

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

Tesis de Grado

"REALIMENTACION DE ESTADO"

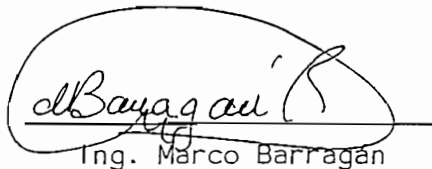
TESIS PREVIA LA OBTENCION DEL TITULO DE
INGENIERO EN
ELECTRONICA Y CONTROL

Juan Carlos Guerra Durán

Julio, 1983



Certifico que la presente tesis
ha sido elaborada en su totalidad
por el señor Juan Carlos Guerra
Durán.



Ing. Marco Barragán

DEDICATORIA

A mis padres y hermanos

A Jackie

A G R A D E C I M I E N T O

Al haber finalizado esta tesis, quiero dejar constancia de mi gran agradecimiento y permanente gratitud hacia los señores Ingenieros Marco Barragán y Efraín del Pino.

Al primero por su acertada dirección en la elaboración de este estudio, y al segundo por su desinteresada y coadyuvante ayuda.

Sin la colaboración de tan distinguidos profesionales y pedagogos difícil hubiese resultado concluir exitosamente esta tesis, que es la culminación de mi carrera universitaria.

Juan Carlos Guerra D.

C O N T E N I D O

CAPITULO 1: INTRODUCCION	1
CAPITULO 2: DESCRIPCION DE SISTEMAS A VARIABLES DE FASE.	
2.1 Descripción de sistemas usando variables de estado	6
2.2 Método de variables físicas para la selección de variables de estado	9
2.3 Formas canónicas	18
2.3.1 Determinación de forma canónica observable	18
2.3.2 Determinación de la forma canónica de Jordán	23
2.3.3 Determinación de la forma canónica controlable	28
2.4 Controlabilidad	33
CAPITULO 3: REALIMENTACION DE ESTADO.	
3.1 Generalidades	38
3.2 Estudio de la realimentación de estado con variables de fase	48
3.3 Análisis de error en un sistema con realimentación de estado	60
3.4 Planta con polos complejos	77
3.5 Estados inaccesibles	81

CAPITULO 4: PROGRAMAS COMPUTACIONALES DESARROLLADOS.

4.1	Biblioteca de programas	86
4.2	Programa maestro: JOGUERRA	89
4.3	Ingreso de datos: ENTRADA	92
4.4	Cálculos básicos: CALCBASIC	95
4.5	Determinación de salidas ficticias: CALCFICTIC	104
4.6	Análisis y/o diseño con realimentación de estado: REALESTADO	108

CAPITULO 5: EJEMPLOS DE APLICACION Y CONCLUSIONES.

5.1	Ejemplos y resultados	115
5.2	Conclusiones	159
5.3	Recomendaciones	161

ANEXO A: LISTADO DE PROGRAMAS

ANEXO B: MODO DE EMPLEO DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS

BIBLIOGRAFIA

CAPITULO UNO

INTRODUCCION

Este trabajo intenta dar una exposición clara y comprensible de lo que es la realimentación de estado, para ello se ha puesto mucho cuidado en las explicaciones, diagramas y cálculos.

Cuando se diseña un sistema de control por el método de análisis, se busca satisfacer ciertas condiciones de estabilidad, precisión y rapidez. Usando técnicas convencionales, se pueden llegar a satisfacer estos requerimientos, pero de una manera aproximada y con base en una serie de tentativas; además, se consigue estabilidad sólo dentro de un cierto margen de ganancia.

Este tema de tesis propone el diseño usando realimentación de estado, el que consiste en dar ciertas características deseadas a un sistema mediante la fijación de polos, empleando la realimentación de todos los estados del mismo, con lo que se puede conseguir el eliminar el error de posición. Con este método los resultados satisfacen, en términos generales, las condiciones sobre todo de precisión, y estabilidad para cualquier valor de ganancia. Además, para obtener los resultados que cumplan con ciertas especificaciones, no se requiere más que una tentativa.

Esto hace pensar que el disponer de este método, aunque no sustituye a otros anteriores (lugar de las raíces, criterio de Nyquist, etc.), es un gran aporte para completar un conjunto de herramientas de diseño.

Con miras a conseguir la implementación de este método en el computador 4051 GRAPHIC SYSTEM de la casa Tektronix se ha desarrollado la presente tesis siguiendo la línea que se indica a continuación.

En el Capítulo Dos se tratan algunos conceptos fundamentales del espacio de estado, tema fundamental de la teoría moderna de control. Se ven también varios métodos de representar un sistema en variables de estado, así como la relación existente entre algunas formas canónicas y la función de transferencia de un sistema.

En el Capítulo Tres se hace el análisis teórico de la realimentación de estado y las consecuencias que trae en un sistema de control. Además, se hace un estudio, desde el punto de vista de variables de estado, de los errores de posición, velocidad y aceleración.

El Capítulo Cuatro contiene un resumen de las consideraciones que se han hecho para desarrollar los programas computacionales que se presentan en esta tesis, así como también los correspondientes diagramas de flujo y listado de variables usadas.

En el Capítulo Cinco se presentan ejemplos y varias conclusiones que de ellos se desprenden con la finalidad de dar mayor claridad y permitir una mayor comprensión de los temas tratados; junto con éstos se tienen las conclusiones y recomendaciones fina-

les.

Quiero expresar que una de las motivaciones principales de la realización de esta tesis, fue el deseo de colaborar a complementar la biblioteca de programas para el Area de Sistemas de Control de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.

CAPITULO DOS

DESCRIPCION DE SISTEMAS A VARIABLES DE FASE

- 2.1. Descripción de sistemas usando variables de estado.
- 2.2. Método de variables físicas para la selección de variables de estado.
- 2.3. Formas canónicas.
- 2.4 Controlabilidad.

2.1. DESCRIPCION DE SISTEMAS USANDO VARIABLES DE ESTADO

A pesar de que una parte de este t3pico se ha tratado ya en trabajos anteriores, es importante citarla, aunque en forma breve, pues se dan algunos conceptos b3sicos y varias t3cnicas de plantear ecuaciones de estado, que se usan en el desarrollo de esta tesis.

Estado.- Se define como sigue: El estado de un sistema es una estructura matem3tica conteniendo n -variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_i(t)$, ..., $x_n(t)$ cuyos valores iniciales $x_i(t_0)$ y las entradas $u_j(t)$ al sistema son suficientes para definir de manera 3nica la respuesta futura para t_0 del sistema. Por esta raz3n a las variables $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, se las llama de estado. Hay un n3mero m3nimo de variables de estado requeridas para representar de modo preciso al sistema. Adem3s, las variables de estado no necesitan ser cantidades f3sicamente observables y mesurables; pueden ser cantidades puramente matem3ticas.

Las r entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_j(t)$, ..., $u_r(t)$ son deterministas, es decir tienen valores espec3ficos para todos los valores de tiempo $t > t_0$. La letra u es la notaci3n normalizada para la funci3n de fuerzas de entrada y se denomina variable de control.

Generalmente al tiempo inicial de arranque, t_0 , se le toma como cero.

Esta definición produce otras adicionales que siguen.

Vector estado.- El conjunto de variables de estado $x_i(t)$ representa los elementos o componentes de un vector n dimensional $\underline{x}(t)$; o sea:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{x} \quad (2.1)$$

De lo anteriormente indicado, cuando se especifican todas las entradas $u_j(t)$ a un sistema, el vector de estado resultante determina de modo único el comportamiento del sistema para cualquier $t > t_0$.

Espacio de estado.- Se define como un espacio n dimensional en el que los componentes del vector estado representan sus ejes ordenados.

Trayectoria de estado.- Es la trayectoria producida en el espacio de estado por el vector \underline{x} al cambiar en el transcurso del tiempo. Al espacio y trayectoria de estado, en el caso bidimensional se los conoce como plano de fase y trayectoria de fase respectivamente.

El primer paso al aplicar estas definiciones a un sistema físico es el de seleccionar las variables del sistema que han de representar el estado del mismo. No existe modo único de hacer esta selección, pero se conocen varias técnicas para expresar el estado de un sistema. En la presente tesis se describen los siguientes métodos para sistemas invariantes en el tiempo:

- variables físicas
- formas canónicas

2.2. METODO DE VARIABLES FISICAS PARA LA SELECCION DE VARIABLES DE ESTADO.

La selección de variables de estado en el método de variables físicas se basa en los elementos almacenadores de energía del sistema. La tabla (2.1.) muestra algunos elementos comunes almacenadores de energía existentes en los sistemas físicos, las ecuaciones energéticas correspondientes, y la variable física que normalmente se asigna como variable de estado.

ELEMENTO		ENERGIA	VARIABLE FISICA	
Condensador	C	$Cv^2/2$	voltaje	v
Inductor	L	$Li^2/2$	corriente	i
Masa	M	$Mv^2/2$	velocidad de translación	v
Momento de inercia	J	$Jw^2/2$	velocidad de rotación	w
Resorte	K	$Kx^2/2$	desplazamiento	x
Compresibilidad de un fluido	V/K_B	$VP_L/2$	presión	P_L
Condensador de fluidos	$C=\rho A$	$Ah^2/2$	altura	h
Condensador térmico	C	$C\theta^2/2$	temperatura	θ

tabla 2.1.

Cabe indicar que sólo se eligen variables físicas independientes como variables de estado, entendiéndose por variables de estado independientes aquellas que no pueden expresarse en función

de las restantes variables de estado asignadas. Hay casos en que puede ser necesario identificar más variables de estado que las procedentes de ecuaciones energéticas.

Ejemplo 1.

Circuito serie R-L-C figura 2.1.- Este circuito contiene dos elementos almacenadores de energía, la inductancia y el condensador. Según la tabla 2.1 se identifican dos variables de estado: $x_1 = v_C$ (voltaje del condensador) y $x_2 = i$ (corriente de la inductancia). Entonces se tendrán dos ecuaciones de estado.

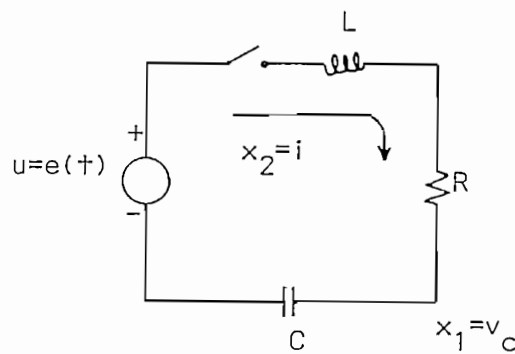


figura 2.1.

Para obtener la ecuación que contenga la derivada de la corriente en el inductor, se escribe la ecuación de malla. Para obtener una ecuación que contenga la derivada del voltaje del condensador, se escribe la ecuación de nodo. El número de ecuaciones de malla que deben plantearse es igual al número de variables representando corrientes en inductores. El número de ecuaciones de voltajes en nodos debe ser igual al número de variables de estado que representan voltajes de condensadores (la mayoría de veces son ecuaciones de nodo).

Es necesario determinar de estas ecuaciones, cuales de las variables elegidas son independientes.

Para este ejemplo las ecuaciones de malla y nodo son respectivamente:

$$L \dot{x}_2 + R x_2 + x_1 = u \quad (2.2)$$

$$C \dot{x}_1 = x_2 \quad (2.3)$$

Ordenando estas ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2 \quad (2.4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) representan las ecuaciones de estado del sistema que contiene dos variables de estado independientes. Nótese que son ecuaciones diferenciales de primer orden y son dos ($n = 2$) el número mínimo de ecuaciones de estado necesarias para representar el comportamiento futuro del sistema (ejemplo 1).

La siguiente definición se basa en el ejemplo anterior:

Ecuación de estado.- Las ecuaciones de estado de un sistema forman un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden, siendo n el número de estados independientes.

Las ecuaciones de estado representadas por las ecuaciones

(2.4) y (2.5) se expresan matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (2.6)$$

Que se puede representar como:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad (2.7)$$

en la que

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{es un vector columna } n \times 1$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz } n \times n \text{ de coeficientes de la planta}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{es un vector de estado } n \times 1$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz de control } n \times 1$$

y, u en este caso es un vector de control unidimensional.

Si la cantidad de salida $y(t)$ del circuito RLC de la figura 2.1 es el voltaje del condensador v_C , entonces:

$$y(t) = v_C = x_1$$

Así la ecuación de salida del sistema será

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

en la que la matriz

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es un vector fila $1 \times n$, en este caso 1×2

$y(t)$ en este ejemplo es un vector de salida unidimensional.

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) son de un sistema de entrada y salida únicas. Estas notaciones se convierten en sistemas de entrada y salidas múltiples (r entradas y m salidas), en:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad (2.9)$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} \quad (2.10)$$

en donde:

A es la matriz de la planta $n \times n$

B es una matriz de control $n \times r$

C es una matriz de salida $m \times n$

u es un vector de control r - dimensional

y es un vector de salida m - dimensional

x es un vector de estado n - dimensional

Ejemplo 2.

Se trata de obtener las ecuaciones de estado del circuito de la figura 2.2. La salida es el voltaje sobre el condensador C_1 , v_1 . La entrada o variable de control es una fuente de corriente $i(t)$. Las variables designadas son i_1 , i_2 , i_3 , v_1 y v_2 .

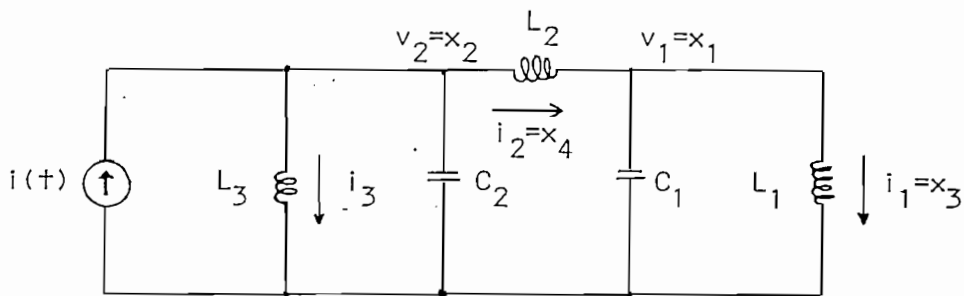


figura 2.2.

Se escribirán tres ecuaciones de malla y dos de nodo:

$$v_1 = L_1 \dot{i}_1 \quad (2.11)$$

$$v_2 = L_2 \dot{i}_2 + v_1 \quad (2.12)$$

$$v_2 = L_3 \dot{i}_3 \quad (2.13)$$

$$i_2 = C_1 \dot{v}_1 + i_1 \quad (2.14)$$

$$i = i_3 + C_2 \dot{v}_2 + i_2 \quad (2.15)$$

Llevando las ecuaciones (2.11) y (2.13) a la ecuación (2.12) e integrando, resulta:

$$L_3 i_3 = L_2 i_2 + L_1 i_1 \quad (2.16)$$

Esta ecuación revela que una corriente de inductor depende de las otras dos. Así, este circuito tiene sólo cuatro variables físicas independientes de estado, dos corrientes de inductor y dos voltajes de condensador. Las cuatro variables de estado independientes se designan así: $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$, $x_3 = i_1$ y $x_n = i_2$: siendo la variable de control $u = i(t)$. Las tres ecuaciones de estado se obtienen de las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.14). La cuarta ecuación se obtiene al eliminar la corriente i_3 de las ecuaciones (2.15) y (2.16), el resultado es:

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{C_1} i_2 - \frac{1}{C_1} i_1$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{L_1}{L_3 C_2} i_1 - \frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} i_2 + \frac{i}{C_2}$$

$$\dot{i}_1 = \frac{1}{L_1} v_1$$

$$\dot{i}_2 = -\frac{1}{L_2} v_1 + \frac{1}{L_2} v_2$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.17.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (2.17.b)$$

La dependencia de i_3 , i_2 , e i_1 , indicada por la ecuación (2.16) puede no observarse con facilidad. En ese caso la ecuación matricial de estado para este ejemplo se escribirá con cinco (5) variables de estado.

En general es necesario escribir más ecuaciones de las necesarias a causa de que aparezcan otras variables. Estas ecuaciones se resuelven simultáneamente para eliminar todas las variables internas en el circuito salvo las variables de estado.

En circuitos más complicados es posible introducir métodos más generales y sistemáticos ¹ mediante gráficos lineales para obtener

1. BARRAGAN MARCO. Descripción de Sistemas a Variables de Estado. Copiados, E.P.N.

las ecuaciones de estado; estos métodos no se incluyen en este proyecto, por encontrarse fuera de su alcance en cuanto a tema se refiere.

2.3. FORMAS CANONICAS

En esta sección se presentarán nuevas técnicas para describir un sistema en forma de variables de estado. Como las variables de estado no son únicas, hay varios caminos o formas de seleccionarlos. En la sección anterior se presentó el uso de variables físicas, ahora se introducirán tres formas distintas de seleccionar variables de estado, las mismas que son útiles para representar las funciones de transferencia de sistemas, en el espacio de estado, de una forma sistemática y relativamente fácil; por esta razón se las denomina formas canónicas, y son: forma canónica observable, forma canónica de Jordan y, forma canónica controlable, a esta última se la acostumbra llamar también forma canónica en "variables de fase".

En la presente sección también se mencionan brevemente algunos métodos de transformación a las formas canónicas mencionadas.

Deberá prestarse especial atención a las variables de fase debido a su utilidad en el diseño y análisis de realimentación de estado. Además, su uso presta gran facilidad para tratar dicho tópico.

2.3.1. DETERMINACION DE LA FORMA CANONICA OBSERVABLE

2.3.1.1. Obtención de la forma canónica observable a partir de la función de transferencia.

Sea la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} + d \quad (2.18)$$

que se puede representar:

$$(s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1) Y(s) = (b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_2 s + b_1) U(s) + (s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1) dU(s) \quad (2.19)$$

dividiendo la ecuación (2.19) por s^n (integrando n veces):

$$\left(1 + \frac{a_n}{s} + \dots + \frac{a_2}{s^{n-1}} + \frac{a_1}{s^n}\right) Y(s) = \left(\frac{b_1}{s} + \frac{b_{n-1}}{s^2} + \dots + \frac{b_2}{s^{n-1}} + \frac{b_1}{s^n}\right) U(s) + \left(1 + \frac{a_n}{s} + \dots + \frac{a_2}{s^{n-1}} + \frac{a_1}{s^n}\right) dU(s) \quad (2.20)$$

desarrollando:

$$Y = dU + \frac{1}{s} (b_n U - a_n Y + a_n dU) + \frac{1}{s^2} (b_{n-1} U - a_{n-1} Y + a_{n-1} dU) + \dots + \dots + \frac{1}{s^{n-1}} (b_2 U - a_2 Y + a_2 dU) + \frac{1}{s^n} (b_1 U - a_1 Y + a_1 dU) \quad (2.21)$$

En el dominio del tiempo, haciendo $p = \frac{d}{dt}$:

$$Y = du + \frac{1}{p} (b_n u - a_n y + a_n du) + \frac{1}{p^2} (b_{n-1} u - a_{n-1} y + a_{n-1} du) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{p^{n-1}} (b_2 u - a_2 y + a_2 du) + \frac{1}{p^n} (b_1 u - a_1 y + a_1 du) \quad (2.22)$$

Entonces las variables de estado que se escogen son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_1 u - a_1 y + a_1 du & \Rightarrow \dot{x}_1 &= -a_1 x_n + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= b_2 u - a_2 y + a_2 du + x_1 & \Rightarrow \dot{x}_2 &= x_1 - a_2 x_n + b_2 u \\ &\vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= b_{n-1} u - a_{n-1} y + a_{n-1} du + x_{n-2} & \Rightarrow \dot{x}_{n-1} &= x_{n-2} - a_{n-1} x_n + b_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= b_n u - a_n y + a_n du + x_{n-1} & \Rightarrow \dot{x}_n &= x_{n-1} - a_n x_n + b_n u \\ y &= x_n + du & \Rightarrow y &= x_n + du \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (2.23.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + du \quad (2.23.b)$$

2.3.1.2. Obtención de la forma canónica observable por un cambio de base.¹

Teorema.- Sea un sistema n dimensional, lineal, invariante en el tiempo con una sola entrada y una sola salida descrita por las ecuaciones

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b}u \quad (2.24.a)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + du \quad (2.24.b)$$

Si éste es observable entonces puede ser convertido, mediante una transformación de semejanza en la forma

$$\dot{\underline{x}}^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots\dots\dots 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \dots\dots\dots 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots 1 & -a_n \end{bmatrix} \underline{x}^o + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (2.25.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}^o + du \quad (2.25.b)$$

y la función de transferencia del sistema estará dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots\dots\dots + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1} + d \quad (2.26)$$

1. PROAÑO J. Tesis de grado. Escuela Politécnica Nacional 1982.

La transformación de semejanza utilizada es:

$$\underline{x} = \underline{T}_O \underline{x}^O \quad (2.27)$$

por lo tanto la representación canónica observable estará dada por

$$\dot{\underline{x}}^O = \underline{A}^O \underline{x}^O + \underline{b}^O u \quad (2.28.a)$$

$$y = (\underline{c}^O)^T \underline{x}^O + du \quad (2.28.b)$$

consecuentemente las matrices constantes de las ecuaciones (2.28.a)

y (2.28.b) están dadas por:

$$\underline{A}^O = \underline{T}_O^{-1} \underline{A} \underline{T}_O \quad (2.29)$$

$$\underline{b}^O = \underline{T}_O^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \quad (2.30)$$

$$(\underline{c}^O)^T = \underline{c}^T \underline{T}_O \quad (2.31)$$

En donde \underline{T}_O se encuentra de la siguiente forma:

$$\underline{T}_O = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-2} \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

2.3.2. DETERMINACION DE LA FORMA CANONICA DE JORDAN

2.3.2.1. Obtención de la forma canónica de Jordan a partir de la función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} + d \quad (2.33)$$

que se puede escribir de la siguiente forma:

$$Y(s) = dU(s) + \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} U(s) \quad (2.34)$$

Considérese el caso general en que el denominador se puede factorar, y que por simplicidad hay solamente una raíz múltiple (un solo bloque de Jordan), ya que es fácil extender el resultado al caso general. El denominador de (2.34) se puede factorar en:

$$s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 = (s - \lambda_1)^v (s - \lambda_{v+1}) \dots (s - \lambda_n) \quad (2.35)$$

Aquí hay v raíces iguales. Reduciendo (2.34) a fracciones parciales se obtiene:

$$Y(s) = dU(s) + \frac{r_1 U(s)}{(s - \lambda_1)^v} + \frac{r_2 U(s)}{(s - \lambda_1)^{v-1}} + \frac{r_v U(s)}{s - \lambda_1} + \frac{r_{v+1} U(s)}{s - \lambda_{v+1}} + \dots + \frac{r_n U(s)}{s - \lambda_n} \quad (2.36)$$

Los residuos r_k para las raíces múltiples se pueden calcular obteniéndose:

$$r_k = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s - \lambda_1)^v f(s) \right]_{s = \lambda_1} ; k = 1, 2, \dots, v \quad (2.37)$$

en donde $f(s)$ es la fracción polinómica en s de (2.34)

Los residuos r_i para las raíces de multiplicidad 1 (no repetidas) se pueden calcular ~

$$r_i = \frac{b_n \lambda_i^{n-1} + b_{n-1} \lambda_i^{n-2} + \dots + b_2 \lambda_i + b_1}{(\lambda_i - \lambda_{v+1})(\lambda_i - \lambda_{v+2}) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)}$$

$$i = v+1, \dots, n \quad (2.38)$$

Se debe observar que r y λ pueden ser números complejos, y los estados x_1, \dots, x_n son funciones del tiempo con valor complejo, y pueden escogerse de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} sX_1 & = & \lambda_1 X_1 + X_2 \quad . = \quad \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\ sX_2 & = & \lambda_1 X_2 + X_3 \quad . = \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ sX_{v-1} & = & \lambda_1 X_{v-1} + X_v \quad . = \quad \dot{x}_{v-1} = \lambda_1 x_{v-1} + x_v \\ sX_v & = & \lambda_1 X_v + U \quad . = \quad \dot{x}_v = \lambda_1 x_v + u \\ sX_{v+1} & = & \lambda_{v+1} X_{v+1} + U \quad . = \quad \dot{x}_{v+1} = \lambda_{v+1} x_{v+1} + u \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ sX_n = \lambda_n X_n + U \end{array} \quad . = \quad \begin{array}{l} \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u \end{array}$$

$$Y = dU + r_1 X_1 + r_2 X_2 + \dots + r_n X_n \quad . = \quad y = du + r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n$$

En donde se ha supuesto que $x_i(0) = 0$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{v-1} \\ \dot{x}_v \\ \dot{x}_{v+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{v+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{v-1} \\ x_v \\ x_{v+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.39.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix} \underline{x} + du \quad (2.39.b)$$

A la matriz nxn de la ecuación (2.39.a) se le denomina matriz de Jordan (forma canónica de Jordan).

2.3.2.2. Obtención de la forma canónica de Jordan por medio de un cambio de base. ¹



La matriz de Jordan puede ser obtenida como resultado de una transformación de semejanza de una matriz cuadrada \underline{A} cualquiera. Una característica importante que posee la matriz de Jordan está dada por el teorema siguiente:

Toda matriz cuadrada sobre el cuerpo de los números complejos, así como sobre cualquier otro cuerpo conmutativo algebraicamente cerrado, es semejante a una matriz de la forma de Jordan.

Lo que da a entender que dadas las ecuaciones (2.24.a) y (2.24.b) siempre se podrá obtener una matriz \underline{A}^* , tal que:

$$\underline{A}^* = \underline{J} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \quad (2.40)$$

donde \underline{T} está formada por los vectores propios generalizados de \underline{A} .

Hay varios métodos para encontrar la representación de la forma canónica de Jordan, pero aquí se presentará solamente uno a base de hallar los vectores columna que forman la matriz de cambio de base \underline{T} , y que consta de los siguientes pasos:

1. Calcular los valores propios de \underline{A} resolviendo

$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valores propios distintos con multiplicidades l_1, l_2, \dots, l_m respectivamente.

2. Calcular los l_1 vectores propios generalizados linealmente independientes de \underline{A} asociados a λ_1 , de la siguiente manera: calcular $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^i$, para $i = 1, 2, \dots$, hasta que el rango de $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^k$ sea igual al rango de $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^{k+1}$. Encontrar un vector propio generalizado de rango k , sea \underline{t} . \underline{t} es de rango k si cumple que $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^k \underline{t} = \underline{0}$, y $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^{k-1} \underline{t} \neq \underline{0}$, este es el vector propio asociado a λ_1 y las $(k-1)$ vectores propios que se obtienen a partir de éste son los vectores propios generalizados.

Se define $\underline{t}_i \triangleq (\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})^{k-i} \underline{t}$, para $i = 1, 2, \dots, k$.

Si $k = l_1$, se procede con el paso 3. Si $k < l_1$, es necesario encontrar otro vector propio generalizado con rango k y encontrar \underline{t}_{i+k} para $i = 1, 2, \dots, k$. Si esto no es posible, tratar con $k-1$ y así sucesivamente hasta que sean encontrados los l_1 vectores propios linealmente independientes. Observar que si el rango de $(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})$ es k_1 entonces hay un total de $(n-k_1)$ vectores propios generalizados asociados a λ_1 .

3. Repetir el paso 2 para los valores propios

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

4. Se tiene

$$\underline{T} = (\underline{t}_1 | \underline{t}_2 | \underline{t}_3 | \dots | \underline{t}_k | \dots | \underline{t}_n)$$

5. Se calcula

$$\underline{J} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{A}^*$$

2.3.3. DETERMINACION DE LA FORMA CANONICA CONTROLABLE

2.3.3.1. Obtención de la forma canónica controlable a partir de la función de transferencia.

Sea la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} + d \quad (2.41)$$

esta función de transferencia puede escribirse así

$$Y(s) = dU(s) + \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} U(s) \quad (2.42)$$

Que en el dominio del tiempo y haciendo $p = \frac{d}{dt}$ será

$$y(t) = du(t) + \frac{c_n p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} + \dots + c_2 p + c_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1} u(t) \quad (2.43)$$

Si se escogen las variables de estado como sigue:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + u = (-a_1 - a_2 p - \dots - a_n p^{n-1}) x_1 + u$$

Entonces la salida y deberá estar especificada precisamente

como:

$$y = du + (c_n p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} + \dots + c_1) x_1 \quad (2.44)$$

pero $p^i x_1 = x_{i+1} ; i = 1, 2, \dots, n-1$

entonces:

$$y = du + c_n x_n + c_{n-1} x_{n-1} + \dots + c_1 x_1 \quad (2.45)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.46.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \underline{x} + du \quad (2.46.b)$$

2.3.3.2. Obtención de la forma canónica controlable por medio de un cambio de base.¹

Teorema.- Si un sistema n dimensional, lineal, invariante en el tiempo y cuyas ecuaciones (de estado y de salida) tienen una sola entrada y una sola salida es controlable, entonces este puede ser convertido mediante una transformación de semejanza a la forma siguiente:

$$\dot{\underline{x}}^f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \underline{x}^f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.47.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \underline{x}^f + du \quad (2.47.b)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son los coeficientes del polinomio característico de \underline{A} y los c_i para $i = 1, 2, \dots, n$ son calculados a partir de las ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad (2.48.a)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + du \quad (2.48.b)$$

Las ecuaciones dinámicas (2.47) se dice que están en la forma canónica controlable (variables de fase).

La función de transferencia de (2.48) es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} + d \quad (2.49)$$

La transformación de semejanza utilizada es:

$$\underline{x} = \underline{P} \underline{x}^f \quad (2.50)$$

por lo tanto la representación canónica controlable estará dada por

$$\dot{\underline{x}}^f = \underline{A}^f \underline{x}^f + \underline{b}^f u \quad (2.51.a)$$

$$y = (\underline{c}^f)^T \underline{x}^f + du \quad (2.51.b)$$

Consecuentemente las matrices constantes de las ecuaciones (2.51.a) y (2.51.b) están dadas por

$$\underline{A}^f = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \quad (2.52)$$

$$\underline{b}^f = \underline{P}^{-1} \underline{b} \quad (2.53)$$

$$(\underline{c}^f)^T = \underline{c}^T \underline{P} = \left[c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n \right] \quad (2.54)$$

En donde la matriz de transformación \underline{P} se la encuentra así:

$$\underline{p}_n = \underline{b}$$

$$\underline{p}_{n-1} = \underline{A} \underline{p}_n + \underline{a}_{n-1} \underline{b} = \underline{A} \underline{b} + \underline{a}_{n-1} \underline{b}$$

$$\underline{p}_{n-2} = \underline{A} \underline{p}_{n-1} + \underline{a}_{n-2} \underline{b} = \underline{A}^2 \underline{b} + \underline{a}_{n-1} \underline{A} \underline{b} + \underline{a}_{n-2} \underline{b}$$

⋮

$$\underline{p}_2 = \underline{A} \underline{p}_3 + \underline{a}_2 \underline{b} = \underline{A}^{n-2} \underline{b} + \underline{a}_n \underline{A}^{n-3} \underline{b} + \dots + \underline{a}_3 \underline{b}$$

$$\underline{p}_1 = \underline{A} \underline{p}_2 + \underline{a}_1 \underline{b} = \underline{A}^{n-1} \underline{b} + \underline{a}_n \underline{A}^{n-2} \underline{b} + \dots + \underline{a}_2 \underline{b}$$

entonces:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_{n-1} | \underline{p}_n \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

y el vector \underline{b} debe ser tal que: $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$ sean linealmente independientes y formen una base en el espacio de estado del sistema.

2.4. CONTROLABILIDAD

Es un concepto importante en sistemas descritos a variables de estado, y que es utilizado en el desarrollo de los programas de la presente tesis. Se dice que un sistema representado en variables de estado es completamente controlable si, para cualquier t_0 puede transferirse cada estado inicial $\underline{x}(t_0)$ a cualquier estado final $\underline{x}(t_f)$ en un tiempo finito, $t_f > t_0$ por medio de un vector de entrada no limitado $\underline{u}(t)$. Esta definición supone que $\underline{u}(t)$ es capaz de afectar a cada variable de estado en

$$\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t-t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\phi}(t-\tau) \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.56)$$

En donde la ecuación (2.56) es la solución de la ecuación (2.9), en la que $\underline{\phi}(t-t_0)$ es la matriz de transición de estado, y se la escribe como $\underline{\phi}(t-t_0) = e^{\underline{A}(t-t_0)}$. Esta matriz describe la respuesta libre (no forzada) del sistema.

Por otro lado, el estado inicial $\underline{x}(t_0)$ es el resultado de las entradas anteriores a t_0 . La determinación de la controlabilidad se puede llevar a cabo mediante varios métodos, pero se ha escogido el más simple que consiste en lo siguiente:

utilizando la ecuación (2.56) con $t_0 = 0$ y definiendo un vector de estado final $\underline{x}(t_f) = \underline{0}$ se tiene:

$$\underline{0} = \underline{e}^{-\underline{A}t_f} \underline{x}(0) + \int_0^{t_f} \underline{e}^{-\underline{A}(t_f-\tau)} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau$$

multiplicando por $\underline{e}^{-\underline{A}t_f}$ y desarrollando queda:

$$\underline{x}(0) = - \int_0^{t_f} \underline{e}^{-\underline{A}\tau} \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.57)$$

Pero el teorema de Cayley - Hamilton muestra que se puede expresar $\underline{e}^{-\underline{A}\tau}$ como un polinomio en \underline{A} de grado $n-1$ así:

$$\underline{e}^{-\underline{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \underline{A}^k \quad (2.58)$$

Llevando esta ecuación a la ecuación (2.57) resulta:

$$\underline{x}(0) = - \int_0^{t_f} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \underline{A}^k \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau$$

o bien:

$$\underline{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \underline{A}^k \underline{B} \int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau$$

que queda:

$$\underline{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \underline{A}^k \underline{B} \int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.59)$$

La integral de la ecuación (2.59) puede evaluarse con la entrada $\underline{u}(t)$ de dimensión r , siendo el resultado:

$$\underline{\beta}_k = \int_0^{t_f} \alpha_k \underline{u}(\tau) d\tau$$

en donde $\underline{\beta}_k$ es r -dimensional, para $k=0, 1, \dots, n-1$

La ecuación (2.59) puede expresarse de la forma:

$$\underline{x}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \underline{A}^k \underline{B} \underline{\beta}_k = -(\underline{B} \underline{\beta}_0 + \underline{A} \underline{B} \underline{\beta}_1 + \dots + \underline{A}^{n-1} \underline{B} \underline{\beta}_{n-1})$$

desarrollando:

$$\underline{x}(0) = - \left[\underline{B} \mid \underline{A} \underline{B} \mid \underline{A}^2 \underline{B} \mid \dots \mid \underline{A}^{n-1} \underline{B} \right] \begin{bmatrix} \underline{\beta}_0 \\ \underline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

De acuerdo con la definición de controlabilidad, cada estado inicial $\underline{x}_i(0)$ debe estar influido por la entrada $\underline{u}(t)$. Esto requiere que:

$$\text{Rango de } \left[\underline{B} \mid \underline{A} \underline{B} \mid \dots \mid \underline{A}^{n-1} \underline{B} \right] = n \quad (2.61)$$

$\dim(n \times nr)$

En un sistema de entrada única, la matriz \underline{B} se reduce al vector \underline{b} , y la ecuación (2.61) representa una matriz $n \times n$.

La forma canónica controlable es llamada así porque la matriz de controlabilidad de (2.61) para una sola entrada y una sola salida, con las matrices \underline{A} y \underline{b} en esa forma canónica, toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & e_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & e_{n-3} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & e_{n-2} \\ 1 & e_1 & \dots & \dots & e_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde:

$$e_k = - \sum_{i=0}^{k-1} a_{n-i} e_{k-i-1}$$

$$\text{para } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad e_0 = 1$$

De aquí se puede observar que esta matriz de dimensión $n \times n$ tendrá rango n solamente si el vector \underline{b} tiene la forma indicada en la ecuación (2.47.a), es decir, que tenga un uno como elemento de la última fila.

De todo esto se puede concluir que si se escogen las variables de estado de tal manera que se obtengan las matrices \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} en la forma canónica controlable, se puede determinar la controlabilidad del sistema directamente, observando que la matriz \underline{B} sea diferente de la matriz nula ($\underline{0}$).

CAPITULO TRES

REALIMENTACION DE ESTADO

- 3.1. Generalidades..
- 3.2. Estudio de la realimentación de estado con variables de fase.
- 3.3. Análisis de error en un sistema con realimentación de estado.
- 3.4. Planta con polos complejos.
- 3.5. Estados inaccesibles.

3.1. GENERALIDADES

En este capítulo se presenta un método de diseño que logra situar los polos de la función de transferencia, según las especificaciones deseadas, usando como método la realimentación de todos los estados del sistema.

Con el desarrollo de la teoría moderna de control se ha introducido el concepto de utilizar todos los estados del sistema para lograr mejorar sustancialmente el comportamiento del mismo. Este concepto requiere que todos los estados sean accesibles en un sistema físico, lo que no sucede en la mayoría de ellos, por esta razón se han desarrollado varias técnicas para manejar sistemas con estados inaccesibles. En este capítulo se presenta una de ellas y su estudio, como se verá más adelante.

El método de realimentación con variables de estado usado en el presente trabajo considera solamente sistemas que poseen una sola entrada y una sola salida.

Como ejemplo, el sistema de lazo abierto de control de posición de la figura 3.1. se usará para mostrar los efectos de la realimentación con variables de estado.

Las ecuaciones del sistema de la figura 3.1. son:

$$e_a - e_b = (R_a + L_a s) i_a \quad (3.1.)$$

$$e_b = K_b w_m \quad (3.2)$$

$$T = K_T i_a = J s w_m + B w_m \quad (3.3)$$

$$w_m = s \theta_m \quad (3.4)$$

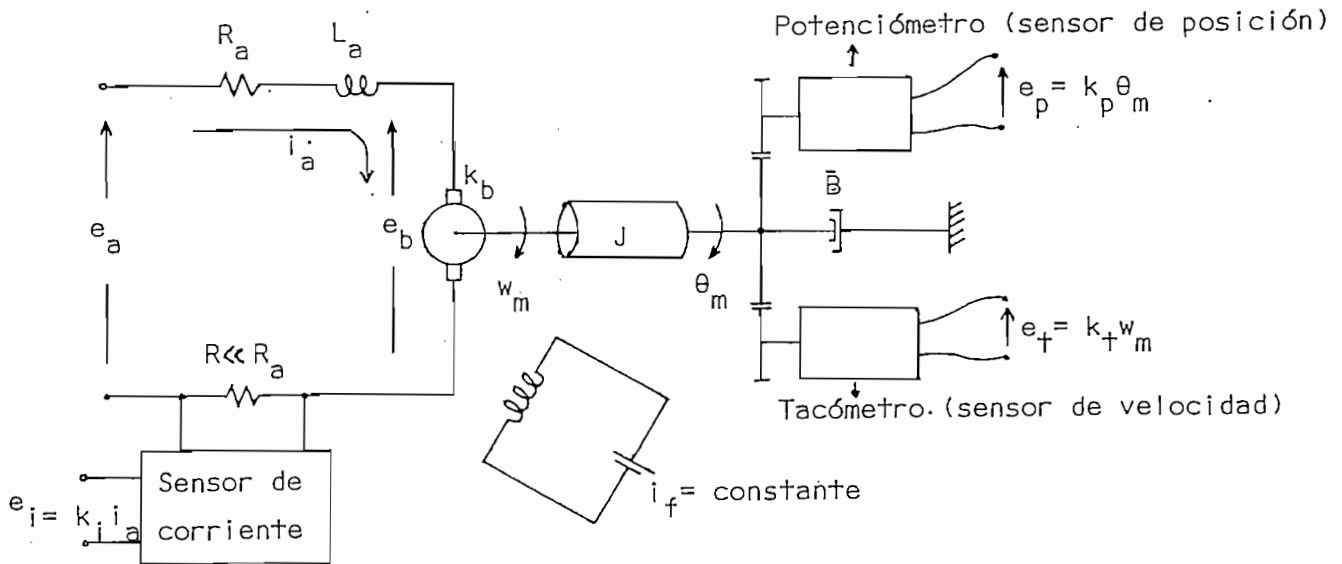


figura 3.1. Control de posición de un motor dc.

