

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DEL RIESGO FINANCIERO CONSIDERANDO RIESGOS
EXTREMOS Y FLUCTUACIONES ESTOCÁSTICAS PARA UN
PORTAFOLIO DE INVERSIONES**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA EN
CIENCIAS ECONÓMICAS Y FINANCIERAS**

MARGARITA INÉS VELÍN FÁREZ
ma_velinf@hotmail.com

DIRECTOR: ING. CARLOS MORALES G. MSc.
carlos_f_morales_g@yahoo.com

Quito, Diciembre del 2008

DECLARACIÓN

Yo, Margarita Inés Velín Fárez, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Margarita Inés Velín Fárez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Margarita Inés Velín Fárez, bajo mi supervisión.

Ing. Carlos Morales G. MSc.
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTO

A nuestro Señor Jesucristo por todas las demostraciones de su infinito amor que a lo largo de estos años me ha dado...GRACIAS MI SEÑOR JESUCRISTO!!!

Dedicado...

A todas aquellas personas que un día decidieron ser diferentes...

CONTENIDO

RESUMEN

PRESENTACIÓN

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1: TEORÍA DEL RIESGO FINANCIERO.....	3
1.1 La Distribución Normal.....	4
1.2 Los Retornos.....	5
1.3 Medición del Riesgo.....	8
1.3.1. Caracterizaciones Axiomáticas de las medidas del Riesgo.....	8
1.3.1.1. El Sistema de Pedersen y Sarchell (PS).....	8
1.3.1.2. El Sistema de Artzner/Delbaen/Eber/Heath (ADEH)..	9
1.3.2. Riesgo como la magnitud de desviación de un punto....	9
1.3.2.1. Medidas del Riesgo considerando los dos lados.....	9
1.3.3. Valor en Riesgo.....	11
1.3.3.1. Método de varianza-covarianza.....	13
1.3.3.2. Simulación Histórica.....	14
1.3.3.3. Método Monte Carlo.....	15
1.3.3.4. Comparación entre los métodos tradicionales.....	16
CAPÍTULO 2: TEORÍA DE VALORES EXTREMOS.....	18
2.1 La Función de Distribución de las colas.....	19
2.1.1. Método de los Bloques Máximos.....	20
2.1.2. Picos sobre un umbral.....	23
2.2 Riesgo de Pérdida y valor en Riesgo.....	24
2.3. Estimador de la cola y del cuantil.....	25
CAPÍTULO 3: FLUCTUACIONES ESTOCÁSTICAS PARA LOS PRECIOS.....	29
3.1 Hipótesis de la caminata aleatoria.....	30
3.2 Modelo Estocástico para el cambio de precios.....	31
3.3 Valor en Riesgo Estocástico.....	34
3.3.1. VaR Estocástico para una distribución Normal.....	34
3.3.2. VaR Estocástico para una distribución de extremos.....	43
3.4 Análisis del Riesgo dependiente del tiempo.....	44

CAPITULO 4: CÁLCULO Y ANÁLISIS DEL VaR EXTREMO ESTOCÁSTICO PARA UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN...	49
4.1 Cálculo del VaR Estocástico considerando valores extremos para un activo.....	50
4.2 Cálculo del VaR Estocástico considerando valores extremos para un portafolio de inversión.....	54
4.3 Comparación entre el VaR Estocástico y el VaR Estocástico para valores extremos.....	55
4.4 Conclusiones y recomendaciones.....	57
REFERENCIAS.....	62
BIBLIOGRAFÍA.....	66
ANEXOS.....	69

RESUMEN

Este estudio considera como variable aleatoria a los retornos, es decir, al logaritmo de los precios, para determinar el VaR a través de distintas metodologías. Lo que se pretende estimar es el comportamiento temporal del VaR, para luego, al tomarlo como umbral, determinar el VaR estocástico considerando valores extremos para un activo, en primera instancia, y luego, para un portafolio de inversión con datos reales. Todo esto, usando la ecuación diferencial estocástica que describe la tasa de cambio en el tiempo de los retornos.

La generalización es directa, sin embargo, supone algunos conocimientos previos. Para determinar el riesgo financiero considerando valores extremos es necesario conocer el comportamiento de las colas de las funciones de distribución de las pérdidas; los métodos más conocidos son: Picos sobre el Umbral y el de Bloques Máximos.^[1] Aquí nos enfocamos esencialmente en el método de los Picos sobre un Umbral, usando la distribución generalizada de Pareto.

Con todo lo anterior se logra una mejor precisión en el estudio de los riesgos, pero si se desea incluir la evolución temporal de los precios es necesario calcular un VaR estocástico, definiendo exactamente las ecuaciones que rigen el comportamiento de éstos. Este VaR estocástico por el hecho de cambiar en el tiempo provoca un cambio en el número de valores que están presentes en las colas, ya que este VaR estocástico define un umbral, por encima del cual se aplica el teorema de Fisher-Tippett, es decir, los extremos comienzan a ser tomados en cuenta. En primera instancia se efectúan los cálculos para un activo, luego se generaliza para un portafolio de inversión con datos reales.

Evidentemente, se necesita un modelo que describa el comportamiento en el tiempo de los precios, que son los únicos datos reales que poseemos. Existen algunos ya planteados para el efecto, uno de ellos es el modelo de Ito^[2], donde el

precio es igual a una parte lineal más una parte estocástica, generalmente usando el proceso de Wiener. Es aporte fundamental de este trabajo, el considerar el proceso de Wiener, no para los desplazamientos de los retornos, sino para las tasas de cambio de éstos. Esto, basándonos en la interpretación dinámica del proceso de Wiener.^[3]

Todos los fenómenos o variables del mercado que afectan al precio se los ha considerado bajo una sola variable conocida como ruido blanco, ya que por la dificultad de incluir a cada uno de éstos sería imposible estimar el precio y por consiguiente el VaR.

Para calcular el VaR estocástico para extremos se utiliza la Teoría de Valores Extremos (TVE), juntamente con la teoría de procesos estocásticos utilizando el modelo de Wiener para los precios. Para el efecto se pone en consideración los conceptos antes mencionados, pero ahora en función del tiempo. Cabe recalcar que es de interés del presente trabajo el análisis fenomenológico del riesgo, es decir, cómo afectan las distintas variables al comportamiento de los retornos. Así, los parámetros de la función de distribución seguirán siendo calculados bajo las mismas definiciones pero ahora serán una función del tiempo; con esto y usando el método de Picos sobre un Umbral, se estiman los parámetros de la función de distribución generalizada de Pareto, a través de la función de máxima verosimilitud. El siguiente paso, a través del método del cuantil se calcula el VaR estocástico para extremos.

Finalmente se realiza el cálculo para un portafolio, ya que se ha venido considerando el estudio solamente para un activo, donde para el cálculo de la función de distribución se asume independencia de los activos que conforman el portafolio.

Con el presente trabajo se pretende tener una idea del comportamiento de los precios de un portafolio, para que al momento de tomar decisiones, éstas tengan un soporte matemático y no solo de la experiencia, que en muchas ocasiones ha llevado a cuantiosas pérdidas.

PRESENTACIÓN

La propuesta y cálculos están organizados en cuatro capítulos, de los cuales, los tres primeros se dedican a la teoría y parte de la aplicación, mientras que el último capítulo se dedica específicamente al cálculo y análisis del VaR estocástico para valores extremos para un portafolio.

El capítulo uno se refiere a la teoría del riesgo financiero, donde se enuncian las principales características del riesgo y la manera en cómo se lo puede cuantificar, además se presentan las definiciones del VaR tradicional, así como una comparación de los distintos métodos de cálculo. También se da una introducción al estudio de los retornos, que luego se usan como variable aleatoria.

En el capítulo dos se desarrolla la teoría de valores extremos. En principio se da una definición de valores extremos al estudiar la función de distribución de las colas, para luego pasar a los métodos que estudian el comportamiento de las mismas, siendo éstos, el método de Bloques Máximos y el de Picos sobre un Umbral. También, este capítulo nos introduce a la teoría de pérdidas extremas. Finalmente, describe al estimador de la cola y del cuantil de la función de distribución de las colas.

En el capítulo tres se realiza un enfoque de la teoría de procesos estocásticos que nos ayuda a comprender el comportamiento de los precios, y por tanto de los retornos en el tiempo. Se presenta la hipótesis de que las velocidades de cambio de los precios se modelan usando el proceso de Wiener y, a partir de esta ecuación se calculan los parámetros de la función de distribución para los retornos, a saber, una normal. Usando el método del cuantil, se calcula el VaR estocástico que se lo utiliza como umbral que define el límite para determinar las colas para luego calcular, considerando la distribución generalizada de Pareto, el VaR estocástico

para extremos. Finalmente, se realiza un análisis del valor en riesgo en el tiempo.

En el capítulo cuatro se efectúa el cálculo y análisis del VaR estocástico para extremos. Para estimar los parámetros de la función de distribución generalizada de Pareto se utiliza el método de máxima verosimilitud. También se compara lo que sucede entre las dos funciones calculadas para el VaR. Finalmente, se presentan los cálculos para el VaR estocástico considerando extremos para un portafolio de inversión, terminando en las conclusiones y recomendaciones después de realizada esta investigación.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas los desastres financieros, especialmente los vinculados al mercado de inversiones, han centrado la atención de administradores del riesgo enfatizando en la importancia del estudio de estas catástrofes. Factores sociales, económicos, políticos, etc., pueden representar un riesgo para la mayoría de bancos e instituciones financieras alrededor del mundo, puesto que no son fáciles de cuantificar y menos aún, de controlar, pudiendo resultar en cuantiosas pérdidas.

La utilización del Valor en Riesgo se ha generalizado en el ámbito de los mercados financieros en los últimos años. En este sentido, según señalaban Mori et al.(1996),^[4] aproximadamente la mitad de los *dealers* que operaban en los mercados internacionales ya estaban utilizando un sistema de dirección basado en el Valor en Riesgo, mientras que un 30% adicional tenía previsto implementarlo en un futuro inmediato. Por otro lado, es destacable que el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea haya adoptado como criterio la utilización obligatoria del VaR, para que un modelo de cuantificación de recursos propios por exposición frente al riesgo de mercado pueda ser considerado como aceptable. Así mismo, debe señalarse que en los últimos años, determinadas entidades privadas han desarrollado sus propias metodologías, de cara a la determinación del VaR.

Existen varias maneras de calcular el riesgo, generalmente lo que se pretende buscar es la mayor cantidad que se podría perder en una inversión, con un nivel de confianza y un horizonte de tiempo determinado, sin embargo, cabe notar que en la definición generalmente usada no se toma en cuenta el hecho de que las pérdidas pueden acumularse en intervalos de tiempo consecutivos, lo que provocaría que la pérdida total podría exceder sustancialmente la pérdida máxima posible calculada, el Valor en Riesgo (*VaR*). Esta definición genera dos métodos de cuantificar el riesgo; a saber, el cuantil y la varianza.^[5] Todo esto bajo el supuesto de que las pérdidas se encuentran distribuidas normalmente, sustentado por el Teorema del

Límite Central, el cual no considera valores extremos (atípicos)^[6], de modo que la estimación del riesgo es muy privativa, pudiendo suceder que la varianza comience a fluctuar demasiado y no se encuentre ninguna tendencia al considerar estos valores; y claramente la definición tradicional del riesgo pierde significado cuando la varianza se vuelve infinita. Es así, que la forma común en la que se calcula el riesgo no es del todo general.

Aparecen más problemas en el momento de definir las pérdidas, ya que se está dando un tratamiento simétrico a las pérdidas y a las ganancias, todo por considerar funciones a dos lados (como la normal) y como se sabe, esto no tiene sentido para el estudio de los riesgos^[7]. El riesgo solo tiene que ver con las posibles pérdidas al efectuar una inversión.

Los eventos extremos son en realidad los que más preocupan y deberían ser de mayor interés para las instituciones financieras, como ejemplo típico, se puede tomar el caso de la dolarización y la quiebra bancaria en el Ecuador, que aunque la probabilidad de ocurrencia era muy pequeña, (solo ha sucedido una sola vez en toda la historia del Ecuador) sucedió, y trajo consigo una pérdida enorme de dinero. Si se hubieran analizado los indicadores económicos que mostraban la posible presencia de valores extremos en los precios, talvés se podría haber mitigado en algo la crisis financiera. Es por esta razón que se debe crear un aparato matemático que permita estudiar tales eventos, con la finalidad de predecir futuras catástrofes económicas y tomar previsiones para poder sostener el mercado financiero.

Con la ejecución de este modelo y frente al análisis de los resultados, los inversionistas tendrán un referencial más ajustado a la realidad del movimiento de los mercados de capitales, los mismos que permitirán generar alertas tempranas y brindar criterios técnicos para la toma de decisiones con el objetivo de minimizar pérdidas, es decir, los inversionistas poseerán un soporte técnico y estratégico para el seguimiento y estudio de sus inversiones.

CAPÍTULO I

TEORÍA DEL RIESGO FINANCIERO

Luego de las numerosas crisis financieras ocurridas durante las últimas décadas, el riesgo financiero ha acaparado la atención, convirtiéndose en objeto de estudio tanto para instituciones financieras como para administradores del riesgo vinculados al mercado de inversiones, específicamente al mercado bursátil.

Para el análisis de los posibles riesgos a los cuales se enfrentaría un inversionista necesitamos describir a los factores que influyen el mercado financiero y hacen que las relaciones entre bienes y precios cambien. Tal análisis requiere varios niveles de asunciones. Usualmente se asume que el riesgo se comportará en el presente así como la ha venido haciendo en el pasado, es decir, se considera el análisis histórico. Mas aún, siempre se asume que los factores de riesgo están distribuidos normalmente, y tales distribuciones tienen parámetros fijos, media y desviación estándar.

Evidentemente, el fenómeno de las pérdidas en las inversiones es mucho más complejo, puesto que existen demasiados factores estrechamente correlacionados, los cuales son siempre cambiantes. Por tal motivo la estimación de las pérdidas se vuelve un tanto general. Si queremos estudiar de una forma más profunda el comportamiento de este fenómeno, es necesario eliminar algunas de las hipótesis aceptadas generalmente para dicho tratamiento.

A continuación se presenta la formalización de las definiciones usuales del riesgo tomando como variable aleatoria a los así llamados retornos, y discutiendo la noción intuitiva del riesgo. Lo que siempre se intenta es buscar una forma de medir el riesgo bajo algunas condiciones de incertidumbre.

1.1. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Se conoce que la función de distribución Normal o Gaussiana juega un rol central en muchos campos, ya que ésta describe adecuadamente el comportamiento de los datos cuando el número de éstos es grande. Por lo tanto sería de esperar que también en el riesgo se observen algunas manifestaciones de este comportamiento.

Esta distribución es el límite de los promedios de variables aleatorias independientes (a través del Teorema del Límite Central) siempre que estemos tratando con una cantidad de datos lo suficientemente grande. Tradicionalmente se ha venido usando la distribución normal, de modo que si se encontraban valores fuera de ésta, simplemente no se los tomaba en cuenta. Todo esto porque la caracterización del teorema que nos permite asumir normalidad simplemente se enfoca en la parte central de la función de distribución. A continuación se enuncia el teorema:

Teorema 1.1 (Teorema del Límite Central)^[8] Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias (por ejemplo las pérdidas financieras) independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución F , valor medio de las pérdidas $E(X_i) = \mu$ y varianza $var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, entonces $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, satisface,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) = \mathcal{N}(0, 1) \quad (1.1)$$

Esta función de distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, y en general cualquier función de distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, tiene dos propiedades convenientes. Por un lado, ésta puede ser caracterizada por sus dos primeros momentos μ y σ^2 , que se denominan: la media y la varianza, respectivamente. En el caso de μ , éste representa la localización, y σ la dispersión de los datos; como sabemos vienen dados por:

$$\mu = \int xf(x)dx \quad (1.2)$$

$$\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 f(x)dx \quad (1.3)$$

Por otro lado, se conoce perfectamente que la función densidad de probabilidad correspondiente $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se escribe como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1.4)$$

En el gráfico 1.1, se muestra la forma de la función densidad $f(X)$ de la distribución

Normal (izquierda), con X variable aleatoria, y su función de distribución acumulada (derecha). Observando las hipótesis del Teorema (1.1) es claro que cuando n es pequeño (en las colas) la función de distribución no tiene porque ser Gaussiana.

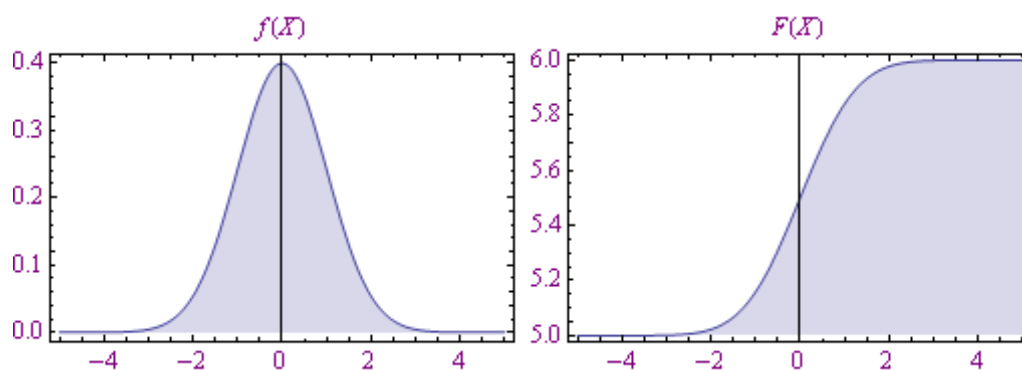


Gráfico 1.1.– *Función de densidad Gaussiana $f(X)$ y su función de distribución acumulada $F(x)$*

En el gráfico 1.2 se muestra la transformación de la función de densidad en una normal conforme crece n , los histogramas para cada conjunto de datos se superponen.

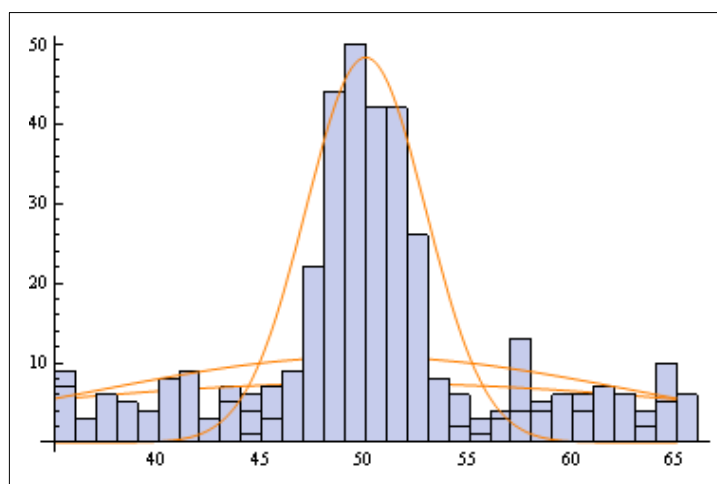


Gráfico 1.2.– *Convergencia de una función de distribución a una Normal*

1.2. LOS RETORNOS^[10]

Con las hipótesis planteadas se asume normalidad en los datos sean cual fueren, siempre y cuando se tenga un número grande de éstos; por lo que es necesario definir para el caso particular de los riesgos la variable aleatoria X que nos va a ayudar a estimar los mismos. Esta variable tendrá que estar de alguna forma relacionada con las pérdidas que se podrían tener después de haber efectuado una inversión; puede representar por ejemplo, las pérdidas acumuladas para un

portafolio de riesgos de crédito, de mercado, etc. En general X podría tener realizaciones positivas (ganancias) así como también negativas (pérdidas).

La noción intuitiva de pérdida nos lleva a construir X para cada intervalo de tiempo, más claramente en función de t y $t + dt$. Formalizando se tiene,

Definición 1.1 El retorno de un activo financiero es la diferencia entre el beneficio (en unidades monetarias) al final y al inicio del período considerado, esto nos lleva a la siguiente tasa de retorno (ROR):

$$ROR = \frac{\text{beneficio al final del período} - \text{beneficio al inicio del período}}{\text{beneficio al inicio del período}},$$

Matemáticamente, si el precio en el mercado de un activo al tiempo t es P_t , la definición anterior se convierte en:

$$ROR = R_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad (1.5)$$

Se asume que R_t sigue una distribución Normal,

$$R_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (1.6)$$

Para muchas de estas variables, sin embargo, la función de distribución Normal no puede ser correcta teóricamente.^[9] De ahí que para los precios negativos de instrumentos financieros, es necesario introducir otra función de distribución, conocida como *distribución lognormal*, cuya función densidad de probabilidad $f(X)$ se escribe:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{-\mu + \text{Log}(x)}{\sigma} \right)^2}, \quad (1.7)$$

Las distribuciones, normal y lognormal son muy similares para horizontes de tiempo cortos o para bajas volatilidades.

En el gráfico (1.3) se muestran las densidades de distribución para una $\mathcal{N}(5, 1)$ (en azul) y la de una lognormal derivada de ésta (en naranja). Como se puede observar, la forma de la lognormal denota claramente que ésta se ajusta solamente para valores positivos.

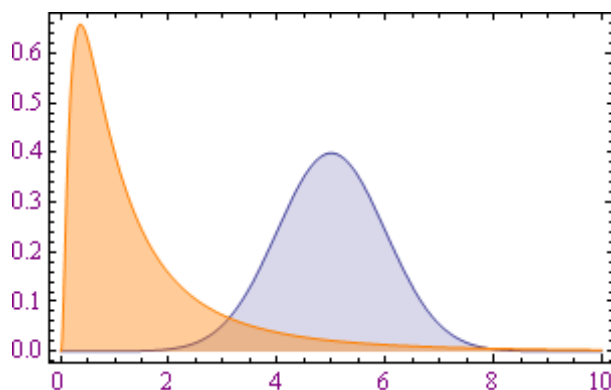


Gráfico 1.3. – Densidades de probabilidad Normal y Lognormal

Se puede definir otra medida r_t^* , como tasa de retorno de modo que:

$$1 + R_t = \frac{P_{t+1}}{P_t} =: \exp(r_t^*) \quad (1.8)$$

con

$$r_t^* = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_{t+1}}{P_t} = \ln P_{t+1} - \ln P_t =: p_{t+1} - p_t \quad (1.9)$$

$$r_t^* = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (1.10)$$

Los p_t así definidos se denominan precios logarítmicos, los cuales excluyen precios negativos. Para valores pequeños de la tasa de retorno, r_t^* no difiere mucho de R_t .

