X(\omega) \}$$

Para el presente ejemplo tenemos:

$$X(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + j \frac{-\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Las partes real e imaginaria de $X(\omega)$. se grafican en la Fig.1.c.

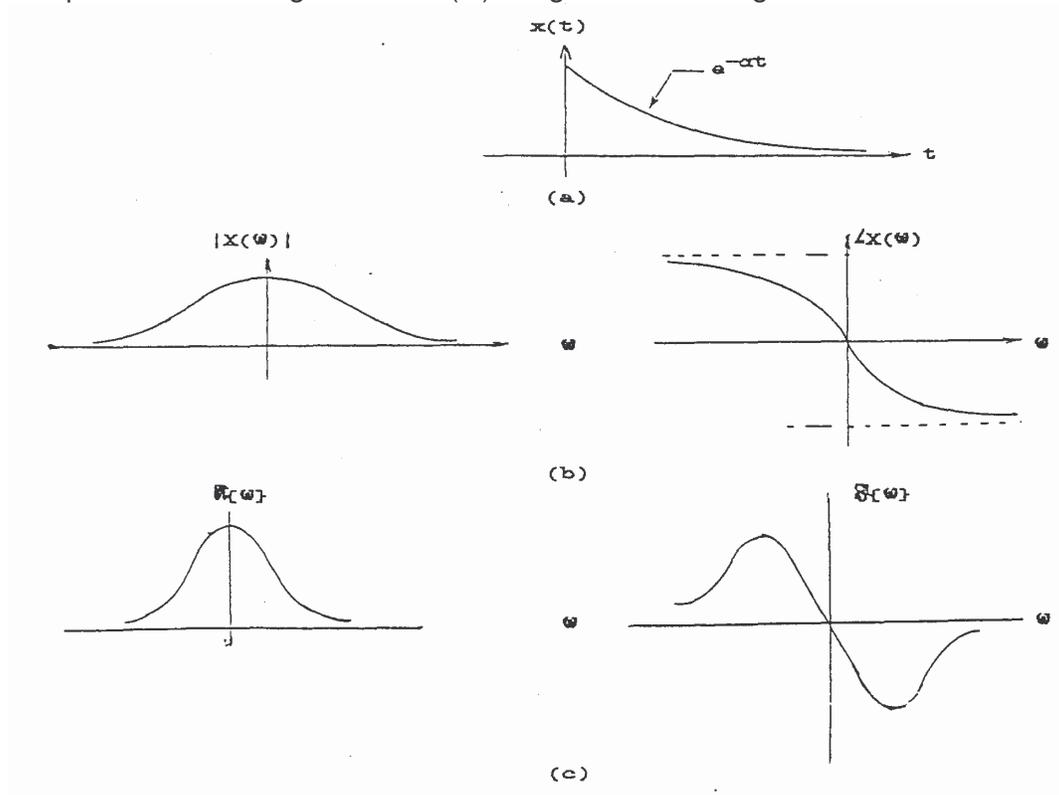


Fig.7.1 a) Señal exponencial b) Espectro de Fourier y ángulo de fase
c) Parte real e imaginaria de $X(\omega)$

Ejemplo No 2

Consideremos la señal compuerta indicada en la Fig.7.2a. La transformada de Fourier de esta señal viene dada por:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\{G_{2a}(t)\} = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{j\omega} \\ &= 2 \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega} = 2a \text{sam}(a\omega) \end{aligned}$$

cuyo espectro se indica en la Fig.7.2b

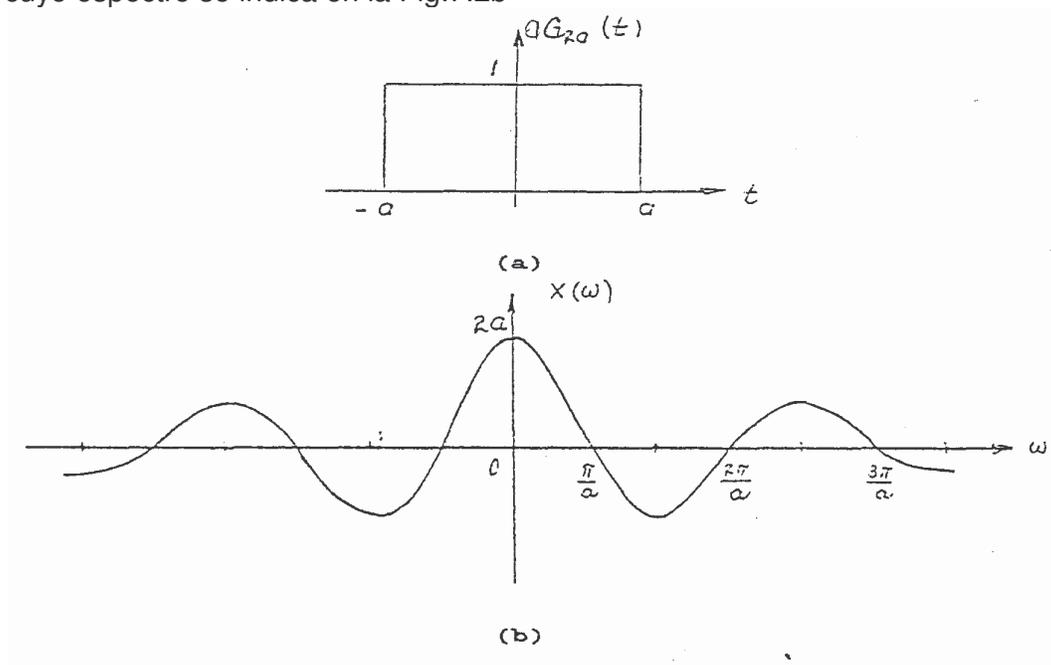


Fig.7.2 a) Compuerta $G_{2a}(t)$ b) Espectro de Fourier

Ejemplo No 3

Consideremos la señal $x(t)$ indicada en la Fig.7.3, definida como:

$$x(t) = -\mu(t+2) + 2\mu(t) - \mu(t-2)$$

La transformada de Fourier de esta señal viene dada por:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -\int_{-2}^0 e^{-j\omega t} dt + \int_0^2 e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} (e^{j\omega a} - 2 + e^{-j\omega a}) \\ &= 0 + j \frac{-4 \text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\omega\right)}{\omega} \end{aligned}$$

cuyo espectro viene dado por:

$$|X(\omega)| = \frac{4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\omega\right)}{|\omega|}$$

En la Fig.7.3b hemos representado la parte imaginaria de $X(\omega)$, dada por la expresión:

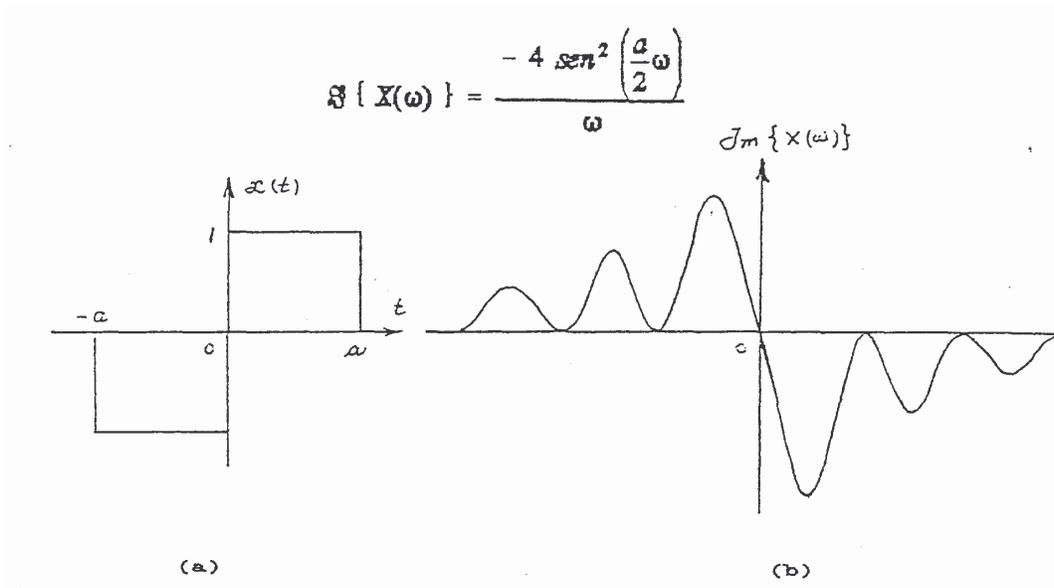


Fig.7.3 a) Señal impar de tiempo b) $\operatorname{Im}\{X(\omega)\}$ en función de ω .

La transformada inversa de Fourier se obtiene empleando la Ec.(7.3), que aparentemente es un cálculo simple y directo. En la mayoría de los casos, sin embargo, resulta que es una integral de variable compleja bastante difícil de evaluar. Esto no debe preocuparnos, ya que la transformada inversa de Fourier de una expresión se puede obtener fácilmente aplicando las diferentes propiedades de esta transformada, como lo comprobaremos más adelante de manera que la Ec.(7.3) la emplearemos únicamente en aquellos casos en los cuales la integral correspondiente sea una integral de variable real, como lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo No 4

Consideremos la transformada inversa de Fourier de la siguiente expresión:

$$X(\omega) = \pi e^{|\omega|} G_{2a}(\omega)$$

cuya representación gráfica se indica en la Fig.7.4

La transformada inversa de Fourier de esta señal viene dada por:

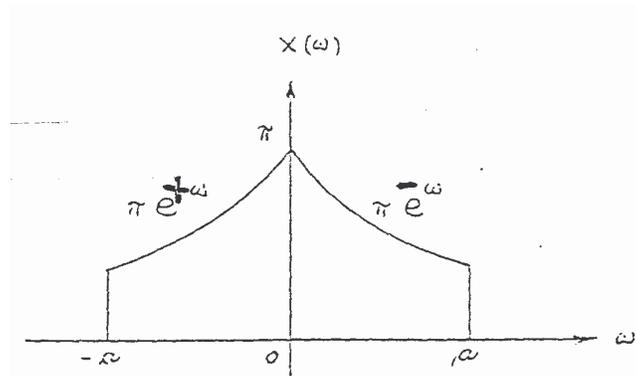


Fig.7.4 Espectro de Fourier de la señal del ejemplo No 4

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \pi e^{\omega} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^a \pi e^{-\omega} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{(1+j)t\omega} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^a e^{-(1-j)t\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{2(1+jt)} [1 - e^{a(1+jt)}] + \frac{1}{2(1-jt)} [1 - e^{-a(1-jt)}]
 \end{aligned}$$

de donde:

$$x(t) = \frac{1 + e^{-a} (t \operatorname{sen} at - \operatorname{cos} at)}{1 + t^2} \quad \forall t$$

7.2 PROPIEDADES DE SIMETRÍA

En esta sección analizaremos cómo las propiedades de simetría de una señal de tiempo $x(t)$ se reflejan en su transformada de Fourier.

1. Simetría par:

Consideremos una señal par de tiempo $x(t)$. Esta señal debe cumplir con la relación:

$$x(t) = x(-t)$$

La transformada de Fourier de tal señal viene dada por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{j\omega \tau} d\tau$$

al efectuar el cambio de variable t por $-\tau$. Puesto que $x(t)$ es una señal par se tiene que:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = X(-\omega)$$

y:

$$X(\omega) = X(-\omega)$$

De manera que la transformada de Fourier de una señal par de tiempo $x(t)$, es otra señal par de omega, $X(\omega)$. Esto lo podemos comprobar en el Ejemplo No 2 presentado en la sección anterior, en el cual la señal $x(t)$ es la compuerta $G_{2a}(t)$ que es una función par de tiempo, y su transformada es la señal $2a \text{sam}(a\omega)$ que es una función par de omega.

2. Simetría impar

Una señal de tiempo $x(t)$ impar, cumple con la relación:

$$x(-t) = -x(t)$$

cuya transformada de fourier viene dada por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

al efectuar el cambio de variable t por $-\tau$. Puesto que estamos asumiendo que $x(t)$ es impar tenemos que:

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = -X(-\omega)$$

o:

$$X(-\omega) = -X(\omega)$$

De manera que, la transformada de Fourier de una señal impar de tiempo, $x(t)$, es una función impar de omega, $X(\omega)$. Este resultado se puede verificar en el Ejemplo o 3 presentado anteriormente,

3. Sea $x(t)$ una función real de tiempo

Si $x(t)$ es una función real de tiempo se cumple que: $x(t)=x^*(t)$, por tanto:

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) [e^{-j\omega t}]^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega)$$

De manera que:

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

Lo cual implica que el espectro de Fourier de la señal sea una función par de omega, y que su ángulo de fase sea una función impar de omega. Esto es:

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$$

También implica que la parte real de $X(\omega)$ sea una función par de omega, y que la parte imaginaria de $X(\omega)$ sea una función impar de omega. Esto es:

$$\Re \{ X(-\omega) \} = \Re \{ X(\omega) \}$$

$$\Im \{ X(-\omega) \} = -\Im \{ X(\omega) \}$$

Estos resultados los podemos verificar en el Ejemplo No 1 presentado anteriormente.

4. Sea $x(t)$ una función real y par de tiempo

En este caso se debe cumplir que:

$$X(-\omega) = X(\omega) \quad [\text{por ser } x(t) \text{ una función par}]$$

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad [\text{por ser } x(t) \text{ una función real}]$$

Por tanto se debe cumplir que:

$$X^*(\omega) = X(\omega)$$

lo cual es cierto únicamente si $X(\omega)$ es una función real. Esto es, la transformada de Fourier de una señal real y par de tiempo $x(t)$, es una función real y par de ω , $X(\omega)$. Esto es:

$$\Re \{ X(\omega) \} = \Re \{ X(-\omega) \}$$

$$\Im \{ X(\omega) \} = 0$$

5. Sea $x(t)$ una función real e impar de tiempo

En este caso se cumplirá que:

$$\begin{aligned} -X(\omega) &= X(-\omega) & [\text{Por ser } x(t) \text{ una función impar}] \\ X^*(\omega) &= X(-\omega) & [\text{Por ser } x(t) \text{ una función real}] \end{aligned}$$

por tanto:

$$X^*(\omega) = -X(\omega)$$

que es cierto únicamente si $X(\omega)$ es una función imaginaria pura de entendiéndose por funciones imaginarias puras, aquellas funciones complejas cuyas partes reales son iguales a cero. De manera que la transformada de Fourier de una señal real e impar de tiempo $x(t)$, es una función impar e imaginaria pura de ω , $X(\omega)$. Esto es:

$$\Re \{ X(\omega) \} = 0$$

$$\Im \{ X(\omega) \} = -\Im \{ X(-\omega) \}$$

7.3 PROPIEDAD DE DUALIDAD

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier es la propiedad de dualidad, que como dijimos anteriormente nos permitirá, a partir de resultados conocidos poder tomar la transformada tanto directa como inversa de Fourier de muchas funciones. Veamos en qué consiste. Para ello, reemplacemos a la variable t por $-t$ en las Ecs.(7.3) y (7.4). Así:

$$x(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{j\omega t} dt$$

Intercambiando en este par de ecuaciones las variables t y ω y volviendo a escribirlas de la siguiente forma:

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Del análisis de estas dos ecuaciones podemos concluir que:

«Si $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, entonces, la transformada de Fourier de $X(t)$ será igual a $2\pi x(-\omega)$ »

Así por ejemplo, conocemos que:

$$2 \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega} = \mathcal{F} \{ G_{2a}(t) \}$$

por tanto:

$$\mathcal{F} \left\{ 2 \frac{\text{sen}(at)}{t} \right\} = 2\pi G_{2a}(-\omega) = 2\pi G_{2a}(\omega)$$

puesto que la función compuesta es una función par. Simplificando obtenemos:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen}(at)}{\pi t} \right\} = G_{2a}(\omega)$$

Así mismo conocemos que:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \mathcal{F} \{ e^{-\alpha t} \mu(t) \}$$

por tanto:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\alpha + jt} \right\} = 2\pi e^{\alpha\omega} \mu(-\omega)$$

Notemos que empleando esta propiedad de dualidad podemos obtener en forma sencilla la transformada tanto directa como inversa de expresiones cuyo cálculo directo mediante las Ecs.(7.3) o (7.4), pueden llegar a ser muy complicadas.

7.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Hagamos que $x(t)$ sea una señal de tiempo cuya transformada de Fourier es la función $X(\omega)$. Entonces se verificarán las siguientes propiedades:

1. PROPIEDAD DE TRANSPOSICIÓN

La transformada de Fourier de la señal transpuesta $x(-t)$ es igual a $X(-\omega)$, esto es:

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-\omega) \quad \text{Ec. (7.8)}$$

Demostración: Se tiene que:

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = X(-\omega)$$

y la Ec.(7.8) se verifica.

Ejemplo: Conocemos que la transformada de Fourier de la señal $e^{-\alpha t} \mu(t)$ viene dada por la Ec.(7.7) que aquí la volvemos a repetir; así:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t} \mu(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \text{Ec. (7.7)}$$

La transformada de la señal transpuesta vendrá dada, entonces, por:

$$\mathcal{F}\{e^{\alpha t} \mu(-t)\} = \frac{1}{\alpha - j\omega}$$

2. PROPIEDADES DE ESCALAMIENTO

La transformada de Fourier de la señal $x(at)$ es igual a $(1/|a|) X(\omega/a)$, o:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{Ec. (7.9)}$$

Demostración: En la integral:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

Hagamos $at=\tau$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

verificándose la Ec.(7.9).

Ejemplo: Consideremos la transformada de Fourier de la señal $e^{-t} \mu(t/\alpha) = e^{-t} \mu(t)$, la cual viene dada por:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha} u(t)\} = \alpha \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Resultado que lo pudimos haber obtenido si en la Ec.(7.7) hacemos $\alpha=1$.

3. PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO

La transformada de Fourier de la señal $x(t+t_0)$ es igual a $\exp[j\omega t_0] X(\omega)$ para t_0 positivo o negativo, esto es:

$$\mathcal{F}\{x(t+t_0)\} = e^{j\omega t_0} X(\omega) \quad \forall t_0 \quad \text{Ec. (7.10)}$$

Demostración: En la integral:

$$\mathcal{F}\{x(t+t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0) e^{-j\omega t} dt$$

hagamos $t+t_0 = \tau$ de modo que:

$$\mathcal{F}\{x(t+t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau-t_0)} d\tau = e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{j\omega t_0} X(\omega)$$

y la Ec.(7.10) se verifica.

Ejemplo: Consideremos la transformada de Fourier de una compuerta desplazada $G_{2a}(t-a)$ que se muestra en la Fig.7.5

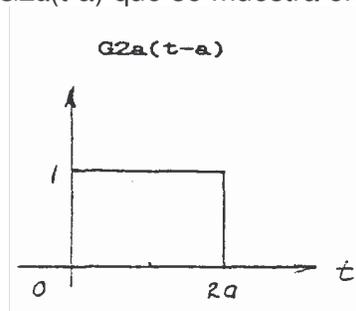


Fig.7.5 Compuerta desplazada $G_{2a}(t-a)$

Conocemos que:

$$\mathcal{F}\{G_{2a}(t)\} = 2 \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega}$$

Por tanto:

$$\mathcal{F}\{G_{2a}(t-a)\} = e^{-j\omega a} \left[2 \frac{\text{sen}(a\omega)}{\omega} \right] = \frac{\text{sen}(2a\omega)}{\omega} - j \frac{2 \text{sen}^2(a\omega)}{\omega}$$

4. DESPLAZAMIENTO EN FRECUENCIA

La transformada de Fourier de la señal $e^{j\omega_0 t} x(t)$ es igual a $X(\omega - \omega_0)$ para ω_0 positivo o negativo. Esto es:

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} = X(\omega - \omega_0)} \quad \text{Ec. (7.11)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} x(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Esta propiedad nos indica que multiplicar una señal de tiempo por el factor exponencial $e^{j\omega_0 t}$ equivale a un corrimiento de su espectro de frecuencias en un valor ω_0 .

En comunicaciones a menudo es necesario trasladar el espectro de frecuencias de una señal. Esto se puede lograr multiplicando la señal por una función sinusoidal. Este proceso se conoce con el nombre de modulación. Puesto que una señal sinusoidal de frecuencia puede expresarse como una suma de funciones exponenciales, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \\ \text{sen}(\omega_0 t) &= \frac{1}{j2} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \end{aligned}$$

es evidente que la multiplicación de $x(t)$ con una señal sinusoidal trasladará su espectro de frecuencias. Así:

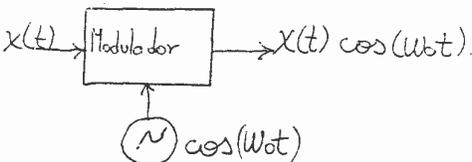
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t} x(t)\} = \\ &= \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \quad \text{Ec. (7.12)} \end{aligned}$$

o también:

$$\mathcal{F} \{ x(t) \operatorname{sen}(\omega_0 t) \} = \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] \quad \text{Ec. (7.13)}$$

de manera que, el proceso de modulación traslada el espectro de frecuencias de una señal $x(t)$ en $\pm \omega_0$.

Ejemplo: Conocemos que:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(at)}{\pi t} \right\} = G_{2a}(\omega)$$


cuyo espectro se indica en la Fig.7.6a. Por tanto, se sigue que:

$$\mathcal{F} \left\{ \cos(\omega_0 t) \left[\frac{\operatorname{sen}(at)}{\pi t} \right] \right\} = \frac{1}{2} [G_{2a}(\omega + \omega_0) + G_{2a}(\omega - \omega_0)]$$

cuyo espectro se indica en la Fig.7.6b.

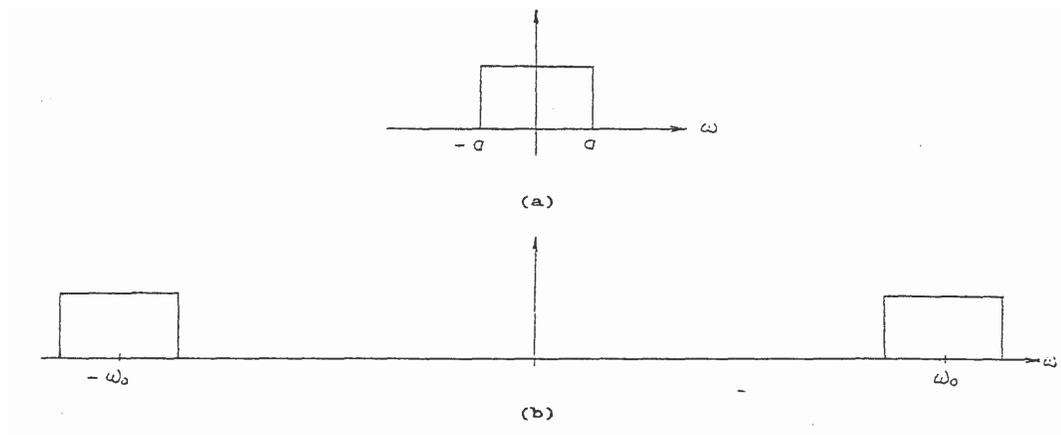


Fig.7.6 a) Espectro de Fourier de una señal $x(t)$ b) Efecto de la modulación de el espectro de frecuencias de esa señal $x(t)$.

5. DIFERENCIACIÓN EN EL TIEMPO

La transformada de Fourier de la señal $dx(t)/dt$ es igual a $j\omega X(\omega)$, siempre que la transformada de Fourier de $dx(t)/dt$ exista. De modo que:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = j\omega X(\omega) \quad \text{Ec. (7.14)}$$

si la transformada de la señal $x'(t)$ existe.

