ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DETALLADO DE PROBLEMAS PARABÓLICOS LOCALES.
UNA INTRODUCCIÓN A PROBLEMAS NO LOCALES

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

PAÚL ALEJANDRO UBILLÚS GARRIDO

paul.ubillus@epn.edu.ec

Director: MIGUEL ÁNGEL YANGARI SOSA, PhD.

miguel.yangari@epn.edu.ec

QUITO, JULIO 2018

DECLARACIÓN

Yo PAÚL ALEJANDRO UBILLÚS GARRIDO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

Paúl Alejandro Ubilhús Garrido

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por PAÚL ALEJANDRO UBILLÚS GARRIDO, bajo mi supervisión.

PhD. Miguel Ángel Yangari Sosa

Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A Miguel Ángel Yangari Sosa, quien hizo posible mi participación en este proyecto de investigación y por el tiempo dedicado a la supervisión de este trabajo.

A mi familia por su apoyo incondicional.

DEDICATORIA

A mis padres,

a mi hermano.

A mi amigo Carlos.

Índice general

Resumen **VII**

Abstract **IX**

1 Preliminares **1**

2 Espacios de Sobolev **4**

2.1 Resultados previos 4

2.2 Espacios $W^{1,p}(U)$ 6

2.3 Espacios $W^{m,p}(U)$ 10

2.4 Operadores de extensión 11

2.5 Inmersiones de Sobolev 12

2.6 El espacio $W_0^{1,p}(U)$ 14

2.7 El espacio $H^{-1}(U)$ 14

2.8 Espacios que involucran tiempo 15

3 Problemas parabólicos locales **25**

3.1 Ecuaciones elípticas 26

3.2 Ecuaciones parabólicas 30

3.2.1 Soluciones débiles 31

3.3 Existencia de soluciones débiles 34

3.3.1 Aproximaciones de Galerkin 34

3.3.2 Estimaciones de energía 36

3.3.3 Existencia y unicidad 42

3.4 Regularidad 49

4 Problemas no locales **85**

4.1 Operadores no locales 85

4.2 Cálculo vectorial no local 86
4.3 Estudio del Kernel 94
4.4 Espacios de Sobolev fraccionarios 96
4.5 Equivalencia de espacios 102
4.6 Formulaciones variacionales 111
4.6.1 Caso elíptico 112
4.6.2 Caso parabólico 120

Bibliografía **123**

Resumen

Una ecuación diferencial parcial (EDP) es una ecuación que involucra una función desconocida de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales. Estas nos ayudan a describir una amplia variedad de situaciones físicas tales como: el sonido, el calor, elasticidad, fluidos dinámicos, etc.

En la actualidad la teoría respecto a las ecuaciones lineales puede ser considerada suficientemente desarrollada y consolidada. Pero, por el contrario, las ecuaciones no lineales presentan una gran variedad de aspectos y complicaciones de tal manera que no existen grandes avances en este campo. Los resultados existentes y las nuevas investigaciones se concentran más en casos específicos, especialmente dirigidos a ciencias aplicadas.

En este trabajo, nos enfocaremos en las ecuaciones de tipo elíptico y parabólico. Para el caso local, trabajaremos las ecuaciones evolutivas de tipo parabólico detallando de manera prolija todas las demostraciones presentes en [10] respecto a existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles utilizando la técnica de aproximaciones de Galerkin, para luego entrar al estudio de las ecuaciones no locales: caso elíptico y caso parabólico. En este último tema incluiremos resultados de cálculo vectorial no local y el estudio de espacios de Sobolev fraccionarios, con el objetivo de demostrar, en un caso específico, la equivalencia que existe entre estos espacios y los espacios no locales de energía los cuales se detallarán en su debido momento. Por último, realizaremos las formulaciones variacionales de ambos problemas bajo condiciones de volumen de tipo Dirichlet y Neumann, y estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones débiles para el caso elíptico no local bajo ambas condiciones de volumen.

Abstract

A partial differential equation (PDE) is an equation that involves an unknown function of two or more variables and some of its partial derivatives. These help us to describe a wide variety of physical situations such as: sound, heat, elasticity, dynamic fluids, etc.

Nowadays the theory about linear equations can be considered as sufficiently developed and consolidated. But, on the other hand, the nonlinear equations present a great variety of aspects and complications in such a way that there are no great advances in this field. Existing results and new research are concentrated in specific cases, especially for applied sciences.
In this work, we will focus on the elliptic and parabolic equations. For the local case, we will work the parabolic evolutionary equations detailing all the proofs present in [10] regarding the existence, uniqueness and regularity of weak solutions by using the Galerkin approximation technique, to then enter the study of non-local equations: elliptical case and parabolic case. In this last topic we will include results of non-local vector calculus and the study of fractional Sobolev spaces, with the aim of demonstrating, in a specific case, the equivalence that exists between these spaces and the non-local spaces of energy which . By last, we will make the variational formulations of both problems under Dirichlet and Neumann volume conditions, and we will study the existence and uniqueness of the weak solutions for the non-local elliptic case under both volume conditions.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección realizaremos una breve introducción de los capítulos que desarrollaremos en este proyecto de titulación y explicaremos las razones por las cuales se realizó este trabajo. Empecemos detallando dos conceptos básicos y medulares.

Fijemos un entero $k \geq 1$ y dado un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Una expresión de la forma

$$u_t + F\left(x, u(x), Du(x), \ldots, D^{k-1}u(x), D^k u(x)\right) = 0 \tag{a}$$

con $x \in U$ y $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, es llamada una ecuación diferencial parcial (EDP) de orden k de tipo parabólico. Puesto que u es una función de n variables espaciales, esta admite $n+1$ derivadas parciales de primer orden, n^2 derivadas parciales de segundo orden y en general n^j derivadas parciales de orden j, por ende es natural considerar

$$F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

como una función dada, y

$$u : U \times (0, T] \to \mathbb{R}$$

la función desconocida con $T > 0$.

Resolvemos la EDP cuando encontramos todas las soluciones u que satisfacen la ecuación (a). Por encontrar soluciones nos referimos a encontrar explícitamente las soluciones, o en su defecto, deducir su existencia y otras propiedades de las soluciones.

Los tipos de EDPs que utilizaremos en este trabajo son los siguientes:

- La ecuación diferencial parcial (a) es lineal si esta tiene la forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x,t)D^\alpha u = f(x,t)$$

para funciones dadas a_α ($|\alpha| \leq k$), f. Esta EDP se dice homogénea si $f \equiv 0$.

- Por otro lado, la EDP (a) es no lineal si no depende linealmente de las derivadas de mayor orden.

Una expresión de la forma

$$u_t + \mathbf{F}\left(x, \mathbf{u}(x), D\mathbf{u}(x), \ldots, D^{k-1}\mathbf{u}(x), D^k\mathbf{u}(x)\right) = \mathbf{0} \tag{b}$$

con $x \in U$ y $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, es llamada un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de orden k de tipo parabólico, donde

$$\mathbf{F} : U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \cdots \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \mathbb{R}^{mn^k} \to \mathbb{R}^m$$

es una función dada, y

$$\mathbf{u} : U \times (0,T] \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m)$$

es desconocida con $T > 0$. La notación en negrilla representa funciones que toman valores en un espacio vectorial.

Aquí suponemos que el sistema contiene el mismo número m de ecuaciones escalares como incógnitas $(u^1, \ldots, u^m)$. Este es el caso más conocido, aunque otros sistemas pueden tener menos o más ecuaciones que incógnitas. Tomemos en cuenta que $Du = D_x u = (u_{x1}, \ldots, u_{xn})$ denota el gradiente de u con respecto a la variable espacial $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la variable t siempre denota tiempo.

Los sistemas de EDPs se clasifican de la misma manera que las EDPs: lineal, no lineal, etc.

No existe una teoría general conocida sobre la resolución de todas las ecuaciones diferenciales parciales. Tal teoría es muy poco probable que exista, debido a la gran variedad de fenómenos físicos, geométricos y probabilísticos que pueden ser modelados a través de las EDPs. En la actualidad la investigación se centra en algunas ecuaciones diferenciales parciales particulares que son importantes para las aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas, con la esperanza

de que la comprensión de los orígenes de estas EDP puede dar pistas sobre sus soluciones.
El caso local de este trabajo será desarrollado a partir de la forma generalizada de la ecuación del calor

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{c}$$

donde $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $\Delta = \nabla^2$ denota el operador laplaciano. Esta ecuación ha sido muy estudiada en los últimos años ([2] y [10]), aunque en la literatura no es posible encontrar demostraciones detalladas de su estudio.
Para el caso no local, estudiaremos problemas de tipo elíptico y parabólico. La teoría de problemas no locales ha estado en constante desarrollo en los últimos años en áreas como: procesamiento de imágenes, teoría de grafos, cálculo fraccionario, análisis funcional, procesos estocásticos (procesos de Lévy) y control óptimo. La principal diferencia entre los problemas no locales y las ecuaciones diferenciales parciales clásicas (locales) radica en cómo dos o más dominios interactúan entre sí. En el caso local, las interacciones solo ocurren por contacto, mientras que en el caso no local pueden ocurrir a cierta distancia. Adémas, introduciremos condiciones de volumen en nuestros problemas no locales. Estas condiciones nos ayudan a trabajar con mayor detalle y precisión sobre el operador no local.