Por la expansión de Taylor, $\ln(1 + R_t) = R_t - \frac{R_t^2}{2} + \dots$, podemos ver que la diferencia es del orden de (R_t^2) . Así, para valores grandes de R_t la diferencia se incrementa. Entonces, la tasa de retorno R_t para el horizonte de tiempo T se define por:

$$1 + R^T = \prod_{t=1}^T (1 + R_t) = \exp\left(\sum_{t=1}^T r_t^*\right) = \frac{P_T}{P_0} \quad (1.11)$$

Definición 1.2 (Retorno Esperado) Denotemos por F a la función de distribución de r_t^* . El retorno esperado es:

$$r := Er_t^* = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (1.12)$$

Para una presentación más detallada se recomienda ver: "Stochastic Modeling in Economics and Finance" de Jitka Dupačová, Jan Hurl and Josef Štěpán.

1.3. MEDICIÓN DEL RIESGO^[11]

Puesto que ya se ha definido la variable aleatoria con la cual se va a trabajar, a saber, los retornos; es necesario definir las condiciones elementales que se deben imponer para que una medida del riesgo tenga sentido y nos de una estimación lo más cercana posible a la realidad, siempre teniendo en cuenta la incertidumbre que subyace bajo el proceso de predicción.

La medición del riesgo financiero y de las preferencias de los instrumentos financieros no es lo mismo. Al ordenar las preferencias, por ejemplo, activos A y B con consecuencias financieras X_A y X_B , éstas son comparadas con respecto a la preferencia bajo condiciones de riesgo. Una preferencia de orden $A \succ B$ significa que se prefiere A y no B . Este orden se representa por una función de preferencia Φ con $A \succ B \Leftrightarrow \Phi(X_A) > \Phi(X_B)$. Por el contrario, un riesgo de orden $A \succ_R B$ significa que, A es más riesgoso que B y está representado por una función R con $A \succ_R B \Leftrightarrow R(X_A) > R(X_B)$. Cada función R es conocida como *medida del riesgo*.

Las medidas del riesgo financiero pueden ser consideradas bajo las siguientes dos categorías:

- 1) El riesgo como magnitud de desviaciones de un punto de referencia, por ejemplo del valor medio (riesgo de primer orden); y
- 2) El riesgo como capital necesario (riesgo de segundo orden).

1.3.1. CARACTERIZACIONES AXIOMÁTICAS DE LAS MEDIDAS DEL RIESGO

1.3.1.1. EL SISTEMA DE PEDERSEN Y SATCHELL (PS)

Existen algunos sistemas de axiomas para medidas del riesgo. Se empezará con el sistema de PS, así los axiomas son:

- (PS 1) (no negatividad) $R(X) \geq 0$
- (PS 2) (homogeneidad positiva) $R(cX) = cR(X)$ para $c \geq 0$
- (PS 3) (subaditividad) $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2)$
- (PS 4) (traslado de invarianza) $R(X + c) \leq R(X)$ para todo c .

Al considerar $R(X) \geq 0$ como un requerimiento natural para medir el riesgo, PS deducen al riesgo como la desviación de una medida de localización. Homogeneidad positiva (PS 2) implica que el riesgo de un cierto múltiplo de la posición de un activo financiero es igual al correspondiente múltiplo del riesgo de la posición. Subaditividad (PS 3) requiere que el riesgo de una posición combinada de

activos financieros sea menor que la suma de los riesgos de las posiciones separadas; esto permite los efectos de diversificación de los instrumentos financieros en un portafolio. El traslado de invarianza (PS 4) hace que el riesgo sea invariante si se adiciona una constante a la variable aleatoria, la cual corresponde a la concepción del riesgo de localización libre. (PS 2) y (PS 3) implican que el riesgo cero sea asignado a variables aleatorias constante.

1.3.1.2. EL SISTEMA DE ARTZNER / DELBAEN / EBER / HEATH (ADEH)

"El sistema de ADEH ha sido una aproximación muy influyente. En adición a la subaditividad (ADEH 1) y a la homogeneidad positiva (ADEH 2), ellos postulan los axiomas:

(ADEH 3) (invariante ante traslaciones) $R(X + c) \leq R(X) - c$ para todo c .

(ADEH 4) (monotonicidad) $X \leq Y \Rightarrow R(Y) \leq R(X)$.

Si una medida del riesgo satisface estos cuatro axiomas, se dice que es una medida del *riesgo coherente*. Para el caso de $R(X) \geq 0$ se puede entender $R(X)$ como capital adicional necesario a ser adicionado a la posición riesgosa X para establecer una *posición menos riesgosa* (y satisfacer estándares regulatorios, por ejemplo). En lugar de (ADEH 3) resulta en $R(X + R(X)) = 0$. En el caso de que $R(X) < 0$, la cantidad $|R(X)|$ puede ser retirada sin arriesgar seguramente o violar los estándares de regulación respectivamente. En general, (ADEH 3) implica que sumar una cantidad a la posición inicial decrece el riesgo. La monotonicidad significa que si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para cada estado, entonces X es más riesgosa por la pérdida potencial más alta.

Obviamente, el sistema de axiomas de ADEH se utiliza para las medidas del riesgo de segundo orden. En general, las medidas del riesgo $R(X) = E(-X)$ y $R(X) = \max(-X)$, la máxima pérdida, son medidas coherentes del riesgo. Esto implica que aún si las condiciones coherentes pueden imponer requerimientos relevantes para medidas del riesgo razonables, no todas las medidas del riesgo coherentes deberían ser razonables".^[12]

1.3.2. RIESGO COMO LA MAGNITUD DE DESVIACIÓN DE UN PUNTO

1.3.2.1. MEDIDAS DEL RIESGO CONSIDERANDO LOS DOS LADOS^[13]

En lo siguiente, el valor esperado será considerado como un referente relevante. Las medidas del riesgo de dos lados miden la magnitud de la distancia (en ambas direcciones) desde las realizaciones de X hasta $E(X)$. Funciones diferentes de la distancia nos llevan a diferentes medidas del riesgo. Buscar instancias en las desviaciones cuadráticas (volatilidad) nos lleva a la varianza de acuerdo a (1.3) o la

desviación estándar, como medida del riesgo al tomar la raíz cuadrada, es decir,

$$\sigma(X) = +\sqrt{Var(X)} \quad (1.13)$$

La varianza y la desviación estándar, respectivamente han sido las medidas del riesgo tradicionales en economía y en finanzas, desde los trabajos pioneros de Markowitz. Estas medidas del riesgo exhiben un número de propiedades técnicas. Por ejemplo, la varianza para un portafolio es la suma de las varianzas y covarianzas de los instrumentos individuales. Más allá, la varianza es utilizada como una función estándar de optimización. Finalmente, existen algunas herramientas estadísticas para estimar la varianza y la matriz de varianza/covarianza, respectivamente.

Por otro lado, una medida de dos lados contradice la noción intuitiva del riesgo de que solo las desviaciones negativas son peligrosas. Además, la varianza no se toma en cuenta para las colas anchas de la distribución analizada y para el riesgo de cola correspondiente.

Considerando la desviación absoluta como una medida de distancia, se obtiene la medida MAD, desviación media absoluta, de acuerdo a

$$MAD(X) = E[|X - E(X)|] \quad (1.14)$$

o las medidas del riesgo más generales,

$$R(X) = E[|X - E(X)|^k] \quad (1.15)$$

$$R(X) = E[|X - E(X)|^k]^{1/k} \quad (1.16)$$

El objetivo fundamental en la estimación del riesgo es tratar de medir cuánto se alejan los datos del valor medio, y establecer una cota máxima para esta medida. Evidentemente, una forma de hacerlo es calculando la volatilidad, es decir, qué tan dispersos se encuentran los datos alrededor de la media. De la ecuación (1.3) observamos claramente que σ^2 mide de alguna manera tal dispersión. De ahí que se suele considerar a σ (desviación estándar) como una medida del riesgo. Evidentemente las ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) son una generalización de (1.3). Tradicionalmente, por simplicidad y facilidad en la implementación se ha considerado a las medidas de orden $k = 2$ como acertadas en cierta manera. Así, el riesgo de los retornos queda establecido en la siguiente definición:

Definición 1.3 (Desviación Estándar – Volatilidad) Se define el riesgo de los retornos como la desviación estándar de r_t^* :

$$\sigma = \sqrt{E(r_t^* - Er_t^*)^2} = \sqrt{Er_t^{*2} - (Er_t^*)^2} \quad (1.17)$$

Un activo menos riesgoso es un activo con $\sigma = 0$, por tanto el retorno será una constante con probabilidad 1.

El término volatilidad se suele usar para la varianza o para la desviación estándar de los retornos, a veces para otra variable financiera estocástica.

La definición (1.17) no es la única, existen varias maneras de estimar la volatilidad por ejemplo^[14]:

- Promedios móviles
- Método del Percentil o Simulación Histórica
- Promedios móviles ponderados exponencialmente
- GARCH

1.3.3. VALOR EN RIESGO

Otra medida muy utilizada y recomendada para medir el riesgo es el denominado *Valor en Riesgo*, VaR . (Hay que distinguir entre los símbolos VaR - Valor en Riesgo y var – la varianza)

Definición 1.4 El Valor en Riesgo, con un nivel de confianza q , VaR_q , se determina por la relación:

$$P(X < VaR_q) = q \quad (1.18)$$

$$VaR_q = F^{-1}(q) \quad (1.19)$$

Claro está en (1.18) debemos tomar como variable aleatoria r_t^* en lugar de X , además (1.19) representa la inversa de una función de distribución acumulada F , que como ya se mencionó, se toma como una normal, siempre sustentados en el teorema 1.1.

El Valor en Riesgo es una medida del riesgo de mercado y se define como la máxima pérdida potencial en el valor de un activo o portafolio, para un horizonte de tiempo y una probabilidad q dada, debido a cambios en los precios de mercado. Responde a la pregunta ¿cuánto puedo perder bajo una probabilidad q en un intervalo de tiempo determinado?.

Las entidades que participan en el mercado financiero están expuestas a cambios en las variables que determinan los precios de los instrumentos que éstas poseen.

El VaR es una medida de dicha exposición, éste está en unidades monetarias por

lo que es de fácil comparación entre entidades como también de fácil comprensión para las personas que están interesadas en conocer el riesgo de mercado.

Como se señaló el VaR_q es el punto extremo sobre el cual los retornos alcanzarán valores con probabilidades q . Así, VaR_q es el cuantil al $100q$ por ciento de la distribución de X . Diferentes instituciones financieras usan diferentes niveles de confianza; por ejemplo, Bankers Trust 99%, J.P. Morgan 95%, Citibank 95.4%.^[15]

A veces se toma el nivel de confianza en la forma inversa, 1%, 5%, etc., pero el significado es el mismo; es decir, la máxima pérdida posible será menor que el VaR con probabilidad q o será mayor que el VaR con probabilidad $1 - q$.

En el gráfico (1.4) se observa la ubicación del VaR y su relación con q , para dos funciones de distribución normales con distintos parámetros de escala y localización, α indica el área a la izquierda del VaR . Siendo en este caso el término α lo mismo que q .

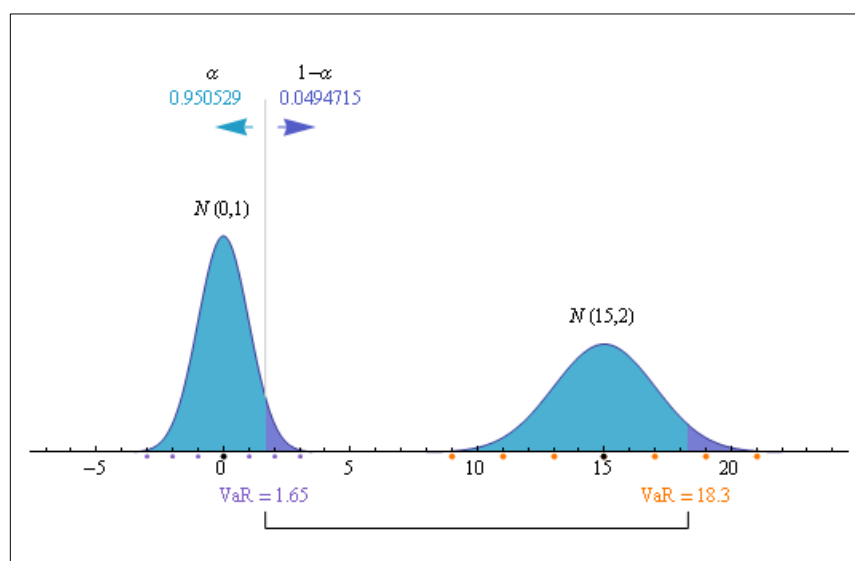


Gráfico 1.4.– Esquema comparativo de la ubicación del VaR en las distintas funciones de densidad

Si se denota el $100q\%$ del cuantil de la función de distribución $F(x)$ como μ_α , entonces tendremos para el VaR_α

$$P(x < VaR_\alpha) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha \quad (1.20)$$

y por lo tanto,

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma\mu_\alpha \quad (1.21)$$

Algunas veces, (1.21) se denomina *valor en riesgo absoluto*, mientras que

$$VaR_{arel} = \sigma \mu_a \quad (1.22)$$

se llama valor en *riesgo relativo*.

1.3.3.1. MÉTODO DE VARIANZA - COVARIANZA^[16]

El método de la varianza - covarianza es un modelo estadístico en el que se asume que las variaciones de los precios están distribuidas normalmente. Se necesitan simplemente los valores esperados y la matriz de covarianza, es decir, las desviaciones estándar y las correlaciones, de los retornos. El uso de la covarianza para el cálculo del VaR depende de tres factores: la volatilidad de la variación de precios, el período de tiempo y las correlaciones entre activos. En la práctica la volatilidad se calcula de acuerdo a los métodos mencionados en la sección 1.3.2.1. Generalmente, se considera un día como el período de tiempo. Si se desea calcular para un período de tiempo arbitrario T , se hace uso de la siguiente relación para la volatilidad:

$$\sigma_T = \sigma_{1\text{día}} \sqrt{T} \quad (1.23)$$

Las correlaciones describen cómo las variaciones del precio de diferentes activos se mueven en relación una de otra, además, la diversificación del riesgo presente en el portafolio (i.e. el conjunto de los activos que conforman las inversiones de un inversor).

Si consideramos solamente un activo dentro del portafolio, el valor en riesgo para tal activo es:

$$VaR = \sigma_{1\text{día}} * P, \quad (1.24)$$

aquí P denota el precio del activo.

El VaR de un portafolio es simplemente la volatilidad del mismo, sin embargo, cuando calculamos el VaR para un portafolio lo que se pretende es hallar la función de distribución para el portafolio dado que cada uno de los activos sigue su propia función de distribución.

Evidentemente, la dependencia de la función de distribución del portafolio de las funciones de distribución de los activos afectará directamente al cálculo de la volatilidad. Así, para dos activos A y B, la volatilidad σ_p del portafolio, en función de las volatilidades σ_A , σ_B (volatilidades de los activos A y B, respectivamente), viene dada por:

$$\sigma_p = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_A^2 + b^2 \cdot \sigma_B^2 + 2a \cdot b \cdot \rho_{AB} \cdot \sigma_A \sigma_B}, \quad (1.25)$$

En la ecuación anterior a y b representan la proporción de los Activos A y B en el portafolio y ρ_{AB} es la correlación entre el Activo A y el Activo B. Además, se puede ver que el tercer término sería 0 si la correlación entre los dos activos es 0, es decir, si los Activos A y B son independientes. En este caso, la ecuación (1.25) se convierte en

$$\sigma_p = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_A^2 + b^2 \cdot \sigma_B^2} \quad (1.26)$$

La ecuación (1.26) puede ser extendida para muchos activos de un portafolio:

$$VaR_p = \sqrt{\sum P_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_i \sum_j P_i \cdot P_j \cdot \sigma_i \sigma_j \cdot \rho_{ij}}, \quad (1.27)$$

donde, i y j son las series de pares de activos o factores de riesgo en el portafolio, P_i es precio del activo i -ésimo.

Finalmente, el VaR para un portafolio VaR_p se escribe,

$$VaR_p = \sqrt{V \cdot C \cdot V^T} \quad (1.28)$$

donde V es el vector fila compuesto por el VaR de cada uno de los activos, C es la matriz de correlaciones y V^T es el vector fila transpuesto.

El método de la covarianza tiene un número importante de beneficios, es fácil y rápido de calcular. Aunque, la covarianza es un modelo que hace fuertes suposiciones acerca del comportamiento financiero de los productos. El supuesto más grande es que las variaciones de los precios en los mercados financieros están distribuidas normalmente. Aunque esto es razonable, sin embargo no es del todo exacto, ya que la suposición de linealidad para algunos productos no es correcta para portafolios que contienen aún una pequeña cantidad de derivados como opciones, swaps, etc.

1.3.3.2. SIMULACIÓN HISTÓRICA

Si poco se conoce acerca de la forma analítica (paramétrica) de las distribuciones de los retornos, aunque una cantidad suficiente de datos (históricos) estén disponibles, entonces un método propio para el análisis del riesgo se puede basar en una aproximación *no paramétrica*.

"El método de simulación histórica es el método más simple de obtener una distribución de pérdidas y ganancias de un portafolio. El método requiere una base de datos de los retornos para los instrumentos financieros que comprenden el portafolio, y utiliza éstos para generar un set de retornos simulados para el portafolio. Los retornos pueden ser utilizados para obtener una distribución

empírica para las pérdidas en el portafolio, al convertir los retornos a pérdidas (simplemente vía un cambio de signo), y clasificarlos dentro de un orden, $X_1 < \dots < X_N$. La distribución de probabilidad empírica para las pérdidas en el portafolio está definida por:

$$P(X \leq x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < X_1 \\ i/N & X_i \leq x \leq X_{i+1} \\ 1 & X_N \leq x \end{array} \right\} \quad (1.29)$$

Así, para un intervalo de confianza de $1 - q = 0.95$, y una base de datos $N = 100$ observaciones, el VaR debería estar dado como el 95% de pérdida en el set ordenado. La principal desventaja de esta aproximación es que es imposible obtener una estimación del VaR fuera de la muestra. En otras palabras, la probabilidad más pequeña que puede ser obtenida tal que $P(X \leq VaR)$ es $1/N$. Así, para el caso anterior no sería posible estimar el VaR para un nivel de confianza mayor que 99%. La ventaja de la Simulación Histórica es que ésta refleja correctamente la distribución de probabilidad histórica de las variables del mercado. Sin embargo, si se consideran relativamente pocos datos en las colas de la distribución, la estimación del VaR de estas observaciones es incorrecta".^[17]

1.3.3.3. MÉTODO MONTE CARLO^[18]

La Simulación Monte Carlo tiene algunas similitudes con la simulación histórica. Lo más importante es que el método es capaz de capturar el riesgo de portafolios que incluye opciones y otros instrumentos, cuyos valores son funciones no lineales de los factores de mercado subyacentes.

Como la simulación Histórica, la simulación Monte Carlo cumple esto al reevaluar el portafolio repetitivamente, usando nuevos valores hipotéticos de los factores de mercado implícitos que determinan el valor del portafolio. Ya que el valor del portafolio exacto es calculado por cada realización de los factores de mercado considerado el método captura algunas no linealidades en el valor del portafolio.

La principal diferencia entre los dos métodos, es que el método Monte Carlo no conduce la simulación usando los cambios observados en el mercado de factores sobre los últimos N períodos para generar N portafolios hipotéticos de ganancias o pérdidas. En lugar de esto, el método Monte Carlo selecciona una distribución que se ajuste a los posibles cambios en el mercado de factores, luego un generador de números aleatorios es utilizado para generar miles de cambios hipotéticos en el mercado de factores. Entonces, éstos son utilizados para construir la distribución del posible portafolio de ganancias o pérdidas. Finalmente, el Valor en Riesgo se determina de esta función de distribución.

Se prefiere la Simulación Monte Carlo como una solución de cálculo del VaR frente al método de varianza covarianza para portafolios que incluyen derivados.

1.3.3.4. COMPARACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS TRADICIONALES^[19]

El método de la Simulación Histórica es muy utilizado cuando la cantidad de datos no es muy grande y no se tiene suficiente información acerca de la distribución de las ganancias y de las pérdidas. Aunque es muy tedioso, este método recoge todos las recientes quiebras del mercado, ésto como ventaja principal, puesto que es muy importante para la administración del riesgo. En términos de representar el actual comportamiento del mercado, este método es superior a la covarianza. El método de la Simulación Histórica no asume que las variaciones de los precios están distribuidas normalmente. Esto es una ventaja significativa de este método para calcular el VaR. La Simulación Histórica captura las características de la distribución de la variación del precio del portafolio, así como el VaR es calculado para la distribución actual de la variación del valor del portafolio. Como resultado de esto, donde una distribución del portafolio tiene colas anchas, esto tenderá a producir un VaR suavemente más alto que el VaR calculado por el método de la covarianza.

El método de la Varianza - Covarianza es el más rápido, sin embargo, éste tiene muchas asumpciones acerca de la distribución de los datos del mercado y una aproximación lineal del portafolio. Probablemente, éste es el mejor método para estimaciones rápidas del VaR. Sin embargo, se debe tener mucho cuidado al utilizar este método para portafolios no lineales.

El método Monte Carlo es muy lento, pero éste es probablemente el método más utilizado, ya que es lo suficientemente flexible para incorporar información privada junto con observaciones históricas. Existen muchos métodos de cálculos veloces, por ejemplo, las así llamadas técnicas de reducción de la varianza.

Los resultados de los tres métodos tradicionales son muy similares, de ahí que queda la elección de cada inversor de acuerdo a su portafolio de instrumentos financieros.

Todo lo expuesto anteriormente parte del supuesto de que los retornos tienen una función de distribución log-normal, con las excepciones señaladas, de este modo, aunque tal asumpción nos facilita los cálculos e interpretaciones, nos impone algunas limitaciones en el tratamiento del riesgo. En particular, el teorema del límite central se enfoca en el análisis tomando en consideración los valores cercanos al valor medio, provocando que los que están fuera o lejanos a esta zona queden sin

ser analizados, y no sólo eso; pues además podría suceder que el momento definido en (1.3) se haga infinito, claramente la noción de riesgo perdería sentido. Evidentemente, si queremos hacer un análisis completo y certero, se debe considerar todos estos factores, puesto que es necesario establecer predicciones con el mayor nivel de confianza posible.

En el siguiente capítulo se detallan algunos de esos problemas y la manera en cómo se los enfrenta matemáticamente. Siempre intentando establecer un estudio completo del comportamiento de los retornos.

CAPÍTULO II

TEORÍA DE VALORES EXTREMOS

Como se mencionó anteriormente, al asumir normalidad en nuestros datos imponemos condiciones a priori al análisis matemático del riesgo. Escencialmente trataremos algunos de los problemas que aparecen al quitar algunas de las restricciones impuestas a la teoría.