Demostración: Derivando ambos miembros de la Ec. (7.3) obtenemos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

esto es, la transformada de Fourier de señal $dx(t)/dt$ es igual a $j\omega X(\omega)$, si tal transformada existe. Notemos que la transformada de Fourier de $x'(t)$ puede no existir, a pesar de que la transformada de $x(t)$ exista. Este resultado puede extenderse a la derivada enésima de $x(t)$. Así:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = (j\omega)^n X(\omega) \quad \text{Ec. (7.15)}$$

igualmente, si la transformada de la señal $d^n x(t)/dt^n$ existe.

Ejemplo: Considere la transformada de Fourier de la señal trapezoidal mostrada en la Fig.7.7a. La derivada de esta señal se muestra en la Fig.7.7b.

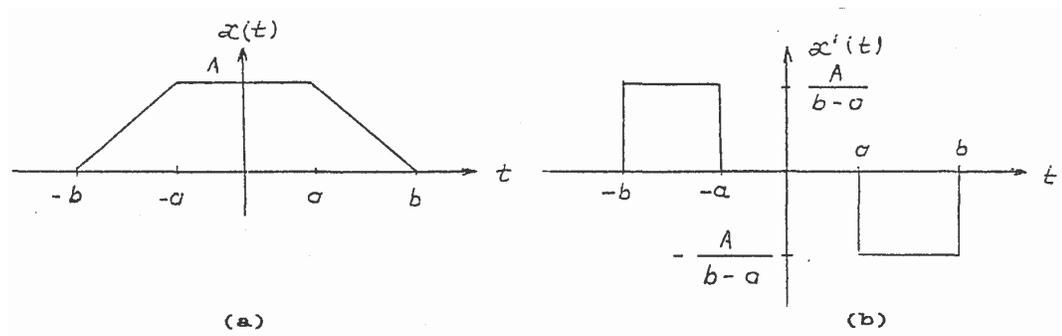


Fig.7.7 Transformada de una señal $x'(t)$

a transformada de Fourier de la señal $x'(t)$ mostrada en la Fig.7.7b, viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} &= \int_{-b}^{-a} \frac{A}{b-a} e^{-j\omega t} dt + \int_a^b \frac{-A}{b-a} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{-j\omega (b-a)} (e^{j\omega a} - e^{j\omega b} - e^{-j\omega b} + e^{-j\omega a}) \end{aligned}$$

de donde:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \frac{2A}{-j\omega (b-a)} [\cos(a\omega) - \cos(b\omega)]$$

Luego de algunas transformaciones trigonométricas obtenemos:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \frac{4A}{-j\omega (b-a)} \left[\text{sen} \left(\frac{b+a}{2} \omega \right) \text{sen} \left(\frac{b-a}{2} \omega \right) \right]$$

De acuerdo con la Ec.(7.15) tenemos que este resultado es igual a $j\omega X(\omega)$ despejando $X(\omega)$ obtenemos:

$$X(\omega) = \frac{4A}{(b-a)} \frac{\text{sen} \left(\frac{b+a}{2} \omega \right) \text{sen} \left(\frac{b-a}{2} \omega \right)}{\omega^2}$$

6. DIFERENCIACIÓN EN FRECUENCIA

La transformada de Fourier de $t x(t)$ es igual a $j dX(\omega)/d\omega$

Demostración: Derivando ambos miembros de la Ec. (7.4), respecto a ω obtenemos:

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jt x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{o:}$$

$$j \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) e^{-j\omega t} dt$$

de modo que:

$$\boxed{\mathcal{F} \{ t x(t) \} = j \frac{dX(\omega)}{d\omega}} \quad \text{Ec. (7.16)}$$

Este resultado lo podemos generalizar de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathcal{F} \{ (-jt)^n x(t) \} = \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}} \quad \text{Ec.(7.17)}$$

Ejemplo: La transformada de la señal te viene dada por

$$\mathcal{F} \{ t e^{-\alpha t} \mu(t) \} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\alpha + j\omega} \right] = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$$

y de la señal $t^2 e^{-\alpha t} \mu(t)$:

$$\mathcal{F} \{ t^2 e^{-\alpha t} \mu(t) \} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{(\alpha + j\omega)^2} \right] = \frac{2}{(\alpha + j\omega)^3}$$

y de la señal $t^3 e^{-\alpha t} \mu(t)$:

$$\mathcal{F}\{t^3 e^{-\alpha t} \mu(t)\} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{2}{(\alpha + j\omega)^3} \right] = \frac{6}{(\alpha + j\omega)^4}$$

y en general la transformada de Fourier de la serial:

$$\mathcal{F}\{t^n e^{-\alpha t} \mu(t)\} = \frac{n!}{(\alpha + j\omega)^{n+1}}$$

7. LINEALIDAD

$$\text{Si: } X_1(\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t)\}$$

$$\text{y si: } X_2(\omega) = \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} &= a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\} \\ &= a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad \text{Ec. (7.18)} \end{aligned}$$

Demostración: Este resultado se puede comprobar a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \end{aligned}$$

7.5 LA PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

Si $x(t)$ es la señal de entrada a un sistema lineal invariante, cuya respuesta a la función impulso es $h(t)$, entonces la respuesta $y(t)$ del sistema será:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

donde $x(t)$ viene dada por la Ec.(7.3):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

De modo que:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Ec. (7.19)}$$

asumiendo que $e^{j\omega t}$ son funciones propias del sistema para toda ω . Asumiremos también la existencia de la transformada de Fourier de $h(t)$, a la cual denotaremos por $H(\omega)$. También de las condiciones de Dirichlet, se sigue que la región de absoluta convergencia del sistema debe incluir el eje $j\omega$ del plano complejo s . En este caso la Ec.(7.19) puede escribirse como:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

o sea:

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)} \quad \text{Ec. (7.20)}$$

Esto es, la transformada de Fourier de la respuesta de un sistema lineal e invariante, a una señal de entrada $x(t)$, es igual al producto de las transformadas de Fourier de las señales $x(t)$ y $h(t)$, como se indica gráficamente en la Fig.7.8.

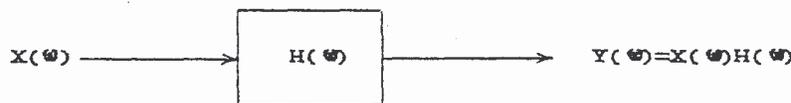


Fig.7.8 Propiedad de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier de la respuesta impulsiva $h(t)$ se denomina la función de transferencia del sistema y se denota por $H(\omega)$. Si $x(t)$ y $h(t)$ son dos señales de tiempo cualesquiera, entonces:

$$\mathcal{F} \{ x(t) * h(t) \} = X(\omega) H(\omega)$$

esto es, la transformada de Fourier de la convolución en el tiempo de dos señales $x(t) * h(t)$ es igual al producto simple de sus transformadas de Fourier $X(\omega)H(\omega)$. Empleando el principio de dualidad se sigue que:

$$\mathcal{F} \{ x(t)h(t) \} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega) \quad \text{Ec. (7.21)}$$

o sea, la transformada de Fourier del producto simple de dos señales es igual a la convolución en frecuencia de sus transformadas de Fourier, multiplicado por el factor $1/2\pi$.

Ejemplo: Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo. Sea

$$h(t) = (-4t + 2) e^{-2t} \mu(t)$$

la respuesta impulsiva de un sistema lineal invariante, queremos determinar la respuesta del sistema a la señal $x(t)$ indicada a continuación.

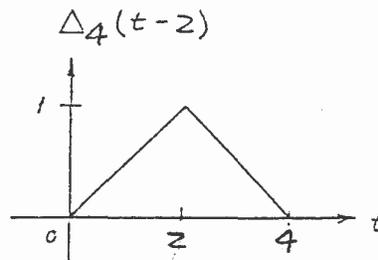


Fig.7.9 Señal de entrada de un SLI

La función de transferencia del sistema viene dada por la transformada de la respuesta impulsiva, a la misma que la escribiremos como:

$$h(t) = 2e^{-2t} \mu(t) - 4te^{-2t} \mu(t)$$

de donde:

$$H(\omega) = \frac{2}{2 + j\omega} - \frac{4}{(2 + j\omega)^2} = \frac{2j\omega}{(2 + j\omega)^2}$$

La señal de entrada puede escribirse como: $x(t) = \Delta_4(t-2)$, de modo que su transformada de Fourier será:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2 e^{-j2\omega} \frac{\text{sen}^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2} = 2 \frac{e^{-j2\omega}}{\omega^2} \left(\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{-j2\omega}}{2} \frac{e^{j2\omega} - 2 + e^{-j2\omega}}{(j\omega)^2} = \frac{1 - 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}}{2(j\omega)^2} \end{aligned}$$

La respuesta del sistema en el dominio de frecuencia, de acuerdo con la propiedad de convolución viene dada por:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{j\omega(2 + j\omega)^2} (1 - 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}) \quad \text{Ec. (7.22)}$$

El factor $(1-2e^{-j2\omega}+e^{-j4\omega})$ en la Ec.(7.22) corresponde a desplazamientos temporales de la señal $y(t)$. Definamos a la fracción racional de la Ec.(7.22) como:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega(2 + j\omega)^2}$$

De acuerdo con el teorema del residuo tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{j\omega t}}{(2 + j\omega)^2} \Big|_{\underline{j\omega=0}} + \frac{d}{d(j\omega)} \left[\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} \right] \Big|_{\underline{j\omega=-2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{j\omega t e^{j\omega t} - e^{j\omega t}}{(j\omega)^2} \Big|_{\underline{j\omega=-2}} \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \right] \mu(t) \end{aligned}$$

Expresión que la escribiremos como:

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(t + \frac{1}{2} \right) e^{-2t} \right] \mu(t)$$

De manera que la respuesta $y(t)$ del sistema vendrá dada por:

$$y(t) = f(t) - 2f(t-2) + f(t-4)$$

o:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(t + \frac{1}{2} \right) e^{-2t} \right] \mu(t) - \left[1 - \left(t - \frac{3}{2} \right) e^{-2(t-2)} \right] \mu(t-2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[1 - \left(t - \frac{7}{2} \right) e^{-2(t-4)} \right] \mu(t-4) \end{aligned}$$

¹ Si $F(\omega)$ es una fracción racional, entonces la señal $f(t)$ viene dada por la suma de los residuos de la función $F(\omega)e^{j\omega t}$ evaluada en los polos $j\omega=p_1$, donde p_1 son los polos de esa función.

7.6 CONVOLUCIÓN EN FRECUENCIA

La Ec.(7.21) afirma que la transformada de Fourier del producto simple de dos señales $x(t)h(t)$, es igual a $1/2\pi$ multiplicado por la convolución de sus transformadas de Fourier, $X(\omega)*h(\omega)$. Esto es:

$$\mathcal{F} \{ x(t)h(t) \} = \frac{1}{2\pi} X(\omega)*H(\omega)$$

que da lugar a la convolución en frecuencia de las señales $X(\omega)$ y $H(\omega)$. La realización matemática de esta operación es idéntica a la de la convolución en el dominio del tiempo.

Ejemplo:

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo. Se trata de determinar la respuesta al impulso del sistema de la Fig.7.10, formado por dos subsistemas cuyas respuestas al impulso vienen dadas por:

$$\rightarrow h_1(t) = \frac{\text{sen}(2t)}{\pi t}$$

$$\rightarrow h_2(t) = 2\pi \frac{\text{sen}(t)}{\pi t} \frac{\text{sen}(2t)}{\pi t}$$



Fig.7.10 Sistema formado por dos subsistemas en cascada

La respuesta impulso del sistema equivalente viene dada por:

$$h(t) = h_1(t)*h_2(t)$$

de acuerdo a la propiedad de convolución su transformada de Fourier viene dada por:

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$$

donde:

$$H_1(\omega) = \mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen}(2t)}{\pi t} \right\} = G_{\pi}(\omega) = \mu(\omega+2) - \mu(\omega-2)$$

y:

$$H_2(\omega) = \mathcal{F} \left\{ 2\pi \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f} \frac{\text{sen}(2\pi f)}{\pi f} \right\} = G_2(\omega) * G_4(\omega)$$

O:

$$H_2(\omega) = G_4(\omega) * G_2(\omega)$$

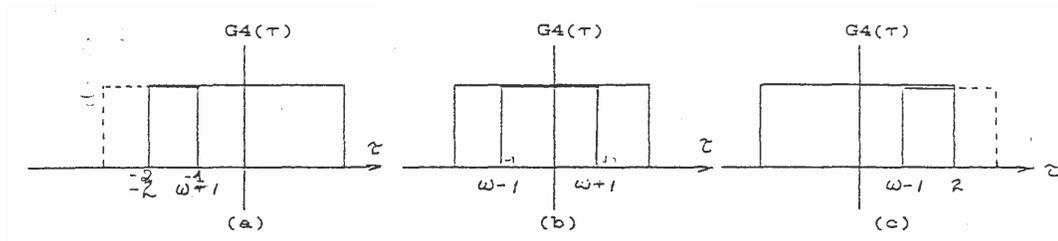


Fig.7.11 Convolución en el dominio de frecuencia

La convolución de estas dos compuertas, de acuerdo a la Fig.7.11a viene dada por:

$$H_2(\omega) = \int_{-2}^{\omega+1} d\tau = \omega + 3 \quad \underline{-3 \leq \omega \leq -1}$$

De igual manera, de acuerdo a la Fig.7.11b se tiene que:

$$H_2(\omega) = \int_{\omega-1}^{\omega+1} d\tau = 2 \quad -1 \leq \omega \leq 1$$

Finalmente, de acuerdo a la Fig.7.11c se tiene que:

$$H_2(\omega) = \int_{\omega-1}^2 d\tau = -\omega + 3 \quad 1 \leq \omega \leq 3$$

Fuera del intervalo $[-3,3]$, $H_2(\omega)=0$, como se muestra en la Fig.7.12a. La señal $H_1(\omega)$ se indica en la Fig.7.12b.

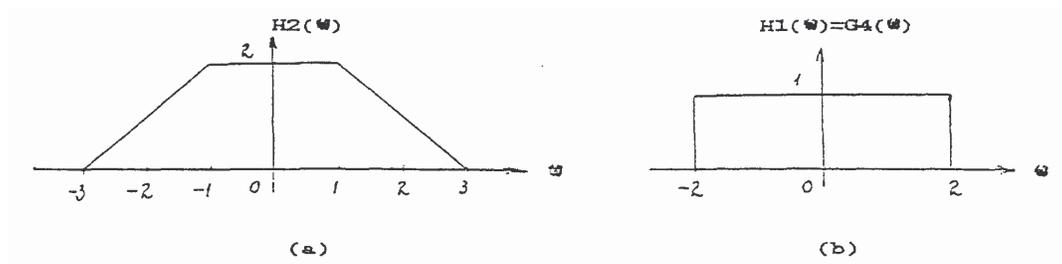


Fig.7.12 a) Señal resultado de la convolución de $G_4(\omega) * G_2(\omega)$
b) $H_1(\omega) = G_4(\omega)$

La función de transferencia $H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$ que es el producto de las señales indicadas en la Fig.7.12a y b, se muestra en la Fig.7.13a, la misma que se ha descompuesto como la suma de las señales $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$ allí indicadas. Esto es:

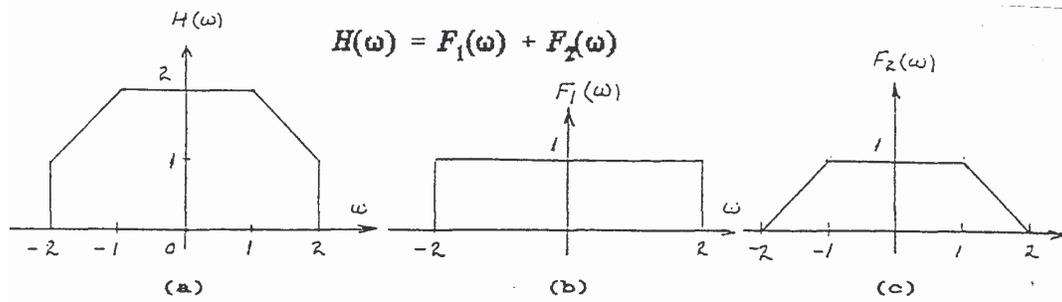
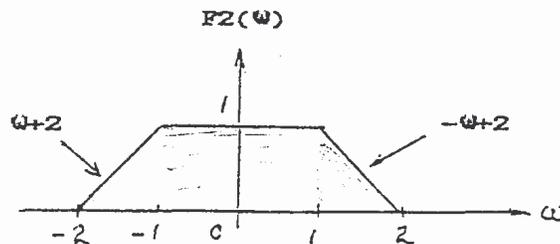


Fig.7.13 Descomposición de $H(\omega)$ como la suma de $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$

donde: $f_1(t) = \text{sen}(2t)/\pi t$ y $f_2(t)$ es la transformada inversa de la señal trapezoidal indicada en la Fig.7.13c. Para tomar la transformada inversa de esta señal existen varias posibilidades:

Primera:

Empleando directamente la fórmula de la transformada inversa, tenemos, de acuerdo a la Fig714, que:



$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{-1} (\omega + 2) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_1^2 (-\omega + 2) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jt} \omega e^{j\omega t} - \frac{1}{(jt)^2} e^{j\omega t} + \frac{2}{jt} e^{j\omega t} \right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t} \right]_{-1}^1 + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{jt} \omega e^{j\omega t} + \frac{1}{(jt)^2} e^{j\omega t} + \frac{2}{jt} e^{j\omega t} \right]_1^2
 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{(jt)^2} (e^{j2t} + e^{-j2t}) - \frac{1}{(jt)^2} (e^{jt} + e^{-jt}) \right] = \\
 &= \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{\pi t^2} = \frac{2 \text{sen}(3t/2) \text{sen}(t/2)}{\pi t^2}
 \end{aligned}$$

De manera que obtenemos para la respuesta unitaria del sistema equivalente la expresión:

$$h(f) = \frac{\text{sen}(2\pi f)}{\pi f} + 2\pi \frac{\text{sen}(3\pi/2)}{\pi f} \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\pi f}$$

Segunda

La señal $F_2(\omega)$ se puede escribir como la convolución de dos compuertas; así:

$$F_2(\omega) = G_3(\omega) * G_1(\omega)$$

que se puede verificar efectuando la de convolución correspondiente. Se sigue que:

$$f_2(f) = 2\pi \frac{\text{sen}(3\pi/2)}{\pi f} \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\pi f}$$

Tercera

Considerando a $F_2(\omega)$ como la diferencia de dos funciones triángulo, como se indica gráficamente en la Fig.7.15.

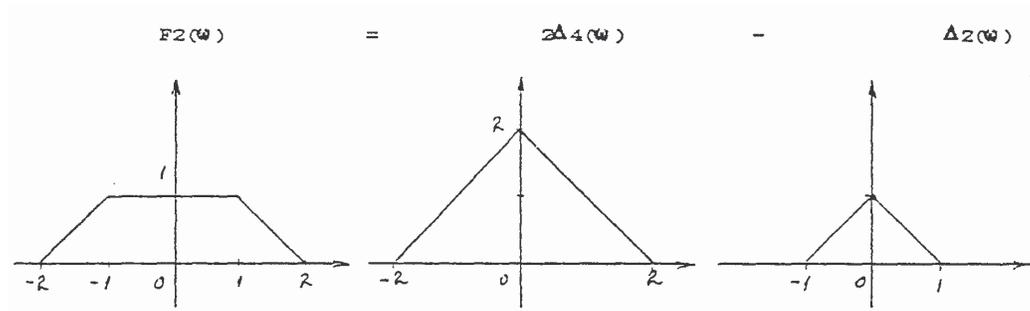


Fig.7.15 Descomposición de una señal trapezoidal como la diferencia de dos señales triangulares

Más adelante demostraremos que la transformada de Fourier de una señal triángulo viene dada por:

$$\mathcal{F} \{ \Delta_{ap}(t) \} = 2 \frac{\text{sen}^2(a\omega)}{a\omega^2}$$

se sigue por la propiedad de dualidad que:

$$\mathcal{F} \left\{ 2 \frac{\text{sen}^2(at)}{a t^2} \right\} = 2\pi \Delta_{a\omega}(\omega)$$

de donde:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen}^2(at)}{a \pi t^2} \right\} = \Delta_{2a}(\omega)$$

De manera que:

$$\begin{aligned} f_x(t) &= 2 \frac{\text{sen}^2(t)}{\pi t^2} - \frac{\text{sen}^2(t/2)}{\frac{1}{2} \pi t^2} = 2 \frac{\text{sen}^2(t) - \text{sen}^2(t/2)}{\pi t^2} = \\ &= \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{\pi t^2} \end{aligned}$$

Pero: $[\cos(t) - \cos(2t)] = 2\text{sen}(3t/2)\text{sen}(t/2)$, de modo que:

$$f_x(t) = 2\pi \frac{\text{sen}(3t/2)}{\pi t} \frac{\text{sen}(t/2)}{\pi t}$$

Tomando la transformada de Fourier de la señal indicada en la Fig.7.16a, y luego aplicando el principio de dualidad.

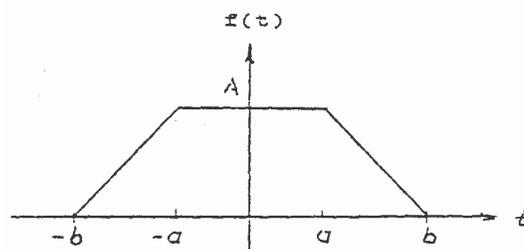


Fig.7.16 Señal trapezoidal $f(t)$

La transformada de esta señal ya la efectuamos en un ejemplo anterior, el resultado que obtuvimos fue:

$$F(\omega) = \frac{4A}{b-a} \frac{\text{sen} \left(\frac{b+a}{2} \omega \right) \text{sen} \left(\frac{b-a}{2} \omega \right)}{\omega^2}$$

Haciendo: $A=1$; $b=2$ y $a=1$ queda:

$$F(\omega) = 4 \frac{\text{sen}(3\omega/2)}{\omega} \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega}$$

Aplicando a continuación el principio de dualidad, obtenemos:

$$\mathcal{F} \left\{ 2\pi \frac{\text{sen}(3t/2)}{\pi t} \frac{\text{sen}(t/2)}{\pi t} \right\} = F_2(\omega)$$

donde $F_2(\omega)$, definida en la señal cuya transformada inversa estamos buscando; de manera que:

$$f_2(t) = 2\pi \frac{\text{sen}(3t/2)}{\pi t} \frac{\text{sen}(t/2)}{\pi t}$$

7.7 TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES SINGULARES

Las transformadas de Fourier de funciones singulares siguen las reglas establecidas para estas funciones en el Capítulo 1. Así, la transformada de Fourier de la función impulso $\delta(t)$, vendrá dada por:

$$\mathcal{F} \{ \delta(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad \text{Ec. (7.23)}$$

También, la transformada de Fourier de $\delta(t+t_0)$ será:

$$\mathcal{F} \{ \delta(t+t_0) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega t_0} \quad \text{Ec. (7.24)}$$

La transformada de Fourier de la n-ésima derivada de la función impulso viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \delta^{(n)}(t) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= (-1)^n \left[\frac{d^n e^{-j\omega t}}{dt^n} \right]_{t=0} = (j\omega)^n \quad \text{Ec. (7.25)} \end{aligned}$$

Puesto que la transformada de Fourier de la función impulso $\delta(t)$ es igual a 1, la propiedad de dualidad nos permite definir la transformada de Fourier de la constante $x(t)=1$; así:

$$\mathcal{F} \{ 1 \} = 2\pi \delta(\omega) \quad \text{Ec. (7.26)}$$

Notemos que $x(t)=1$ no es absolutamente integrable, por tanto no satisface las condiciones de Dirichlet, y no tendría transformada de Fourier. La inclusión de funciones singulares, sin embargo, en nuestra discusión, nos permite definir la existencia de su transformada. En efecto, toda vez que hemos definido la transformada de Fourier de funciones singulares, podemos incluir a éstas en la lista de las transformadas de Fourier de señales ordinarias de tiempo, lo cual permitirá, a su vez, tomar la transformada de Fourier de otras señales que corrientemente no tendrían transformada de Fourier. Por ejemplo, la

transformada de Fourier de la señal $\cos(\omega_0 t)$, se puede efectuar de la siguiente manera:

$$\mathcal{F} \{ \cos(\omega_0 t) \} = \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ e^{j\omega_0 t} \} + \frac{1}{2} \mathcal{F} \{ e^{-j\omega_0 t} \}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en frecuencia a la transformada de $x(t)=1$, Ec.(7.26), obtenemos:

$$\mathcal{F} \{ \cos(\omega_0 t) \} = \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

De idéntica manera:

$$\mathcal{F} \{ \text{sen}(\omega_0 t) \} = j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

La transformada de Fourier de la función paso o escalón unitario $\mu(t)$, viene dada por la expresión:

$$\boxed{\mathcal{F} \{ \mu(t) \} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}} \quad \text{Ec. (7.27)}$$

La presencia del término $\pi\delta(\omega)$ en la Ec.(7.27) es bastante extraña, pero como veremos más adelante, éste aparece debido al valor medio de la función escalón.