Para obtener cantidades mensurables como estados del sistema, se toman variables físicas como variables de estado.

Así, las tres escogidas, que describen en forma total el comportamiento del sistema son: La corriente que circula por el motor, i_a , su velocidad angular w_m , así como el ángulo que recorre, θ_m , que a la vez es la salida deseada. Se tiene entonces:

$$x_1 = \theta_m = y \quad (3.5)$$

$$x_2 = \dot{\theta}_m = \dot{x}_1 \quad (3.6)$$

$$x_3 = i_a \quad (3.7)$$

y, se hace la entrada $u = e_a$

La figura 3.1. muestra que las tres variables son accesibles, es decir, pueden ser medidas si se seleccionan sensores adecuados, que produzcan voltajes proporcionales a las variables de estado.

En la figura 3.2. (a) se tiene un diagrama de bloques representando un control de posición usando el sistema de la figura 3.1. En este caso cada uno de los estados sirve como realimentación a través de amplificadores cuyas ganancias son k_1 , k_2 y k_3 , las mismas que se denominan coeficientes de realimentación. La suma de estas tres cantidades de realimentación es:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = \underline{k}^T \underline{x} \quad (3.8)$$

siendo \underline{k}^T el vector de realimentación.

En la figura 3.2 (a) se observa claramente dos etapas del sistema, el proceso en si y la etapa controladora, que consta de los amplificadores para cada estado y de un amplificador adicional de ganancia K que contribuirá a dar las características deseadas al sistema.

Por facilidad, tomaremos valores numéricos, los mismos que se han escogido según se ve en la figura 3.2 (b).

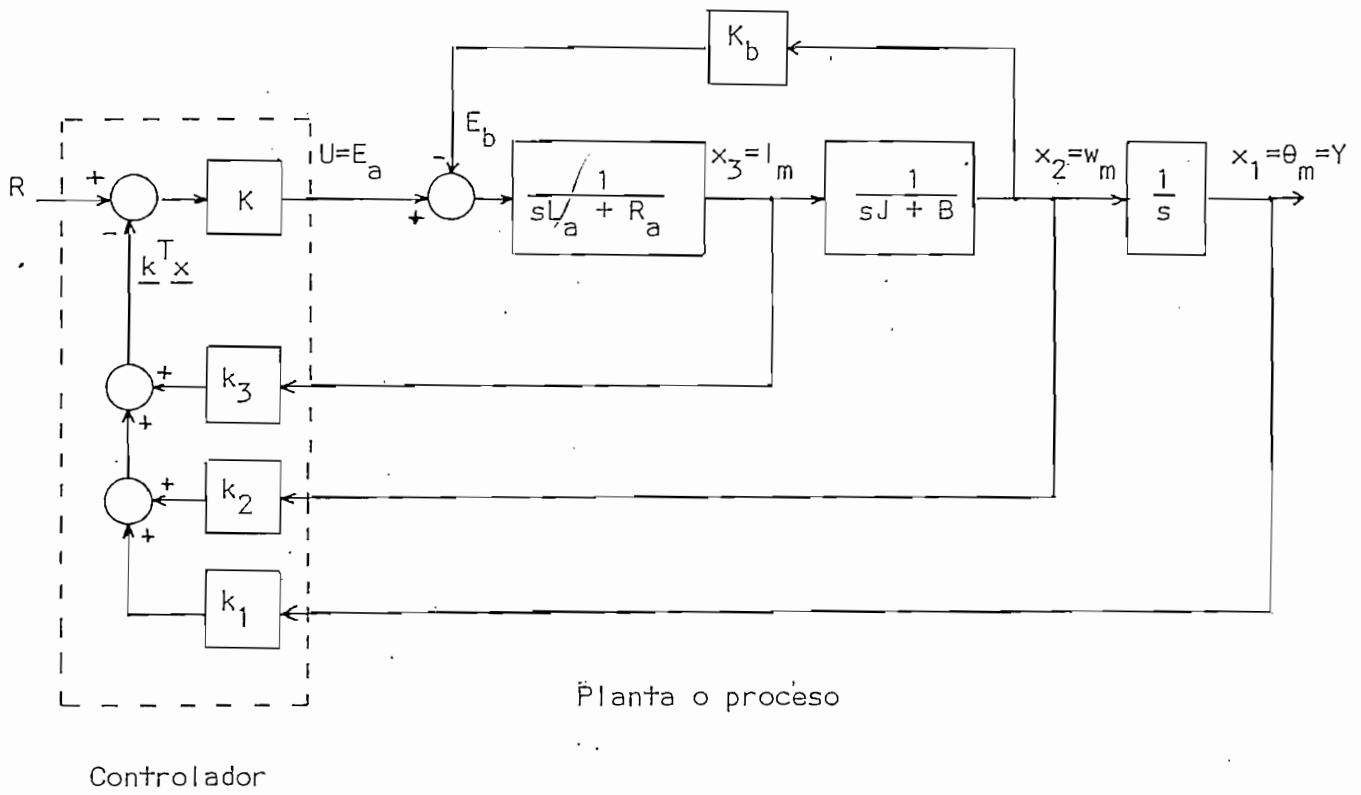


figura 3.2 (a)

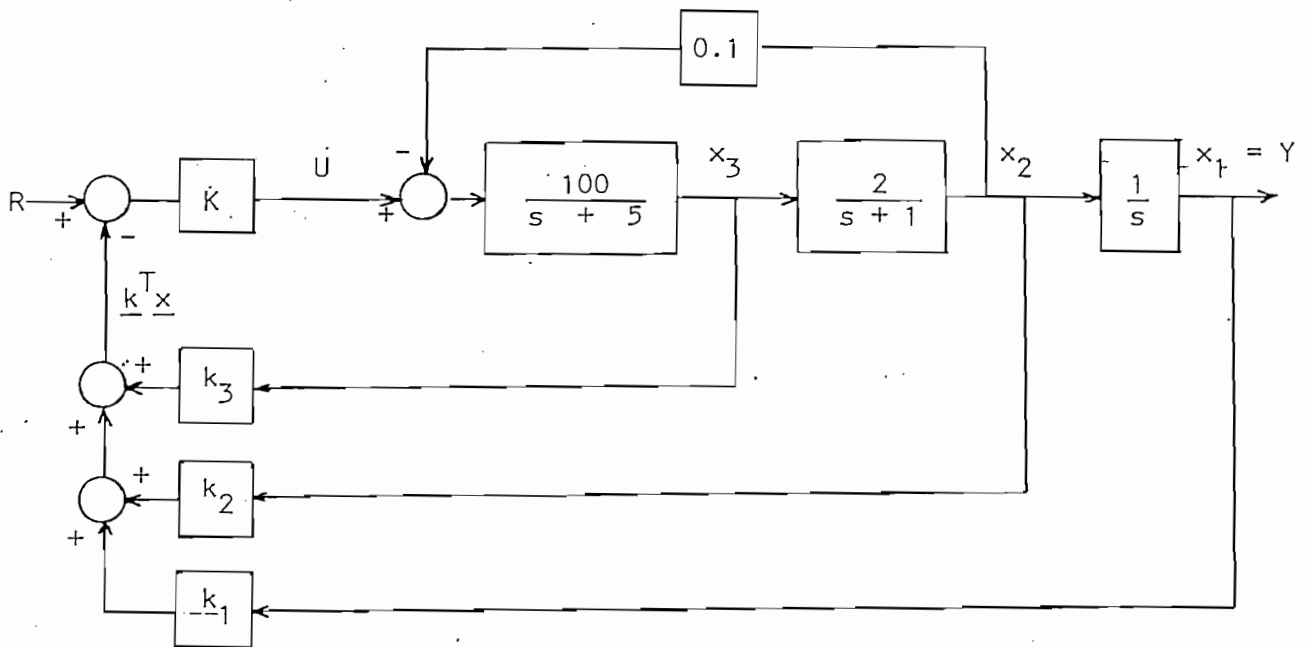


figura 3.2. (b)

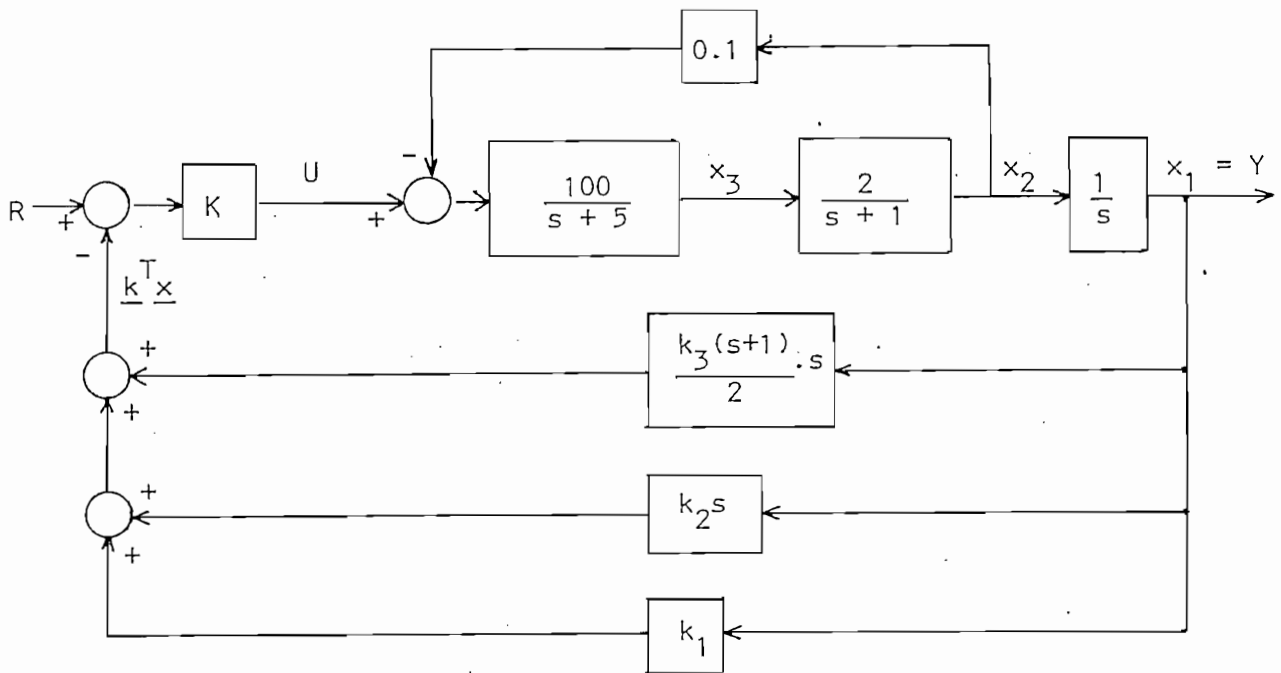


figura 3.2. (c)

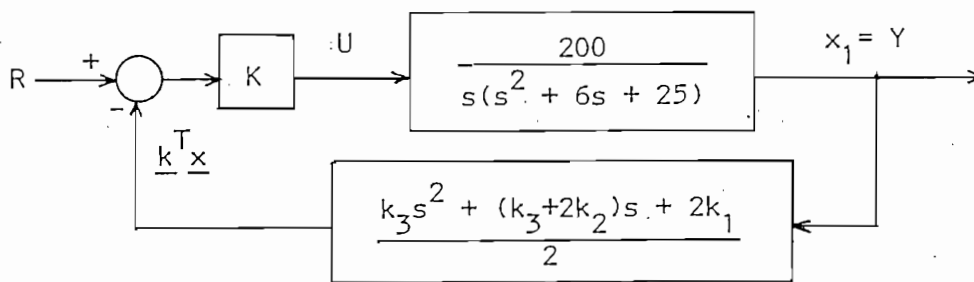


figura 3.2. (d)

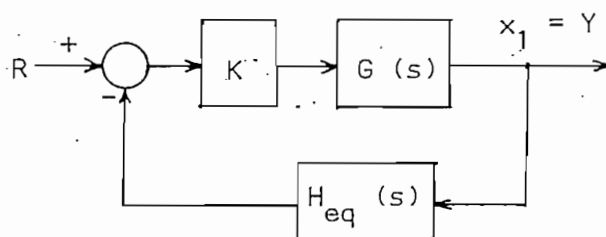


figura 3.2. (e)

Usando técnicas de manipulación de diagramas de bloques se puede simplificar la figura 3.2. (b) pasando a la forma que se indica en la figura 3.2. (c).

Con una posterior reducción se consigue el diagrama de la figura 3.2. (d), en donde se observa que la realimentación de variables de estado es equivalente a insertar una función de realimentación H_{eq} como en un sistema convencional, y añadir una ganancia K a la función de transferencia $G(s)$ del proceso o planta del sistema.

Entonces, al pasar de la figura 3.2 (b) a la 3.2 (d), se hace lo que se conoce como reducción a un H_{eq} (figura 3.2 (e)).

La función de transferencia del sistema será:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s) H_{eq}(s)} \quad (3.9)$$

De la figura 3.2 (d) se obtiene:

$$H_{eq}(s) = \frac{k_3 s^2 + (k_3 + 2k_1)s + 2k_1}{2} \quad (3.10)$$

$$G(s) = \frac{200}{s(s^2 + 6s + 25)} \quad (3.11)$$

entonces:

$$KG(s) H_{eq}(s) = \frac{100K [k_3 s^2 + (k_3 + 2k_1)s + 2k_1]}{s(s^2 + 6s + 25)} \quad (3.12)$$

y de la ecuación (3.9):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{200K}{s^3 + (6 + 100Kk_3)s^2 + (25 + 200Kk_2 + 100Kk_3)s + 200Kk_1} \quad (3.13)$$

$$6 + 100 \times 0,12 \times K_3 = 8 \quad 2 = 12 K_3 \Rightarrow K_3 = \frac{1}{6}$$

La función de transferencia equivalente de realimentación debe diseñarse de tal modo que se obtengan las especificaciones deseadas del sistema.

Para el caso de este ejemplo, en el que $G(s)$ no tiene ceros, es decir, es una planta polar, se deben anotar las siguientes observaciones partiendo de las ecuaciones (3.10) a (3.13):

- Para tener un error nulo en régimen permanente para una entrada escalón unitaria $R(s) = 1/s$, la ecuación (3.13) debe lograr:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{200K}{200Kk_1} = 1 \quad (3.14)$$

Esto requiere $k_1 = 1$

- El numerador de $H_{eq}(s)$ es de segundo grado, es decir, el denominador de $G(s)$ es de grado $n = 3$ y el numerador

de $H_{eq}(s)$ es de grado $(n - 1) = 2$

- c. Los polos de $G(s) H_{eq}(s)$ son los polos de $G(s)$.
- d. Los ceros de $G(s) H_{eq}(s)$ son los ceros de $H_{eq}(s)$.
- e. El uso de la realimentación de estados produce ceros adicionales en la función de transferencia de lazo abierto $G(s) H_{eq}(s)$ sin añadir polos. Esto ocurre a diferencia de la compensación mediante redes pasivas. Los ceros de $H_{eq}(s)$ deben situarse para que produzcan la respuesta deseada. Se sabe además que la adición de ceros a una función de transferencia desplaza al lugar de las raíces hacia la izquierda¹, es decir, se consigue mayor estabilidad del sistema y mejora las características temporales del mismo.
- f. Como el trazado del lugar de las raíces de $G(s) H_{eq}(s) = -1$ tiene una asíntota con ángulo $\delta' = -180^\circ$ para $k_3 > 0$, es posible fijar la situación de los ceros de $H_{eq}(s)$ para asegurar un sistema completamente estable para todos los valores positivos de ganancia K .

Hay que anotar que cuando se usan los compensadores tradicionales en cascada, los ángulos de las asíntotas

1. K. OGATA: Ingeniería de Control Moderna, 7ma. edición, 1980, página 521.

son tales que, en general, dan ramales que van al semiplano derecho; así, la ganancia máxima está limitada, pues se debe mantener la estabilidad. Esta restricción desaparece con la realimentación de estado.

- g. Las especificaciones deseadas, para una respuesta sobreamortiguada, se satisfacen seleccionando los polos de $Y(s) / R(s)$ de la ecuación (3.13) según la conveniencia.

Pueden escogerse en: $s = -a \pm jb$ y $s = -c$

Para estas posiciones especificadas de los polos, la ecuación característica de $Y(s) / R(s)$ tiene la forma:

$$(s + a - jb)(s + a + jb)(s + c) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \quad (3.15)$$

Si se iguala la ecuación (3.15) al denominador de la ecuación (3.13) se tiene:

$$d_2 = 6 + 100Kk_3 \quad (3.16)$$

$$d_1 = 25 + 200Kk_2 + 100Kk_3 \quad (3.17)$$

$$d_0 = 200Kk_1 \quad (3.18)$$

y de la ecuación (3.14): $k_1 = 1$

Este sistema de ecuaciones puede resolverse hallando los valores requeridos de K , k_2 y k_3 .

Se puede demostrar que si el proceso básico o planta $G(s)$ tuviera uno o más ceros, éste o éstos se convierten en polos de $H_{eq}(s)$. Así los ceros de $G(s)$ anulan los polos de $H_{eq}(s)$ en $G(s) H_{eq}(s)$. Además los ceros de $G(s)$ se convierten en los ceros de la función de transferencia de lazo cerrado $Y(s) / R(s)$. Esto se verá detenidamente más adelante.

3.2 ESTUDIO DE LA REALIMENTACION DE ESTADO CON VARIABLES DE FASE

Con el fin de obtener las propiedades generales de la realimentación por variables de estado y por la facilidad que presentan para tratar este tema, se usarán variables de fase.

La planta que se considerará es la de la figura 3.3, que está descrita por variables de estado.

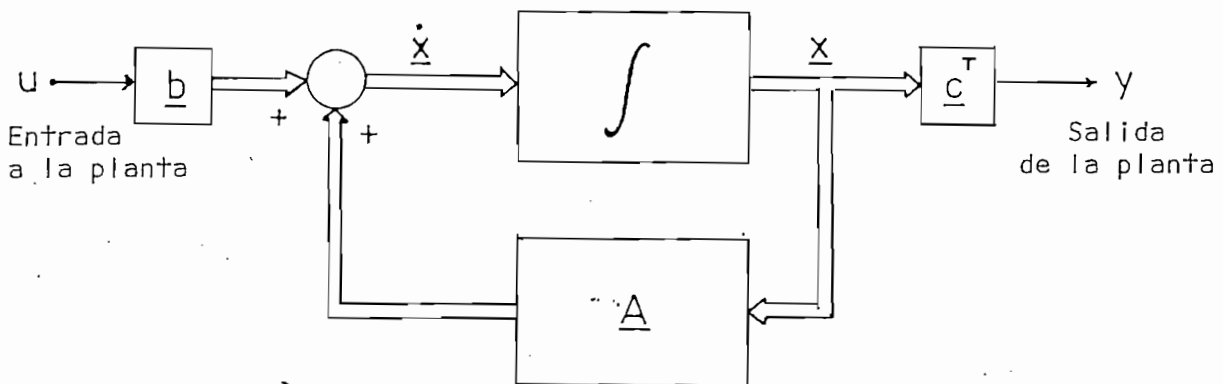


figura 3.3.

La entrada u , que es única, está relacionada con el vector \underline{x} del sistema por la ecuación:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b} u \quad (3.19.a)$$

y la salida de la planta está dada por:

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (3.19.b)$$

Si \underline{A} , \underline{b} y \underline{c}^T están formuladas usando variables de fase, según las ecuaciones (2.47 a y b), entonces la función de transferencia de la planta es la dada por la ecuación (2.49), que se reescribe a continuación:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_n s^{n-1} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (3.19.c)$$

En la realimentación de estado se asume que todo el vector \underline{x} es alcanzable para ser realimentado. El sistema con realimentación se muestra en la figura (3.4), en la que se toma la cantidad $\underline{k}^T \underline{x}$, se la resta de la entrada r del sistema y se la amplifica K veces, obteniéndose de esta forma la entrada u a la planta, que está dada por:

$$u = K(r - \underline{k}^T \underline{x}) \quad (3.20)$$

Entonces, la ecuación (3.19.a) tomará la forma:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} K(r - \underline{k}^T \underline{x})$$

$$\text{Desarrollando: } \dot{\underline{x}} = \left[\underline{A} - \underline{b} K \underline{k}^T \right] \underline{x} + \underline{b} K r \quad (3.21.a)$$

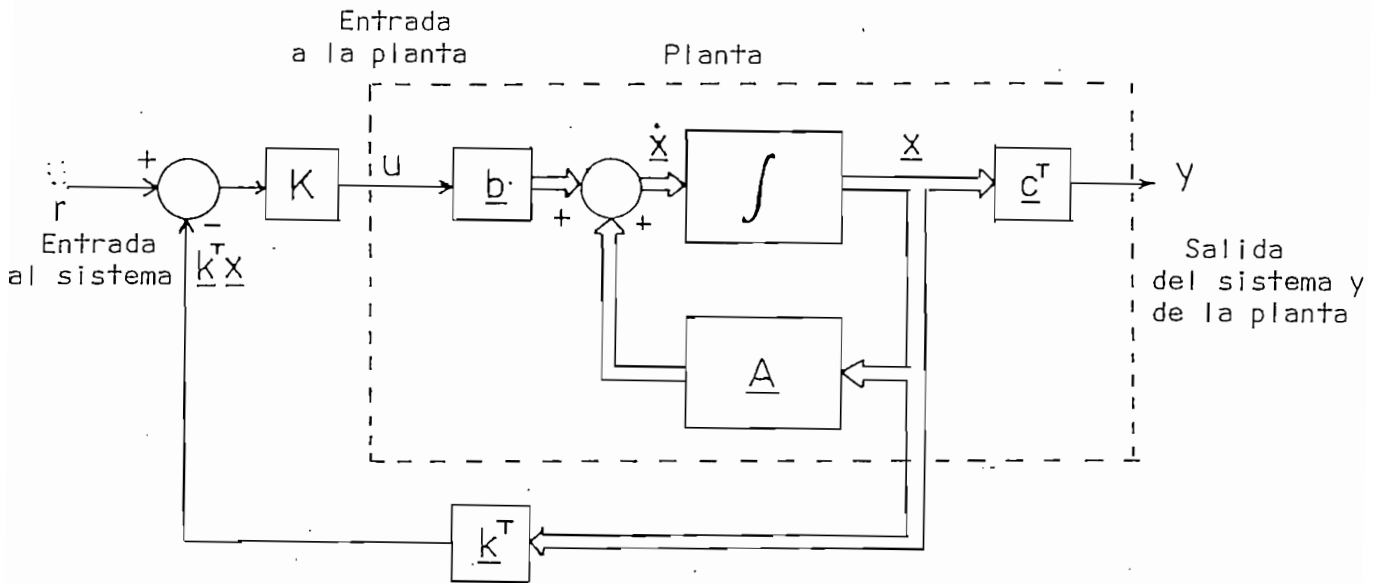


figura 3.4.

y de la figura (3.4), nuevamente:

$$y = \underline{c}^T \underline{x} \quad (3.21.b)$$

Comparando las ecuaciones (3.21 a y b) con las ecuaciones (3.19 a y b) se ve que son semejantes con la siguiente singularidad:

$$\begin{array}{l} \underline{A} \longrightarrow \left[\underline{A} - \underline{b} \underline{K} \underline{k}^T \right] \\ \underline{u} \longrightarrow \underline{K}r \end{array} \quad (3.22)$$

Si \underline{A} y \underline{b} están dadas en variables de fase, como en las ecuaciones (2.47), entonces:

$$\left[\underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} - \underline{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & \dots & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad (3.23.a)$$

Por simple cálculo se tiene:

$$\left[\underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -(a_1 + Kk_1) & -(a_2 + Kk_2) & \dots & \dots & \dots & -(a_n + Kk_n) \end{bmatrix} \quad (3.23.b)$$

A continuación se reescriben las ecuaciones (3.21) en forma desarrollada:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -(a_1 + Kk_1) & -(a_2 + Kk_2) & \dots & \dots & \dots & -(a_n + Kk_n) \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} K r \quad (3.24.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & \dots & \dots & c_n \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.24.b)$$

Entonces, la función de transferencia puede ser obtenida directamente, como se vio en la sección (2.3.3.2) y observando (3.22), se tiene

$$\frac{Y(s)}{KR(s)} = \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + (a_n + Kk_n) s^{n-1} + \dots + (a_2 + Kk_2) s + (a_1 + Kk_1)} \quad (3.25)$$

de la ecuación (3.25) se tiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1)}{s^n + (a_n + Kk_n) s^{n-1} + \dots + (a_2 + Kk_2) s + (a_1 + Kk_1)} \quad (3.26)$$

A partir de la función de transferencia de la ecuación (3.26) pueden reescribirse las ecuaciones de estado directamente si se las toma como variables de fase (forma canónica controlable), obteniéndose los siguientes resultados:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_1 + Kk_1) & -(a_2 + Kk_2) & \dots & -(a_n + Kk_n) \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3.27.a)$$

$$y = K \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \underline{x} \quad (3.27.b)$$

Debe anotarse que el cambio entre las ecuaciones (3.24) y (3.27) implica una redefinición de x_1 y por tanto de x_2, \dots, x_n , que, implícitamente consiste en un cambio de escala, esta es la razón por lo que la matriz $\begin{bmatrix} \underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T \end{bmatrix}$ no varía.

Por otro lado, es interesante obtener la función de transferencia de la ecuación (3.26) de la forma siguiente:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s) H_{eq}(s)} \quad (3.28)$$

Con esto se puede determinar el bloque de realimentación, equivalente a la realimentación de estado, en otras palabras, $H_{eq}(s)$. Se usará el diagrama de bloques de la figura 3.5.a que representa, en general, un sistema con realimentación de variables de estado, cuando dichas variables están en la forma canónica controlable.

Usando técnicas de manipulación de diagramas de bloques se puede simplificar la figura 3.5.a pasando a la forma indicada en la figura 3.5.b.

Haciendo una posterior reducción al diagrama de la figura 3.5.b se consigue el de la figura 3.5.c

Finalmente al desarrollar la figura 3.5.c se consigue llegar al diagrama de bloques de la figura 3.5.d

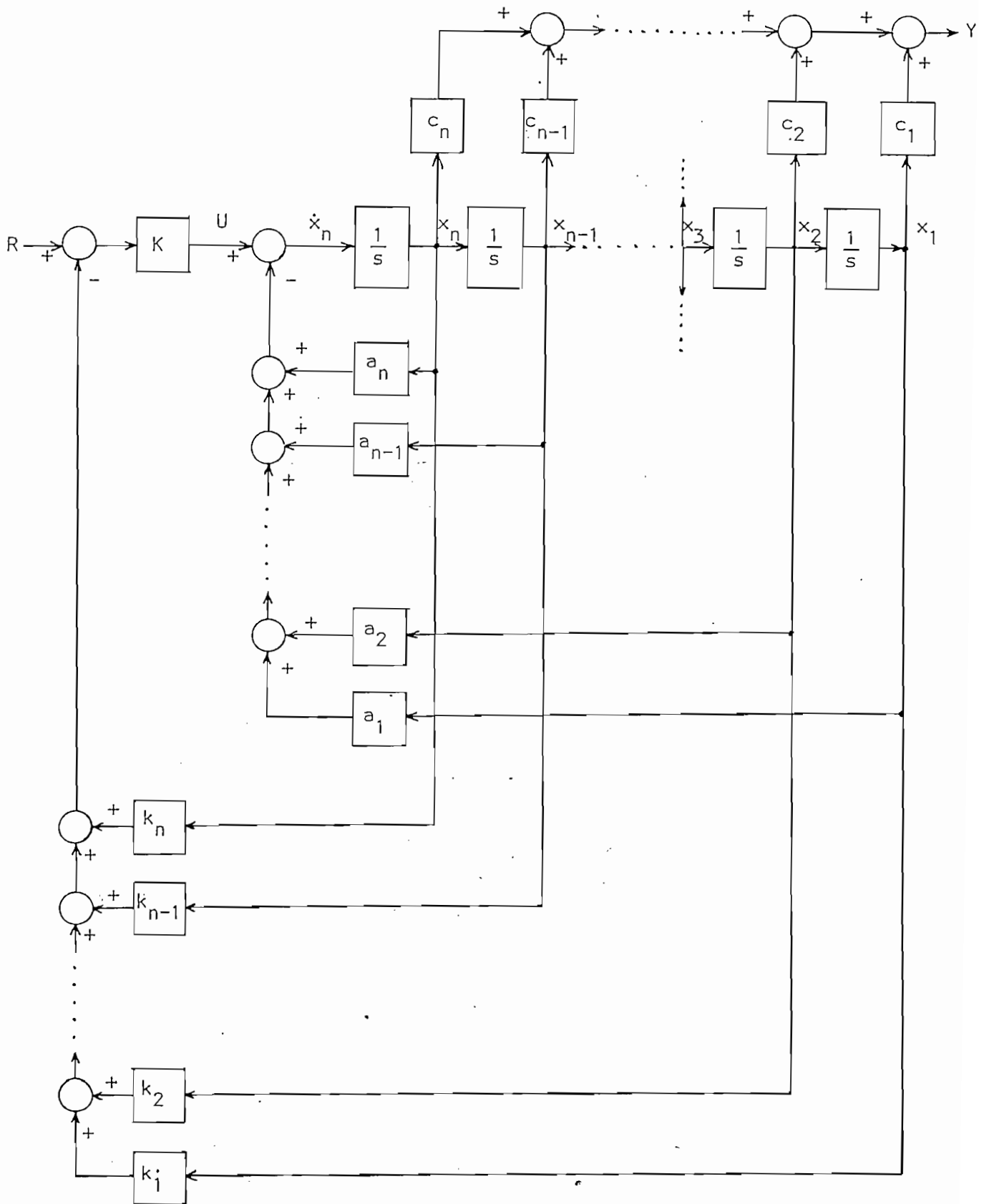


figura 3.5. (a)

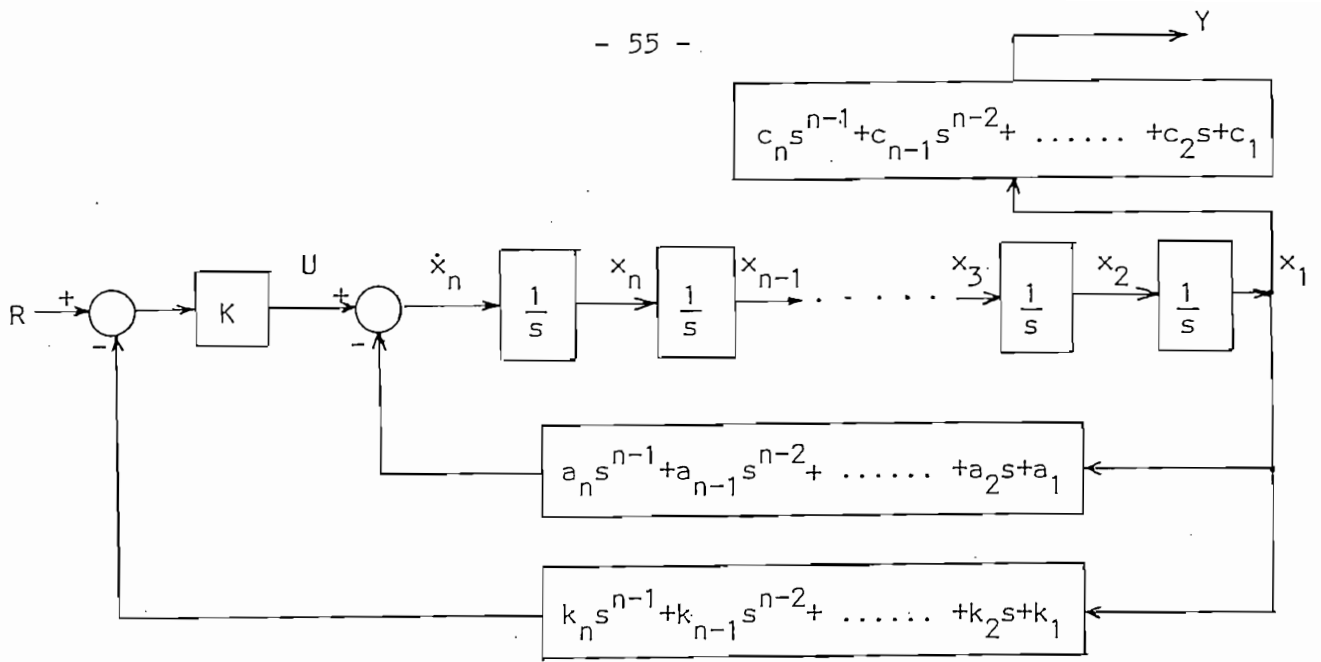


figura 3.5. (b)

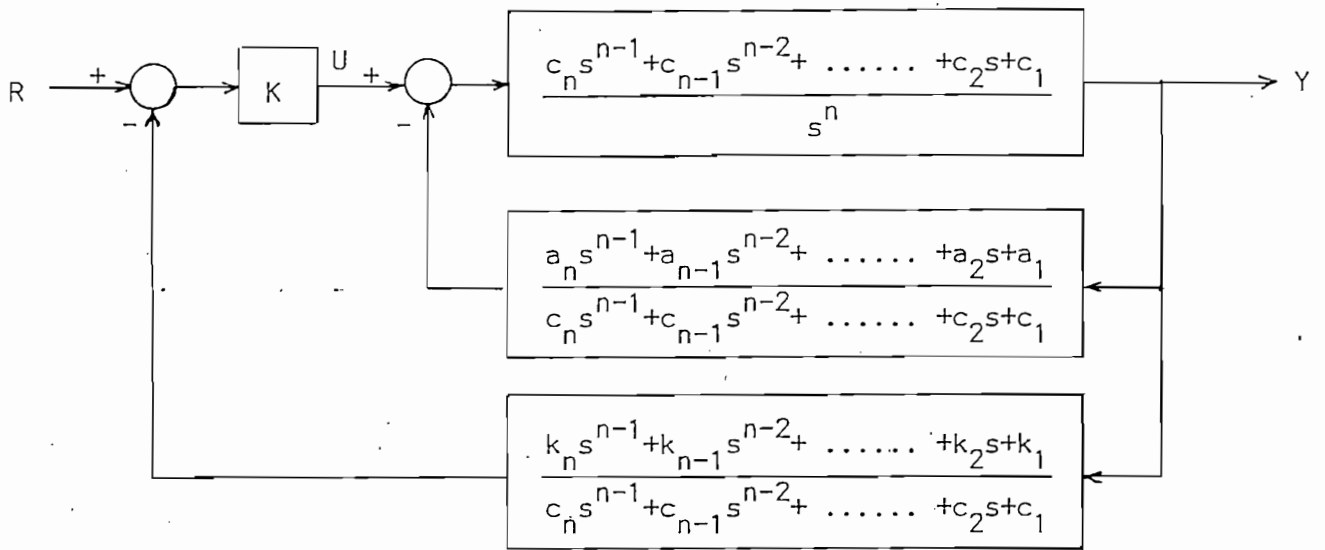
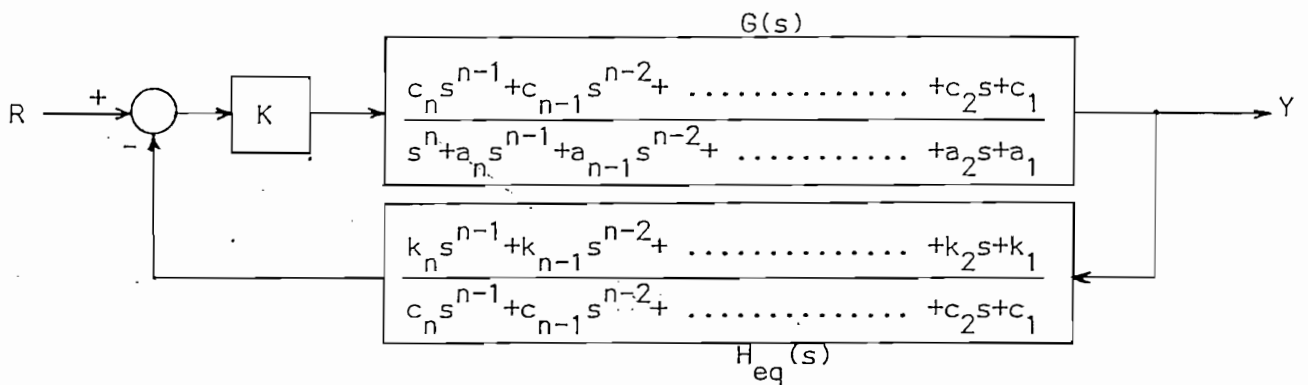


figura 3.5. (c)



Comparando la figura 3.5.d con la figura 3.2.e se ve que la función de transferencia $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ corresponde efectivamente a la de la planta, ecuación (3.19.c), y que el realimentar todos los estados del sistema equivale a realimentar la salida y a través de un bloque $H_{eq}(s)$ dado por la ecuación (3.29).

$$H_{eq}(s) = \frac{k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1}{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1} \quad (3.29)$$

Se obtienen las siguientes conclusiones:

1. La ecuación (3.29) implica que cuando $\underline{k} = \underline{c}$ se tendrá realimentación unitaria: $H_{eq} = 1$
2. El numerador de $H_{eq}(s)$ es un polinomio de grado $n-1$, en s , o sea tiene $n-1$ ceros. Pueden seleccionarse los valores de los coeficientes de este polinomio para lograr el comportamiento deseado del sistema. Si se trata de una planta polar, o sea, sin ceros, $H_{eq}(s)$ será sólo un polinomio de grado $n-1$.
3. El numerador de $G(s)$ es igual al denominador de $H_{eq}(s)$. Por tanto la función de transferencia $G(s) H_{eq}(s)$ tiene los mismos n polos que $G(s)$ y tiene los mismos $n-1$ ceros de $H_{eq}(s)$; estos ceros se determinan en el proceso de diseño.

4. El diagrama del lugar de las raíces basado en la ecuación (3.30) revela:

$$KG(s) H_{eq}(s) = \frac{K(k_n s^{n-1} + k_{n-1} s^{n-2} + \dots + k_2 s + k_1)}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (3.30)$$

Que, para $k_n > 0$, : a) existe una única asíntota con ángulo $\gamma = -180^\circ$. b) $n-1$ ramas terminan en los $n-1$ ceros arbitrarios que pueden situarse en cualquier lugar del plano s , y c) una rama termina en el eje real negativo en $s = -\infty$. La estabilidad del sistema se asegura para los valores elevados de K si todos los ceros de $H_{eq}(s)$ se sitúan en el semiplano izquierdo de s . Mientras que para $k_n < 0$ existe una asíntota única con ángulo $\gamma = 0^\circ$, así que el sistema resulta inestable para valores grandes de K .

5. Se nota según la ecuación (3.26) que el resultado de la realimentación de estados a través o por medio de elementos constantes es el de cambiar las posiciones de los polos en lazo cerrado, dejando los ceros del sistema, si los hay, iguales a los de $G(s)$.

El procedimiento para diseño puede resumirse así:

- Paso 1. Transformar el sistema descrito en variables de estado a variables de fase. Esto puede lograrse mediante el proceso de transformación descrito en la sección 2.3.3.
- Paso 2. Suponer que todas las variables de estado son accesibles.
- Paso 3. Encontrar el polinomio característico de $Y(s)/R(s)$ según las especificaciones deseadas (M_p , t_p , t_s , error en régimen permanente, especificados), en donde: M_p : máximo sobretiro, t_p : tiempo de pico y t_s : tiempo de estabilización.
- Paso 4. Igualar entre sí los polinomios característicos del paso 3 y de la ecuación (3.26), esto es, igualar los coeficientes de las potencias de igual orden de s y despejar los valores de Kk_i , $i = 1, \dots, n$.
- Paso 5. Determinar el valor de K requerido para un error nulo en régimen permanente y para una entrada escalón $R(s) = 1/s$; una vez hecho esto encontrar los k_i , $i = 1, \dots, n$, a partir de lo encontrado en el paso 4.
- Paso 6. Como se emplearon variables de fase, hacer la transformación lineal inversa para convertir los

coeficientes de realimentación con variables de fase en los coeficientes de realimentación requeridos por las variables físicas presentes en el sistema de control.