Por un lado, las definiciones (1.3) y (1.4) pierden significado cuando estamos fuera de la parte central de la función de distribución, puesto que las hipótesis del teorema del límite central se postularon para el estudio de esta zona. Además, en el sentido de que F ya no es Gaussiana y al estar fuera de la región central no se sabe qué función de distribución siguen los valores allí ubicados.

Por otro lado, el tomar como medida del riesgo a la varianza se vuelve efímero cuando aparecen valores alejados de la parte central, ya que la varianza comienza a cambiar demasiado solo por algunos valores casuales. Como ya se mencionó, las técnicas tradicionales se enfrentaban con este problema simplemente omitiendo los valores atípicos; indudablemente, esto no soluciona el problema, al contrario, oculta ciertos comportamientos que podrían afectar drásticamente la toma de decisiones. De igual forma, eventos que son poco probables, por su gran tamaño por ejemplo, podrían afectar el comportamiento de todas las relaciones financieras llevando a catástrofes económicas.

En realidad, el estudio del riesgo es el estudio de posibles eventos extremos que cambien por completo la configuración del mercado de inversiones. El paso a seguir es el tradicional, es decir; se necesita buscar qué distribución tiene la

variable aleatoria considerando todos los valores incluso los extremos y ver hasta qué punto se puede mantener la definición del cuantil como medida del riesgo.

2.1. LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LAS COLAS

El primer paso para encontrar la función de distribución en las colas, es definir exactamente lo que se va a considerar como cola, de modo que se pueda saber la zona en la cual se puede aplicar el teorema del límite central y en cual no.

Definición 2.1 Llamaremos Valores Extremos a todos los X de modo que:

$$P(X > VaR) = \beta, \quad 0.95 < \beta \leq 1 \quad (2.1)$$

Claramente, estos valores corresponden a eventos catastróficos, de probabilidades muy grandes.

El VaR en (2.1) es el Valor en Riesgo, recordando que la variable aleatoria X es los retornos. Si el Valor en Riesgo es la mayor pérdida esperada, es claro que los valores que sean mayores que el VaR serán muy pocos, y como se mencionó en la sección 1.3.2, al usar funciones de distribución a dos lados, implícitamente con (2.1) queda definido un valor VaR^* para la cola inferior, de modo que los valores que sean más pequeños que éste serán los que tengan una probabilidad de ocurrencia bastante pequeña. Esto trae un problema con la noción tradicional de riesgo ya que, una definición que trate simétricamente a las pérdidas y a las ganancias no tiene mucho sentido, siendo que el riesgo financiero siempre concierne a las pérdidas.

Definidos así, los valores extremos poseen una varianza muy grande, que como se analizó en el capítulo anterior deja de brindar información relevante con respecto al riesgo. Más aún, ésta puede hacerse infinita si la función de densidad de probabilidad decae más lento que una ley de potencias, es decir si:

$$f(x) \simeq \frac{\mu A^\mu}{|x|^{1+\mu}}, \quad \text{con } \mu < 2 \quad (2.2)$$

esto nos muestra que solo para ciertas funciones de distribución se puede hablar de la varianza en un sentido finito y por tanto de riesgo finito.

Como ya se señaló; matemáticamente el estudio probabilístico de eventos extremos siempre está encaminado a conocer la función de distribución de los datos de las colas, de modo que se pueda utilizar, si es posible, las mismas definiciones de riesgo, simplemente cambiando de función de distribución. Más adelante se verá que esto no siempre es posible, lo que nos lleva a buscar nuevas definiciones y tratamientos.

2.1.1. MÉTODO DE LOS BLOQUES MÁXIMOS

Una de las formas para determinar el comportamiento de los valores extremos es utilizar la función de Bloques Máximos^[20], la cual calcula la cantidad que supera a todas las realizaciones de la variable aleatoria, para luego tomar esa cantidad y compararla con cierto umbral. Para este análisis nos centraremos en períodos de tiempo largos como trimestres, semestres o años; a los cuales llamaremos *bloques*. Notemos a los datos diarios como X_1, X_2, \dots, X_n y al máximo de éstos como:

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n > 1 \quad (2.3)$$

asumiendo que los datos son independientes e idénticamente distribuidos se puede calcular la función de distribución para M_n , así

$$P(M_n \leq x) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

con $M_n \uparrow x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty, n \rightarrow \infty$

Claro está que interesa saber el comportamiento de la ecuación (2.4) cuando n es grande, de modo que la función máximo se aplique sobre el mayor número de datos. Así, se puede enunciar el siguiente teorema que nos permite conocer la función de distribución de las colas:

Teorema 2.1 (TEOREMA DE FISHER-TIPPETT) Si existen secuencias de números reales $a_n > 0$ y b_n , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n \leq x) = Q(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

para alguna función de distribución no degenerada Q (Se dice que F pertenece al máximo dominio de atracción de Q). Entonces Q es una de las siguientes funciones de distribución de valores extremos.

$$\begin{aligned} \text{Frechét} \quad \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0 \\ \text{Gumbel} \quad \Lambda(x) &= \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \\ \text{Weibull} \quad \Psi(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Además la función de distribución límite Q es única.

Existen algunos cálculos para establecer las sucesiones a_n y b_n , sin embargo, al momento de escoger las sucesiones queda determinada directamente una de las funciones de distribución. Para el caso en que las variables aleatorias son normales

e independientes, se puede anunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.2^[21] Sean $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ variables aleatorias normales estándar, la distribución de M_n dado en (2.4), converge después de una normalización apropiada a una distribución de Gumbel, con a_n y b_n dados en las siguientes ecuaciones:

$$a_n = \sqrt{2 \ln n} + \frac{-\frac{1}{2} \ln n - \ln(2\sqrt{\pi})}{\sqrt{2 \ln n}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{2 \ln n}} \quad (2.7)$$

así, para todo $\tau \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[M_n \leq a_n + b_n \tau] = \exp(-e^{-\tau}) \quad (2.8)$$

Además, el resultado anterior se mantiene si las variables aleatorias son dependientes pero en una forma suficientemente débil.

En el gráfico 2.1 se muestra cómo aparece la función densidad de probabilidad Q , dependiendo de las sucesiones a_n , b_n . Aquí las sucesiones se han tomado aleatoriamente para observar cómo el histograma coincide con una de las distribuciones de extremos; donde los colores rojo, gris, y azul representan la distribución de Weibull, Gumbel y Fréchet, respectivamente.

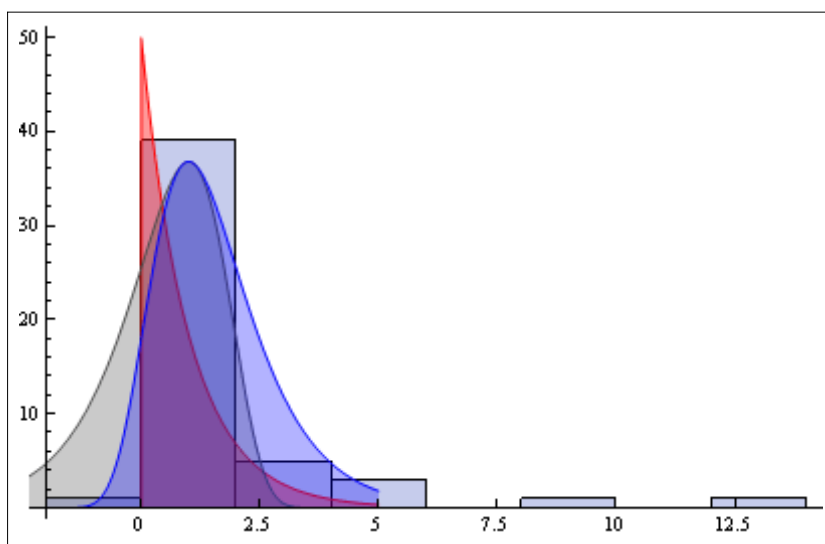


Gráfico 2.1.– *Función de distribución Q para los distintos casos*

El teorema de Fisher-Tippett es el análogo del teorema del límite central para las colas, por medio de éste se puede estudiar el comportamiento del riesgo considerando tales valores; aunque todavía es necesario analizar lo que sucede con los momentos de las funciones de distribución de valores extremos.

Puesto que Q podría ser de 3 formas como se indicó, a veces es conveniente

construir una sola función dependiente de un parámetro tal que la forma de ésta dependa del escogitamiento del parámetro, y así obtener una función general. Fueron Jenkinson-von Mises quienes encontraron una representación para Q . La cual se sintetiza a continuación:

Definición 2.2 (Distribución Generalizada de Valores Extremos)
[Representación de Jenkinson-von Mises]

$$H_{\xi,\beta}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\} & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\{-e^{-x}\} & \text{si } \xi = 0, \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

donde, $1 + \xi x > 0$, y ξ es parámetro de forma.

La Distribución Generalizada de Valores Extremos representa todas las tres clases de extremos:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \xi > 0, \text{ entonces } & H_{\xi,\beta}(x) \text{ es de la forma} \\ Q_{\xi}((x - 1)/\xi) = \Phi_{1/\xi}(x), & \text{(Frechét)} \end{array} \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \xi = 0, \text{ entonces } & H_{\xi,\beta}(x) \text{ es de la forma} \\ Q_0(x) = \Lambda(x), & \text{(Gumbel)} \end{array} \quad (2.11)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \xi < 0, \text{ entonces } & H_{\xi,\beta}(x) \text{ es de la forma} \\ Q_{\xi}(-(x + 1)/\xi) = \Psi_{-1/\xi}(x), & \text{(Weibull)} \end{array} \quad (2.12)$$

donde, μ es el parámetro de localización, y $\psi > 0$ parámetro de escala, y $Q_{\xi,\mu,\psi}(x) = Q_{\xi}(x - \mu)/\psi$

De las tres clases de extremos dentro de Bloques Máximos, generalmente la función de distribución más utilizada es la de Gumbel, por la convergencia de los datos a la misma cuando la función de distribución decae más rápido que (2.2). Se puede decir que esta función se asemeja a una gaussiana (comportamiento asintótico).

De todo lo analizado anteriormente cabe recalcar que para la aplicación a problemas reales es necesario calcular los estimadores para los parámetros de las funciones de distribución. En el presente trabajo será necesario, como se verá más adelante, calcular tales estimadores en función del tiempo.

De este modo, los estimadores de *máxima verosimilitud* para la función de distribución de Gumbel, con parámetro de localización a , y parámetro de escala b , se escriben a continuación

$$\hat{b} = \bar{X} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{(j)} \left[\sum_{i=j}^n \frac{1}{i} \right] \quad (2.13)$$

$$\hat{a} = -\hat{b} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{X_i}{\hat{b}}\right) \right] \quad (2.14)$$

X_j representa el estadístico de orden j .^[22]

Con todo esto se podría efectuar un análisis estadístico de los valores extremos, aunque en el presente trabajo no se tomará tal alternativa, es imperativo realzar el hecho de que existe toda una estadística para el estudio de valores extremos.

2.1.2. PICOS SOBRE UN UMBRAL

Otra de las formas de conocer cuál es el comportamiento de los valores extremos, es calcular la probabilidad de que una variable aleatoria X caiga en un intervalo determinado, asumiendo que ya superó cierto umbral; este método se lo conoce como Picos sobre un Umbral. Lo que se va a utilizar, evidentemente es una probabilidad condicional, para que podamos encontrar la nueva función de distribución en función de las ya conocidas (la que determina el umbral, y la que describe los valores que están por encima del umbral).

Uno de los ingredientes del método de los Picos sobre un Umbral es el siguiente teorema:

Teorema 2.3 Para una variable aleatoria con función de distribución F , tal que F satisface la condición (2.5), se tiene,

$$\lim_{u \uparrow x_F} P\left(\frac{x-u}{\beta(u)} > x \mid X > u\right) = \left\{ \begin{array}{ll} (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0 \end{array} \right\}, \quad (2.15)$$

donde, $\beta(u)$ es una función positiva de u .

Definición 2.3 Sea X una variable aleatoria con función de distribución F , además $x_F = \sup\{x, F(x) < 1\} \leq \infty$, para un $u < x_F$ fijo, denominaremos a $F_u(x)$ la función de distribución de los excesos de X o de F sobre el umbral u . $F_u(x)$ tiene la forma

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u) \quad (2.16)$$

Con la ayuda del teorema 2.3 se puede demostrar que $F_u(x)$ converge a una distribución generalizada de Pareto, cuando $u \rightarrow \sup\{x, F(x) < 1\}$ ^[23]

Definición 2.4 (Distribución Generalizada de Pareto, DGP)

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\psi}\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi}\right) & \text{si } \xi = 0, \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

con $\psi > 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$

La distribución Generalizada de Pareto representa las siguientes funciones de distribución:

- $\xi > 0$ Pareto $x \geq 0$,
- $\xi = 0$ Exponencial $x \geq 0$,
- $\xi < 0$ Pareto $0 \leq x \leq -\psi/\xi$

En el gráfico 2.2 se muestra la función de distribución generalizada de Pareto (izquierda), y la exponencial (derecha) correspondiente a ésta cuando $\xi = 0$.

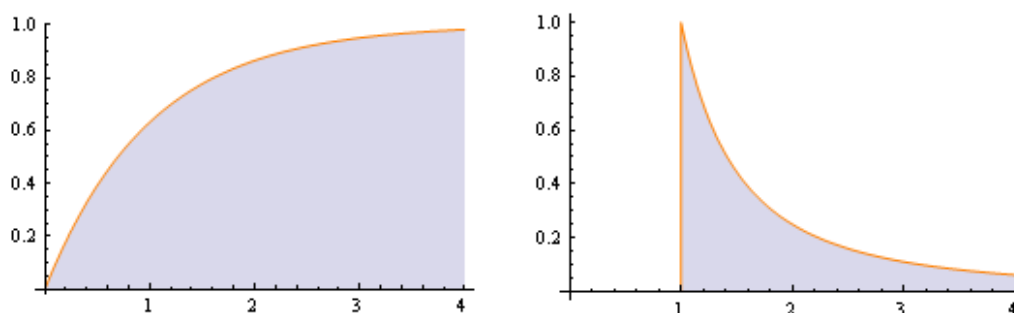


Gráfico 2.2. – Función de distribución Generalizada de Pareto

2.2. RIESGO DE PÉRDIDA Y VALOR EN RIESGO

Hasta ahora se ha analizado cómo están distribuidos los puntos extremos, y se mantiene la misma definición del VaR anterior; es decir, el cuantil de la función de distribución. Sin embargo, resta ver qué sucede cuando la varianza es infinita, para eso se necesita definir nuevamente el VaR y nos introducimos en la teoría de *probabilidad de pérdidas extremas*.^[24]

Se define la función de distribución de las pérdidas considerándolas como valores negativos. La probabilidad de perder una cantidad $-\delta x$ más grande que cierto umbral Λ en un horizonte de tiempo determinado τ está definida por:

$$P[-\delta x > \Lambda] = P[\delta x < -\Lambda] = \int_{-\infty}^{-\Lambda} f_{\tau}(\delta x) d\delta x \quad (2.18)$$

Se puede definir el riesgo como un nivel de pérdida Λ_{VaR} correspondiente a una

probabilidad de pérdida P_{VaR} sobre un intervalo de tiempo τ ,

$$\int_{-\infty}^{-\Lambda_{VaR}} f_{\tau}(\delta x) d\delta x = P_{VaR} \quad (2.19)$$

Se puede ver directamente que la ecuación (2.19) no pierde sentido aún cuando la varianza se haga infinita, puesto que la forma de medir el riesgo ha cambiado. Ahora se considera la probabilidad de que las pérdidas (tomadas con valor negativo) sean menores que $-\Lambda_{VaR}$ así siempre estamos en la parte negativa de la función de distribución, no importa qué tan grande sea Λ_{VaR} , puesto que siempre se toma a éste con signo negativo, y ya no se está tomando la distancia entre el valor medio y el punto, lo que evita el problema de la varianza infinita.

2.3. ESTIMADOR DE LA COLA Y DEL CUANTIL

Ya definidas las funciones de distribución para las colas, el problema ahora está en saber los parámetros de localización y de forma, siempre tratando de estimar usando los parámetros empíricos.

Primeramente, definimos el número de realizaciones de X_i que pasaron el umbral, de la siguiente forma:

$$N_u = \text{card}\{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\} \quad (2.20)$$

card denota el número de elementos del conjunto.

Si $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$, entonces, usando la ecuación (2.16) se obtiene:

$$\bar{F}_u(y) = P(X - u > y \mid X > u) = \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)}, \quad y \geq 0 \quad (2.21)$$

equivalentemente se tiene que:

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y), \quad y \geq 0 \quad (2.22)$$

Al estimar $\bar{F}(u)$ y $\bar{F}_u(y)$ por el método de Picos sobre un Umbral, se tiene:

$$\widehat{F}(u) = \frac{N_u}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i > u) \quad (2.23)$$

Aproximadamente,

$$\bar{F}_u(y) \approx \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

Esto resulta en los siguientes estimadores de la cola y del cuantil^[25]

Estimador de la cola

$$\widehat{F(u+y)} = \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{y}{\widehat{\beta}} \right)^{-1/\widehat{\xi}}, \quad y \geq 0 \quad (2.25)$$

transformando,

$$\widehat{F(x)} = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{x-u}{\widehat{\beta}} \right)^{-1/\widehat{\xi}} \quad (2.26)$$

Estimador del cuantil

$$\widehat{x}_q = \widehat{VaR}_q = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1-q) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right), \quad q \in (0,1) \quad (2.27)$$

Un método estándar de estimar los parámetros ξ y β es la estimación por Máxima Verosimilitud. Aquí el método se basa en la maximización de la función de verosimilitud del conjunto de datos, los cuales caen por encima del umbral u . Sin embargo, es necesario tener en mente que el proceso de estimación trabaja con un número pequeño de datos, es decir los que pasan el umbral. Por esta razón no siempre puede encontrarse con las propiedades asintóticas ideales de los estimadores de máxima verosimilitud, y se debería usar preferentemente otros métodos para comparar los resultados, por ejemplo, el estimador de Hill.^[26]

Haciendo uso de la ecuación (2.27) se puede estimar el VaR para los puntos que sobrepasan el VaR tradicional, es decir, los eventos catastróficos.

La función de distribución (2.26) entrega nuevas probabilidades a los valores de las colas, claramente se ha cambiado el conjunto de sucesos. Así el VaR extremo representa la mayor pérdida posible, pero tomando como conjunto de sucesos a las pérdidas extremas. Evidentemente, al tener una función de distribución se puede calcular cualquiera de los valores medios correspondientes a las catástrofes.

En el gráfico (2.3) se presenta la función de distribución para distintos parámetros de forma $\widehat{\xi} = -2.5$ (izquierda) y $\widehat{\xi} = 1.5$ (derecha), manteniendo constante $\widehat{\beta} = 1.51$, $N_u = 16$, $n = 50$, $u = 0.36$.

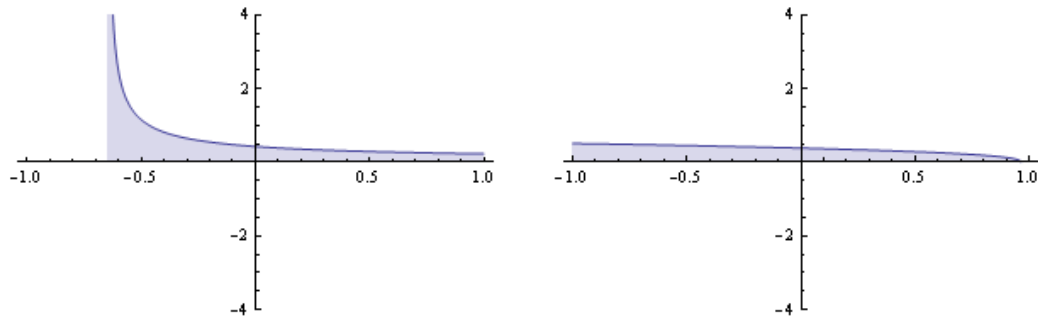


Gráfico 2.3. – *Función de distribución de la cola*

Cabe recalcar que para encontrar el VaR extremo se ha hecho uso de la definición dada en (1.19).

Finalmente, para analizar el VaR estocástico es necesario introducir nuevos tratamientos a cada una de las definiciones dadas en los capítulos precedentes, haciendo uso de la dependencia temporal de los precios obtendremos un VaR dependiente del tiempo, que claramente se acerca más a la realidad, que un VaR estático.

Es de interés del presente trabajo en particular observar cómo se comporta el VaR si se consideran las fluctuaciones en el tiempo de los precios, más aún, interesa observar el comportamiento de los valores extremos cuando el VaR es una función dependiente del tiempo. Con este objetivo, es necesario establecer los estimadores para los parámetros desconocidos en la ecuación (2.27), para luego establecer cierta dependencia temporal.

Para un valor de umbral u dado, definimos N_1 como el número de datos, tomados de los N originales, que caen por debajo del umbral. Tomamos $N_2 = N - N_1$. Definimos también $Y_j = X_j - u$, con $X_i > u$, $j = 1, \dots, N_2$

La función de máxima verosimilitud de una muestra de Y_1, \dots, Y_{N_2} de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas bajo la ley generalizada de Pareto, viene dada por

$$\left(1 - \left(1 - \xi \frac{u - v}{\psi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)^{N_1} \prod_{i=1}^{N_2} \frac{(1 - \xi z_i)^{\frac{1+\xi}{\xi}}}{\psi} \quad (2.28)$$

donde $z_i = \frac{(x_i - v)}{\psi}$

Finalmente la función Log-Verosimilitud se escribe

$$L(\psi, \xi) = -N_2 \ln \psi - \sum_{i=1}^{N_2} \frac{(1 + \xi)}{\xi} \ln\left(1 + \frac{\xi x_i}{\psi}\right) + N_1 \ln\left(1 - \left(1 + \frac{\xi u}{\psi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \quad (2.29)$$

En la ecuación (2.29) se ha hecho $\nu = 0$, puesto que se está trabajando con la función de distribución de los excesos. Los estimadores para ψ y ξ se encuentran maximizando la función $L(\psi, \xi)$. En este caso, sin embargo, no existe una solución analítica, y solo es posible una solución numérica.^[27]

Con los parámetros ya estimados se puede pasar a calcular el VaR para extremos usando la ecuación (2.27), para luego pasar a buscar una dependencia temporal del valor en riesgo.