En la Fig.7.17 hemos graficado así mismo, los espectros de frecuencias de algunas señales de tiempo, cuyas transformadas acabamos de definir.

Observando el espectro de frecuencias de la función impulso nos damos cuenta que esta señal contiene todas las componentes de frecuencia desde $\omega=-\infty$ a $\omega=+\infty$. Esto explica porqué la respuesta impulso caracteriza completamente la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante. Como la función impulso contiene todas las componentes de frecuencia, la respuesta impulso $h(t)$ de un sistema, representa por tanto la respuesta del sistema a todas las componentes de frecuencia. Además, puesto que:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega ; \text{ y :}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

se concluye que la respuesta de un sistema lineal invariante al estímulo $e^{j\omega t}$ es la señal $H(\omega)e^{j\omega t}$. Consecuentemente, la respuesta del sistema a cualquier señal que se exprese como una integral de funciones exponenciales complejas, se puede determinar a partir de $H(\omega)$. Más aún, nos damos cuenta

que la relación entrada-salida de un sistema lineal invariante estará completamente definida por la respuesta $y(t)$ del sistema a cualquier señal de entrada $x(t)$, cuyo espectro de frecuencias sea diferente de cero en todo el rango de frecuencias: $-\infty \leq \omega \leq +\infty$. Esto es, la respuesta del sistema a la señal $X(\omega)e^{j\omega t}$ es la señal $Y(\omega)e^{j\omega t}$.

Que la transformada de Fourier de $x(t)=1$ sea $2\pi\delta(\omega)$, indica que $x(t)$ no tiene componentes de frecuencia, excepto la componente continua (ω_0). Así mismo, las funciones $\cos(\omega_0 t)$ y $\sin(\omega_0 t)$ sólo tienen una componente de frecuencia, la componente de frecuencia fundamental ω_0 como se indica en la Fig. 7.17.

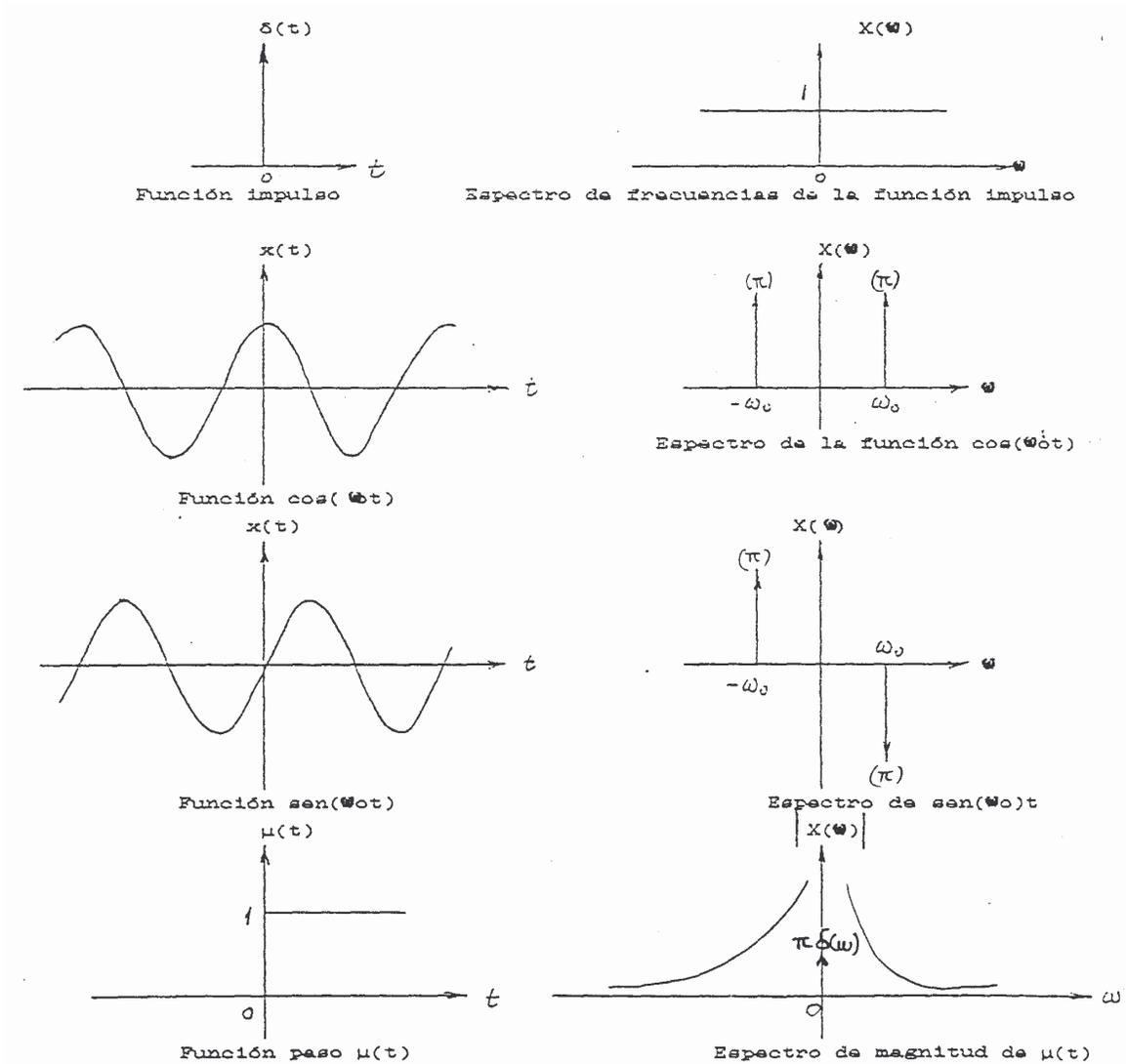


Fig. 7.17 Señales de tiempo y sus respectivos espectros de frecuencia

En la Sección 7.4, correspondiente a las propiedades de la transformada de Fourier, no enunciamos la propiedad de integración. Lo haremos ahora que nos encontramos preparado para ello.

Propiedad de integración:

La transformada de Fourier de la integral de tiempo de una señal $x(t)$, viene dada por:

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^j x(\tau) d\tau \right\} = \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad \text{Ec. (7.28)}$$

Efectivamente, puesto que:

$$\int_{-\infty}^j x(\tau) d\tau = x(t) * \mu(t)$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^j x(\tau) d\tau \right\} &= X(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \end{aligned}$$

y la Ec.(7.23) se verifica.

Ya que la diferenciación en tiempo equivale a multiplicar por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia, ver la Ec.(7.14), podríamos esperar, inversamente, que la integración en tiempo equivalga a dividir para $j\omega$ en el dominio de la frecuencia. Esto es verdad solamente en parte, puesto que además involucra el término impulsivo $\pi X(0) \delta(\omega)$ que representa el valor medio o dc de la señal $x(t)$ que aparece debido a la integración. Si el valor medio de la señal $X(\omega)|_{\omega=0} = X(0)$ fuese cero, entonces la propiedad de integración sólo constaría del término $X(\omega)/j\omega$. En caso contrario esta afirmación no sería correcta.

Para aclarar esta afirmación, consideremos la transformada de Fourier de la función paso o escalón unitario. Puesto que esta señal no tiene ninguna forma de simetría, se la puede expresar como la suma de una componente par y de otra componente impar. Así:

$$\mu(t) = x_p(t) + x_i(t) = \frac{1}{2} + \left[\mu(t) - \frac{1}{2} \right]$$

de manera que $x_p(t) = 1/2$ y $x_i(t) = \mu(t) - 1/2$ que se muestra en la Fig.7.18b y c.

Consideremos primero la componente impar $x_i(t) = \mu(t) - 1/2$. Ya que $x_i'(t) = \delta(t)$, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}\right\} = j\omega X_1(\omega)$$

y puesto que la transformada de Fourier del impulso unitario es 1 obtenemos que:

$$X_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad \text{Ec. (7.29)}$$

Notemos que la función $x_1(t)$ es real e impar, por tanto la serial $X_1(\omega)$, debe ser una magnitud imaginaria pura e impar, como se verifica fácilmente en la Ec.(7.29). La transformada de Fourier de la componente par viene dada por:

$$X_p(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \pi\delta(\omega)$$

de manera que:

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

tal como lo habíamos afirmado en la Ec.(7.27). Notemos también que esta expresión concuerda con la propiedad de diferenciación, ya que:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{d\mu(t)}{dt}\right\} = j\omega \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = 1$$

puesto que $j\omega\pi\delta(\omega) = 0$.

Consideremos también la integral de tiempo de la señal $x(t) = e^{-\alpha t}$. Integrando directamente obtenemos:

$$A(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \mu(t)$$

De donde obtenemos su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\alpha} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega} \right] = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) + \frac{1}{-\omega^2 + j\alpha\omega} \end{aligned}$$

Por otro parte tenemos que:

$$X(\omega) = \mathcal{F} \{ e^{-\alpha t} \mu(t) \} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

De acuerdo a la Ec.(7.28) se tiene que $F(\omega)$ viene dada por:

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\alpha} \delta(\omega) + \frac{1}{-\omega^2 + j\alpha\omega}$$

que es igual al resultado obtenido anteriormente.

Ahora estamos listos para clarificar el procedimiento seguido en la solución del ejemplo propuesto para la propiedad de diferenciación, Sección 7.4, donde obtuvimos la transformada de Fourier de una señal trapezoidal.

La Ec.(7.14) afirma que:

$$\mathcal{F} \{ x'(t) \} = j\omega X(\omega)$$

donde $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$. Por tanto, se puede concluir que la transformada de Fourier de $x(t)$ es igual a $\mathcal{F}\{x'(t)\}$ dividida para $j\omega$. Resulta, sin embargo, que esto no siempre es posible, principalmente en aquellos casos en los cuales no se puede recuperar a $x(t)$ a partir de su derivada, como sucede, por ejemplo, con las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ mostradas en la Fig.7.19. Estas tres señales tienen exactamente la misma derivada $\delta(t+t_0)$. No es posible que podamos determinar a cada una de estas tres señales a partir de la transformada de Fourier de la misma señal $\delta(t+t_0)$. En efecto, hay un número infinito de señales que tienen idéntica derivada, y que difieren una de otra en constantes aditivas. Consecuentemente sus transformadas de Fourier diferirán en impulsos en $\omega=0$ de área $2\pi K$.

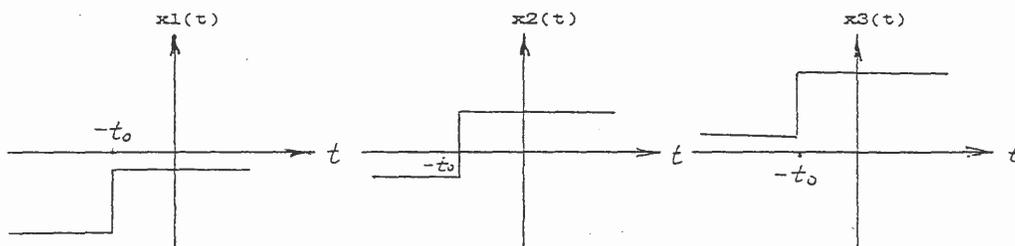


Fig.7.19 Las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ tienen en $t=-t_0$ una discontinuidad igual a uno. Por tanto, sus derivadas son todas iguales a $\delta(t+t_0)$.

Como regla práctica diríamos que no se puede obtener la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ a partir de la transformada de su derivada $x'(t)$, dividiendo ésta para $j\omega$ en aquellos casos en los cuales $x(t)$ difiera de otra señal en una constante aditiva. Caso contrario esta forma de obtener la transformada de Fourier de una señal es correcta.

Por ejemplo, consideremos la transformada de Fourier de la señal triángulo indicada en la Fig.7.20a. Para ello, derivemos dos veces consecutivas dicha señal, como se indica en la Fig.7.20b y

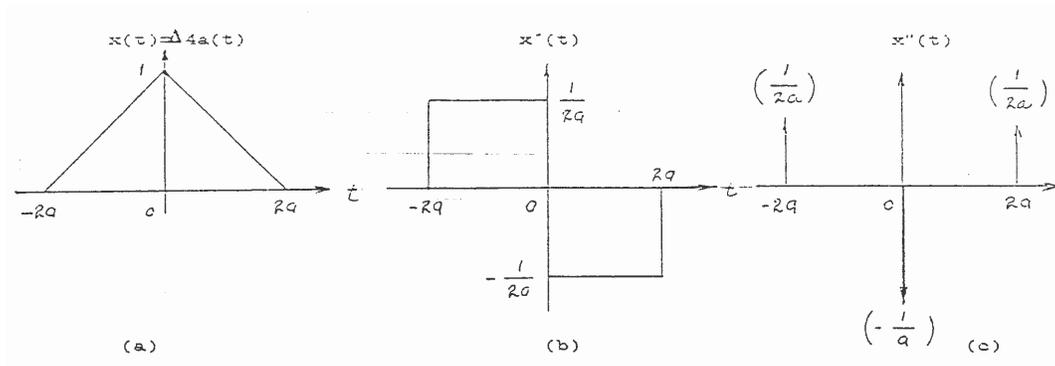


Fig.7.20 Señal triángulo. Primera y segunda derivadas.

De la. Fig.7.20c podemos escribir que:

$$(j\omega)^2 X(\omega) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2a) - 2\delta(t) + \delta(t-2a)] e^{-j\omega t} dt$$

de donde:

$$X(\omega) = \frac{e^{j2a\omega} - 2 + e^{-j2a\omega}}{-2a\omega^2} = 2 \frac{\text{sen}^2(a\omega)}{a\omega^2}$$

7.8 TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

En el Capítulo 6 estudiamos la forma de representar una señal periódica en series de Fourier, y en el presente capítulo hemos visto como una señal aperiódica puede representarse en una integral de Fourier. Sin embargo, en muchos problemas de análisis de sistemas se encuentran involucradas al mismo tiempo tanto señales periódicas como no periódicas. Por ejemplo, supongamos que la respuesta impulso de un sistema lineal invariante sea la señal mostrada en la Fig.7.21a. Queremos calcular la respuesta del sistema a la señal periódica $x(t)$ mostrada en la Fig.7.21b. En este caso nos encontramos con que un cálculo directo de la integral de convolución $x(t)*h(t)$ puede resultar inadecuado y algo complicado.

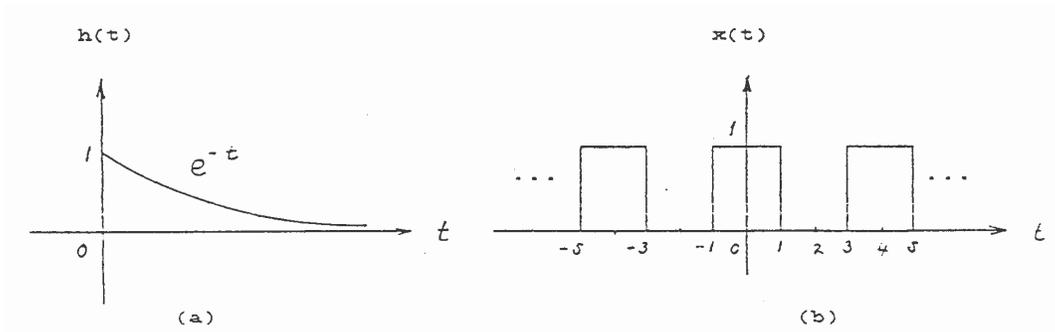


Fig.7.21 a) Respuesta impulsiva b) Señal de excitación

Las técnicas de transformación que hasta aquí hemos desarrollado no son aplicables, porque no conocemos como calcular la transformada de Fourier de señales periódicas.

Aunque las señales periódicas no son integrables en todo el intervalo de tiempo, de $-\infty$ a $+\infty$, la transformada de Fourier de señales periódicas que tienen un número finito de máximos y de mínimos y de discontinuidades en un intervalo finito de tiempo pueden ser definidas.

Para ello consideremos una señal periódica $x(t)$, la misma que puede representarse en una serie de Fourier, de la siguiente manera:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t}$$

Tomemos la transformada de Fourier de esta expresión:

$$X(\omega) = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega_0 t} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathcal{F} \left[e^{jn\omega_0 t} \right]$$

puesto que:

$$\mathcal{F} \{ e^{jn\omega_0 t} \} = 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$$

se tiene finalmente que:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{Ec. (7.30)}$$

De manera que la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos, cuyas áreas vienen dadas por el valor $2\pi x_n$ donde x_n son los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$.

Consideremos, por ejemplo, el tren de impulsos de la Fig.7.22a. Conocemos que los coeficientes de Fourier de esta señal vienen dados por:

$$x_n = \frac{1}{T}$$

por tanto su transformada de Fourier vendrá dada por:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - n\omega_0)$$

que se representa en la Fig.7.22b.

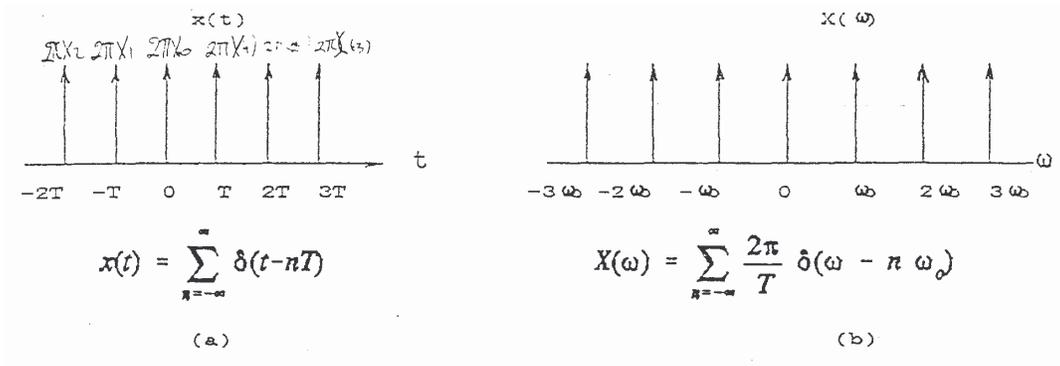


Fig.7.22 a) Tren de impulsos. B) Espectro de frecuencias

La transformada de Fourier de señales periódicas provee un método unificado en el dominio de la frecuencia, para el análisis de sistemas lineales invariantes estimulados tanto por señales periódicas como por señales no periódicas.

Como ejemplo calcularemos la convolución de las señales $x(t)$ y $h(t)$ mostradas en la Fig.7.21a y b, respectivamente, en el dominio de frecuencia. Conocemos que:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

En esta expresión:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Para determinar $X(\omega)$ debemos primero determinar los coeficientes de Fourier x_n de la señal $x(t)$. Para ello derivaremos la señal $x(t)$. De acuerdo a la Fig.7.23, tenemos que:

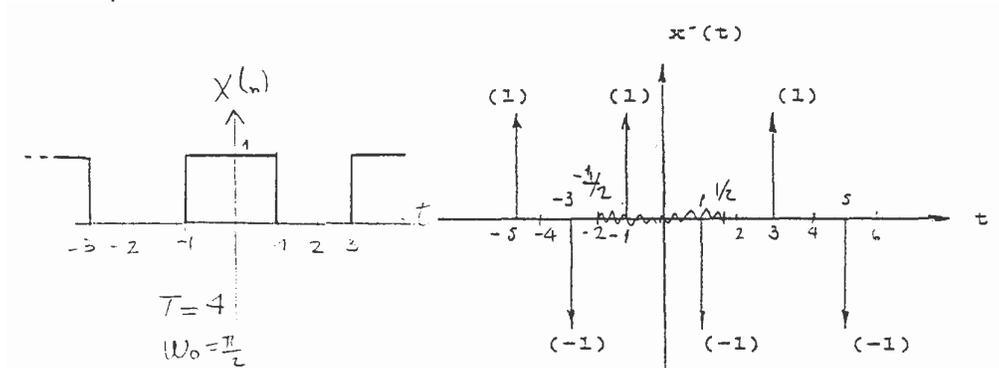


Fig.7.23 Derivada de la señal $x(t)$ de la Fig.7.22b

$$j\frac{\pi n}{2} x_n = \frac{1}{4} \int_{-1.5}^{1.5} [\delta(t+1) - \delta(t-1)] e^{-j\frac{\pi n}{2}t} dt = \frac{1}{4} \left[e^{j\frac{\pi n}{2}} - e^{-j\frac{\pi n}{2}} \right] = \frac{j}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

de donde:

Miscelánea de transformadas de Fourier

En este acápite consideraremos las transformadas de algunas expresiones que nos serán de utilidad en los ejemplos propuestos a continuación. Así:

$$\mathcal{F}\{t \mu(t)\} = j \frac{d}{d\omega} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = j\pi \delta'(\omega) + \frac{1}{(j\omega)^2}$$

También:

$$\mathcal{F}\{t^2 \mu(t)\} = j \frac{d}{d\omega} \left[j\pi \delta'(\omega) + \frac{1}{(j\omega)^2} \right] = -\pi \delta''(\omega) + \frac{2}{(j\omega)^3}$$

Y en general:

$$\mathcal{F}\{t^n \mu(t)\} = (j)^n \pi \delta^n(\omega) + \frac{n!}{(j\omega)^{n+1}}$$

Igualmente consideremos la transformada de Fourier de la señal signum de t:

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \mathcal{F}\{\mu(t) - \mu(-t)\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \left[\pi \delta(-\omega) + \frac{1}{-j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega}$$

También de la señal:

$$\mathcal{F}\{t \operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{(j\omega)^2}$$

Y en general:

$$\mathcal{F}\{t^n \operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2 \cdot n!}{(j\omega)^{n+1}}$$

Las transformadas de estas funciones las presentamos en la Tabla 7.1.