NOTA: Si alguno de los estados no es accesible pueden determinarse compensadores adecuados empleando los valores de k_i conocidos. Este método se discute más adelante.

3.3. ANALISIS DE ERROR EN UN SISTEMA CON REALIMENTACION DE ESTADO

Una consideración de diseño importante es la de analizar el error en régimen permanente, por tanto es muy conveniente la evaluación y especificación de las constantes de error; por esta razón se considerarán estas constantes en un sistema descrito en variables de estado. En particular se estudiarán cuando se tiene una realimentación de estado.

Las constantes de error para un sistema formulado en el espacio de estado, en forma estandar (sin realimentación del vector de estado) se pueden encontrar a partir de este estudio considerando simplemente $\underline{k}^T = 0$, en donde \underline{k}^T es el vector cuyas componentes son los coeficientes de realimentación.

El error de un sistema se define simplemente por la diferencia entre la entrada y la salida.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.31)$$

En donde "e" es el error, "r" la entrada e "y" la salida.

Interesa el error en estado estable (e_{ee}):

$$e_{ee} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3.32)$$

Para encontrar este error en estado estable es conveniente sacar la transformada de Laplace y además usar el teorema del valor final. Haciendo esto y usando (3.31) y (3.32) se tiene:

$$e_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s [R(s) - Y(s)]$$

o:

$$e_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \left[1 - \frac{Y(s)}{R(s)} \right] \quad (3.33)$$

Por otro lado, si se halla la solución en el dominio de la frecuencia de la ecuación (3.21.a) resulta:

$$X(s) = \left[s \underline{I} - (\underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T) \right]^{-1} \underline{b} \underline{K} R(s) \quad (3.34)$$

con $\underline{x}(0) = 0$

lo que reemplazado en la ecuación (3.21.b) y desarrollando, da

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \underline{K} \underline{c}^T \left[s \underline{I} - (\underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T) \right]^{-1} \underline{b} \quad (3.35)$$

que es la función de transferencia de lazo cerrado de un sistema con realimentación de estado.

Por tanto, si se tiene interés en el error de estado estable de un sistema con realimentación de estado, se usará $\frac{Y(s)}{R(s)}$ de la ecuación

(3.35) en (3.33) obteniéndose:

$$e_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) (1 - K \underline{c}^T \left[s\underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b}) \quad (3.36)$$

$$\text{Entonces: } sE(s) = sR(s) (1 - K \underline{c}^T \left[s\underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b}) \quad (3.37)$$

en donde se asume que la ecuación (3.37) no tiene polos en el eje $j\omega$ o en el semiplano derecho.

Se usará la ecuación (3.36) para determinar las constantes de error en estado estable

3.3.1 CONSTANTE DE ERROR DE POSICION K_p

La constante de error de posición o simplemente constante de posición está definida por:

$$e_p \triangleq \frac{1}{1 + K_p} \quad (3.38)$$

en donde e_p (error de posición), es el error en estado estable para una entrada escalón unitario, esto es: $R(s) = 1/s$. Usando (3.38) y $R(s) = 1/s$ en (3.36) se tiene:

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = 1 - K \underline{c}^T \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b} \quad (3.39)$$

La forma en que está expresada esta ecuación no es muy conveniente pues involucra la inversión de la matriz $\left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]$.

Por tanto se hará otro análisis volviendo a la forma de la ecuación (3.36) con $R(s) = 1/s$

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b}) \quad (3.40)$$

Usando la identidad de matrices siguiente:

$$\det \left[\underline{I} + \underline{w}^T \underline{z} \right] = \det \left[\underline{I} + \underline{z} \underline{w}^T \right] \quad (3.41)$$

en donde \underline{w} y \underline{z} son vectores columna de orden n ; de (3.40) se obtiene:

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \det \left[\underline{I} - \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b} K \underline{c}^T \right] \quad (3.42)$$

Multiplicando y dividiendo el determinante de la derecha de (3.42) por $\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]$ y usando la identidad

$$(\det \underline{W}) (\det \underline{Z}) = \det (\underline{WZ}) \quad (3.43)$$

en donde \underline{W} y \underline{Z} son matrices cuadradas de orden n , se obtiene:

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T - K \underline{b} \underline{c}^T \right]}{\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]}$$

de donde:

$$e_p = \frac{1}{1 + k_p} = \frac{\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T - K \underline{b} \underline{c}^T \right]}{\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]} \quad (3.44)$$

3.3.2. CONSTANTE DE ERROR DE VELOCIDAD K_V

La constante de velocidad K_V está definida por:

$$\frac{1}{K_V} \triangleq e_v \quad (3.45)$$

donde e_v (error de velocidad) es el error en estado estable para una entrada rampa unitaria, esto es: $R(s) = 1/s^2$. Usando (3.45) y $R(s) = 1/s^2$ en (3.36) se tiene:

$$e_v = \frac{1}{K_V} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - K \underline{C}^T \left[\frac{s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T}{s} \right]^{-1} \underline{b})}{s} \quad (3.46)$$

en donde a no ser que $K \underline{C}^T \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b} = 1$, esto es que tenga un cero en $s = 0$, el error $e_v \rightarrow \infty$ y $K_V = 0$.

Por tanto, si se asume la restricción:

$$K \underline{C}^T \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b} = 1 \quad (3.47)$$

se puede aplicar la regla de L'Hospital en (3.46) y queda:

$$\frac{1}{K_V} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} K \underline{C}^T \left[\frac{s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T}{s} \right]^{-1} \underline{b} \quad (3.48)$$

$$\text{Usando la propiedad: } \frac{d}{ds} \left[\frac{s \underline{I} - \underline{B}}{s} \right]^{-1} = - \left[\frac{s \underline{I} - \underline{B}}{s} \right]^{-2}$$

La ecuación (3.48), una vez evaluada la derivada:

$$\frac{1}{K_V} = \lim_{s \rightarrow 0} K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-2} \underline{b} \quad (3.49)$$

que da la ecuación:

$$\frac{1}{K_V} = K \underline{c}^T \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-2} \underline{b} \quad (3.50)$$

La cual no es una forma de evaluación conveniente. Otra forma sería, aplicando (3.41) a (3.49):

$$\frac{1}{K_V} = \lim_{s \rightarrow 0} \det \left[\underline{I} + (s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^{-2} \underline{b} K \underline{c}^T \right] - 1 \quad (3.51)$$

Multiplicando y dividiendo el determinante de (3.51) por $\det^2 [s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T]$ y usando (3.43) queda:

$$\frac{1}{K_V} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\det \left[(s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^2 + K \underline{b} \underline{c}^T \right]}{\det^2 [s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T]} - 1 \quad (3.52)$$

Luego de tomar el límite toma la forma:

$$\frac{1}{K_V} = e_v = \frac{\det \left[(-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^2 + K \underline{b} \underline{c}^T \right]}{\det^2 [-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T]} - 1 \quad (3.53)$$

3.3.3 CONSTANTE DE ERROR DE ACELERACION K_a

La constante de aceleración K_a para realimentación de estado puede obtenerse extendiendo el método usado para encontrar K_v . K_a está definido por:

$$\frac{1}{K_a} \triangleq e_a \quad (3.54)$$

donde e_a (error de aceleración) es el error en estado estable para una entrada parabólica unitaria, esto es $R(s) = 1/s^3$. Usando (3.54) y $R(s) = 1/s^3$ en (3.36) se tiene:

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b})}{s^2} \quad (3.55)$$

Nuevamente se nota que cuando a no ser que

$$1 - K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b}$$

tenga un doble cero en $s = 0$, (lo que implica que $e_v = 1/K_v = 0$, que está dado por la ecuación (3.51)), el error $e_a \rightarrow \infty$ y $K_a = 0$.

Considerando un doble cero en $s = 0$, y aplicando la regla de L' Hospital a la ecuación (3.55) se tiene:

$$e_a = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b} \quad (3.56)$$

Realizando la diferenciación da:

$$e_a = - \lim_{s \rightarrow 0} K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-3} \underline{b} \quad (3.57)$$

Ahora, aplicando (3.43) a (3.57) y multiplicando y dividiendo por $\det^3 \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]$

$$e_a = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\det \left[(s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^3 - \underline{b} K \underline{c}^T \right]}{\det^3 \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]} \right] \quad (3.58)$$

de aquí:

$$e_a = \frac{1}{K_a} = 1 - \frac{\det \left[(-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T)^3 + K \underline{b} \underline{c}^T \right]}{\det^3 \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]} \quad (3.59)$$

3.3.5. OTRAS CONSIDERACIONES ACERCA DEL ERROR

a) La evaluación de las constantes de error K_p , K_v y K_a por las ecuaciones (3.44), (3.53) y (3.59) involucra una división por el $\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]$. Cabe preguntarse cuándo se tendrá que $\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] = 0$ y qué implica esto. Para contestar esta pregunta, se verá la función de transferencia de lazo cerrado para realimentación de estado dada por la ecuación (3.35):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b}$$

Evaluando la inversa de la matriz en esta ecuación se tiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \underline{c}^T \text{adj} \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] \underline{b}}{\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]} \quad (3.60)$$

De donde se ve que el polinomio característico de lazo cerrado, de un sistema con realimentación de estado, es el $\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]$, y los polos de éste serán las raíces del polinomio. Se puede escribir entonces:

$$\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1 \quad (3.61.a)$$

de aquí:

$$\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] = a_1 \quad (3.61.b)$$

y si el $\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] = 0$, se ve que el polinomio $\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]$ tiene una raíz igual a cero, y por tanto el sistema de lazo cerrado tendrá un polo en el origen (en $s = 0$). En general un polo de lazo cerrado en el origen, es indeseable, pues significa que el sistema es inestable.

De aquí que el vector de realimentación se debe escoger, en general, de modo que $\det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] \neq 0$.

Observando la ecuación (3.60) se puede ver que \underline{c} y \underline{b} pueden ser tales que un cero de lazo cerrado esté también en el origen, cancelando un polo que se encuentre en ese mismo lugar. Si este es el caso, las fórmulas (3.44), (3.53) y (3.59) para determinar las constantes de error, tendrán una indeterminación. En este caso -cancelación de un polo y un cero de lazo cerrado en el origen- las constantes de error pueden encontrarse a partir de la ecuación (3.36). De esta forma, el término $K \underline{c}^T \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b}$ tendrá que evaluarse como función de s . Luego de que los ceros y polos en el origen hayan sido cancelados, el error en estado estable, y por tanto las constantes correspondientes, se pueden encontrar directamente tomando el límite.

En esto puede ser de gran ayuda el aplicar (3.41) a (3.36), que da:

$$e_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \det \left[\underline{I} - \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]^{-1} \underline{b} K \underline{c}^T \right]$$

de aquí:

$$e_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T - K \underline{b} \underline{c}^T \right]}{\det \left[s \underline{I} - \underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right]} \quad (3.62)$$

Evaluando los dos determinantes de (3.62) como funciones de s se verá rápidamente si la cancelación de polos en el origen puede realizarse o no.

b) En un sistema con realimentación unitaria, a menos que la función de transferencia de lazo abierto tenga uno o más polos en el origen, el sistema de lazo cerrado siempre tendrá un error de posición finito, o sea, $e_p \neq 0$.

En cambio, con la realimentación de estado, existe la posibilidad de conseguir $e_p = 0$ sin que sea necesario que un polo de la planta esté en el origen; esto puede verse directamente de (3.44), si se escoge un vector de realimentación \underline{k}^T , o una ganancia K , de modo que:

$$\begin{aligned} \det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T - K \underline{b} \underline{c}^T \right] &= 0, \text{ y} \\ \det \left[-\underline{A} + K \underline{b} \underline{k}^T \right] &\neq 0 \end{aligned}$$

y el sistema de lazo cerrado se hace estable.

3.3.5. EMPLEO DE LOS COEFICIENTES DE ERROR PERMANENTE

Para el estudio de esta sección se usarán variables de fase (variables de estado en la forma canónica controlable).

Interesa la matriz $\left[\underline{A} - K \underline{b} \underline{k}^T + K \underline{b} \underline{c}^T \right]$, que tiene la siguiente forma, ya que \underline{A} , \underline{b} , \underline{k}^T y \underline{c}^T están en variables de fase:

$$\left[\underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T + \underline{K} \underline{b} \underline{c}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -(a_1 + Kk_1 - Kc_1) & -(a_2 + Kk_2 - Kc_2) & \dots & \dots & -(a_n + Kk_n - Kc_n) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Haciendo iguales consideraciones se calcula la matriz

$$\left[\underline{A} - \underline{K} \underline{b} \underline{k}^T \right] = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -(a_1 + Kk_1) & -(a_2 + Kk_2) & \dots & \dots & -(a_n + Kk_n) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Ya que las matrices de (3.63) y (3.64) están en la forma canónica controlable, la ecuación (3.62) se puede escribir directamente como:

$$e_{ee} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{s^n + (a_n + Kk_n - Kc_n)s^{n-1} + \dots + (a_2 + Kk_2 - Kc_2)s + (a_1 + Kk_1 - Kc_1)}{s^n + (a_n + Kk_n)s^{n-1} + \dots + (a_2 + Kk_2)s + (a_1 + Kk_1)} \quad (3.65)$$

Entonces, según la entrada, se obtienen los siguientes resultados.

a) Entrada escalón unitaria $R(s) = 1/s$

Para esta entrada, la ecuación (3.65) queda:

$$e_p = \frac{a_1 + Kk_1 - Kc_1}{a_1 + Kk_1} \quad (3.66)$$

Para lograr un error de posición nulo, con realimentación de estado se necesita que:

$$a_1 + Kk_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad (3.67.a)$$

$$a_1 + Kk_1 - Kc_1 = 0 \quad \text{ó} \quad a_1 + Kk_1 = Kc_1 \quad (3.67.b)$$

Esto requiere que $c_1 \neq 0$, de lo contrario el sistema tendrá un polo y un cero en el origen, que se anulan, disminuyendo el orden del sistema.

Si $c_1 \neq 0$, y si se han cumplido las condiciones (3.67), se tendrá siempre error nulo para la entrada escalón, sean cual fueren los valores de c_i , $i = 2, \dots, n$

b) Entrada rampa unitaria $R(s) = 1/s^2$

Para esta entrada, y cumpliendo con las condiciones (3.67), la ecuación (3.65) queda

$$e_v = \frac{a_2 + Kk_2 - Kc_2}{a_1 + Kk_1} = \frac{a_2 + Kk_2 - Kc_2}{Kc_1} \quad (3.68)$$

Para obtener error de velocidad nulo, con realimentación de estado, debe cumplirse que

$$a_1 + Kk_1 = Kc_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad (3.69.a)$$

$$a_2 + Kk_2 - Kc_2 = 0 \quad \text{ó} \quad a_2 + Kk_2 = Kc_2 \quad (3.69.b)$$

En una planta sin ceros, o planta polar, $c_2=c_3=\dots=c_n=0$

Esto quiere decir que no se puede conseguir error nulo de velocidad en un sistema con realimentación de estado y planta polar; pues habría que hacer $a_2 + Kk_2 = 0$, pero esto implica que el coeficiente de la primera potencia de s del polinomio característico de la ecuación (3.26) sea nulo, y el sistema, por tanto, sea inestable.

Si $a_2 + Kk_2 > 0$, el sistema será estable, pero tendrá un error de velocidad finito -para una planta polar-
El error para este caso es:

$$e_v = \frac{a_2 + Kk_2}{Kc_1} \quad (3.70)$$

Por tanto, en un sistema estable con realimentación de estado, en régimen permanente, tanto con una entrada en escalón como en rampa, sólo puede lograrse error nulo cuando la planta tiene al menos un cero.

c) Entrada parabólica unitaria $R(s) = 1/s^3$

Para este tipo de entrada y si se tiene una planta sin ceros, $c_2=c_3= \dots\dots\dots =c_n=0$ y $c_1 \neq 0$ de la ecuación (3.65) se ve que

$$e_a = \infty$$

Por tanto una planta sólo polar no puede seguir a una entrada parabólica.

Si se imponen las condiciones para que tanto el error de posición como el de velocidad sean cero en la ecuación (3.65), para la entrada parabólica queda

$$e_a = \frac{a_3 + Kk_3 - Kc_3}{a_1 + Kk_1} = \frac{a_3 + Kk_3 - Kc_3}{Kc_1} \quad (3.71)$$

Las condiciones para obtener un error de aceleración nulo son:

$$a_1 + Kk_1 = Kc_1 \neq 0 \quad (3.72.a)$$

$$a_3 + Kk_3 - Kc_3 = 0 \quad \text{ó} \quad a_3 + Kk_3 = Kc_3 \quad (3.72.b)$$

Por tanto sólo se puede lograr error nulo en régimen permanente para una entrada parabólica en un sistema en

el que $c_3 \neq 0$ es decir que tenga dos o más ceros.

Cuando un sistema tiene un solo cero: $c_3=c_4=\dots=c_n=0$, no puede lograrse error de aceleración nulo con realimentación de estado, pues para esto se necesitaría que $a_3 + Kk_3 = 0$, pero con ello se produce un coeficiente cero para el término en s^2 del polinomio característico de la ecuación (3.26), dando lugar a inestabilidad del sistema. Si $a_3 + Kk_3 > 0$ y además el sistema tiene un solo cero, el sistema será estable pero tendrá un error de aceleración finito e igual a

$$e_a = \frac{a_3 + Kk_3}{Kc_1} \quad (3.73)$$

Los resultados obtenidos y consideraciones hechas en la presente sección se resumen en las tablas (3.1) y (3.2)

Nº de ceros	E N T R A D A		
	ESCALON	RÁMPA	PARABOLA
0	$a_1 + Kk_1 = Kc_1$	Hay error permanente	No puede seguir esta entrada
1	$a_1 + Kk_1 = Kc_1$	$a_2 + Kk_2 = Kc_2$	Hay error permanente
≥ 2	$a_1 + Kk_1 = Kc_1$	$a_2 + Kk_2 = Kc_2$	$a_3 + Kk_3 = Kc_3$

* Tabla 3.1. Condiciones necesarias para error nulo permanente en un sistema con realimentación de estado.

Nº de ceros	K_p	K_v	K_a
0	∞	$\frac{Kc_1}{a_2 + Kk_2}$	0
1	∞	∞	$\frac{Kc_1}{a_3 + Kk_3}$
≥ 2	∞	∞	∞

* Tabla 3.2. Coeficiente de error permanente en un sistema con realimentación de estado.

* Para una representación en variables de fase (forma canónica controlable).

3.4. PLANTA CON POLOS COMPLEJOS

Por medio de un ejemplo se verá como obtener la representación de variables de estado de una planta que contenga polos complejos. Si se ve la figura (3.6.a) se puede apreciar que como el sistema es de cuarto orden deben identificarse cuatro variables de estado. La función de transferencia $O(s) / I(s)$ contiene implícitamente dos estados, perdiéndose la identidad de uno de ellos.

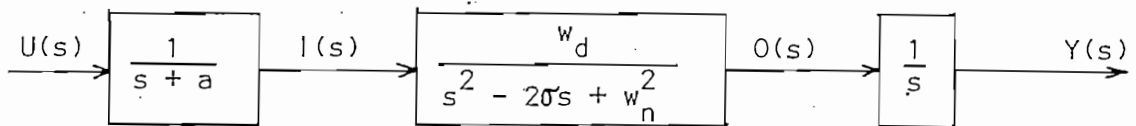


figura 3.6. (a)

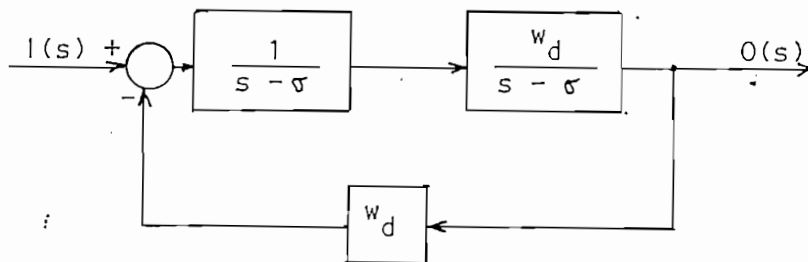
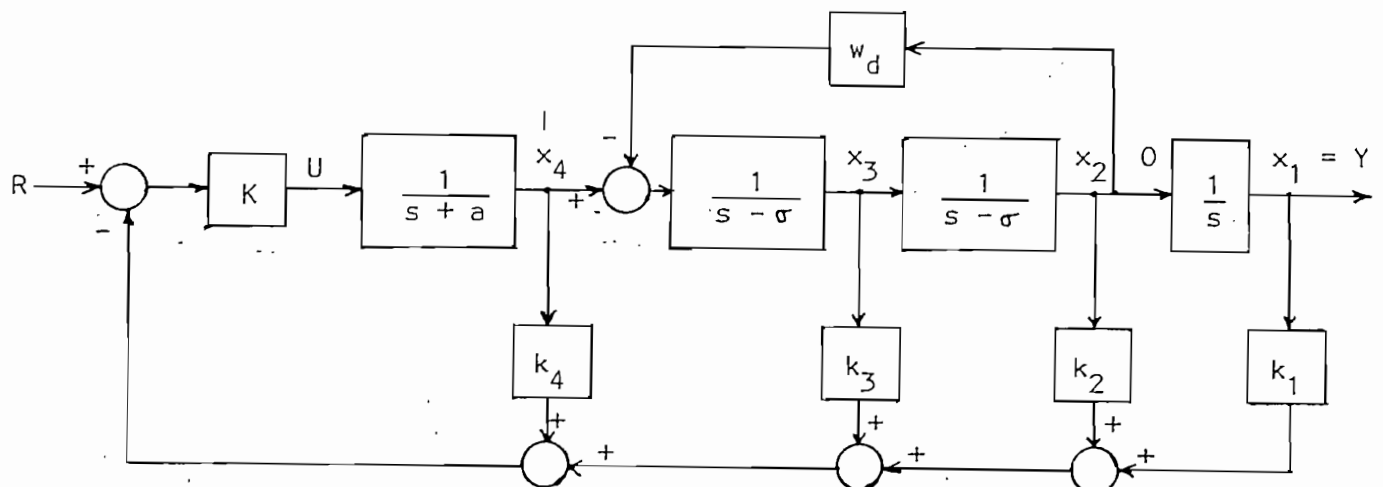


figura 3.6. (b)



Cuando uno de los estados no está identificado inicialmente, se debe formar un modelo equivalente que contenga los dos estados para la función de transferencia de la figura (3.6.a). Esta descomposición puede hacerse de la siguiente forma:

$O(s) / I(s)$ tiene el denominador con dos raíces complejas $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$, en donde $\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2$. Esta función de transferencia puede expresarse como:

$$\frac{O(s)}{I(s)} = \frac{\omega_d}{(s - \sigma)^2 + \omega_d^2} = \frac{\omega_d}{(s - \sigma)^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\omega_d^2}{(s - \sigma)^2}} \right]$$

Haciendo $G_O(s) = \frac{\omega_d}{(s - \sigma)^2}$, se tendrá un sistema de realimentación negativa con $H_O(s) = \omega_d$

Haciendo esta consideración se llega a una función de transferencia $O(s) / I(s)$ como la de la figura (3.6.b).

Este conjunto se utiliza en el diagrama que usa realimentación de estado de la figura (3.6.c). Si el estado x_3 es inaccesible, una vez determinados los valores de k_i , puede lograrse la realización física de la realimentación por variables de estado por medio de una manipulación sobre las posiciones de los bloques.

Otro planteamiento es el de presentar la función $O(s) / I(s)$ en función de las variables de estado, tal como se ve a continuación

$$\frac{O(s)}{I(s)} = \frac{w_d}{s^2 - 2\sigma s + w_n^2}$$

$$\ddot{o}(t) - 2\sigma \dot{o}(t) + w_n^2 o(t) = w_d i(t)$$

Si escogemos las variables de estado como sigue

$$\dot{x}_1 = \dot{o} = x_2$$

$$i(t) = u(t)$$

$$\dot{x}_2 = 2\sigma \dot{o} - w_n^2 o + w_d i = 2\sigma x_2 - w_n^2 x_1 + w_d u$$

Las ecuaciones de estado y de salida son:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & 2\sigma \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_d \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Entonces $O(s) / I(s)$ puede descomponerse como se indica en la figura (3.7)

De este modo ya puede determinarse el estado intermedio de x_2 .

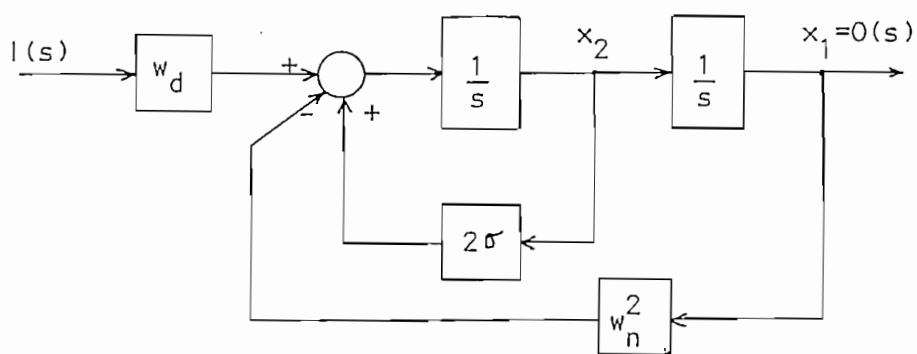


figura 3.7.

3.5. ESTADOS INACCESIBLES

Si se desea tener el máximo aprovechamiento de la realimentación de estado, todos los estados deben ser accesibles. Aunque, en general, esta condición no se puede lograr siempre; el procedimiento para determinar los coeficientes de realimentación sigue siendo válido, es decir, se logra la función de transferencia deseada $Y(s) / R(s)$ determinando el valor de \underline{k} sobre la base de que todos los estados son accesibles.

Luego, para los estados que no son alcanzables se manipulan los bloques correspondientes k_i para tener estados accesibles.

Existen métodos mucho más complicados para estimar (reconstruir) los valores de los estados no existentes (filtros de Kalman y teoría de Luenberger)¹, pero quedan fuera del alcance de esta tesis; estos métodos permiten la realimentación de todos los estados accesibles y reconstruidos o estimados (inaccesibles) a través de los coeficientes de realimentación, eliminándose así la necesidad de manipular sobre bloques del diagrama funcional manteniéndose todas las ventajas de la realimentación de estado.

Supóngase que el estado x_3 del sistema de la figura (3.8) es inaccesible, pueden hacerse dos clases de manipulaciones: desplazar el bloque k_3 hacia la derecha o hacia la izquierda. A continuación se verán ambos procedimientos.

¹. ANDERSON BRIAN. Linear Optimal Control, Prentice-Hall, 1971

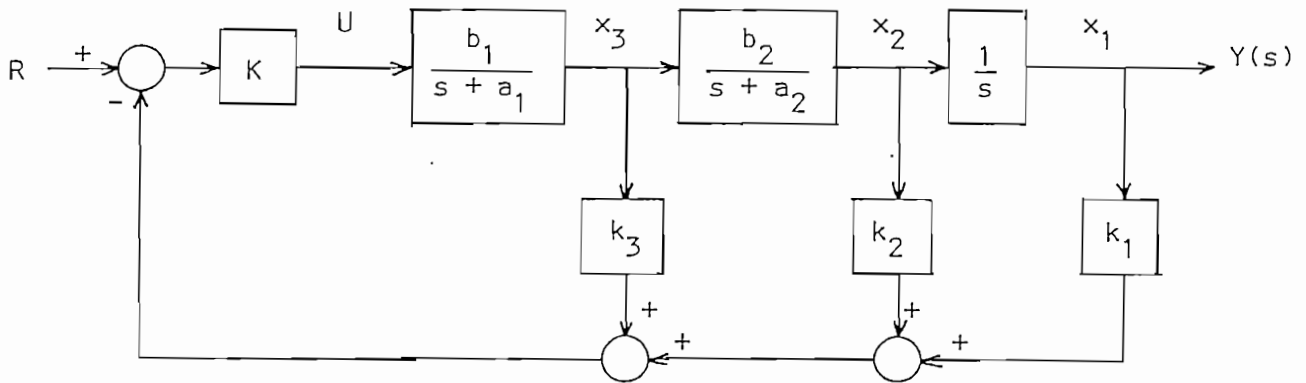


figura 3.8.

La figura (3.9) representa el primer caso. En la figura (3.9.a) $H_C(s)$ es un dispositivo derivativo y además proporcional. Esta unidad requiere el uso de un componente activo o traductor; es decir, si x_2 es la representación de una velocidad, puede usarse un acelerómetro para obtener la acción derivativa de $H_C(s)$

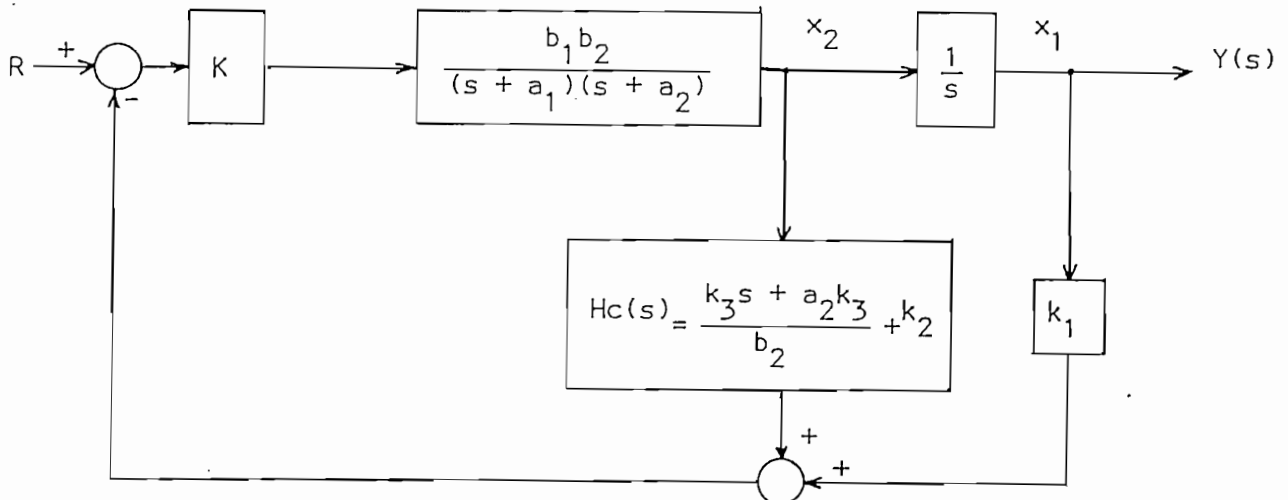


figura 3.9. (a)

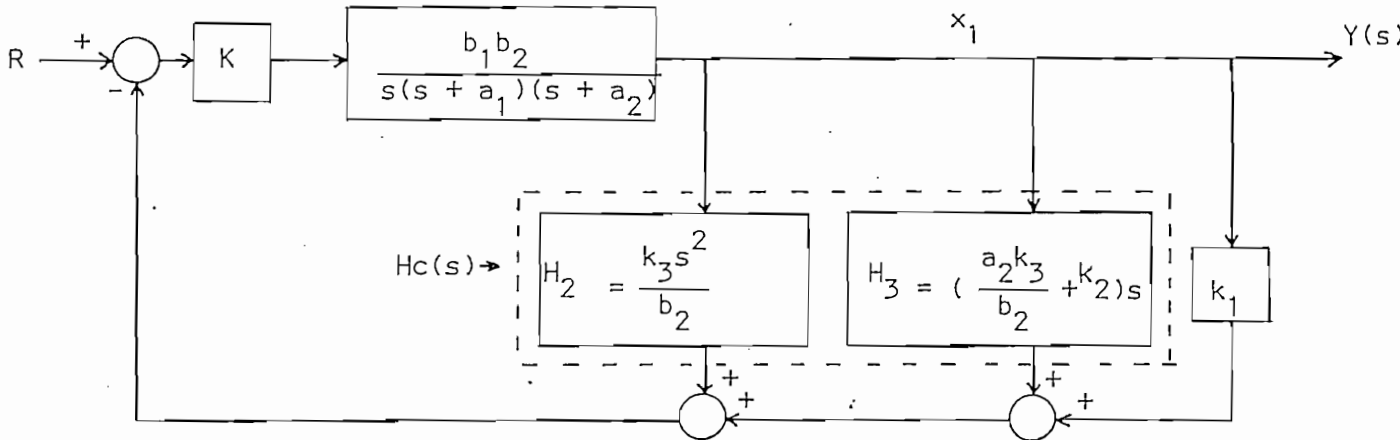


figura 3.9. (b)

En el caso en que tanto x_2 como x_3 sean inaccesibles puede emplearse la compensación activa de un lazo menor como representa la figura (3.9.b), lo que impone la necesidad de obtenerse la primera y segunda derivada de la entrada x_1 ; si esta señal x_1 representa una posición puede usarse un acelerómetro y un tacómetro para obtener $H_2(s)$ y $H_3(s)$ respectivamente.

De este ejemplo puede concluirse que desplazando el bloque k_1 desde el estado inaccesible x_1 , a la derecha, hasta el estado accesible x_j se requiere una derivada de orden $(i - j)$ en el compensador $H_c(s)$, en donde $i > j$.

En la figura (3.10) se ve la manipulación de bloques hacia la izquierda del sistema de control y resulta del empleo de un compensador.

La técnica presentada en esta sección para tratar estados inaccesibles es más bien simple y directa. Es además muy satisfactoria

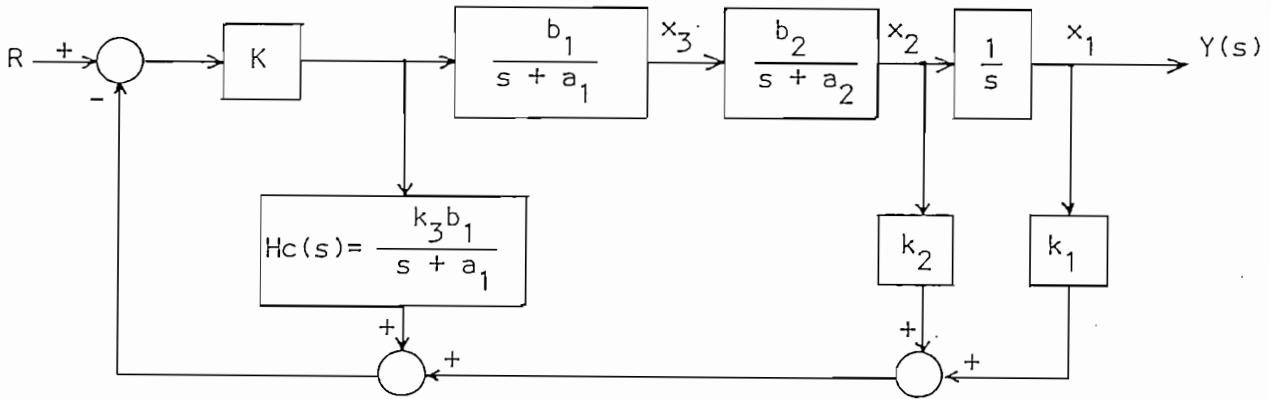


figura 3.10.

para sistemas carentes de ruido e invariantes en el tiempo. Por ejemplo, en la figura (3.8) si el estado x_3 es inaccesible y x_2 contiene ruido, es preferible desplazar el bloque k_3 hacia la izquierda. Esto supone que la señal de salida del amplificador tiene el menor ruido posible. Si todas las señales contienen ruido, el comportamiento del sistema estará degradado con respecto al comportamiento deseado.

CAPITULO CUATRO

PROGRAMAS COMPUTACIONALES DESARROLLADOS

- 4.1. Biblioteca de programas.
- 4.2. Programa maestro: JCGUERRA.
- 4.3. Ingreso de datos: ENTRADA.
- 4.4. Cálculos básicos: CALCBASIC.
- 4.5. Determinación de salidas ficticias: CALCFICTIC.
- 4.6. Análisis y/o diseño con realimentación de estado: REALESTADO.

4.1. BIBLIOTECA DE PROGRAMAS

El equipo de computación usado para el desarrollo de la presente tesis es el 4051 GRAPHIC SYSTEM de la Tektronix el mismo que emplea el BASIC como lenguaje:

La capacidad de memoria, disponible al usuario, es de 30 kbytes (de 8 bits); además tiene 3 unidades de disco, un impresor y un grafizador (plotter).

Con el fin de evitar que gran parte de la memoria quede ocupada por el listado del programa, éste se ha separado en varios, que pueden ser ejecutados separadamente, de manera que en la memoria del computador se tendrá, cada vez, solamente aquel programa que se debe ejecutar en un momento determinado; el resto de programas estarán almacenados en un disco.

Los programas a los que se ha hecho mención son manejados por un programa maestro, el mismo que se ocupa de cargar el que se requiera en un momento dado, borrando previamente todas las líneas usadas anteriormente a excepción del programa maestro, y manteniendo los valores de las variables.

Hay que anotar que en la versión de BASIC utilizada, no hay independencia entre las variables de un programa principal y de una subrutina. Tampoco hay independencia entre variables de los dis-

tintos programas, de modo que se debe mantener una estricta consistencia en lo que se refiere a nombres de variables entre los distintos programas y entre un programa y sus subrutinas.

La figura 4.1 muestra la configuración general de la biblioteca de programas desarrollados para resolver numéricamente el problema de la realimentación de estado.

A continuación, se describe la función que desempeña cada programa y sus características fundamentales, se presenta una lista de los nombres de las variables usadas, indicando su significado, y, además, un diagrama de flujo que permite el estudio completo del funcionamiento de cada programa (para mayor detalle referirse al listado del programa de interés en el ANEXO A).

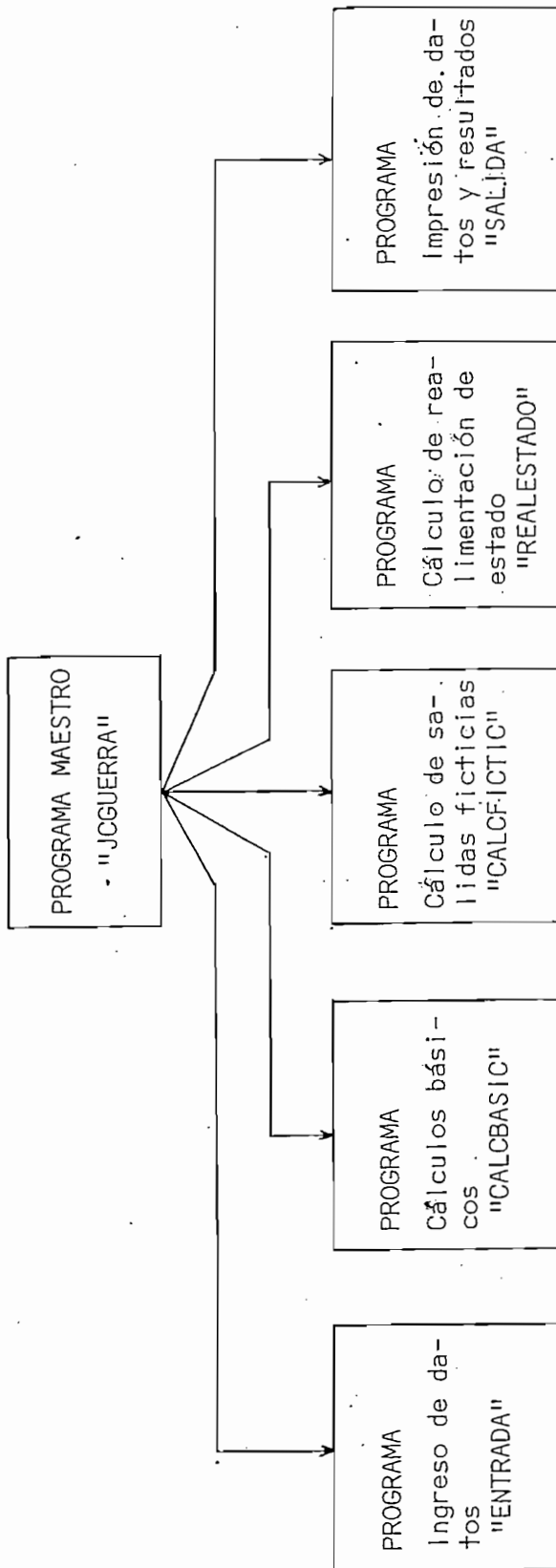


figura 4.1 Estructura de la biblioteca de programas.