CAPÍTULO III

FLUCTUACIONES ESTOCÁSTICAS PARA LOS PRECIOS

Hasta ahora se ha venido considerando procesos discretos, en los cuales por definición se tenían valores puntuales de los precios; esto es incorrecto puesto que se sabe que el tiempo fluye continuamente y por tanto los precios deben tomar valores en los reales positivos, con esto se puede efectuar mejores estimaciones, aunque los cálculos se complican. Evidentemente, al considerar los precios variando en el tiempo el *VaR* también será dependiente del tiempo; de este modo un valor que en un instante es extremo en otro puede dejar de serlo, puesto que el VaR está fluctuando en el tiempo. Esto provoca que también se busque el comportamiento temporal en las colas.

Una de las maneras más sencillas de incluir tales fluctuaciones, es considerando a los retornos como la suma de un término lineal y un término estocástico.^[28] En el término estocástico se están manifestando cientos de factores que afectan a los precios y provocan su variación. En vista de que no se puede poner a cada uno de estos factores en ecuaciones que describan su comportamiento individualmente, usamos el así llamado ruido blanco^[29], entendido como una suma de innumerables factores que afectan randómicamente al precio.

Por el teorema del límite central se puede asumir que éstos están distribuidos normalmente. Como se deduce inmediatamente, las colas no pueden ser tomadas bajo tal suposición. Se puede intentar un cálculo similar para éstas.

Cabe recalcar que, en el presente capítulo se presentan cálculos previos para la obtención del modelo, utilizando de esta manera los datos del activo uno del

portafolio a aplicarse, cuyo nombre del activo nos reservamos, por cuestiones de privacidad de la institución portadora del portafolio de inversión.

3.1. HIPÓTESIS DE LA CAMINATA ALEATORIA^[30]

"Bajo la hipótesis de la caminata aleatoria, los precios logarítmicos de (1.9), siguen el modelo

$$p_{t+1} - p_t = \mu + \varepsilon_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

donde los ε_t , son variables aleatorias no correlacionadas (forma débil), o independientes (forma fuerte) idénticamente distribuidas con $E(\varepsilon_t) = 0$ y $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ (varianza). Luego, supondremos que los ε_t son independientes y están idénticamente distribuidos, lo que significa que los r_t^* también se comportan de la misma forma bajo la hipótesis de caminata aleatoria"^[31].

Para períodos de tiempo grandes T ,

$$p_T = p_0 + \mu T + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t, \quad T \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

con $E(p_T) = p_0 + \mu T$ y $var(p_T) = \sigma^2 T$. En el caso estacionario ($\mu = 0$) existen solo fluctuaciones aleatorias alrededor del precio logarítmico inicial p_0 . Para los precios originales P_t se tiene

$$P_{t+1} = P_t e^{\mu + \varepsilon_{t+1}} \quad (3.3)$$

o,

$$P_T = P_0 \exp\left(\mu T + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t\right) \quad (3.4)$$

Las razones $\frac{P_1}{P_0}, \frac{P_2}{P_1}, \dots, \frac{P_T}{P_{T-1}}$ son, por lo tanto, variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, al igual que los retornos R_0, \dots, R_T .

Por (3.1), algunas veces se supone que los procesos de precios originales vienen dados por:

$$P_{t+1} - P_t = \mu + \varepsilon_{t+1} \quad (3.5)$$

considerando las mismas suposiciones para los ε_t .

Incluso, a veces se efectúan suposiciones no realistas, como la independencia de los P_t , lo cual no garantiza la independencia de los retornos R_t . Para esto, analicemos la covarianza entre dos tasas de retorno sucesivas:

$$\text{cov}(R_t, R_{t-1}) = \text{cov}\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}, \frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = E\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right) - E\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)E\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (3.6)$$

como los retornos son independientes e idénticamente distribuidos, se obtiene finalmente:

$$\text{cov}(R_t, R_{t-1}) = EP_t E\left(\frac{1}{P_t}\right) \left(1 - EP_t E\left(\frac{1}{P_t}\right)\right) \quad (3.7)$$

lo cual, a su vez, difícilmente podría ser cero.

La asunción de que los retornos siguen el modelo de una caminata aleatoria lleva a considerar un modelo estocástico para el cambio de precios, para poder más tarde llegar a una descripción un tanto más aproximada a la realidad del comportamiento de los retornos.

3.2. MODELO ESTOCÁSTICO PARA EL CAMBIO DE PRECIOS^[32]

"Para el análisis del Valor en Riesgo considerando fluctuaciones del precio en el tiempo se tomará en cuenta un modelo estocástico. Para esto, es necesario algunas asunciones, como: i) toda la historia de la evolución de los precios está reflejado en el precio actual; y (ii) la respuesta del mercado para cualquier pieza nueva de información es inmediata. La suposición (i) se asemeja a la propiedad de Markov".^[33]

Notaremos $\Delta t > 0$, como el tiempo y $\Delta P := P_{t+\Delta t} - P_t$, $P := P_t$ la variación del precio para un instante de tiempo, siendo P_0 el precio inicial. En el modelo se supone que el retorno, $\frac{\Delta P}{P}$ en nuestro caso, puede ser descompuesto en una parte determinística y en una estocástica, de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta P}{P} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W \quad (3.8)$$

El primer término $\mu \Delta t$, de la ecuación anterior es la parte determinística, μ es llamado *coeficiente de tendencia* o arrastre, mientras que para el segundo, σ es el término estocástico llamado *volatilidad*, *error estándar* o *difusión*, y $\Delta W := W(t + \Delta t) - W(t)$ el incremento del proceso de Wiener estándar.

Con ΔW distribuida normalmente con una $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, la ecuación (3.8) puede ser escrita en la forma

$$\Delta P = \mu P \Delta t + \sigma P \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.9)$$

donde ε es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, de modo que el retorno $\frac{\Delta P}{P}$ posea la distribución normal $\mathcal{N}(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$. Formalmente, para $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene la ecuación

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) describe el denominado movimiento Browniano^[34].

En el gráfico 3.1 se muestran las realizaciones de una variable aleatoria que sigue un movimiento browniano:

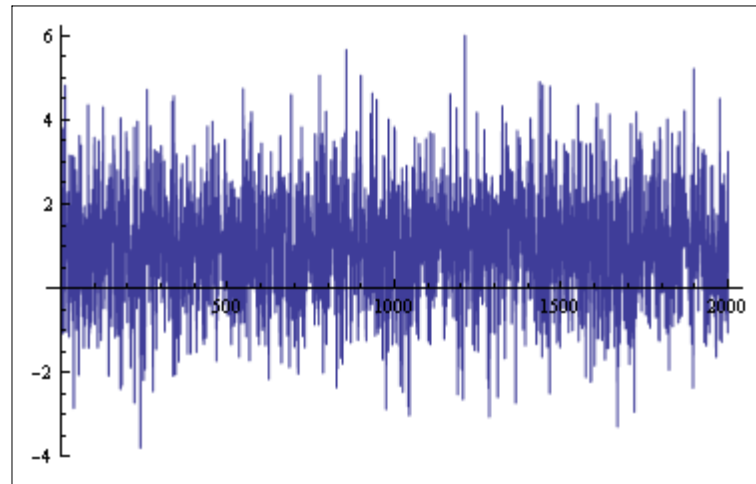


Gráfico 3.1. – *Números aleatorios generados usando la función de distribución para un movimiento browniano*

La función de distribución relacionada a este fenómeno es una normal, la cual se indica en el gráfico (3.2)

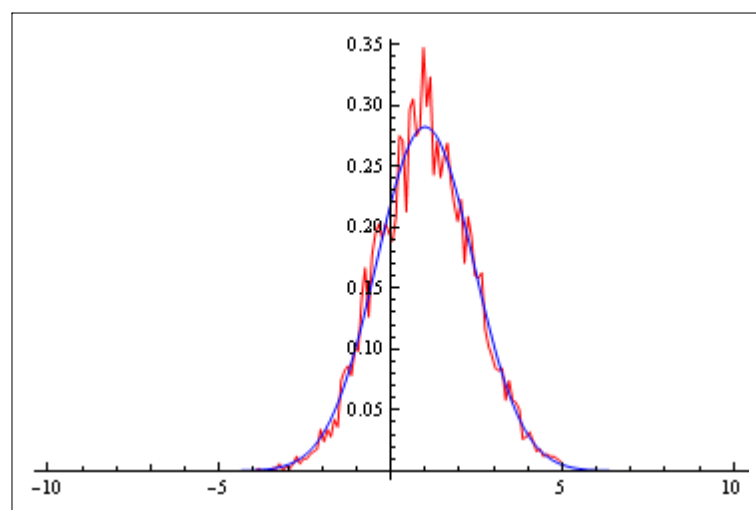


Gráfico 3.2. – *Comparación entre la función de distribución teórica y la calculada a partir de los datos*

En el gráfico anterior se muestra la función densidad de probabilidad del movimiento browniano representado en el gráfico (3.1) comparada con la densidad de probabilidad teórica.

Ahora se utilizará la fórmula de Itô^[35] para caracterizar el desarrollo de los precios logarítmicos. Para $f = f(P, t)$ la fórmula de Itô es:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial P} \mu P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial P} \sigma P dW \quad (3.11)$$

haciendo $f(P) := \ln P$ se puede obtener a partir de (3.11) la solución para la ecuación (3.10) para los precios *logarítmicos*:

$$d \ln P = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW \quad (3.12)$$

La versión discreta de la ecuación (3.12), haciendo $\ln P = p$, es:

$$\ln P_{t+\Delta t} - \ln P_t = \ln(P_{t+\Delta t}/P_t) = p_{t+\Delta t} - p_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (3.13)$$

donde ε está distribuida normalmente ($\mathcal{N}(0, 1)$).

La solución para la ecuación (3.10) dado un precio inicial P_0 es:

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \quad (3.14)$$

por tanto, las funciones de distribución \mathcal{L} para $p_t - p_0$ y p_t/p_0 son respectivamente normal y lognormal, así:

$$\mathcal{L}(p_t - p_0) = \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}(p_t/p_0) = LN \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) \quad (3.16)$$

respectivamente. $LN(m, s^2)$ es la distribución de la variable aleatoria $\exp\{\mathcal{N}(m, s^2)\}$, a saber, la distribución log-normal con parámetros m y s^2 , los cuales no son la media y varianza, respectivamente. La función densidad de $LN(m, s^2)$ es:

$$g(x; m, s^2) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x\sqrt{2\pi s^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - m}{s} \right)^2 \right\} & x > 0, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

La media de $LN(m, s^2)$ es $E(LN(m, s^2)) = \exp(m + \frac{1}{2}s^2)$ y la varianza es $var(LN(m, s^2)) = \exp(m + \frac{1}{2}s^2)(\exp(s^2) - 1)$.

3.3. VALOR EN RIESGO ESTOCÁSTICO

3.3.1. VaR ESTOCÁSTICO PARA UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL^[36]

Un proceso estocástico $X(t)$ se define a través de su densidad de probabilidad $p(x, t)$. Los dos argumentos x y t se refieren a las dos formas en las que $X(t)$ puede variar. En otras palabras, $X(t)$ y $X(t + dt)$ son variables aleatorias diferentes, las cuales cuando representan diferentes partes de un proceso de Markov se pueden expresar en una ecuación dinámica de la forma

$$X(t + dt) - X(t) = F[X(t), dt] \quad (3.18)$$

La función de propagación de Markov $F[X(t), dt]$ es una variable aleatoria. Tal propagador determina probabilísticamente $X(t + dt)$ partiendo de $X(t)$. A través de la ecuación (3.18) se asume que el proceso es a tiempo continuo y, la variable aleatoria también lo es, de modo que

$$F[X(t), dt] \rightarrow 0, \quad dt \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

Un proceso para el cual el propagador de Markov viene dado por

$$F[X(t), dt] = \sqrt{\sigma^2 dt} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0, 1) \quad (3.20)$$

es un proceso de Wiener, donde σ^2 es un parámetro que caracteriza el proceso, además, por la notación usada se puede observar claramente que este parámetro representa a la volatilidad definida anteriormente.

El proceso de Wiener es el proceso más simple de los procesos de Markov continuos, así la ecuación (3.18) se convierte en

$$X(t + dt) - X(t) = \sqrt{\sigma^2 dt} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0, 1) \quad (3.21)$$

Esta ecuación es la base sobre la cual los procesos más complicados pueden construirse. Aquí $\mathcal{N}_t^{t+dt}(0, 1)$ denota una función de distribución normal con media cero y varianza uno, asociada explícitamente con el intervalo temporal $(t + dt)$. La ecuación (3.21) nos dice que cuando la variable $X(t)$ toma el valor $x(t)$ al tiempo t , $X(t + dt)$ está distribuida normalmente con media $x(t)$ y varianza $\sigma^2 t$. Un caso particular es la ecuación (3.15).

El término \sqrt{dt} en (3.21) brinda ciertas características a la ecuación (3.21) completamente diferentes a las que usualmente se conocen del cálculo ordinario, a saber las propiedades de dt . Por ejemplo, los términos que son proporcionales a \sqrt{dt} son mucho más grandes que los términos proporcionales a dt cuando $dt \rightarrow 0$. Sin embargo, para este caso el término \sqrt{dt} está multiplicando a $\mathcal{N}_t^{t+dt}(0, 1)$, el cual en diferentes subintervalos asume valores positivos o negativos diferentes.

El efecto total de añadir todos éstos es reducir la magnitud de $\sqrt{dt} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1)$ más que la de dt .

Sin embargo, se puede notar que cuando $dt \rightarrow 0$

$$X(t+dt) \rightarrow X(t) \quad (3.22)$$

y por lo tanto

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{dt}} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1) \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

Así, el proceso de Wiener es, en su dominio, continuo en toda parte pero no es suave en ninguna. Esta propiedad especial hace a la ecuación (3.21) un tipo diferente de objeto matemático, el cual se conoce como ecuación diferencial estocástica.^[37]

Se puede verificar directamente que si se subdivide el intervalo de tiempo de t a $t+dt$ en dos subintervalos, uno de t a $t+dt/2$ y el otro, de $t+dt/2$ a $t+dt$, se obtiene para el propagador de Wiener,

$$\sqrt{\sigma^2 dt} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1) = \sqrt{\sigma^2 \frac{dt}{2}} \mathcal{N}_{t+\frac{dt}{2}}^{t+dt}(0,1) + \sqrt{\sigma^2 \frac{dt}{2}} \mathcal{N}_t^{t+\frac{dt}{2}}(0,1) \quad (3.24)$$

Lo que muestra que $\sqrt{\sigma^2 \frac{dt}{2}} \mathcal{N}_{t+\frac{dt}{2}}^{t+dt}(0,1)$ y $\sqrt{\sigma^2 \frac{dt}{2}} \mathcal{N}_t^{t+\frac{dt}{2}}(0,1)$ son estadísticamente independientes, dicho de otro modo $\sqrt{\sigma^2 dt} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1)$ no está correlacionada temporalmente.

El proceso de Wiener descrito es una herramienta matemática para modelar el movimiento browniano descrito por la ecuación (3.10), movimiento que gobierna la evolución temporal de los precios.

Lo que se necesita ahora es integrar la ecuación (3.10) para poder encontrar el comportamiento de la función de distribución en el tiempo, lo cual servirá luego para definir el VaR estocástico.

Es importante mencionar que el modelo usual para el comportamiento de los retornos en el tiempo es el que viene dado por la ecuación (3.12), de modo que la función de distribución para los retornos viene dada por las ecuaciones (3.15) y (3.16). Sin embargo, en el presente trabajo se supone que no son los retornos los que se describen mediante la ecuación (3.12) sino la tasa de cambio de éstos en el tiempo. Esto basándonos en la noción fundamental de que cualquier factor que afecte o provenga del mercado financiero en donde se desenvuelve el instrumento financiero analizado, hará que la tasa de variación de los precios de dicho

instrumento cambie, generalmente en el sentido dinámico de que el momentum se ve afectado por cualquier interacción física, y es la magnitud con más sentido real en comparación a la posición.^[38] Con esto, es necesario calcular la nueva función de distribución para los retornos. Se partirá por tanto, de la ecuación que describe la tasa de cambio o de la velocidad.

Así, si las velocidades son las que siguen el proceso de Wiener, basados en esto y tomando en cuenta que cada variable en la secuencia de variables $\frac{d\ln P}{dt}(dt)$, $\frac{d\ln P}{dt}(2dt), \dots, \frac{d\ln P}{dt}(t)$ es una combinación lineal de variables normales independientes $\mathcal{N}_0^{dt}(0,1)$, $\mathcal{N}_{dt}^{2dt}(0,1), \dots, \mathcal{N}_{t-dt}^t(0,1)$, y la combinación lineal de normales estadísticamente independientes es normal, entonces $\frac{d\ln P}{dt}$ es normal, esto es

$$\frac{d\ln P}{dt}(t) = \mathcal{N}_0^t\left(\text{media}\left[\frac{d\ln P}{dt}(t)\right], \text{var}\left[\frac{d\ln P}{dt}(t)\right]\right) \quad (3.25)$$

Entonces el problema se reduce a encontrar las expresiones para la media y la varianza en (3.25).

Consideremos la ecuación para la tasa de variación de los precios

$$\frac{d\ln P}{dt}(t+dt) - \frac{d\ln P}{dt}(t) = -\gamma \frac{d\ln P}{dt}(t)dt + \sqrt{\sigma^2 dt} \mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1) \quad (3.26)$$

En este caso hemos considerado al término γ con signo negativo, sin embargo también se han realizado los cálculos y el análisis para γ con signo positivo, los mismos que estarán detallados en el anexo.

Tomando valores medios a ambos lados de la ecuación anterior y resolviendo la ecuación resultante se obtiene la expresión para la media

$$\text{media}\left[\frac{d\ln P}{dt}(t)\right] = \left\langle \frac{d\ln P}{dt}(t) \right\rangle = C_0 e^{-\gamma t}, \quad \frac{d\ln P}{dt}(0) = C_0 \quad (3.27)$$

Ahora necesitamos calcular $\text{var}\left[\frac{d\ln P}{dt}(t)\right] = \left\langle \frac{d\ln P}{dt}(t)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{d\ln P}{dt}(t) \right\rangle^2$. Para esto se considera la ecuación,

$$d\left[\frac{d\ln P}{dt}(t)^2\right] = \left[\frac{d\ln P}{dt}(t+dt)\right]^2 - \left[\frac{d\ln P}{dt}(t)\right]^2 \quad (3.28)$$

Reemplazando el propagador de Wiener en la ecuación anterior y despreciando términos de orden superior se obtiene, tomando el valor medio a ambos lados de la ecuación,

$$d\left\langle \frac{d\ln P}{dt}(t)^2 \right\rangle = -2\gamma \left\langle \frac{d\ln P}{dt}(t)^2 \right\rangle dt + \sigma^2 dt \quad (3.29)$$

Después de algunas operaciones, y recordando que $\frac{d\ln P}{dt}$ es una combinación lineal

de $\mathcal{N}_0^{dt}(0,1)$, $\mathcal{N}_{dt}^{2dt}(0,1), \dots, \mathcal{N}_{t-dt}^t(0,1)$, y no de $\mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1)$, de modo que $\frac{d\ln P}{dt}$ y $\mathcal{N}_t^{t+dt}(0,1)$ son estadísticamente independientes, se obtiene la expresión para la varianza,

$$\text{var}\left[\frac{d\ln P}{dt}(t)\right] = \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}), \quad \text{var}\left[\frac{d\ln P}{dt}(0)\right] = 0 \quad (3.30)$$

Así, la ecuación (3.25) se convierte en

$$\frac{d\ln P}{dt}(t) = \mathcal{N}_0^t\left(C_0 e^{-\gamma t}, \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})\right) \quad (3.31)$$

Evidentemente, se deben imponer algunas condiciones sobre los coeficientes γ y σ de modo que la varianza de (3.31) sea positiva y por lo tanto la función de distribución esté bien definida.

Podemos ver que la media de la tasa de variación de los precios en el tiempo es decreciente y se acerca asintóticamente a 0, de modo que las condiciones que se deben imponer sobre γ solo serán impuestas por la varianza.

Como se puede observar a partir de la ecuación (3.30) la varianza es creciente y se va acercando asintóticamente a $\frac{\sigma^2}{2\gamma}$, evidentemente si el factor γ es pequeño la cota se hará grande, y cuando el factor γ se tiende a cero la cota tiende al infinito, y por tanto la varianza también lo hará. El factor γ hace que la varianza sea acotada y tome valores solo dentro de cierto rango. En tal caso no existe ningún problema con γ puesto que la varianza siempre es positiva independientemente de los parámetros γ o σ .

La función de distribución (3.31) describe no solo la tasa de variación del precio en el tiempo, sino cualquier proceso gobernado por la competencia entre el comportamiento lineal y fluctuaciones aleatorias de igual magnitud.

Sin embargo, para el propósito de esta investigación es necesario encontrar la función de distribución de $\ln P$ puesto que solo ésta nos servirá para definir un VaR , de acuerdo a (3.12). De ahí que es necesario encontrar la función de distribución de $\ln P$.

Del mismo modo que se hizo para la tasa de cambio de $\ln P$ es necesario hacerlo para $\ln P$. Entonces se debe considerar la ecuación que relaciona la tasa de variación en el tiempo de la variable aleatoria, tal ecuación es

$$\ln P(t + dt) - \ln P(t) = \frac{d\ln P(t)}{dt} dt \quad (3.32)$$

(3.32) debe resolverse iterativamente, lo que genera la sucesión de expresiones para $X(dt)$, $X(2dt)$, \dots , $X(t)$, cada cual es combinación de Normales correlacionadas

$\mathcal{N}_0^{dt}(0, 1)$, $\mathcal{N}_0^{2dt}(0, 1), \dots, \mathcal{N}_0^{t-dt}(0, 1)$, las cuales a su vez son una combinación lineal de normales independientes $\mathcal{N}_0^{dt}(0, 1)$, $\mathcal{N}_{dt}^{2dt}(0, 1), \dots, \mathcal{N}_{t-dt}^t(0, 1)$.

Bajo estas consideraciones, y después de algunos cálculos se llega a establecer la ecuación de la función de distribución de $\ln P$, la cual se escribe a continuación:

$$\ln P(t) = \mathcal{N}_0^t \left(\begin{array}{c} x_0 + \frac{C_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \\ \frac{\sigma^2}{\gamma^3} \left(2e^{-\gamma t} - \frac{e^{-2\gamma t}}{2} \right) + \frac{\sigma^2}{\gamma^2} t - \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{\gamma^3} \end{array} \right), \quad \langle \ln P(0) \rangle = x_0 \quad (3.33)$$

La ecuación anterior muestra el comportamiento de la función de distribución de los retornos en el tiempo debido al cambio de los precios de un producto en el tiempo, el modelo describe como ya se mencionó la competencia entre las fluctuaciones estocásticas y la tendencia lineal, que dependiendo de los factores que gobiernen el proceso una de las dos tendencias dominará a la otra. Tales fenómenos se han visto presentes en economía y son objeto de estudio en otras ramas de la ciencia como la física y la química.