El primer objetivo de este trabajo se centra en el caso local de las ecuaciones evolutivas de tipo parabólico, detallaremos de manera rigurosa y prolija las demostraciones de los teoremas de existencia, unicidad y regularidad expuestos en el Capítulo 7 de [10]. Esto lo realizaremos en el Capítulo 3. Pero antes, en el Capítulo 2, expondremos algunos resultados e ideas importantes sobre Espacios de Sobolev (ver[2]). En el Capítulo 4 desarrollaremos otro de los objetivos de este trabajo, el cual consiste en realizar un estudio introductorio a los problemas no locales: elípticos y parabólicos (ver [6], [7], [11] y [8]), para esto reintroduciremos resultados de cálculo vectorial no local (ver [6]) y detallaremos la demostración del teorema de equivalencia que existe entre los espacios de Sobolev fraccionarios y los espacios no locales de energía (ver [7]). Por último, realizaremos las formulaciones variacionales de ambos problemas bajo condiciones de volumen de tipo Dirichlet y Neumann, y estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones débiles para el caso elíptico no local bajo ambas condiciones de volumen.

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

En este capítulo exponemos conceptos que servirán de base para el desarrollo de los siguientes capítulos. Introduciremos teoría básica de espacios de Sobolev y algunos resultados clásicos, los cuales nos ayudarán al momento de detallar resultados posteriores. Empezaremos presentando resultados clásicos necesarios para la realización de este trabajo.

2.1. Resultados previos

En esta sección incluiremos teoremas clásicos que servirán de soporte para las demostraciones que se realizarán a lo largo de este trabajo.

Teorema 1 (Fubini)**.** *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios medidos y ν completo. Sea f una función integrable sobre $X \times Y$ con respecto a la medida producto $\mu \times \nu$. Entonces para c.t.p. $x \in X$, la sección f_x (o x-sección de f), $f(x, \cdot)$, es integrable sobre Y con respecto a ν y además*

$$\int_{X\times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x).$$

Demostración. Ver [16, pág 419-420]. □

Teorema 2 (Riesz-Fischer)**.** *$L^p(U)$ es un espacio de Banach para cualquier p, $1 \leq p \leq \infty$. Además, dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $L^p(U)$ y dado $f \in L^p(U)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(U)} \to 0$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y una función $h \in L^p(U)$ tales que*

(I) *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ c.t.p. en U*

(II) *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ c.t.p. en U.*

Demostración. Ver [2, pág 93-95]. □

Teorema 3 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y H^* su dual topológico. Dado cualquier $\varphi \in H^*$ existe una única función $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u) \quad \forall u \in H.$$

Más aún,

$$|f| = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Demostración. Ver [2, pág 135-136]. □

Teorema 4 (Teorema de convergencia dominada)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L^1(U)$ que satisface*

(I) *$f_n(x) \to f(x)$ c.t.p. en U,*

(II) *existe una función $g \in L^1(U)$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en U. Entonces $f \in L^1(U)$ y $\|fn - f\|_1 \to 0$.*

Es decir, $\lim_{n\to\infty} \int_U f_n \, dx = \int_U f \, dx$.

Demostración. Ver [16, pág 88]. □

Teorema 5 (Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Asumamos que*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

es una función bilineal, para la cual existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que

(I) $$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad \forall\, u, v \in H$$

y

(II) $$\beta \|u\|^2 \leq B[u, u] \quad \forall\, u \in H.$$

Es decir, $B[\cdot, \cdot]$ es continua y coerciva. Finalmente, sea $f : H \to \mathbb{R}$ un funcional lineal acotado sobre H. Entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

para todo $v \in H$.

Demostración. Ver [10, pág 315-317]. □

Teorema 6 (Hilbert-Schmidt)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada operador compacto no negativo y simétrico (autoadjunto) $T: H \to H$, existe una sucesión de valores propios $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \geq \eta_k \geq \ldots > 0$$

cuyo rango es finito o que converge a cero, y una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de vectores propios, es decir, $Te_i = \eta_i e_i$, tales que

(I) *para todo $x \in H$ tenemos que $x = y + \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ donde $y \in \ker T$,*

(II) $$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Tx, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \langle x, e_i \rangle e_i$$

y para todo $z \in \overline{ImT}$ (clausura de la imagen del operador T) tenemos $z = \sum_{i=1}^{\infty} \langle z, e_i \rangle e_i$; es decir, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\overline{ImT}$.

Demostración. Ver [9, pág 90-91]. □

2.2. Espacios $W^{1,p}(U)$

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W^{1,p}(U)$ se define como

$$W^{1,p}(U) = \Bigg\{ u \in L^p(U) : \exists\, g_1, \ldots, g_n \in L^p(U) \text{ tales que } \int_U u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_U g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(U),\ \forall i = 1, \ldots, n \Bigg\} \tag{2.1}$$

equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} = \|u\|_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U)} \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty.$$

Además, se establece

$$H^1(U) = W^{1,2}(U),$$

equipado con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(U)} = (u, v)_{L^2(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(U)}.$$

Presentemos el primer resultado importante de este capítulo.

Teorema 7. *Para $p \in [1, \infty]$, las normas*

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} = \left(\|u\|^p_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p}$$

y

$$|||u|||_{W^{1,p}(U)} = \|u\|_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U)}$$

son equivalentes.

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $p, q \in [1, +\infty]$ exponentes conjungados, cualesquiera. Tomemos las normas

$$\|x\|^p_p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Entonces

$$\|x\|^p_p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \le j \le n} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \|x\|^p_\infty = n\|x\|^p_\infty,$$

así

$$\|x\|_p \le n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

Por otro lado

$$\|x\|^p_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|^p_p$$

entonces

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p.$$

Así, para $x \neq 0$ tenemos

$$1 \le \frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \le n^{1/p},$$

de manera análoga, para $q \in [1, \infty]$

$$1 \le \frac{\|x\|_q}{\|x\|_\infty} \le n^{1/q},$$

más aún

$$n^{-1/q} \le \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q} \le n^{1/p}.$$

Tomemos

$$x = \left(\|u\|_{L^p(U)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(U)}, \ldots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^p(U)} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

por lo cual

$$\left(\|u\|^p_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(U)} \right)^{1/p} =: \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

y

$$\|u\|_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U)} =: |||u|||_{W^{1,p}(U)}$$

por tanto

$$(n+1)^{-1}|||u|||_{W^{1,p}(U)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(U)} \leq (n+1)^{1/p}|||u|||_{W^{1,p}(U)}.$$

□

Continuemos con una proposición importante para la demostración de algunos teoremas muy utilizados en este trabajo.

Proposición 1. *$W^{1,p}(U)$ es un espacio de Banach para cada $1 \leq p \leq \infty$, es reflexivo para cada $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Veamos la demostración de que $W^{1,p}(U)$ es un espacio de Banach para cada $1 \leq p \leq \infty$. Para esto, sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(U)$. Entonces

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(U)} \leq \|u_n - u_m\|_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U)} = \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(U)} \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$. Así $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy en $L^p(U)$. Por el Teorema de Riesz-Fisher (Teorema 2), $L^p(U)$ es de Banach, entonces existe $u \in L^p(U)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(U)$. Ahora, tomando $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_{L^p(U)} \leq \|u_n - u_m\|_{L^p(U)} + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right\|_{L^p(U)} = \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(U)} \to 0.$$

cuando $n, m \to \infty$. Así $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{n}$ es de Cauchy en $L^p(U)$ y por ende, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $g_i \in L^p(U)$ tal que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to g_i$ en $L^p(U)$. A continuación demostremos que $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, es decir, para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$ demostremos que

$$\int_U u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_U g_i \varphi \, dx.$$

Por el Teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned}\int_U u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx &= \int_U \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_U u_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx\\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_U \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\,dx\\ &= -\int_U \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx\\ &= -\int_U g_i\varphi\,dx\end{aligned}$$

por tanto $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ y así

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(U)} = \|u_n - u\|_{L^p(U)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(U)} \to 0$$

cuando $n\to\infty$. Concluímos que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(U)$. □

Las demostraciones de reflexividad y separabilidad no se incluirán en este trabajo debido a que se utilizan temas que no son de interés para el presente trabajo. Sin embargo, se pueden ver en [16] y [2].