4.2. PROGRAMA MAESTRO : JCGUERRA

Este programa dirige automáticamente el funcionamiento del resto de la biblioteca, borrando el programa que esté en memoria, para enseguida cargar otro en lugar del anterior, siguiendo un orden lógico establecido.

Su ejecución consiste básicamente en lo siguiente :

1. Chequea si está o no en memoria el programa que se requiere.
2. Si el programa está en memoria, lo ejecuta.
3. Si no está en memoria, realiza los siguientes pasos :
 - a) Borra la memoria a partir de la línea 1001.
 - b) Carga el programa deseado a partir de la línea 1000.
 - c) Ejecuta dicho programa.

El programa maestro, sólo necesita inicializar ciertas variables para el funcionamiento de todos los programas. Hay que anotar que en el proceso de borrado y carga de los distintos programas, el programa maestro va a permanecer, casi en su totalidad, siempre en memoria; esto permite que pueda ser llamado a ejecución en cualquier momento,,ya sea por el programa o por el usuario.

Los nombres de las variables usadas y las cantidades que representan son las siguientes:

NOMBRE	CANTIDAD
UØ	Número de la unidad de disco usada.
01	Número del programa que se desea ejecutar.
02	Número del programa que está en memoria.
05	Cantidad que controla si se han hecho cálculos básicos; si es así 05 = 2.
03	Cantidad que controla si se ha hecho el cálculo de salidas ficticias; si es así 03 = 2.
04	Cantidad que controla si se ha hecho el cálculo de realimentación de estado; si es así 04 = 2.
0\$	Nombre del programa que será cargado.

Las posibilidades que se tienen con este programa son:

- TECLA 1. INDICE DE PROGRAMAS
- TECLA 2. INGRESO, VERIFICACION, CORRECCION, ALMACENAMIENTO DE DATOS Y COMIENZO DEL CALCULO.
- TECLA 3. CALCULO DE SALIDAS FICTICIAS.
- TECLA 4. CALCULO DE REALIMENTACION DE ESTADO (diseño o análisis).
- TECLA 5. IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS

El diagrama de flujo para el programa se muestra en la figura 4.2.

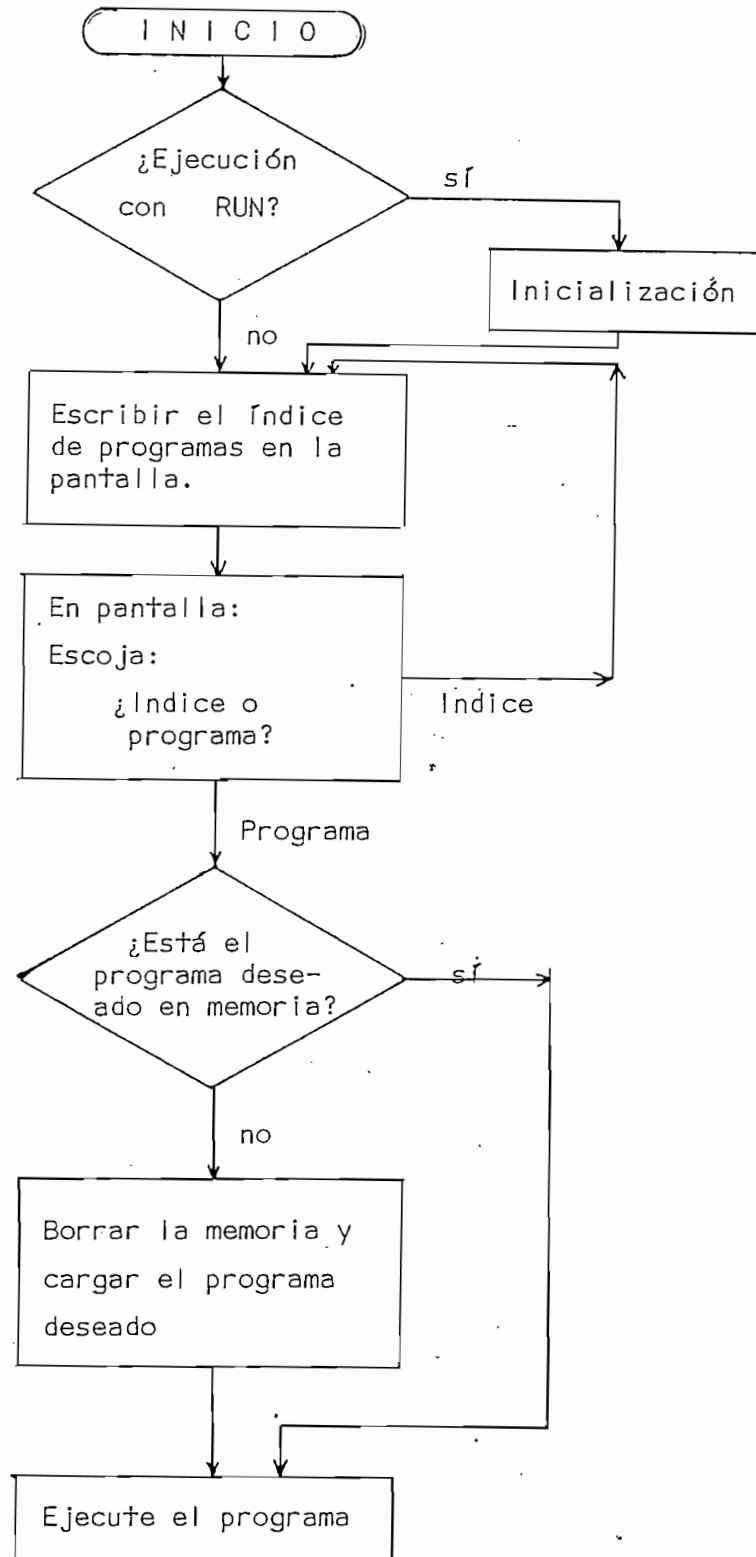


figura 4.2. Diagrama de flujo del programa maestro: JCGUERRA

4.3 INGRESO DE DATOS (ENTRADA)

Este programa tiene las siguientes opciones de trabajo :

1. Ingreso manual de datos.
2. Lectura de archivo de datos.
3. Listado.
4. Corrección.
5. Comienzo del cálculo.

Las opciones 3,4 y 5 no pueden ser ejecutadas sin que antes se hayan escogido las opciones 1 ó 2.

Los datos que son necesarios para todos los programas posteriores son las matrices de estado y de salida definidas en las ecuaciones (3.19 a y b). Debe recordarse que el análisis teórico así como el conjunto de programas se elaboraron bajo el supuesto de tener una sola entrada y una sola salida.

La información requerida es :

- Identificación del problema.
- Orden de la planta (matriz \underline{A} del sistema) : N
- Elementos de la matriz \underline{A} y vectores \underline{b} y \underline{c}^T .

Una vez ingresados estos datos, pueden ser almacenados en

un determinado archivo de disco, con el fin de facilitar la repetición del análisis de un mismo problema, sin necesidad de volver a ingresarlos.

Los nombres de las variables y las cantidades que representan son :

NOMBRE	CANTIDAD
N	Orden de la planta
A	Matriz de orden $N \times N$.
B	Vector de orden N.
C	Vector de orden $1 \times N$.
K1	Número de la alternativa deseada dentro del programa.
N\$	Nombre del archivo en el que se almacenan los datos por el usuario.
T\$	Nombre del problema (identificación) dado por el usuario.
U2	Dirección de la unidad de impresión.
U1	Cantidad que controla si los datos se han ingresado o se han leído de un archivo; si es así $U1=2$.

En la figura 4.3. se tiene el diagrama de flujo del programa.

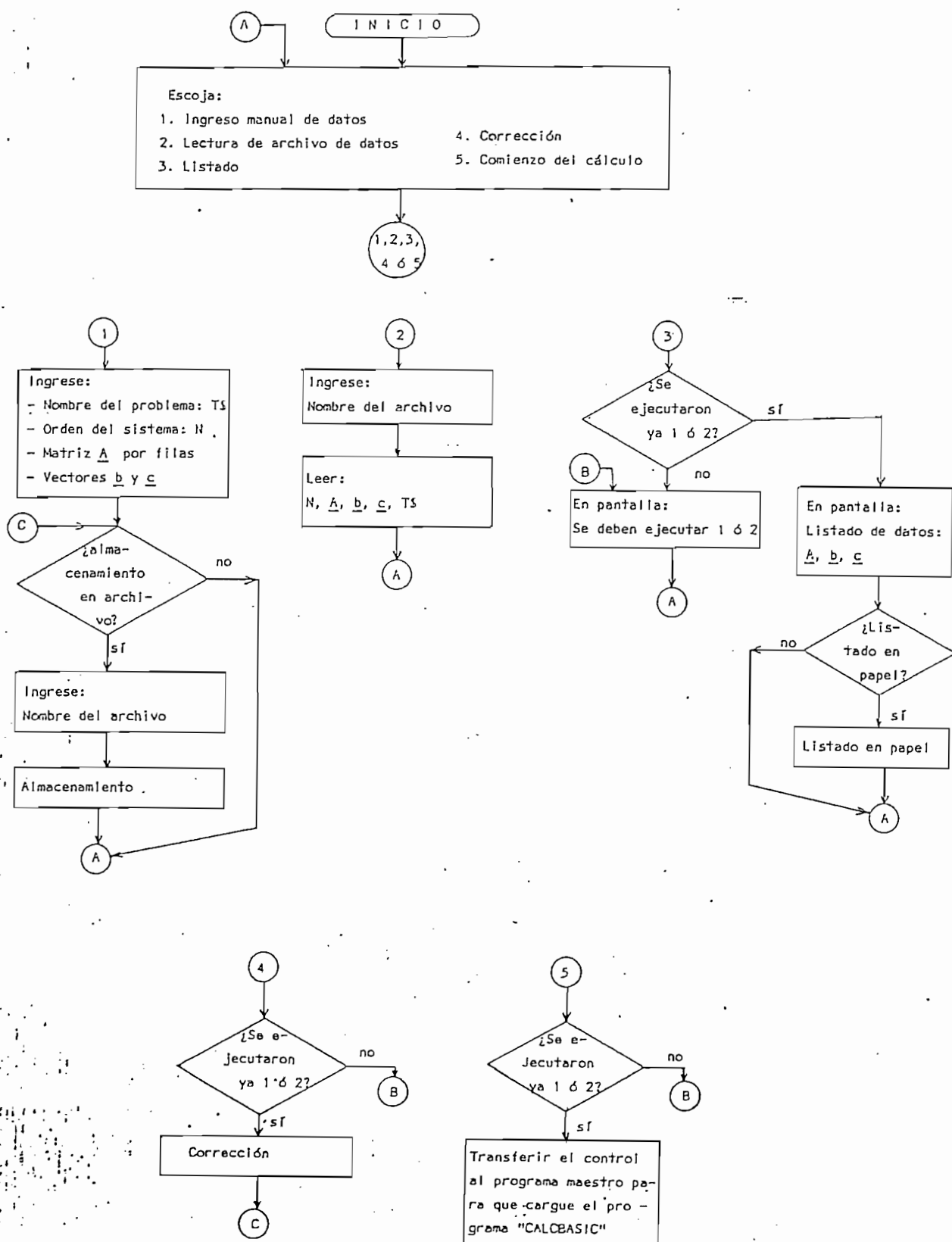


figura 4.3. Diagrama de flujo del programa ENTRADA

4.4. CALCULOS BASICOS (CALCBASIC)

a) Controlabilidad.

Debido a que posteriormente se usará un algoritmo para la transformación de la planta a variables de fase (forma canónica controlable) es necesario que ésta sea controlable, según se vió en el teorema de la sección 2.3.3.2.. Además se debe comprobar que la planta tenga esta propiedad antes de utilizar, en forma juiciosa y segura, cualquier técnica que implique el uso de funciones de transferencia.

De aquí que es importante el chequeo de la controlabilidad de la planta para garantizar que los resultados que se obtendrán serán totalmente valederos. Esto debería hacerse aunque se conozca que la planta física es controlable, ya que el modelo matemático - especialmente si se usa linealización - puede destruir esta propiedad.

Un sistema es controlable, según se vió en la sección 2.4., si la matriz $n \times n$

$$\underline{M}_c = \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} & \underline{A}^2\underline{b} & \dots\dots\dots & \underline{A}^{n-1}\underline{b} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

tiene rango n , es decir, si su determinante es diferente de cero, o lo que es lo mismo, si \underline{M}_c es una matriz no singular.

Aún cuando se tenga que el $\det(\underline{M}_c) \neq 0$, pueden surgir problemas si la matriz \underline{M}_c es mal condicionada y por tanto presenta dificultad en su inversión. Con el propósito de chequear esta posibilidad

se invierte la matriz \underline{M}_c ; si esta matriz inversa \underline{M}_c^{-1} se multiplica por \underline{M}_c , el resultado debería ser la matriz identidad \underline{I} . El grado en que este producto diverge de la matriz \underline{I} es la medida de la incontrolabilidad de la planta. Si el máximo de los valores absolutos de esta divergencia no es despreciable¹, la planta será identificada como numéricamente incontrolable. Se ha escogido esta terminología para indicar que, aunque la planta es teóricamente controlable, no lo es en el sentido numérico, puesto que el resultado de invertir la matriz \underline{M}_c usando un algoritmo para el caso, no es lo suficientemente preciso o aproximado.

- b) Polos del sistema lazo abierto (sin realimentación de estado) y el polinomio característico.

Se conoce que los polos del sistema son los valores propios de la matriz \underline{A} de la ecuación de estado; además se sabe que estos son siempre los mismos aunque esta matriz esté representada en cualquier base. Para el cálculo de los valores propios se usa el método siguiente²:

- A partir de la matriz \underline{A} se obtiene una matriz de Hessenberg por medio de sucesivas transformaciones de semejanza.
- Una vez obtenida la matriz de Hessenberg, aplicar el algoritmo QR para encontrar los valores propios de la matriz \underline{A} .

que 10^{-4} a 10^{-6} . 1. Se pueden tomar como despreciables valores menores

2. GARCIA C. Tesis de Grado. E.P.N.

- Si la matriz \underline{A} es simétrica, utilizar el método de Householder que es más eficiente que los anteriores pues es menos sensitivo al error por redondeo al no requerir ninguna contracción ni el cálculo de los coeficientes del polinomio característico.

Una vez conocidos los valores propios de \underline{A} , que son las raíces del polinomio característico, fácilmente se pueden hallar, por medio de un algoritmo, los coeficientes de dicho polinomio:

$$D(s) = a_1 + a_1s + a_2s + a_3s + \dots + a_ns^{n-1} + s^n \quad (4.2)$$

c) Matriz de transformación a variables de fase

En el estudio teórico de realimentación de estado, se analizaron sistemas que usaban variables de estado en la forma canónica controlable (variable de fase), las mismas que también se utilizan para la implementación de los programas. Pero, como es natural, la mayoría de plantas no están representadas en dicha forma, y no sería recomendable que lo estén, pues se perdería la generalidad de la descripción de sistemas en el espacio de estado.

Un sistema que esté representado por variables de estado, se puede transformar a variables de fase para hacer los cálculos de realimentación de estado y entonces volver a transformar los coeficientes a la representación original.

Dicha transformación puede hacerse mediante lo visto en la

sección 2.3.3.2 y se reescribe a continuación:

La transformación lineal de semejanza usada es:

$$\underline{x} = \underline{P} \underline{x}^f \quad (1) \quad (4.3)$$

o ya que \underline{P} es no singular:

$$\underline{x}^f = \underline{P}^{-1} \underline{x} \quad (4.4)$$

En términos de la matriz de transformación \underline{P} , las matrices de las ecuaciones de estado y de salida en variables de fase quedarían:

$$\underline{A}^f = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \quad (4.5)$$

$$\underline{b}^f = \underline{P}^{-1} \underline{b} \quad (4.6)$$

$$(\underline{c}^f)^T = \underline{c}^T \underline{P} \quad (4.7)$$

Además, los coeficientes de realimentación en variables de fase y en su representación original son descritos por las ecuaciones siguientes:

$$(\underline{k}^f)^T = \underline{k}^T \underline{P} \quad (4.8)$$

1. El superíndice "f" se usa para indicar cantidades en variables de fase.

$$y, \quad \underline{k}^T = \underline{P}^{-1} (\underline{k}^f)^T \quad (4.9)$$

De aquí que una vez conocida la matriz \underline{P} el problema de la transformación está resuelto completamente.

Si se conocen los coeficientes del polinomio característico de \underline{A} , entonces, como se vió en la sección 2.3.3.2, se puede calcular \underline{P} desarrollando un algoritmo simple, en que los vectores columna \underline{p}^i están definidos por la fórmula de recursión siguiente:

$$\underline{p}^n = \underline{b} \quad (4.10)$$

$$y, \quad \underline{p}^{n-i} = \underline{A} \underline{p}^{n-i+1} + a_{n-i+1} \underline{b} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.11)$$

entonces \underline{P} está dada por:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{p}^1 & \underline{p}^2 & \dots & \underline{p}^n \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

d) Coeficientes del numerador de lazo abierto y sus raíces

Si un sistema está representado en variables de fase, el numerador de la función de transferencia puede ser descrito directamente, según se vió en la sección 2.3.3.2.

Entonces, para encontrar los coeficientes del numerador de lazo abierto, se transforma el vector \underline{c}^T a variables de fase, usando la relación de la ecuación (4.7). Una vez hecha la transformación, los coeficientes del numerador de la función de transferencia estarán dados por $(\underline{c}^f)^T$, véase ecuación (3.19-c).

$$(\underline{c}^f)^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

y,
$$N(s) = c_1 + c_2 s + \dots + c_n s^{n-1} \quad (4.14)$$

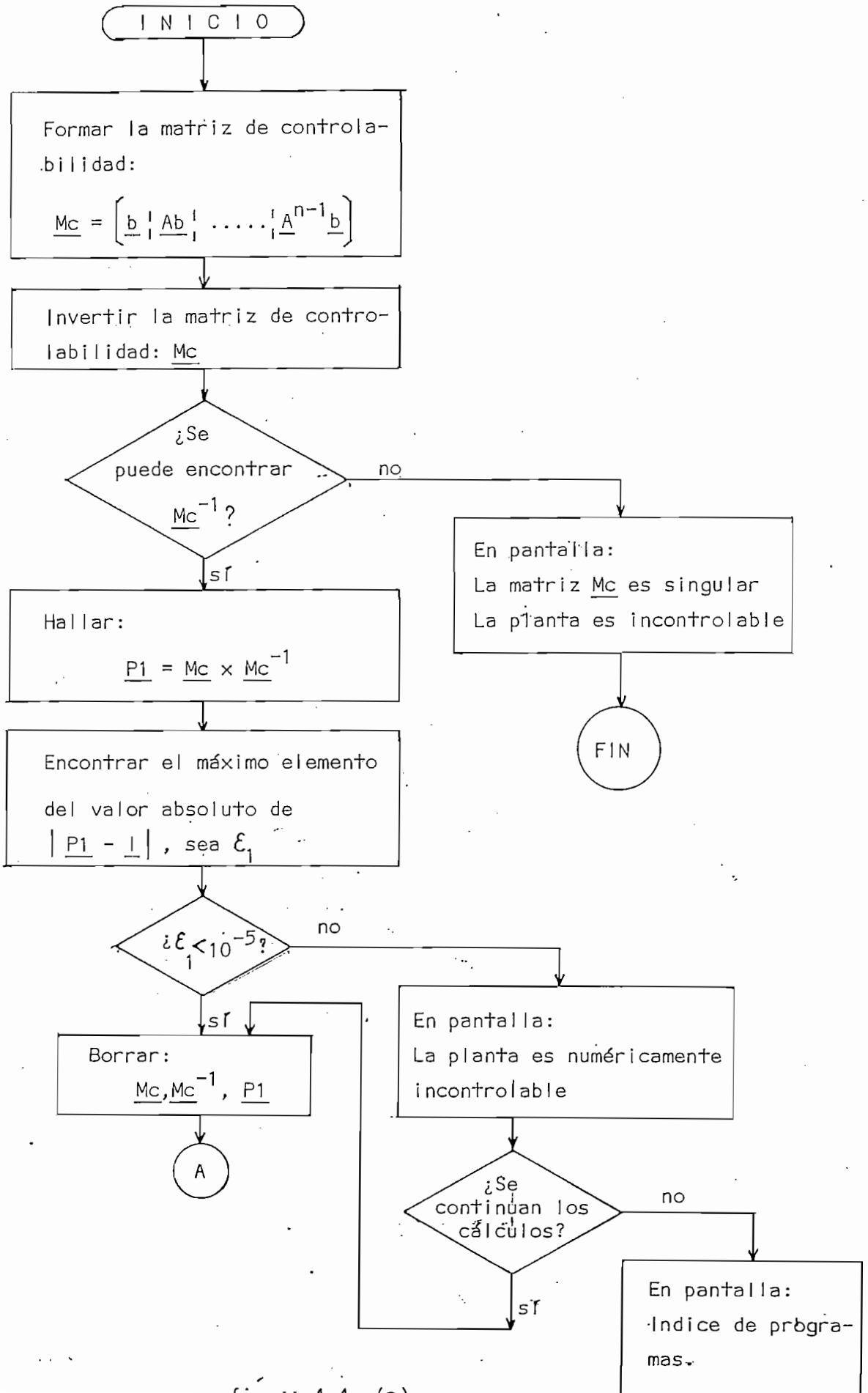
Las raíces de este polinomio se pueden encontrar por medio de cualquier método que sirva para el efecto. En particular, se estudiaron dos métodos: el del descenso más pronunciado con escalamiento de raíces, cuyo programa fue desarrollado por el Ingeniero Efraín del Pino y el método iterativo modificado de Bairstow. Por encontrarse que el primero tiene un tiempo de ejecución menor que el segundo, se lo ha escogido en el presente trabajo.

El diagrama de flujo correspondiente a estos cálculos básicos se muestra en la figura 4.4.

Los nombres de las variables y las cantidades que representan son:

NOMBRE	CANTIDAD
A1	Matriz de controlabilidad de orden $N \times N$.
X7	Matriz inversa de A1 de orden $N \times N$.
P1	Matriz igual a $A1 \times X7$ de orden $N \times N$.
E1	Mayor valor absoluto de los elementos resultantes de la resta entre la matriz P1 y la matriz identidad.
U9	Vector con partes reales de los valores propios o polos del sistema, orden N.
V9	Vector con partes imaginarias de los polos del sistema,

NOMBRE	CANTIDAD
	orden N .
D	Vector con coeficientes del polinomio característico de lazo abierto, orden $(N + 1)$
P	Matriz de transformación a variables de fase, de orden $N \times N$
C1	Vector con coeficientes del numerador de la función de transferencia de lazo abierto, de orden $1 \times N$.
U5	Vector con partes reales de las raíces del numerador de lazo abierto, de orden $(N-1)$.
V5	Vector con partes imaginarias de las raíces del numerador de lazo abierto, de orden $(N-1)$



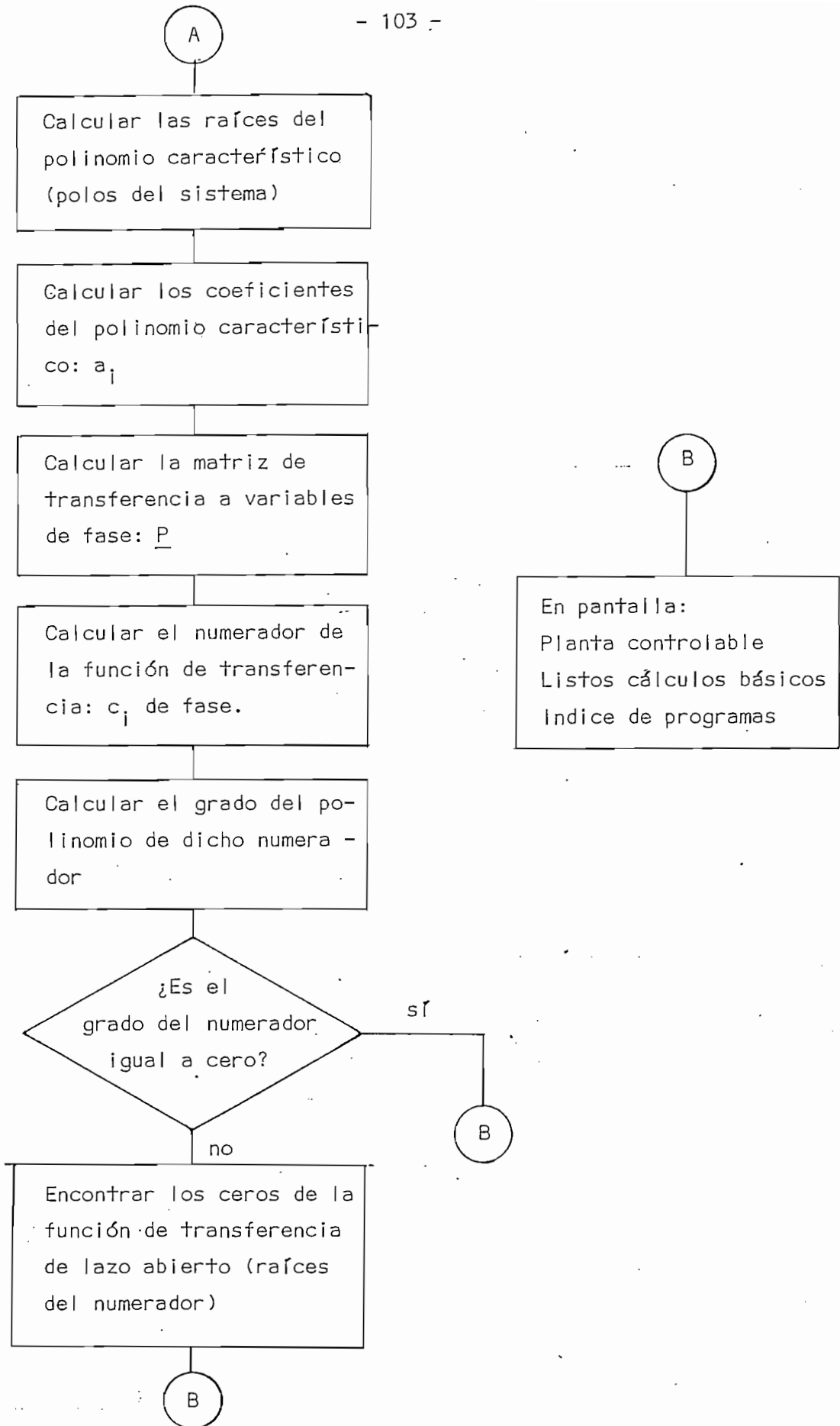


figura 4.4. (b)

4.5. DETERMINACION . DE SALIDAS FICTICIAS (CALCFICTIC)

Este programa puede determinar cualquier función interna de transferencia de la forma $X_i(s) / U(s)$ simplemente definiendo un vector \underline{c}^T ficticio. Así por ejemplo, si se desea la función de transferencia $X_3(s) / U(s)$ bastará con seleccionar un vector \underline{c}^T con $c_3 = 1$ y $c_j = 0$ para $j \neq 3$. De esta forma se pueden determinar cualquier número de funciones internas de transferencia.

Una vez definido el vector \underline{c}^T ficticio, se procede a encontrar los coeficientes del numerador de la función de transferencia $X_i(s) / U(s)$, se transforma dicho vector a variables de fase, usando la ecuación (4.7). Una vez hecha la transformación, dichos coeficientes estarán dados por el vector \underline{c}^T ficticio de fase : $(c^f)^T$ ficticio.

El polinomio del denominador de todas las funciones de transferencia de la forma $X_i(s) / U(s)$ es siempre el polinomio característico de la planta, $D(s)$ de la ecuación (4.2).

Si lo que se necesita es una función de transferencia de la forma $X_i(s) / X_j(s)$ se la puede hallar simplemente dividiendo $X_i(s) / U(s)$ por $X_j(s) / U(s)$.

El diagrama de flujo correspondiente a este programa se presenta en la figura 4.5.

Los nombres de las variables usadas y las cantidades que representan son :

NOMBRE

C4	Matriz de orden $N \times N$ que contiene N vectores ficticios ingresados.
C5	Matriz de orden $N \times N$ que contiene N vectores con los coeficientes de los numeradores de N funciones de transferencia.
U8	Matriz de orden $N \times (N-1)$ con las partes reales de las raíces de los N numeradores ficticios.
V8	Matriz de orden $N \times (N-1)$ con las partes imaginarias de las raíces de los N numeradores ficticios.
$W\emptyset$	Vector de orden N que contiene el grado de los N numeradores ficticios.
W	Número de vectores ficticios ingresados.

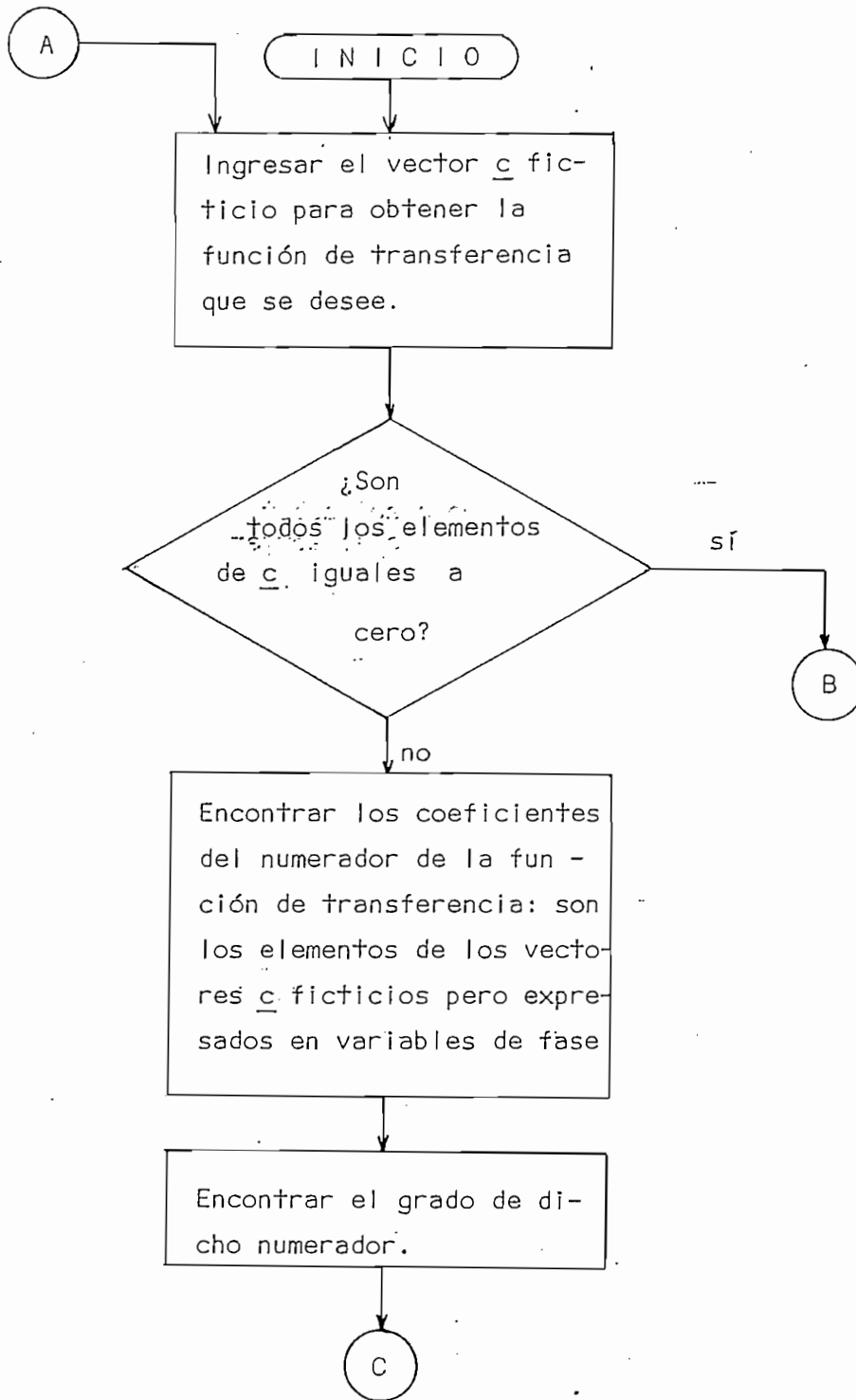


figura 4.5. (a)

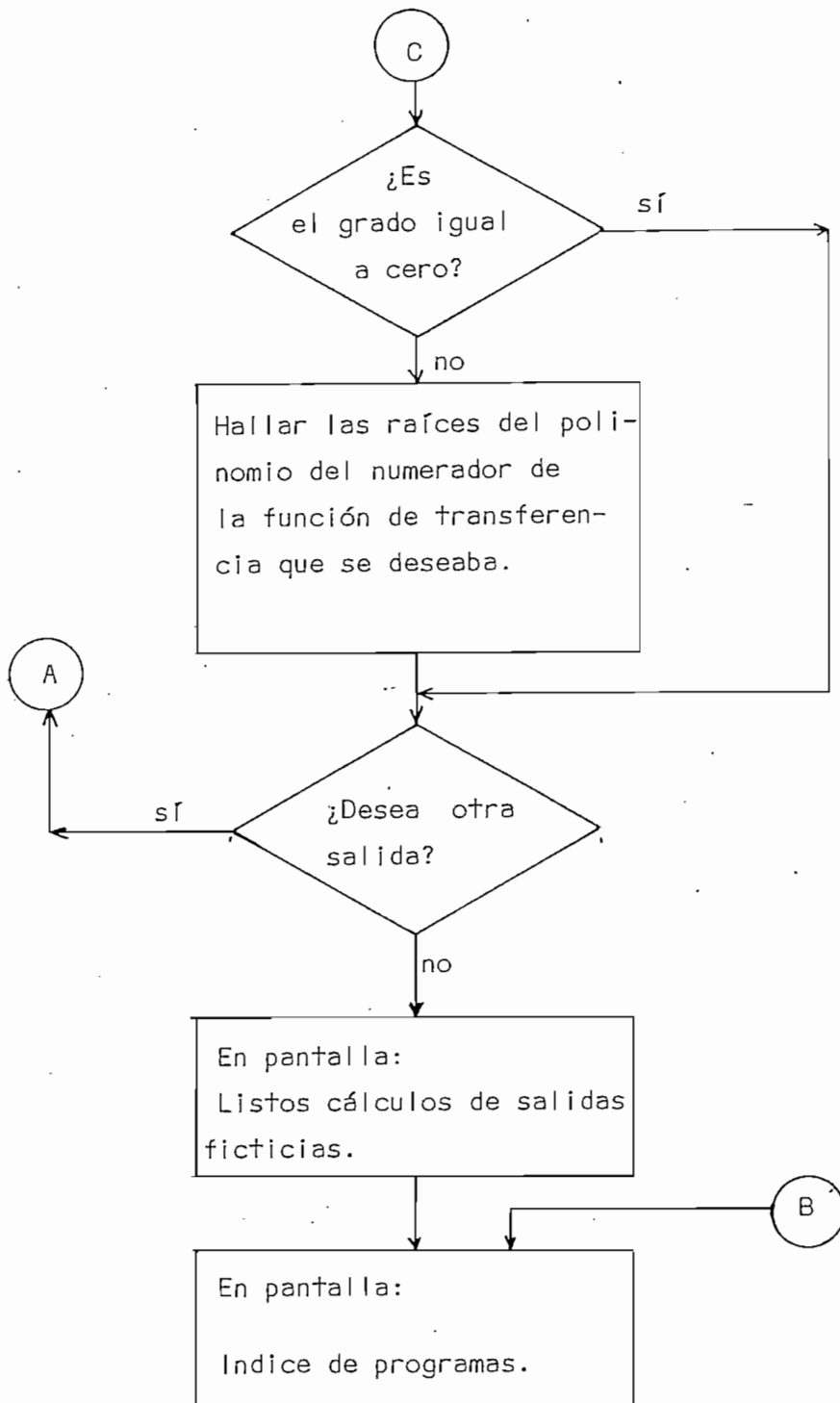


figura 4.5. (b)

figura 4.5. Diagrama de flujo del programa: CALCFICTIC.

4.6. ANALISIS Y/O DISEÑO CON REALIMENTACION DE ESTADO (REALESTADO)

Este programa está basado en el hecho de que si la planta está representada por variables de fase, se pueden obtener los resultados que se verán a continuación en forma directa. Para ilustrar esto, se presenta una síntesis del estudio hecho anteriormente. Considérese la función de transformación de lazo abierto.

$$G(s) = \frac{c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1}}{a_1 + a_2 s + \dots + a_n s^{n-1} + s^n}, \quad m < n \quad (4.15)$$

que en variables de fase toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^f(t) &= \underline{A}^f \underline{x}^f(t) + \underline{b}^f u(t) \\ y(t) &= (\underline{c}^f)^T \underline{x}^f(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

en donde:

$$\underline{A}^f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}; \quad \underline{b}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{c}^f = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Cuando hay realimentación de estado, la expresión para la entrada de control es:

$$u(t) = K \left[r(t) - (\underline{k}^f)^T \underline{x}^f(t) \right] \quad (4.18)$$

en donde \underline{k}^f es el vector de coeficientes de realimentación en variables de fase; entonces la representación del sistema viene a ser:

$$\dot{\underline{x}}^f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_1 + Kk_1^f) & -(a_2 + Kk_2^f) & \dots & -(a_n + Kk_n^f) \end{bmatrix} \underline{x}^f(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (4.19)$$

y

$$y(t) = K \left[c_1 \dots c_m \ 0 \dots 0 \right] \underline{x}^f(t)$$

Entonces la función de transferencia con realimentación de estado dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1})}{(a_1 + Kk_1^f) + (a_2 + Kk_2^f)s + \dots + (a_n + Kk_n^f)s^{n-1} + s^n} \quad (4.20)$$

Los coeficientes del denominador de $Y(s)/R(s)$ pueden escribirse en forma de ecuaciones como sigue:

$$a_{ki} = a_i + Kk_i^f \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.21)$$

entonces :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1})}{a_{k1} + a_{k2} s + \dots + a_{kn} s^{n-1} + s^n} \quad (4.22)$$

De aquí, para el caso de análisis, si se conocen K y \underline{k}^f , se puede determinar directamente $Y(s)/R(s)$.

Para diseño en cambio, si se conocen las a_i y los a_{ki} , se pueden determinar K y \underline{k}^f directamente.

Para obtener una solución única de K y \underline{k}^f , se hace el error de posición igual a cero, cumpliendo la siguiente condición :

$$K = \frac{a_{k1}}{c_1} \quad (4.23)$$

Además, como se vió en la sección (3.2), la función de transferenciá equivalente de realimentación, H_{eq} , se puede hallar fácilmente en términos de variables de fase, según la ecuación (3.29) que se reescribe a continuación :

$$H_{eq} = \frac{k_1^f + k_2^f s + \dots + k_n^f s^{n-1}}{c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1}} \quad (4.24)$$

El programa permite chequear la validez de los resultados obtenidos, encontrando :

$$\xi_i = \max \left| \frac{a_{ki} - a_i - Kk_i}{ak_i} \right|$$

que viene a ser un error normalizado, que más que nada da una idea de la precisión de los resultados; este error puede ser usado para la determinación de la validez de los cálculos, si se los hace, cuando exista incontrolabilidad numérica, discutida en la sección (4.4), así como para descubrir otros problemas de índole numérico que puedan presentar, aunque esto no ha ocurrido en los numerosos ejemplos que se han resuelto.