En el caso muy particular de los precios de cierto bien, se interpreta a las fluctuaciones como la suma de todos los factores que pudieran influir en el comportamiento de éste. Generalmente y por razones bien sentadas, las cuales no se discutirán en el presente trabajo, a tal fenómeno se lo conoce como ruido blanco.

Evidentemente, la presencia del tiempo en las ecuaciones manifiesta una clara relación entre los parámetros de localización y de escala (media y varianza) y la variable aleatoria, es decir, la varianza depende directamente de la variable aleatoria que depende a su vez del tiempo, estas formulaciones explícitas de dependencia dan origen a lo que se conoce como procesos autorregresivos, que son series cronológicas que describen directamente a los procesos dando una dependencia explícita de los parámetros de la función de distribución y la variable aleatoria.

En los cálculos efectuados está implícita la dependencia, pues las funciones de distribución, que aunque no dependen directamente de la variable aleatoria (pues solo dependen explícitamente del tiempo) fueron deducidas bajo la asunción de que el precio y por lo tanto los retornos, cambian en el tiempo afectando de esta forma a la función de distribución que describe el proceso.

En la presente investigación no es de interés profundizar en la parte matemático-estadística de las series cronológicas, sino efectuar un estudio cualitativo del comportamiento en el tiempo, del valor en riesgo, y observar cómo afecta a los valores extremos que se encuentran en las colas, ya que si se toma como umbral al VaR dependiente del tiempo éste será diferente en cada instante

de tiempo, y por lo tanto, valores que se encontraban en las colas podrían durante períodos cortos de tiempo convertirse en fenómenos bastante probables, llevando consigo varios problemas. Es necesario, hacer conciencia de que un modelo más realista también tomaría en cuenta el cambio temporal explícito de la variable aleatoria, y por tanto de la función de distribución.

Comparando las ecuaciones (3.33) con la ecuación (3.16) podemos notar que la forma que tienen los parámetros de escala y de forma son muy diferentes, y el comportamiento evidentemente será distinto, todo esto porque en este trabajo se partió de la suposición de que las velocidades de los retornos son las que fueron descritas a partir de la ecuación (3.26), y luego integrando esa ecuación llegamos finalmente a la forma que tiene la función de distribución de los retornos.

En el gráfico 3.3 se muestra la evolución temporal de la densidad de la función de distribución (3.33) en tres dimensiones (izquierda) y en dos dimensiones, gráfico de densidad (derecha).

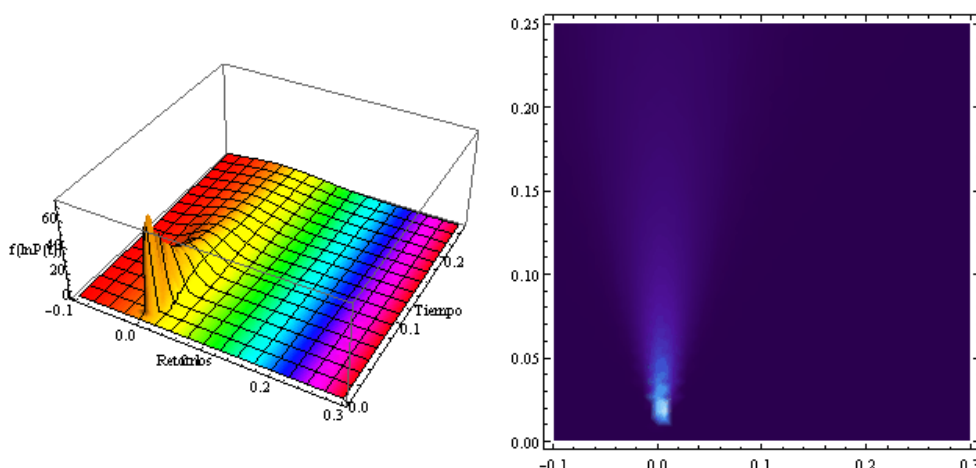


Gráfico 3.3.– Evolución temporal de la función de densidad de $\ln P$

Como se observa en el gráfico la función de densidad va cambiando en el tiempo, en particular, la varianza va aumentando en el tiempo lo que implica que el riesgo está aumentando (si consideramos a la varianza como medida del riesgo), todo esto debido a que las fluctuaciones estocásticas superaron al término lineal de la ecuación para la evolución temporal de los retornos. Entonces, la variación de los retornos queda completamente dominada por la parte aleatoria.

Es interesante recalcar que no se ha tomado en cuenta a la variable aleatoria para graficar la distribuciones, se ha tomado arbitrariamente el eje x entre 0 y 0.5 lo cual no afecta en absoluto al comportamiento de la varianza y la media del proceso dependiente del tiempo. Sin embargo, hay que notar que en realidad γ y σ son los

parámetros que caracterizan el comportamiento de los precios. En este caso la variable aleatoria es la de los retornos. Los parámetros γ y σ son de las velocidades de cambio de los precios, aunque el postulado inicial del proceso de Itô fue para los precios.

Cabe notar que la noción dinámica más acertada es que la tasa de variación de los retornos es la que se ve afectada por los precios, lo que significa que variaciones grandes de velocidad de los retornos tendrían significación en el caso del cálculo del VaR, pero valores de los retornos, por más que sean extremadamente altos (o bajos), y por tanto poco probables no afectan de forma directa al VaR. El modelo propuesto sirve para el análisis de cambios bruscos en los retornos pero en instantes cortos de tiempo, es decir, catástrofes que pueden ocurrir sin previo aviso y sin una historia detrás.

Además, el parámetro γ es de mucho interés puesto que es el que determina hasta donde puede la varianza (y por tanto el VaR) aumentar, el signo negativo que acompaña a γ tiene el efecto de frenar el proceso de aleatoriedad y es la razón por la que la varianza es acotada, si en vez del signo negativo estuviera el positivo, la varianza de las velocidades de cambio de los retornos aumentaría hasta el infinito con el transcurso del tiempo. En este caso, dicho parámetro al igual que la desviación estándar σ , se lo ha estimado a partir de las series temporales de los activos que conforman el portafolio y, bajo condiciones iniciales de la velocidad y de la posición, resultando así, $\gamma = 257.41708230565996$, y $\sigma = 134.76$.

Habiendo obtenido la función de distribución dependiente del tiempo se puede pasar a calcular el VaR estocástico, el cual si se considera la definición clásica del cuantil, deberá simplemente resultar de el remplazo del cuantil dependiente del tiempo.

La función de distribución dada en la ecuación (3.33) puede ser usada para calcular el VaR para cualquier nivel de confianza dado, en particular si se calcula a un 95% de confianza. La solución numérica para encontrar el VaR para el activo uno viene dado por

$$VaR(t) = 0.00125794 - 0.000875603 e^{-514.824t} - 0.000382335 e^{-257.417t} + 0.45079 t \quad (3.34)$$

En el gráfico (3.4) se presenta el comportamiento de la ecuación del VaR estocástico para el activo uno para el corto tiempo. Cabe recalcar aquí, que las escalas de los tiempos con las que se está trabajando son muy pequeñas debido a la sensibilidad del modelo.

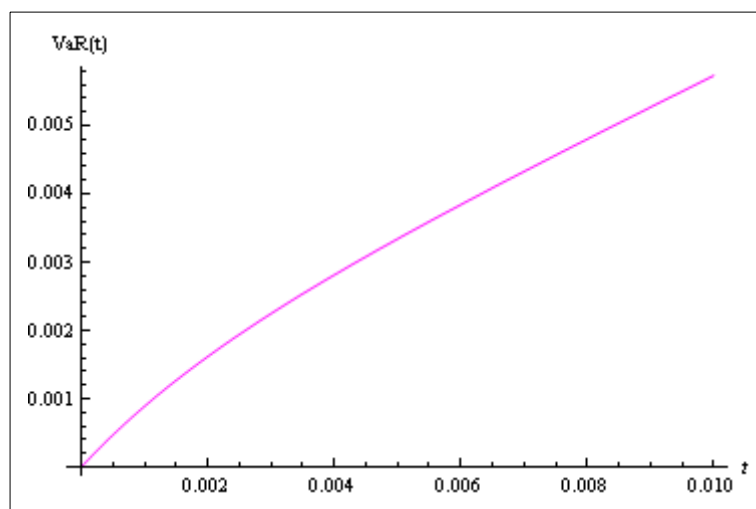


Gráfico 3.4.– *VaR estocástico para el activo uno con un 95% de confianza (corto plazo)*

Ahora sería interesante observar el comportamiento del VaR estocástico para instantes de tiempo más grandes, se esperaría que tenga un crecimiento mucho más rápido y casi lineal, pues de (3.34), se puede observar que para tiempos grandes los términos exponenciales tienden a cero, y sólo el último término lineal sería el imperante. En el gráfico (3.5) se presenta el comportamiento de la ecuación del VaR estocástico para el activo uno.

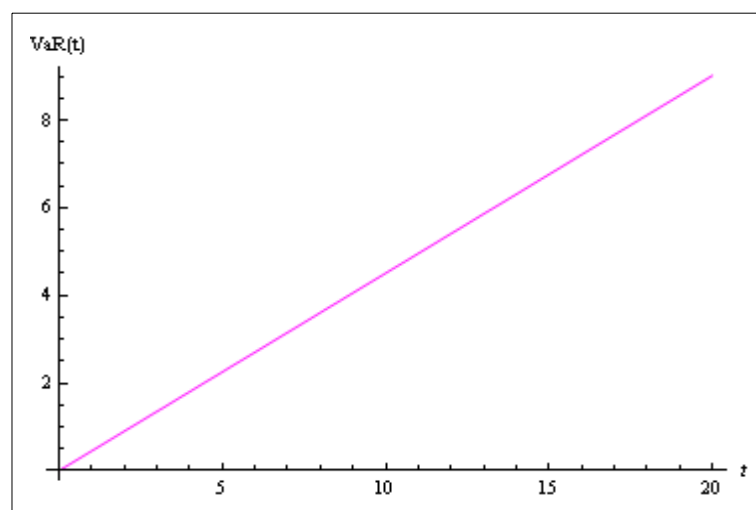


Gráfico 3.5.– *VaR estocástico para el activo uno con un 95% de confianza (largo plazo)*

Los gráficos anteriores muestran que el VaR es creciente en el tiempo, resultado que concuerda con la interpretación que se está efectuando del proceso de Wiener, ya que con el paso del tiempo, la velocidad inicial de los retornos poco a poco va siendo dominada por el ruido blanco, de modo que después de algún tiempo se

randomiza completamente, lo que significa que la varianza va creciendo y la incertidumbre también. Podemos observar, sin embargo, el crecimiento inicial en un tiempo corto (gráfico 3.4) a una tasa pequeña, para luego en un tiempo más grande, observar como esa tasa tiene un crecimiento demasiado rápido con valores del VaR muy exagerados que en la realidad no tienen sentido.

A continuación se presenta el VaR estocástico al 99% de confianza:

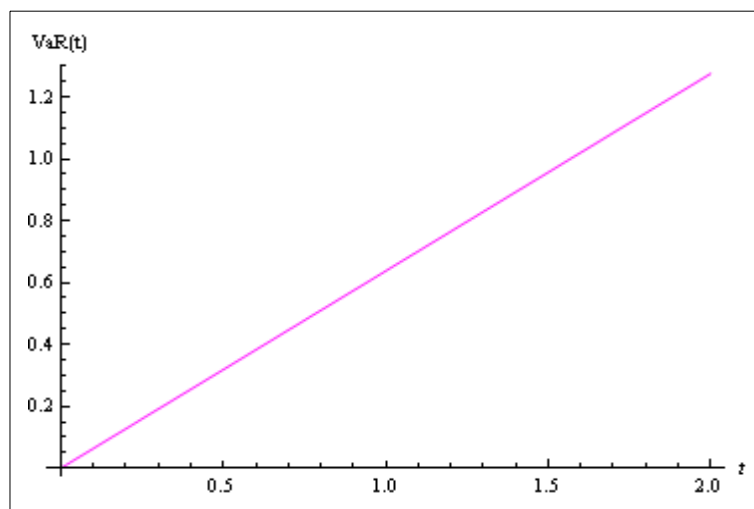


Gráfico 3.6.— *VaR estocástico para el activo uno con un 99% de confianza*

El VaR aumenta más rápidamente, puesto que se está dejando una cola mucho más pequeña, y por lo tanto el VaR debe acomodarse para dejar siempre a la izquierda un área de 0.99.

Evidentemente, si se calcula para un portafolio se debería tomar en cuenta la correlación entre los distintos activos que conforman el portafolio y, se procedería de manera similar. Para el portafolio considerado, utilizando como datos a los retornos, se tienen los siguientes resultados:

La media del portafolio es = 0.00084349
 La volatilidad del portafolio es = 0.00700369
 El VaR del portafolio al 95.º nivel de confianza es 0.0123635

es decir, la cantidad máxima que podrá perder la institución portadora de este portafolio, por día con un nivel de confianza del 95%, es igual al 1.24% del valor total del portafolio.

Todo esto será usado en el capítulo final para efectuar el cálculo para el VaR

estocástico considerando extremos.

Definición 3.1^[39] El Valor en Riesgo dada una función de distribución F , se define,

$$VaR_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} VaR(X)_q, \quad (3.35)$$

donde $VaR(X)_q$ es el cuantil de la variable X_i . Para estimar (3.35), se asume que $F_X(x)$ es una función de distribución Normal.

El VaR va a ser igual a una parte lineal que va ser el valor medio en el tiempo más la parte estocástica, tomado el cuantil de esa parte estocástica. Todo esto, refiriéndonos solamente a la región central. De (3.35) se puede concluir que la dependencia temporal de los retornos se traslada al VaR . Sin embargo, se observa que la definición del VaR como el cuantil de la función de distribución de X se mantiene. Sería natural esperar que este comportamiento para la parte central también se conserve para la parte de las colas, evidentemente, aquí solo habría que cambiar la función de distribución, y por tanto su cuantil.

Al parecer se resuelve el problema para la parte extrema, pero aparece un inconveniente; ya que al tomar un VaR dependiente del tiempo podría suceder que los valores que en un instante se consideran extremos, en otro dejen de serlo y viceversa.

3.3.2. VaR ESTOCÁSTICO PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE EXTREMOS

Las distribuciones estacionarias de los procesos bajo investigación son con frecuencia bien conocidas y se podría esperar que éstas influyan en el comportamiento extremo de los procesos. Sin embargo, este no es el caso, para algunas distribuciones estacionarias predeterminadas, el proceso puede exhibir comportamientos completamente diferentes en sus extremos.

Usando lo descrito en el capítulo anterior se puede calcular el VaR para extremos usando la ecuación (2.27), pero si quiere calcular el VaR estocástico es necesario, como ya se anotó, establecer la dependencia temporal de éste. Por otro lado, dado que en la ecuación (3.34) se tiene la función que describe el VaR a un nivel de confianza del 95%, se puede usarlo para definir el umbral u en la teoría de valores extremos, evidentemente éste dependerá del tiempo, y por tanto la función de máxima verosimilitud también.

Al fijar el nivel de confianza q lo que se está provocando es que la función de distribución en (3.33) se acople en cada instante de tiempo para mantener el área a la izquierda del VaR siempre igual a 0.95. Así, para el caso de los valores extremos, sucederá que algunos valores en ciertos instantes sobrepasarán el umbral y por tanto se convertirán en extremos, y en otros instantes no lo

sobrepasen y, por tanto no aporten a la función de distribución de los excedentes. Aunque al parecer esto tiene sentido, hay que mencionar que esto sucederá siempre y cuando se considere que el conjunto de las realizaciones de las variables aleatorias, en este caso los retornos, se mantenga fijo; a primera vista esto lleva a una contradicción en el sentido de que todo lo desarrollado hasta ahora parte de la suposición de que los retornos dependen del tiempo y por lo tanto su función de distribución también lo hace, es decir, puede variar el número de realizaciones. Claramente éste es el mecanismo que fuerza al VaR a cambiar de valor en cada instante.

Es por eso que, en los tratamientos que se le da a la varianza dependiente del tiempo, se considera la dependencia directa de ésta con respecto a la variable aleatoria, y no necesariamente del tiempo (al menos directamente). Todo esto genera los conocidos procesos autorregresivos.

El interés de esta investigación no está por ese lado, sino en pretender describir en forma clara la dependencia temporal de la función de distribución, para analizar cómo se comportan sus parámetros en el tiempo, de modo que se pueda encontrar algunas tendencias que permitan predecir ciertos comportamientos probabilísticos.

3.4. ANÁLISIS DEL RIESGO DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Para realizar el análisis dependiente del tiempo se tomarán las definiciones de la varianza de los capítulos anteriores, por ejemplo, al considerar la ecuación (3.33), de la función de distribución de los precios en el tiempo para una serie de datos aleatoria con parámetros γ y σ estimados a partir del activo uno, se tiene una distribución como lo presenta el gráfico 3.7.

Dicho gráfico, permite ver el comportamiento de la variación de los precios en el tiempo para una serie generada aleatoriamente utilizando los parámetros estimados a partir de la serie temporal del activo uno del portafolio con el cual estamos trabajando.

Al observar este gráfico podemos enfatizar aún más el comportamiento creciente del VaR, que depende de cómo están distribuidos los datos de la serie, pues como se puede ver la varianza crece muy rápidamente debido al crecimiento incontrolable de los precios que están en el mercado financiero.

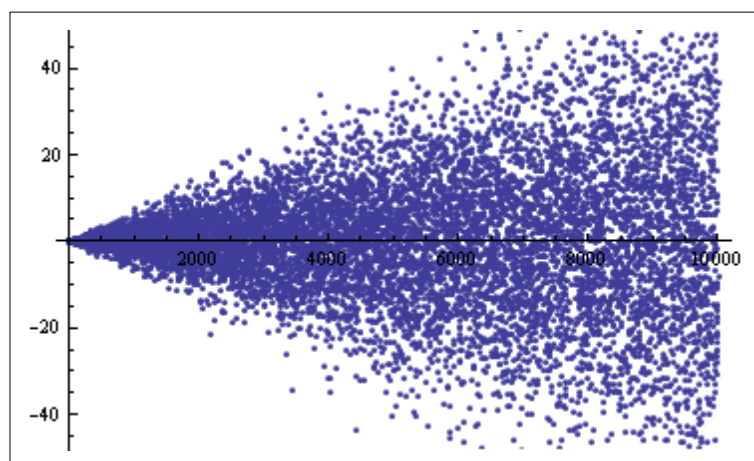


Gráfico 3.7.– *Puntos generados aleatoriamente con la función de distribución de $\ln P$*

En el gráfico 3.8 se puede ver el comportamiento de la media.

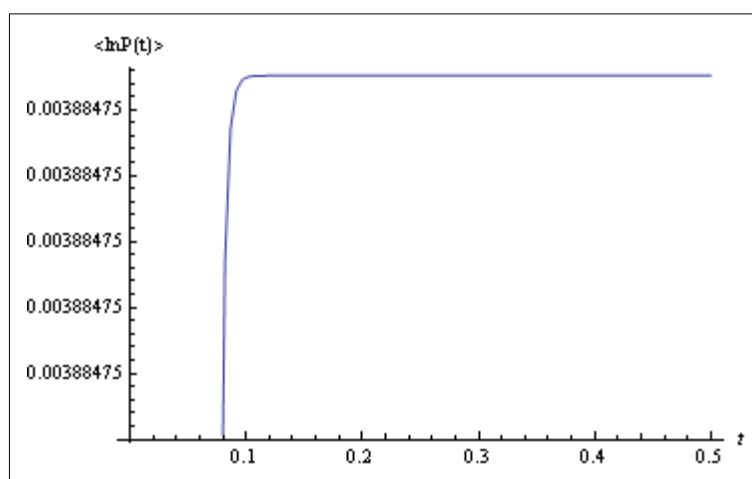


Gráfico 3.8.– *Media de la función de distribución de $\ln P$*

Es claro el comportamiento de la media, ya que con el tiempo la velocidad va a ir disminuyendo, y los retornos, debido a que no existe variación en los precios en determinado tiempo empezarán a mantenerse constantes.

En el gráfico 3.9 se puede ver el comportamiento de la varianza. Este comportamiento creciente era el esperado, puesto que como ya se ha mencionado anteriormente, es la parte estocástica la que gana, y hace que los retornos se randomizen, creando gran incertidumbre en el mercado, y para el largo plazo, es casi imposible predecir lo que podría pasar. Se debe considerar el corto plazo, donde, como se ve en el gráfico tiene cierta curvatura, reflejo de que la parte lineal es la que está ganando a la estocástica.

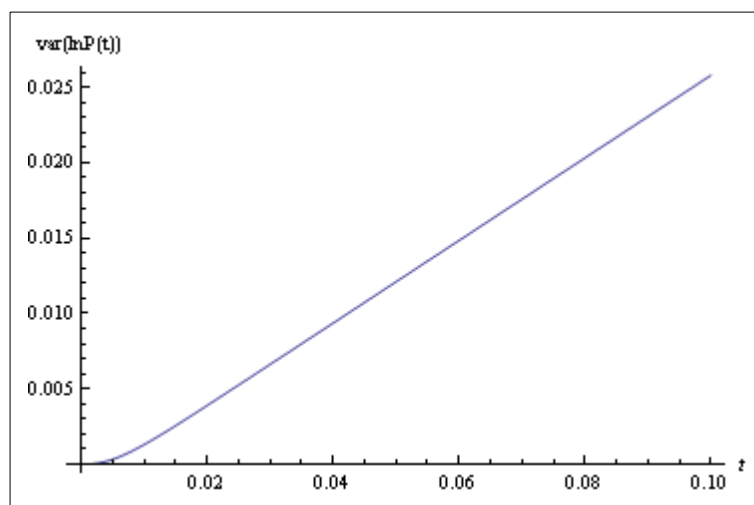


Gráfico 3.9.– Varianza de la función de distribución de $\ln P$

A la función $\ln P$ le corresponde una varianza creciente, la cual se ve reflejada también en los gráficos 3.4, 3.5 y 3.6 del VaR estocástico. La historia nos dice que cuando la volatilidad de un activo tiene una tendencia creciente, aunque la rentabilidad sea muy seductora, se debe tomar muy en cuenta estas alertas, para cambiar de estrategias y no basar las decisiones solamente en experiencias financieras, sino en modelos matemáticos, como el que se pretende presentar; donde lo recomendable sería invertir en activos de renta fija, ya que los de renta variable son de responsabilidad limitada.