7.9 DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE SUS FUNCIONES DE TRANSFERENCIAS

Un sistema lineal invariante descrito mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden «m» cuya forma general es:

Tabla 7.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\mu(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
$t^n \mu(t)$	$(j)^n \pi \delta^n(\omega) + n!/(j\omega)^{n+1}$
$\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
$t^n \text{sgn}(t)$	$2 \cdot n!/(j\omega)^{n+1}$
$\cos(\omega t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$
$\text{sen}(\omega t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$
$e^{-\alpha t} \mu(t)$	$1/(\alpha+j\omega)$
$t^n e^{-\alpha t} \mu(t)$	$n!/(\alpha+j\omega)^{n+1}$
$G_{2a}(t)$	$[2 \text{sen}(a\omega)]/\omega$
$\text{sen}(at)/\pi t$	$G_{2a}(\omega)$
$\Delta_a(t)$	$[2 \text{sen}^2(a\omega)]/a\omega^2$
$\text{sen}^2(at)/\pi t^2$	$\Delta_{4a}(\omega)$
$e^{-\alpha t }$	$2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$
$\alpha/(\alpha^2 + t^2)$	$\pi e^{-\alpha \omega }$

$$\begin{aligned} & \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \\ & = b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r} + b_{r-1} \frac{d^{r-1} x(t)}{dt^{r-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad \text{Ec. (7.31)} \end{aligned}$$

puede ser adecuadamente tratado en el dominio de frecuencia determinando su función de transferencia como la relación de la transformada de Fourier de la señal de salida a la transformada de Fourier de la señal de entrada, así:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

de donde:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Tomando la transformada de Fourier término a término de la Ec.(7.31), obtenemos:

$$\begin{aligned} & [(j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] Y(\omega) = \\ & = [b_r (j\omega)^r + b_{r-1} (j\omega)^{r-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0] X(\omega) \end{aligned}$$

de donde:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_r (j\omega)^r + b_{r-1} (j\omega)^{r-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad \text{Ec. (7.32)}$$

Como podemos observar, la función de transferencia es una función racional, esto es, una relación de polinomios en $(j\omega)$, cuyos coeficientes corresponden a los coeficientes de la ecuación diferencial. De manera que, la función de transferencia puede escribirse directamente a partir de la ecuación diferencial. Si escribimos a la Ec.(7.32) como:

$$Y(\omega) = \frac{b_r (j\omega)^r + b_{r-1} (j\omega)^{r-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} X(\omega) \quad \text{Ec. (7.33)}$$

obtenemos una forma de resolver la ecuación diferencial en el dominio, de frecuencia. Consideremos el siguiente ejemplo: sea la ecuación diferencial:

$$y''(t) + 3y'(t) + \frac{9}{4}y(t) = 3x''(t) + 2x'(t)$$

donde $x(t)$ es la señal indicada a continuación en la Fig.7.24.

Asumiremos que el sistema se halla inicialmente en reposo.

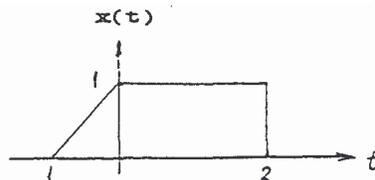


Fig.7.24 Señal de excitación $x(t)$

La función de transferencia viene dada por la siguiente ecuación:

$$H(\omega) = \frac{3(j\omega)^2 + 2(j\omega)}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + \frac{9}{4}} = \frac{(j\omega)(3j\omega + 2)}{\left(j\omega + \frac{3}{2}\right)^2}$$

Para obtener la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, derivaremos a esta señal dos veces consecutivas, como se indica en la Fig.7.25.

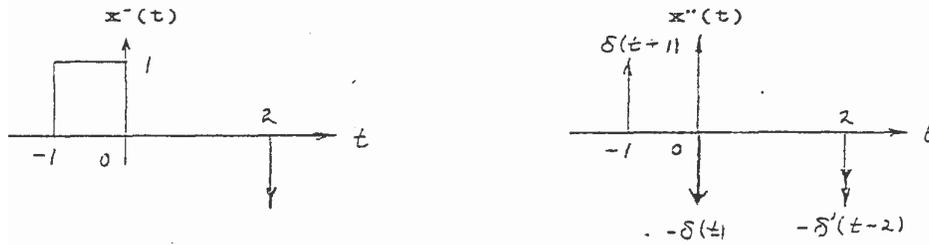


Fig.7.25 Señales $x'(t)$ y $x''(t)$

De la señal x obtenemos que:

$$(j\omega)^2 X(\omega) = e^{j\omega} - 1 - (j\omega) e^{-2j\omega}$$

de donde:

$$X(\omega) = \frac{e^{j\omega} - 1}{(j\omega)^2} - \frac{e^{-2j\omega}}{j\omega}$$

De manera que:

$$Y(\omega) = \frac{3(j\omega) + 2}{(j\omega) \left[(j\omega) + \frac{3}{2} \right]^2} (e^{j\omega} - 1) - \frac{3(j\omega) + 2}{\left[(j\omega) + \frac{3}{2} \right]^2} e^{-2j\omega}$$

La transformada inversa de Fourier de la primera fracción racional, de acuerdo al teorema del residuo viene dada para $t > 0$ por:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{3(j\omega) + 2}{j\omega [j\omega + 3/2]^2} \right\} = \left\{ \frac{[3(j\omega) + 2] e^{j\omega t}}{(j\omega + 3/2)^2} \right\}_{j\omega=0} + \frac{d}{d(j\omega)} \left\{ \frac{[3(j\omega) + 2] e^{j\omega t}}{j\omega} \right\}_{j\omega=-\frac{3}{2}}$$

de donde:

$$= \frac{8}{9} + \left[\frac{\{ t(3j\omega+2)e^{j\omega t} + 3e^{j\omega t} \}(j\omega) - (3j\omega+2)e^{j\omega t}}{j\omega} \right]_{j\omega = -\frac{3}{2}} =$$

$$= \left[\frac{8}{9} + \left(\frac{5}{3}t - \frac{8}{9} \right) e^{-\frac{3}{2}t} \right] \mu(t) = f_1(t)$$

Igualmente, la transformada inversa de la segunda fracción racional para $t > 0$ viene dada por:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{3j\omega+2}{(j\omega+3/2)^2} \right\} = \frac{d}{dj\omega} \left[(3j\omega+2)e^{j\omega t} \right]_{j\omega = -\frac{3}{2}} = \left[t(3j\omega+2)e^{j\omega t} + 3e^{j\omega t} \right]_{j\omega = -\frac{3}{2}} =$$

$$= \left(-\frac{5}{2}t + 3 \right) e^{-\frac{3}{2}t} \mu(t) = f_2(t)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$y(t) = f_1(t+1) - f(t) - f_2(t-2) \quad o :$$

$$y(t) = \frac{1}{9} \left[8 + (15t+7) e^{-\frac{3}{2}(t+1)} \right] \mu(t+1) - \frac{1}{9} \left[8 + (15t-8) e^{-\frac{3}{2}t} \right] \mu(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(5t-11) e^{-\frac{3}{2}(t-2)} \right] \mu(t-2)$$

La respuesta impulsiva de un sistema se puede obtener tomando la transformada inversa de Fourier de la función de transferencia del sistema. Consideremos por ejemplo la función de transferencia

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega)^2 + (5/2)(j\omega) + 1} = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 1/2)(j\omega + 2)}$$

De manera que para $t > 0$, tenemos que:

$$h(t) = \frac{(j\omega + 10)e^{j\omega t}}{j\omega + 2} \Big|_{j\omega = -\frac{1}{2}} + \frac{(j\omega + 10)e^{j\omega t}}{j\omega + 1/2} \Big|_{j\omega = -2} = \frac{19}{3} e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{16}{3} e^{-2t} \quad \forall t > 0$$

o:

$$h(t) = \frac{1}{3} \left(19 e^{-\frac{1}{2}t} - 16 e^{-2t} \right) \mu(t)$$

También, si conocemos la respuesta impulsiva o la respuesta al escalón unitario, o en general la respuesta de un SLI a una señal de entrada dada, podemos determinar la correspondiente ecuación diferencial, calculando la función de transferencia del sistema como la relación de la transformada de Fourier de la señal de salida a la transformada de Fourier de la señal de entrada, por tanto hemos determinado la ecuación diferencial.

Consideremos por ejemplo que la respuesta impulsiva de un SLI viene dada por:

$$h(t) = 2(1 - 2t) e^{-2t} \mu(t)$$

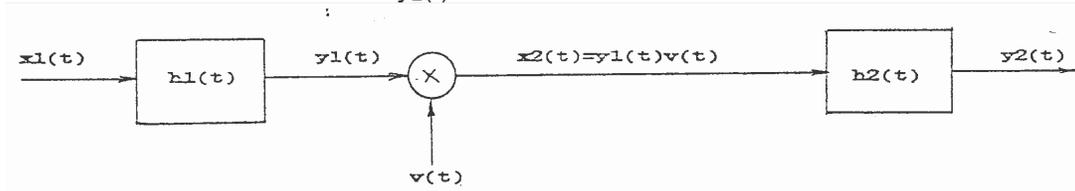
Entonces, la función de transferencia será:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{j\omega + 2} - \frac{4}{(j\omega + 2)^2} = \frac{2j\omega}{(j\omega + 2)^2} = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 4}$$

y la ecuación diferencial vendrá dada por:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2x'(t)$$

Finalmente consideremos el sistema mostrado en la Fig.7.26. Se trata de determinar la señal de salida $y_2(t)$.



Donde:

$$h_1(t) = t e^{-t} \mu(t)$$

$$h_2(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

$$v(t) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

y $x_1(t)$ es la señal periódica indicada en la Fig.7.27.

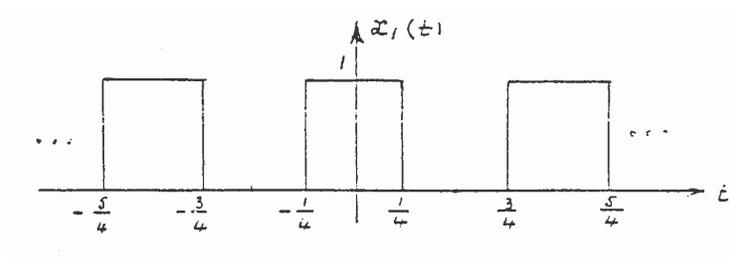


Fig.7.27 Señal periódica de entrada

Solución:

En el dominio de la frecuencia tenemos que:

$$Y_2(\omega) = X_2(\omega) H_2(\omega)$$

donde:

$$X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * V(\omega)$$

y:

$$Y_1(\omega) = X_1(\omega) H_1(\omega)$$

$X_1(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal periódica de la Fig.7.26 y que viene dada por:

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{1n} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Para calcular los coeficientes de Fourier x_{1n} de la señal periódica $x_1(t)$, derivaremos esta señal. La señal $x_1'(t)$ se muestra en la Fig.7.28.

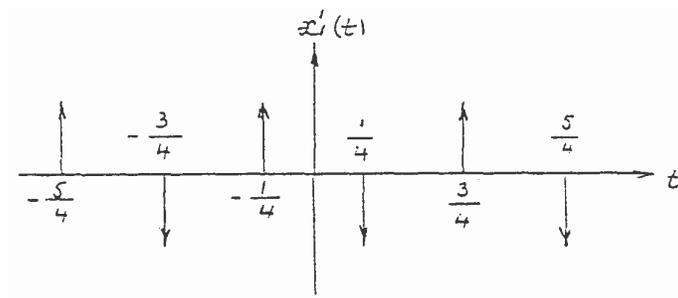


Fig.7.28 Derivada de la señal de entrada

Por tanto, los coeficientes de Fourier vendrán dados por:

$$x_{1n} = \frac{1}{j2\pi n} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\delta\left(t + \frac{1}{4}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{4}\right) \right] e^{-j2\pi n t} dt$$

de donde:

$$x_{1n} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \quad \forall n \neq 0$$

y:

$$x_{1n} = \frac{1}{2} \quad \text{para } n = 0$$

De manera que:

$$X_1(\omega) = \pi\delta(\omega) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} [\delta(\omega + 2\pi n) + \delta(\omega - 2\pi n)]$$

La función de transferencia del primer subsistema viene dada por:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^2}$$

y la salida del Primer subsistema por:

$$\begin{aligned} Y_1(\omega) &= X_1(\omega)H_1(\omega) = \\ &= \pi\delta(\omega) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n} \left[\frac{1}{(1 - j2\pi n)^2} \delta(\omega + 2\pi n) + \frac{1}{(1 + j2\pi n)^2} \delta(\omega - 2\pi n) \right] \end{aligned}$$

La transformada de la señal de entrada al segundo subsistema viene dada por:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * V(\omega) = \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * j\pi [\delta(\omega + 3\pi/2) - \delta(\omega - 3\pi/2)] = \\ &= \frac{j}{2} \left[Y_1\left(\omega + \frac{3\pi}{2}\right) - Y_1\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

o:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{j\pi}{2} \left[\delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2}\right) - \delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) \right] + \\ &+ j\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n(1 - j2\pi n)^2} \left[\delta\left(\omega + 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) - \delta\left(\omega + 2\pi n - \frac{3\pi}{2}\right) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\text{sen}(\pi n/2)}{\pi n(1 + j2\pi n)^2} \left[\delta\left(\omega - 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) - \delta\left(\omega - 2\pi n - \frac{3\pi}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

De manera que la señal $X_2(\omega)$ está constituida por un número infinito de impulsos de diferentes amplitudes y que ocurren para valores discretos de ω .

La función de transferencia del segundo subsistema constituye un filtro pasabajos, cuya expresión es:

$$H_2(\omega) = G_{2\pi}(\omega)$$

la misma que se indica en la Fig.7.29.

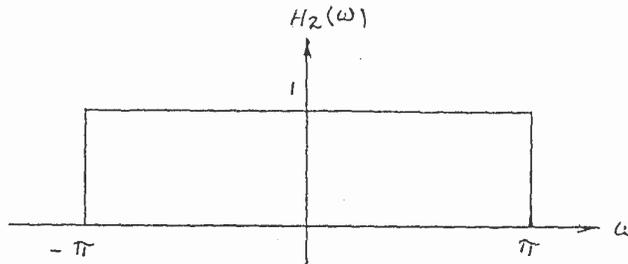


Fig.7.29 Función de transferencia del segundo subsistema

Como podemos ver en este gráfico, los impulsos de $X_2(\omega)$ que no serán rechazados son aquellos que ocurren entre $-\pi$ y $+\pi$, lo cual es cierto sólo para $n=1$. Por esta razón resulta que:

$$\begin{aligned} Y_2(\omega) &= X_2(\omega) G_{2\pi}(\omega) = \frac{j}{(1+j2\pi)^2} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{j}{(1-j2\pi)^2} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{j}{(1+4\pi^2)^2} \left\{ [(1-4\pi^2) - j4\pi] \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - [(1-4\pi^2) + j4\pi] \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \right\} = \\ &= \frac{(4\pi^2 - 1)}{\pi (1+4\pi^2)^2} j\pi \left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{4}{(1+4\pi^2)^2} \pi \left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

de donde:

$$y_2(t) = \frac{(4\pi^2 - 1)}{\pi (1+4\pi^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \frac{4}{(1+4\pi^2)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

7.10 DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA EN SEÑALES APERIODICAS

En el Capítulo 6, encontramos que la energía total en una señal $x(t)$ viene dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

la misma que la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] X^*(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad \text{Ec. (7.31)}
 \end{aligned}$$

resultado que se conoce como la *igualdad de Parseval*. Por ejemplo, consideremos la señal:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$$

entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$

por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+j\omega} \right|^2 d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}
 \end{aligned}$$

La función:

$$\frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2$$

se denomina el espectro densidad de energía de $x(t)$, porque la Ec (7.33) da la energía de las diferentes componentes de frecuencia entre ω y $\omega+d\omega$. Por ejemplo, la energía en un impulso se distribuye igualmente entre todas sus

componentes de frecuencia y la energía de una señal constante en el tiempo se concentra únicamente en su componente de dc.

En forma similar al caso de las seriales periódicas, definiremos la función autocorrelación de una señal no periódica como:

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)x(\tau+t) dt$$

Dejamos al lector que demuestre, que la transformada de Fourier de la señal $r(t)$ es:

$$\frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2$$

6.9 BIBLIOGRAFIA

- [1] **HSU, H.P.:** “Análisis de Fourier”, Fondo Educativo Internacional S.A, 1973.
- [2] **LAGO, G., y L.M. BENNINGFIELD:** “Teoría de Sistemas y Circuitos”, Editorial limusa, México, 1964.
- [3] **LATHI, B.P.:** “Signals, Systemas and Communication”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- [4] **LIU, C.L, y J.W.S. LIU:** “Linear Systems Analysis’, Mc Graw Hill Book Cornpany, New York, 1975.
- [5] **OPPENHEIM A.V., y ALAN S. WILLSKY:** “Señales y Sistemas, Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México, 1994.
- [6] **PAPOULIS, A.:** “Circuits and Systems a Approach”, Holt-Saunders Japan, Ltd., Tokyo, 1981.
- [6] **POULARIKAS, A.D., y S. SEELY:** “Signals and Systems”, Pws Engineering, Boston, 1984.
- [7] **ZIEMER, R., TRANTER, W. y R. FANNIN:** “Signals and Systems: Continuos and Discrete”, Macmillan Publishing Company, New York, 1993

CAPITULO VIII

LA TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE

Indice	Página	
8.1	Introducción	6—1
8.2	La transformada bilateral de Laplace	8—1
8.3	La transformada inversa bilateral de Laplace	8—9
8.4	Propiedades de la transformada bilateral de Laplace	8—12
8.5	Transformada bilateral de Laplace de funciones singulares	8—20
8.6	Propiedad de convolución	8—23
8.7	Funciones de transferencia de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales	8—31
8.8	Relación entre la transformada Z y la transformada de Laplace	8—36
8.9	La transformada unilateral de Laplace	6—39
8.10	Propiedades de la transformada unilateral de Laplace	8—41
8.11	Transformada unilateral de Laplace de señales periódicas causales	8—46
8.12	Teorema del valor inicial y teorema del valor final	8—46
8.13	Convención alterna para la transformada unilateral de Laplace	8—52
8.14	Bibliografía	8—54

CAPITULO VIII

LA TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE

8.1 INTRODUCCIÓN

Como habíamos discutido en el Capítulo 6, cuando la región de absoluta convergencia de un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo contiene el eje $j\omega$, funciones exponenciales complejas de la forma $\exp[j\omega t]$ son funciones propias del sistema. En este caso, la transformada de Fourier o la representación de señales en series de Fourier, son más útiles en el estudio de la relación entrada—salida de un sistema. En el presente Capítulo estudiaremos una extensión natural de los conceptos desarrollados en los Capítulos 6 y 7, cuando la región de absoluta convergencia de un sistema no incluye el eje $j\omega$. Estudiaremos en este caso una representación alterna para señales de tiempo continuo como integrales de funciones exponenciales complejas de la forma e^{st} en las que el coeficiente exponencial s son números complejos, tales que e^{st} son funciones propias del sistema; esto es, los números complejos s deben estar localizados en la región de absoluta convergencia del sistema. Más aún, como veremos posteriormente, muchas señales de tiempo que no tienen transformada de Fourier pueden expresarse como integrales de funciones exponenciales complejas de la forma e^{st} . Consecuentemente, tal representación da mayor flexibilidad a las técnicas de análisis de sistemas lineales invariantes. También mostraremos en el presente Capítulo la relación entre la transformada Z para señales discretas y la transformada de Laplace para señales continuas, completando el cuadro general de la teoría de las transformaciones tanto para señales discretas como para señales continuas.

8.2 LA TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE

Estudiaremos ahora como una señal $x(t)$ puede expresarse como una integral de funciones exponenciales complejas de la forma e^{st} para números complejos s localizados a lo largo de una línea vertical ubicada en el plano complejo s . Con este fin consideremos la señal:

$$x(t)e^{-st}$$

donde σ_0 es una constante real. Si $x(t)$ tiene un número finito de máximos, mínimos y de discontinuidades en un intervalo finito de tiempo, y si la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt$$

es finita, entonces la transformada de Fourier de la señal

$$x(t)e^{-\sigma_0 t}$$

existe. Denotaremos a la transformada de Fourier de esta señal por $X(\omega)$, la misma que viene dada por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma_0 + j\omega)t} dt \quad \text{Ec. (8.1)}$$

mientras que su transformada inversa viene dada por:

$$x(t)e^{-\sigma_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

de donde:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{(\sigma_0 + j\omega)t} d\omega \quad \text{Ec. (8.2)}$$

Haciendo en las Ecs.(8.1) y (8.2) $s = \sigma_0 + j\omega$ obtenemos:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad \text{Ec. (8.3)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad \text{Ec. (8.4)}$$

La Ec.(8.3) se denomina la transformada bilateral de Laplace de la señal de tiempo $x(t)$; y la Ec.(8.4) la transformada inversa correspondiente. Aunque la derivación de las Ecs.(8.3) y (8.4) es informal, se puede demostrar que si $x(t)$ es una señal de tiempo de variación limitada y si la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}| dt$$

es finita para algún valor de s situado en el plano complejo s , entonces la transformada de Laplace de $x(t)$ definida mediante la Ec.(8.3) existe. Más aún, $x(t)$ se puede recobrar a partir de $X(s)$ evaluando la integral de la Ec.(8.4) a lo

largo de una línea vertical ubicada en el plano complejo s , desde $s=\sigma_0-j\infty$ hasta $s=\sigma_0+j\infty$. La región en el plano s , que contiene todos los valores de la variable compleja s , tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}| dt < \infty \quad \text{Ec. (8.5)}$$

se denomina la región de absoluta convergencia de la señal $x(t)$. Como hicimos en el Capítulo 5 con la transformada Z, nos referimos a la región de absoluta convergencia de la señal $x(t)$, como la región de absoluta convergencia de $X(s)$.

Debería notarse que la transformada de Laplace $X(s)$ de una señal de tiempo $x(t)$, es una función definida a lo largo de una línea vertical localizada en la región de absoluta convergencia de $x(t)$ [puesto que el coeficiente exponencial s de la función e^{at} en las Ecs. (8.3) y (8.4) son puntos localizados a lo largo de la abscisa de ecuación $\text{Re}\{s\}=\sigma_0$]. No obstante ello, las Ecs.(8.3) y (8.4) sugieren una extensión en la definición, tal que $X(s)$ esté definida como una función de la variable compleja s en toda la región de absoluta convergencia de $x(t)$. No sólo que tal extensión es posible, sino que se puede demostrar que $X(s)$ es una función analítica dentro de su región de absoluta convergencia.

Como lo verificaremos con diferentes ejemplos, la región de absoluta convergencia de una señal $x(t)$, al igual de lo que sucede con la RAC¹ de señales de tiempo discreto $x[n]$, depende de la forma cómo se encuentre definida $x(t)$.

1. Rac de señales casuales:

Consideremos, por ejemplo, la transformada de Laplace de una señal causal, tal como:

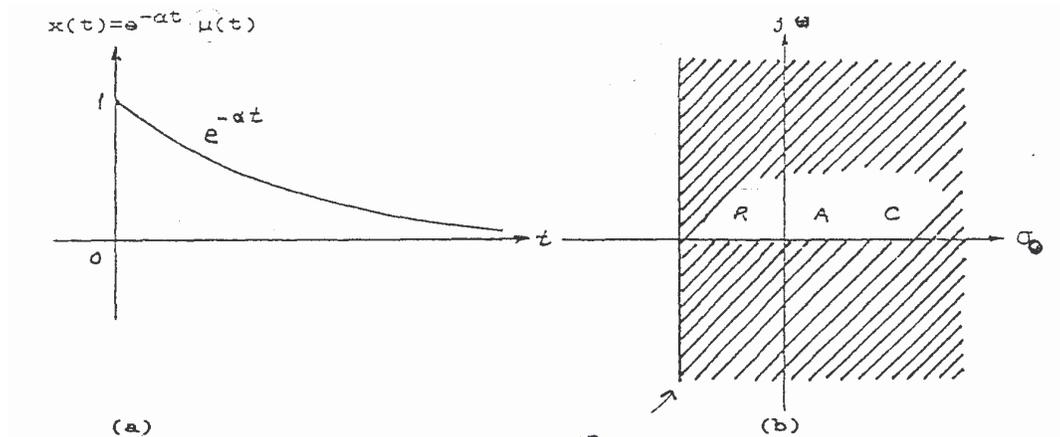
$$x(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$$

que se muestra en la Fig.8.1a. Primero notemos que la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |e^{-\alpha t} e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma_0+\alpha)t} dt$$

es finita si el coeficiente exponencial $\sigma_0+\alpha$ es positivo, $\sigma_0+\alpha>0$, De manera que la RAC dada por la expresión $\text{Re}\{s\}>-\alpha$ que corresponde al área sombreada en la Fig.8.1b.