Los nombres de las variables usadas y las cantidades que representan son :

NOMBRE	CANTIDAD
E	Vector con los coeficientes del polinomio característico del sistema con realimentación de estado, orden $N + 1$.
U6	Vector con las partes reales de los polos de lazo cerrado, (con realimentación de estado), de orden N .
V6	Vector con las partes imaginarias de los polos de lazo cerrado (con realimentación de estado) de orden N .
G	Ganancia del sistema.
H1	Vector de realimentación de estado, para el sistema en la base original, de orden $1 \times N$.
H	Vector de realimentación de estado en variables de

NOMBRE	CANTIDAD
	fase (coeficientes del numerador de H_{eq}), de orden $1 \times N$.
U7	Vector con las partes de las raíces del numerador de H_{eq} , de orden $(N-1)$.
V7	Vector con las partes imaginarias de las raíces del numerador de H_{eq} , de orden $(N-1)$.
P1	Inversa de la matriz \underline{P} para la transformación a variables de fase, de orden $N \times N$.
W2	Grado del numerador H_{eq}
E1	Mayor valor absoluto normalizado usado para verificación.

El diagrama de flujo correspondiente a este programa se encuentra en la figura (4.6).

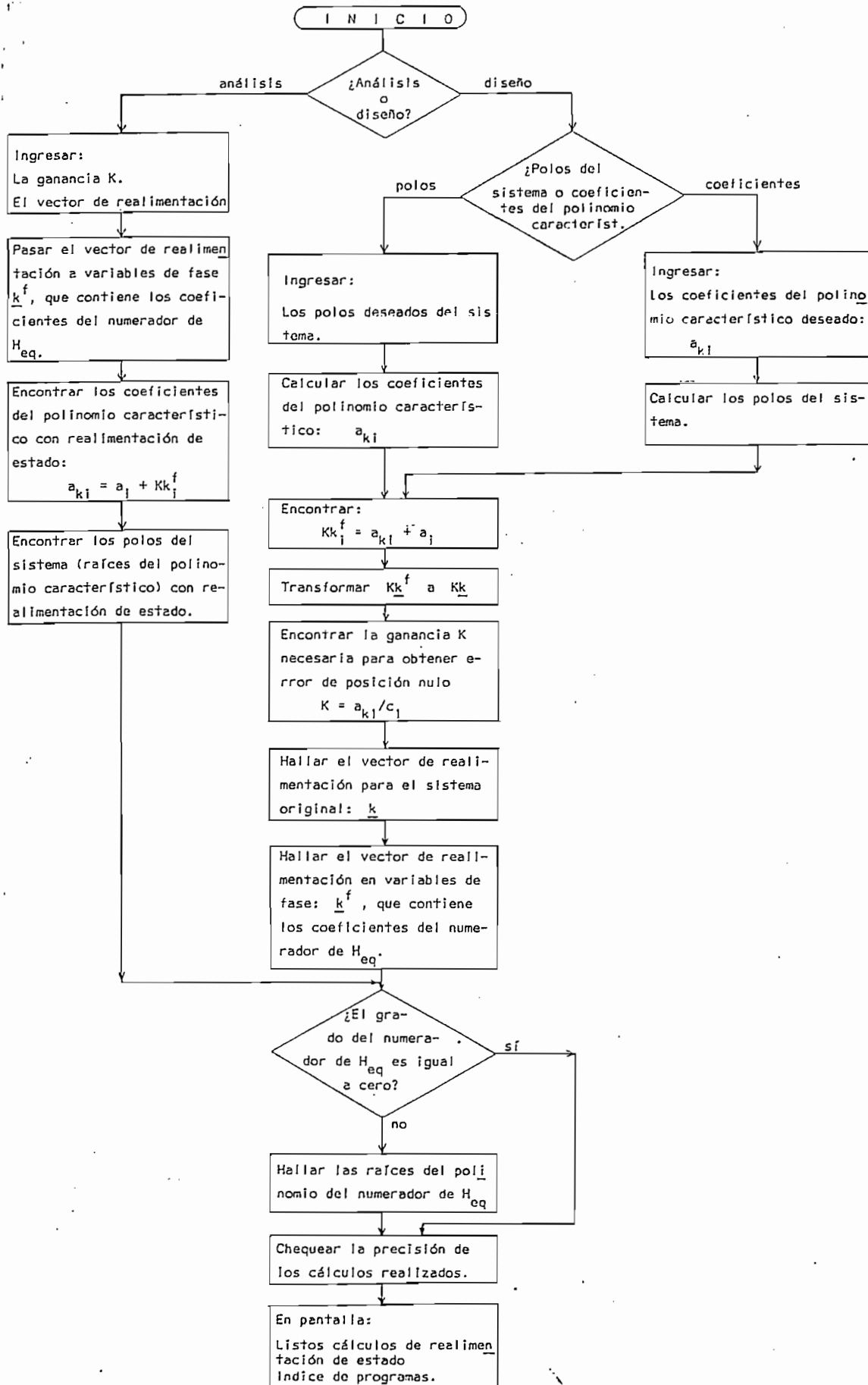


figura 4.6. Diagrama de flujo del programa: REAL ESTADO

CAPITULO CINCO

EJEMPLOS DE APLICACION, CONCLUSIONES

- 5.1. Ejemplos y resultados.
- 5.2. Conclusiones.
- 5.3. Recomendaciones.

5.1. EJEMPLOS Y RESULTADOS

En el presente capítulo se desarrollarán ejemplos de la aplicación práctica de la realimentación de estado y del uso de los programas computacionales implementados.

Es necesario como punto de partida para la utilización de dichos programas, el disponer como modelo matemático del sistema, su representación en el espacio de estado.

Los resultados que presentan los programas se pueden usar directamente para el análisis de estabilidad, obtención de la función de transferencia del sistema sin realimentación de estado y con ella, siempre que el sistema sea controlable.

Ejemplo 1.

Sistema de control de posición de un motor D.C.

Se tomará el mismo sistema de la sección 3.1, mediante el cual se desea controlar la posición del motor D.C. de la figura 3.1 con realimentación de estado.

Las ecuaciones que describen su funcionamiento son las (3.1) a (3.4) y se reescriben a continuación en el dominio del tiempo:

$$e_a - e_b = R_a i_a + L_a \dot{i}_a \quad (5.1)$$

$$e_b = K_b w_m \quad (5.2)$$

$$T = K_T i_a = J \dot{w}_m + B w_m \quad (5.3)$$

$$w_m = \dot{\theta}_m \quad (5.4)$$

En donde:

e_a : voltaje aplicado al motor

e_b : fuerza contraelectromotriz desarrollada

R_a : resistencia de armadura

L_a : inductancia de armadura

i_a : corriente de armadura

K_b : constante de fuerza contraelectromotriz

T : torque desarrollado por el motor

K_T : constante de par motor

J : momento de inercia del motor

B : coeficiente de fricción viscosa de la carga

w_m : velocidad angular del motor

θ_m : ángulo recorrido por el eje del motor

Las variables de estado que se escogen son:

X_1 : ángulo que recorre el motor : θ_m

X_2 : velocidad angular del motor : w_m

X_3 : corriente de armadura : i_a

El voltaje aplicado al motor, que es la entrada al sistema, se toma como $e_a = u$ (por notación)

De las ecuaciones (5.1) a (5.4) se pueden obtener las ecuaciones de estado como siguen:

$$u - K_b X_2 = R_a X_3 + L_a \dot{X}_3$$

$$K_T X_3 = J \dot{X}_2 + B X_2$$

$$X_2 = \dot{X}_1$$

Ordenando estas ecuaciones se tiene:

$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$K_b = 0 \quad (5.5)$$

$$\dot{X}_2 = -\frac{B}{J} X_2 + \frac{K_T}{J} X_3$$

$$B = J = K_T = 1$$

$$L_a = 1 \quad (5.6)$$

$$\dot{X}_3 = -\frac{K_b}{L_a} X_2 - \frac{R_a}{L_a} X_3 + \frac{u}{L_a} \quad (5.7)$$

$$R_a = 4$$

Escogiendo valores adecuados para las constantes, y representando al sistema en forma matricial se llega a:

$$\dot{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.8-a)$$

Ya que X_1 es la salida requerida, la ecuación de salida será:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (5.8-b)$$

En donde se identifican claramente la matriz \underline{A} y los vectores \underline{b} y \underline{c}^T .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.9-a)$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9-b)$$

Ahora bien, para el diseño de la realimentación de estado se considera que todos los estados son accesibles, que se pueden medir y realimentar. Se desea que el sistema tenga un sobretiro no mayor al 15% y que se estabilice en un tiempo de 4 segundos.

El 15% de sobretiro máximo implica un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.5^1$ y asumiendo que el tiempo de estabilización se consigue en un valor igual a cuatro veces la constante de tiempo, se tiene:

$$4\tau = 4/\zeta W_n = 4 \text{ segundos, lo que implica que } W_n = 2$$

Para estos valores de ζ y W_n , el polinomio característico

1. OGATA K. Ingeniería de Control Moderno, Página 250.

de la función de transferencia con realimentación de estado tiene un factor de segundo orden de la forma:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2s + 4$$

Esto implica que se tienen dos polos conjugados en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Como el orden del sistema es tres, el polinomio característico deberá ser también de tercer orden (tener 3 raíces), por lo tanto para asegurar el predominio de los polos complejos se toma un tercer polo en el eje real cuya magnitud sea seis veces mayor que la parte real de los polos complejos - seis veces más a la izquierda en el plano s -, de modo que este polo casi no tenga efecto en la respuesta transitoria del sistema. Se tendrán polos entonces en:

$$\left. \begin{array}{l} s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \\ s_3 = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} s^2 + 2s + 4 \\ s + 6 \\ \hline s^3 + 2s^2 + 4s \\ + 6s^2 + 12s + 24 \\ \hline s^3 + 8s^2 + 16s + 24 \end{array} \quad (5.10)$$

El programa desarrollado para diseño de realimentación de estado dará los valores adecuados de K y \underline{k}^T para obtener la respuesta arriba especificada y error de posición igual a cero.

Si se desean además conocer las funciones internas de transferencia se pueden definir vectores \underline{c}^T ficticios como sigue:

Para obtener:

$$X_2(S)/U(S) \quad \text{se define:} \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3(S)/U(S) \quad \text{se define:} \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los resultados son los siguientes (ver páginas 121 a 123) y se resumen a continuación:

La función de transferencia tiene la forma: $G(s) =$

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{S^3 + 5S^2 + 4S} = \frac{1}{(S + 4)(S + 1)S}$$

En cuanto a las funciones internas de transferencia (cálculo de salidas ficticias)

$$\frac{X_2(S)}{U(S)} = \frac{S}{(S + 4)(S + 1)S} = \frac{1}{(S + 4)(S + 1)}$$

$$\frac{X_3(S)}{U(S)} = \frac{S(S + 1)}{(S + 4)(S + 1)S} = \frac{1}{S + 4}$$

De aquí se puede obtener, por ejemplo,

$$\frac{X_2(S)}{X_3(S)} = \frac{1}{S + 1}$$

Para la realimentación de estado:

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

17-JUL-82 18:43:

REALIMENTACION DE ESTADO

CONTROL DE POSICION DE UN MOTOR DC

DATOS ALMACENADOS EN EL ARCHIVO: MOTORDC

ORDEN DEL SISTEMA: N= 3

MATRIZ A

=====

0.000000	1.000000	0.000000
0.000000	-1.000000	1.000000
0.000000	0.000000	-4.000000

VECTOR B

=====

0.000000	0.000000	1.000000
----------	----------	----------

VECTOR C

=====

1.000000	0.000000	0.000000
----------	----------	----------

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO

=====

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^3 = 1.00000000
COEF. DE S^2 = 5.00000000
COEF. DE S^1 = 4.00000000
COEF. DE S^0 = 0.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	0.00000000	0.00000000
RAIZ <2>=	-1.00000000	0.00000000
RAIZ <3>=	-4.00000000	0.00000000

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^0 = 1.00000000

REALIMENTACION DE ESTADO

=====

DISEÑO

=====

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE Hequivalente ***

COEF. DE S^2 = 0.12500000

COEF. DE S^1 = 0.50000000

COEF. DE S^0 = 1.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=

-2.00000000

2.00000000

RAIZ <2>=

-2.00000000

-2.00000000

*** COEFICIENTES DE REALIMENTACION ***

k<1>= 1.00000000

k<2>= 0.37500000

k<3>= 0.12500000 $\approx \frac{1}{8}$

318

*** GANANCIA ***

G= 24

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO CERRADO ***

COEF. DE S^3 = 1.00000000

COEF. DE S^2 = 8.00000000

COEF. DE S^1 = 16.00000000

COEF. DE S^0 = 24.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=

-1.00000000

1.73205081

RAIZ <2>=

-1.00000000

-1.73205081

RAIZ <3>=

-6.00000000

0.00000000

*** MAXIMO ERROR NORMALIZADO (verificacion) ***

E1= 7.105427358E-15

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 0.375 = 3/8$$

$$k_3 = 0.125 = 1/8$$

$$H_{eq} = 0.125 s^2 + 0.5s + 1 = \frac{1}{8} (s^2 + 4s + 8) = \frac{k_3 s^2 + (k_3 + 2k_2)s + 1}{2}$$

mal

$$\text{cuyas raíces son } s_{1,2} = -2 \pm j2$$

Como era de esperar, el polinomio característico de la función de transferencia del sistema, una vez hecha la realimentación de estado, tiene sus raíces en los puntos antes especificados, esto es:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$$

$$s_3 = -6$$

y el polinomio característico es:

$$s^3 + 8s^2 + 16s + 24$$

entonces la función de transferencia del sistema realimentando todos los estados queda:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{24}{s^3 + 8s^2 + 16s + (24)} = \frac{24}{(s^2 + 2s + 4)(s + 6)}$$

260 K + K1

para lograr las especificaciones deseadas de sobretiro y estabilización.

Puede apreciarse la respuesta del sistema a una entrada escalón en la figura (5.1).

De la ecuación (3.70) se puede determinar el error de velocidad

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{2}{3}$$

Es posible trazar el lugar de las raíces en forma relativamente fácil para un sistema con realimentación de estado por medio de la función

$$KG(S) H_{eq}(S) = \frac{K}{8} \frac{S^2 + 4S + 8}{S(S+1)(S+4)} = \frac{K(S+2-j2)(S+2+j2)}{8S(S+1)(S+4)}$$

Un análisis de los lugares de las raíces con realimentación unitaria y con realimentación de estado, que se muestra en las figuras (5.2) y (5.3) respectivamente revela los hechos siguientes:

Con valores grandes de ganancia el sistema con realimentación unitaria es inestable, además toda variación de ganancia cambia apreciablemente la posición de las raíces dominantes y por tanto la respuesta del sistema, es decir, tiene alta sensibilidad a los cambios de ganancia.

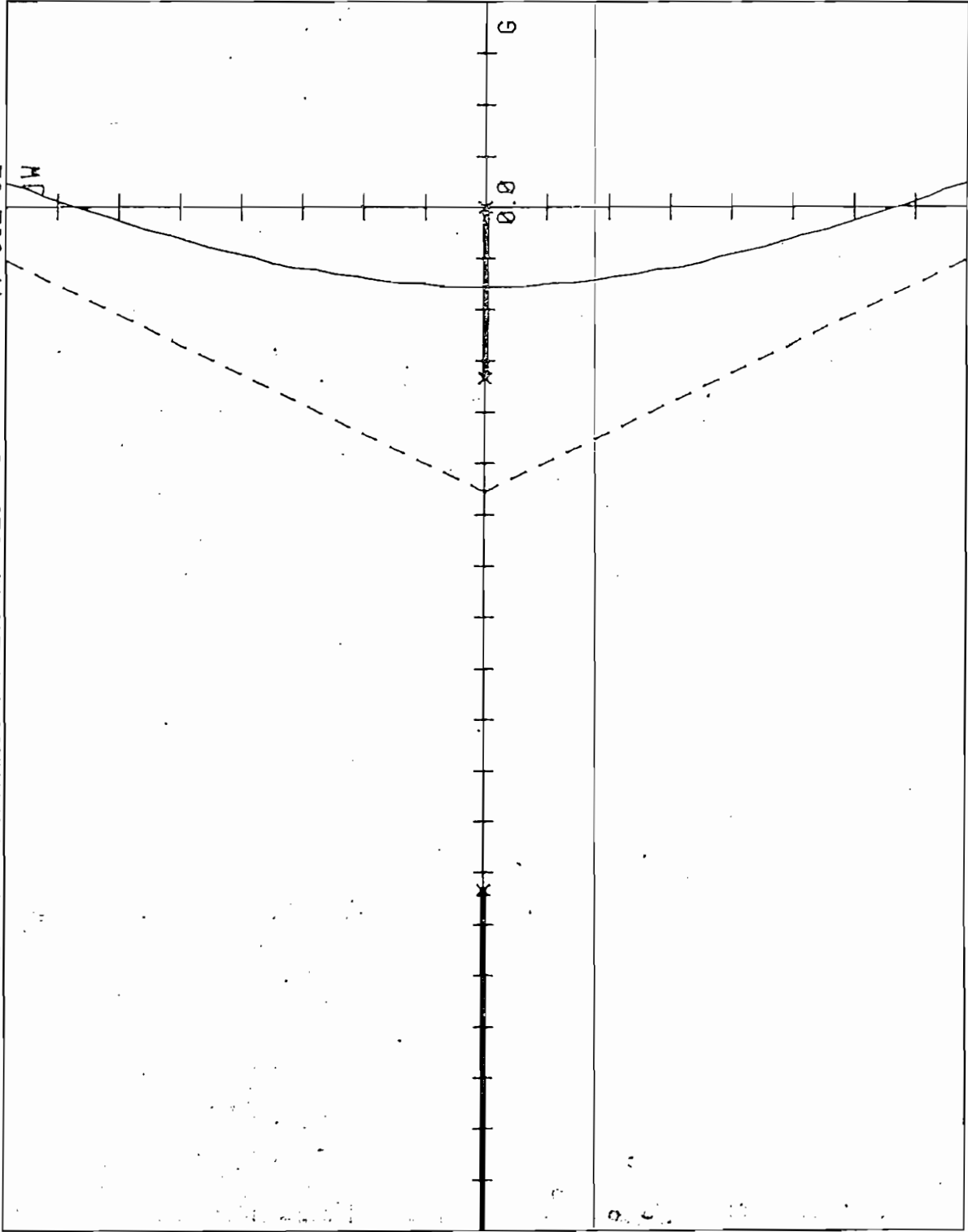
Se había visto que si se hace $\underline{k} = \underline{c}$, es lo mismo que tener una realimentación unitaria. Usando los programas implementados y con esta restricción se puede hacer un análisis del sistema para



Fig. 5.1. Respuesta del control de posición de un motor de con realimentación de estado a una entrada escalón

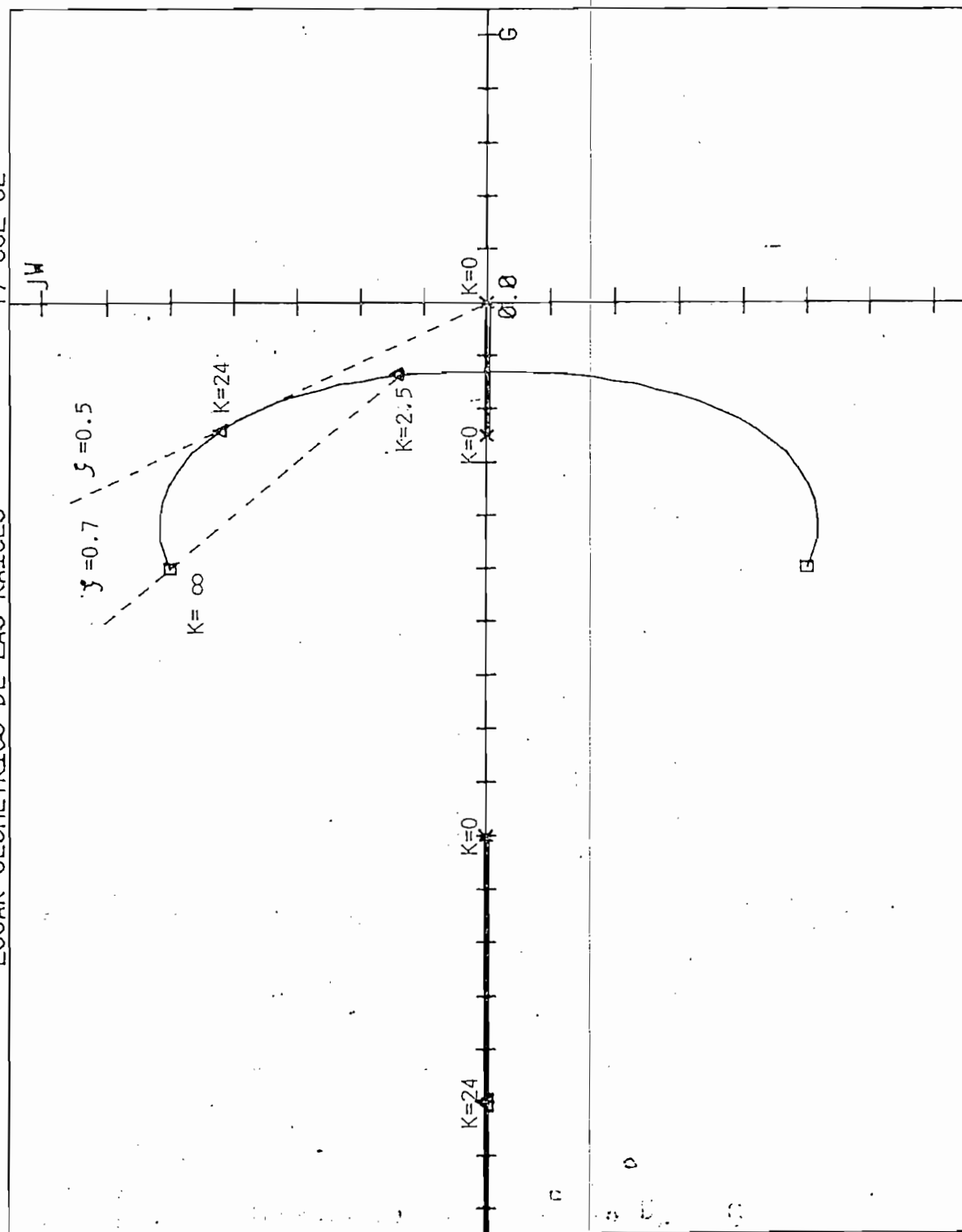
17-JUL-82

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES



x=POLO o=CERO | División = 0.3 Unidades Archivo: @CI/MOTDCI

Fig 5.2: Control de posición del motor dc con real. unitaria



x=POLO o=CERO

1 División = 0.4 Unidades

Archivo:ECI/MOTDC

fig 5.3: Control de posición del motor dc con real. de estado

realimentación unitaria con los siguientes valores:

$$K = 24$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = 0$$

Se observa que, como resultado, (pag 131) el polinomio característico de lazo cerrado tiene raíces en el semiplano derecho de S , por esta razón se hace inestable el sistema para ese valor de ganancia ($k = 24$). Esto es lo que se esperaba, ya que el valor de ganancia crítica para este sistema es $K_c = 20$ cuando se tiene realimentación unitaria.

El sistema con realimentación de estado, en cambio, es estable para todo valor de K mayor que cero. Aún más, se ve que $\zeta = 0.5$ es aproximadamente el mínimo valor de factor de amortiguamiento que se puede conseguir. Para $K = 24$, que es el valor de ganancia calculada para las especificaciones deseadas, da aproximadamente el mínimo valor de amortiguamiento.

Además, en el lugar de las raíces de la figura (5.3) se observa que conforme aumenta K , el factor de amortiguamiento se acerca al valor máximo de $\zeta = 0.7$, con lo cual se tiene todavía una respuesta aceptable del sistema a una entrada escalón; además de esto, si K se incrementa, W_n (distancia del origen a los polos de lazo cerrado) también lo hace y por lo tanto la respuesta del sistema será más

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

17-JUL-82 20:35:55

REALIMENTACION DE ESTADO

ANALISIS DEL CONTROL DE POSICION DEL MOTOR DC CON $k=C$ (real, unit)

ORDEN DEL SISTEMA: $N=3$

MATRIZ A

=====

0.000000	1.000000	0.000000
0.000000	-1.000000	1.000000
0.000000	0.000000	-4.000000

VECTOR B

=====

0.000000	0.000000	1.000000
----------	----------	----------

VECTOR C

=====

1.000000	0.000000	0.000000
----------	----------	----------

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO

=====

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE $S^3= 1.00000000$
COEF. DE $S^2= 5.00000000$
COEF. DE $S^1= 4.00000000$
COEF. DE $S^0= 0.00000000$

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	0.00000000	0.00000000
RAIZ <2>=	-1.00000000	0.00000000
RAIZ <3>=	-4.00000000	0.00000000

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE $S^0= 1.00000000$

REALIMENTACION DE ESTADO

ANALISIS

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE Hequivalente ***

COEF. DE S^0 = 1.00000000

*** COEFICIENTES DE REALIMENTACION ***

$k_{<1>} = 1.00000000$

$k_{<2>} = 0.00000000$

$k_{<3>} = 0.00000000$

*** GANANCIA ***

$G = 24$

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO CERRADO ***

COEF. DE S^3 = 1.00000000

COEF. DE S^2 = 5.00000000

COEF. DE S^1 = 4.00000000

COEF. DE S^0 = 24.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ $<1>$ =

0.06592837

2.16155577

RAIZ $<2>$ =

0.06592837

-2.16155577

RAIZ $<3>$ =

-5.13185674

0.00000000

*** MAXIMO ERROR NORMALIZADO (verificacion) ***

$E1 = 0$

rápida.

Por otro lado, si K decrece al valor $K = 2.5$ el sistema tendrá un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.7$ pero W_n será más pequeño y como consecuencia la respuesta será más lenta.

Por esta razón se puede confiar en que el sistema tenga una respuesta válida o muy cercana a la esperada para un notable rango de ganancia K .

Esta insensibilidad se debe al hecho de que las dos raíces dominantes deseadas están próximas a los dos ceros de $H_{eq}(S)$ siendo la tercera raíz no dominante.

Debe notarse que para todos los valores de K considerados, el tercer polo de lazo cerrado se mantiene lo suficientemente alejado de los dominantes, de modo que siempre la respuesta estará determinada por los dos polos complejos, como se deseaba.

En general, al seleccionar los polos de $Y(S)/R(S)$ para satisfacer las especificaciones dadas, se suele elegir un par de polos dominantes complejos conjugados. Los demás $n - 2$ polos se sitúan muy a la izquierda de aquellos o próximos a los ceros con el fin de asegurar el predominio de dichos polos complejos. Esta aproximación puede dar lugar a valores grandes para K y para los k_i . Es posible tener más de un par de polos complejos para satisfacer las especificaciones deseadas; si ellos se sitúan bien, se puede reducir

el sobretiro y el tiempo de estabilización.

La baja sensibilidad conseguida con la realimentación de estado se puede apreciar observando la figura (5.4) en la que se ve la respuesta del sistema del presente ejemplo para la ganancia calculada $K = 24$ y para $K = 100$.

Una forma de entender el efecto de un estado inaccesible es haciendo uno de los coeficientes de realimentación de estado (k_i) igual a cero. El efecto de esto puede verse en el lugar de las raíces, pues el diseñador no tendrá control completo sobre la localización de los ceros de $G(S)H_{eq}(S)$, de aquí que puede darse el caso de que se tengan ceros en el semiplano derecho de S , y si es así, el sistema será inestable para valores grandes de ganancia K .

Todo esto puede ilustrarse considerando, en el presente ejemplo, a X_3 como un estado inaccesible. Esto significa que se deben hacer las siguientes restricciones:

$$K = 24$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 3/8$$

$$k_3 = 0$$

Haciendo un análisis de la realimentación de estado para estos valores se obtienen los siguientes resultados: (ver pag 135, 136)

$$H_{eq} = 0.375S + 1 = \frac{3}{8}(S + \frac{8}{3})$$

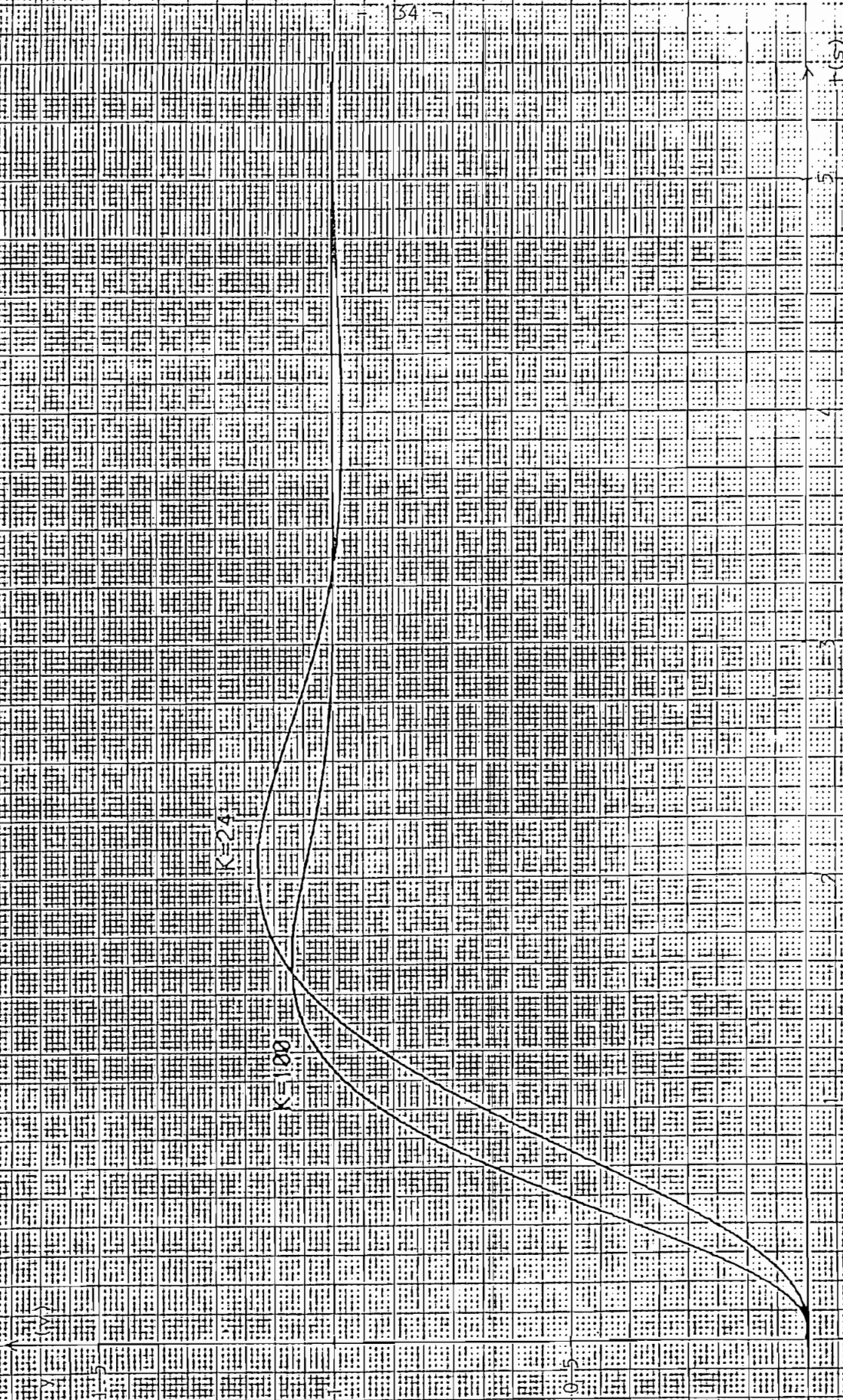


Fig. 5.4. Respuestas del sistema de control de posición del motor.

de con distintos valores de ganancia K

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

17-JUL-82 18:48:

REALIMENTACION DE ESTADO

ANALISIS DEL CONTROL DE POSICION DE UN MOTOR DC SI X3 ES INACCESIBLE

DATOS ALMACENADOS EN EL ARCHIVO: MOTORDCX3

ORDEN DEL SISTEMA: N= 3

MATRIZ A

=====

0.000000	1.000000	0.000000
0.000000	-1.000000	1.000000
0.000000	0.000000	-4.000000

VECTOR B

=====

0.000000	0.000000	1.000000
----------	----------	----------

VECTOR C

=====

1.000000	0.000000	0.000000
----------	----------	----------

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO

=====

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^3 = 1.00000000
COEF. DE S^2 = 5.00000000
COEF. DE S^1 = 4.00000000
COEF. DE S^0 = 0.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	0.00000000	0.00000000
RAIZ <2>=	-1.00000000	0.00000000
RAIZ <3>=	-4.00000000	0.00000000

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^0 = 1.00000000

REALIMENTACION DE ESTADO

=====

ANALISIS

=====

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE Hequivalente ***

COEF. DE S^1 = 0.37500000

COEF. DE S^0 = 1.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=

-2.66666667

0.00000000

*** COEFICIENTES DE REALIMENTACION ***

$k_{<1>}$ = 1.00000000

$k_{<2>}$ = 0.37500000

$k_{<3>}$ = 0.00000000

*** GANANCIA ***

G = 24

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO CERRADO ***

COEF. DE S^3 = 1.00000000

COEF. DE S^2 = 5.00000000

COEF. DE S^1 = 13.00000000

COEF. DE S^0 = 24.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=

-0.86545590

2.56758305

RAIZ <2>=

-0.86545590

-2.56758305

RAIZ <3>=

-3.26908819

0.00000000

*** MAXIMO ERROR NORMALIZADO (verificacion) ***

E1 = 0

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{24}{S^3 + 5S + 13S + 24}$$

Los polos de esta función de transferencia $Y(S)/R(S)$ están localizados en el semiplano izquierdo de S , por lo tanto el sistema sigue siendo estable.

El lugar de las raíces para $G(S)H_{eq}(S) = \frac{3K}{8} \frac{(S+8/3)}{S(S+1)(S+4)}$ se muestra en la figura (5.5), en donde se observa que ahora sólo existe un cero finito en $S = -\frac{8}{3}$. Dos ceros de lazo abierto están en $S = \infty$ los mismos que no se pueden controlar ajustando el coeficiente de realimentación k_2 al cual se tiene acceso.

El resultado son dos ramales que van al infinito con un ángulo de $\pm 90^\circ$. Para valores grandes de K , los dos polos dominantes del sistema harán que el factor de amortiguamiento se aproxime a cero, por lo que se debe esperar una respuesta muy oscilatoria para valores altos de ganancia, a pesar de que el sistema será estable para valores de $K > 0$.

Este análisis se puede llevar aún más lejos considerando que tanto X_2 como X_3 son inaccesibles, haciendo entonces $k_2 = k_3 = 0$. Este es el caso en que solamente se realiza la realimentación de la salida a la entrada. El lugar de las raíces ya se lo vió en la figura (5.2) en donde se observó que existen tres ceros en el infinito y dos ramales del lugar de las raíces que van al semiplano derecho de S para $K \rightarrow \infty$. Se puede decir, entonces, que conforme menos estados se puedan alcanzar, menores serán las posibilidades de obtener buenas

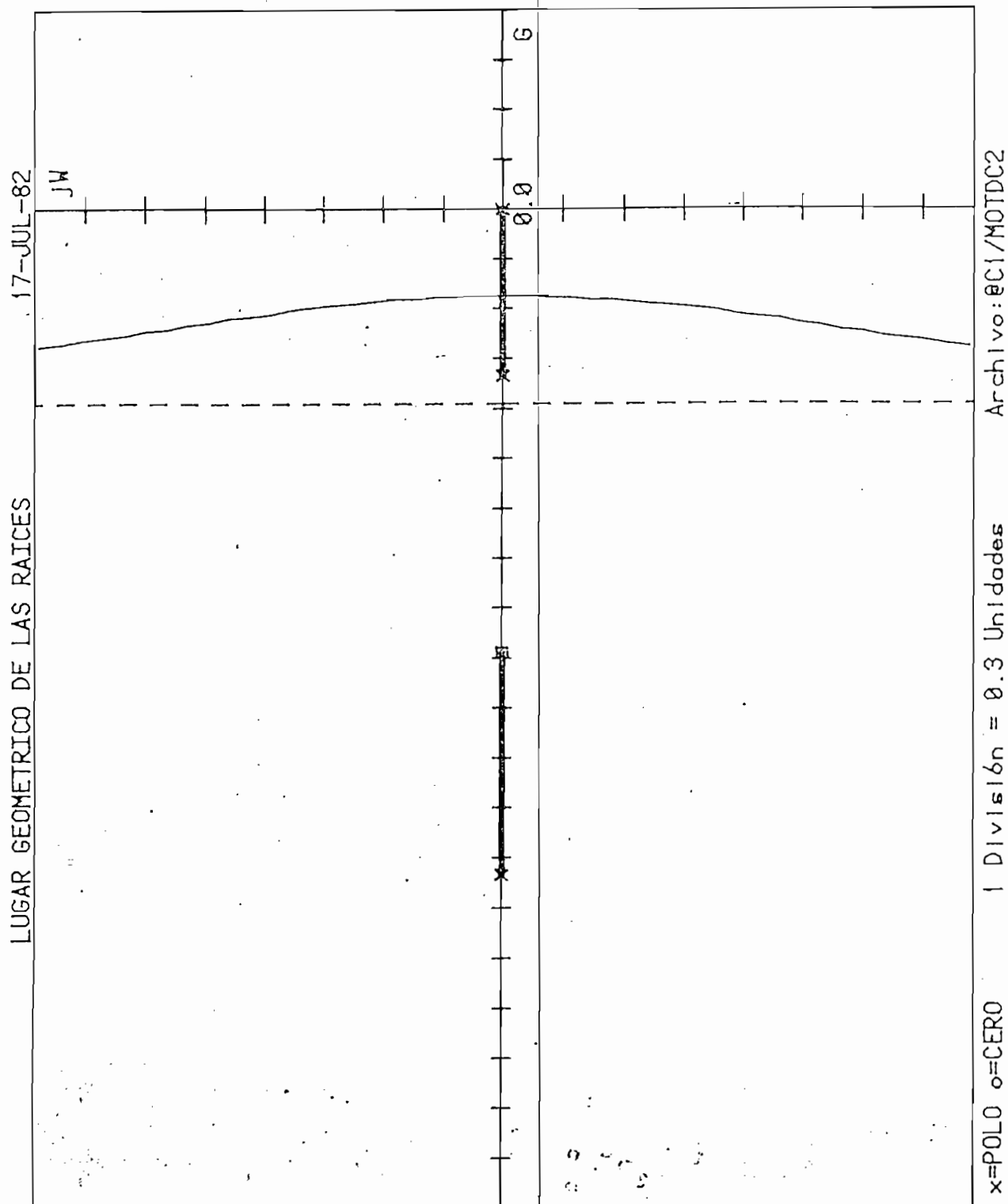


fig 5.5: Control de posición del motor dc sin realimentar X3

propiedades de estabilidad.