Ahora, presentaremos algunos resultados de diferenciación en espacios de Sobolev, las demostraciones pueden verse en [2, pág 269-271]

Proposición 2 (Diferenciación de un producto)**.** *Sean $u, v \in W^{1,p}(U)\cap L^\infty(U)$ con $1 \le p \le \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(U)\cap L^\infty(U)$ y se cumple que*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1,\dots,n.$$

Proposición 3 (Diferenciación de una composición)**.** *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \le M$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y para alguna constante M. Sea $u \in W^{1,p}(U)$ con $1 \le p \le \infty$. Entonces*

$$G\circ u \in W^{1,p}(U) \text{ y } \frac{\partial}{\partial x_i}(G\circ u) = (G'\circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1,\dots,n.$$

Proposición 4 (Fórmula de cambio de variable)**.** *Sean U y U' dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y sea $H: U' \to U$ una función biyectiva, $x = H(y)$, tal que $H \in C^1(U')$, $H^{-1} \in C^1(U)$,*

Jac $H \in L^\infty(U')$, *Jac* $H^{-1} \in L^\infty(U)$.[1] *Sea* $u \in W^{1,p}(U)$ *con* $1 \le p \le \infty$. *Entonces* $u \circ H \in W^{1,p}(U')$ *y*

$$\frac{\partial}{\partial y_j} u\big(H(y)\big) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\big(H(y)\big) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \textit{para todo } j = 1, \dots, n.$$

2.3. Espacios $W^{m,p}(U)$

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $m \ge 2$ un entero y p un número real con $1 \le p \le \infty$. Definimos

$$W^{m,p}(U) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(U) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(U) \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

De manera alternativa, estos conjuntos pueden ser presentados como

$$W^{m,p}(U) = \left\{ u \in L^p(U) : \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \le m,\ \exists\, g_\alpha \in L^p(U) \text{ tal que} \right. \\ \left. \int_U u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_U g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U) \right\}, \tag{2.2}$$

donde hemos utilizado la notación estándar de multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \ge 0$ un entero y para todo $i = 1, \dots, n$,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{y} \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Establecemos $D^\alpha u = g_\alpha$. El espacio $W^{m,p}(U)$ equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(U)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}$$

es un espacio de Banach. Si U es suficientemente suave con frontera ∂U acotada, entonces la norma de $W^{m,p}(U)$ es equivalente a la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(U)} = \|u\|_{L^p(U)} + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)}$$

[1] Jac H denota la matriz Jacobiana $\frac{\partial H_i}{\partial y_j}$; en consecuencia Jac H es una función en $L^\infty(U')^{n \times n}$ y Jac H^{-1} es una función en $L^\infty(U)^{n \times n}$.

Más aún, se puede demostrar que para cada multi-índice α con $0 < |\alpha| < m$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante C (depende de $U,\ \varepsilon,\ \alpha$) tal que

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(U)} \leq C\|u\|_{L^p(U)} + \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{L^p(U)} \quad \forall u \in W^{m,p}(U),$$

la demostración se puede ver en [1].

El tema presentado a continuación nos servirá para tratar de mejor manera las demostraciones de los teoremas de regularidad.

2.4. Operadores de extensión

El objetivo principal en esta sección es extender una función $u \in W^{1,p}(U)$ a una función $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Esto no es siempre posible (en un dominio general U). Sin embargo, si U es suave, es posible construir una extensión. Empecemos dando una notación precisa de conjunto abierto suave.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$x = (x', x_n) \text{ con } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

y establecemos

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_+ &= \{x = (x', x_n);\ x_n > 0\}, \\ Q &= \{x = (x', x_n);\ |x'| < 1 \text{ y } |x_n| < 1\}, \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}^n_+, \\ Q_0 &= \{x = (x', 0);\ |x'| < 1\}. \end{aligned}$$

Definición. Decimos que un conjunto abierto U es de clase C^1 si para cada $x \in \partial U$ existe una vecindad V de $x \in \mathbb{R}^n$ y una función biyectiva $H:\ Q \to V$ tal que

$$H \in C^1(\bar{Q}),\ H^{-1} \in C^1(\bar{V}),\ H(Q_+) = V \cap Q,\ \text{y } H(Q_0) = V \cap \partial U.$$

La función H es conocida como *carta local*.

Teorema 8. *Supongamos que U es de clase C^1 con ∂U acotada (o también $U = \mathbb{R}^n_+$). Entonces existe un operador lineal de extensión*

$$P:\ W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

tal que para todo $u \in W^{1,p}(U)$,

(I) $Pu_{|U} = u$,

(II) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^p(U)}$,

(III) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$,

donde C depende solamente de U.

Demostración. Ver [2, pág 273-275]. □

Otro tema importante y muy utilizado en este trabajo son las inmersiones de Sobolev para el caso $U \subset \mathbb{R}^n$. Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser vistas en [2, pág 284-286].

2.5. Inmersiones de Sobolev

Supongamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de clase C^1 con frontera ∂U acotada o también podemos considerar $U = \mathbb{R}^n_+$.

Proposición 5. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Tenemos que*

$$\begin{aligned} &W^{1,p}(U) \subset L^{p^*}(U), \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} && \text{si } p < n, \\ &W^{1,p}(U) \subset L^q(U), \quad \text{para todo } q \in [p, +\infty), && \text{si } p = n, \\ &W^{1,p}(U) \subset L^\infty(U), && \text{si } p > n, \end{aligned}$$

y todas estas inyecciones son continuas. Más aún, si $p > n$ tenemos que para todo $u \in W^{1,p}(U)$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}|x - y|^\alpha \quad \text{c.t.p. } x, y \in U,$$

con $\alpha = 1 - (n/p)$ y C depende solamente de U, p y n. En particular, $W^{1,p}(U) \subset C(U)$.[2]

[2] En este caso, la inclusión es módulo un representante continuo.

Proposición 6. *Sea $m \geq 1$ un entero y dado $p \in [1, +\infty)$. Tenemos*

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(U) \subset L^q(U), \quad \text{donde} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \quad \text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \\ &W^{m,p}(U) \subset L^q(U), \quad \text{para todo } q \in [p, +\infty), \quad \text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0, \\ &W^{m,p}(U) \subset L^\infty(U), \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0, \end{aligned}$$

y todas estas inyecciones son continuas. Más aún, si $m - (n/p) > 0$ no es entero, entonces

$$W^{m,p}(U) \subset C^k(\bar{U}), \text{ donde } k = [m - (n/p)]$$

con

$$C^k(\bar{U}) = \{u \in C^k(U);\ D^\alpha u \text{ tiene una extensión continua sobre } \bar{U} \text{ para todo } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k\}.$$

Para todo $u \in W^{m,p}(U)$, tenemos que

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(U)} \quad \text{para todo } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k$$

y

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(U)}|x - y|^\theta \text{ c.t.p. } x, y \in U, \text{ para todo } \alpha \text{ con } |\alpha| = k$$

con $k = [m - (n/p)]$ y $\theta = [m - (n/p)] - k$ $(0 < \theta < 1)$.

Teorema 9 (Rellich-Kondrachov)**.** *Supongamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y de clase C^1. Entonces tenemos las siguientes inyecciones compactas:*

$$\begin{aligned} &W^{1,p}(U) \subset L^q(U), \quad \text{para todo } q \in [1, p^*), \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{si } p < n, \\ &W^{1,p}(U) \subset L^q(U), \quad \text{para todo } q \in [p, +\infty), \qquad\qquad\qquad\quad \text{si } p = n, \\ &W^{1,p}(U) \subset C(\bar{U}), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } p > n. \end{aligned}$$

En particular, $W^{1,p}(U) \subset L^p(U)$ con inyección compacta para todo p y todo n.

Por último, detallaremos brevemente los espacios $H_0^1(U)$, $H^{-1}(U)$ y los espacios que involucran tiempo (espacios de Bochner). Luego, presentaremos un teorema relacionado con la existencia de los valores propios de $-\Delta$ el cual es un resultado muy útil al momento de trabajar el tema de regularidad de problemas parabólicos locales de segundo orden.

2.6. El espacio $W_0^{1,p}(U)$

Definición. Sea $1 \leq p < \infty$. $W_0^{1,p}(U)$ denota la clausura de $C_c^1(U)$ en $W^{1,p}(U)$.

Establecemos

$$H_0^1(U) = W_0^{1,2}(U).$$

El espacio $W_0^{1,p}(U)$, equipado con la norma de $W^{1,p}(U)$ es un espacio de Banach separable; reflexivo si $1 < p < \infty$. H_0^1, equipado con el producto escalar de $H^1(U)$, es un espacio de Hilbert.

Observación 1. Como $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Así, si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $U \neq \mathbb{R}^n$, entonces en general, $W_0^{1,p}(U) \neq W^{1,p}(U)$.

Proposición 7 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y U es un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante C (dependiendo solo de U y p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(U).$$

Demostración. Ver [10, pág 290]. □

2.7. El espacio $H^{-1}(U)$

Como veremos en nuestro estudio sobre ecuaciones parabólicas locales (Capítulo 3), es importante tener una caracterización explícita del espacio dual de $H_0^1(U)$.