¹ RAC = Región de Absoluta Convergencia

Fig.8.1 a) Señal exponencial causal. b) RAC de $x(t)$

Su transformada de Laplace vendrá dada por:

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+\alpha} \left[e^{-(\alpha+s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} ; \Re\{s\} > -\alpha$$

En conclusión: la RAC de una señal causal es un semiplano infinito a la derecha de una línea vertical. Esta línea vertical que delimita la RAC debe pasar al menos por un polo de $X(s)$. A este semiplano lo denominaremos semiplano a derecha.

2. Rac de señales no causales:

Consideremos ahora una señal $x(t)$ no causal, definida para todo $t < 0$, como por ejemplo la señal:

$$x(t) = e^{\alpha t} \mu(-t)$$

que se indica en la Fig.8.2a. La integral:

$$\int_{-\infty}^0 |x(t) e^{-st}| dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(\sigma_0 - \alpha)t} dt$$

será finita si el coeficiente exponencial $(\sigma_0 - \alpha)$ es menor que cero. Esto es, si:

$$\Re\{s\} < \alpha$$

En consecuencia: la RAC de una señal no causal es un semiplano infinito a la izquierda de la abscisa $\Re\{s\} = \alpha$. Esta abscisa que delimita la RAC pasa por un polo de $X(s)$. A esta región la denominaremos un semiplano a izquierda.

La transformada de Laplace de esta señal viene dada por:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \mu(-t)\} = \int_{-\infty}^0 e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{-1}{s-\alpha} ; \Re\{s\} < \alpha$$

En la Fig.8.2b se muestra la región de absoluta convergencia de $x(t)$.

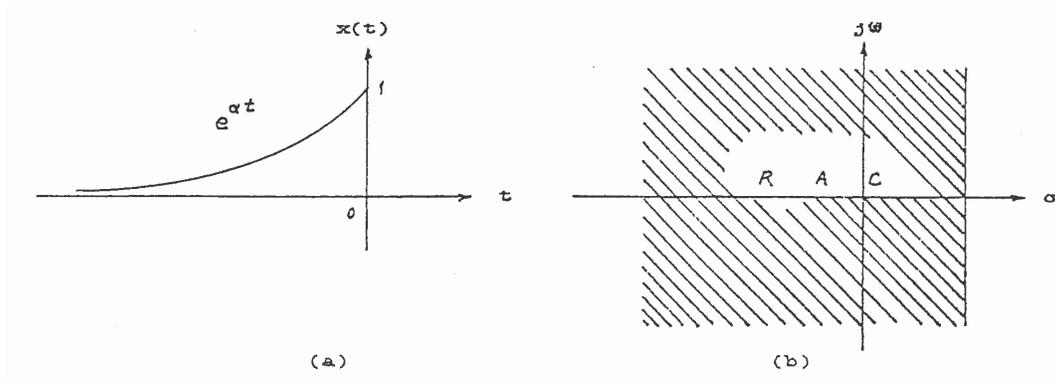


Fig.8.2 a) Señal no causal. b) RAC de la misma

3. Rac de señales infinitas:

Consideremos ahora la señal $x(t)$ definida en todo el intervalo de tiempo, de $-\infty$ a $+\infty$, por:

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$$

Primero notemos que esta señal consta de dos expresiones diferentes, una para $t < 0$ y otra para $t > 0$. A esta forma de señales las denominaremos señales de duración infinita. La transformada de Laplace de esta señal viene dada por:

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \mu(t)\} + \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \mu(-t)\} = \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s-\alpha}$$

La RAC es el área común a las regiones $\Re\{s\} > -\alpha$ (RAC del primer término) y $\Re\{s\} < \alpha$ (RAC del segundo término). Por tanto:

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha|t|}\} = \frac{-2\alpha}{s^2 - \alpha^2} ; -\alpha < \Re\{s\} < \alpha$$

La RAC corresponde a una franja de altura infinita, limitada por dos líneas verticales, cada una de ellas pasa por un polo de $X(s)$, como se indica en la Fig.8.3b.

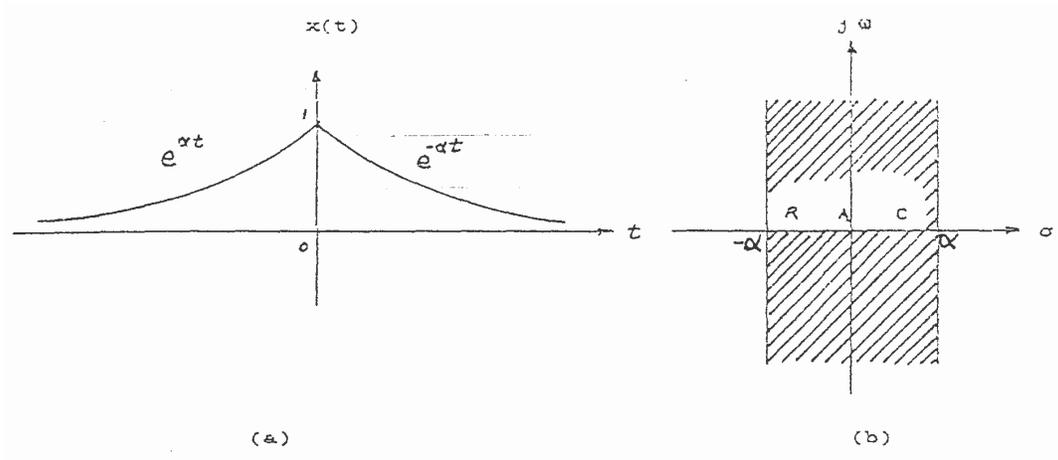


Fig.8.3 a) Señal de duración infinita. B) Su RAC

La RAC de una señal $x(t)$ de duración infinita será por tanto, una franja infinita, si existe una región de convergencia común, caso contrario no existirá una RAC común y la señal $x(t)$ no tiene transformada bilateral de Laplace. Así, por ejemplo, la señal:

$$x(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ e^{-\alpha t} & t < 0 \end{cases}$$

Puesto que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(\alpha+1)t} dt + \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t} dt$$

la primera integral es finita para $\text{Re}\{s\} < -1$ y la segunda para $\text{Re}\{s\} > 0$, no existe una región de absoluta convergencia común, por tanto, la transformada bilateral de Laplace de esta señal no existe².

4. Rac de señales de duración limitada

Consideremos ahora una señal de duración limitada, tal como la función:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como la integral:

² Si bien esta señal no posee transformada bilateral de Laplace, su transformada unilateral si está definida, como lo veremos al final de este Capítulo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt = \int_0^2 |e^{-st} \sin(\pi t)| dt$$

es finita para todo valor de s , la RAC de $x(t)$ es todo el plano complejo s . Su transformada de Laplace viene dada por:

$$X(s) = \frac{\pi(1 - e^{-2s})}{s^2 + \pi^2} ; \text{RAC: Todo el plano } s$$

De manera que una señal de tiempo de duración limitada tiene una RAC que es igual a todo el plano complejo s .

Diferentes señales de tiempo pueden tener la misma expresión analítica como transformada bilateral de Laplace, pero diferirán en sus regiones de absoluta convergencia. Consideremos, por ejemplo, las señales:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} \mu(t) \quad \rightarrow \quad X_1(s) = \frac{1}{s + \alpha} ; \quad \Re\{s\} > -\alpha$$

$$x_2(t) = -e^{-\alpha t} \mu(-t) \quad \rightarrow \quad X_2(s) = \frac{1}{s + \alpha} ; \quad \Re\{s\} < -\alpha$$

Estas dos señales, siendo diferentes funciones de tiempo, tienen igual transformada de Laplace, pero sus regiones de absoluta convergencia son diferentes, como se indican en la Fig.8.4a y b, respectivamente.

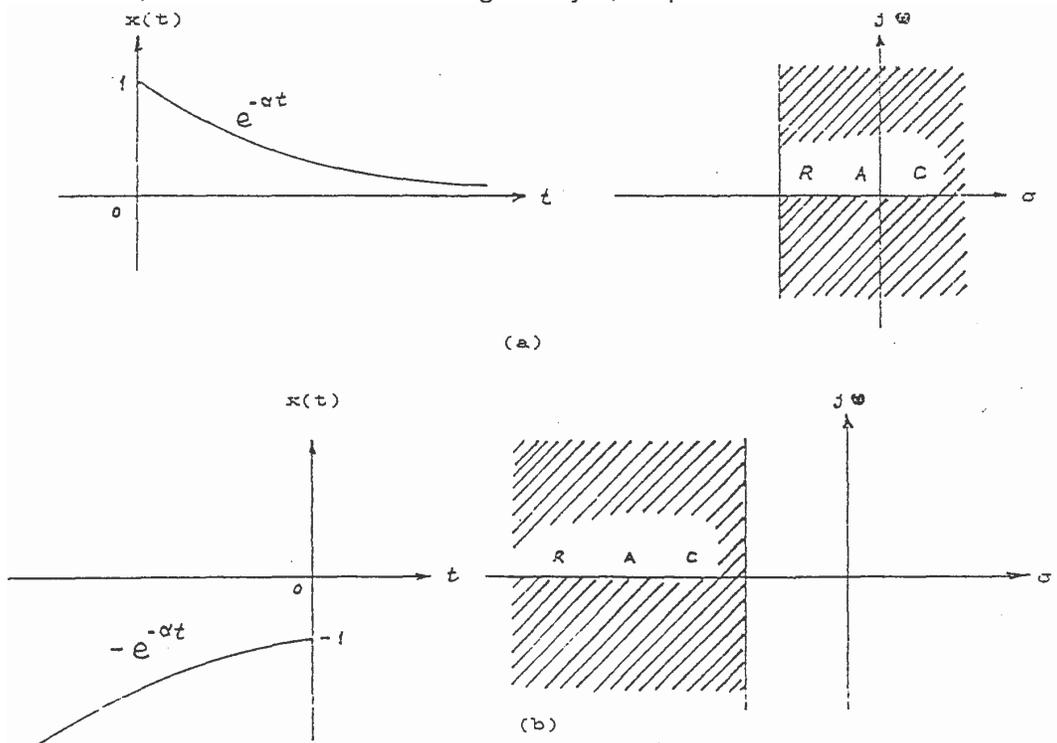


Fig.8.4 Regiones de absoluta convergencia de dos señales Diferentes, pero que tienen igual transformada de Laplace.

Este ejemplo indica claramente, que para obtener en forma única una señal $x(t)$ como resultado del proceso de transformación inversa, es necesario conocer tanto la expresión $X(s)$ como su región de absoluta convergencia. En otras palabras, la integral de línea de la Ec.(8.4) podrá ser evaluada en forma unívoca, sólo si la RAC de $X(s)$ está definida.

Antes de finalizar esta sección, es necesario clarificar un punto. Debe ser claro ahora que la transformada de Fourier es un caso especial de la transformada bilateral de Laplace. En nuestro estudio de la transformada de Fourier, no especificamos la región de absoluta convergencia de una señal, y únicamente afirmamos que ésta debía incluir el eje $j\omega$. De manera que alguien se podría preguntar sobre la posibilidad que dos señales diferentes de tiempo tengan la misma transformada de Fourier, pero cada una de ellas con regiones de absoluta convergencia diferentes, las cuales a su vez incluyan al eje $j\omega$.

Una pregunta más general implicaría la posibilidad que dos señales de tiempo diferentes tengan la misma transformada de Laplace con regiones de absoluta convergencia que se superpongan.

Las respuestas a estas interrogantes son negativas. Para probar esta afirmación preguntémonos ¿qué regiones de absoluta convergencia posibles están asociadas con una expresión $X(s)$ dada? Es fácil observar que una posible región de absoluta convergencia es una franja vertical en cuyo interior no existe ningún polo de $X(s)$. Más aún, como lo hemos verificado con diferentes ejemplos, en cada uno de sus bordes (excepto en el infinito) debe ubicarse al menos un polo de $X(s)$. Por ello, la totalidad del plano complejo s queda dividido en franjas verticales por los diferentes polos de $X(s)$, tal como se ilustra en la Fig.8.5. Cada franja vertical excluye a todas las demás, y constituye una posible región de absoluta convergencia. Consecuentemente, no es posible que dos señales diferentes tengan la misma transformada de Laplace y regiones de absoluta convergencia que se superpongan.

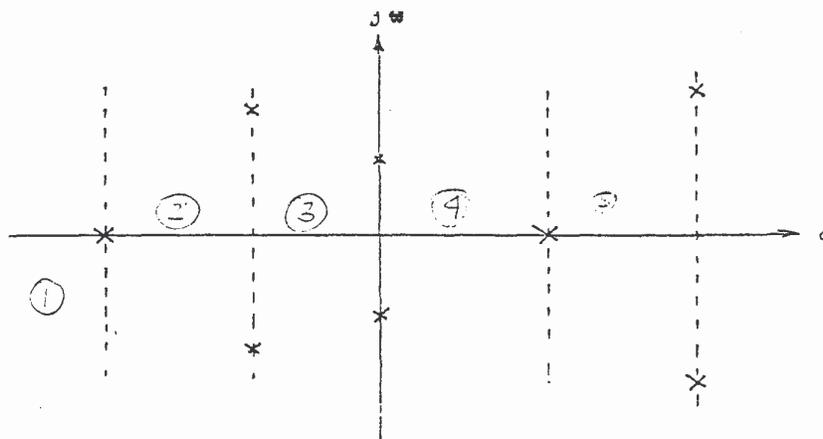


Fig.8.5 División del plano complejo s en franjas verticales por los polos de $X(s)$

8.3 TRANSFORMADA INVERSA BILATERAL DE LAPLACE

Dada la transformada de Laplace $X(s)$ junto con su región de absoluta convergencia obtener la señal $x(t)$ evaluando la integral de la Ec.(8.4) Recordemos que la integral de la Ec.(8.4) es una integral de línea, la misma que se evalúa a lo largo de una línea vertical situada en la región de absoluta convergencia de $X(s)$, de ecuación $\text{Re}\{s\}=\sigma_0$ la cual se denomina «la abscisa de integración». De acuerdo con la teoría de funciones de variable compleja, si $X(s)$ tiende a cero a medida que s tiende a infinito, entonces la integral de la Ec.(8.4) se puede evaluar mediante el teorema del residuo, de la siguiente forma:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s) e^{st} ds =$$

$$= \begin{cases} \sum \text{ de los residuos de } X(s)e^{st} \text{ en los polos ubicados a la izquierda} \\ \text{de la abscisa de integración } \Re\{s\} = \sigma_0 ; \text{ para } t > 0 \\ \\ -\sum \text{ de los residuos de } X(s)e^{st} \text{ en los polos ubicados a la derecha} \\ \text{de la abscisa de integración } \Re\{s\} = \sigma_0 ; \text{ para } t < 0 \end{cases} \quad \text{Ec. (8.6)}$$

donde el residuo de la función $X(s)e^{st}$ en un polo simple $s=s_0$ viene dado por:

$$\left\{ \text{Residuo de } X(s) e^{st} \text{ en } s=s_0 \right\} = \left[(s - s_0) X(s) e^{st} \right]_{s=s_0}$$

y el residuo de la función $X(s)e^{st}$ en un polo $s=s_0$ de multiplicidad k viene dado por:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Residuo de } X(s)e^{st} \text{ en el} \\ \text{polo } k \text{ múltiple en } s=s_0 \end{array} \right] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[(s-s_0)^k X(s) e^{st} \right]_{s=s_0}$$

El hecho de evaluar la integral de línea de la Ec.(8.4), calculando los residuos de la función $X(s)e^{st}$, nos permite concluir que el valor de dicha integral es el mismo para cualquier abscisa $\text{Re}\{s\}=\sigma_0$ situada en la región de absoluta convergencia, a lo largo de la cual se efectúa la integración.

A continuación consideraremos algunos ejemplos ilustrativos. Sea la expresión:

$$X(s) = \frac{2}{3} \frac{s+2}{(s+1)^2} ; \Re\{s\} > -1$$

Para obtener $x(t)$ de la expresión de $X(s)$ y de su RAC evaluaremos la integral:

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \left[\frac{2}{3} \frac{s+2}{(s+1)^2} \right] e^{st} ds$$

a lo largo de una abscisa de integración que debe estar ubicada en la RAC $[\Re(s) > -1]$, como se indica en la Fig.8.6. El polo doble de $X(s)$, en $s=-1$, se encuentra ubicado a la izquierda de la abscisa de integración, de manera que de acuerdo con la Ec.(8.6) se tiene para $t > 0$ que:

$$x(t) = \frac{2}{3} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+2) e^{st}}{(s+1)^2} \right]_{s=-1} = \frac{2}{3} (t+1) e^{-t}$$

y para $t < 0$, $x(t) = 0$. De modo que:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} (t+1) e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \frac{2}{3} (t+1) e^{-t} \mu(t)$$

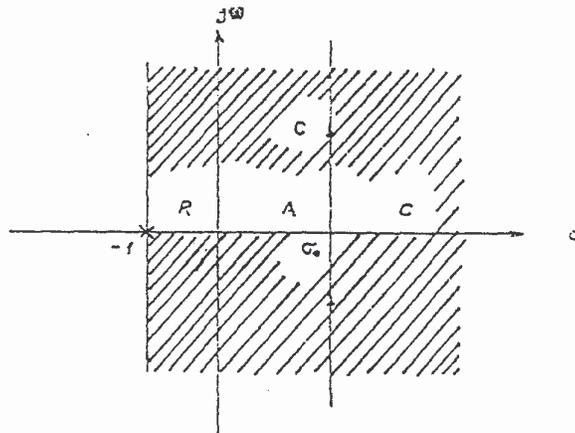


Fig.8.6 Evaluación de la integral de línea

Consideremos ahora la expresión:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} ; \Re\{s\} < -1$$

La transformada inversa de $X(s)$ se puede obtener evaluando la integral de línea correspondiente, a lo largo de cualquier abscisa de integración ubicada en la RAC de $X(s)$, como se indica en la Fig.8.7.

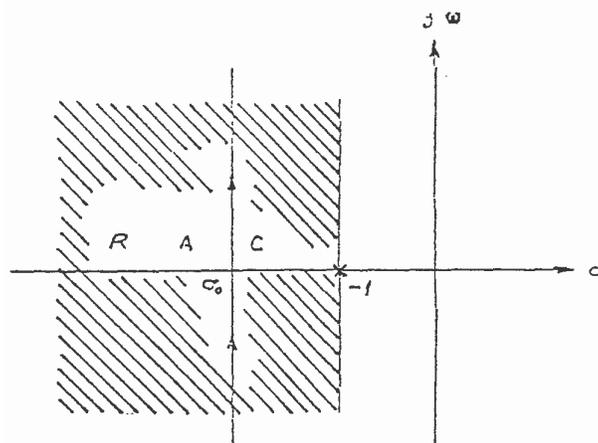


Fig.8.7 Evaluación del integral de línea

De acuerdo al teorema del residuo, Ec.(8.6), tenemos que para $t < 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= - \left[s \frac{e^{st}}{s(s+1)^3} \right]_{s=0} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{e^{st}}{s(s+1)^3} \right]_{s=-1} \\ &= -1 + \frac{1}{2} (t^2 + 2t + 2) e^{-t} \quad \text{para } t < 0 \end{aligned}$$

mientras que para $t > 0$, $x(t) = 0$. De manera que:

$$x(t) = \left[\frac{1}{2} (t^2 + 2t + 2) e^{-t} - 1 \right] \mu(-t)$$

Consideremos ahora la expresión:

$$X(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} ; \quad -2 < \Re\{s\} < -1$$

En la Fig.8.8 se muestra la RAC de $X(s)$, como también la abscisa de integración $\Re\{s\} = \sigma_0$. De acuerdo con el teorema del residuo, Ec.(8.6), tenemos para $t > 0$ que:

$$x(t) = \left[-(s+2) \frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = e^{-2t}$$

y para $t < 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= - \left[s \frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} - \left[\frac{e^{st}}{s+1} \frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \\ &= -1 + 2e^{-t} \quad \text{para } t < 0 \end{aligned}$$

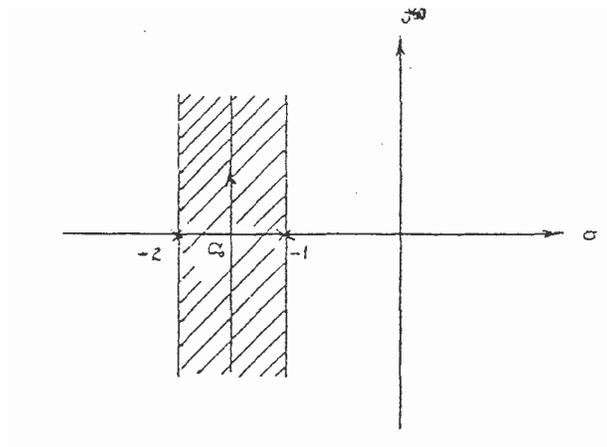


Fig8.8 RAC y abscisa de integración

de manera que:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 2e^{-t} - 1 & t < 0 \end{cases}$$

8.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE

Al igual que la transformada Z y la transformada de Fourier, la transformada bilateral de Laplace posee algunas propiedades. Las enunciaremos a continuación.