En la figura (5.6) se pueden observar respuestas del sistema a una entrada escalón, con ganancia $K = 24$, con el fin de analizar el efecto de los estados inaccesibles. Las curvas correspondientes son:

- 1.- Con realimentación de estado: $k_1=1$, $k_2=3/8$ y $k_3=1/8$
- 2.- x_3 inaccesible: $k_1=1$, $k_2=3/8$ y $k_3=0$
- 3.- x_2 inaccesible: $k_1=1$, $k_2=0$ y $k_3=1/8$
- 4.- x_2 y x_3 inaccesibles (realimentación unitaria):
 $k_1=1$, $k_2=k_3=0$

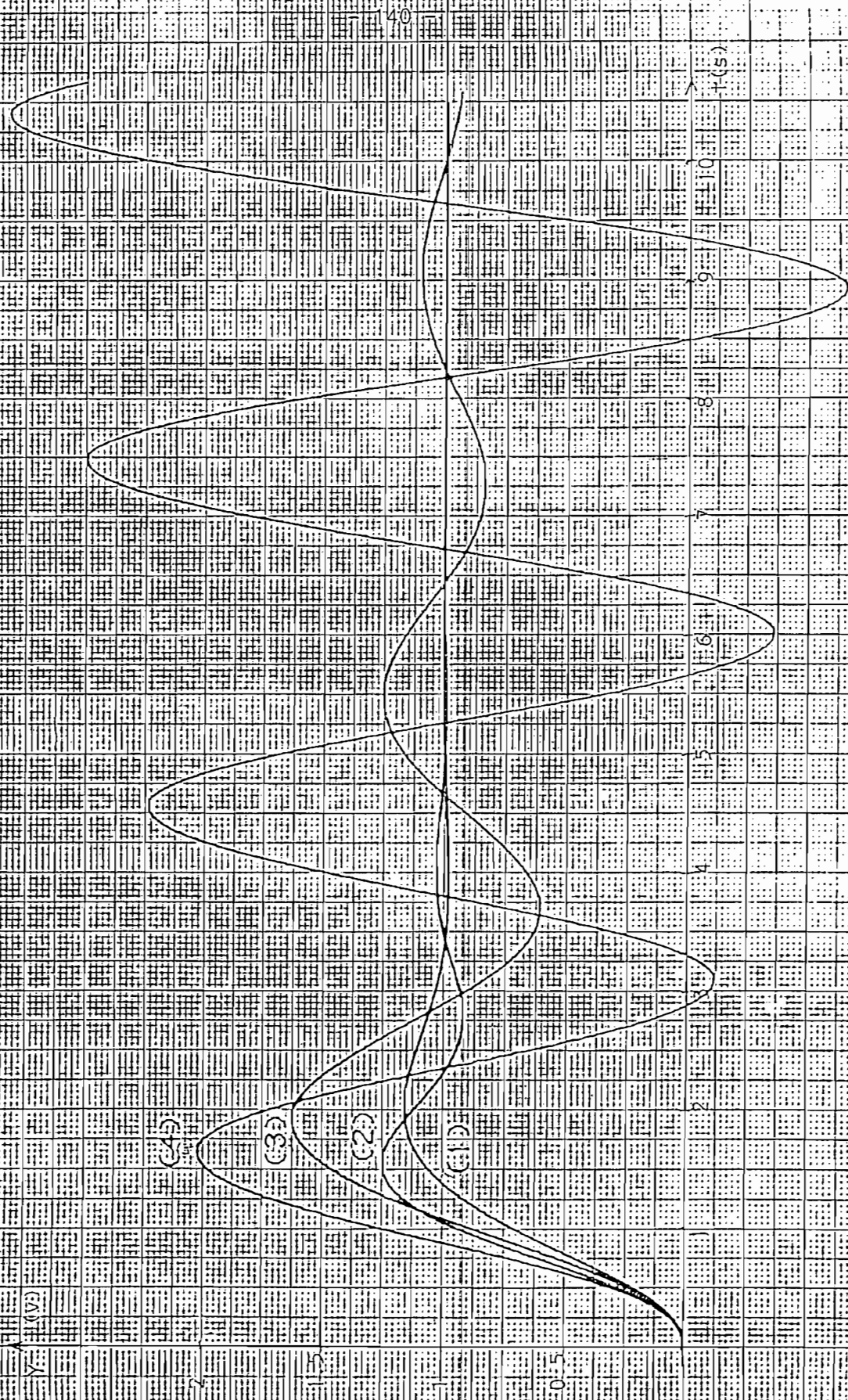


fig 5.6. Respuestas de control de posición de un motor de a. una entrada escalón con distintas condiciones de realimentación

Ejemplo 2.

Diseño de un autopiloto simplificado para canal vertical
(en condiciones de aterrizaje)¹

El grupo de ecuaciones que describen el canal vertical de un avión, luego de una linealización, son:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_A &= q \\ \dot{q} &= K_2 \left[C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta} \delta_e + K_1 C_{Mq} q \right] \\ \dot{\alpha} &= q + K_3 \left[C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta} \delta_e \right] \\ \dot{\delta}_e &= -20 \delta_e + 20u\end{aligned}\quad (5.11)$$

donde:

θ_A = ángulo de elevación o inclinación de la nariz del
avión (giro vertical)(rad)

q = variación de θ_A en el tiempo (rad/seg)

$K_1 = C/2V_T$

$K_2 = QSC/I_y$

$K_3 = -SQ/mV_T$

Q = presión dinámica (lb/pie²)

S = área efectiva del ala (pie²)

C = cuerda aereodinámica media (pie)

m = masa del avión (lb/pie/seg²)

I_y = momento de inercia del avión sobre el eje lateral

α = ángulo de ataque (rad)

δ_e = deflexión del elevador (rad)

V_T = velocidad del avión (pie/seg)

u = entrada de control

$C_{m\alpha}$ = cambio en el coeficiente del momento de giro vertical con la variación del ángulo de ataque (1/rad)

$C_{m\delta}$ = cambio en el coeficiente del momento de giro vertical con la variación de la deflexión del elevador (1/rad)

C_{mq} = cambio del momento de giro vertical con la variación de velocidad de inclinación o elevación (1/rad)

$C_{L\alpha}$ = cambio en el coeficiente de sustentación o elevación con los cambios del ángulo de ataque (1/rad)

$C_{L\delta}$ = cambio en el coeficiente de sustentación o elevación con los cambios en la deflexión del elevador (1/rad)

definiendo el vector de estado como sigue:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ q \\ x \\ \delta_e \end{bmatrix}$$

se puede obtener la representación del problema en variables de estado:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 K_2 C_M & K_2 C_M & K_2 C_M \\ 0 & 1 & K_3 C_L & K_3 C_L \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Basándose en una altura de 500 pies, aproximadamente a 260 nudos y tomando valores típicos para ciertos parámetros, la matriz A queda:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.856 & -2.737 & -8.212 \\ 0 & 1 & -0.521 & -0.077 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

Como ya se indicó estos valores y las ecuaciones (5.11) se tomarán de la referencia citada en la pag 141.

Con estos datos, la función de transferencia de lazo abierto que se obtiene es: (ver pag 144, 145).

$$G(s) = \frac{-164.24(s + 0.4953)}{s(s + 20)(s + 0.6885 + j1.646)(s + 0.6885 - j1.646)}$$

Se desea que el sistema tenga un sobretiro menor que el 15% y un tiempo de estabilización menor que 4 segundos. Para cumplir ambas condiciones, el sistema debería tener un par de polos complejos conjugados en $s = -1.5 \pm j1.5$, para los cuales $\zeta = 0.707$ y $W_n^2 = 4.5$.

Otro polo se sitúa en $s = -0.5$ con el fin de anular el cero que está en $s = -0.4953$, y por último, el otro polo que falta, con el

REALIMENTACION DE ESTADO

DISENO DE UN AUTOPILOTO PARA EL CANAL VERTICAL DE UN AVION

DATOS ALMACENADOS EN EL ARCHIVO: AUTOPILOT

ORDEN DEL SISTEMA: N= 4

MATRIZ A

=====

0.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	-0.856000	-2.737000	-8.212000
0.000000	1.000000	-0.521000	-0.077000
0.000000	0.000000	0.000000	-20.000000

VECTOR B

=====

0.000000	0.000000	0.000000	20.000000
----------	----------	----------	-----------

VECTOR C

=====

1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
----------	----------	----------	----------

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO

=====

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^4 = 1.00000000
 COEF. DE S^3 = 21.37700000
 COEF. DE S^2 = 30.72297600
 COEF. DE S^1 = 63.65952000
 COEF. DE S^0 = 0.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	0.00000000	0.00000000
RAIZ <2>=	-0.68850000	1.64588692
RAIZ <3>=	-0.68850000	-1.64588692
RAIZ <4>=	-20.00000000	0.00000000

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^1 = -164.24000000
 COEF. DE S^0 = -81.35406000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	-0.48573444	0.00000000
-----------	-------------	------------

REALIMENTACION DE ESTADO

=====

DISEÑO

=====

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE Hequivalente ***

COEF. DE S^3 = -3.83810376
COEF. DE S^2 = -81.85488282
COEF. DE S^1 = -105.92385390
COEF. DE S^0 = -81.35406000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	-0.66345360	0.78717871
RAIZ <2>=	-0.66345360	-0.78717871
RAIZ <3>=	-20.00000000	0.00000000

*** COEFICIENTES DE REALIMENTACION ***

k<1>= 1.00000000
k<2>= 0.47237804
k<3>= -0.65815274
k<4>= -0.19190519

*** GANANCIA ***

G= -0.553137729082

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO CERRADO ***

COEF. DE S^4 = 1.00000000
COEF. DE S^3 = 23.50000000
COEF. DE S^2 = 76.00000000
COEF. DE S^1 = 122.25000000
COEF. DE S^0 = 45.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	-1.50000000	1.50000000
RAIZ <2>=	-1.50000000	-1.50000000
RAIZ <3>=	-20.00000000	0.00000000
RAIZ <4>=	-0.50000000	0.00000000

*** MAXIMO ERROR NORMALIZADO (verificacion) ***

E1= 1.010549669E-14

fin de que su acción sea prácticamente nula sobre la respuesta del sistema, se deja en $s = -20$.

Para estas especificaciones dadas del sistema se obtienen los resultados siguientes para la realimentación de estado: (ver pag 145)

$$K = -0.553$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 0.472$$

$$k_3 = -0.658$$

$$k_4 = -0.192$$

$$H_{eq}(s) = \frac{- (+ 3.838s^3 + 81.855s^2 + 105.924s + 81.35)}{- 164.24(s + 0.4953)}$$

Esto produce la función de transferencia de lazo cerrado siguiente:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{90.825(s + 0.495)}{(s + 0.5)(s + 20)(s + 1.5 + j1.5)(s + 1.5 - j1.5)}$$

La respuesta del sistema a una entrada escalón puede apreciarse en la figura (5.7) , en donde se ve que se logran las condiciones requeridas para el diseño.

Haciendo un estudio del lugar de las raíces con realimentación unitaria presentado en la figura (5.8) se puede apreciar que con esta clase de realimentación, el sistema presentará oscilaciones

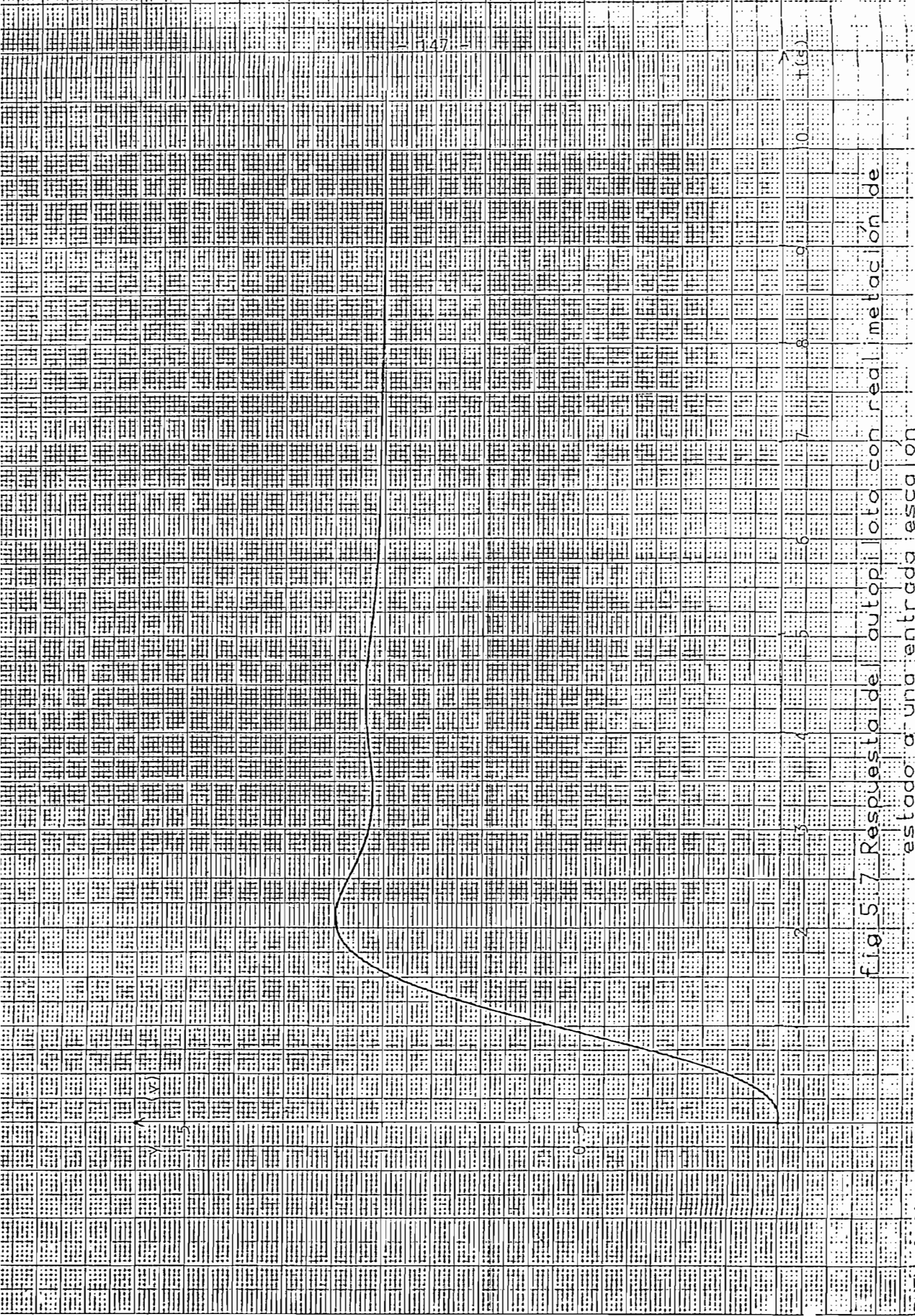
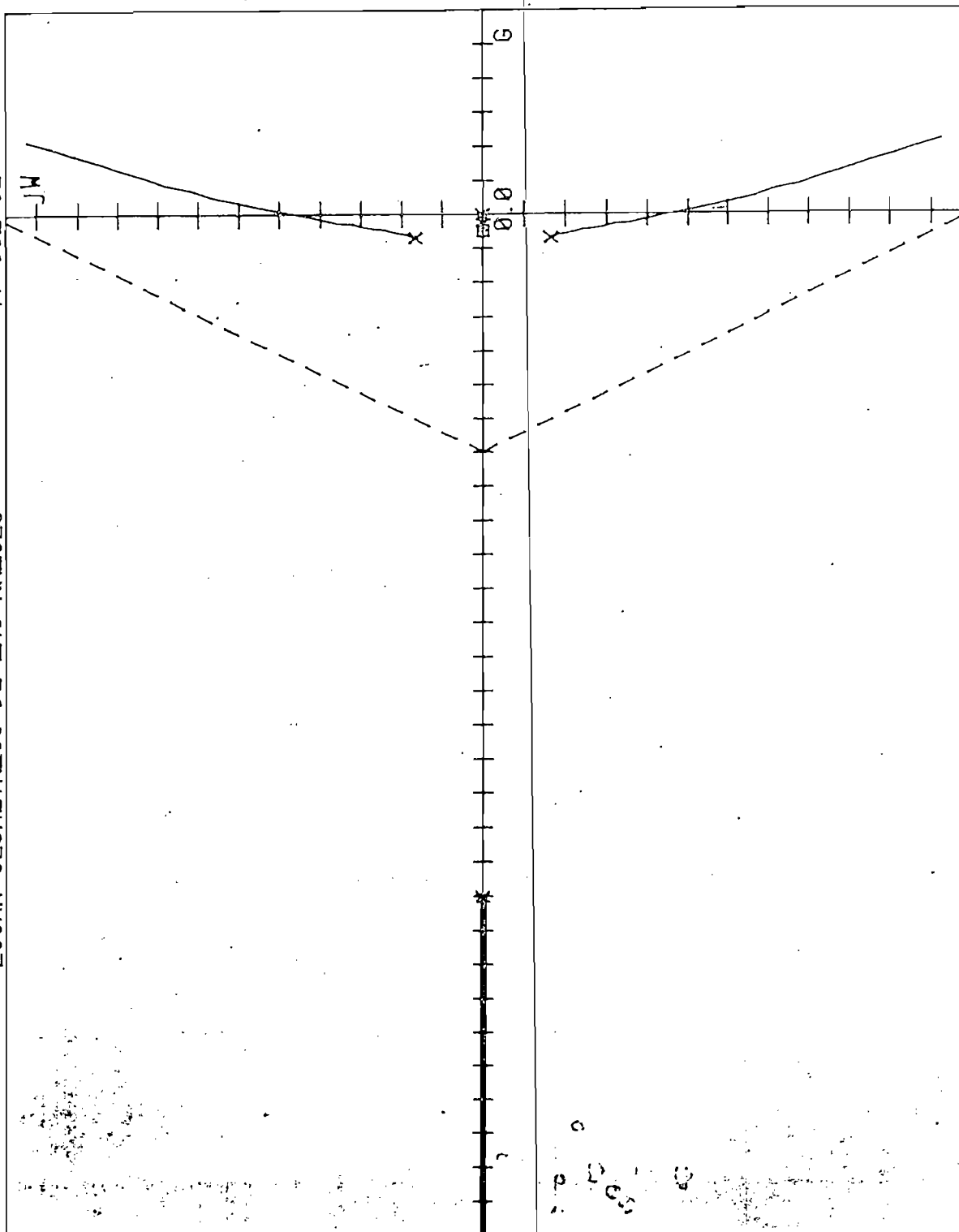


Fig. 5.7 Respuesta del autopioto con realimentación de estado a una entrada escalón

17-JUL-82

LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES



Archivo:EC1/AUTOP1

1 División = 1 Unidades

x=POLO o=CERO

fig 5.8: analisis de un autopiloto con real. unitario

debido al bajo valor de γ que se puede conseguir, además la estabilidad del sistema está supeditada al valor de ganancia que se use.

Con $K = -0.553$ y realimentación unitaria se logra una respuesta como la que se ve en la figura (5.9), lo cual ratifica lo dicho.

Con realimentación de estado, en cambio, se consigue hacer el sistema muy poco sensible a las variaciones de ganancia, esto puede comprobarse viendo la figura (5.10), en donde se tienen respuestas del sistema para $K_1 = -0.553$ para $K_2 = -20$ y para $K_3 = -200$.

El sistema será estable para todo valor de $K < 0$ ya que si se trazaría el lugar de las raíces para

$$KG(s)H_{eq}(s) = \frac{K(-3.838)(s+20)(s+0.66+j0.79)(s+0.66-j0.79)}{s(s+20)(s+0.69+j1.65)(s+0.69-j1.65)} \quad (5.12)$$

se podría apreciar que no existen ramales que van hacia el semiplano derecho de s y que hay uno que va a $-\infty$ con un ángulo de -180° . Los demás ramales empezarán en los polos y terminarán en los ceros de la ecuación (5.12) y todos ellos están en el semiplano izquierdo de s .

Se toma a X_3 (ángulo de ataque α) como inaccesible, o sea que no se puede medir, para ver cuál es el efecto de no poder realimentar este estado. Para esto se hacen las restricciones siguientes:

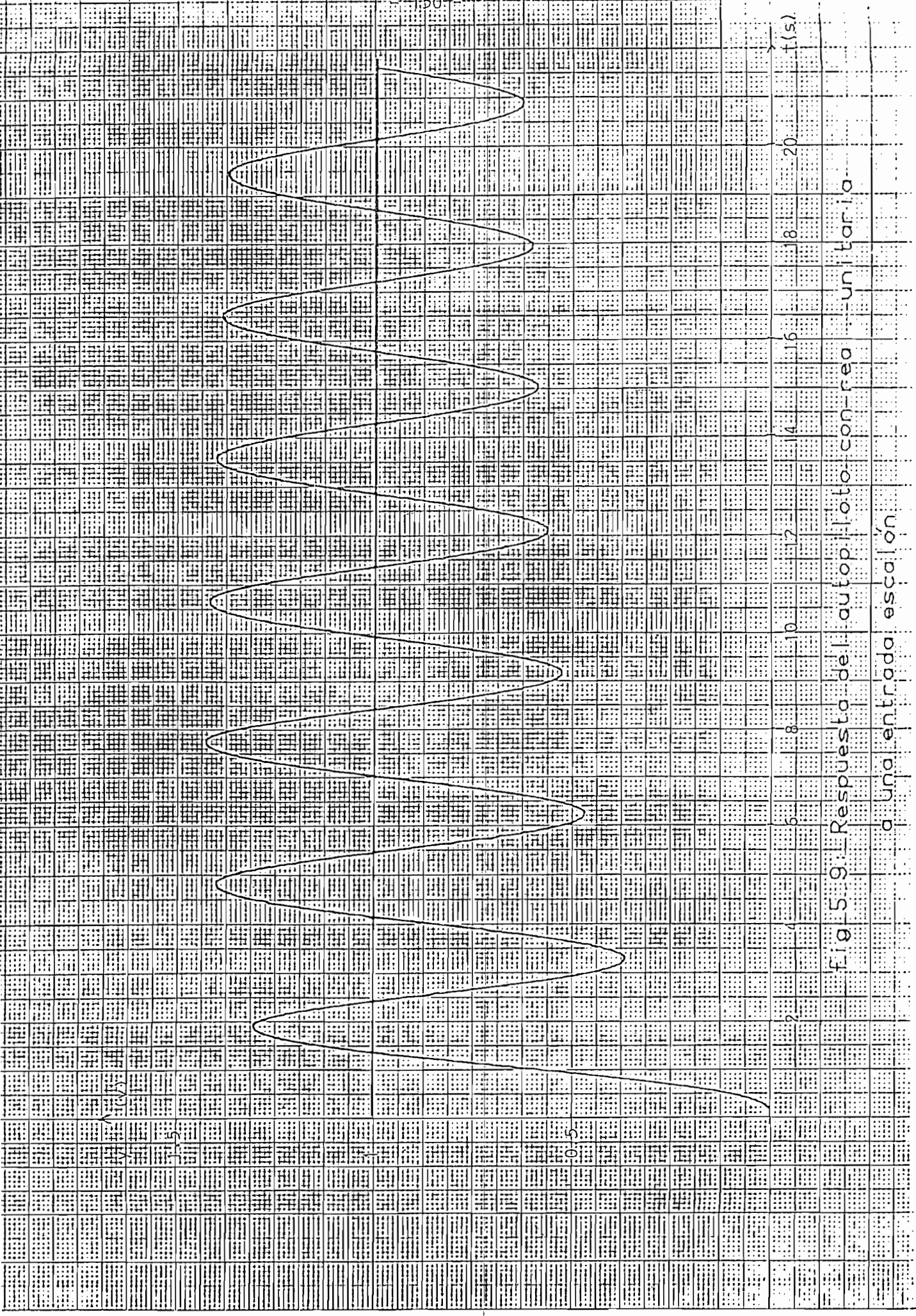


Fig 5-9. Respuesta del autopiloto con real unitario a una entrada escalón

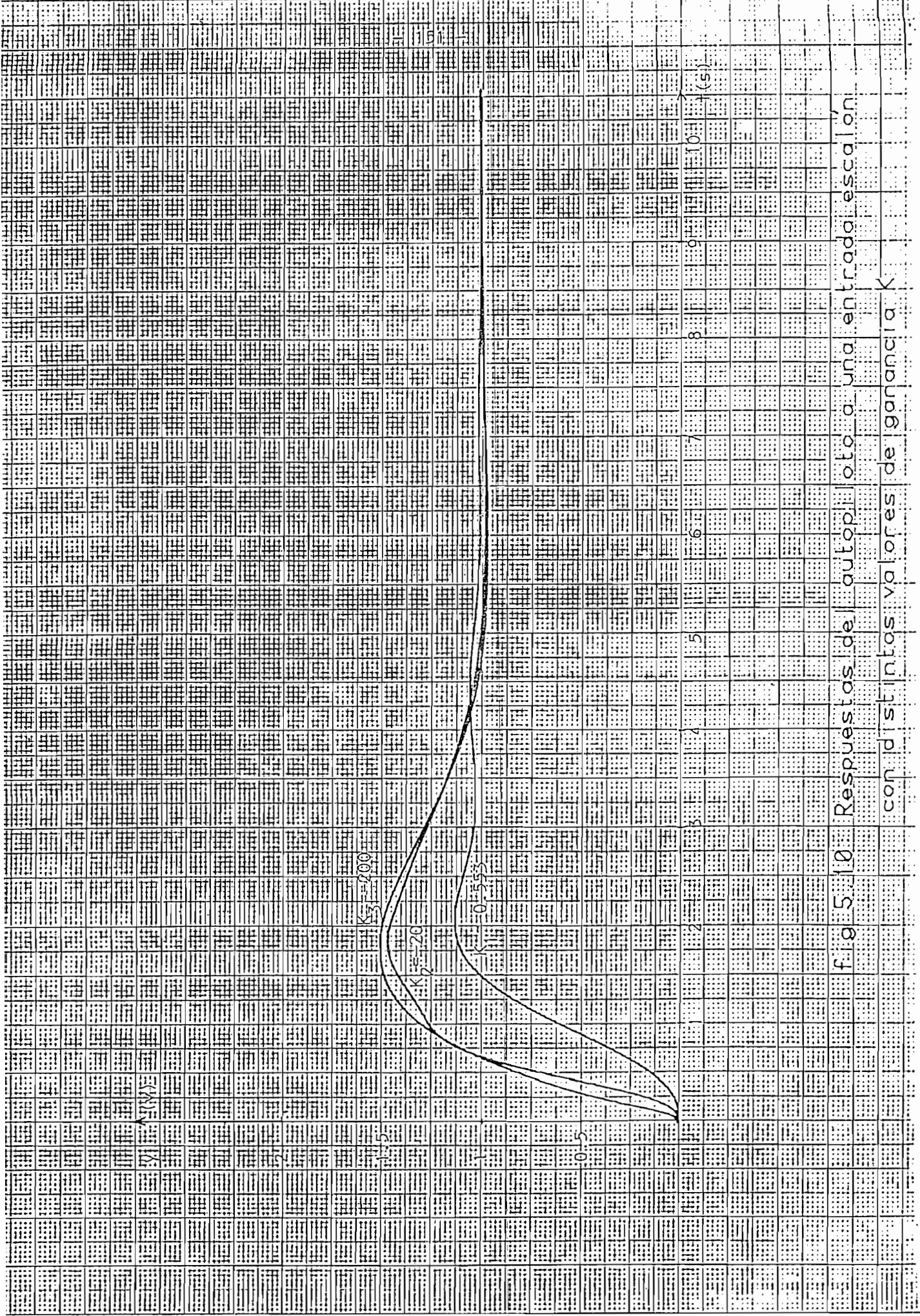


Fig 5.10 Respuestas de autoplato a una entrada escalon con distintos valores de ganancia K

$$K = -0.553$$

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 0.472$$

$$k_3 = 0$$

$$k_4 = -0.192$$

Un análisis del sistema para estos valores de realimentación, da las repuestas siguientes (ver pag 153, 154).

$$H_{eq} = \frac{-3.838(s + 0.4576)(s + 0.48345)(s + 18.65)}{-164.24(s + 0.4953)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{90.825(s + 0.4953)}{(s + 0.276)(s + 20.14)(s + 1.54 \pm j2.4)}$$

Los polos de esta función de transferencia están situados en el semiplano izquierdo de s , por tanto el sistema sigue siendo estable. Y lo será para cualquier valor de ganancia $K < 0$ según se puede apreciar en la figura (5.11) que corresponde al lugar de las raíces de

$$KG(s)H_{eq}(s) = \frac{K(-3.838)(s+0.4576)(s+0.483)(s+18.65)}{s(s+20)(s+0.6885+j1.646)(s+0.6885-j1.646)}$$

(cuando X_3 no es accesible)

El efecto de no realimentar X_3 se puede ver en la figura (5.12) en donde se observa que la respuesta se demora en estabilizarse, por lo tanto, si X_3 no se la puede medir directamente, será

REALIMENTACION DE ESTADO

ANALISIS DEL AUTOPILOTO DISENADO CUANDO X3 NO ES ACCESIBLE

ORDEN DEL SISTEMA: N= 4

MATRIZ A

=====

0.000000	1.000000	0.000000	0.000000
0.000000	-0.856000	-2.737000	-8.212000
0.000000	1.000000	-0.521000	-0.077000
0.000000	0.000000	0.000000	-20.000000

VECTOR B

=====

0.000000	0.000000	0.000000	20.000000
----------	----------	----------	-----------

VECTOR C

=====

1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
----------	----------	----------	----------

FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO

=====

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^4 = 1.00000000
 COEF. DE S^3 = 21.37700000
 COEF. DE S^2 = 30.72297600
 COEF. DE S^1 = 63.65952000
 COEF. DE S^0 = 0.00000000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	0.00000000	0.00000000
RAIZ <2>=	-0.68850000	1.64588692
RAIZ <3>=	-0.68850000	-1.64588692
RAIZ <4>=	-20.00000000	0.00000000

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***

COEF. DE S^1 = -164.24000000
 COEF. DE S^0 = -81.35406000

LAS RAICES SON:

PARTE REAL

PARTE IMAGINARIA

RAIZ <1>=	-0.49533646	0.00000000
-----------	-------------	------------

REALIMENTACION DE ESTADO

ANALISIS

*** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE Hequivalente ***

COEF. DE S^3 = -3.83810380
COEF. DE S^2 = -82.86843822
COEF. DE S^1 = -214.88646369
COEF. DE S^0 = -81.35406000

LAS RAICES SON:	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
RAIZ <1>=	-0.45764744	0.00000000
RAIZ <2>=	-2.48344906	0.00000000
RAIZ <3>=	-18.64988762	0.00000000

*** COEFICIENTES DE REALIMENTACION ***

k<1>= 1.00000000
k<2>= 0.47237804
k<3>= 0.00000000
k<4>= -0.19190519

*** GANANCIA ***

G= -0.553137729082

*** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO CERRADO ***

COEF. DE S^4 = 1.00000000
COEF. DE S^3 = 23.50000002
COEF. DE S^2 = 76.56063573
COEF. DE S^1 = 182.52133054
COEF. DE S^0 = 45.00000000

LAS RAICES SON:	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
RAIZ <1>=	-0.27577961	0.00000000
RAIZ <2>=	-1.54032615	2.39331047
RAIZ <3>=	-1.54032615	-2.39331047
RAIZ <4>=	-20.14356810	0.00000000

*** MAXIMO ERROR NORMALIZADO (verificacion) ***

E1= 2.491475103E-15

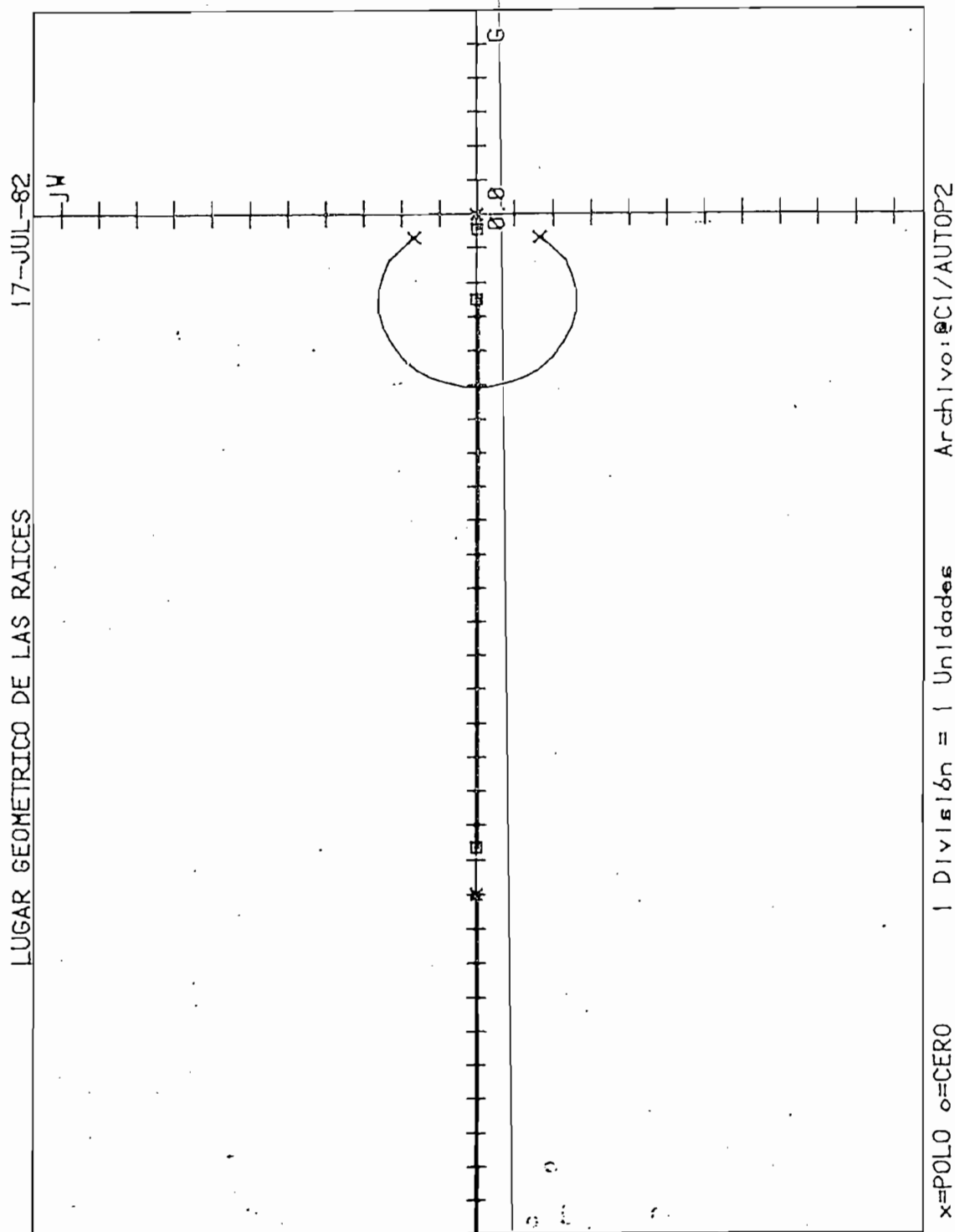
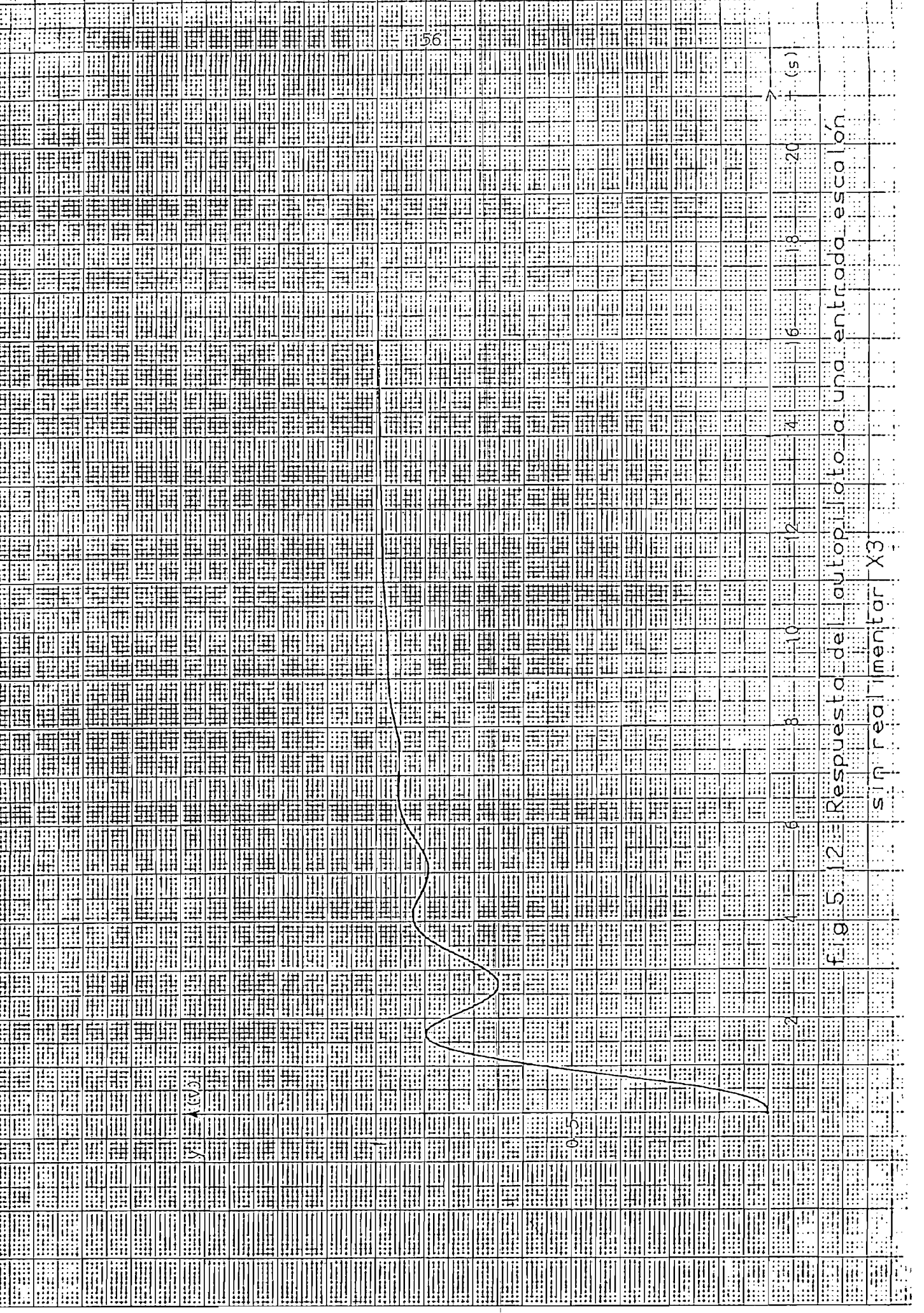


fig 5.11: Analisis del autopiloto en realimentar X3



necesario reconstruir este estado con el fin de alcanzar las especificaciones dadas al inicio del ejemplo.