Notaremos como $H^{-1}(U)$ al espacio dual de $H_0^1(U)$. En otras palabras f pertenece a $H_0^1(U)$ siempre que f sea un funcional lineal acotado en $H_0^1(U)$. Escribiremos $\langle\ ,\ \rangle$ para denotar el producto en dualidad entre $H^{-1}(U)$ y $H_0^1(U)$.

Si $f \in H^{-1}(U)$, definimos la norma

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup\left\{ |\langle f, u\rangle| \,\middle|\, u \in H_0^1(U),\ \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1 \right\}.$$

Teorema 10 (Caracterización de H^{-1})**.**

(i) *Supongamos que $f \in H^{-1}(U)$. Entonces existen funciones $f^0, f^1, \ldots, f^n$ en $L^2(U)$ tales*

que

$$\langle f, u\rangle = \int_U \left(f^0 u + \sum_{i=1}^{n} f^i u_{x_i} \right) dx \quad \forall\, v \in H_0^1(U). \tag{2.3}$$

(II) *Más aún,*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \text{ínf} \left\{ \left(\int_U \sum_{i=1}^{n} |f^i|^2 \, dx \right)^{1/2} \Bigg| \right. \\ \left. f \text{ satisface (2.3) para } f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(U) \right\}. \tag{2.4}$$

Demostración. Ver [10, pág 299-300]. □

2.8. Espacios que involucran tiempo

Los espacios de Bochner o espacios que involucran tiempo son una variación de los espacios de Sobolev, estos constan de funciones que dependen del tiempo dentro de espacios de Banach. Estos espacios son muy utilizados al momento de contruir soluciones débiles de los problemas de EDP parabólicos y por ende muy importantes en este trabajo.

Sea X un espacio de Banach, con la norma $\|\cdot\|$. El espacio

$$L^p(0,T;X)$$

consiste en todas las funciones medibles $\mathbf{u}:\ [0,T] \to X$ con

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$, y

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_X < \infty.$$

Definición. El espacio de Banach

$$C([0,T];X)$$

comprende todas las funciones continuas $\mathbf{u} : [0,T] \to X$ con norma

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X)} := \max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_X < \infty.$$

Observación 2. Utilizamos la notación en negrilla para representar funciones que toman valores en un espacio de Banach.

Definición. Sea $\mathbf{u} \in L^1(0,T;X)$. Decimos que $\mathbf{v} \in L^1(0,T;X)$ es la derivada débil de $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v},$$

si

$$\int_0^T \phi'(t)\mathbf{u}(t)\,dt = -\int_0^T \phi(t)\mathbf{v}(t)\,dt$$

para toda función test[3] $\phi \in C_c^\infty(0,T)$.

Definición.

1. El espacio de Bochner

$$W^{1,p}(0,T;X)$$

consiste en todas las funciones $\mathbf{u} \in L^p(0,T;X)$ tal que $\mathbf{u}'$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(0,T;X)$. Más aún

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p + \|\mathbf{u}'(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} & \text{para } 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{0\le t\le T} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_X + \|\mathbf{u}'(t)\|_X\right) & \text{para } p = \infty. \end{cases}$$

2. Escribimos $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

Teorema 11. *Sea $\mathbf{u} \in W^{1,p}(0,T;X)$ para algún $1 \le p \le \infty$. Entonces*

(I) $\mathbf{u} \in C([0,T];X)$ *(luego de posiblemente ser redefinida sobre un conjunto de medida nula).*

(II) $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \displaystyle\int_s^t \mathbf{u}'(\tau)\,d\tau$ *para todo* $0 \le s \le t \le T$

(III) *Más aún, tenemos la estimación*

$$\max_{0\le t\le T} \|\mathbf{u}(t)\| \le C\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)},$$

donde la constante C depende solamente de T.

[3] Sea $C_c^\infty(U)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciable de funciones $\phi : U \to \mathbb{R}$, con soporte compacto en U. Llamaremos a las funciones ϕ que pertenecen a $C_c^\infty(U)$ *funciones test.*

Teorema 12 (Más cálculo)**.** *Supongamos que* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$*, con* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$*.*

(I) *Entonces*

$$\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(U))$$

(luego de posiblemente ser redefinida sobre un conjunto de medida nula).

(II) *La aplicación*

$$t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)}$$

es absolutamente continua, con

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\left\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t)\right\rangle$$

para c.t.p. $0 \leq t \leq T$*.*

(III) *Más aún, tenemos la estimación*

$$\max_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leq C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right) \tag{2.5}$$

donde la constante $C > 0$ *depende solamente de* T*.*

Demostración. 1. Definimos $\bar{\mathbf{u}} : [-\sigma, T+\sigma] \to \mathbb{R}$ con $\sigma > 0$ de la siguiente manera

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathrm{t}) \;\; si \quad t \in [0,T] \\ 0 \qquad si \quad t \in [-\sigma, 0) \cup (T, T+\sigma] \end{cases}$$

y definimos[4] $\mathbf{u}^\varepsilon = \eta_\varepsilon * \bar{\mathbf{u}}$, con η_ε una función regularizante[5] y $\varepsilon > 0$. Esto es

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\varepsilon(s)\bar{\mathbf{u}}(t-s)ds.$$

[4]Si $f : U \to \mathbb{R}$ es localmente integrable, se define la regularización de f, f^ε, como

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \quad \text{en } U_\varepsilon.$$

Es decir

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)\,dy$$

para $x \in U_\varepsilon$, con $U_\varepsilon := \left\{x \in U \middle| dist(x, \partial U) > \varepsilon\right\}$, y $\varepsilon > 0$.

[5]Sea $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ una función regularizante estándar tal que satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon\,dx = 1,\ \mathrm{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0,\varepsilon).$$

Sea $\delta > 0$. Utilizando el Teorema de derivación bajo el signo integral

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(U)} &= \frac{d}{dt}\int_U \left(\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right)^2\, dx\\ &= \int_U \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right)^2\, dx\\ &= \int_U 2\left(\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right)\, dx\\ &= 2\left(\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(t)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(t),\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right)_{L^2(U)}.\end{aligned}$$

Integrando con respecto a $s \le \tau \le t$ obtenemos

$$\int_s^t \frac{d}{dt}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\|^2_{L^2(U)}\, d\tau = 2\int_s^t \left(\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau),\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right)_{L^2(U)}\, d\tau.$$

Así, para todo $0 \le s,t \le T$ y utilizando el Teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(U)} &= \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)-\mathbf{u}^{\delta}(s)\right\|^2_{L^2(U)}\\ &\quad + 2\int_s^t \left\langle \mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau),\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\rangle_{H^{-1}(U),H_0^1(U)}\, d\tau.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ahora, fijemos $s \in (0,T)$ tal que

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(s) \to \bar{\mathbf{u}}(s) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0 \quad \textit{en } L^2(U)$$

(s existe pues $\mathbf{u}^{\varepsilon} \to \bar{\mathbf{u}}$ c.t.p. cuando $\varepsilon \to 0$, ver [10] pág 714). Por continuidad

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(U)} &\le \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)-\mathbf{u}^{\delta}(s)\right\|^2_{L^2(U)}\\ &\quad + 2\int_s^t \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau)\right\|_{H^{-1}(U)}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\|_{H_0^1(U)}\, d\tau.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(U)} &\le \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)-\mathbf{u}^{\delta}(s)\right\|^2_{L^2(U)} + \int_s^t \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau)\right\|^2_{H^{-1}(U)}\\ &\quad + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\|^2_{H_0^1(U)}\, d\tau\\ &\le \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)-\mathbf{u}^{\delta}(s)\right\|^2_{L^2(U)} + \int_s^T \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau)\right\|^2_{H^{-1}(U)}\\ &\quad + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\|^2_{H_0^1(U)}\, d\tau.\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre $t \in [0,T]$ obtenemos

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(U)} \le \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)-\mathbf{u}^{\delta}(s)\right\|^2_{L^2(U)} + \int_s^T \|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau)\|^2_{H^{-1}(U)} + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\|^2_{H^1_0(U)}\, d\tau$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ y como $\mathbf{u}^{\varepsilon}(s) \to \bar{\mathbf{u}}(s)$ en $L^2(U)$, entonces

$$\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)-\mathbf{u}^{\delta}(s)\right\|_{L^2(U)} \longrightarrow \|\bar{\mathbf{u}}(s)-\bar{\mathbf{u}}(s)\|_{L^2(U)} = 0$$

por lo tanto

$$\limsup_{\varepsilon,\delta\to 0}\sup_{0\le t\le T}\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)-\mathbf{u}^{\delta}(t)\right\|^2_{L^2(U)} \le \lim_{\varepsilon,\delta\to 0}\int_0^T \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta\prime}(\tau)\right\|^2_{H^{-1}(U)} + \left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)-\mathbf{u}^{\delta}(\tau)\right\|^2_{H^1_0(U)}\, d\tau = 0.$$

Esto significa que

$$\left\|\mathbf{u}^{\varepsilon}-\mathbf{u}^{\delta}\right\|_{C([0,T];L^2(U))} \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to 0$, por ende $\{\mathbf{u}^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ es de Cauchy en $C([0,T];L^2(U))$. Así existe $\mathbf{v} \in C([0,T];L^2(U))$ tal que $\mathbf{u}^{\varepsilon} \to \mathbf{v}$ cuando $\varepsilon \to 0$ en $C([0,T];L^2(U))$. Como $\mathbf{u}^{\varepsilon}(t) \to \mathbf{u}(t)$ en $[0,T]$, por unicidad del límite tenemos que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ c.t.p. Concluímos que $\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(U))$ tras ser redefinido como $\mathbf{v}$.