Sea $X(s)$ la transformada bilateral de Laplace de la señal $x(t)$, y $\sigma_1 < \text{Re}(s) < \sigma_2$ su región de absoluta convergencia. Esto es:

$$\underline{X(s)} = \mathcal{L}\{x(t)\} ; \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2 \quad \checkmark$$

entonces:

1- PROPIEDAD DE TRANSPOSICIÓN

La transformada de la Laplace de la señal transpuesta $x(-t)$ viene dada por:

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s) ; -\sigma_2 < \Re\{s\} < -\sigma_1 \quad \text{Ec. (8.7)}$$

Efectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{s\tau} d\tau = X(-s)$$

con una RAC: $-\sigma_2 < \Re\{s\} < -\sigma_1$

Por ejemplo, consideremos la señal:

$$x(t) = e^{at} \mu(-t)$$

cuya transformada de Laplace viene dada por:

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{at} \mu(-t)\} = \frac{1}{-s+1} = \frac{-1}{s-1}; \quad \Re\{s\} < a$$

2- PROPIEDAD DE ESCALAMIENTO

La transformada bilateral de Laplace de la señal $x(at)$ vendrá dada por:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right); \quad a\sigma_1 < \Re\{s\} < a\sigma_2 \quad \text{Ec. (8.8)}$$

Efectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\tau = at \\ d\tau = a dt \text{ con una RAC: } a\sigma_1 < \Re\{s\} < a\sigma_2$$

3- PROPIEDAD DE DIFERENCIACIÓN EN EL TIEMPO

La transformada bilateral de Laplace de la señal $dx(t)/dt$ será igual a:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s X(s) \text{ con una RAC al menos igual a la de } x(t); \quad \text{Ec. (8.9)}$$

$$\sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$$

expresión que podemos comprobar de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t) e^{-st} \Big|_{-\infty}^{\infty} + s \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Puesto que dentro de la RAC de $x(t)$, $x(t)e^{-at}$ tiende a cero a medida que t tiende $\pm\infty$ obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = s \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = sX(s)$$

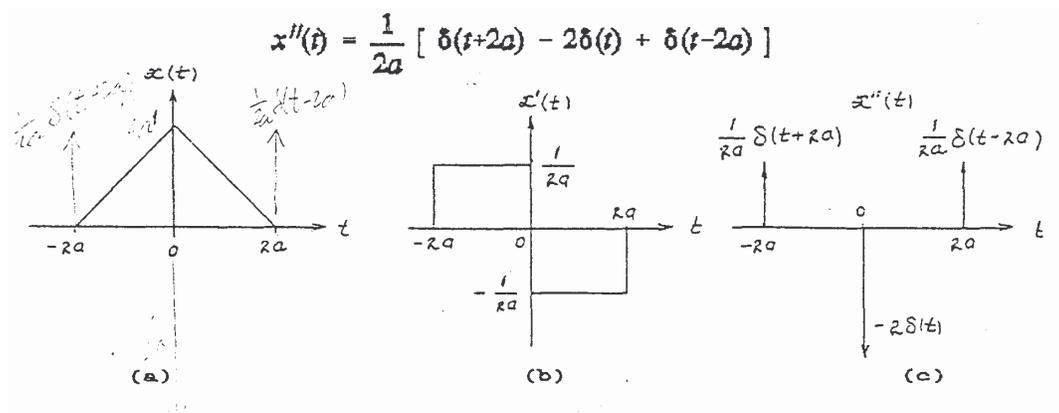
con una RAC al menos igual a la de $x(t)$: $\sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$

La transformada de Laplace de la n -ésima derivada de $x(t)$ viene dada por:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = s^n X(s) ; \text{ con una RAC al menos igual a la de } x(t) \quad \text{Ec. (8.10)}$$

Esta propiedad permite en algunas ocasiones simplificar el cálculo de la transformada bilateral de Laplace. La idea es derivar la señal $x(t)$ dada n veces consecutivas hasta obtener únicamente funciones singulares. Las integrales resultantes se evalúan fácilmente como estudiamos en el Capítulo 1. Usando la Ec.8.10 la transformada de Laplace $X(s)$ de la señal $x(t)$ se obtiene dividiendo el resultado calculado para la transformada de $d^n x(t)/dt^n$ para s^n .³

El siguiente ejemplo aclarará lo afirmado en el último párrafo. Sea la señal $x(t)$ mostrada en la Fig.8.9a. En la Fig.8.9b y c se grafican las señales $x'(t)$ y $x''(t)$. Resulta entonces que:



Cuya transformada de Laplace viene dada por:

³ Esta simplificación no es posible de realizar con funciones exponenciales o senoidales, puesto que las derivadas de estas señales son nuevamente o una función exponencial o una función senoidal.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''(t)\} &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2a) - 2\delta(t) + \delta(t-2a)] e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2a} (e^{2as} - 2 + e^{-2as}) \end{aligned}$$

Igualando este resultado a $s^2X(s)$ y despejando $X(s)$ obtenemos:

$$X(s) = \frac{1}{2a} \frac{1}{s^2} (e^{2as} - 2 + e^{-2as})$$

Además, como la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt = \int_{-2a}^0 \left(\frac{1}{2a} t + 1 \right) e^{-at} dt + \int_0^{2a} \left(-\frac{1}{2a} t + 1 \right) e^{-at} dt$$

es finita para todo valor de s , se concluye que la región de absoluta convergencia de $x(t)$ es todo el plano complejo s ; de manera que:

$$X(s) = \frac{1}{2a} \frac{1}{s^2} (e^{2as} - 2 + e^{-2as}) ; \text{ RAC todo el plano complejo } s$$

Esto, naturalmente implica que el valor $s=0$ no corresponde a un polo de $X(s)$, puesto que la RAC incluye al origen del plano s ($s=0$). Efectivamente, podemos verificar esta afirmación evaluando el límite cuando s tienda a cero de la expresión $X(s)$:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} X(s) &= \frac{1}{2a} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2as} - 2 + e^{-2as}}{s^2} \right] = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2as} - e^{-2as}}{s} \right] \\ &= a \lim_{s \rightarrow 0} [e^{2as} + e^{-2as}] = 2a \end{aligned}$$

Por tanto el valor $s=0$ no constituye un polo de $X(s)$.

4- PROPIEDAD DE DIFERENCIACIÓN EN FRECUENCIA

La transformada bilateral de Laplace de la señal $x(t)$ viene dada por:

$$\mathcal{L}\{t x(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds} ; \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2 \quad \text{Ec. (8.11)}$$

expresión en la cual la RAC no ha cambiado. Este resultado lo vamos verificar si derivamos con respecto a s la expresión de $X(s)$. Así:

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [-t e^{-st}] dt = -\int_{-\infty}^{\infty} [t x(t)] e^{-st} dt$$

de donde:

$$\mathcal{L}\{t x(t)\} = -\frac{dX(s)}{ds} ; \text{RAC: igual a la de } x(t)$$

Esta propiedad se puede generalizar de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n} \text{ con una RAC igual a la de } x(t) \quad \text{Ec. (8.12)}$$

Consideremos, por ejemplo, la transformada de Laplace de la señal $x(t) = te^{-\alpha t} \mu(t)$

$$\mathcal{L}\{t e^{-\alpha t} \mu(t)\} = -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s + \alpha} \right] = \frac{1}{(s + \alpha)^2} ; \Re\{s\} > -\alpha$$

5- PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

La transformada bilateral de Laplace de la señal $x(t+t_0)$ viene dada por:

$$\mathcal{L}\{x(t+t_0)\} = e^{t_0 s} X(s) ; \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2 \quad \text{Ec. (8.13)}$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0) e^{-st} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s(\tau-t_0)} d\tau = \\ &= e^{t_0 s} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{t_0 s} X(s) \end{aligned}$$

La RAC no cambia. Consideremos, por ejemplo, la señal:

$$x(t) = e^{-3(t-4)} \mu(t-4)$$

cuya transformada bilateral de Laplace viene dada por:

$$X(s) = e^{-4s} \frac{1}{s+3} ; \Re\{s\} > -3$$

Cuando tomemos la transformada inversa de Laplace de expresiones como la que acabamos de obtener, es preferible tomar primero la transformada inversa solamente de la fracción racional, y luego considerar que el factor exponencial implica un desplazamiento de la señal de tiempo obtenida. Los siguientes ejemplos nos ayudarán a clarificar estas ideas. Sea la expresión:

$$X(s) = \frac{1}{s+3} e^{-4s} ; \Re\{s\} > -3$$

La transformada inversa de la fracción racional vendrá dada por

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+3} \right\} = e^{-3t} \mu(t)$$

de acuerdo a la RAC especificada. El factor exponencial e^{-4a} implica un corrimiento en tiempo en la expresión encontrada, esto es, cambiar en dicha expresión a t por $t-4$. De modo que:

$$x(t) = e^{-3(t-4)} \mu(t-4)$$

como sabíamos de antemano.

Igualmente consideremos la expresión:

$$X(s) = \frac{1}{2a} \frac{1}{s^2} (e^{2as} - 2 + e^{-2as}) ; \text{RAC: } \underline{\text{Todo el plano complejo } s}$$

que corresponde a la transformada de la señal $\Delta_{4a}(t)$. La transformada inversa de la fracción racional, asumiendo una RAC $\Re\{s\} > 0$, viene dada por:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t \mu(t)$$

como lo verificaremos en la siguiente sección. Finalmente tomando en cuenta los factores exponenciales obtenemos:

$$x(t) = \frac{1}{2a} (t+2a) \mu(t+2a) - \frac{1}{a} t \mu(t) + \frac{1}{2a} (t-2a) \mu(t-2a)$$

que se reduce a:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} t + 1 & -2a \leq t \leq 0 \\ -\frac{1}{2a} t + 1 & 0 \leq t \leq 2a \end{cases}$$

como se puede verificar fácilmente.

6- PROPIEDAD DE DESPLAZAMIENTO EN FRECUENCIA

La transformada bilateral de Laplace de la señal

$$e^{-s_0 t} x(t)$$

viene dada por:

$$\mathcal{L} \{ e^{-s_0 t} x(t) \} = X(s + s_0) \text{ con una RAC dada por :} \quad \text{Ec. (8.14)}$$

$$[\sigma_1 - \Re \{ s_0 \}] < \Re \{ s \} < [\sigma_2 - \Re \{ s_0 \}]$$

Efectivamente, se tiene que:

$$\mathcal{L} \{ e^{-s_0 t} x(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0 t} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(s+s_0)t} dt = X(s+s_0)$$

con una RAC igual a la indicada anteriormente.

7- PROPIEDAD DE INTEGRACIÓN

La transformada bilateral de Laplace de la integral de $x(t)$ viene dada por:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} X(s) \quad \text{Ec. (8.15)}$$

Con una R al menos igual a la intersección de la región $\sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$ con la región $\Re(s) > 0$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt \quad \text{Ec. (8.16)} \end{aligned}$$

al intercambiar el orden de integración. Puesto que para $\text{Re}\{s\} > 0$ la integral:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right]_{\tau}^{\infty} = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

por tanto, la Ec.(8.16) puede escribirse como:

$$\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s} X(s)$$

para todo valor de s situado en la RAC de $x(t)$. De manera similar se tiene que:

$$\mathcal{L} \left\{ - \int_{-t}^{\infty} x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} X(s) \quad ; \quad \text{con una RAC al menos igual} \quad \text{Ec. (8.17)}$$

a la intersección de: $\sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$ con: $\Re\{s\} < 0$

Consideremos por ejemplo la señal:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de esta señal viene dada por:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{-1}{s(s-1)}$$

y su integral en tiempo por:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \begin{cases} t+1 & t > 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de esta última expresión viene dada por:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} =$$

$$= \frac{-1}{s^2(s-1)} ; \quad 0 < \Re\{s\} < 1$$

que es igual a:

$$\frac{1}{s} X(s)$$

8- PROPIEDAD DE LINEALIDAD

$$\text{Si: } X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\} ; \quad \sigma_1 < \Re\{s\} < \sigma_2$$

$$\text{y si: } X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\} ; \quad \sigma_3 < \Re\{s\} < \sigma_4$$

entonces:

$$\mathcal{L}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad \text{Ec. (8.18)}$$

Con una RAC al menos igual a la superposición de las RAC de $x_1(t)$ y $x_2(t)$

8.5 TRANSFORMADA BILATERAL DE LAPLACE DE FUNCIONES SINGULARES

En esta sección determinaremos la transformada bilateral de Laplace de funciones singulares. Las integrales involucradas cumplen las reglas que gobiernan estas funciones. Así, la transformada de Laplace de la función impulso unitario viene dada por:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Puesto que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t) e^{-\sigma_0 t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\sigma_0 t} dt = 1$$

para todo valor de σ_0 la RAC de $\delta(t)$ es todo el plano s . Igualmente, la transformada bilateral de Laplace de $\delta^n(t)$ viene dada por:

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [e^{-st}]_{s=0} = s^n$$

con una RAC igual a todo el plano complejo s . De manera que:

$$\mathcal{L} \{ \delta^n(t) \} = s^n ; \text{RAC : todo el plano complejo } s$$

Si bien es cierto que el escalón unitario $\mu(t)$, no es una función singular, consideraremos en esta sección su transformada de Laplace. Así:

$$\mathcal{L} \{ \mu(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} ; \Re \{ s \} > 0$$

La RAC es la indicada puesto que la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt$$

es finita si $\sigma > 0$, o si: $\Re\{s\} > 0$. También tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ t\mu(t) \} &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s^2} ; \Re \{ s \} > 0 \\ &\quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s} \right] = -\frac{1}{s^3} \quad \frac{1}{s} \\ \mathcal{L} \{ t^2\mu(t) \} &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{2}{s^3} ; \Re \{ s \} > 0 \end{aligned}$$

En general tenemos que:

$$\mathcal{L} \{ t^n \mu(t) \} = \frac{n!}{s^{n+1}} ; \Re \{ s \} > 0$$

A continuación consideraremos algunos ejemplos ilustrativos. Sean las funciones trigonométricas causales seno y coseno. Sus transformadas de Laplace vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \text{sen}(\omega_0 t) \mu(t) \} &= \frac{1}{j2} \mathcal{L} \{ e^{j\omega_0 t} \mu(t) \} - \frac{1}{j2} \mathcal{L} \{ e^{-j\omega_0 t} \mu(t) \} = \\ &= \frac{1}{j2} \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{j2} \frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} ; \Re \{ s \} > 0 \end{aligned}$$

de acuerdo con la propiedad de desplazamiento en frecuencia.

Igualmente:

$$\mathcal{L} \{ \text{cos}(\omega_0 t) \mu(t) \} = \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ e^{j\omega_0 t} \mu(t) \} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ e^{-j\omega_0 t} \mu(t) \} =$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega_o^2} ; \Re\{s\} > 0$$

Sea la señal $x(t)e^{-\alpha t} \text{sen}\omega_o t \mu(t)$. Su transformada viene dada por:

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \text{sen}\omega_o t \mu(t)\} = \frac{\omega_o}{(s + \alpha)^2 + \omega_o^2} ; \Re\{s\} > -\alpha$$

La transformada de Laplace de la señal: $x(t)=te^{-\alpha t} \text{sen}\omega_o t \mu(t)$. dada por:

$$X(s) = -\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega_o}{(s + \alpha)^2 + \omega_o^2} \right] = \frac{2\omega_o(s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \omega_o^2]^2} ; \Re\{s\} > -\alpha$$

ahora la transformada inversa de las siguientes expresiones:

$$X(s) = \frac{e^{2s}}{s^2 + \pi^2} : \Re\{s\} > 0$$

Puesto que $X(s)$ no tiende a cero a medida que s tiende a infinito no se puede aplicar el teorema del residuo para calcular la transformada inversa Sin embargo, puesto que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \right\} = \text{sen}(\pi t) \mu(t)$$

entonces:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \pi^2} \right\} = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi t) \mu(t)$$

por tanto:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{2s}}{s^2 + \pi^2} \right\} = \frac{1}{\pi} \text{sen}\pi(t+2) \mu(t+2) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi t) \mu(t+2)$$

Consideremos la siguiente expresión:

$$Y(s) = -\tan^{-1}s ; \Re\{s\} > 0$$

derivando con respecto a s , obtenemos:

$$-\frac{dY(s)}{ds} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

por tanto, se sigue que:

$$t y(t) = \text{sen}(t) \mu(t) \rightarrow y(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t} \mu(t)$$

8.6 LA PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

Sea $h(t)$ la respuesta a la función impulso de un sistema lineal invariante, $x(t)$ una señal de entrada al sistema y, $y(t)$ la correspondiente se de salida. Conocemos que $y(t)$ se puede calcular evaluando la integral de convolución:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

donde:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

por tanto:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} X(s) e^{s(t-\tau)} ds \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} X(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} ds = \\ &= \frac{1}{j2\pi} \int_{\alpha_0 - j\infty}^{\alpha_0 + j\infty} X(s) H(s) e^{st} ds \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad \text{Ec. (8.19)}$$

más aún, la RAC de $y(t)$ es el área común a las RAC de $x(t)$ y de $h(t)$. Nuevamente $H(s)$ se denomina *la función de transferencia del sistema*. Esta propiedad permite el análisis de SLI en el dominio de frecuencia definidos por su función de transferencia $H(s)$. Para una señal de entrada $X(s)$, el sistema responde con una señal de salida $Y(s)$ definida por la Ec.(8.19).

Otra forma igualmente útil de la propiedad de convolución la podemos encontrar a partir de la expresión:

$$y(t) = x'(t) * g(t) \quad \text{Ec. (8.20)}$$

que la obtuvimos en el Capítulo 4 que trata sobre convolución. Tomando la transformada de Laplace de la Ec.(8.10), obtenemos:

$$Y(s) = \hat{X}(s) G(s) \quad \text{Ec. (8.21)}$$

Con una RAC igual a la superposición de las regiones de $X(s)$ y $G(s)$

donde (s) es la transformada de Laplace $x'(t)$. Consideremos los siguientes ejemplos.

Sea: $g(t)=2te^{-2t}\mu(t)$ la respuesta al escalón unitario de un SLI. Queremos calcular la respuesta del sistema a la señal $x(t)$ indicada en la Fig.10a

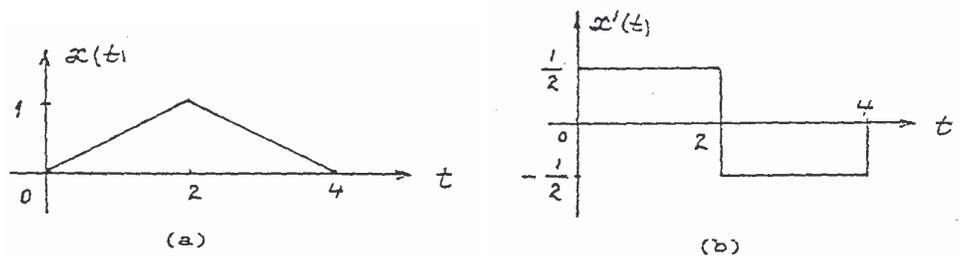


Fig.8.10 Señal $x(t)$ y su derivada $x'(t)$

De acuerdo con la Ec.(8.21) tenemos que:

$$Y(s) = \hat{X}(s) G(s)$$

donde:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{2te^{-2t}\mu(t)\} = \frac{2}{(s+2)^2} \quad ; \quad \Re\{s\} > -2$$

y:

$$\hat{X}(s) = \mathcal{L}\{x'(t)\}$$

La señal $x(t)$ se indica en la Fig.8.10b, de donde obtenemos:

$$x'(t) = \frac{1}{2}\mu(t) - \mu(t-2) + \frac{1}{2}\mu(t-4)$$

Tal que:

$$\hat{X}(s) = \frac{1}{2s} [1 - 2e^{-2s} + e^{-4s}] ; \Re\{s\} > 0$$

y:

$$Y(s) = \hat{X}(s) G(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} [1 - 2e^{-2s} + e^{-4s}] ; \Re\{s\} > 0$$

Si:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)^2} \right\} = \frac{1}{4} [1 - 2te^{-2t} - e^{-2t}] \mu(t)$$

de acuerdo a la RAC especificada, entonces:

$$y(t) = f(t) - 2f(t-2) + f(t-4)$$

o:

$$y(t) = \frac{1}{4} [1 - (2t+1)e^{-2t}] \mu(t) - \frac{1}{2} [1 - (2t-3)e^{-2(t-2)}] \mu(t-2) + \frac{1}{4} [1 - (2t-7)e^{-2(t-4)}] \mu(t-4)$$

o por intervalos:

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \quad 0 < t < 2$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + t e^{-2(t-2)} - \frac{3}{2} e^{-2(t-2)} \quad 2 < t < 4$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + t e^{-2(t-2)} - \frac{3}{2} e^{-2(t-2)} - \frac{1}{2} t e^{-2(t-4)} + \frac{7}{4} e^{-2(t-4)} \quad t > 4$$

Así mismo sea un SLI definido por su respuesta impulsiva:

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \mu(t)$$

queremos determinar la respuesta del sistema a la señal $x(t)$ indicada en la Fig. 8.11a. Para facilitar el cálculo de la transformada de $x(t)$, derivaremos gráficamente a esta función dos veces consecutivas. Los resultados se indican en la Fig. 8.11b y c.

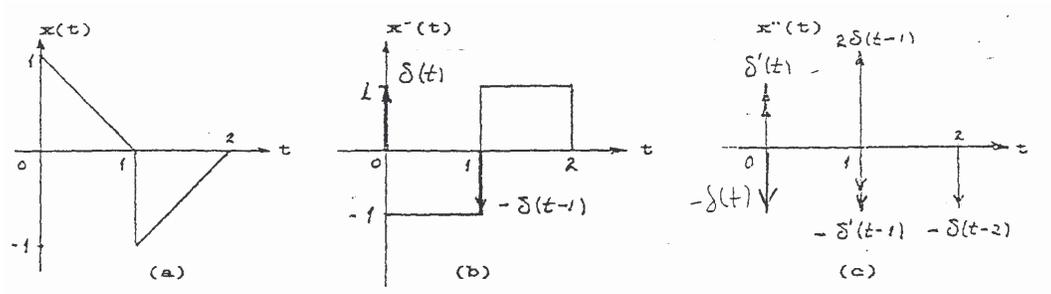


Fig.8.11 Señal $x(t)$ y sus derivadas

De la Fig.8.11c vemos que:

$$x''(t) = \delta'(t) - \delta(t) - \delta'(t-1) + 2\delta(t-1) - \delta(t-2)$$

cuya transformada viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''(t)\} &= s^2 X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(t) - \delta(t) - \delta'(t-1) + 2\delta(t-1) - \delta(t-2)] e^{-st} dt = \\ &= s - 1 - s e^{-s} + 2 e^{-s} - e^{-2s} \end{aligned}$$

de donde:

$$X(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s}) - \frac{1}{s^2} (1 - 2 e^{-s} + e^{-2s})$$

RAC: Todo el plano s

La función de transferencia del sistema viene dada por:

$$H(s) = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{s + \frac{1}{4}} = \frac{s}{s + \frac{1}{4}} ; \Re\{s\} > -\frac{1}{4}$$

La salida $Y(s)$ viene dada por:

$$Y(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{4}} (1 - e^{-s}) - \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{4} \right)} (1 - 2 e^{-s} + e^{-2s}) ; \Re\{s\} > -\frac{1}{4}$$

Teniendo en cuenta que $\Re\{s\} > -1/4$, las transformadas inversas de cada una de las fracciones racionales vienen dadas por:

$$\mathcal{G}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/4} \right\} = e^{-\frac{1}{4}t} \mu(t)$$

$$\mathcal{G}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + 1/4)} \right\} = 4 \left(1 - e^{-\frac{1}{4}t} \right) \mu(t)$$

De manera que la salida viene dada por:

$$y(t) = \left[5 e^{-\frac{1}{4}t} - 4 \right] \mu(t) - \left[9 e^{-\frac{1}{4}(t-1)} - 8 \right] \mu(t-1) + \left[4 e^{-\frac{1}{4}(t-2)} - 4 \right] \mu(t-2)$$

Que puede también expresarse por intervalos, así:

$$y(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

Para: $0 < t < 1$:

$$y(t) = 5 e^{-\frac{1}{4}t} - 4$$

Para: $1 < t < 2$:

$$y(t) = 5 e^{-\frac{1}{4}t} - 9 e^{-\frac{1}{4}(t-1)} + 4$$

Para: $t > 2$:

$$y(t) = 5 e^{-\frac{1}{4}t} - 9 e^{-\frac{1}{4}(t-1)} + 4 e^{-\frac{1}{4}(t-2)}$$

Alguien podría preguntarse en este momento, si se podría utilizar la transformada de Fourier para resolver esta clase de problemas. La respuesta a esta inquietud tiene que ver con las regiones de absoluta convergencia de los sistemas en consideración. Si las RsAC de $x(t)$ y de $h(t)$ [por tanto la RAC de $y(t)$] contienen el eje $j\omega$ la respuesta es afirmativa, en caso contrario no. Esto está de acuerdo con lo que afirmamos anteriormente, que la RAC de señales y sistemas descritos mediante la transformada de Fourier deben contener al eje $j\omega$. Tal afirmación la podrá verificar el lector, resolviendo este par de ejemplos, que cumplen con esta condición, por medio de la transformada de Fourier.

Es necesario también que clarifiquemos en este momento un punto que lo hemos venido posponiendo desde el Capítulo 4 que trata sobre Convolución, y es el siguiente: Dadas las señales de entrada y de salida de un sistema lineal invariante, afirmábamos en ese Capítulo que la respuesta impulsiva correspondiente $h(t)$ del sistema, se podía determinar resolviendo la ecuación integral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad \text{Ec. (8.22)}$$

Lo cual es factible únicamente en algunos casos muy simples, siendo difícil de resolver en la mayoría de las veces.