En la figura (5.13) se pueden observar respuestas del sistema a una entrada escalón, con ganancia $K = -0.553$, con el fin de analizar el efecto de los estados inaccesibles. Las curvas correspondientes son:

- 1.- Con realimentación de estado: $k_1=1$, $k_2=0.472$, $k_3=-0.658$ y $k_4=-0.192$.
- 2.- X_4 inaccesible: $k_1=1$, $k_2=0.472$, $k_3=-0.658$ y $k_4=0$
- 3.- X_3 inaccesible: $k_1=1$, $k_2=0.472$, $k_3=0$ y $k_4=-0.192$
- 4.- X_2 inaccesible: $k_1=1$, $k_2=0$, $k_3=-0.658$ y $k_4=-0.192$

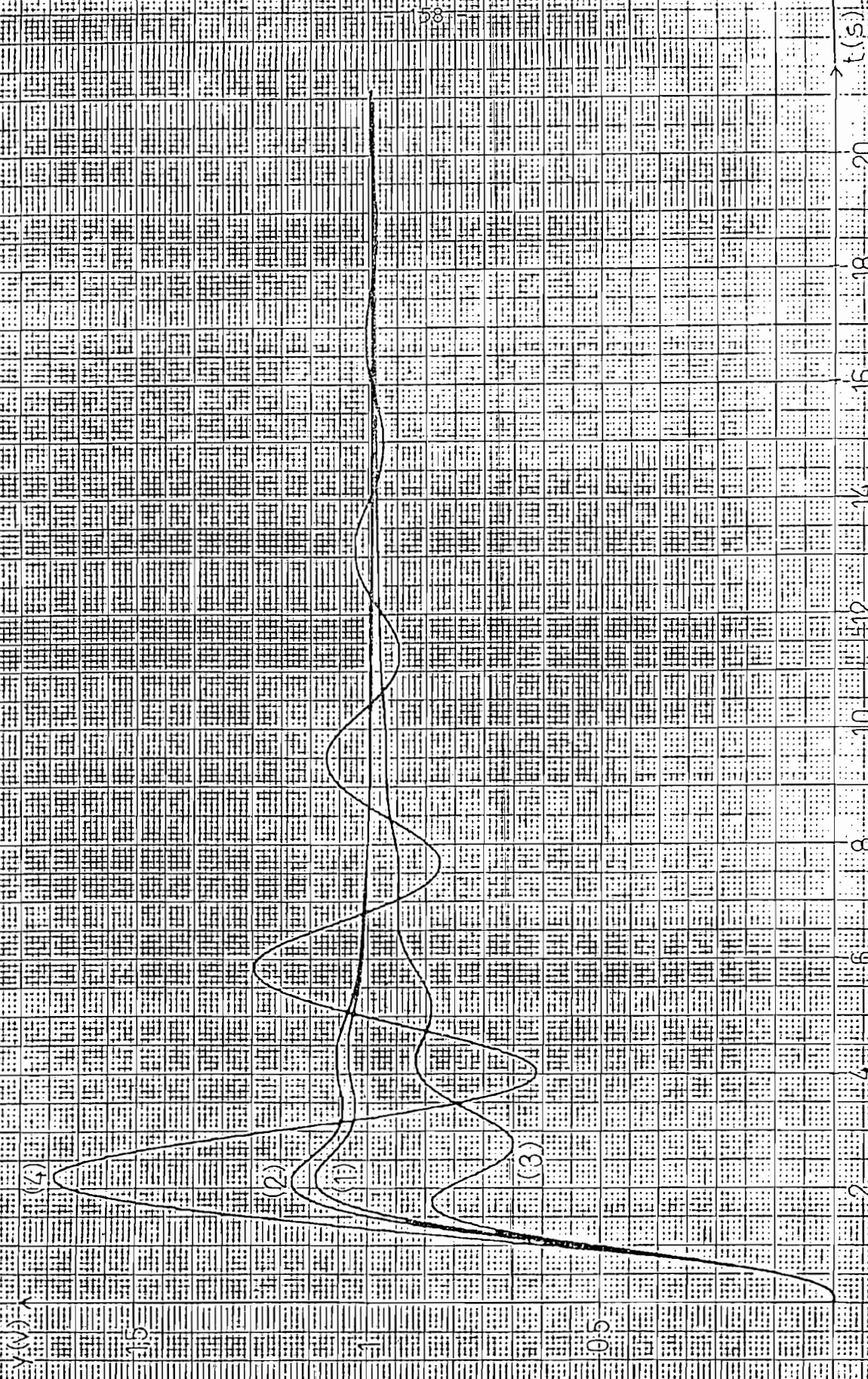


Fig 5.13 Respuestas del autoploto a una entrada escalón con distintas condiciones de realimentación

5.2. CONCLUSIONES

En base al estudio teórico realizado; así como también a los ejemplos desarrollados y resultados obtenidos del computador se puede concluir lo siguiente:

- 1.- La comprensión de varios aspectos presentados en este trabajo requiere un buen conocimiento de Algebra Lineal; sin embargo, no se ha seguido una exposición matemática rigurosa, en el sentido de presentar teoremas, demostraciones, etc: con el fin de permitir al lector el comprender los fundamentos teóricos con facilidad.
- 2.- En el presente trabajo se presenta un método para diseño y análisis de sistemas de control lineales e invariantes en el tiempo, con una sola entrada y una sola salida, sin que exista restricción en cuanto a la forma de las ecuaciones de estado.
- 3.- Se ha tratado un procedimiento para obtener la función de transferencia de un sistema a partir de su representación en el espacio de estado y viceversa.
- 4.- Se pueden conseguir las funciones de transferencia $X_i(s)/X_j(s)$ internas de un sistema representado en

variables de estado, definiendo salidas ficticias por medio de vectores \underline{c}^T que nos den los estados que se requieran como salidas.

5.- Por medio de la realimentación de estado se puede conseguir situar los polos de la función de transferencia de lazo cerrado según las especificaciones que se requieran para la respuesta del sistema.

6.- Además, se puede tener un sistema completamente estable, para cualquier valor de ganancia, si el vector de realimentación \underline{k}^T tiene su elemento $k_n > 0$.

7.- Puede analizarse la estabilidad del sistema trazando el lugar de las raíces de $KG(s)H_{eq}(s)$.

Se han enunciado las conclusiones de este trabajo en forma resumida debido a que se ha hecho un análisis bastante exhaustivo de los efectos de realimentar todos los estados en un sistema en los ejemplos presentados en este capítulo, y de ellos se pueden desprender en forma más clara varias conclusiones.

5.3. RECOMENDACIONES

1.- Se recomienda continuar con el trabajo de análisis y diseño de sistemas de control en el espacio de estado en aspectos tales como:

- Reconstrucción de estados (observadores).
- Análisis y diseño de sistemas discretos de control en el espacio de estado.

El primero fue tratado en este trabajo, pero muy brevemente debido a que su profundización queda fuera del alcance de esta tesis.

2.- Continuar con la elaboración de programas para el análisis y diseño de sistemas de control, con el fin de completar la biblioteca de programas para el efecto.

ANEXO A

LISTADO DE PROGRAMAS

```

1  U0=-1
2  O5=1
4  GO TO 100
8  O1=1
9  GO TO 1000
12 IF O5<>2 THEN 210
13 IF O3=2 THEN 400
14 O1=3
15 GO TO 1000
16 IF O5<>2 THEN 210
17 IF O4=2 THEN 500
18 O1=4
19 GO TO 1000
20 IF O5<>2 THEN 210
21 IF O4<>2 AND O3<>2 THEN 270
22 O1=5
23 GO TO 1000
100 REM      PROGRAMA:          JCGUERRA
110 REM
120 IF U0<>-1 THEN 210
130 REM DEFINIMOS UNIDAD DE DISCO
140 PRINT "LJJUNIDAD EN QUE SE COLOCO EL DISCO?: ";
150 INPUT U0
160 IF U0=1 OR U0=0 OR U0=2 THEN 180
170 GO TO 140
180 CALL "UNIT",U0
190 REM INICIALIZACION
200 REM
210 REM INDICE
220 PRINT "LJJ ***** REALIMENTACION DE ESTADO *****JJJ"
230 PRINT "JTECLA 1.- INDICE DE PROGRAMAS"
240 PRINT "JTECLA 2.- INGRESO, VERIFICACION, CORRECCION,ALMACENAMIENTO
250 PRINT " DE DATOS"
260 PRINT "          Y COMIENZO DEL CALCULO"
270 PRINT
280 PRINT "KJTECLA 3.- CALCULO DE SALIDAS ficticias"
290 PRINT "JTECLA 4.- CALCULO DE REALIMENTACION DE ESTADO (diseno o ";
300 PRINT " analisis)"
310 PRINT "JTECLA 5.- IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS"
320 PRINT "JJJJ          ESCOJA TECLA GGG";
330 END
400 PRINT "LJJYA SE HAN HECHO CALCULOS DE SALIDAS ficticias,"
410 PRINT "J  DESEA DESTRUIRLOS? (SI O NO): ";
420 INPUT D$
430 IF D$="SI" THEN 14
440 GO TO 270
500 PRINT "LJJYA SE HAN HECHO CALCULOS DE REALIMENTACION DE ESTADO,"
510 PRINT "J  DESEA DESTRUIRLOS? (SI O NO): ";
520 INPUT D$
530 IF D$="SI" THEN 18
540 GO TO 270
800 DATA "ENTRADA","CALCBASIC","CALCFICTIC","REALESTADO","SALIDA"
810 RESTORE 800
820 FOR J=1 TO 01

```



```

1000 REM*** PROGRAMA:
1010 O2=1
1020 IF O1<>O2 THEN 100
1030 REM *** INGRESO DE LA PLANTA (MATRIZ A), MATRIZ B Y MATRIZ C ***
1040 REM MATRIZ A ----- DIMENSION NxN
1050 REM VECTOR B ----- DIMENSION N
1060 REM VECTOR C ----- DIMENSION 1xN
1070 DELETE Y$
1080 DIM Y$(100)
1090 N$=" "
1100 REM
1110 Y$="INGRESO, VERIFICACION, CORRECCION DE DATOS Y COMIENZO DEL "
1120 Y$=Y$&"CALCULO"
1130 PAGE
1140 PRINT USING "3X,FA":Y$
1150 PRINT "JJJJ"
1160 PRINT "J"
1170 PRINT "J"
1180 PRINT "J"
1190 PRINT "J"
1200 PRINT "JJJJ"
1210 INPUT K1
1220 GO TO K1 OF 1240,1750,1940,2300,2830
1230 GO TO 1200
1240 PRINT "LJNOMBRE DEL PROBLEMA:J";
1250 INPUT T$
1260 IF LEN(T$)>1 THEN 1280
1270 T$=" "
1280 PRINT "JINGRESE EL ORDEN DE LA MATRIZ A (PLANTA): N=";
1290 INPUT N
1300 REM ***** INGRESO DE A , B Y C *****
1310 DELETE A,B,C
1320 DIM A(N,N),B(N),C(1,N)
1330 PRINT "LINGRESE LA MATRIZ A, POR FILAS"
1340 FOR I=1 TO N
1350 PRINT "JFILA: ";I;"GGJ"
1360 FOR J=1 TO N
1370 PRINT "A(";I;";";J;")= ";
1380 INPUT A(I,J)
1390 NEXT J
1400 NEXT I
1410 PRINT
1420 PRINT "LINGRESE EL VECTOR BJJGG"
1430 FOR I=1 TO N
1440 PRINT "B(";I;";")= ";
1450 INPUT B(I)
1460 NEXT I
1470 PRINT "LINGRESE EL VECTOR C QUE DESCRIBE LA SALIDA DEL SISTEMAJJJ"
1480 FOR I=1 TO N
1490 PRINT "C(";I;";")= ";
1500 INPUT C(1,I)
1510 NEXT I
1520 U1=2
1530 Y$="DATOS ESTAN INGRESADOS"

```

```

1540 PRINT "GGGJJJ      F I N   D E   D A T O S"
1550 REM ***** ARCHIVO DE DATOS *****
1560 PRINT "JJJDESEA ALMACENAR LOS DATOS EN UN ARCHIVO? (SI O NO): ";
1570 INPUT D$
1580 IF D$<>"SI" THEN 1130
1590 PRINT "JNOMBRE DEL ARCHIVO?: ";
1600 INPUT N$
1610 CALL "FILE",U0,N$,X$
1620 IF X$="" THEN 1680
1630 PRINT "JYA EXISTE ESTE ARCHIVO. DESEA DESTRUIRLO? (SI O NO): ";
1640 INPUT D$
1650 IF D$="SI" THEN 1670
1660 GO TO 1590
1670 KILL N$
1680 CREATE N$;2000,0
1690 OPEN N$;1,"F",X$
1700 WRITE #1:N,A,B,C,T$
1710 CLOSE 1
1720 Y$="DATOS ESTAN LISTOS (ALMACENADOS EN ARCH.: "&N$
1730 Y$=Y$&"")
1740 GO TO 1130
1750 REM ***** LECTURA DE DATOS DE ARCHIVO *****
1760 PRINT "JJNOMBRE DEL ARCHIVO QUE DESEA LEER: ";
1770 INPUT N$
1780 CALL "FILE",U0,N$,X$
1790 IF X$="" THEN 1890
1800 OPEN N$;1,"R",X$
1810 READ #1:N
1820 DELETE A,B,C
1830 DIM A(N,N),B(N),C(1,N)
1840 READ #1:A,B,C,T$
1850 CLOSE 1
1860 U1=2
1870 Y$="DATOS ESTAN LEIDOS DE ARCHIVO: "&N$
1880 GO TO 1130
1890 PRINT "JNO EXISTE DICHO ARCHIVO"
1900 PRINT "JDESEA LEER OTRO ARCHIVO? (SI O NO): ";
1910 INPUT D$
1920 IF D$="SI" THEN 1760
1930 GO TO 1140
1940 REM ***** LISTADO DE DATOS *****
1950 U2=32
1960 IF U1=2 THEN 2010
1970 PAGE
1980 PRI "JJ***** PRIMERO INGRESE O LEA LOS DATOS DE UN ARCHIVO ****"
1990 PRINT "J"
2000 GO TO 1140
2010 REM
2020 GOSUB 2040
2030 GO TO 2210
2040 REM ***** SUBROUTINA IMPRESION DE DATOS *****
2050 PRINT @U2: USING "P/FA/":T$
2060 PRINT @U2:"MATRIZ "A": J"
2070 FOR I=1 TO N

```

```

2080 FOR J=1 TO N
2090 PRINT @U2:"
2100 NEXT J
2110 NEXT I
2120 PRINT @U2:"JJVECTOR "B": J"
2130 FOR I=1 TO N
2140 PRINT @U2:"
2150 NEXT I
2160 PRINT @U2:"JJVECTOR "C": J"
2170 FOR I=1 TO N
2180 PRINT @U2:"
2190 NEXT I
2200 RETURN
2210 REM ***** LISTADO EN PAPEL *****
2220 PRINT "GGJJJJDESEA IMPRESION EN PAPEL? (SI_O NO): ";
2230 INPUT D$
2240 IF D$<>"SI" THEN 2290
2250 PRINT "JALISTE EL IMPRESOR (RETURN PARA CONTINUAR)"
2260 INPUT D$
2270 U2=51
2280 GOSUB 2040
2290 GO TO 1130
2300 REM ***** CORRECCION DE DATOS *****
2310 IF U1=2 THEN 2330
2320 GO TO 1970
2330 PRINT "L          1 -- CORRECCION DEL NOMBRE DEL PROBLEMA"
2340 N$=" "
2350 PRINT "J          2 -- CORRECCION DE ELEMENTOS DE MATRICES"
2360 PRINT "J          3 -- FIN DE CORRECCIONES"
2370 PRINT "JJJ          CLASE DESEADA: ";
2380 INPUT J1
2390 GO TO J1 OF 2410,2520,2780
2400 GO TO 2370
2410 PRINT "JEL NOMBRE ACTUAL ES: J";
2420 PRINT T$
2430 PRINT "JINGRESE EL NOMBRE CORRECTO: J";
2440 INPUT T$
2450 IF T$<>" " THEN 2470
2460 T$=" "
2470 PRINT "JNOMBRE ESTA CORREGIDO"
2480 PRINT "JDESEA CORREGIR ELEMENTOS DE MATRICES? (SI O NO): ";
2490 INPUT D$
2500 IF D$="SI" THEN 2520
2510 GO TO 2820
2520 PRINT "JJMATRIZ Y ELEMENTO A CORREGIR. (FIN PARA TERMINAR): ";
2530 INPUT X$
2540 IF X$="" THEN 2520
2550 IF X$="FIN" THEN 2780
2560 B$="
2570 D$=SEG(X$,1,1)
2580 IF D$="B" THEN 2680
2590 IF D$="C" THEN 2730
2600 I=VAL(X$)
2610 J=POS(X$,"",1)

```

```
2620 X$=SEG(X$,J+1,LEN(X$)-J)
2630 J=VAL(X$)
2640 PRINT "K";B$;A(I,J)
2650 PRINT "JINGRESE EL VALOR CORRECTO DE A(";I;",";J;")= ";
2660 INPUT A(I,J)
2670 GO TO 2520
2680 I=VAL(X$)
2690 PRINT "K";B$;B(I)
2700 PRINT "JINGRESE EL VALOR CORRECTO DE B(";I;")= ";
2710 INPUT B(I)
2720 GO TO 2520
2730 I=VAL(X$)
2740 PRINT "K";B$;C(1,I)
2750 PRINT "JINGRESE EL VALOR CORRECTO DE C(";I;")= ";
2760 INPUT C(1,I)
2770 GO TO 2520
2780 X$=CHR(13)
2790 Y$=Y$&X$
2800 Y$=Y$&"
2810 Y$=Y$&"DATOS HAN SIDO MODIFICADOS"
2820 GO TO 1560
2830 REM ***** COMIENZO DEL CALCULO *****
2840 IF U1=2 THEN 2860
2850 GO TO 1970
2860 U1=1
2870 O1=2
2880 GO TO 800
```

```

1000 REM  PROGRAMA:      CALCBASIC
1010 02=2
1020 IF 02<>01 THEN 800
1030 REM
1040 DELETE A1,F,P1,D,U5,V5,C1,A3
1050 DIM A1(N,N),P(N,N),D(N+1),F1(N,N),U5(N-1),V5(N-1),C1(1,N),A3(N)
1060 REM
1070 REM ***** FORMACION DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD: A1 *****
1080 FOR I=1 TO N
1090 A1(I,1)=B(I)
1100 NEXT I
1110 FOR I=2 TO N
1120 L=I-1
1130 FOR J=1 TO N
1140 A1(J,I)=0
1150 FOR K=1 TO N
1160 A1(J,I)=A1(J,I)+A(J,K)*A1(K,L)
1170 NEXT K
1180 NEXT J
1190 NEXT I
1200 REM ***** INVERSION DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD: X7 *****
1210 GOSUB 1980
1220 IF C0<>0 THEN 1290
1230 PRINT "JJJJJ***** LA PLANTA ES INCONTROLABLE *****"
1240 PRINT "J EL MODELO NO ES CORRECTO"
1250 PRINT "JJJ PRESIONE TECLA 1 PARA VER EL INDICE DE PROGRAMASGGG"
1260 END
1270 REM ***** VERIFICACION DE QUE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD *****
1280 REM ***** NO ES MAL CONDICIONADA *****
1290 F1=A1 MPY X7
1300 E1=0
1310 FOR I=1 TO N
1320 FOR J=1 TO N
1330 IF J<>I THEN 1360
1340 E2=ABS(F1(I,J)-1)
1350 GO TO 1370
1360 E2=ABS(F1(I,J))
1370 IF E1>E2 THEN 1390
1380 E1=E2
1390 NEXT J
1400 NEXT I
1410 IF E1<1.0E-5 THEN 1480
1420 PRINT "LJJPLANTA NUMERICAMENTE INCONTROLABLE, DESVIAC. MAX=";E1
1430 PRINT "JJDESEA CONTINUAR LOS CALCULOS? (SI O NO); ";
1440 INPUT D$
1450 IF D$="SI" THEN 1480
1460 REM AL INDICE DE PROGRAMAS
1470 GO TO 210
1480 DELETE A1,X7,F1
1490 DIM A1(N,N)
1500 REM *** CALCULO DE LAS RAICES DEL POLINOMIO CARACTERISTICO ***
1510 REM *** DE LAZO ABIERTO ***
1520 A1=A
1530 GOSUB 2530

```

```

1540 REM *** U9 -- VECTOR CON LAS PARTES REALES DE LAS RAICES ***
1550 REM *** V9 -- VECTOR CON LAS PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES ***
1560 REM ** CALCULO DE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO CARACTERISTICO **
1570 GOSUB 5490
1580 REM *** COEFICIENTES ALMACENADOS EN EL VECTOR D ***
1590 REM ***** CALCULO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACION PARA *****
1600 REM ***** PASAR AL SISTEMA A VARIABLES DE FASE: P *****
1610 FOR I=1 TO N
1620 P(I,N)=B(I)
1630 NEXT I
1640 FOR J=N-1 TO 1 STEP -1
1650 FOR I=1 TO N
1660 K=J+1
1670 P(I,J)=D(K)*B(I)
1680 FOR L=1 TO N
1690 P(I,J)=P(I,J)+A(I,L)*P(L,K)
1700 NEXT L
1710 NEXT I
1720 NEXT J
1730 REM *** CALCULO DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***
1740 C1=C MPY P. = [C]*[P]
1750 REM *** COEFICIENTES DEL NUMERADOR ALMACENADOS EN C1 ***
1760 REM *** CALCULO DE LOS CEROS DE LAZO ABIERTO ***
1770 W1=N+1
1780 W1=W1-1
1790 IF C1(1,W1) <> 0 THEN 1810
1800 IF W1>1 THEN 1780
1810 W1=W1-1
1820 IF W1=0 THEN 1880
1830 N3=W1
1840 FOR I=1 TO N3+1
1850 A3(I)=C1(1,I)
1860 NEXT I
1870 GOSUB 5830
1880 REM *** U5 -- VECTOR CON LAS PARTES REALES DE LOS CEROS ***
1890 REM *** V5 -- VECTOR CON LAS PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES ***
1900 PRINT "LJJ LA PLANTA ES COMPLETAMENTE CONTROLABLEJJ"
1910 PRINT "LISTOS CALCULOS BASICOSJJ"
1920 O3=1
1930 O4=1
1940 O5=2
1950 GO TO 270
1960 REM ***** FIN DE CALCBASIC *****
1970 REM
1980 REM*SUBROUTINA PARA INVERTIR MATRICES Y CHEQUEAR SI SON SINGULARES*
1990 DELETE X7,B7
2000 DIM X7(N,N),B7(N,N)
2010 E0=1.0E-8
2020 C0=1
2030 W7=1
2040 FOR I=1 TO N
2050 FOR J=1 TO N
2060 X7(I,J)=0
2070 B7(I,J)=A1(I,J)

```

```

2080 NEXT J
2090 NEXT I
2100 FOR I=1 TO N
2110 X7(I,I)=1
2120 NEXT I
2130 FOR I=1 TO N
2140 C7=0
2150 K=I
2160 IF ABS(B7(K,I))<=ABS(C7) THEN 2190
2170 C7=B7(K,I)
2180 W7=K
2190 K=K+1
2200 IF K<=N THEN 2160
2210 IF ABS(B7(W7,I))<E0 THEN 2490
2220 IF W7<I THEN 2490
2230 IF W7=I THEN 2320
2240 FOR M7=1 TO N
2250 T7=B7(I,M7)
2260 B7(I,M7)=B7(W7,M7)
2270 B7(W7,M7)=T7
2280 T7=X7(I,M7)
2290 X7(I,M7)=X7(W7,M7)
2300 X7(W7,M7)=T7
2310 NEXT M7
2320 T7=B7(I,I)
2330 FOR M7=1 TO N
2340 X7(I,M7)=X7(I,M7)/T7
2350 B7(I,M7)=B7(I,M7)/T7
2360 NEXT M7
2370 FOR J=1 TO N
2380 IF J=I THEN 2460
2390 IF B7(J,I)=0 THEN 2460
2400 T7=B7(J,I)
2410 FOR I1=1 TO N
2420 X7(J,I1)=X7(J,I1)-T7*X7(I,I1)
2430 IF W7<I THEN 2450
2440 B7(J,I1)=B7(J,I1)-T7*B7(I,I1)
2450 NEXT I1
2460 NEXT J
2470 NEXT I
2480 RETURN
2490 PRINT "LJLA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD ES SINGULAR"
2500 C0=0
2510 RETURN
2520 REM
2530 REM ***** SUBROUTINA PARA ENCONTRAR VALORES PROPIOS DE A *****
2540 REM *****SCALE A BEFORE FINDING EIGENVALUES*****
2550 DELETE U9,U9,Z3,T
2560 DIM U9(N),U9(N),Z3(N,N),T(N,3),Q$(1)
2570 IF N>1 THEN 2670
2580 DIM Z2(1,1),Q(1,5)
2590 U9(1)=A1(1,1)
2600 U9(1)=0
2610 Z2(1,1)=1

```

```

2620 Z3(1,1)=0
2630 T(1,1)=2
2640 T1=1
2650 GO TO 3290
2660 REM *****
2670 GOSUB 2710
2680 GO TO 3290
2690 REM *****
2700 REM ***** SCALE A *****
2710 FOR T1=1 TO N
2720 FOR T2=1 TO N
2730 Z3(T1,T2)=A1(T1,T2)
2740 NEXT T2
2750 T(T1,2)=1
2760 NEXT T1 ✓
2770 Q1=0.75
2780 Q2=1.33
2790 T3=0
2800 T4=0
2810 FOR T1=1 TO N
2820 Q7=0
2830 Q8=0
2840 FOR T2=1 TO N
2850 IF T1=T2 THEN 2880
2860 Q7=Q7+ABS(A1(T2,T1))
2870 Q8=Q8+ABS(A1(T1,T2))
2880 NEXT T2
2890 IF Q7*Q8=0 THEN 2930
2900 Q3=Q7/Q8
2910 IF Q3<Q1 THEN 2950
2920 IF Q3>Q2 THEN 2950
2930 T4=T4+1
2940 GO TO 3020
2950 Q9=SQR(Q3)
2960 FOR T2=1 TO N
2970 IF T1=T2 THEN 3000
2980 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)*Q9
2990 A1(T2,T1)=A1(T2,T1)/Q9
3000 NEXT T2 ✓
3010 T(T1,2)=T(T1,2)*Q9
3020 NEXT T1
3030 T3=T3+1
3040 IF T3>30 THEN 3200
3050 IF T4<N THEN 2800
3060 Q4=0
3070 FOR T1=1 TO N
3080 FOR T2=1 TO N
3090 Q3=A1(T1,T2)
3100 Q4=Q4+Q3*Q3
3110 NEXT T2
3120 NEXT T1
3130 Q4=SQR(Q4)
3140 FOR T1=1 TO N
3150 FOR T2=1 TO N

```



```

3160 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)/Q4
3170 NEXT T2
3180 NEXT T1
3190 RETURN
3200 FOR T1=1 TO N
3210 T(T1,2)=1
3220 FOR T2=1 TO N
3230 A1(T1,T2)=Z3(T1,T2)
3240 NEXT T2
3250 NEXT T1
3260 Q4=1
3270 RETURN
3280 REM ***** END OF SCALING *****
3290 REM ***** FIND EIGENVALUES *****
3300 Z8=48
3310 Q6=1/2^Z8
3320 GOSUB 3430
3330 REM ***** OUTPUT EIGENVALUES *****
3340 U9=U9*Q4
3350 V9=V9*Q4
3360 FOR T1=1 TO N
3370 IF T(T1,1) <> 0 THEN 3400
3380 PRINT @U2:"NO SE PUEDE ENCONTRAR VALOR PROPIO No. ";T1;"GGGG"
3390 END
3400 NEXT T1
3410 REM ***** FIN *****
3420 RETURN
3430 REM ***** FIND EIGENVALUES *****
3440 IF N<2 THEN 4020
3450 IF N>2 THEN 3480
3460 T(1,3)=A1(2,1)
3470 GO TO 4020
3480 T5=N-2
3490 FOR T3=1 TO T5
3500 T4=T3+1
3510 Q1=0
3520 FOR T1=T4 TO N
3530 Z3(T1,T3)=A1(T1,T3)
3540 Q1=Q1+ABS(A1(T1,T3))
3550 NEXT T1
3560 IF Q1 <> ABS(A1(T4,T3)) THEN 3610
3570 T(T3,3)=A1(T4,T3)
3580 Z3(T4,T3)=0
3590 GO TO 3970
3600 REM *****
3610 Q3=0
3620 FOR T1=T4 TO N
3630 Q2=A1(T1,T3)/Q1
3640 A1(T1,T3)=Q2
3650 Q3=Q3+Q2*Q2
3660 NEXT T1
3670 Q2=SQR(Q3)
3680 IF A1(T4,T3) < 0 THEN 3700
3690 Q2=-Q2

```

```

3700 Q3=Q3-Q2*A1(T4,T3)
3710 A1(T4,T3)=A1(T4,T3)-Q2
3720 T(T3,3)=Q2*Q1
3730 Z3(T4,T3)=Z3(T4,T3)-T(T3,3)
3740 Q7=Q1*SQR(Q3)
3750 FOR T1=T4 TO N
3760 Z3(T1,T3)=Z3(T1,T3)/Q7
3770 T(T1,3)=A1(T1,T3)/Q3
3780 NEXT T1
3790 FOR T2=T4 TO N
3800 Q2=0
3810 FOR T1=T4 TO N
3820 Q2=Q2+A1(T1,T3)*A1(T1,T2)
3830 NEXT T1
3840 FOR T1=T4 TO N
3850 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)-T(T1,3)*Q2
3860 NEXT T1
3870 NEXT T2
3880 FOR T2=1 TO N
3890 Q2=0
3900 FOR T1=T4 TO N
3910 Q2=Q2+A1(T2,T1)*A1(T1,T3)
3920 NEXT T1
3930 FOR T1=T4 TO N
3940 A1(T2,T1)=A1(T2,T1)-T(T1,3)*Q2
3950 NEXT T1
3960 NEXT T2
3970 NEXT T3
3980 FOR T3=1 TO T5
3990 A1(T3+1,T3)=T(T3,3)
4000 NEXT T3
4010 T(N-1,3)=A1(N,N-1)
4020 Q5=0
4030 FOR T3=1 TO N
4040 T(T3,1)=0
4050 IF T3=N THEN 4070
4060 Q5=Q5+T(T3,3)^2
4070 FOR T1=T3 TO N
4080 Z3(T3,T1)=A1(T3,T1) ✓
4090 Q5=Q5+A1(T3,T1)^2
4100 NEXT T1
4110 NEXT T3
4120 Q5=Q5*SQR(Q5)
4130 REM ***** QR ITERATION *****
4140 R2=A1(N,N-1)
4150 IF N<=2 THEN 4200
4160 IF A1(N,N) <> 0 THEN 4200
4170 IF A1(N-1,N) <> 0 THEN 4200
4180 IF A1(N-1,N-1) <> 0 THEN 4200
4190 GO TO 4210
4200 R2=0
4210 T5=N
4220 T8=0
4230 T6=10*N

```

```

4240 FOR T1=1 TO N-1
4250 FOR T3=1 TO N
4260 IF A1(T1,T3)<>0 THEN 4350
4270 NEXT T3
4280 NEXT T1
4290 FOR T1=1 TO N
4300 T(T1,1)=1
4310 U9(T1)=A1(T1,T1)
4320 V9(T1)=0
4330 NEXT T1
4340 RETURN
4350 T3=T5-1
4360 T7=T3
4370 T1=T3
4380 IF T3<0 THEN 4340
4390 IF T3=0 THEN 5180
4400 IF ABS(A1(T5,T3))<=Q5 THEN 5180
4410 IF T5=2 THEN 5240
4420 T1=T1-1
4430 IF ABS(A1(T3,T1))<=Q5 THEN 4460
4440 T3=T1
4450 IF T3>1 THEN 4420
4460 IF T3=T7 THEN 5240
4470 Q1=A1(T5,T5)+A1(T7,T7)+R2
4480 Q2=A1(T5,T5)*A1(T7,T7)-A1(T5,T7)*A1(T7,T5)+0.25*R2*R2 ✓
4490 A1(T3+2,T3)=0
4500 Q7=A1(T3,T3)*(A1(T3,T3)-Q1)+A1(T3,T3+1)*A1(T3+1,T3)+Q2
4510 Q8=A1(T3+1,T3)*(A1(T3,T3)+A1(T3+1,T3+1)-Q1)
4520 R1=ABS(Q7)+ABS(Q8)
4530 IF R1<>0 THEN 4560
4540 R2=A1(T5,T5-1)
4550 GO TO 4460
4560 Q9=A1(T3+2,T3+1)*A1(T3+1,T3)
4570 R2=0
4580 T8=T8+1
4590 FOR T1=T3 TO T7
4600 T0=T1-1
4610 R4=T1+1
4620 R5=T1+2
4630 IF T1=T3 THEN 4690
4640 Q7=A1(T1,T0)
4650 Q8=A1(R4,T0)
4660 Q9=0
4670 IF R5>T5 THEN 4690
4680 Q9=A1(R5,T0)
4690 Q3=ABS(Q7)+ABS(Q8)+ABS(Q9)
4700 IF Q3=0 THEN 4740
4710 Q7=Q7/Q3
4720 Q8=Q8/Q3
4730 Q9=Q9/Q3
4740 Q1=SQR(Q7*Q7+Q8*Q8+Q9*Q9) ✓
4750 IF Q7<0 THEN 4770
4760 Q1=-Q1
4770 IF T1=T3 THEN 4790

```

```

4780 A1(T1,T0)=Q1*Q3
4790 IF Q3<0 THEN 4820
4800 IF T1+3>T5 THEN 5150
4810 GO TO 5110
4820 Q2=1-Q7/Q1
4830 Q1=Q7-Q1
4840 Q7=Q8/Q1
4850 Q8=Q9/Q1
4860 FOR T2=T1 TO T5
4870 Q1=A1(T1,T2)+A1(R4,T2)*Q7
4880 IF R5>T5 THEN 4900
4890 Q1=Q1+A1(R5,T2)*Q8
4900 Q1=Q1*Q2
4910 A1(T1,T2)=A1(T1,T2)-Q1
4920 A1(R4,T2)=A1(R4,T2)-Q1*Q7
4930 IF R5>T5 THEN 4950
4940 A1(R5,T2)=A1(R5,T2)-Q1*Q8
4950 NEXT T2
4960 T4=R5
4970 IF T1<T7 THEN 4990
4980 T4=T5
4990 FOR T2=T3 TO T4
5000 Q1=A1(T2,T1)+A1(T2,R4)*Q7
5010 IF R5>T5 THEN 5030
5020 Q1=Q1+A1(T2,R5)*Q8
5030 Q1=Q1*Q2
5040 A1(T2,T1)=A1(T2,T1)-Q1
5050 A1(T2,R4)=A1(T2,R4)-Q1*Q7
5060 IF R5>T5 THEN 5080
5070 A1(T2,R5)=A1(T2,R5)-Q1*Q8
5080 NEXT T2
5090 IF T1+3>T5 THEN 5150
5100 Q1=-A1(T1+3,R5)*Q8*Q2
5110 T0=T1+3
5120 A1(T0,T1)=Q1
5130 A1(T0,R4)=Q1*Q7
5140 A1(T0,R5)=Q1*Q8+A1(T0,R5)
5150 NEXT T1
5160 IF T8>T6 THEN 5450
5170 GO TO 4350
5180 U9(T5)=A1(T5,T5)
5190 V9(T5)=0
5200 T(T5,1)=1
5210 REM PRINT T5, U9(T5)*Q4, V9(T5)*Q4
5220 T5=T3
5230 GO TO 4350
5240 R1=0.5*(A1(T3,T3)+A1(T5,T5))
5250 Q1=0.5*(A1(T5,T5)-A1(T3,T3))
5260 Q1=Q1*Q1+A1(T3,T5)*A1(T5,T3)
5270 T(T3,1)=1
5280 T(T5,1)=1
5290 IF Q1<0 THEN 5360
5300 R3=SQR(Q1)
5310 U9(T3)=R1-R3

```

```

5320 U9(T5)=R1+R3
5330 V9(T3)=0
5340 V9(T5)=0
5350 GO TO 5410
5360 R3=SQR(-Q1)
5370 U9(T3)=R1
5380 V9(T3)=R3
5390 U9(T5)=R1
5400 V9(T5)=-R3
5410 REM PRINT T3, U9(T3)*Q4, V9(T3)*Q4 PRINTS EIGENVALUES
5420 REM PRINT T5, U9(T5)*Q4, V9(T5)*Q4 AS FOUND
5430 T5=T5-2
5440 GO TO 4350
5450 RETURN
5460 REM ***** END OF EIGENVALUE *****
5470 REM *****
5480 REM
5490 REM *** SUBROUTINA PARA CALCULAR COEF. DE UN POLINOMIO *****
5500 E0=1.0E-8
5510 IF ABS(V9(1))<E0 THEN 5570
5520 D(3)=1
5530 D(2)=-U9(1)*2
5540 D(1)=U9(1)*U9(1)+V9(1)*V9(1)
5550 J0=2
5560 GO TO 5600
5570 D(2)=1
5580 D(1)=-U9(1)
5590 J0=1
5600 I=J0
5610 IF I=N THEN 5820
5620 I=I+1
5630 IF ABS(V9(I))<E0 THEN 5760
5640 M2=-2*U9(I)
5650 N2=U9(I)*U9(I)+V9(I)*V9(I)
5660 I=I+1
5670 D(I+1)=1
5680 D(I)=D(I-2)+M2
5690 IF I=3 THEN 5730
5700 FOR J=I-1 TO 3 STEP -1
5710 D(J)=D(J-2)+M2*D(J-1)+N2*D(J)
5720 NEXT J
5730 D(2)=M2*D(1)+N2*D(2)
5740 D(1)=N2*D(1)
5750 GO TO 5810
5760 D(I+1)=1
5770 FOR J=I TO 2 STEP -1
5780 D(J)=D(J-1)-U9(I)*D(J)
5790 NEXT J
5800 D(1)=-D(1)*U9(I)
5810 IF I<N THEN 5620
5820 RETURN
5830 REM ***** SUBROUTINA PARA ENCONTRAR RAICES DE POLINOMIOS *****
5840 DELETE A9
5850 DIM A9(N3+1)

```

```

5860 FOR J=1 TO N3+1
5870 A9(J)=A3(N3+2-J)
5880 NEXT J
5890 FOR J=1 TO N3+1
5900 A3(J)=A9(J)
5910 NEXT J
5920 DELETE A9
5930 REM          RAIZPOLI2
5940 REM
5950 REM          SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
5960 REM          METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
5970 REM          31 DE MARZO DE 1980
5980 REM          ING. EFRAIN DEL PINO V.
5990 REM
6000 REM          N3 - GRADO DEL POLINOMIO
6010 REM          A3 - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE
6020 REM          DE POTENCIAS
6030 REM
6040 REM          U5 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
6050 REM          V5 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
6060 REM
6070 REM          N3, A3 NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
6080 REM
6090 N4=N3
6100 DELETE H3,C3,U5,V5,U4,V4,U3,V3
6110 DIM H3(N4),C3(N4),U5(N4),V5(N4)
6120 J3=0
6130 E0=1.0E-10
6140 E1=E0^2
6150 U5=0
6160 V5=0
6170 FOR J=1 TO N4
6180 H3(J)=A3(J+1)/A3(1)
6190 NEXT J
6200 IF N4>0 THEN 6220
6210 RETURN
6220 IF H3(N4)<>0 THEN 6260
6230 J3=J3+1
6240 N4=N4-1
6250 GO TO 6200
6260 IF N4<>1 THEN 6300
6270 J3=J3+1
6280 U5(J3)=-H3(N4)
6290 RETURN
6300 IF N4<>2 THEN 6620
6310 P3=-H3(1)/2
6320 J3=J3+1
6330 T3=P3*P3-H3(2)
6340 IF T3<0 THEN 6390
6350 T3=SQR(T3)
6360 U5(J3)=P3+T3
6370 U5(J3+1)=P3-T3
6380 RETURN
6390 U5(J3)=P3

```

```

6400 U5(J3+1)=U5(J3)
6410 V5(J3)=SQR(-T3)
6420 V5(J3+1)=-V5(J3)
6430 RETURN
6440 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U4 + JV4
6450 U4=1
6460 V4=0
6470 FOR J=1 TO N4
6480 T3=U4*F3-V4*Q3+C3(J)
6490 V4=V4*F3+U4*Q3
6500 U4=T3
6510 NEXT J
6520 RETURN
6530 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U3 + JV3
6540 U3=N4
6550 V3=0
6560 FOR J=1 TO N4-1
6570 T3=U3*F3-V3*Q3+(N4-J)*C3(J)
6580 V3=V3*F3+U3*Q3
6590 U3=T3
6600 NEXT J
6610 RETURN
6620 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
6630 T3=ABS(H3(N4))
6640 DIM H3(N4),C3(N4)
6650 IF T3=1 THEN 6730
6660 H0=T3^(1/N4)
6670 T3=1
6680 FOR J=1 TO N4
6690 T3=T3*H0
6700 C3(J)=H3(J)/T3
6710 NEXT J
6720 GO TO 6750
6730 C3=H3
6740 H0=1
6750 F3=0.7
6760 Q3=0.6
6770 GOSUB 6440
6780 F1=U4*U4+V4*V4
6790 IF F1<E1 THEN 6990
6800 GOSUB 6530
6810 T3=U3*U3+V3*V3
6820 F4=-(U4*U3+V4*V3)/T3
6830 Q4=(U4*V3-V4*U3)/T3
6840 F3=F3+F4
6850 Q3=Q3+Q4
6860 GOSUB 6440
6870 F2=U4*U4+V4*V4
6880 IF F2<E1 THEN 6970
6890 IF F2<F1 THEN 6950
6900 F3=F3-F4
6910 Q3=Q3-Q4
6920 F4=0.8*F4
6930 Q4=0.8*Q4

```

```
6940 GO TO 6840
6950 F1=F2
6960 GO TO 6800
6970 IF ABS(P4)≤E0 AND ABS(Q4)≤E0 THEN 6990
6980 GO TO 6950
6990 P3=P3*H0
7000 Q3=Q3*H0
7010 IF ABS(Q3)≥E0 THEN 7030
7020 Q3=0
7030 J3=J3+1
7040 U5(J3)=P3
7050 V5(J3)=Q3
7060 IF Q3=0 THEN 7200
7070 J3=J3+1
7080 U5(J3)=P3
7090 V5(J3)=-Q3
7100 R=-2*P3
7110 S=P3*P3+Q3*Q3
7120 H3(1)=H3(1)-R
7130 H3(2)=H3(2)-R*H3(1)-S
7140 IF N4≤5 THEN 7180
7150 FOR J=3 TO N4-2
7160 H3(J)=H3(J)-R*H3(J-1)-S*H3(J-2)
7170 NEXT J
7180 N4=N4-2
7190 GO TO 6260
7200 T3=1
7210 FOR J=1 TO N4-1
7220 T3=T3*P3+H3(J)
7230 H3(J)=T3
7240 NEXT J
7250 N4=N4-1
7260 GO TO 6260
```