2. Reemplazamos $\mathbf{u}^{\varepsilon}(t) - \mathbf{u}^{\delta}(t)$ por $\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)$ en el punto anterior y obtenemos

$$\|\mathbf{u}^{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(U)} = \|\mathbf{u}^{\varepsilon}(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \left(\mathbf{u}^{\varepsilon\prime}(\tau),\mathbf{u}^{\varepsilon}(\tau)\right)_{L^2(U)}\, d\tau,$$

haciendo $\varepsilon \to 0$, y tomando en cuenta que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ c.t.p. tenemos

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} = \|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + 2\int_s^t \left(\mathbf{u}'(\tau),\mathbf{u}(\tau)\right)_{L^2(U)}\, d\tau \qquad \text{para todo } 0 \le s,t,\le T. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, tenemos que $t \longmapsto \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)}$ es absolutamente continua con $\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\langle \mathbf{u}'(t),\mathbf{u}(t)\rangle$.

3. Ahora, con $s \leq \tau \leq t$ y como $\mathbf{u}'(\tau) \in H^{-1}(U)$ tenemos que

$$|\langle \mathbf{u}'(\tau), \mathbf{u}(\tau) \rangle| \leq \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{H^{-1}(U)} \|\mathbf{u}(\tau)\|_{H_0^1(U)}.$$

Así, de (2.7) y usando la desigualdad de Cauchy

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} &\leq \|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + \int_s^t \|\mathbf{u}'(\tau)\|^2_{H^{-1}(U)} + \|\mathbf{u}(\tau)\|^2_{H_0^1(U)}\, d\tau \\
&\leq \|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + \int_s^T \|\mathbf{u}'(\tau)\|^2_{H^{-1}(U)} + \|\mathbf{u}(\tau)\|^2_{H_0^1(U)}\, d\tau \\
&= \|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))}.
\end{aligned}$$

A continuación integramos con respecto a $0 \leq s \leq T$

$$\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)}\, ds \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(s)\|^2_{L^2(U)}\, ds + T\left(\|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))}\right)$$

luego

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} \leq \frac{1}{T}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))},$$

y utilizando la desigualdad de Poincaré

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right).$$

Recordemos que redefinimos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ tal que sea continua y así, tomando el máximo en $0 \leq t \leq T$ obtenemos

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}).$$

Por lo tanto tomamos la raíz cuadrada y hacemos uso de la desigualdad $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ con lo cual, si reemplazamos $\sqrt{C}$ por una nueva constante C positiva obtenemos

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leq C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right).$$

□

Teorema 13 (Valores propios del operador $-\Delta$)**.** *El operador $-\Delta$ cumple las siguientes proposiciones.*

(I) *Cada valor propio del operador $-\Delta$ es real.*

(II) *Más aún, si repetimos cada valor propio de acuerdo a su multiplicidad (finita), tenemos que su conjunto de valores propios es*

$$\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$$

donde

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

y

$$\lambda_k \to \infty \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty.$$

(III) *Finalmente, existe una base ortonormal* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $L^2(U)$*, donde* $w_k \in H_0^1(U)$ *es una función propia correspondiente a* λ_k*.*

Demostración. Consideremos el problema con valores en la frontera

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases}$$

donde U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$; $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es desconocida, tal que $u = u(x)$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada en $L^2(U)$. Encontremos la formulación variacional del problema (P). Sea $v \in C_c^{\infty}(U)$ y asumamos que $u \in C^2(U)$, entonces

$$\int_U (-\Delta u) v \, dx = \int_U f v \, dx.$$

Integramos por partes el lado izquierdo de la igualdad, con lo cual

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_U f v \, dx.$$

Por tanto, el problema (P) se formula variacionalmente como: hallar $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_U f v \, dx \tag{2.8}$$

para todo $v \in H_0^1(U)$. Ahora consideremos

$$a : H_0^1(U) \times H_0^1(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto a(u,v) = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

y

$$\begin{aligned} \phi_f : H_0^1(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle \phi_f, v \rangle = \int_U fv \, dx. \end{aligned}$$

De (2.8) se tiene que

$$a(u,v) = \langle \phi_f, v \rangle . \tag{2.9}$$

Luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $a(u,v)$ tenemos

$$|a(u,v)| = \left| \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \int_U |\nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(U)} \|\nabla v\|_{L^2(U)} = \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)},$$

utilizamos la desigualdad de Poincaré en $\langle \phi_f, v \rangle$ para obtener

$$| \langle \phi_f, v \rangle | = \left| \int_U fv \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \leq C_p \|f\|_{L^2(U)} \|\nabla v\|_{L^2(U)} = C_p \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$$

donde C_p denota la constante de Poincaré. Por tanto, $\phi_f \in H^{-1}(U)$ y $a(\cdot,\cdot)$ es continua. Además, $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva ya que

$$a(u,u) = \int_U \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_U |\nabla u|^2 \, dx = \|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 = \|u\|_{H_0^1(U)}^2.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Lax-Milgram, (2.8) posee una única solución $u \in H_0^1(U)$ para cada f. Luego, definamos $u := Sf$ donde a S se lo nota por $S = (-\Delta)^{-1}$ tomando en cuenta que $S : L^2(U) \to H_0^1(U)$. Tenemos que, gracias al Teorema de Rellich-Kondrachov, S es compacto. Probemos que S es continuo. Para esto, tomemos $v = u$, $u = Sf$ y sustituyamos en (2.9), se sigue que

$$a(Sf, Sf) = \int_U fSf \, dx$$

con lo cual

$$\|Sf\|_{H_0^1(U)}^2 = \int_U fSf \, dx \leq \|f\|_{L^2(U)} \|Sf\|_{L^2(U)} \leq C_p \|f\|_{L^2(U)} \|Sf\|_{H_0^1(U)}$$

y entonces

$$\|Sf\|_{H_0^1(U)} \leq C_p \|f\|_{L^2(U)}.$$

Por tanto, S es continuo. Ahora probemos que S es positivo. En efecto, para todo $v \in H_0^1(U)$, gracias a (2.9) tenemos

$$(Sf, f)_{L^2(U)} = (u, f)_{L^2(U)} = \langle \phi_f, u \rangle = a(u, u) = \|u\|^2_{H_0^1(U)} \geq 0.$$

S es autoadjunto. Para esto tomemos $Sf = u$ la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases}$$

y $Sg = v$ la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{en} \quad U \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial U. \end{cases}$$

Probemos que $(Sf, g) = (f, Sg)$

$$(Sf, g)_{L^2(U)} = (u, g)_{L^2(U)} = (g, u)_{L^2(U)} = \langle \phi_g, u \rangle = a(u, v)$$

$$(f, Sg)_{L^2(U)} = (f, v)_{L^2(U)} = \langle \phi_f, v \rangle = a(v, u) = a(u, v).$$

por tanto, S es autoadjunto. Como S es acotado, positivo, autoadjunto y compacto, por el Teorema de Hilbert–Schmidt existe una sucesión decreciente $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \geq \eta_k \geq \ldots > 0$$

y una base ortonormal $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $H_0^1(U)$ tal que

$$\begin{cases} Sw_k = \eta_k w_k & \text{en} \quad U \\ w_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases}$$

para $k = 1, 2, \ldots$. Entonces, como $S = (-\Delta)^{-1}$ obtenemos

$$-\Delta(\eta_k w_k) = w_k,$$

más aún

$$-\Delta w_k = \frac{1}{\eta_k} w_k,$$

tomando $\lambda_k = \frac{1}{\eta_k}$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\eta_k} = +\infty.$$

Por lo tanto obtenemos

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots.$$

□

Capítulo 3

Problemas parabólicos locales

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de ecuaciones diferenciales parabólicas locales de segundo orden. Estas ecuaciones involucran una variable temporal por lo que también son llamadas ecuaciones evolutivas. La idea principal se basa en que la solución evoluciona en tiempo a partir de una información inicial dada. Las EDP parabólicas de segundo orden son una generalización natural de la ecuación del calor, presentada a continuación:

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{3.1}$$

y su versión no homogénea

$$u_t - \Delta u = f, \tag{3.2}$$

sujeto a condiciones iniciales y de frontera apropiadas. Aquí $t > 0$ y $x \in U$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. La variable desconocida es $u : \bar{U} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, y el laplaciano Δ es tomado con respecto a las variables espaciales $x = (x_1, \ldots, x_n) : \Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. En (3.2) la función $f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ está dada.