En el Capítulo 7, por otra parte, demostramos que la Ec.(8.22) se podía resolver utilizando la transformada de Fourier, calculando la transformada inversa de la relación:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad \text{Ec. (8.23)}$$

De acuerdo con la Ec.(8.19) también podemos resolver la Ec.(8.22) evaluando la transformada inversa de la relación:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \text{Ec. (8.24)}$$

Al determinar la respuesta impulsiva $h(t)$, queremos averiguar si hay algún diferencia al utilizar la transformada de Fourier, Ec.(8.23), o la transformada de Laplace, Ec.(8.24). En general, la solución de la ecuación integral (8.22) no es única. Calculando $H(\omega)$ de acuerdo a la Ec.(8.23) determinamos únicamente una de las soluciones, mientras que al calcular $H(s)$ de acuerdo a la Ec. (8.24) encontramos todas las posibles soluciones.

Consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que:

$$x(t) = \delta(t) - e^{-\frac{1}{2}t} \mu(t) \quad ; \text{ y que :}$$

$$y(t) = e^{-\frac{3}{2}t} \mu(t)$$

sean las señales de entrada y de salida de un sistema lineal invariante. Sus transformadas vienen dadas por:

$$X(s) = 1 - \frac{1}{s + \frac{1}{2}} = \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} \quad ; \quad \Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$

y:

$$Y(s) = \frac{1}{s + \frac{3}{2}} \quad ; \quad \Re\{s\} > -\frac{3}{2}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{3}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t} \right] \mu(t) \quad \text{Ec. (8.26)}$$

Este ejemplo ilustra el hecho que la solución de la ecuación integral (8.22) no es única, tal como lo habíamos afirmado anteriormente. Es posible, y así lo sugerimos a nuestros lectores, comprobar estos resultados evaluando la integral de convolución $x(t)*h(t)$. El resultado que se obtenga, naturalmente, debe ser igual a la señal $y(t)$ dada.

Si resolvemos el mismo problema utilizando ahora la transformada de Fourier, tenemos que:

$$X(\omega) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega} = -\frac{\frac{1}{2} - j\omega}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\frac{3}{2} + j\omega}$$

La función de transferencia viene dada por:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = -\frac{\frac{1}{2} + j\omega}{\left(\frac{3}{2} + j\omega\right)\left(\frac{1}{2} - j\omega\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + j\omega} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - j\omega}$$

de donde obtenemos que:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}t} & t > 0 \\ -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} & t < 0 \end{cases}$$

que es igual al resultado que obtuvimos en la Ec.(8.25). La razón de obtener únicamente este resultado pero no el de la Ec.(8.26) ha sido ya explicado. El resultado corresponde a la RAC que contiene el eje $j\omega$ esta es la región: $-3/2 < \text{Re}\{s\} < 1/2$.

De este ejemplo podemos ver que la unicidad de $h(t)$ depende de la unicidad de la RAC de $H(s)$. Notemos que los polos de $Y(s)$ y los ceros de $X(s)$ son los polos de $H(s)$. En otras palabras, los polos de $Y(s)$ y los ceros de $X(s)$, dividen al plano complejo en franjas verticales, cada una de las cuales son potenciales

RsAC de $H(s)$. Puesto que la RAC de $Y(s)$ es al menos la superposición de la región de $X(s)$ con la región de $H(s)$, una franja vertical será una RAC de $H(s)$ solamente si al sobreponerse ésta con la RAC de $X(s)$ queda dentro de la RAC de $Y(s)$. Efectivamente, en este ejemplo vimos que el polo de $Y(s)$ en $s=-3/2$ y el cero de $X(s)$ en $s=1/2$ dividen al plano complejo s en tres franjas verticales. No obstante, únicamente dos de ellas $[-3/2 < \text{Re}(s) < 1/2$ y $\text{Re}(s) > 1/2]$ al superponerse con la región de $X(s)$ $[\text{Re}(s) > -1/2]$ dan lugar a una región que se encuentra dentro de la RAC de $Y(s)$ $[\text{Re}(s) > -3/2]$. Por ello, la respuesta impulsiva no es única.

Una discusión análoga se puede hacer para la determinación de la respuesta unitaria de un sistema discreto, a partir de las señales de entrada y de salida del sistema.

8.7 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS DESCRITOS POR ECUACIONES DIFERENCIALES

Consideremos un sistema cuya relación entrada-salida esté descrita por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma:

$$\begin{aligned} C_r \frac{d^r y(t)}{dt^r} + C_{r-1} \frac{d^{r-1} y(t)}{dt^{r-1}} + \dots + C_1 \frac{dy(t)}{dt} + C_0 \cdot y(t) = \\ = E_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + E_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + E_1 \frac{dx(t)}{dt} + E_0 x(t) \end{aligned} \quad \text{Ec. (8.27)}$$

La función de transferencia del sistema la podemos obtener resolviendo la ecuación diferencial para $x(t)=\delta(t)$ (asumiendo que el sistema se halla inicialmente en reposo), y tomando luego la transformada de Laplace de la expresión resultante. No obstante, este camino constituiría un largo rodeo para lograr este objetivo. Un método directo consiste en tomar la transformada de Laplace de la ecuación diferencial dada, y de este resultado obtener la relación: $Y(s)/X(s)$, que es igual a la función de transferencia $H(s)$.

Tomando la transformada de Laplace de la Ec.(8.27) obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(C_r s^r + C_{r-1} s^{r-1} + \dots + C_1 s + C_0 \right) Y(s) = \\ = \left(E_m s^m + E_{m-1} s^{m-1} + \dots + E_1 s + E_0 \right) X(s) \end{aligned} \quad \text{Ec. (8.28)}$$

de donde:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{E_m s^m + E_{m-1} s^{m-1} + \dots + E_1 s + E_0}{C_r s^r + C_{r-1} s^{r-1} + \dots + C_1 s + C_0} \quad \text{Ec. (8.29)}$$

Más aún, la RAC de $H(s)$ es siempre un semiplano a derecha ⁴. Por ejemplo consideremos un sistema descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 8 \frac{dx(t)}{dt} + 20x(t)$$

Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación obtenemos:

$$(s^3 + 6s^2 + 12s + 8) Y(s) = (s^2 + 8s + 20) X(s)$$

de donde:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 8s + 20}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8} = \frac{s^2 + 8s + 20}{(s + 2)^3}$$

Con una RAC dada por la región: $Re\{s\} > -2$

Notemos además que la función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es siempre una función racional en s . Más aún, los polos de $H(s)$ son las raíces características de la ecuación diferencial.

Consideremos ahora aquellos casos en los cuales un sistema físico se encuentra definido, tal como un circuito eléctrico, o un sistema mecánico, o un sistema electromecánico, o un sistema hidráulico, o un sistema neumático, etc. En tales casos, podemos establecer directamente la función de transferencia del sistema, empleando las ecuaciones que gobiernan al sistema en el dominio de la frecuencia.

Para un circuito eléctrico conocemos de la teoría de circuitos que las funciones de transferencia (funciones impedancia o admitancia) de los diferentes componentes vienen dadas para:

⁴ Recordemos que la respuesta impulsiva de un sistema, es la respuesta del sistema a la función $\delta(t)$ considerando que el sistema se encuentra inicialmente en reposo. De acuerdo con lo estudiado en el Capítulo 2, un sistema cuya relación entrada-salida está dada mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es CAUSAL sólo si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, lo cual se asume fácilmente al emplear las técnicas de las transformaciones. Por otro lado al comenzar este Capítulo comprobamos con un ejemplo que la RAC de un sistema causal era un semiplano a derecha.

⁵ De las Ecs.(8.27), (8.28) y (8.29), vemos que se puede obtener a partir de la ecuación diferencial la función de transferencia del sistema, y viceversa, obtener de la función de transferencia la ecuación diferencial que define la relación entrada-salida del sistema.

Inductancia:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$V(s) = L s I(s)$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) = L s$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = Y(s) = \frac{1}{Ls}$$

Capacitancia:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$I(s) = C s V(s)$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = Y(s) = C s$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) = \frac{1}{Cs}$$

Resistencia:

$$v(t) = R i(t)$$

$$V(s) = R I(s)$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) = R$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = Y(s) = \frac{1}{R}$$

Por ejemplo, consideremos el circuito eléctrico que se muestra en la Fig.8.13b. En la Fig.8.13b, se vuelve a graficar el mismo circuito con los valores de cada componente expresados en el dominio de la frecuencia como funciones impedancia en ohmios.

La función de transferencia del circuito se escribe directamente de la Fig.8.13b. Así:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\frac{6s+1}{6s+1} + 2}{\frac{6s+1}{6s+1} + 2 + \frac{3}{2s} + 1} = \frac{\frac{3}{4} s \left(s + \frac{1}{9} \right)}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2}$$

Con una RAC igual a la región: $Re\{s\} > -1/4$

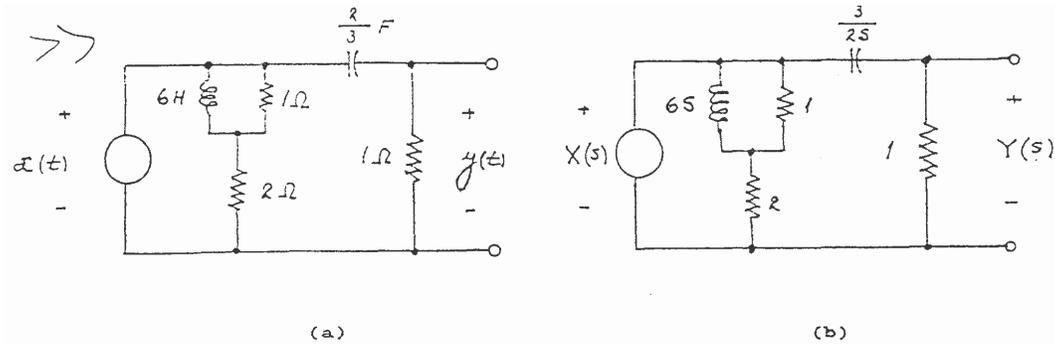


Fig.8.13 Circuito eléctrico

Conocida la función de transferencia $H(s)$, la respuesta del sistema a cualquier señal de entrada $x(t)$ se puede calcular, en el dominio de la frecuencia, por medio de la propiedad de convolución [Ec.(8.9)]. Por ejemplo, supongamos que deseamos calcular la respuesta del circuito de la Fig.8.13 a la señal indicada en la Fig. 8.14a. Para facilitar el cálculo de $X(s)$ derivaremos dos veces consecutivas a la señal $x(t)$. En la Fig.8.14b se muestra la señal $x'(t)$. De esta señal obtenemos que:

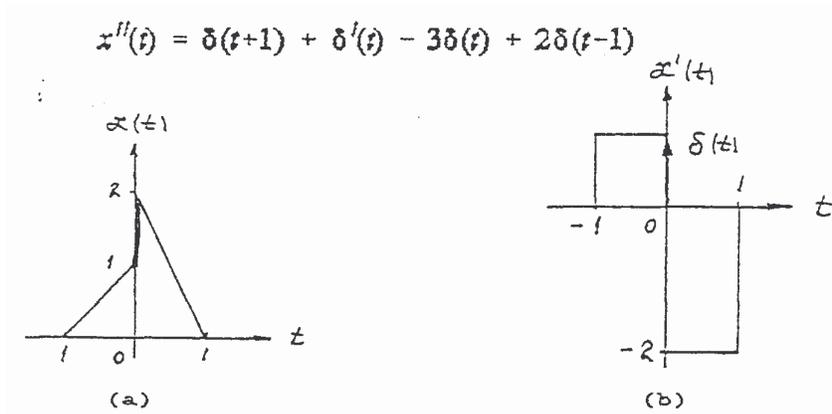


Fig.8.14 a) Señal de entrada $x(t)$ del circuito de la Fig.8.13 b) $x'(t)$

de donde:

$$s^2 X(s) = e^s + s - 3 + 2e^{-s}$$

y:

$$X(s) = \frac{e^s + s - 3 + 2e^{-s}}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} (e^s - 3 + 2e^{-s})$$

Con una RAC igual a todo el plano complejo s

Por tanto, de acuerdo a la propiedad de convolución tenemos que:

$$Y(s) = X(s) H(s) = \frac{\frac{3}{4} \left(s + \frac{1}{9} \right)}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2} + \frac{\frac{3}{4} \left(s + \frac{1}{9} \right)}{s \left(s + \frac{1}{4} \right)^2} (e^s - 3) + 2e^{-s}$$

Tomemos las transformadas inversas de cada fracción racional. Así

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{3}{4} \left(s + \frac{1}{9} \right)}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2} ; \Re \{ s \} > \frac{1}{4} \right\} = \frac{3}{4} \frac{d}{ds} \left[\left(s + \frac{1}{9} \right) \right]_{s = -\frac{1}{4}}^{s=t} = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{48} t \right) e^{-\frac{1}{4}t} \mu(t)$$

Igualmente:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{3}{4} \left(s + \frac{1}{9} \right)}{s \left(s + \frac{1}{4} \right)^2} ; \Re \{ s \} > 0 \right\} = \frac{3}{4} \left[\frac{\left(s + \frac{1}{9} \right) e^{st}}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2} \right]_{s=0} + \frac{3}{4} \frac{d}{ds} \left[\frac{\left(s + \frac{1}{9} \right) e^{st}}{s} \right]_{s = -\frac{1}{4}} = \left[\frac{4}{3} + \left(\frac{5}{12} t - \frac{4}{3} \right) e^{-\frac{1}{4}t} \right] \mu(t)$$

Finalmente tenemos que:

$$y(t) = \left[\frac{4}{3} + \left(\frac{5}{12} - \frac{11}{12} \right) e^{-\frac{1}{4}(t+1)} \right] \mu(t+1) - \left[4 + \left(\frac{65}{48} t - \frac{19}{4} \right) e^{-\frac{1}{4}t} \right] \mu(t) + \left[\frac{8}{3} + \left(\frac{5}{6} t - \frac{7}{2} \right) e^{-\frac{1}{4}(t-1)} \right] \mu(t-1)$$

La Ec.(8.27) inmediatamente sugiere la posibilidad de resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes por el método de la transformada de Laplace. Específicamente escribiendo la Ec.(8.27) de la siguiente forma:

$$Y(s) = \frac{E_m s^m + E_{m-1} s^{m-1} + \dots + E_1 s + E_0}{C_r s^r + C_{r-1} s^{r-1} + \dots + C_1 s + C_0} X(s)$$

vemos que se puede determinar $y(t)$ para una señal $x(t)$ dada. Es necesario, sin embargo puntualizar que tal método de solución es aplicable únicamente cuando $x(t)$ está definida en todo el intervalo de tiempo: $-\infty \leq t \leq +\infty$ y cuando el sistema se halla inicialmente en reposo. En el caso de que $x(t)$ esté definida únicamente para $t \geq t_0$, el método de la transformada unilateral de Laplace es útil. Estudiaremos este método en las siguientes secciones. Esta discusión también sugiere un método para determinar la ecuación diferencial que describe a un sistema lineal, a partir de su respuesta impulsiva $h(t)$. Si la transformada de Laplace de la respuesta impulsiva es una función racional en s tal como la Ec.(8.27), la ecuación diferencial que define la relación entrada—salida del sistema se obtiene directamente de ella. Por ejemplo, consideremos que:

$$h(t) = (e^{-t} - e^{-6t}) \mu(t)$$

sea la respuesta impulsiva de un sistema lineal invariante. Puesto que:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+6} = \frac{5}{s^2+7s+6} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

obtenemos:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 6 y(t) = 5 x(t)$$

que es la ecuación diferencial que gobierna al sistema.

8.8 RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA Z Y LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La teoría de la transformación de señales se puede comprender mejor estableciendo una relación entre la transformada Z para señales discretas y la transformada de Laplace para señales continuas.

Para una señal discreta $x[n]$, definamos una señal continua $x(t)$ tal que:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t-n)$$

Tomemos la transformada de Laplace de esta expresión:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-sn} \quad \text{Ec. (8.30)}$$

Consideremos, por otra parte, la siguiente integral de línea que es similar a la transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} X(s) e^{s\pi} ds &= \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-sk} \right] e^{s\pi} ds \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left[\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} e^{s(\pi-k)} ds \right] \quad \text{Ec. (8.31)} \end{aligned}$$

puesto que:

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} e^{s(\pi-k)} ds = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}$$

la Ec.(8.30) se simplifica a:

$$\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} X(s) e^{s\pi} ds = x[n] \quad \text{Ec. (8.32)}$$

De modo que podemos visualizar a $X(s)$ como la transformada de $x[n]$, Ec(8.30), y la Ec.(8.31) como su correspondiente fórmula de transformación inversa. Por otra parte hagamos:

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 ; \quad y:$$

$$s_1 = s_0 + j2\pi = \sigma_0 + j(\omega_0 + 2\pi)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} X(s_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{s_1 n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-[\sigma_0 + j(\omega_0 + 2\pi)]n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-(\sigma_0 + j\omega_0)n} = X(s_0) \end{aligned}$$

Efectivamente, si dividimos al plano s en franjas horizontales de ancho 2π , como se ilustra en la Fig.8.15(a), el comportamiento en cada franja:

$$(2k - 1)\pi \leq \omega \leq (2k + 1)\pi$$

para $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ es idéntico a aquel de $X(s)$ en la franja:

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

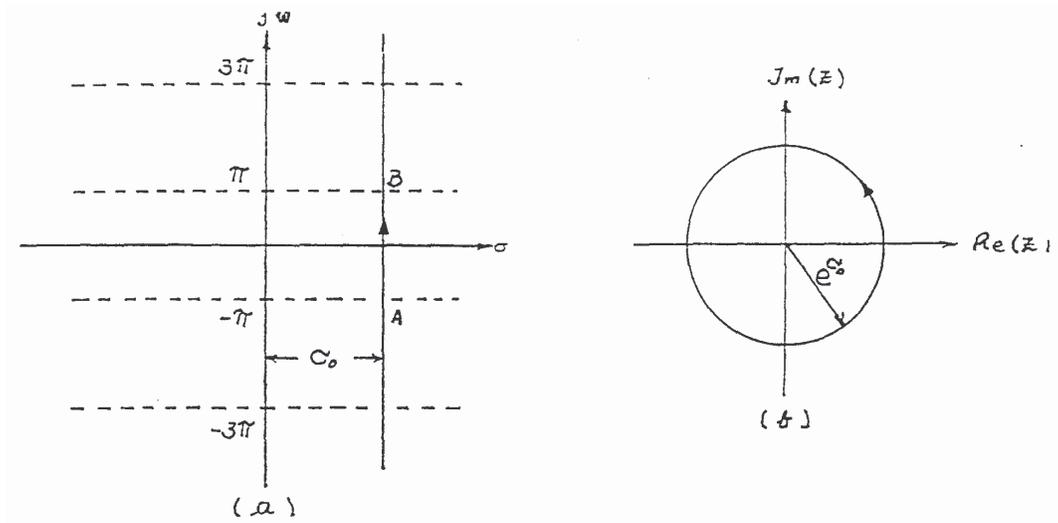


Fig.8.15 Transformación conforme del plano s al plano z.

Esta observación sugiere el cambio de variable $z = e^s$ que transforma cada franja horizontal del plano s al plano z. De modo que la Ec.(8.26) viene a ser:

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

que es la definición de la transformada z de $x[n]$. Puesto que el cambio de variable $z=e^s$ mapea el segmento de línea AB en el plano s en un círculo de radio e^{σ_0} en el plano z, como se indica en la Fig.8.15b, la integral de la Ec.(8.28) viene a ser:

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

que es la fórmula de la transformada z inversa.

Puesto que la línea vertical $\text{Re}\{s\}=\sigma_0$ en el plano s se transforma en un círculo de radio e^{σ_0} en el plano z, el semiplano a la izquierda de la línea vertical $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ se transforma en el área interior al círculo de radio e^{σ_0} y, el semiplano a la derecha de la línea vertical $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ se transforma en el área exterior al círculo de radio e^{σ_0} . Consecuentemente, una franja vertical en el plano s se transforma en un anillo en el plano z, que es otra forma de explicar por qué la RAC de una señal discreta es en general un anillo en el plano z. Note que, específicamente, el semiplano a la izquierda del eje $j\omega$ en el plano s se transforma en el área interior a una circunferencia de radio unitario, mientras que el área a la derecha del eje $j\omega$ se transforma en el área exterior a una circunferencia de radio unitario en el plano z.

Lo que deseamos puntualizar es la semejanza conceptual entre la transformada de Laplace para señales continuas, y la transformada z para señales discretas. Efectivamente, muchos de los resultados obtenidos para la transformada de Laplace son también válidos para la transformada z y viceversa. Un desarrollo paralelo puede ser hecho fácilmente.

8.9 LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Definiremos a la transformada unilateral de Laplace de una señal continua $x(t)$, a la que denotaremos por $X_1(s)$, a la integral:

$$X_1(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{Ec. (8.33)}$$

El límite inferior de la Ec.(8.33) es 0^+ . Consecuentemente, si $x(t)$ contiene alguna función singular en $t=0$, esta función singular no será incluida en la integral.

Conceptualmente, no hay nada nuevo en la teoría de la transformada unilateral de Laplace. Así, si $x(t)$ es una señal igual a cero para $t < 0^+$ y no contiene funciones singulares en $t=0$, su transformada unilateral será igual a su transformada bilateral, pero no serán iguales si $x(t)$ es diferente de cero para $t < 0^+$, o si $x(t)$ contiene una función singular en $t=0$.

Hagamos que $x(t)$ sea una señal continua que tiene un número finito de máximos y de mínimos y de discontinuidades en cualquier intervalo finito de tiempo. La región en el plano s que contiene todos los números complejos s , tal que:

$$\int_{0^+}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt < \infty \quad \text{Ec. (8.34)}$$

se llama «**la región de absoluta convergencia**» de la transformada unilateral de Laplace $X_1(s)$. Note que la RAC de la transformada unilateral de Laplace es siempre un semiplano a derecha. Se sigue de nuestra discusión anterior que la transformada inversa unilateral de Laplace viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X_1(s) e^{st} ds \quad \text{para: } t \geq 0^+ \quad \text{Ec. (8.35)}$$

para todo t ubicado en la RAC. Más aún, si $X_1(s)$ es una función racional en s , la Ec.(8.35) se evalúa mediante el *teorema del residuo*. Así:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X_f(s) e^{st} ds =$$

$$= \sum \text{de los residuos de } X_f(s) e^{st}, \quad t \geq 0$$

Puesto que la Ec.(8.35) dará una expresión de $x(t)$ definida siempre para $t \geq 0+$, independientemente de la RAC de $x(t)$ (que por otro lado, como dijimos anteriormente, siempre será un semiplano a derecha), ésta no se necesita definir.

Las Ecs.(8.33) y (8.35) están definidas a lo largo de una línea vertical $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ en el plano s . Sin embargo, como en el caso de la transformada bilateral de Laplace, es posible extender tales definiciones a toda la RAC, es así que puede demostrarse que $X_f(s)$ es una función analítica en toda su RAC.

Así mismo, se puede demostrar que si $x(t)$ es una señal de tiempo "seccionalmente continua y de "orden exponencial", entonces las Ecs.(8.33) y (8.35) existen. Se dice que $x(t)$ es una función seccionalmente continua en un intervalo finito $a \leq t \leq b$, si $x(t)$ está definida en ese intervalo y, el intervalo es tal que puede subdividirse en un intervalo finito de intervalos menores, en cada uno de los cuales la señal $x(t)$ es continua y tiene límites finitos cuando t se aproxima desde el interior hacia cualquiera de los puntos extremos del mismo, tal como se indica en la Fig.8.16.