CALCFICTIC

```

1000 REM PROGRAMA:
1010 O2=3
1020 IF O2<>01 THEN 800
1030 REM
1040 DELETE C4,C5,U8,V8,W0,A3
1050 DIM C4(N,N),C5(N,N),U8(N,N-1),V8(N,N-1),A3(N),W0(N)
1060 REM ***** INGRESO DE LOS VECTORES C FICTICIOS *****
1070 W=0
1080 W=W+1
1090 PRINT "LJ ***** CALCULOS DE LAZO ABIERTO *****"
1100 PRINT "JJINGRESE EL VECTOR C ficticio PARA OBTENER LA FUNCION DE "
1110 PRINT "LAZO ABIERTO"
1120 PRI " J QUE DESEE ----- (PARA TERMINAR INGRESE CEROS)GGJ"
1130 FOR J=1 TO N
1140 PRINT "C(";J;")=";
1150 INPUT C4(W,J)
1160 NEXT J
1170 FOR J=1 TO N
1180 IF C4(W,J)<>0 THEN 1220
1190 NEXT J
1200 W=W-1
1210 GO TO 1580
1220 REM ***** CALCULO DE LOS COEFICIENTES DEL NUMERADOR PARA *****
1230 REM ***** LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DESEADAS *****
1240 FOR K=1 TO N
1250 C5(W,K)=0
1260 FOR J=1 TO N
1270 C5(W,K)=C5(W,K)+F(J,K)*C4(W,J)
1280 NEXT J
1290 NEXT K
1300 M=N+1
1310 M=M-1
1320 IF C5(W,M)<>0 THEN 1340
1330 IF M>1 THEN 1310
1340 M=M-1
1350 W0(W)=M
1360 IF M<=0 THEN 1530
1370 REM *** COEFICIENTES ALMACENADOS EN MATRIZ C5 *****
1380 REM *** CALCULO DE LAS RAICES DE LOS NUMERADORES ***
1390 N3=M
1400 FOR J=1 TO N3+1
1410 A3(J)=C5(W,J)
1420 NEXT J
1430 GOSUB 1640
1440 FOR J=1 TO N3
1450 U8(W,J)=X3(J)
1460 V8(W,J)=Y3(J)
1470 NEXT J
1480 REM *** U8 -- MATRIZ CON LAS PARTES REALES DE LAS RAICES DE LOS *
1490 REM NUMERADORES DE TODAS LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA *
1500 REM *** V8 -- MATRIZ CON LAS PARTES IMAG. DE LAS RAICES DE LOS *
1510 REM ----- NUMERADORES DE TODAS LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA. .... *
1520 IF W=N THEN 1590
1530 REM

```

```

1540 PRINT "JJDESEA INGRESAR OTRO VECTOR C ficticio PARA OBTENER OTRA"
1550 PRINT "JFUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO (SI O NO): ";11
1560 INPUT D$
1570 IF D$="SI" THEN 1080
1580 IF W=0 THEN 1610
1590 O3=2
1600 PRINT " LJJLISTOS CALCULOS DE SALIDAS FICTICIASJJ"
1610 GO TO 270
1620 REM ***** FIN DE CALCFICTIC *****
1630 REM
1640 REM ***** SUBROUTINA PARA CALCULAR RAICES DE POLINOMIOS *****
1650 DELETE A9
1660 DIM A9(N3+1)
1670 FOR J=1 TO N3+1
1680 A9(J)=A3(N3+2-J)
1690 NEXT J
1700 FOR J=1 TO N3+1
1710 A3(J)=A9(J)
1720 NEXT J
1730 DELETE A9
1740 REM          RAIZPOLI2
1750 REM
1760 REM          SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
1770 REM          METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICE
1780 REM          31 DE MARZO DE 1980
1790 REM          ING. EFRAIN DEL PINO V.
1800 REM
1810 REM          N3 - GRADO DEL POLINOMIO
1820 REM          A3 - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE
1830 REM          DE POTENCIAS
1840 REM
1850 REM          X3 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
1860 REM          Y3 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
1870 REM
1880 REM          N3, A3 NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
1890 REM
1900 N4=N3
1910 DELETE H3,C3,X3,Y3,U4,V4,U3,V3
1920 DIM H3(N4),C3(N4),X3(N4),Y3(N4)
1930 J3=0
1940 E0=1.0E-10
1950 E1=E0^2
1960 X3=0
1970 Y3=0
1980 FOR J=1 TO N4
1990 H3(J)=A3(J+1)/A3(1)
2000 NEXT J
2010 IF N4>0 THEN 2030
2020 RETURN
2030 IF H3(N4)<>0 THEN 2070
2040 J3=J3+1
2050 N4=N4-1
2060 GO TO 2010
2070 IF N4<>1 THEN 2110

```

```

2080 J3=J3+1
2090 X3(J3)=-H3(N4)
2100 RETURN
2110 IF N4<>2 THEN 2430
2120 P3=-H3(1)/2
2130 J3=J3+1
2140 T3=P3*P3-H3(2)
2150 IF T3<0 THEN 2200
2160 T3=SQR(T3)
2170 X3(J3)=P3+T3
2180 X3(J3+1)=P3-T3
2190 RETURN
2200 X3(J3)=P3
2210 X3(J3+1)=X3(J3)
2220 Y3(J3)=SQR(-T3)
2230 Y3(J3+1)=-Y3(J3)
2240 RETURN
2250 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U4 + JV4
2260 U4=1
2270 V4=0
2280 FOR J=1 TO N4
2290 T3=U4*P3-V4*Q3+C3(J)
2300 V4=V4*P3+U4*Q3
2310 U4=T3
2320 NEXT J
2330 RETURN
2340 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U3 + JV3
2350 U3=N4
2360 V3=0
2370 FOR J=1 TO N4-1
2380 T3=U3*P3-V3*Q3+(N4-J)*C3(J)
2390 V3=V3*P3+U3*Q3
2400 U3=T3
2410 NEXT J
2420 RETURN
2430 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
2440 T3=ABS(H3(N4))
2450 DIM H3(N4),C3(N4)
2460 IF T3=1 THEN 2540
2470 H0=T3^(1/N4)
2480 T3=1
2490 FOR J=1 TO N4
2500 T3=T3*H0
2510 C3(J)=H3(J)/T3
2520 NEXT J
2530 GO TO 2560
2540 C3=H3
2550 H0=1
2560 P3=0.7
2570 Q3=0.6
2580 GOSUB 2250
2590 F1=U4*U4+V4*V4
2600 IF F1<E1 THEN 2800
2610 GOSUB 2340

```

```
2620 T3=U3*U3+V3*V3
2630 F4=-(U4*U3+V4*V3)/T3
2640 Q4=(U4*V3-V4*U3)/T3
2650 F3=F3+F4
2660 Q3=Q3+Q4
2670 GOSUB 2250
2680 F2=U4*U4+V4*V4
2690 IF F2<E1 THEN 2780
2700 IF F2<F1 THEN 2760
2710 F3=F3-F4
2720 Q3=Q3-Q4
2730 F4=0.8*F4
2740 Q4=0.8*Q4
2750 GO TO 2650
2760 F1=F2
2770 GO TO 2610
2780 IF ABS(F4)<E0 AND ABS(Q4)<E0 THEN 2800
2790 GO TO 2760
2800 F3=F3*H0
2810 Q3=Q3*H0
2820 IF ABS(Q3)>E0 THEN 2840
2830 Q3=0
2840 J3=J3+1
2850 X3(J3)=F3
2860 Y3(J3)=Q3
2870 IF Q3=0 THEN 3010
2880 J3=J3+1
2890 X3(J3)=F3
2900 Y3(J3)=-Q3
2910 R=-2*F3
2920 S=F3*F3+Q3*Q3
2930 H3(1)=H3(1)-R
2940 H3(2)=H3(2)-R*H3(1)-S
2950 IF N4<5 THEN 2990
2960 FOR J=3 TO N4-2
2970 H3(J)=H3(J)-R*H3(J-1)-S*H3(J-2)
2980 NEXT J
2990 N4=N4-2
3000 GO TO 2070
3010 T3=1
3020 FOR J=1 TO N4-1
3030 T3=T3*F3+H3(J)
3040 H3(J)=T3
3050 NEXT J
3060 N4=N4-1
3070 GO TO 2070
```

```

1000 REM  PROGRAMA:                REALESTADO
1010 O2=4
1020 IF O1<>O2 THEN 800
1030 DELETE H1,H,E,P1,U7,U7,A3,U6,U6
1040 DIM H1(1,N),H(1,N),E(N+1),P1(N,N),U7(N-1),U7(N-1)
1050 DIM A3(N+1),U6(N),U6(N)
1060 REM      H1 -- VECTOR DE REALIMENTACION EN EL SISTEMA ORIGINAL
1070 REM      H  -- VECTOR DE REALIMENTACION EN VARIABLES DE FASE,
1080 REM           CONTIENE LOS COEF. DEL NUMERADOR DE Heq
1090 REM      E  -- VECTOR CON LOS COEF. DEL POLINOMIO CARACTERISTICO DE
1100 REM           SISTEMA CON REALIMENTACION DE ESTADO
1110 REM      P1 -- MATRIZ INVERSA DE TRANSFORMACION A VARIABLES DE FASE
1120 REM      U7 -- VECTOR CON LAS PARTES REALES DE LAS RAICES DEL NUME-
1130 REM           RADOR DE Heq
1140 REM      U7 -- VECTOR CON LAS PARTES IMAG. DE LAS RAICES DEL NUME-
1150 REM           RADOR DE Heq
1160 REM      U6 -- VECTOR CON LAS PARTES REALES DE LOS POLOS DEL SISTEM
1170 REM           CON REAL. DE ESTADO
1180 REM      U6 -- VECTOR CON LAS PARTES IMAG. DE LOS POLOS DEL SISTEMA
1190 REM           CON REAL. DE ESTADO
1200 PRINT "LJJ          ***** REALIMENTACION DE ESTADO *****"
1210 PRINT "JJJJ          1 -- ANALISIS"
1220 PRINT "J             2 -- DISEÑO"
1230 PRINT "JJJJ          CLASE DESEADA:GG ";
1240 INPUT K1
1250 GO TO K1 OF 1270,1580
1260 GO TO 1230
1270 PRINT "LJJ          *** ANALISIS ***"
1280 S$="ANALISIS"
1290 REM *** INGRESO DE LA GANANCIA Y DEL VECTOR DE REALIMENTACION ***
1300 PRINT "JJINGRESE LA GANANCIA: ";
1310 INPUT G
1320 PRINT "JINGRESE EL VECTOR k. (DE REALIMENTACION DE ESTADO)JJGG"
1330 REM
1340 FOR I=1 TO N
1350 PRINT "k.(';I;')=";
1360 INPUT H1(1,I)
1370 NEXT I
1380 REM *** CALCULO DEL VECTOR DE REALIMENTACION EN VARIABLES DE ***
1390 REM *** FASE (CONTIENE COEF. DEL NUMERADOR DE Heq) ***
1400 H=H1 MPY P
1410 REM **. CALCULO DE LOS COEF. DEL POLINOM. CARACT. DE LAZO CERRADO *
1420 E(N+1)=1
1430 FOR I=1 TO N
1440 E(I)=D(I)+G*H(1,I)
1450 NEXT I
1460 IF ABS(E(1))<1.0E-8 THEN 2270
1470 REM *** CALCULO DE LOS POLOS DEL SISTEMA CON REAL. DE ESTADO ***
1480 N3=N
1490 FOR I=1 TO N3+1
1500 A3(I)=E(I)
1510 NEXT I
1520 GOSUB 2720
1530 FOR I=1 TO N3

```

```

1540 U6(I)=X3(I)
1550 V6(I)=Y3(I)
1560 NEXT I
1570 GO TO 2430
1580 PRINT "LJJ          *** DISEÑO ***"
1590 S$="DISEÑO"
1600 PRINT "JJESCOJA EL MODO DE INGRESO"
1610 PRI "JJJJ          1 -- POLOS DEL SISTEMA (RAICES DEL POLINOMIO";
1620 PRINT " CARACTERISTICO)"
1630 PRINT "J          2 -- COEFICIENTES DEL POLINOMIO CARACTERISTICO"
1640 PRINT "JJJJ          CLASE DESEADA:GG ";
1650 INPUT J1
1660 GO TO J1 OF 1680,1940
1670 GO TO 1640
1680 REM ***** INGRESO DE LOS POLOS DESEADOS DEL SISTEMA CON *****
1690 REM ***** REALIMENTACION DE ESTADO *****
1700 PRINT "LJJINGRESE PARTE REAL E IMAGINARIA DE LOS POLOS "
1710 PRINT "J(SI SE TIENEN POLOS CONJUGADOS ES SUFICIENTE INGRESAR"
1720 PRINT " CUALQUIERA DE ELLOS <solamente uno> )"
1730 I=0
1740 I=I+1
1750 PRINT "J          POLO <"I;">J";
1760 PRINT "PARTE REAL= ";
1770 INPUT U6(I)
1780 PRINT "          PARTE IMAGINARIA= ";
1790 INPUT V6(I)
1800 REM
1810 IF V6(I)=0 THEN 1880
1820 I=I+1
1830 U6(I)=U6(I-1)
1840 V6(I)=-V6(I-1)
1850 PRINT "J          POLO <"I;">J";
1860 PRINT "PARTE REAL= ";U6(I)
1870 PRINT "          PARTE IMAGINARIA= ";V6(I)
1880 IF I<N THEN 1740
1890 REM
1900 REM ***** CALCULO DE LOS COEF. DEL POLINOMIO CARACTERISTICO *****
1910 REM ***** DE LAZO CERRADO *****
1920 GOSUB 4160
1930 GO TO 2190
1940 REM ***** INGRESO DE LOS COEF. DEL POLINOMIO CARACTERISTICO *****
1950 REM ***** DESEADO CON REALIMENTACION DE ESTADO *****
1960 PRINT "LJJINGRESE COEFICIENTES DEL POLINOMIO CARACTERISTICOGG"
1970 PRINT "J (EN POTENCIAS DESCENDENTES DE S)"
1980 FOR I=N+1 TO 1 STEP -1
1990 PRINT "J          COEF. DE S^"I-1;"= ";
2000 INPUT E(I)
2010 NEXT I
2020 IF E(N+1)=1 THEN 2070
2030 FOR I=1 TO N
2040 E(I)=E(I)/E(N+1)
2050 NEXT I
2060 E(N+1)=1
2070 REM

```

```

2080 REM ***** CALCULO DE LOS POLOS DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO *****
2090 N3=N
2100 FOR I=1 TO N3+1
2110 A3(I)=E(I)
2120 NEXT I
2130 GOSUB 2720  $\Rightarrow$  ECUAPOL
2140 FOR I=1 TO N3
2150 U6(I)=X3(I)
2160 V6(I)=Y3(I)
2170 NEXT I
2180 REM ***** CALCULOS DE VALORES Kki PAA EL SISTEMA ORIGINAL *****
2190 FOR I=1 TO N
2200 H(1,I)=E(I)-D(I)
2210 NEXT I
2220 REM ***** CALCULOS DE VALORES Kki EN VARIABLES DE FASE *****
2230 P1=INV(F)
2240 H1=H MPY P1
2250 REM
2260 IF ABS(E(1))>1.0E-8 THEN 2290
2270 PRINT "JJEL SISTEMA ES INESTABLE, TIENE UN POLO EN EL ORIGEN"
2280 END
2290 IF ABS(C1(1,1))>1.0E-8 THEN 2350
2300 PRINT "JJNO SE PUEDE CONSEGUIR error de posicion IGUAL a cero"
2310 PRINT "DEBIDO A QUE EL SISTEMA TIENE UN CERO EN EL ORIGEN"
2320 END
2330 REM ***** DETERMINACION DE LA GANANCIA NECESARIA PARA *****
2340 REM ***** CONSEGUIR ERROR DE POSICION IGUAL A CERO *****
2350 G=E(1)/C1(1,1)
2360 REM ***** DETERMINACION DE ki TANTO PARA EL SISTEMA ORIGINAL *****
2370 REM ***** COMO EN VARIABLES DE FASE *****
2380 FOR I=1 TO N
2390 H1(1,I)=H(1,I)/G
2400 H(1,I)=H(1,I)/G
2410 NEXT I
2420 REM -
2430 W2=N+1
2440 W2=W2-1
2450 IF H(1,W2)<>0 THEN 2470
2460 IF W2>1 THEN 2440
2470 W2=W2-1
2480 IF W2=0 THEN 2590
2490 REM ***** CALCULO DE LAS RAICES DEL NUMERADOR DE Hea *****
2500 N3=W2
2510 FOR I=1 TO N3+1
2520 A3(I)=H(1,I)
2530 NEXT I
2540 GOSUB 2720
2550 FOR I=1 TO N3
2560 U7(I)=X3(I)
2570 V7(I)=Y3(I)
2580 NEXT I
2590 REM ***** CHEQUEO DE PRECISION (para verificacion) *****
2600 E1=0
2610 FOR I=1 TO N

```

```

2620 E2=(E(I)-G*H(1,I)-D(I))/E(I)
2630 E2=ABS(E2)
2640 IF E1>E2 THEN 2660
2650 E1=E2
2660 NEXT I
2670 O4=2
2680 PRINT " LJJLISTOS CALCULOS DE REALIMENTACION DE ESTADOJJ"
2690 GO TO 270
2700 REM ***** FIN DE REALESTADO *****
2710 REM
2720 REM ***** SUBROUTINA PARA ECONTRAR RAICES DE POLINOMIOS *****
2730 DELETE A9
2740 DIM A9(N3+1)
2750 FOR J=1 TO N3+1
2760 A9(J)=A3(N3+2-J)
2770 NEXT J
2780 FOR J=1 TO N3+1
2790 A3(J)=A9(J)
2800 NEXT J
2810 DELETE A9
2820 REM          RAIZPOLI2
2830 REM
2840 REM          SUB. PARA SOLUCION DE ECUACIONES POLINOMIALES
2850 REM          METODO: DESCENSO MAS PRONUNCIADO CON ESCALAMIENTO DE RAICES
2860 REM          31 DE MARZO DE 1980
2870 REM          ING. EFRAIN DEL PINO V.
2880 REM
2890 REM          N3 - GRADO DEL POLINOMIO
2900 REM          A3 - VECTOR CON COEFICIENTES EN ORDEN DESCENDENTE ...
2910 REM          DE POTENCIAS
2920 REM
2930 REM          X3 - VECTOR CON PARTES REALES DE LAS RAICES
2940 REM          Y3 - VECTOR CON PARTES IMAGINARIAS DE LAS RAICES
2950 REM
2960 REM          N3, A3 NO SON ALTERADOS POR LA SUBROUTINA
2970 REM
2980 N4=N3
2990 DELETE H3,C3,X3,Y3,U4,V4,U3,V3
3000 DIM H3(N4),C3(N4),X3(N4),Y3(N4)
3010 J3=0
3020 E0=1.0E-10
3030 E1=E0^2
3040 X3=0
3050 Y3=0
3060 FOR J=1 TO N4
3070 H3(J)=A3(J+1)/A3(1)
3080 NEXT J
3090 IF N4>0 THEN 3110
3100 RETURN
3110 IF H3(N4)<>0 THEN 3150
3120 J3=J3+1
3130 N4=N4-1
3140 GO TO 3090
3150 IF N4<>1 THEN 3190

```



```

3160 J3=J3+1
3170 X3(J3)=-H3(N4)
3180 RETURN
3190 IF N4<>2 THEN 3510
3200 P3=-H3(1)/2
3210 J3=J3+1
3220 T3=P3*P3-H3(2)
3230 IF T3<0 THEN 3280
3240 T3=SQR(T3)
3250 X3(J3)=P3+T3
3260 X3(J3+1)=P3-T3
3270 RETURN
3280 X3(J3)=P3
3290 X3(J3+1)=X3(J3)
3300 Y3(J3)=SQR(-T3)
3310 Y3(J3+1)=-Y3(J3)
3320 RETURN
3330 REM SUB. EVALUACION DE F(Z)=U4 + JV4
3340 U4=1
3350 V4=0
3360 FOR J=1 TO N4
3370 T3=U4*P3-V4*Q3+C3(J)
3380 V4=V4*P3+U4*Q3
3390 U4=T3
3400 NEXT J
3410 RETURN
3420 REM SUB. EVAL. F'(Z)=U3 + JV3
3430 U3=N4
3440 V3=0
3450 FOR J=1 TO N4-1
3460 T3=U3*P3-V3*Q3+(N4-J)*C3(J)
3470 V3=V3*P3+U3*Q3
3480 U3=T3
3490 NEXT J
3500 RETURN
3510 REM DESCENSO MAS PRONUNCIADO
3520 T3=ABS(H3(N4))
3530 DIM H3(N4),C3(N4)
3540 IF T3=1 THEN 3620
3550 H0=T3^(1/N4)
3560 T3=1
3570 FOR J=1 TO N4
3580 T3=T3*H0
3590 C3(J)=H3(J)/T3
3600 NEXT J
3610 GO TO 3640
3620 C3=H3
3630 H0=1
3640 P3=0.7
3650 Q3=0.6
3660 GOSUB 3330
3670 F1=U4*U4+V4*V4
3680 IF F1<E1--THEN- 3880
3690 GOSUB 3420

```

```

3700 T3=U3*U3+V3*V3
3710 F4=-(U4*U3+V4*V3)/T3
3720 Q4=(U4*V3-V4*U3)/T3
3730 P3=P3+F4
3740 Q3=Q3+Q4
3750 GOSUB 3330
3760 F2=U4*U4+V4*V4
3770 IF F2<E1 THEN 3860
3780 IF F2<F1 THEN 3840
3790 P3=P3-F4
3800 Q3=Q3-Q4
3810 F4=0.8*F4
3820 Q4=0.8*Q4
3830 GO TO 3730
3840 F1=F2
3850 GO TO 3690
3860 IF ABS(F4)<E0 AND ABS(Q4)<E0 THEN 3880
3870 GO TO 3840
3880 P3=P3*H0
3890 Q3=Q3*H0
3900 IF ABS(Q3)>E0 THEN 3920
3910 Q3=0
3920 J3=J3+1
3930 X3(J3)=P3
3940 Y3(J3)=Q3
3950 IF Q3=0 THEN 4090
3960 J3=J3+1
3970 X3(J3)=P3
3980 Y3(J3)=-Q3
3990 R=-2*P3
4000 S=P3*P3+Q3*Q3
4010 H3(1)=H3(1)-R
4020 H3(2)=H3(2)-R*H3(1)-S
4030 IF N4<5 THEN 4070
4040 FOR J=3 TO N4-2
4050 H3(J)=H3(J)-R*H3(J-1)-S*H3(J-2)
4060 NEXT J
4070 N4=N4-2
4080 GO TO 3150
4090 T3=1
4100 FOR J=1 TO N4-1
4110 T3=T3*P3+H3(J)
4120 H3(J)=T3
4130 NEXT J
4140 N4=N4-1
4150 GO TO 3150
4160 REM SUBROUTINA PARA CALCULAR COEF. DE UN POLINOMIO *****
4170 E0=1.0E-8
4180 IF ABS(V6(1))<E0 THEN 4240
4190 E(3)=1
4200 E(2)=-U6(1)*2
4210 E(1)=U6(1)*U6(1)+V6(1)*V6(1)
4220 J0=2
4230 GO TO 4270

```

```
4240 E(2)=1
4250 E(1)=-U6(1)
4260 J0=1
4270 I=J0
4280 IF I=N THEN 4490
4290 I=I+1
4300 IF ABS(V6(I))<E0 THEN 4430
4310 M2=-2*U6(I)
4320 N2=U6(I)*U6(I)+V6(I)*V6(I)
4330 I=I+1
4340 E(I+1)=1
4350 E(1)=E(I-2)+M2
4360 IF I=3 THEN 4400
4370 FOR J=I-1 TO 3 STEP -1
4380 E(J)=E(J-2)+M2*E(J-1)+N2*E(J)
4390 NEXT J
4400 E(2)=M2*E(1)+N2*E(2)
4410 E(1)=N2*E(1)
4420 GO TO 4480
4430 E(I+1)=1
4440 FOR J=I TO 2 STEP -1
4450 E(J)=E(J-1)-U6(I)*E(J)
4460 NEXT J
4470 E(1)=-E(1)*U6(I)
4480 IF I<N THEN 4290
4490 RETURN
```

```

1000 REM PROGRAMA: SALIDA
1010 O2=5
1020 IF O2<>01 THEN 800
1030 CALL "TIME",Z$
1040 U2=32
1050 PRINT "LJJ *** IMPRESION DE DATOS Y RESULTADOS ***"
1060 PRINT "JJJIMPRESION EN PAPEL? (SI O NO): GG";
1070 INPUT D$
1080 IF D$<>"SI" THEN 1120
1090 U2=51
1100 PRINT "JALISTE EL IMPRESOR (RETURN PARA CONTINUAR)GGG"
1110 INPUT D$
1120 PRINT @U2: USING 1130:Z$
1130 IMAGE/"ESCUELA POLITECNICA NACIONAL"55T,FA
1140 PRINT @U2: USING 1150:
1150 IMAGE /"REALIMENTACION DE ESTADO"
1160 IF N$=" " THEN 1220
1170 PRINT @U2: USING 1180:T$
1180 IMAGE /FA
1190 PRINT @U2: USING 1200:N$
1200 IMAGE /"DATOS ALMACENADOS EN EL ARCHIVO: "FA/72("-")
1210 GO TO 1240
1220 PRINT @U2: USING 1230:T$
1230 IMAGE /FA/72("-")
1240 PRINT @U2: USING 1250:N
1250 IMAGE /3X"ORDEN DEL SISTEMA: N= "FD
1260 REM ***** IMPRESION DE LA MATRIZ A *****
1270 A$="MATRIZ A"
1280 GOSUB 2940
1290 FOR I=1 TO N
1300 IF N<5 THEN 1320
1310 PRINT @U2: USING "/3X""FILA""FD""::":I
1320 PRINT @U2: USING "/3XS":
1330 FOR J=1 TO N
1340 PRINT @U2: USING--"5D,6D,3X,S":A(I,J)
1350 IF J=N THEN 1390
1360 IF INT(J/4)*4-J<>0 THEN 1400
1370 PRINT @U2: USING "/3XS":
1380 GO TO 1400
1390 PRINT @U2:
1400 NEXT J
1410 NEXT I
1420 REM ***** IMPRESION DEL VECTOR B *****
1430 A$="VECTOR B"
1440 GOSUB 2940
1450 I1=N
1460 DELETE V0
1470 DIM V0(I1)
1480 FOR I=1 TO I1
1490 V0(I)=B(I)
1500 NEXT I
1510 GOSUB 3000
1520 REM ***** IMPRESION DEL VECTOR C *****
1530 A$="VECTOR C"

```

```

1540 GOSUB 2940
1550 FOR I=1 TO I1
1560 V0(I)=C(1,I)
1570 NEXT I
1580 GOSUB 3000
1590 PRINT @U2: USING 1600:
1600 IMAGE /72("*.")
1610 REM ***** IMPRESION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA *****
1620 REM ***** DE LAZO ABIERTO DEL SISTEMA (PLANTA) *****
1630 A$="FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LAZO ABIERTO"
1640 GOSUB 2940
1650 PRINT @U2:"J *** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO ABIERTO ***J"
1660 I1=N+1
1670 DELETE Z0
1680 DIM Z0(I1)
1690 FOR I=1 TO I1
1700 Z0(I)=D(I)
1710 NEXT I
1720 GOSUB 3110
1730 I1=N
1740 DELETE X3,Y3
1750 DIM X3(I1),Y3(I1)
1760 FOR I=1 TO I1
1770 X3(I)=U9(I)
1780 Y3(I)=V9(I)
1790 NEXT I
1800 GOSUB 3170
1810 PRI @U2:"JJ *** COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE LAZO ABIERTO ***J"
1820 I1=W1+1
1830 DELETE Z0
1840 DIM Z0(I1)
1850 FOR I=1 TO I1
1860 Z0(I)=C1(1,I)
1870 NEXT I
1880 GOSUB 3110
1890 IF W1=0 THEN 1980
1900 I1=W1
1910 DELETE X3,Y3
1920 DIM X3(I1),Y3(I1)
1930 FOR I=1 TO I1
1940 X3(I)=U5(I)
1950 Y3(I)=V5(I)
1960 NEXT I
1970 GOSUB 3170
1980 PRINT @U2: USING 1600:
1990 IF O3<>2 THEN 2340
2000 IF U2<>51 THEN 2020
2010 PRINT @51:"L"
2020 REM ***** IMPRESION DE LOS NUMERADORES Y SUS RAICES *****
2030 REM ***** PARA LAS SALIDAS FICTICIAS DESEADAS *****
2040 A$="CALCULOS FICTICIOS DE LAZO ABIERTO"
2050 GOSUB 2940
2060 FOR J=1 TO W
2070 PRINT @U2:"JVECTOR ficticio C<";J;">"

```

```

2080 I1=N
2090 DELETE V0
2100 DIM V0(I1)
2110 FOR I=1 TO I1
2120 V0(I)=C4(J,I)
2130 NEXT I
2140 GOSUB 3000
2150 PRINT @U2:"JJ *** COEFICIENTES DEL NUMERADOR ***J"
2160 I1=W0(J)+1
2170 DELETE Z0
2180 DIM Z0(I1)
2190 FOR I=1 TO I1
2200 Z0(I)=C5(J,I)
2210 NEXT I
2220 GOSUB 3110
2230 IF W0(J)=0 THEN 2320
2240 I1=W0(J)
2250 DELETE X3,Y3
2260 DIM X3(I1),Y3(I1)
2270 FOR I=1 TO I1
2280 X3(I)=U8(J,I)
2290 Y3(I)=V8(J,I)
2300 NEXT I
2310 GOSUB 3170
2320 NEXT J
2330 PRINT @U2: USING 1600:
2340 IF D4<>2 THEN 2840
2350 PRINT @S1:"L"
2360-REM-*****-IMPRESION-DE-LOS-PARAMETROS-NECESARIOS-PARA-*****
2370 REM *****-EL ESTUDIO DE LA REALIMENTACION DE ESTADO. *****
2380 A$="REALIMENTACION DE ESTADO"
2390 GOSUB 2940
2400 A$=S$
2410 GOSUB 2940
2420-FRI-@U2:"JJ *** -COEFICIENTES DEL NUMERADOR DE Hequivalente ***J
2430 I1=W2+1
2440 DELETE Z0
2450 DIM Z0(I1)
2460 FOR I=1 TO I1
2470 Z0(I)=H(1,I)
2480 NEXT I
2490 GOSUB 3110
2500 IF W2=0 THEN 2590
2510 I1=W2
2520 DELETE X3,Y3
2530 DIM X3(I1),Y3(I1)
2540 FOR I=1 TO I1
2550 X3(I)=U7(I)
2560 Y3(I)=V7(I)
2570 NEXT I
2580 GOSUB 3170
2590 PRINT @U2:"JJ *** COEFICIENTES DE REALIMENTACION ***J"
2600-FOR-I=1 TO N
2610 PRINT @U2: USING 2620:I,H1(1,I)

```

```

2620 IMAGE 10X,"K<"FD">= "FD.8D
2630 NEXT I
2640 PRINT @U2:"JJ *** GANANCIA ***J"
2650 PRINT @U2:" G= ";G
2660 PRINT @U2:"JJ *** POLINOMIO CARACTERISTICO DE LAZO CERRADO ***J"
2670 I1=N+1
2680 DELETE Z0
2690 DIM Z0(I1)
2700 FOR I=1 TO I1
2710 Z0(I)=E(I)
2720 NEXT I
2730 GOSUB 3120
2740 I1=N
2750 DELETE X3,Y3
2760 DIM X3(I1),Y3(I1)
2770 FOR I=1 TO I1
2780 X3(I)=U6(I)
2790 Y3(I)=V6(I)
2800 NEXT I
2810 GOSUB 3180
2820 PRINT @U2:"JJ *** MAXIMO ERROR NORMALIZADO (verificacion) ***J"
2830 PRINT @U2:" E1= ";E1
2840 PRINT "JJDESEA REPETIR LA IMPRESION? (SI O NO): G";
2850 INPUT D$
2860 IF D$<>"SI" THEN 2890
2870 PAGE
2880 GO TO 1000
2890 PRINT "JJFIN DE IMPRESION GGGG"
2900 PRINT "JJPARA HACER OTROS CALCULOS VEA EL INDICE DE PROGRAMAS";
2910 PRINT " (TECLA 1)"
2920 END
2930 REM ***** FIN DE SALIDA *****
2940 REM *** SUBROUTINA PARA SUBRAYAR TITULOS E IMPRIMIRLOS *****
2950 X$="/3X,FA/3X;(''='')"
2960 C$=STR(LEN(A$))
2970 X$=REP(C$,POS(X$,";",1),1)
2980 PRINT @U2: USING X$:A$
2990 RETURN
3000 REM *** SUBROUTINA PARA IMPRIMIR VECTORES *****
3010 PRINT @U2: USING "/3XS":
3020 FOR I=1 TO I1
3030 PRINT @U2: USING "5D.6D3XS":V0(I)
3040 IF I=I1 THEN 3080
3050 IF INT(I/4)*4-I<>0 THEN 3090
3060 PRINT @U2: USING "/3XS":
3070 GO TO 3090
3080 PRINT @U2:
3090 NEXT I
3100 RETURN
3110 REM *** SUBROUTINA PARA IMPRIMIR COEFICIENTES DE POLINOMIOS *****
3120 FOR I=I1 TO 1 STEP -1
3130 PRINT @U2: USING 3140:I-1,Z0(I)
3140 -IMAGE-10X,"COEF. DE S~"FD"= "FD.8D
3150 NEXT I

```

```
3160 RETURN
3170 REM *** SUBROUTINA PARA IMPRIMIR RAICES DE POLINOMIOS ****
3180 PRINT @U2: USING 3190:
3190 IMAGE //5X"LAS RAICES SON:"12X"PARTE REAL"7X"PARTE IMAGINARIA"/
3200 FOR I=1 TO I1
3210 PRINT @U2: USING 3220:I,X3(I),Y3(I)
3220 IMAGE 8X,"RAIZ <"FD">= "10X6D.8D6X6D.8D
3230 NEXT I
3240 RETURN
```


ANEXO B

MODO DE EMPLEO DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS

MODULO DE USO DE LOS PROGRAMAS

1. Prenda el computador
2. Coloque el disco en una de las unidades
3. Inicialice el sistema de reloj del computador desde el teclado, mediante la instrucción:

CALL "SETTIM", "DD-MMM-AA / HH:MM:SS"

y luego presione la tecla RETURN,

donde: DD : día

MMM : mes (iniciales en Inglés)

AA : año

/ : espacio en blanco

HH : hora

MM : minutos

SS : segundos (opcional)

4. Monte el disco en el sistema mediante la instrucción:

CALL "MOUNT", N°, X\$

y luego aplaste la tecla RETURN,

donde: N° : número de la unidad en la que se ha
colocado el disco.

5. Cargue la memoria del computador con el programa maestro, usando la instrucción:

OLD "JCGUERRA"

y presione la tecla RETURN

6. Corra el programa con la instrucción RUN y luego presione RETURN.
7. Continúe adelante siguiendo las instrucciones que le da el computador a través de la pantalla.
Como se aprecia en los pasos anteriores, cada vez que se deba dar un comando o ingresar un dato al computador, éstos deben ser tecleados y en seguida presionar la tecla RETURN.
8. Si en algún momento se desea interrumpir la ejecución de un programa, basta con presionar dos veces la tecla BREAK.
9. Una vez cargada la memoria del computador con el programa maestro, y luego de que se ha terminado una instrucción completa o se ha interrumpido la misma, puede iniciarse una nueva ejecución presionando la tecla definible 1.

Para ilustrar la manera de ingresar los datos en el computador se hará uso del siguiente ejemplo, cuya representación en el espacio de estado está dada por:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

El diagrama de bloques de la planta se muestra en la figura 1-"anexo b".

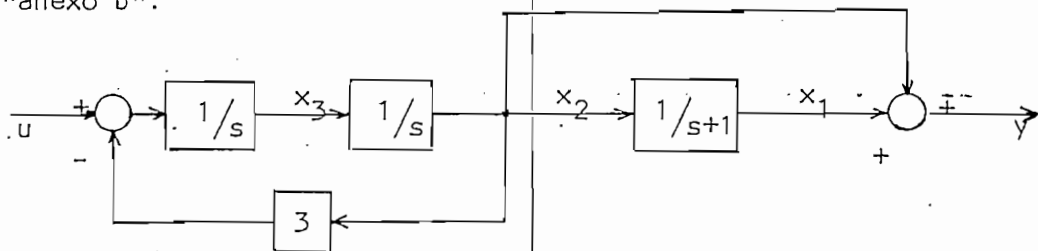


Figura 1 - anexo b

Con esta información se puede tener la entrada básica de datos que se exige en el ingreso de ellos; y son:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y,

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A deberá ingresarse por filas.

Ahora bien, si se quiere encontrar la función interna de transferencia $X_3(s)/U(s)$, es decir, hacer a $X_3(s)$ una salida ficticia, se deberá definir un vector \underline{c}^T ficticio dado por

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este vector debe ingresarse para encontrar dicha función de transferencia cuando se use la tecla definible tres (3) que sirve para la determinación de salidas ficticias.

Se debe tener como resultado:

$$\frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2 + 3s + 3} = \frac{s}{(s^2 + 3)}$$

Cuando se desea usar el programa "realimentación de estado" definido en la tecla cuatro (4), se tienen dos posibilidades: análisis o diseño.

Cuando se escoge análisis, se debe ingresar la ganancia K y el vector de realimentación \underline{k}^T ; supongamos que se escogen los siguientes valores:

$$K = 2$$

$$k_1 = 0.5$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = 1.5$$

Entonces se deberá obtener una función de transferencia de lazo cerrado igual a:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} = \frac{s(s+2)}{(s+1+j1)(s+1-j1)(s+2)}$$

Cuando se escoge diseño, pueden ingresarse los polos de la función de transferencia de lazo cerrado o los coeficientes de su polinomio característico; para el primer caso, se escogen los siguientes polos:

$$s_{1,2} = -1 \pm j1$$

$$s_3 = -2$$

Para el segundo caso pueden ingresarse los coeficientes como sigue

$$\text{coef. } s^3 = 1$$

$$\text{coef. } s^2 = 4$$

$$\text{coef. } s^1 = 6$$

$$\text{coef. } s^0 = 4$$

Para ambos casos se deben obtener la misma ganancia K y el mismo vector de estado \underline{k}^T , ya que el polinomio característico ingresado tiene como raíces los valores que propusieron como polos

del sistema. Así,

$$K = 2$$

$$k_1 = 0.5$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = 1.5$$

B I B L I O G R A F I A

- WIBERG DONALD. Espacio de estado y sistemas lineales. Serie Schaum, Mc Graw Hill Inc. 1973.
- CHEN-CHI-TSONG. Introduction to linear systems theory. Holt, Rinchart, Winston, N.Y., 1970.
- RAVEN FRANCIS. Automatic control engineering, Mc Graw Hill. 1978.
- D'AZZO, J; HOUPIS, C. Linear control systems. Analysis and Design. Mc Graw Hill, N.Y. 1975.
- SHINNERS. Modern control systems (theory and applications). Addison - Wesley. 1972.
- GUPTA, HASDORFF. Fundamentals of automatic control, John Wiley & sons Inc. 1970.
- HALE. Introduction to control systems. Analysis and Design. Prentice Hall Inc. 1973.
- LAYTON. Multivariable control theory. Peter Peregrinus Ltd., 1976.
- ZADEH, DESOER. Linear systems theory. The State Space Approach, Mc Graw Hill, 1963.
- OGATA K. Ingeniería de control moderna, Prentice Hall, 1980.