Vamos a estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles apropiadamente definidas, su suavidad y otras propiedades. Empecemos haciendo un repaso de las ecuaciones elípticas de segundo orden con condidiones en la frontera. Este tipo de ecuaciones nos sirven como base para posteriormente estudiar con mayor profundidad las ecuaciones parabólicas locales de segundo orden.

3.1. Ecuaciones elípticas

En esta sección nos dedicaremos a estudiar el siguiente problema elíptico con valores en la frontera

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{3.3}$$

donde U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ es desconocida, $u = u(x)$. Además, $f : U \to \mathbb{R}$ es una función dada y L denota un operador diferencial parcial de segundo orden teniendo ya sea la forma de divergencia

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{3.4}$$

o la forma de no divergencia

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{3.5}$$

para coeficientes dados $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Observación 3. Si los coeficientes de mayor orden a^{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ son funciones $C^1(U)$, entonces un operador dado en la forma de divergencia puede ser reescrito en su forma de no divergencia, y viceversa. De hecho la ecuación en forma de divergencia (3.4) se convierte en

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{3.6}$$

con $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, y (3.6) obviamente está en forma de no divergencia. La forma de divergencia es más utilizada para metodos de energía, basada sobre integración por partes, y la forma de no divergencia es utilizada en la teoría que involucra el principio del máximo.

En adelante, asumiremos la condición de simetría

$$a^{ij} = a^{ji} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Definición. Decimos que un operador diferencial parcial L es (uniformemente) elíptico si existe

una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{3.7}$$

para c.t.p. $x \in U$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

La elipticidad significa que para cada punto $x \in U$, la matriz simétrica $n \times n$ dado por $\mathbf{A}(x) = ((a^{ij}(x)))$ es definida positiva, con el valor propio más pequeño mayor o igual a θ.

Un ejemplo obvio es tomar $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$, $b^i \equiv 0$, $c \equiv 0$ con δ_{ij} la delta de Kronecker, en cuyo caso el operador L es $-\Delta$.

Interpretación física. Como mencionamos antes, las EDPs elípticas de segundo orden generalizan las ecuaciones de Poisson y Laplace. Como en las derivaciones de las ecuaciones de Laplace, u representa la densidad de alguna cantidad (concentración química), en equilibrio dentro del una región U. El término de segundo orden $\mathbf{A}: \ D^2u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j}$ representa la difusión de u dentro de U, los coeficientes[1] $((a^{ij}))$ describen la naturaleza anisotrópica, heterogénea del medio. En particular, $\mathbf{F} := -\mathbf{A}Du$ es la densidad de flujo difusivo, y la condición de elipticidad implica

$$F \cdot Du \leq 0;$$

esto significa que el flujo va de las regiones de alta concentración hasta las regiones de baja concentración. El término de primer orden $\mathbf{b} \cdot Du = \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}$ representa transporte dentro de U, y el término de orden cero cu describe incremento o reducción.

Definición.

(I) La forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ asociada a la forma de divergencia del operador elíptico L definida en (3.4) es

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + cuv \, dx \tag{3.8}$$

para $u, v \in H_0^1(U)$.

(II) Decimos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil del problema con valores en la frontera (3.3) si

$$B[u,v] = (f,v) \tag{3.9}$$

[1] $\mathbf{A} = ((a^{ij}))$ denota una matriz $m \times n$ con (i,j)-ésimas entradas a_{ij}.

para todo $v \in H_0^1(U)$, donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno en $L^2(U)$.

Observación 4. La identidad (3.9) suele ser llamada *formulación variacional* de (3.3).

Generalmente, consideremos el problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i} & \text{en} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \end{cases} \tag{3.10}$$

donde L se define como (3.4) y $f^i \in L^2(U)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Gracias al Teorema 10 tenemos que $f = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}$ pertenece a $H^{-1}(U)$, el espacio dual de $H_0^1(U)$.

Definición. Decimos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil del problema (3.10) siempre que

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

para todo $v \in H_0^1(U)$, donde $\langle f, v\rangle = \int_u f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i}\, dx$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el emparejamiento de $H^{-1}(U)$ y $H_0^1(U)$.

Teorema 14 (Estimaciones de energía elípticas)**.** *Existen constantes α, β positivas y $\gamma \geq 0$ tales que se cumplen*

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \tag{3.11}$$

y

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u, u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)} \tag{3.12}$$

para todo $u, v \in H_0^1(U)$.

Demostración. 1. En el caso de la primera estimación tenemos que

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &= \left| \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_U \left| a^{ij} u_{x_i} v_{x_i} \right| \, dx + \sum_{i=1}^n \int_U \left| b^i u_{x_i} v \right| \, dx + \int_U |cuv| \, dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_i}||v_{x_j}| \, dx + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_i}||v| \, dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u||v| \, dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du||Dv| \, dx + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du||v| \, dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u||v| \, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \|Du\|_{L^2(U)} \|Dv\|_{L^2(U)} + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \|Du\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \\
&\quad + \|c\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} + C_p \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \\
&\quad + C_p^2 \|c\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} + C_p \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} + C_p^2 \|c\|_{L^\infty(U)} \right) \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \\
&= \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$

donde

$$
\alpha = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} + C_p \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} + C_p^2 \|c\|_{L^\infty(U)} \right)
$$

y C_p denota la constante de Poincaré.

2. Para la segunda estimación, consideremos la condición de elipticidad dada por

$$
\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \tag{3.13}
$$

para c.t.p. $x \in U$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $\xi = Du$, por la definición de la forma bilineal y (3.13) tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 < \theta \int_U |Du|^2 \, dx &\leq \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dx \\
&= B[u,u] - \int_U \left(\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} u + cu^2 \right) \, dx \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |u_{x_i}||u| dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u|^2 \, dx \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du||u| \, dx + \|c\|_{L^\infty(U)} \int_U |u|^2 \, dx. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Ahora haciendo uso de la desigualdad de Cauchy con ε en uno de los términos de (3.14) obte-

nemos

$$\int_U |Du||u|\ dx \leq \varepsilon \int_U |Du|^2\ dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_U |u|^2\ dx \qquad (\varepsilon > 0).$$

Luego, eligiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} < \frac{\theta}{2},$$

se tiene que

$$0 < \theta \int_U |Du|^2\ dx \leq \frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2\ dx + \frac{1}{4\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\|b^i\|_{L^\infty(U)}\int_U |u|^2\ dx + B[u,u] + \|c\|_{L^\infty(U)}\int_U |u|^2\ dx$$

Tomando $C = \dfrac{1}{4\varepsilon}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\|b^i\|_{L^\infty(U)} + \|c\|_{L^\infty(U)}$, se sigue que

$$\frac{\theta}{2}\int_U |Du|^2\ dx \leq C\int_U |u|^2\ dx + B[u,u] = C\|u\|^2_{L^2(U)} + B[u,u].$$

Así

$$\frac{\theta}{2}\|Du\|^2_{L^2(U)} \leq B[u,u] + C\|u\|^2_{L^2(U)}.$$

Por lo tanto

$$\beta\|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(U)}$$

con $\beta = \frac{\theta}{2}$ y $\gamma = C$. □

Ahora revisemos la teoría fundamental de ecuaciones parabólicas de segundo orden.

3.2. Ecuaciones parabólicas

En esta sección, como en la anterior, asumiremos que U es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, y además $U_T = U \times (0,T]$ para alguna variable temporal fija $T > 0$.

Nos dedicaremos a estudiar el siguiente problema con valores iniciales y en la frontera

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{en} \quad U_T \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{sobre} \quad U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3.15}$$

donde $f : U_T \to \mathbb{R}$ y $g : U \to \mathbb{R}$ son funciones dadas, y $u : \bar{U}_T \to \mathbb{R}$ es desconocida, con $u = u(x,t)$. La letra L denota para cada tiempo t un operador diferencial parcial de segundo orden, ya sea en la forma de divergencia

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{3.16}$$

o en la forma de no divergencia

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{3.17}$$

con coeficientes $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Definición. Decimos que un operador diferencial parcial $\frac{\partial}{\partial t} + L$ es (uniformemente) parabólico si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \tag{3.18}$$

para todo $(x,t) \in U_T,\ \xi \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que en particular para cada $0 \in [0,T]$ fijo, el operador L es un operador uniformemente elíptico en la variable espacial $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Las ecuaciones parabólicas de segundo orden describen en aplicaciones físicas la evolución temporal de la densidad de una cantidad u dentro de la región U. El término de segundo orden $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i x_j}$ describe difusión, el término de primer orden $\sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}$ describe transporte, y el término de orden 0, es decir cu, describe creación o reducción.
Como ejemplos de ecuaciones parabólicas de segundo orden tenemos la ecuación de Fokker-Planck y la ecuación de Kolmogorov.