De la definición se sigue que las únicas discontinuidades que puede tener una función seccionalmente continua, son saltos finitos. Estos saltos finitos son discontinuidades ordinarias. Es evidente que la clase de funciones seccionalmente continuas incluye a las funciones continuas.

Una función $x(t)$, seccionalmente continua en todo intervalo finito en el rango $t \geq 0$ y que satisface la relación:

$$|x(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \text{para toda } t \geq 0+$$

para determinadas constantes reales, positivas y finitas α y M ,

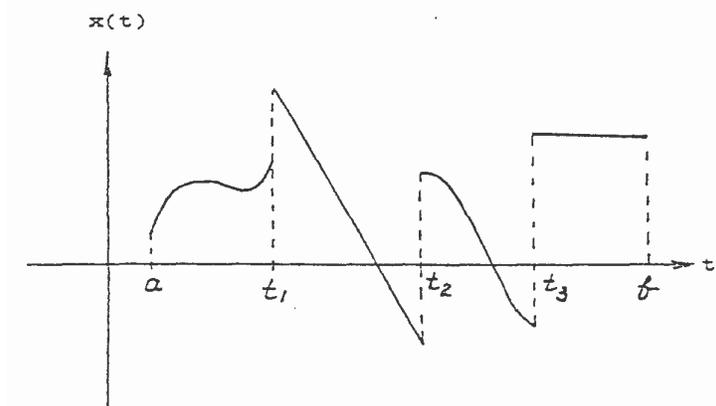


Fig.8.16 Señal seccionalmente continua

se dice que es una función de orden exponencial. De tal modo que:

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt &\leq \int_{0^+}^{\infty} |x(t)| e^{-\alpha t} dt = \\ &= M \int_{0^+}^{\infty} e^{-(\sigma_0 - \alpha)t} dt = \\ &= \frac{M}{\sigma_0 - \alpha} \quad \text{si: } \sigma_0 = \Re\{s\} > \alpha \end{aligned}$$

La recta $\sigma_0 = \Re\{s\} > \alpha$ se denomina la **abscisa de convergencia**. Se ve claramente que si $x(t)$ es una función seccionalmente continua y de orden exponencial, entonces:

1. $\int_{0^+}^{\infty} |x(t) e^{-st}| dt$ es finita para toda: $\alpha < \Re\{s\} < \infty$
que es un semiplano a derecha; y:

2. En este caso existe la transformada unilateral de Laplace.

8.10 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Con las siguientes excepciones, las propiedades de la transformada unilateral de Laplace son iguales a las propiedades de la transformada bilateral de Laplace:

Primera: Diferenciación

La transformada unilateral de Laplace de la señal $dx(t)/dt$ viene dada por:

$$\mathcal{L}_+ \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = s X_f(s) - x(0^+) \quad \text{Ec. (8.36)}$$

efectivamente:

$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= [x(t) e^{-st}]_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= -x(0^+) + s X_f(s) \end{aligned}$$

puesto que $x(t)e^{-at}$ tiende a cero a medida que t tiende a infinito⁶, como lo demostramos en la sección anterior. En general, se cumple que:

$$\mathcal{L}_I \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} = s^k X_f(s) - s^{k-1} x(0+) - s^{k-2} \frac{dx(0+)}{dt} - \dots - s \frac{d^{k-2} x(0+)}{dt^{k-2}} - \frac{d^{k-1} x(0+)}{dt^{k-1}} \quad \text{Ec. (8.37)}$$

Por ejemplo, sea: $x(t)e^{-\alpha t} \mu(t)$ cuya transformada unilateral viene dada por:

$$X_f(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

Puesto que $x(0+)=1$, entonces de acuerdo a la Ec.(636) se tiene que:

$$\mathcal{L}_I \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \frac{s}{s + \alpha} - 1 = \frac{-\alpha}{s + \alpha}$$

Resultado que se puede comprobar a partir de $dx(t)/dt$. Así:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t} \mu(t) + \delta(t)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}_I \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \mathcal{L}_I \left\{ -\alpha e^{-\alpha t} \mu(t) + \delta(t) \right\} = \frac{-\alpha}{s + \alpha}$$

puesto que la función $\delta(t)$ no se incluye en la transformada unilateral.

Segunda: Desplazamiento

Para la $t_0 > 0$, la transformada unilateral de Laplace de $x(t-t_0)$ viene dada por:

$$\mathcal{L}_I \{ x(t - t_0) \} = e^{-t_0 s} X_f(s) \quad \text{Ec. (8.38)}$$

Si $x(t)=0$ para $-t_0 \leq t \leq 0$. Efectivamente:

⁶ Puesto que, si este no fuere el caso, el valor de la integral de la Ec.(8.33) no sería finito

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \{ x(t - t_0) \} &= \int_{0^+}^{\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-t_0^+}^{\infty} x(\tau) e^{-s(t - \tau)} d\tau = \\ &= e^{-t_0 s} \int_{-t_0^+}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-t_0 s} X_1(s)\end{aligned}$$

De idéntica manera:

$$\boxed{\mathcal{L}_1 \{ x(t + t_0) \} = e^{t_0 s} X_1(s)} \quad \text{Ec. (8.39)}$$

si $x(t)=0$ para $0 \leq t \leq t_0$. Por ejemplo, sea la señal:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$$

cuya transformada de Laplace es:

$$X_1(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

La transformada unilateral de la señal $x(t-t_0)$ es:

$$\mathcal{L}_1 \{ x(t - t_0) \} = \frac{e^{-t_0 s}}{s + \alpha}$$

puesto que $x(t)=0$ para todo $-t_0 \leq t \leq 0$. Pero

$$\mathcal{L}_1 \{ x(t + t_0) \} \text{ no es igual a } : \frac{e^{t_0 s}}{s + \alpha}$$

puesto que $x(t)$ es diferente de cero en el intervalo $0 \leq t \leq t_0$. En efecto, la señal:

$$x(t + t_0) = e^{-\alpha(t + t_0)} \mu(t + t_0)$$

tiene una transformada dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \{ x(t + t_0) \} &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-\alpha(t + t_0)} e^{-st} dt = \\ &= e^{-\alpha t_0} \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s + \alpha)t} dt = \frac{e^{-\alpha t_0}}{s + \alpha}\end{aligned}$$

Tercera: Integración

La transformada unilateral de Laplace de la integral:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

es igual a:

$$\mathcal{L}_f \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} X_f(s) + \frac{1}{s} x^{-1}(0+) \quad \text{Ec. (8.40)}$$

donde:

$$x^{-1}(0+) = \int_{-\infty}^{0+} x(\tau) d\tau$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \int_{0+}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \\ &= \int_{0+}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{0+} x(\tau) d\tau + \int_{0+}^t x(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \\ &= \int_{0+}^{\infty} e^{-st} dt \cdot \int_{-\infty}^{0+} x(\tau) d\tau + \int_{0+}^{\infty} e^{-st} dt \int_{0+}^t x(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{s} x^{-1}(0+) + \int_{0+}^{\infty} e^{-st} dt \int_{0+}^t x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \frac{1}{s} x^{-1}(0+) + \int_{0+}^{\infty} x(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{s} x^{-1}(0+) + \frac{1}{s} \int_{0+}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{s} X_f(s) + \frac{1}{s} x^{-1}(0+) \end{aligned}$$

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea la función:

$$g(t) = 4 (t e^{-2t} + 1) \mu(t)$$

la respuesta de un SLI al escalón unitario. Queremos determinar la respuesta $r(t)$ del sistema a la función rampa unitaria. Esto es, queremos:

$$r(t) = H \{ t \mu(t) \} = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

De un cálculo directo obtenemos que:

$$\begin{aligned} r(t) &= 4 \int_0^t (\tau e^{-2\tau} + 1) d\tau = \left[-2\tau e^{-2\tau} - e^{-2\tau} \right]_0^t + \left[4\tau \right]_0^t \\ &= \left[4t + 1 - (2t + 1)e^{-2t} \right] \mu(t) \end{aligned}$$

Empleando, ahora, la propiedad de integración de la transformada unilateral de Laplace, tenemos que:

$$R_f(s) = \mathcal{L}_f \left\{ \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} G_f(s) + \frac{1}{s} g^{-1}(0^+)$$

donde:

$$g^{-1}(0^+) = \int_{-\infty}^0 g(\tau) d\tau = 0$$

puesto que $g(t)=0$ para toda $t < 0$; y donde:

$$G_f(s) = \mathcal{L}_f \{ 4 t e^{-2t} \mu(t) + 4 \mu(t) \} = \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{4}{s} = \frac{4(s^2 + 5s + 4)}{s(s+2)^2}$$

De manera que:

$$R_f(s) = \frac{4(s^2 + 5s + 4)}{s^2(s+2)^2} + 0$$

cuya transformada inversa viene dada por:

$$r(t) = 4 \frac{d}{ds} \left[\frac{(s^2 + 5s + 4) e^{st}}{(s+2)^2} \right]_{s=0} + 4 \frac{d}{ds} \left[\frac{(s^2 + 5s + 4) e^{st}}{s^2} \right]_{s=-2} =$$

$$= 4 \left[\frac{[t(s^2+5s+4)e^{-st} + (2s+5)e^{-st}](s+2) - 2(s^2+5s+4)e^{-st}}{(s+2)^3} \right]_{s=0} +$$

$$+ 4 \left[\frac{[t(s^2+5s+4)e^{-st} + (2s+5)e^{-st}](s+2) - 2(s^2+5s+4)e^{-st}}{s^3} \right]_{s=-2}$$

de donde:

$$r(t) = [4t + 1 - (2t + 1)e^{-2t}] \mu(t)$$

Que es igual al resultado que obtuvimos directamente.

8.11 TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE DE SEÑALES PERIODICAS CASUALES

Sea $x(t)$ a señal seccionalmente continua, periódica de período T para $t \geq 0$. La transformada unilateral de Laplace viene dada por:

$$\mathcal{L}_I \{ x(t) \} = \frac{F_I(s)}{1 - e^{-sT}} \quad \text{Ec. (8.41)}$$

donde $F_I(s)$ es la transformada unilateral de Laplace de $x(t)$ tomada en un período. Esto es:

$$F_I(s) = \int_0^T x(t) e^{-st} dt \quad \text{Ec. (8.42)}$$

Efectivamente, tenemos que:

$$\mathcal{L}_I \{ x(t) \} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt =$$

$$= \int_0^T x(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} x(t) e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} x(t) e^{-st} dt + \dots =$$

Haciendo: $t = \tau + T$ en la segunda integral, $t = \tau + 2T$ en la tercera integral, ... etc, etc, obtenemos:

$$\mathcal{L}_I \{ x(t) \} = \int_0^T x(t) e^{-st} dt + \int_0^T x(\tau+T) e^{-s(\tau+T)} d\tau + \int_0^T x(\tau+2T) e^{-s(\tau+2T)} d\tau + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T x(t) e^{-st} dt + e^{-sT} \int_0^T x(\tau) e^{-s\tau} d\tau + e^{-2sT} \int_0^T x(\tau) e^{-s\tau} d\tau + \dots \\
 &= \left[\int_0^T x(t) e^{-st} dt \right] (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \dots) \\
 &= \frac{\int_0^T x(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}} = \frac{F_f(s)}{1 - e^{-sT}} = \mathcal{L}_f \{ x(t) \}
 \end{aligned}$$

donde $x(t)=x(t+T)=x(t+2T)=\dots$ por ser $x(t)$ una serial periódica, y

$$1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

Consideremos, por ejemplo, la señal periódica de la Fig.8.17:

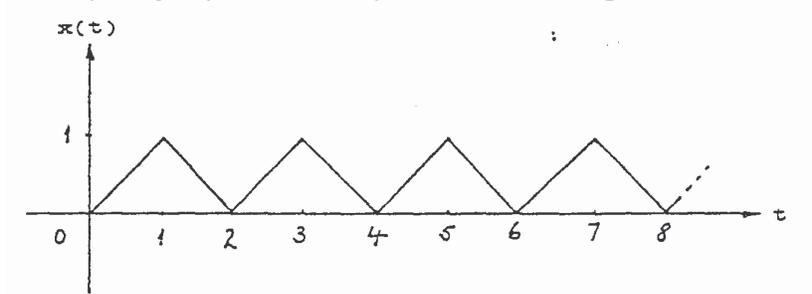


Fig.8.17 Señal periódica casual

Para facilitar el cálculo de $F_f(s)$, derivaremos la serial $f(t)$ mostrada en la Fig.8.18 una sola vez. No derivaremos dos veces consecutivas para no obtener funciones impulsivas, puesto que la transformada unilateral de Laplace de la función $\delta(t)$ no está definida

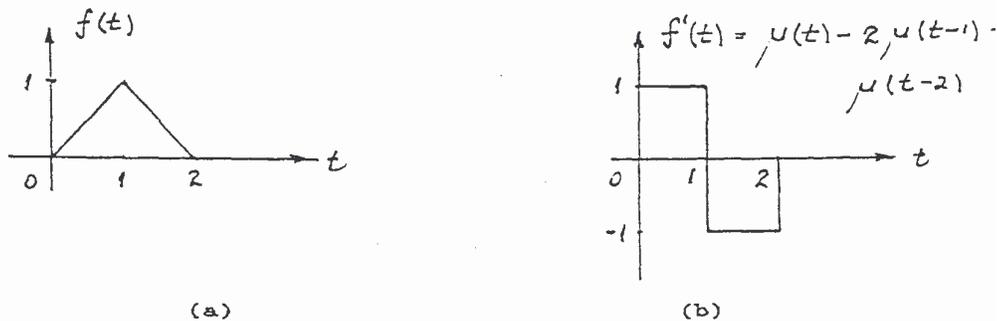


Fig.8.18 Señal periódica definida en un periodo f(t) b) Su derivada

De la Fig.8.18, obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = s F_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} e^{-2s}$$

$$\rightarrow F_f(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s})^2$$

De manera que, de acuerdo con la Ec.(8.41), obtenemos:

$$X_f(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2 (1 - e^{-2s})} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2 (1 + e^{-s})} =$$

$$= \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s} - 2e^{-3s} + \dots)$$

cuya transformada inversa viene dada por:

$$x(t) = t\mu(t) - 2(t-1)\mu(t-1) + 2(t-2)\mu(t-2) - 2(t-3)\mu(t-3) + \dots$$

que corresponde a la señal definida en la Fig.8.17.

8.12 TEOREMA DEL VALOR INICIAL Y TEOREMA DEL VALOR FINAL

Si una señal $X(T)$ desarrolla en una serie de Taylor alrededor del punto $t=0+$, se obtiene:

$$x(t) = x(0+) + \frac{t}{1!} \frac{dx(0+)}{dt} + \frac{t^2}{2!} \frac{d^2x(0+)}{dt^2} + \dots + \frac{t^n}{n!} \frac{d^n x(0+)}{dt^n} + \dots$$

tomemos la transformada unilateral de Laplace de esta expresión, así:

$$X_f(s) = \frac{1}{s} x(0+) + \frac{1}{s^2} \frac{dx(0+)}{dt} + \frac{1}{s^3} \frac{d^2x(0+)}{dt^2} +$$

$$\dots + \frac{1}{s^{n+1}} \frac{d^{n+1}x(0+)}{dt^{n+1}} + \dots \quad \text{Ec. (8.43)}$$

multiplicando por s ambos miembros de esta igualdad, y tomando el límite cuando s se aproxime a infinito, obtenemos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s X_f(s) = x(0+) \quad \text{Ec. (8.44)}$$

A la Ec.(8.44) se la conoce como el teorema del valor inicial. Este afirma que el valor de $sX_1(s)$ para valores grandes de s es igual al valor de $x(t)$ en $t=0+$. Consideremos, por ejemplo, la señal:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$$

Puesto que:

$$X_f(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

entonces:

$$x(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X_f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s + \alpha} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \alpha/s} = 1$$

que corresponde al valor inicial de la señal dada. También consideremos la señal:

$$x(t) = t^2 e^{-\alpha t} \mu(t)$$

cuyo valor inicial es cero. Su transformada viene dada por:

$$X_f(s) = \frac{2}{(s + \alpha)^3}$$

por tanto, su valor inicial será:

$$x(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X_f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s/s^3}{(s + \alpha)^3} = 0$$

Notemos también que el valor inicial de la serial $x'(t)$, $x'(0+)$ es igual a cero, puesto que:

$$x'(t) = (-\alpha t^2 e^{-\alpha t} + 2t e^{-\alpha t}) \mu(t)$$

de donde:

$$x'(0+) = 0$$

Una forma más general del teorema del valor inicial afirma que si

$$x(0+) = \frac{dx(0+)}{dt} = \frac{d^2x(0+)}{dt^2} = \dots = \frac{d^{n-1}x(0+)}{dt^{n-1}} = 0$$

pero:

$$\frac{d^n x(0+)}{dt^n} \neq 0 ; \text{ entonces:}$$

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow \infty} s^{n+1} X_f(s) = \frac{d^n x(0+)}{dt^n}} \quad \text{Ec. (8.45)}$$

que se comprueba fácilmente si en la Ec.(8.43) hacemos $x(0+) = x'(0+) = \dots = x^{(n-1)}(0+) = 0$, lo cual reduce esta ecuación a:

$$X_f(s) = \frac{1}{s^{n+1}} \frac{d^n x(0+)}{dt^n} + \frac{1}{s^{n+2}} \frac{d^{n+1} x(0+)}{dt^{n+1}} + \dots$$

multiplicando ambos miembros de esta igualdad por s y tomando el límite cuando s tienda a infinito, obtenemos la Ec.(8.45). Para la señal:

$$x(t) = t^2 e^{-\alpha t} \mu(t)$$

conocemos que:

$$x(0+) = 0$$

$$\frac{dx(0+)}{dt} = 0$$

pero:

$$\frac{d^2 x(0+)}{dt^2} \neq 0$$

por tanto, de acuerdo a la Ec.(8.45) tenemos que:

$$\frac{d^2 x(0+)}{dt^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 X_f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3}{(s + \alpha)^3} = 2$$

TEOREMA DEL VALOR FINAL

En forma análoga tenemos que:

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X_f(s)} \quad \text{Ec. (8.46)}$$

que relaciona el comportamiento de $sX_f(s)$ en $s=0$ con el de $x(t)$ en $t=\infty$. Para comprobar este resultado, consideremos la transformada de Laplace de $dx(t)/dt$:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = s X_f(s) - x(0^+) = \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

tomando el límite cuando s tienda a cero en ambos miembros de esta igualdad, obtenemos:

$$\left[\lim_{s \rightarrow 0} s X_f(s) \right] - x(0^+) = x(\infty) - x(0^+)$$

y la Ec.(8.46) se verifica. Debemos, sin embargo, recalcar que la Ec.(8.46) se cumple únicamente si la RAC de $dx(t)/dt$ incluye e eje $j\omega$. Consecuentemente, el teorema del valor final se aplica cuando la expresión $sX_f(s)$ no tiene polos sobre el eje $j\omega$ ni a la derecha del eje $j\omega$. Consideremos, por ejemplo, la señal:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \mu(t)$$

por tanto:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} = 0$$

Tenen por otro lado que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s X_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/s}{s + \alpha} = 0 = x(\infty)$$

y la Ec.(8.46) se verifica. Sea, también, la se

$$x(t) = t^2 e^{-\alpha t} \mu(t)$$

cuyo valor final viene dado por:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s X_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{(s + \alpha)^3} = 0$$

Consideremos finalmente el siguiente ejemplo. Sea:

$$h(t) = -4(2t - 1)e^{-2t} \mu(t)$$

la respuesta impulsiva de un sistema lineal invariante. Queremos determinar la respuesta del sistema a la señal periódica $x(t)$ mostrada en la Fig.8.17, cuya transformada de Laplace viene dada por la expresión:

$$X_f(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s} - 2s^{-3s} + \dots)$$

de acuerdo a lo que obtuvimos anteriormente. La función de transferencia del sistema viene dado por:

$$H_f = \frac{4}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2} = \frac{4s}{(s+2)^2}$$

De manera que de acuerdo al teorema de convolución tenemos que:

$$Y_f(s) = X_f(s) H_f(s) = \frac{4}{s(s+2)^2} (1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s} - 2e^{-3s} + \dots)$$

Haciendo que $f(t)$ sea igual a la transformada inversa unilateral de Laplace de la fracción racional, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s(s+2)^2} \right\} = \left[\frac{4e^{st}}{(s+2)^2} \right]_{s=0} + 4 \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{s} \right]_{s=-2} = \\ &= [1 - (2t+1)e^{-2t}] \mu(t) \end{aligned}$$

La respuesta $y(t)$ del sistema viene dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) - 2f(t-1) + 2f(t-2) - 2f(t-3) + \dots = \\ &= [1 - (2t+1)e^{-2t}] \mu(t) - 2[1 - (2t-1)e^{-2(t-1)}] \mu(t-1) + \\ &+ 2[1 - (2t-3)e^{-2(t-2)}] \mu(t-2) - \dots \end{aligned}$$

8.13 UNA CONVENCION ALTERNA PARA LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Debemos puntualizar que la transformada unilateral de Laplace de acuerdo a la Ec.(8.29) es una de muchas posibles definiciones que podemos obtener para esta transformada a partir de la definición de la transformada bilateral de Laplace. En esta sección consideraremos una convención ligeramente diferente a la dada anteriormente. Esta es:

$$X_f(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{Ec. (8.47)}$$

Esta convención es muy útil y bastante utilizada en la literatura Puesto que el límite inferior de la integral en la Ec(8.47) es 0^- , cualquier función singular que ocurra en $t=0$ será tomada en consideración.

Para ilustrar la diferencia entre las dos convenciones consideramos la transformada unilateral de la señal:

$$x(t) = \delta(t) + e^{-2t} \mu(t)$$

De acuerdo a la Ec.(8.29) obtenemos:

$$X_I(s) = \frac{1}{s+2}$$

mientras que de acuerdo a la Ec.(8.47) obtenemos:

$$X_I(s) = 1 + \frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{s+2}$$

Puesto que la región de absoluta convergencia de una función singular es todo el plano s , la inclusión de funciones singulares en $t=0$ no cambia la RAC de la transformada unilateral de Laplace.

De acuerdo a esta segunda convención tenemos que:

$$\mathcal{L}_I \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = sX_I(s) - x(0^-) \quad \text{Ec.(8.48)}$$

Puesto que:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= [x(t)e^{-st}]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= -x(0^-) + sX_I(s) \end{aligned}$$

y en general:

$$\mathcal{L}_I \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right] = s^k X_I(s) - s^{k-2} \frac{dx(0^-)}{dt} - \dots - s \frac{d^{k-2} x(0^-)}{dt^{k-2}} - \frac{d^{k-1} x(0^-)}{dt^{k-1}}$$

Dejamos en libertad al lector de elegir cualquiera de estos dos convenciones. Dependiendo de la aplicación, una convención puede ser más útil que la otra.

6.9 BIBLIOGRAFIA

- [1] **LAGO, G., y L.M. BENNINGFIELD:** “Teoría de Sistemas y Circuitos”, Editorial limusa, México, 1984.
- [2] **LATHI, B.P.:** “Signals, Systemas and Communication”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- [3] **LIU, C.L, y J.W.S. LIU:** “Linear Systems Analysis’, Mc Graw Hill Book Cornpany, New York, 1975.
- [4] **OPPENHEIM A.V., y ALAN S. WILLSKY:** “Señales y Sistemas, Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México, 1994.
- [5] **PAPOULIS, A.:** “Circuits and Systems a Approach”, Holt-Saunders Japan, Ltd., Tokyo, 1981.
- [6] **POULARIKAS, A.D., y S. SEELY:** “Signals and Systems”, PWS Engineering, Boston, 1984.
- [7] **ZIEMER, R., TRANTER, W. y R. FANNIN:** “Signals and Systems: Continuos and Discrete”, Macmillan Publishing Company, New York, 1993