La afirmación de que la varianza es creciente en el tiempo como se observa en el gráfico 3.7, en los gráficos 3.4, 3.5 y 3.6, no ayuda mucho, porque lo deseable sería que para ciertos instantes de tiempo ésta sea pequeña, o al menos se vea reducida; por lo que se dirá que el modelo propuesto se ajusta solo para el corto plazo, a diferencia del modelo (3.35), que utiliza procesos autorregresivos y se ajusta para el mediano y largo plazo. Con esta afirmación, este modelo es el ideal para los traders (i.e. agentes bursátiles) que se dedican a la compra y venta inmediata de instrumentos financieros.

Ante una varianza creciente que experimenta el modelo se puede considerar el sistema de ADEH, al colocar más capital a la posición más riesgosa para establecer una posición menos riesgosa, y de esta forma cumplir con el estándar de invarianza de traslación (ADEH 3) para que el riesgo disminuya.

El análisis del riesgo en el tiempo, además de considerar a la varianza, también considera al cuantil, utilizado para encontrar la ecuación (3.34) con una probabilidad de ocurrencia del 95% y que se lo ve en el gráfico 3.4 y, también para un 99% representada en el gráfico 3.6; ya que el término estocástico es el que interesa para ver la dependencia del tiempo, puesto que aquí es donde se incluyen

los factores que afectan el precio causando la variación de los retornos y por consiguiente del VaR.

Si se contraponen el VaR tradicional estático con el modelo (3.35) dependiente de éste, con media 0 y varianza 1 para cada instante de tiempo, el VaR estocástico sería el mismo que el VaR tradicional, y nos encontraríamos ante una situación aleatoria como la que presenta el siguiente gráfico,

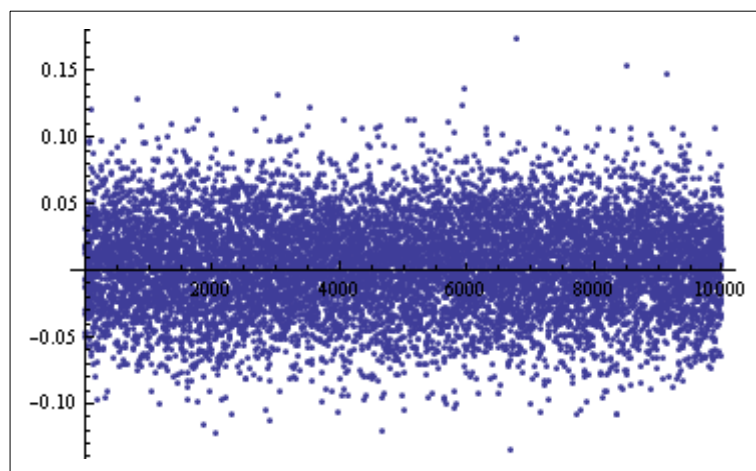


Gráfico 3.10.– *Datos generados aleatoriamente usando la función de distribución de $\ln P$*

El gráfico 3.10 nos muestra el comportamiento del mercado, en condiciones normales, pues si los precios están a la deriva del mercado financiero es imposible poder predecir lo que va a suceder, ya que utilizando nuestro modelo, sería la parte estocástica la que gana y los datos se comportarían aleatoriamente, y por consiguiente el VaR también, como ya lo habíamos mencionado.

Al proponer un modelo de difusión para medir la velocidad de cambio de los precios en el presente trabajo, se pretende en cierta forma estudiar la competencia entre el comportamiento lineal y estocástico de los precios. En términos económicos lo que interesa por parte del inversor es que la parte estocástica no le gane a la parte lineal. Mas aún se podría decir, que conviene que la variación de los precios de los activos financieros que se está invirtiendo cambien rápidamente al ofertar o demandar más de éstos, o al buscar otras coyunturas. Para el caso de la competencia lo deseable sería todo lo contrario. Un ejemplo típico es el uso de la información que realizan los bancos que son uno de los entes que mejor pueden manejar esta situación, ya que cuentan con mucha información de mercado. Todo esto es conveniente, porque el modelo es aplicable en el corto plazo, y las ganancias podrían ser muy significativas.

Una forma de estudiar el mercado sería también, si se considera en economía, el crecimiento de la producción que significaría un incremento de la tasa de interés. Al existir una subida en la tasa de interés, provocaría un desincentivo hacia la inversión, ya que los agentes económicos destinarían su dinero al ahorro, provocando de esta forma una caída de precios, para nuestro caso, de los activos financieros. Todo esto asumiendo que se está bajo un mercado eficiente donde el movimiento de las distintas variables nos llevan a un equilibrio de mercado por el ajuste automático de cada una de las variables. Por el contrario, si existiera una disminución de la producción, llevaría a un incremento en los precios de los activos financieros, ya que las tasas de interés caerían. Entonces si el crecimiento de la producción implica una reducción de precios, sería ideal comprar y vender en el corto plazo, ya que el ajuste para regresar al equilibrio llevaría nuevamente a un incremento de los precios, por la eficiencia del mercado. Es por eso, que conviene que la velocidad de cambio de los precios que está en la parte lineal del modelo de difusión le gane a la estocástica, porque en el corto plazo se podría ganar mucho dinero.

Con todo lo expuesto en este capítulo se tienen las herramientas para calcular el VaR estocástico usando el modelo de Picos sobre el Umbral. Lo que interesa saber es qué tan probables pueden ser los eventos catastróficos y cómo afectan al momento de hacer un análisis del VaR.

CAPÍTULO IV

CÁLCULO Y ANÁLISIS DEL VAR EXTREMO ESTOCÁSTICO PARA UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

La decisión de invertir surge con el objetivo de incrementar el capital invertido y es ésto justamente lo que lleva a muchos inversores a administrar el riesgo para que su objetivo no se vea perjudicado. Quien realiza una inversión cuyo resultado es incierto, demandará una compensación por asumir ese riesgo. Esta situación se reflejará en la relación riesgo-rentabilidad. El presente trabajo busca expresar a través de ciertos indicadores, en general en unidades monetarias, la realidad del mercado bursátil; para que cualquier inversor pueda conocer cuáles podrían ser sus pérdidas bajo ciertos niveles de incertidumbre, en el corto plazo, como se lo verá en el desarrollo del presente capítulo.

El acuerdo de Basilea II busca proporcionar medidas de reducción del riesgo pidiendo a las instituciones financieras que calculen el VaR para percentiles altos y mantener suficiente capital económico para afrontar eventos de baja probabilidad. Es así que la teoría de valores extremos (TVE) se generaliza para determinar su evolución en el tiempo. Los métodos estadísticos para evaluar eventos extremos necesitan formalizar suficientemente bien el comportamiento de la cola de la distribución que se analiza. La teoría de valores extremos brinda modelos probabilísticos para describir el comportamiento de tales colas. Sin embargo, dado que la TVE se basa en argumentos asintóticos y el tamaño de las muestras suele ser muy pequeño, se debe trabajar con prudencia en estos temas.

Además de realizar el análisis del riesgo financiero para valores extremos en

función del tiempo, se propone una aplicación para un portafolio de inversión con datos reales, ya que la decisión de diversificación de los activos financieros van de la mano con la minimización del riesgo, y ésto lo confirma Harry Markowitz con el Nobel "Modern Portfolio Theory", que se centra en el análisis de la elección de un portafolio racional basado en el uso eficiente del riesgo.^[40]

Por motivos de confidencialidad no se dará a conocer el nombre de la institución poseedora de tal portafolio de inversión utilizado en el presente trabajo, así como tampoco sus activos.

En cada uno de los cálculos efectuados en el capítulo anterior y de los que se pretende presentar en el presente capítulo se toma en cuenta como única variable al precio y por consiguiente a los retornos, ya que las demás variables o factores que influyen para la estimación del VaR se los ha considerado, como ya se dijo, dentro de la variable conocida como ruido blanco. Sin embargo, si se toma en cuenta a variables económicas como por ejemplo la tasa de interés, o el PIB, el análisis deberá ser enfocado en otro sentido, tomando dichas variables como una herramienta de apoyo para el tomador de decisiones mas no como un factor determinante en cada modelo ya que nuestro objetivo es darle otro enfoque al cálculo del valor en riesgo de las que usualmente nos presentan muchos autores.

4.1. CÁLCULO DEL VaR ESTOCÁSTICO CONSIDERANDO VALORES EXTREMOS PARA UN ACTIVO

Lo que se hará en esta sección representa la parte central del presente estudio; después de haber asumido que las tasas de variación de los retornos en el tiempo son las que se describen a través del movimiento Browniano, lo que se va a hacer es calcular el VaR estocástico considerando extremos.

Usando la ecuación (3.34) se puede construir el cuantil y por lo tanto el VaR para las colas. Así, tomando la ecuación (2.27) se puede calcular el VaR estocástico para extremos, sin embargo, nos queda por estimar los parámetros ψ y ξ de la función de distribución generalizada de Pareto. Dado que se desea calcular tal VaR para datos reales, es necesario estimar tales parámetros, de modo que se puedan calcular a través de esos datos; para esto se usará la función de Máxima Verosimilitud dada en (2.29), que como ya se dijo, no tiene solución analítica y por lo tanto se requiere una solución numérica.

Definición 4.1 El valor en riesgo estocástico considerando valores extremos, $\widehat{VaR}(t)$, se determina mediante la siguiente relación:

$$\widehat{VaR}(t) = VaR(t) + \frac{\psi}{\xi} \left(\left(\frac{N_1 + N_2}{N_2} (1 - q) \right)^{-\xi} - 1 \right) \quad (4.1)$$

De la ecuación anterior, se puede afirmar que el VaR estocástico para extremos, $\widehat{VaR}(t)$, es dependiente del VaR estocástico, $VaR(t)$, definido en (3.34), el cual se convierte en el umbral.

Lo primero que se hace es calcular los rendimientos para un activo definido, en nuestro caso, el activo tiene un precio del cual se ha tomado 756 realizaciones en el tiempo, cada una de estas realizaciones se tomaron en un día laborable, así el histograma para tal activo es:

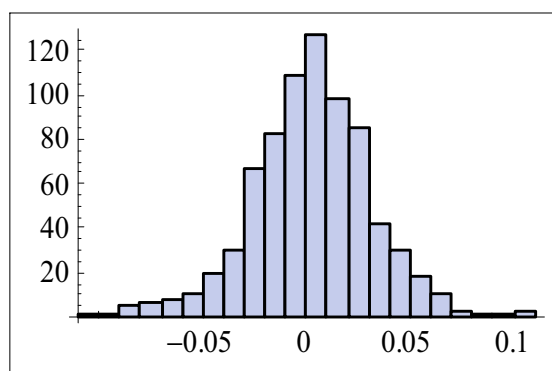


Gráfico 4.1.– Histograma de los retornos del activo uno

En el gráfico 4.1 se observa la forma de una normal en el histograma por la gran cantidad de realizaciones que se tiene, pero lo que nos interesa son las colas, y al parecer existen algunos valores en tales zonas, si esos valores cumplen las condiciones se los usará para estimar los parámetros de la distribución generalizada de Pareto. Lo que nos interesa aquí es ver cuántos datos pasaron el umbral, umbral que ahora depende del tiempo, por lo tanto se debería precisar el número de datos que pasan el umbral para un instante de tiempo dado. A continuación se presentan los resultados arrojados por el programa (Paquete del software Mathematica®)^[41]. Cabe recalcar que se han usado los parámetros γ y σ estimados después de analizar las series temporales correspondientes a los activos del portafolio, y que los mencionamos en el capítulo anterior.

```
El número de datos que SI pasan el umbral es, en cada instante de tiempo=
{333, 279, 235, 203, 175, 140, 113, 100, 83, 69, 58, 48, 42, 34, 29, 22, 19,
 19, 16, 13, 10, 9, 9, 9, 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Para el cálculo anterior se ha tomado $t = 0.01, 0.02, \dots, 1$. Esto es, al tiempo en escalas muy pequeñas puesto que el modelo varía demasiado con el transcurso del tiempo, correspondiendo cada instante de tiempo a 1 día, pues la base de datos con la que se está trabajando es diaria. Como se esperaba, el número de datos que

pasan el umbral va disminuyendo con el transcurso del tiempo, evidencia clara de que el VaR (que es el umbral) está aumentando y por lo tanto las colas reduciéndose, se espera que para un instante de tiempo mucho mayor, las colas ya no tengan elementos.

Con los datos que pasan el umbral se estiman los parámetros de la función de distribución generalizada de Pareto. Así, para el activo uno al tiempo $t = 1$, los resultados son:

Los estimadores de Máxima Verosimilitud son: $\{(612.337, \{\xi \rightarrow 0.365626, \psi \rightarrow 0.132704\})\}$

donde la primera cantidad es el valor que alcanza la función de Máxima Verosimilitud en el punto máximo.

Para los resultados alternativos utilizando el método de Bloques Máximos ver tabla 1 del anexo.

Así, el gráfico 4.2 de la función de una DGP con tales parámetros es:

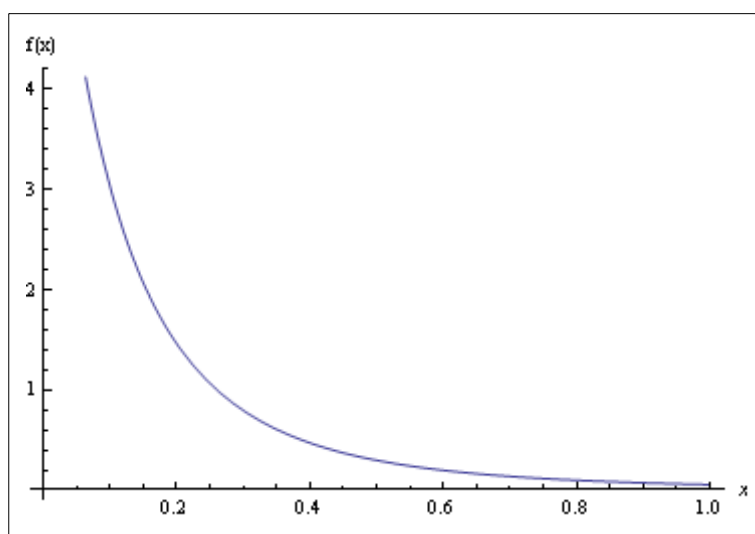


Gráfico 4.2. – Función de distribución generalizada de Pareto

De este modo se ha obtenido la función de distribución para las colas. Por lo tanto, se puede pasar a calcular el VaR estocástico para extremos, así

$$\text{El VaR estocástico para extremos es = } \\ \{0.442474 - 0.000875603 e^{-514.834t} - 0.000382335 e^{-257.417t} + 0.45079 t\}$$

El gráfico (4.3) muestra el comportamiento del VaR para extremos dependiente del tiempo.

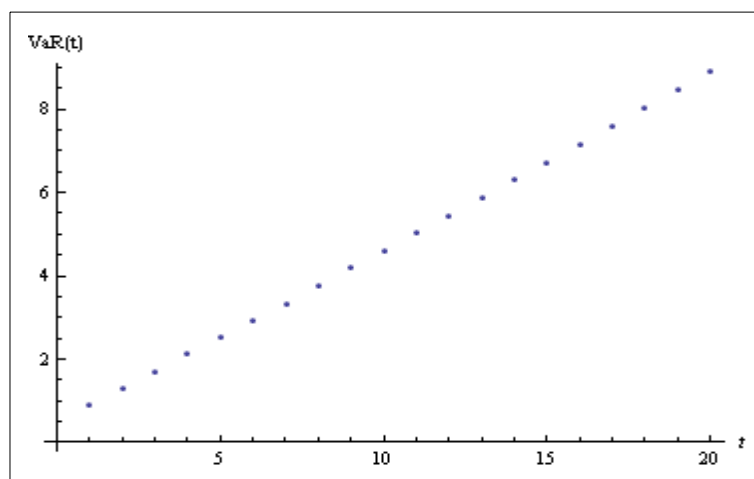


Gráfico 4.3.- *VaR estocástico para extremos*

Como se observa en el resultado, se obtiene una ecuación dependiente del tiempo, puesto que tal VaR, depende del umbral, el cual depende a su vez del tiempo. Así, para el instante $t = 1$ se tiene que,

El VaR estocástico para extremos al tiempo $t = 1$ es : 0.446947

es decir, la cantidad máxima que podría perder el inversionista, en el primer día con un nivel de confianza del 95%, si invierte en el activo uno, sería el 44.69% del valor total invertido en dicho activo. El valor anterior muestra que como se había afirmado, el VaR está en el mismo orden de las pérdidas, lo que nos da un buen indicio de que el modelo se acerca a la realidad, aunque para instantes de tiempo grandes, el VaR, evidentemente, será mucho más grande; siempre teniendo cuidado con la evaluación, pues la estimación será válida para los instantes donde existen valores extremos.

Todo lo manifestado anteriormente se debe a que al cabo de algún tiempo la parte estocástica es la que predomina sobre la parte lineal, de ahí que este modelo solo sirve para tiempos cortos, no solo eso, la otra medida del riesgo, la varianza, sigue aumentando, y después de esto todo se randomizan los retornos. Lo que se recomienda es tratar de "reforzar" la parte lineal de la ecuación. La razón por la que se consideran las tasas de cambio de los retornos como un proceso de Wiener se hace más evidente, ya que reforzar la parte lineal significa hacer que la tasa de cambio de las pérdidas aumente, al parecer todo indica que se debe crear incertidumbre en el mercado y potencializar nuestro activo.

El comportamiento es similar al VaR estocástico, que como se puede observar en la ecuación (4.1) el VaR estocástico para extremos es el VaR estocástico más una constante, detalle que se analizará en la siguiente sección.

4.2. CÁLCULO DEL VaR ESTOCÁSTICO CONSIDERANDO VALORES EXTREMOS PARA UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

A la hora de decidirse por los activos que determinarán un portafolio, el considerar la relación rentabilidad-riesgo es muy importante, ya que dependiendo del tipo de inversor, muchos de los activos pueden ser riesgosos porque la recompensa puede ser muy grande, o viceversa, un portafolio muy seguro con recompensa muy pequeña; ejemplo típico de los eurobonos, cuya prima de riesgo es igual a cero con una tasa de retorno del 4% aproximadamente.

El VaR Estocástico para valores extremos, aporte de este trabajo, al considerarlo además para un portafolio de inversión, se convierte en sí, en la meta de muchos inversores, pues, por la definición misma de portafolio, y bajo el concepto de subaditividad, permite que la medida del riesgo como un indicador a la hora de invertir se vea reducido.

Para el portafolio que consta de 35 activos, con realizaciones de 756 valores cada activo, se considerará que los activos son independientes entre sí y por lo tanto la probabilidad de pasar el umbral al mismo tiempo para algunos de ellos se verá reducida. En cada instante de tiempo la probabilidad irá cambiando pero, evidentemente se verá reducido el riesgo.

El cálculo es simple si se considera que todos los activos son independientes, así por ejemplo, la probabilidad de que se obtenga un pico de 0.1 sobre el umbral para el primer activo del portafolio es:

Probabilidad de obtener un pico de 0.1 sobre el umbral es = 0.513974

Evidentemente la probabilidad de ocurrencia es relativamente alta, puesto que existen muchos valores que pasan el umbral, ya que éste, para tiempos cortos no pasa del 100% del valor del activo que podría perder el inversionista, y por consiguiente se hace probable que existan valores por encima del umbral, el cual no es exageradamente alto. Sin embargo, como ya se ha mencionado anteriormente, el hecho de invertir en dos activos o más hace que el VaR, como un indicador del riesgo, se vea reducido, así, la probabilidad de que exista un pico de 0.1 sobre el umbral en dos activos al mismo tiempo es

Probabilidad de obtener un pico de 0.1 sobre
el umbral, en dos activos al mismo tiempo es = 0.264169

Finalmente para el portafolio de 35 acciones que se está estudiando, la

probabilidad de obtener un pico de 0,1 sobre el umbral en todos los activos al mismo tiempo es

Probabilidad de obtener un pico de 0.1 sobre el umbral
para el portafolio, al mismo tiempo es = 7.63721×10^{-11}

De aquí que es casi imposible que se de un valor extremo en estos casos, sin embargo, el resultado para un activo nos indica que 51 de cada 100 veces aproximadamente sucede un pico de 0.1, claramente esta probabilidad seguirá disminuyendo a medida que el VaR aumenta, al parecer esto sería lo deseado, sin embargo, hay que notar que si el VaR está aumentando, entonces existen pérdidas que están por debajo del VaR que son muy grandes en valor como en probabilidad, es decir, al correrse el VaR va disminuyendo la cantidad de puntos que hay en la cola, lo cual provoca que algunos de esos puntos se vayan hacia la parte central, por lo tanto serán más probables cuantiosas pérdidas.

Para el caso de dependencia de los activos se debe proceder similarmente. Simplemente se debe usar la función bivariada de Pareto, y estimar no solo los coeficientes de escala y forma, sino también el de correlación. Lo que se espera es que se reduzca el riesgo al considerar varios activos en el portafolio.

4.3. COMPARACIÓN ENTRE EL VaR ESTOCÁSTICO Y EL VaR ESTOCÁSTICO PARA VALORES EXTREMOS

Dentro de un mercado de instrumentos financieros existen muchos factores que influyen en la variación de los precios, evidentemente es imposible efectuar un análisis profundo de cada uno de ellos y como en sentido general tales factores afectan el comportamiento de los precios, cada uno de estos factores puede alterar en gran manera la probabilidad de ocurrencia de algunos de los precios, mas aún, sería importante manejar tal influencia, al menos en forma aproximada, para decidir sobre el futuro del comportamiento de los precios. Con esto se podría reducir en alguna manera la incertidumbre en el momento de la inversión. Es así, que para estimar la máxima pérdida esperada, es necesario considerar el efecto, al menos global, de todos los factores que afectan al precio.

El hecho de considerar que los retornos tienen una función de distribución, define de por sí, una medida del riesgo al igualar tal función de distribución a un valor entre 0 y 1, de ahí la definición del cuantil. Claro está, si se desea analizar un VaR estocástico, se debe considerar la variación en el tiempo de los parámetros de la función de distribución como ya se hizo en los capítulos anteriores. Este procedimiento siempre es utilizado, en este caso, tanto el VaR estocástico como su correspondiente para extremos hacen uso de esta definición. Sin embargo, al momento de determinar el VaR, hay que considerar los teoremas por los que cada uno de éstos se rige.

Al realizar un análisis del valor en riesgo, diremos a simple vista, que el valor en riesgo para extremos, en cierto instante de tiempo, será mayor que el VaR tradicional, puesto que si estamos considerando al VaR tradicional como el umbral que define desde donde comienza la cola de la función de distribución, el VaR extremo estará siempre en la cola. Del mismo modo diremos si se observa la evolución en el tiempo de la función de distribución, pues en cada instante el umbral (VaR) define, como ya se dijo, un nuevo límite para la cola, y por tanto un nuevo VaR extremo dentro de la cola; por ejemplo, al quedar determinado el VaR estocástico con un 95% de confianza, todos los valores que superen este nivel caerán dentro de la cola, y por lo tanto estarán distribuidos según lo estén los valores en la cola.

En el gráfico 4.4 se presentan las funciones del VaR estocástico (línea morada) y del VaR estocástico para extremos (puntos azules),

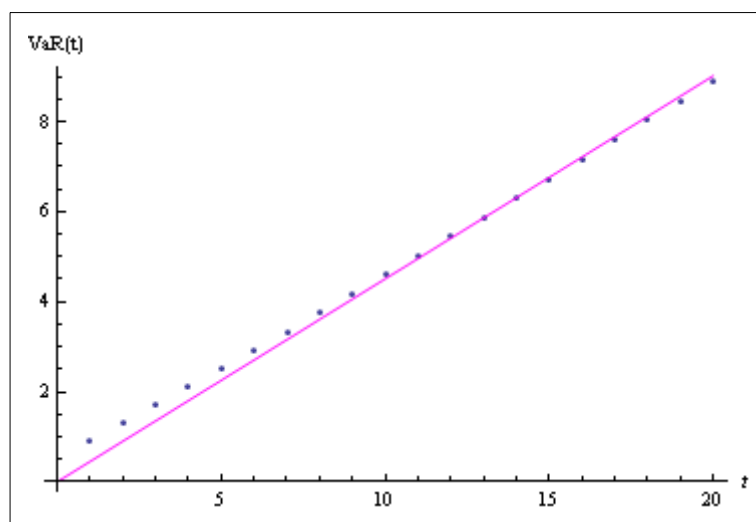


Gráfico 4.4.– *Comparación entre el VaR estocástico y el VaR estocástico para extremos*

El comportamiento del VaR estocástico para extremos como se ve en el gráfico 4.4 empieza con valores por encima del VaR estocástico y se mantiene de la misma forma para ciertos instantes de tiempo, y debido al hecho de que con el paso del tiempo no existen retornos que sobrepasan el umbral la diferencia entre las dos funciones en cada instante de tiempo se vuelve aún más pequeña, pudiendo en muchas ocasiones el VaR estocástico para extremos reducirse al VaR estocástico, cuando no existen eventos extremos. Si al evaluar el VaR para cada instante de tiempo no existen eventos extremos, obviamente no se lo considerará al concepto de VaR estocástico para extremos, pues no está cumpliendo con una de las condiciones, a saber, que existan valores que sobrepasan el umbral; en tal caso, el modelo del VaR estocástico es el que se ajustará. Es así que, al momento de

analizar los datos para estimar el VaR, se debe tomar en cuenta que el modelo se ajusta mejor si se trabaja con un tamaño de muestra grande.

Cabe recalcar la diferencia al momento de analizar los datos, el VaR estocástico se enfoca en las pérdidas en general, en cambio el VaR estocástico para extremos toma solo las pérdidas que van más allá del umbral, o sea los eventos que pueden causar catástrofes. Evidentemente solo se ha realizado un enfoque en una de las colas, a saber, la definida por los eventos mas probables, sin embargo al tomar la otra cola se tendría que interpretar para los eventos también poco probables pero con valores más pequeños, pues los valores más probables se encuentran alrededor de la media, en la zona más densa de la función de distribución.

En el gráfico 3.4 la forma de la curva del VaR estocástico en el corto plazo es creciente, pero no lineal, lo que denota que el modelo es el adecuado justamente para el corto plazo, ya que en el mediano y en el largo plazo no tiene sentido utilizarlo, ya que la varianza es muy grande y las realizaciones de la variable aleatoria se vuelven impredecibles, puesto que los diferentes fenómenos del mercado impiden una estimación de la misma.

Si consideramos (3.35), que toma en cuenta los procesos autorregresivos, el VaR estocástico se puede calcular fácilmente si se conoce la distribución en el tiempo tanto del parámetro de localización como el de escala. Sin embargo, es más complejo en el análogo para extremos.

4.4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Una vez finalizado el estudio y el desarrollo del modelo para la estimación del Valor en Riesgo, se puede concluir que:

- Se espera que el modelo presentado describa sucesos extremos en mercados altamente volátiles y sujetos a catástrofes inesperadas. Así, éste puede ser utilizado para escenarios que presenten gran incertidumbre, de modo que la cantidad de información que se tenga sea pequeña, y las tasas de cambio de las pérdidas grandes.
- El modelo que se propone es aplicable para aquellos traders que realizan transacciones instantáneas o en el corto plazo; y más ahora que la tendencia de inversión bursátil intra-day está en auge por los recientes acontecimientos internacionales como consecuencia del período de recesión económica que está sufriendo los Estados Unidos; ya que no se sabe qué es lo que pueda pasar en el transcurso de un tiempo corto.
- La máxima cantidad que se podría perder al momento de invertir, se ve

superada si consideramos los valores extremos.

- La estimación del Valor en Riesgo fluctuante en el tiempo, fue efectuada utilizando como modelo, el ya mencionado proceso de Wiener, debido a los múltiples inconvenientes que presenta la estimación usando la ecuación (1.23).
- En particular se asume que el término aleatorio predomina sobre el término lineal del propagador de Markov, mas aún, el comportamiento en el tiempo de la varianza puede ser afectado por ciertos valores extremos que al ser incluidos en el cálculo afectan ostensiblemente al resultado de ésta, puesto que la varianza después de cierto instante de tiempo es proporcional a \sqrt{T} , siendo T el intervalo de tiempo considerado, el crecimiento de ésta en el tiempo es más rápido para tiempos entre 0 y 1 y crece más lentamente que T en tiempos mayores a 1. Lo que nos interesa en particular es que la varianza (de los retornos) siempre es creciente, lo que implica que la incertidumbre crece y la predictabilidad disminuye en el sentido de medidas con respecto a la desviación de un punto.
- El modelo de Wiener lo que hace es incorporar un término lineal dependiente de la velocidad (que a su vez depende del tiempo) de modo que compita con el aleatorio, evidentemente podría suceder que el término lineal supere al estocástico (en intervalos cortos de tiempo) reduciéndose así la aleatoriedad del proceso, y llevando a casi una certidumbre total, lo que mostraría que los factores aleatorios ya no ejercen ninguna influencia, y por lo tanto ya no tiene sentido hablar de riesgo al invertir. Es claro que es casi imposible que eso suceda en el mercado, a menos que se desee ejercer una influencia directa sobre éste (forzando o fijando el comportamiento de los precios) lo que llevaría a una falta de inversión, pues aunque la incertidumbre podría hacer que se pierda mucho, también podríamos usar esa falta de información de los otros inversionistas para sacar ciertas ventajas.
- El hecho de considerar a las velocidades como la variable aleatoria inicial modelada por el proceso de Wiener hace que la serie temporal generada se vuelva muy sensible, pues la tasa de cambio en el tiempo de los retornos afecta directamente al comportamiento de éstos. Cualquier fluctuación en el mercado afecta a la velocidad de cambio de los retornos y hace que la forma en como los retornos varían aumente en información y nos permita prever una posible catástrofe cuando el mercado ya comience a sentir los primeros estragos de ésta. Es importante mencionar que el inversor puede manejar los factores económicos (en la medida de sus posibilidades) de modo que la variación de las velocidades ayude al crecimiento de sus ganancias.
- Esta nueva modelización partiendo desde las velocidades de los retornos es el aporte principal en la investigación del VaR para extremos, puesto que si queremos saber cómo se comporta la función de distribución en el tiempo para con esto

determinar un umbral para cada instante de tiempo, es necesario saber la evolución temporal de los parámetros de tal función de distribución, en este caso la de los retornos. Finalmente la ecuación (4.1) se usa para calcular el VaR dependiente del tiempo y se obtiene como resultado que existen cada vez más pocos valores que pasan el umbral, dado por el VaR estocástico.

- Cabe mencionar que el VaR para extremos es distinto de cero aunque no exista ningún valor que sobrepase el umbral, esto se debe a que cuando calculamos el VaR dependiente del tiempo, que luego se convertiría en el umbral, fijamos el área que el VaR deja a su izquierda al fijar el nivel de confianza, lo que provocará que para todo instante de tiempo la función de distribución de los retornos tenga que ajustarse para que siempre se mantenga esta área, por tanto el VaR cambiará; esto significa que el número de valores que se encuentran en las colas será distinto en cada momento, lo que nos lleva a que la zona de validez del teorema del límite central sea siempre cambiante.
- El modelo de Wiener propuesto para las tasas de cambio (velocidades) de los retornos provoca que los valores del VaR estocástico para extremos crezcan muy rápidamente.
- Si no existen valores que sobrepasen el umbral, la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos, evidentemente va a ser muy pequeña, lo que hace que a su vez los eventos extremos sean peligrosos.
- Con los valores que pasan el umbral se estiman los parámetros de la función generalizada de Pareto, los cuales en teoría, deberían ser distintos para cada instante de tiempo. Hay que señalar que al existir pocos elementos en las colas, la estimación de tales parámetros debe ser tomada con mucho cuidado.
- Un factor muy importante del modelo de difusión y que su estudio para un valor con signo positivo se lo presenta en el apéndice, es γ , el mismo que determina si el modelo se vuelve muy aleatorio con valores muy grandes, o lineal, con incertidumbre casi cero. Sin embargo, se asume que γ es negativo por el hecho de que la varianza tendrá una cota superior, puesto que la posición de los retornos nunca puede tender al infinito, y existe un máximo de tolerancia para las diferencias entre los retornos que se puedan dar. A pesar de esto, el VaR tiende al infinito, lo que muestra que la aleatoriedad es la que termina predominando en el largo plazo.
- La posición inicial X_0 , es importante en el sentido de que maneja la escala en la cual los valores extremos pueden aparecer, es claro que la existencia de pérdidas extremas tiene que ver con la cantidad que se está invirtiendo y por lo tanto se vuelve complejo el escogitamiento de X_0 . El hablar de un valor X_0 que se suma a la media de los retornos hace que los valores de la función de distribución

se desplacen de modo que el número de valores que pasen el umbral en cada instante de tiempo dependan directamente de X_0 (la pérdida inicial). El modelo es sumamente sensible a la variación de X_0 por el hecho de que son las velocidades las que se comportan de acuerdo al modelo de Wiener y no los retornos.

- Para el caso de un portafolio de inversión los resultados muestran que la correlación entre las series de tiempo de cada uno de los activos es importante, ya que la covarianza de estos hace que la tasa de elementos que pasan el umbral sea aún menor, sin embargo la probabilidad de obtener un pico de cierta magnitud por encima del umbral no siempre es muy pequeña en los instantes iniciales del proceso de Wiener, sin embargo cambia drásticamente con el avance del tiempo y el VaR crece sumamente rápido haciendo que cada vez sea más difícil que existan elementos que superen el umbral. El cálculo se vuelve un tanto complicado por la gran cantidad de datos y el esfuerzo computacional ya es significativo.

A partir de todo esto, se puede considerar lo siguiente para tomar en cuenta al momento de invertir.

- Es importante considerar el análisis de la información y la disponibilidad inmediata de ésta, ya que esto podría hacer que el término aleatorio se vea reducido y por tanto la incertidumbre, y puesto que las inversiones del mercado bursátil también son parte de ingresos para el país, se debería desarrollar conciencia acerca de la transparencia de la información financiera de muchas entidades, con lo cual el mercado bursátil crecería, y con ésto se crearía una cadena de beneficios.

- El portafolio considerado (portafolio real) no presenta pérdidas extremas en el sentido considerado, ya que al asumir a la velocidad afectada directamente por los factores del mercado, provoca que la variación de los retornos sea mucho más rápida y, en poco tiempo la aleatoriedad termina ganando, haciendo que la incertidumbre se vuelva incontrolable, por tanto se crea un escenario riesgoso susceptible de catástrofes mayores. Es por eso, como ya se anotó, que el modelo presentado se ajusta a escenarios altamente volátiles e inciertos donde los síntomas de catástrofes se transmiten rápidamente acarreando grandes pérdidas; esta es la razón por la cual el modelo es bastante sensible a los cambios en cualquiera de las condiciones iniciales, pues la estimación de los parámetros puede llevarnos a valores bastante alejados de lo esperado si el modelo no es calibrado responsablemente.

Por un lado, aumentar el número de activos que están en nuestro portafolio es, en últimas, agregar otra serie de tiempo a las ya existentes, de modo que las catástrofes se pueden transmitir fácilmente. Por otro lado, el aumento de una o más series, hace que la probabilidad de obtener un pico sobre el umbral en el mismo

instante de tiempo en dos o más activos se vea reducida considerablemente, y por tanto se reduce la probabilidad de perder.