3.2.1. Soluciones débiles

Consideremos el caso en que L tiene la forma de divergencia (3.16) y tratemos de encontrar una notación apropiada de la solución débil para el problema con valores iniciales y en la frontera

(3.15). Asumamos por ahora que

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T) \ (i,j = 1, \dots, n),$$

$$f \in L^2(U_T),$$

$$g \in L^2(U).$$

Además supongamos que $a^{ij} = a^{ji}$ $(i,j = 1, \dots, n)$.

Definamos la forma bilineal dependiente del tiempo

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv \, dx$$

para $u, v \in H_0^1(U)$ y c.t.p. $0 \leq t \leq T$.

Motivación para la definición de solución débil. Para hacer posible la definición de solución débil, supongamos por el momento que $u = u(x,t)$ es una solución suave para el problema parabólico (3.15). Ahora a la función u se le asocia una función

$$\mathbf{u} : [0, T] \to H_0^1(U)$$

definida por

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x,t) \ (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

En otras palabras, vamos a considerar a u como una función que no depende de x y t a la vez, sino que depende de t tomando valores en el espacio $H_0^1(U)$ de funciones en la variable x.

Regresando al problema (3.15), de forma similar definamos

$$\mathbf{f} : [0, T] \to L^2(U)$$

por

$$[\mathbf{f}(t)](x) := f(x,t) \ (x \in U, 0 \leq t \leq T).$$

Ahora, si fijamos una función $v \in H_0^1(U)$, podemos multiplicar la EDP $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ por v e

integrar por partes, para obtener

$$(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \quad \left(' = \frac{d}{dt}\right) \tag{3.19}$$

para cada $0 \leq t \leq T$. El emparejamiento $(\cdot, \cdot)$ denota el producto interno en $L^2(U)$.

Ahora observemos que

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^{n} g^j_{x_j} \text{ en } U_T \tag{3.20}$$

con $g^0 := f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu$ y $g^j := \sum_{i=1}^{n} a^{ij} u_{x_i}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Así, por (3.20) y la caracterización de H^{-1} (ver sección 5.9.1. en [10]) tenemos que el lado derecho de (3.20) está en el espacio de Sobolev $H^{-1}(U)$, con

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\sum_{j=0}^{n} \|g^j\|^2_{L^2(U)} \right)^{1/2} \leq C \left(\|u\|_{H^1_0(U)} + \|f\|_{L^2(U)} \right)$$

ya que

$$\begin{aligned} \|g^0\|_{L^2(U)} &= \left\| f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu \right\|_{L^2(U)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(U)} + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{H^1_0(U)} + C_p \|c\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{H^1_0(U)} \\ &\leq C \left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1_0(U)} \right) \end{aligned}$$

y

$$\|g^j\|_{L^2(U)} = \left\| \sum_{j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} \right\|_{L^2(U)} \leq \sum_{j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty(U)} \|u\|_{H^1_0(U)} \leq C \|u\|_{H^1_0(U)}$$

siendo C_p la constante de Poincaré y C una constante positiva. Esta estimación nos sugiere que puede ser razonable utilizar una solución débil con $\mathbf{u}' \in H^{-1}(U)$ para c.t.p. $0 \leq t \leq T$; en cuyo caso el primer término de (3.19) puede ser expresado como $\langle \mathbf{u}', v \rangle$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el emparejamiento de $H^{-1}(U)$ y $H^1_0(U)$.

Todas estas consideraciones motivan la siguiente definición.

Definición. Decimos que una función

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U)),\ \text{con } \mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

es una solución débil del problema parabólico (3.15) si cumple

(i) $\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)$

para cada $v \in H_0^1(U)$ y c.t.p. $0 \leq t \leq T$ y

(ii) $\mathbf{u}(0) = g$.

Observación 5. Gracias al Teorema 12 tenemos que $\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(U))$, y así la igualdad (ii) tiene sentido.

3.3. Existencia de soluciones débiles

3.3.1. Aproximaciones de Galerkin

Se demostrará la existencia una solución débil para el problema parabólico

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{en} \quad U_T \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{sobre} \quad U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3.21}$$

construyendo primeramente soluciones de ciertas aproximaciones en un subespacio de dimensión finita de (3.21) y luego pasar al límite. Esto es llamado el método de Galerkin. Más precisamente, asumimos que las funciones $w_k = w_k(x)$ $(k = 1, \dots)$ son suaves y que

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ es una base ortogonal en } H_0^1(U), \tag{3.22}$$

y

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ es una base ortonormal en } L^2(U). \tag{3.23}$$

(Por ejemplo, podemos tomar $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ como una colección completa de funciones propias normalizadas para $L = -\Delta$ en $H_0^1(U)$: ver Teorema 13.)

Ahora fijemos un entero positivo m. Buscaremos una función $\mathbf{u}_m : [0,T] \to H_0^1(U)$ con la forma

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{3.24}$$

donde los coeficientes $d_m^k(t)$ $(0 \le t \le T,\ k = 1, \dots, m)$ cumplen

$$d_m^k(0) = (g, w_k) \quad (k = 1, \dots, m) \tag{3.25}$$

y

$$(\mathbf{u}_m', w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k) \quad (0 \le t \le T,\ k = 1, \dots, m). \tag{3.26}$$

(Igual que antes, $(\cdot, \cdot)$ denota el producto interno en $L^2(U)$.)

En consecuencia, nosotros buscamos una función $\mathbf{u}_m$ de la forma (3.24) que satisface (3.26) del problema (3.21) sobre el subespacio de dimensión finita generado por $\{w_k\}_{k=1}^m$.

Teorema 15 (Construcción de soluciones aproximadas)**.** *Para cada $m = 1, 2, \dots$ existe una función única $\mathbf{u}_m$ con la forma (3.24) tal que satisface (3.25) y (3.26).*

Demostración. Asumimos que $\mathbf{u}_m$ tiene la forma definida en (3.24), entonces gracias a que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base ortonormal en $L^2(U)$ tenemos que

$$(\mathbf{u}_m', w_k) = \sum_{j=1}^{m} (d_m^{j'}(t) w_j, w_k) = \sum_{j=1}^{m} d_m^{j'}(t)(w_j, w_k) = d_m^{k'}(t).$$

Además

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = B\left[\sum_{j=1}^{m} d_m^j(t) w_j, w_k; t\right] = \sum_{j=1}^{m} B[w_j, w_k; t] d_m^j(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{kj}(t) d_m^j(t)$$

con $e^{kj}(t) = B[w_j, w_k; t]$ para $j, k = 1, \dots, m$. Tomemos $f^k(t) := (\mathbf{f}(t), w_k)$ para k=1,...,m. Por (3.26) tenemos el siguiente sistema lineal de EDOs

$$d_m^{k'}(t) + \sum_{j=1}^{m} e^{kj}(t) d_m^j(t) = f^k(t) \qquad (k = 1, \dots, m) \tag{3.27}$$

sujeto a la condición inicial (3.25). Gracias a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única función absolutamente continua $\mathbf{d}_m(t) = \left(d_m^1(t), ..., d_m^m(t)\right)$ satisfaciendo (3.25) y (3.27) para c.t.p. $0 \leq t \leq T$. Y por lo tanto $\mathbf{u}_m$ definida en (3.24) resuelve (3.26) para c.t.p. $0 \leq t \leq T$. □

3.3.2. Estimaciones de energía

Ahora proponemos tomar m que tienda al infinito y mostrar que una subsucesión de nuestras soluciones $\mathbf{u}_m$ de (3.25), (3.26) converge a una solución débil de (3.21). Pero antes presentemos dos resultados útiles.

Teorema 16 (Identidad de Parseval)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal. Entonces $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base en H si y solamente si para todo $x \in H$*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Demostración. Ver [9, pág 32]. □

Teorema 17 (Desigualdad de Gronwall: forma diferencial)**.**

(I) *Sea η una función no negativa y absolutamente continua sobre $[0, T]$, que satisface para c.t.p. t la desigualdad diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

donde ϕ y ψ son funciones no negativas y sumables sobre $[0, T]$. Entonces

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\, ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

(II) *En particular, si*

$$\eta' \leq \phi\eta \text{ sobre } [0, T] \quad y \quad \eta(0) = 0,$$

entonces

$$\eta \equiv 0 \text{ sobre } [0, T].$$

Demostración. Ver [10, pág 709]. □

Teorema 18 (Estimaciones de energía parabólicas)**.** *Existe una constante C, que depende solamente de U, T y los coeficientes del operador L, tal que se cumple*

$$\max_{0\le t\le T}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \le C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}) \tag{3.28}$$

para $m = 1, 2, \dots$.