- Finalmente, hay que enfatizar que las condiciones iniciales siempre son impuestas por el inversionista. Hay que tener en cuenta el activo que se está analizando y el tipo de mercado en el cual se encuentra; además, se debe considerar la aversión al riesgo del inversor y basarse en la experiencia acumulada.

REFERENCIAS

- [1] Klüppelberg, Claudia. *"Risk Management with Extreme Value Theory"*. Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology. D-80290 Munich, Germany. March 27, 2002.
- [2] Chan, Ngai Hang and Wong, Hoi Ying. *"Simulation Techniques in Financial Risk Management"*. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [3] Chan, Ngai Hang and Wong, Hoi Ying. *"Simulation Techniques in Financial Risk Management"*. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [4] Cabedo Semper, J.David y Moya Clemente, Ismael. *"El Valor en Riesgo: Una aproximación de Simulación Histórica"*. Trabajo realizado con el soporte financiero de la Fundación Bancaja (código: 0I025.01/1). Pág.1.
- [5] Jorion, Philippe. *"Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk"*. Third edition. United States of America, McGraw-Hill, 2007. Pág.110
- [6] Bouchaud, Jean-Philippe and Potters, Marc. *"Theory of Financial Risks"*. From statistical physics to risk management. United Kingdom at the University Press, Cambridge, 2001. Pág.23.
- [7] Ibid. Pág.94.
- [8] Klüppelberg, Claudia. *"Risk Management with Extreme Value Theory"*. Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology. D-80290 Munich, Germany. March 27, 2002. Pág. 6.
- [9] Jitka Dupačová, Jan Hurt and Josef Štěpán. *"Stochastic Modeling in Economics and Finance"*. United States of America, Kluwer Academic Publishers, 2003. Pág.37
- [10] Ibid. Pág.39.

- [11] Albrecht, Peter. *"Risk Measures"*. Institute for Insurance Science, University of Mannheim. D-68131 Mannheim, Schloss. January 2003. Pág.2.
- [12] Ibid. Pág.6-7.
- [13] Ibid. Pág.10-11.
- [14] Best, Philip W. *"Implementing Value at Risk"*. New York, John Wiley & Sons, Inc., May 1999.Pág.65-66.
- [15] Jitka Dupačová, Jan Hurt and Josef Štěpán. *"Stochastic Modeling in Economics and Finance"*. United States of America, Kluwer Academic Publishers, 2003. Pág.44.
- [16] Best, Philip W. *"Implementing Value at Risk"*. New York, John Wiley & Sons, Inc., May 1999.Pág.23.
- [17] Seymour, Anthony J. and Polakow, Daniel A. *"A Coupling of Extreme-Value Theory and Volatility Updating with Value-at-Risk Estimation in Emerging Markets: A South African Test"*. Multinational Finance Journal, 2003, vol. 7, no. 1&2, pp. 3–23. Pág.6
- [18] Pearson, Neil D. *"Risk Budgeting: Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk"*. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2002. Pág. 91.
- [19] Benninga, Simon and Wiener Zvi. *"Value-at-Risk (VaR)"*. Mathematica in Education and Research. Vol.7 No.4, 1998. Pág.8.
- [20] Klüppelberg, Claudia. *"Risk Management with Extreme Value Theory"*. Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology. D-80290 Munich, Germany. March 27, 2002. Pág.6
- [21] Kabluchko, Zakhar. *"Extreme-Value Analysis of Standardized Gaussian Increments"*. Institut für Mathematische Stochastik Georg-August-Universität Göttingen Maschmühlenweg 8-10, 37073, Göttingen. Pág.2
- [22] Krishnamoorthy K., *"Handbook of statistical distributions with applications"*, Taylor & Francis Group, LLC 2006. Pag 271
- [23] Malevergne Y., Sornette D., *"Extreme Financial Risks from dependence to risk management"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006
- [24] Bouchaud, Jean-Philippe and Potters, Marc. *"Theory of Financial Risks. From*

statistical physics to risk management". United Kingdom at the University Press, Cambridge, 2001. Pág.94.

[25] McNeil, Alexander J. *"Extreme Value Theory for Risk Managers"*. Departement Mathematik, ETH Zentrum. 17th May 1999. Pág.7

[26] Klüppelberg, Claudia. *"Risk Management with Extreme Value Theory"*. Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology. D-80290 Munich, Germany. March 27, 2002. Pág.11

[27] Van Montfort, M.A.J & Witter, J.V., *"The Generalized Pareto distribution applied to rainfall depths"*. Department of Mathematics, Agricultural University, De Dreijen 8, Wageningen, The Netherlands. Hydrological Sciences ~Journal - des Sciences Hydrologiques, 31, 2, 6/1986.

[28] Jitka Dupačová, Jan Hurt and Josef Štěpán. *"Stochastic Modeling in Economics and Finance"*. United States of America, Kluwer Academic Publishers, 2003. Pág.41.

[29] Conocido también como caminata aleatoria. Una breve descripción se puede ver en Jitka Dupačová, Jan Hurt and Josef Štěpán. *"Stochastic Modeling in Economics and Finance"*. United States of America, Kluwer Academic Publishers, 2003. Pág.40.

[30] Jitka Dupačová, Jan Hurt and Josef Štěpán. *"Stochastic Modeling in Economics and Finance"*. United States of America, Kluwer Academic Publishers, 2003. Pág.40-41

[31] Ibid. Pág.40

[32] Ibid. Pág.41-42

[33] Hull, Jhon C. *"Options Futures, and Other Derivatives"*. Third edition. Prentice-Hall, 1997. Pág.263.

[34] Chan, Ngai Hang and Wong, Hoi Ying. *"Simulation Techniques in Financial Risk Management"*. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2006. Pág.11.

[35] Ibid. Pág. 22.

[36] Bailey T. J. Norman, *"The elements of stochastic processes, with application to the natural sciences"* Jhon Wiley & Sons, Inc., 1964.

[37] Kannan D. Lakshmikantham V., *"Handbook of stochastic analysis with applications"*. Marcel Dekker Inc., 2002, Pag 160.

[38] Lax Melvin, Wei Cai, Min Xu, *"Random processes in Physics and Finance"*. Oxford University Press, 2006.

[39] McNeil, Alexander J. *"Extreme Value Theory for Risk Managers"*. Departement Mathematik, ETH Zentrum. 17th May 1999. Pág.10.

[40] Maginn, John L., Tuttle, Donald L., McLeavey, Dennis W., and Pinto, Jerald E. *"Managing Investment Portfolios: A dynamic Process"*. Third edition. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2007. Pag 4.

[41] Estimación de los parámetros de una DGP por Máxima Verosimilitud. Paquete para el Software Mathematica®, 2008.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalde Bessia, Federico. *"La Teoría de los Eventos Extremos, aplicación para evaluación de riesgos"*. Proyecto UBACyT E012: "Evolución de riesgos financieros extremos en mercados emergentes con énfasis en la Argentina ". Junio 2005.

Albrecht, Peter. *"Risk Measures"*. Institute for Insurance Science, University of Mannheim. D-68131 Mannheim, Schloss. January 2003.

Benninga, Simon and Wiener Zvi. *"Value-at-Risk (VaR)"*. Mathematica in Education and Research. Vol.7 No.4, 1998.

Best, Philip W. *"Implementing Value at Risk"*. New York, John Wiley & Sons, Inc., May 1999.

Bouchaud, Jean-Philippe y Potters, Marc. *"Theory of Financial Risks"*. From statistical physics to risk management. United Kingdom at the University Press, Cambridge, 2001.

Chan, Ngai Hang and Wong, Hoi Ying. *"Simulation Techniques in Financial Risk Management"*. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2006.

Davis, Richard A y Mikosch, Thomas. *"Extreme Value Theory for GARCH Processes"*. Departement of Statistics, Colorado State University, Fort Collins, CO 80523, U.S.A. and Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, Universitetsparken 5, DK-2100 Copenhagen, Denmark.

Embrechts, Paul. *"Extreme Value Theory: Potencial and Limitations as an Integrated Risk Management Tool"*. Departement of Mathematics, ETH Zürich.

Franke, J.; Härdle, W. and Stahl, G. *"Measuring Risk in Complex Stochastic Systems"*. First edition, United States of America, Chapman & Hall, 1996.

Hull, Jhon C. *Options Futures, and Other Derivatives*. Third edition. Pretince-Hall, 1997.

Jitka Dupačová, Jan Hurt and Josef Štěpán. *"Stochastic Modeling in Economics and Finance"*. United States of America, Kluwer Academic Publishers, 2003.

Jorion, Philippe. *"Financial Risk Manager handbook"*. Second Edition. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2003.

Jorion, Philippe. *"Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk"*. Third edition. United States of America, McGraw-Hill, 2007.

Kabluchko, Zakhar. *"Extreme-Value Analysis of Standardized Gaussian Increments"*. Institut für Mathematische Stochastik Georg-August-Universität Göttingen Maschmühlenweg 8-10, 37073, Göttingen.

Klüppelberg, Claudia. *"Risk Management with Extreme Value Theory"*. Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology. D-80290 Munich, Germany. March 27, 2002.

Klüppelberg Claudia and Lindner Alexander. *"Extreme value theory for moving average processes with light-tailed innovations"*. Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology, D-85747 Garching bei München, Germany.

Lamberton, Damien and Lapeyre, Bernard. *"Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance"*. First edition, United States of America, Chapman & Hall, 1996.

Maginn, John L., Tuttle, Donald L., McLeavey, Dennis W., and Pinto, Jerald E. *"Managing Investment Portfolios: A dynamic Process"*. Third edition. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2007.

Malevergne, Yannick and Sornette, Didier. *"Extreme Financial Risks. From Dependence to Risk Management"*. The Netherlands, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

McNeil, Alexander J. *"Extreme Value Theory for Risk Managers"*. Departement Mathematik, ETH Zentrum. 17th May 1999.

McNeil, Alexander J. *"Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory"*. Departement Mathematik, ETH Zentrum. April 1998.

Pearson, Neil D. *"Risk Budgeting: Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk"*. United States of America, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2002.

Pisarenko V.F¹. and Sornette D². *"Characterization of the Frecuency of Extreme*

Events by the Generalized Pareto Distribution". ¹International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Ac. Sci. Warshavskoye sh., 79, kor.2, Moscow 113556, Rusia. ²Institute of Geophysics and Planetary Physics and Department of Earth and Space Science University of California, Los Angeles, California 90095.

Reiss, Rolf-Dieter and Thomas, Michael. *"Statistical Analysis of Extreme Values with applications to Insurance, Finance, hydrology and Other Fields"*. Third Edition Germany, Birkhäuser Verlag AG, 2007.

Rydén, Jesper and Rychlik, Igor. *"Probability and Risk Analysis"*. Germany, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

Schroeck, Gerhard. *"Risk Management and value creation in financial institutions"*. United States of America, John Wiley & Sons, Inc, 2002.

Seymour, Anthony J. and Polakow, Daniel A. *"A Coupling of Extreme-Value Theory and Volatility Updating with Value-at-Risk Estimation in Emerging Markets: A South African Test"*. Multinational Finance Journal, 2003, vol. 7, no. 1&2, pp. 3–23.

Tapiero, Charles. *"Risk and Financial Management: Mathematical and Computational Methods"*. United States of America, John Wiley & Sons, Ltd, 2004.

Timmer, J. *"Parameter estimation in nonlinear stochastic differential equations"*. Fakultät für Physik, Hermann – Herder – Str. 3, 79104 Freiburg, Germany and Freiburger Zentrum für Datenanalyse und Modellbildung, Eckerstr. 1, 79104 Freiburg, Germany.

Van Montfort, M.A.J & Witter, J.V., . *"The Generalized Pareto distribution applied to rainfall depths"*. Department of Mathematics, Agricultural University, De Dreijen 8, Wageningen, The Netherlands. Hydrological Sciences ~Journal - des Sciences Hydrologiques, 31, 2, 6/1986.

Warwick, Ben. *"The Handbook of Risk"*. United States of America, John Wiley & Sons, Inc, 2003.

ANEXOS

EVALUACIÓN DEL VaR ESTOCÁSTICO PARA EXTREMOS CONSIDERANDO γ POSITIVO

Como complemento al presente trabajo, en la presente sección se pretende presentar cálculos, gráficos y análisis de uno de los parámetros más importantes de la ecuación de difusión, a saber, γ , ya que la variación de éste representa cambios muy significativos en cada una de las funciones de distribución estudiadas, por la sensibilidad del modelo. Así, para empezar, se dará a γ el mismo valor estimado que ya se mencionó en el capítulo tres, $\gamma = 257.41708230565996$; pero en esta ocasión el análisis para la ecuación de la tasa de variación de los precios lo haremos con γ positivo.

Partiremos, como en el capítulo tres, de la ecuación para la tasa de variación de los retornos, para encontrar la función de distribución de los mismos en función del tiempo,

$$\frac{d \ln P}{dt}(t+dt) - \frac{d \ln P}{dt}(t) = \gamma \frac{d \ln P}{dt}(t)dt + \sqrt{\sigma^2 dt} N_i^{t+dt}(0,1) \quad (\text{A.1})$$

Como se puede observar en (A.1), γ del primer término de la derecha se lo ha considerado con signo positivo. Ahora, como para el cálculo de la ecuación (3.31) se obtienen los parámetros de la función de distribución de la velocidad de los retornos, así:

$$\text{media} \left[\frac{d \ln P}{dt}(t) \right] = \left\langle \frac{d \ln P}{dt}(t) \right\rangle = C_o e^{\gamma t}, \quad \frac{d \ln P}{dt}(0) = C_o \quad (\text{A.2})$$

En el gráfico A.1 se presenta la función de la media de la velocidad de los retornos,

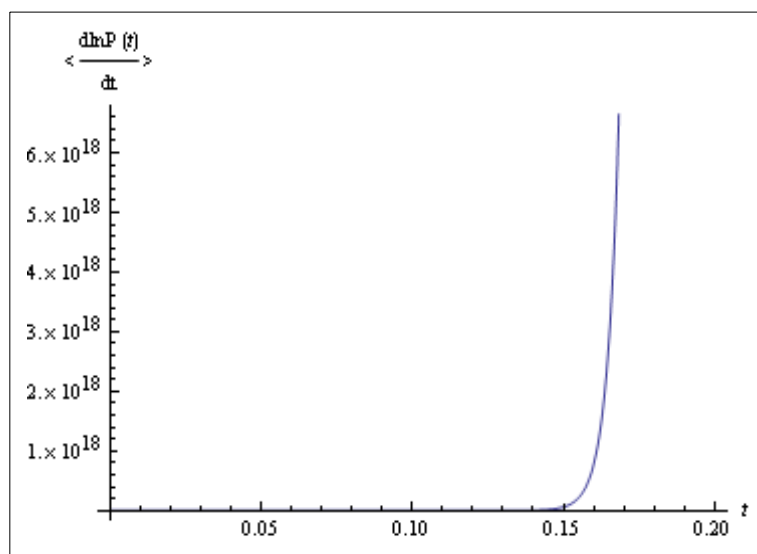


Gráfico A.1. – Media de la velocidad de los retornos

Evidentemente, la función de la media de la variación de los retornos en el tiempo, representada por A1, es exponencial, creciente hasta el infinito partiendo desde una velocidad inicial, V_0 , y es justamente, este comportamiento que se pretende aprovechar para modelar el comportamiento del VaR, pues al ser las velocidades demasiado rápidas, permitirán manipular en cierta forma el mercado y obtener ganancias.

Luego de realizar algunos reemplazos y cálculos se obtiene la función de la varianza de las velocidades fluctantes en el tiempo,

$$\text{var} \left[\frac{d \ln P}{dt}(t) \right] = \frac{\sigma^2}{2\gamma} (e^{2\gamma t} - 1), \quad \text{var} \left[\frac{d \ln P}{dt}(0) \right] = 0 \quad (\text{A.3})$$

En el gráfico A2, se presenta dicha función.

Como se esperaba, al existir distintos fenómenos en el mercado financiero que provocan fluctuaciones en el precio, la varianza será creciente, y en este caso tiende al infinito lo que hace al modelo inválido, pues no tiene sentido hablar de una varianza infinita.

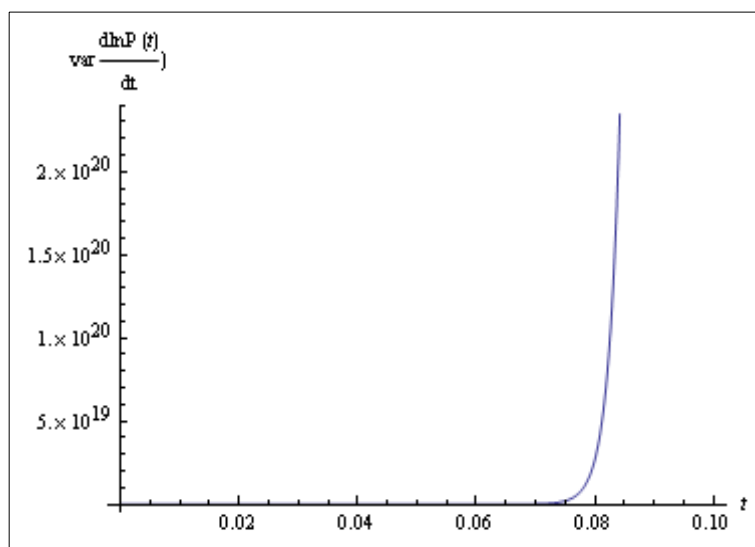


Gráfico A.2. – Varianza de la velocidad de los retornos

Pero lo que nos interesa realmente es el comportamiento de los retornos, más que de la variación de éstos, ya que para determinar el VaR utilizaremos a los retornos. Así, utilizando la ecuación (3.32), se encuentra la función de distribución para los retornos y para la varianza, en función de la velocidad de los mismos,

$$\ln P(t) = \mathcal{N}_0^t \left(\begin{array}{l} x_0 + \frac{C_0}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1), \\ \frac{\sigma^2}{\gamma^3} \left(\frac{e^{2\gamma t}}{2} - 2e^{\gamma t} \right) + \frac{\sigma^2}{\gamma^2} t + \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{\gamma^3} \end{array} \right), \quad \langle \ln P(0) \rangle = x_0 \quad (\text{A.4})$$

con los siguientes gráficos,

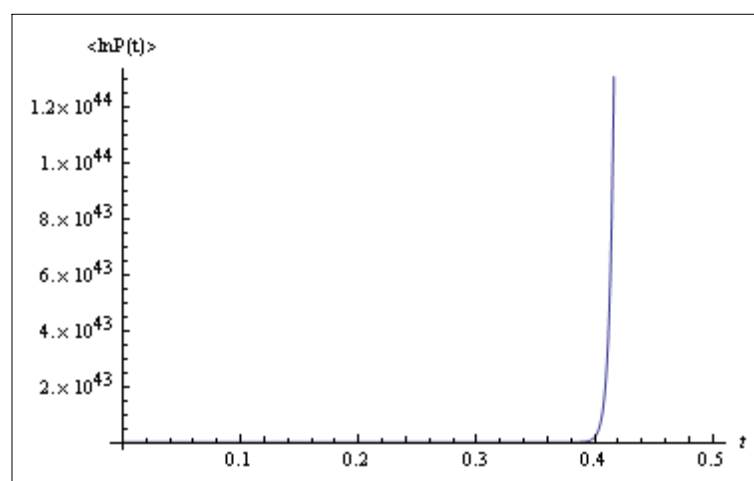


Gráfico A.3. – Media de los retornos

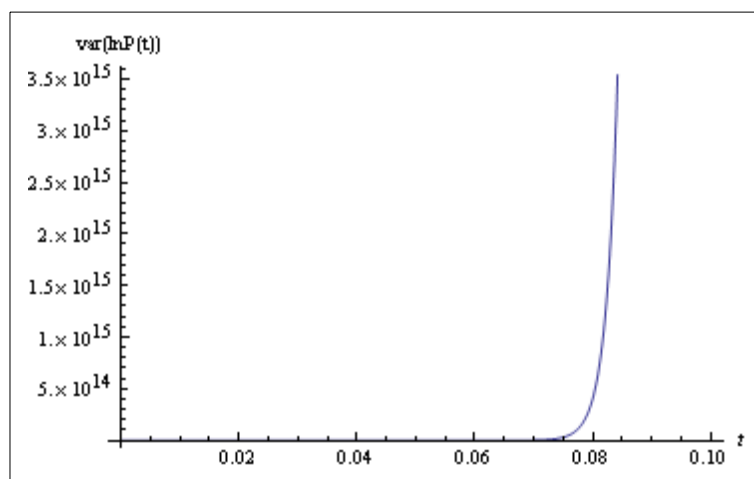


Gráfico A.4.– Varianza de los retornos

En el gráfico A.3 se puede ver que la media de los retornos tiene un comportamiento parecido a la media de la velocidad, partiendo desde un retorno inicial X_0 ; pero el crecimiento es muchísimo más rápido. Por consiguiente, la varianza de los retornos temporales también crecerá muy rápidamente como se puede ver en el gráfico A.4. Lo que hay que destacar es que empieza con valores muy pequeños, para luego tender hacia el infinito.

A continuación se presenta la evolución temporal de la función de densidad de los retornos en un lapso de tiempo igual a un año. Cabe recordar que se ha considerado escalas de tiempo muy pequeñas ($t = 0.01$ significa 100 días) solo para efectos de cálculo.

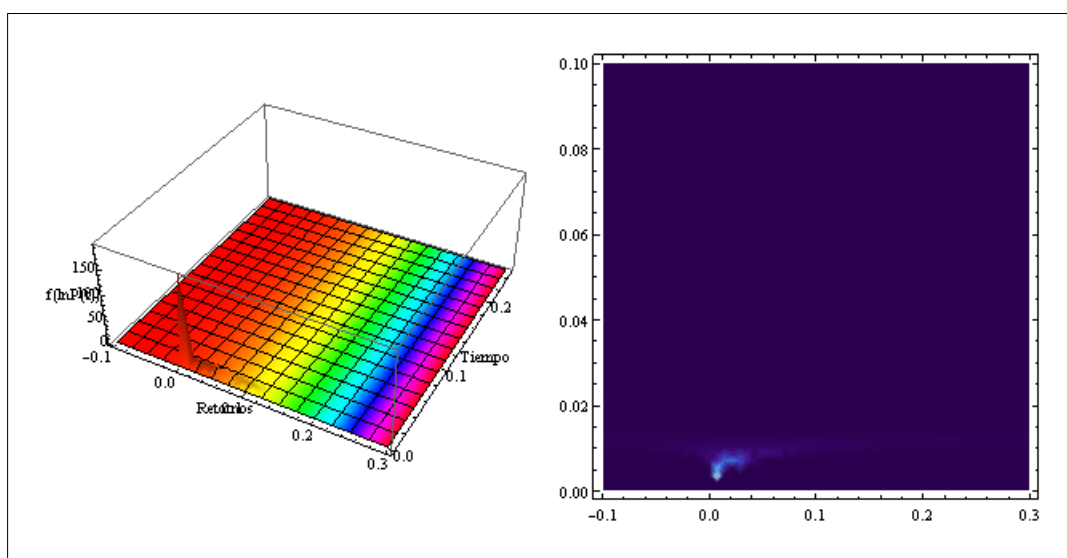


Gráfico A.5.– Evolución temporal de la función de densidad de $\ln P$

Al igual que para γ negativo, la varianza de los retornos va aumentando en el

tiempo hasta que éstos queden dominados completamente por la parte aleatoria.

Una vez obtenida la función de distribución temporal para los retornos, se puede calcular el VaR estocástico para el activo uno, siendo éste,

$$\text{VaR estocástico} = -0.00125794 + 0.000382335 e^{257.417t} + 0.000875603 e^{514.834t} + 0.45079 t \quad (\text{A.5})$$

con su respectivo gráfico,

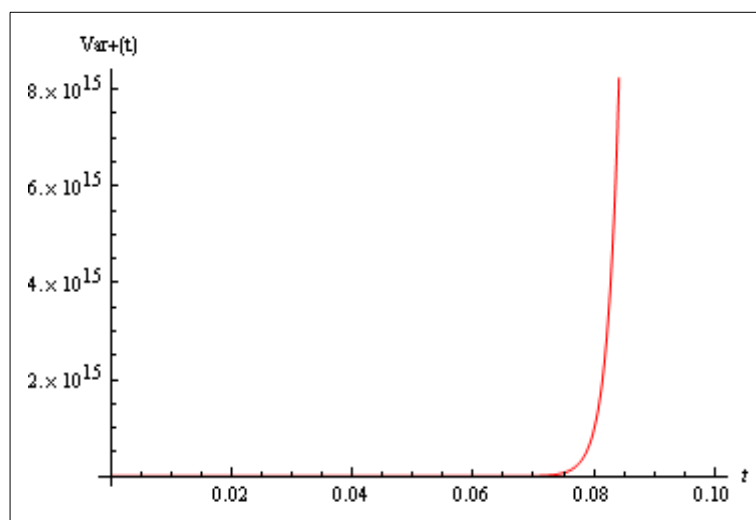


Gráfico A.6. – *VaR estocástico para el activo uno*

Comparando el gráfico A.6 con el gráfico 3.4 podemos ver la enorme diferencia, pues con γ negativo la escala de valores es muy pequeña y aunque tiende al infinito tiene sentido, y no como en este caso que el comportamiento del VaR estocástico es demasiado grande, de modo que la escala de valores que estamos hablando ya ni siquiera tiene sentido.

Con el VaR en función del tiempo, que a partir de ahora será el umbral, se pasa al cálculo del VaR estocástico para extremos, donde lo primero que se hará es determinar el número de datos que pasan el umbral para cada instante de tiempo, para el ejemplo se ha tomado $t = 0, 0.01, \dots, 1$. Estos datos conforman la base de datos de valores extremos, así,

El número de datos que **SI** pasan el umbral es, en cada instante de tiempo=
 {1, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

Con los resultados de A.5 y más claramente con el gráfico A.6 se puede decir a simple vista que no existirían valores extremos, ya que el VaR estocástico es demasiado grande, y se evidencia con el resultado anterior, donde solamente para el instante de tiempo 1, pasan solamente 1 valor. De ahí que, el VaR estocástico para extremos está determinado por la siguiente ecuación,

$$\text{El VaR estocástico para extremos es = } \{0.721622 - 0.00106878 e^{257.417t} + 0.00123838 e^{514.834t} + 0.637561 t\} \quad (\text{A.6})$$

Con la ecuación (A.6), se puede obtener el VaR estocástico para extremos para uno y diez días, así

El VaR estocástico para extremos al tiempo $t = 1$ es : 0.927157

El VaR estocástico para extremos al tiempo $t = 10$ es : 2.83021×10^{19}

es decir, para un día, la máxima cantidad esperada que se podría perder es el 92.71% del valor total invertido, cuyo porcentaje está dentro del orden de pérdidas. Sin embargo, para un instante de tiempo $t = 10$, es decir, para 10 días que relativamente no es muy distante de 1 día, el VaR es exageradamente alto, y esto no tiene sentido, por lo que de esta forma invalidamos el modelo para un γ positivo.

TABLA N°1: Salidas del software R para la estimación de parámetros utilizando el método de Bloques Máximos

	estimadores máxima verosimilitud			desviación estándar			% de retorno cada 12 meses		
	ξ	σ	μ	ξ	σ	μ	inferior	esperado	superior
activo 1	-0.0682971	2.59329904	5.1967119	0.12447092	0.39899359	0.56456521	9.25549257	11.0290001	14.9833678
activo 2	-0.3237574	2.53283303	4.95588144	0.15953569	0.42367591	0.56078321	8.17288736	9.230446	11.5635688
activo 3	-0.0904326	1.64359613	4.38909582	0.16365795	0.26894906	0.36926111	6.92207799	7.99010163	10.7203876
activo 4	-0.4265278	1.92620058	4.15974917	0.18195529	0.33090631	0.43014548	6.43596794	7.08187791	8.29362637
activo 5	0.55580274	1.48074634	2.31744952	0.23090228	0.33888152	0.3438653	6.20816418	10.0034386	26.918801
activo 6	0.10126966	1.02325825	3.29556786	0.23182009	0.19491822	0.24656009	5.10738623	6.13009565	9.64796964
activo 7	0.04295024	0.83398188	3.54376178	0.16393031	0.13922528	0.18709947	4.99868259	5.69071989	7.61955937
activo 8	0.74340759	1.04970532	3.25335546	0.24890243	0.27082951	0.24236775	6.52520786	10.5143025	31.2523113
activo 9	0.33383319	0.88788561	1.63952154	0.13999944	0.16348471	0.19105013	3.5802388	4.98926835	8.95811851
activo 10	-0.4433591	0.84641213	2.48510939	0.18438333	0.15031506	0.18918314	3.47353299	3.74753627	4.28706851
activo 11	0.87278388	0.39871026	1.39208935	0.31884556	0.11571722	0.0987737	2.82448004	4.78358747	15.7329548
activo 12	-0.0035636	1.36541243	3.1666728	0.1051638	0.20234669	0.29159305	5.46597485	6.48615978	8.73512975
activo 13	0.02092321	0.57659919	1.46020942	0.11631474	0.08862554	0.12453937	2.48014799	2.95538593	4.07293765
activo 14	0.13788916	1.09610138	2.85138043	0.12476952	0.17775114	0.23697241	5.00724806	6.16229044	9.16911657
activo 15	0.28753777	1.07867841	2.28405983	0.18429351	0.20488931	0.24549007	4.75772285	6.28676526	12.1502006
activo 16	0.10212323	0.49997863	1.48083139	0.13163786	0.08087953	0.10876107	2.44478031	2.92111247	4.20698911
activo 17	0.0906605	0.90184355	2.32041988	0.18914295	0.16045138	0.20788656	3.97962641	4.87951728	7.75818728
activo 18	-0.2368512	1.02040371	2.28200968	0.13718013	0.15417391	0.22223958	3.73342396	4.22131459	5.2352786
activo 19	-0.3875737	1.00132492	2.35578172	0.1031563	0.14575315	0.21211163	3.63242698	3.96844891	4.51386136
activo 20	0.15411219	0.71451927	1.93043605	0.19392943	0.13003824	0.16496686	3.31932253	4.1361627	6.92339596
activo 21	-0.4027459	0.60567684	1.86532679	0.1183926	0.09159442	0.12925303	2.61942259	2.82528507	3.16460323
activo 22	0.14570368	0.89304951	2.16510149	0.17698853	0.15786197	0.20264698	3.9054401	4.89101687	8.10335809
activo 23	0.04127854	0.62536045	1.95564578	0.21918975	0.11467928	0.14861519	3.05611531	3.62004135	5.57741045
activo 24	-0.0820216	0.78890243	2.0329517	0.17266542	0.12976572	0.17808476	3.29116788	3.83231368	5.20636183
activo 25	-0.0522253	0.7283645	2.28814343	0.16388407	0.11797981	0.16297113	3.48417471	4.0112859	5.33158352
activo 26	0.19761451	0.76870591	1.84559698	0.15327943	0.1339522	0.17027274	3.42224693	4.36276195	7.22815384

activo 27	0.31091951	0.63242525	1.82152381	0.22620833	0.12831316	0.14972435	3.26782124	4.24752728	8.32429969
activo 28	0.34513562	0.62001133	1.64921049	0.28528047	0.1382268	0.1581302	3.08857881	4.14728194	10.3411121
activo 29	0.40273623	0.60085739	1.56370471	0.19707059	0.12317321	0.13622435	3.06848212	4.19675561	8.45045213
activo 30	0.30907364	0.62849932	1.810014	0.19822011	0.12275924	0.14418364	3.24674084	4.21462118	7.81293343
activo 31	0.44489344	0.48458925	1.40525962	0.22177168	0.10398787	0.11279103	2.63886935	3.66586387	8.05753195
activo 32	0.36107152	0.5766356	1.48264895	0.20746746	0.11688809	0.1329982	2.82239473	3.86018248	7.77273929
activo 33	0.57261112	0.33030305	0.67764973	0.21865108	0.07562592	0.07533203	1.62098362	2.55000585	6.65692481
activo 34	0.1839704	0.48884814	1.63894696	0.19144509	0.08963277	0.11233747	2.61816594	3.2101973	5.21536074
activo 35	0.179738	0.28999728	1.53872849	0.2783863	0.06096565	0.07384321	2.11982502	2.46548906	3.93115417
portafolio	0.1476346	0.4346428	1.1290837	0.13952802	0.07276507	0.0951871	1.97354793	2.45921126	3.76976077

Nota: la longitud del bloque es de 30 días