Demostración. De (3.26) tenemos

$$(\mathbf{u}'_m, w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k) \qquad (0 \le t \le T, k = 1, \dots, m). \tag{3.29}$$

Multiplicamos la ecuación (3.29) por $d_m^k(t)$ y sumamos sobre $k = 1, \dots, m$, así

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{u}'_m, w_k d_m^k(t)\right) + \sum_{k=1}^{n} B\left[\mathbf{u}_m, w_k d_m^k(t); t\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{f}, w_k d_m^k(t)\right)$$

de donde

$$\left(\mathbf{u}'_m, \sum_{k=1}^{n} w_k d_m^k(t)\right) + B\left[\mathbf{u}_m, \sum_{k=1}^{n} w_k d_m^k(t); t\right] = \left(\mathbf{f}, \sum_{k=1}^{n} w_k d_m^k(t)\right).$$

Por (3.24) sabemos que $\mathbf{u}_m(t) = \sum_{k=1}^{n} d_m^k(t) w_k$, además w_k no depende de t. Por tanto obtenemos

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m) \qquad \text{c.t.p. } 0 \le t \le T. \tag{3.30}$$

Realizando una demostración muy similar a la demostración de la desigualdad (3.12) en el Teorema 14 tenemos que se cumple

$$\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \le B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m; t] + \gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} \qquad \text{para todo } (0 \le t \le T, m = 1, \dots). \tag{3.31}$$

con β y γ dos constantes positivas. Por otro lado, tenemos que

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)| \le \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)} \le \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} \tag{3.32}$$

y por el Teorema 12 tenemos

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\right) \qquad \text{c.t.p. } 0 \le t \le T. \tag{3.33}$$

Ahora sustituimos (3.31), (3.32) y (3.33) en (3.30) para obtener

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\right) + \beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} - \gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}.$$

Más aún,

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} + 2\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + C\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} \tag{3.34}$$

con $C = (1 + 2\gamma)$ y para c.t.p. $0 \leq t \leq T$. A continuación tomemos

$$\eta(t) := \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \tag{3.35}$$

y

$$\xi(t) := \|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(U)}. \tag{3.36}$$

De (3.34) tenemos

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} \leq C\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)}. \tag{3.37}$$

Reemplazando (3.35) y (3.36) en (3.37) obtenemos la siguiente ecuación

$$\eta'(t) \leq C\eta(t) + \xi(t) \tag{3.38}$$

para c.t.p. $0 \leq t \leq T$. Ahora, usamos la desigualdad de Gronwall (Teorema 17) en su forma diferencial

$$\eta(t) \leq e^t\left(\eta(0) + C\int_0^t \xi(s)\,ds\right) \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Por otro lado, utilizamos (3.25) y la identidad de Parseval (Teorema 16)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0)) &= \left(\sum_{k=1}^m d_m^k(0)w_k, \sum_{j=1}^n d_m^j(0)w_j\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^m (g, w_k)w_k, \sum_{j=1}^n (g, w_j)w_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (g, w_k)(g, w_j)(w_k, w_j) \\
&= \sum_{k=1}^m |(g, w_k)|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^\infty |(g, w_k)|^2 = \|g\|^2_{L^2(U)}
\end{aligned}$$

pues $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base ortonormal en $L^2(U)$. Entonces $\eta(0) = \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)} \leq \|g\|^2_{L^2(U)}$ por tanto

$$\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \leq e^t \left(\|g\|^2_{L^2(U)} + C \int_0^t \|\mathbf{f}(s)\|^2_{L^2(U)} \, ds \right).$$

Luego procedemos a tomar el máximo en ambos lados

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C \left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \right). \tag{3.39}$$

Retomamos la desigualdad (3.34) e integramos en $0 \leq t \leq T$

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \right) dt + 2\beta \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + C\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}. \tag{3.40}$$

Gracias al teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \right) dt = \|\mathbf{u}_m(T)\|^2_{L^2(U)} - \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)}$$

y, reemplazando en (3.40),

$$\|\mathbf{u}_m(T)\|^2_{L^2(U)} + 2\beta \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + C\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)};$$

pero

$$2\beta \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \leq \|\mathbf{u}_m(T)\|^2_{L^2(U)} + 2\beta \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))}.$$

Así obtenemos

$$2\beta \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + C\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)}. \tag{3.41}$$

Haciendo uso de la inmersión continua $L^\infty(0,T;L^2(U)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(U))$ (pues U es acotado) tenemos que

$$\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \leq C_3 \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(U))} = C_3 \max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \tag{3.42}$$

con C_3 una constante positiva. Esta última igualdad se da gracias a que el máximo es igual al supremo esencial ya que las funciones $\mathbf{u}_m$ son continuas respecto a la variable t. Sustituimos

(3.42) en (3.41), y además como $\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)} \leq \|g\|^2_{L^2(U)}$,

$$2\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(U))} \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + C \max_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} + \|g\|^2_{L^2(U)}$$

con C una nueva constante. Utilizamos (3.39) en la anterior desigualdad, con lo cual

$$2\beta\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(U))} \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + C\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right) + \|g\|^2_{L^2(U)}$$

y así obtenemos

$$\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(U))} \leq C\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right). \tag{3.43}$$

Ahora fijamos un $v \in H^1_0(U)$, con $\|v\|_{H^1_0(U)} \leq 1$. Como $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base ortonormal de $L^2(U)$, tenemos

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}(v, w_k)w_k.$$

Definamos

$$v^1 = \sum_{k=1}^{m}(v, w_k)w_k \qquad \text{y} \qquad v^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty}(v, w_k)w_k.$$

De esta manera, claramente podemos observar que $v^1 \in span\{w_1, \ldots, w_m\}$. Si $j \leq m$,

$$(v^2, w_j) = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty}(v, w_k)w_k, w_j\right) = \sum_{k=m+1}^{\infty}(w_j, w_k)(v, w_k)$$

pero $j \leq m$ y $k > m$, así $j \neq k$ y $(w_j, w_k) = 0$, por tanto $(v^2, w_j) = 0$ para todo $j \leq m$. Por otro lado, si $j \leq m$, tenemos que

$$(v^1, w_j) = \left(\sum_{k=1}^{m}(v, w_k)w_k, w_j\right) = \sum_{k=1}^{m}(w_j, w_k)(v, w_k) = (v, w_j).$$

Así, $(v^1, w_j) = (v, w_j)$ para todo $j \leq m$ además, usando la identidad de Parseval (Teorema 16) observamos que

$$\|v^1\|^2_{L^2(U)} = \sum_{k=1}^{\infty}|(v^1, w_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m}|(v, w_k)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}|(v, w_k)|^2 = \|v\|^2_{L^2(U)}.$$

Del mismo modo, $\|\nabla v^1\|^2_{L^2(U)} \leq \|\nabla v\|^2_{L^2(U)}$, por tanto

$$\|v^1\|^2_{H^1_0(U)} \leq \|v\|^2_{H^1_0(U)} \leq 1.$$

Hacemos uso de la ecuación (3.26) y realizamos un procedimiento similar al utilizado para encontrar la ecuación (3.30), es decir, multiplicamos por (v, w_k) y sumamos sobre $k = 1, \ldots, m$ para obtener

$$(\mathbf{u}'_m, v^1) + B[\mathbf{u}_m, v^1; t] = (\mathbf{f}, v^1) \qquad \text{c.t.p. } 0 \leq t \leq T. \tag{3.44}$$

Por el teorema de representación de Riesz, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}'_m, v \rangle = (\mathbf{u}'_m, v) &= \sum_{k=1}^{m} d_m^{k'}(t)(w_k, v) \\
&= \sum_{k=1}^{m} d_m^{k'}(t)(w_k, v^1) \qquad \text{ya que } (w_k, v) = (w_k, v^1) \\
&= (\mathbf{u}'_m, v^1) \\
&= (\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t] \qquad \text{por (3.44)}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ahora, utilizaremos el hecho de que $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$, la continuidad de la forma bilineal y la desigualdad de Poincaré. Así

$$\begin{aligned}
\left| \langle \mathbf{u}'_m, v \rangle \right| &= \left| (\mathbf{f}, v^1) - B[\mathbf{u}_m, v^1; t] \right| \\
&\leq \left| (\mathbf{f}, v^1) \right| + \left| B[\mathbf{u}_m, v^1; t] \right| \\
&\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} \|v^1\|_{L^2(U)} + C \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \|v^1\|_{H_0^1(U)} \\
&\leq C_p \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} \|\nabla v^1\|_{L^2(U)} + C \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \\
&\leq \hat{C} \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} \right)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

con $\hat{C} = \text{máx}\{C_p, C\}$. Luego, como $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$ tenemos que

$$\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \langle \mathbf{u}'_m, v \rangle \right| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \hat{C}(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}) = \hat{C}(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}),$$

elevamos al cuadrado y utilizando la desigualdad de Cauchy

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}'_m\|^2_{H^{-1}(U)} &\leq \hat{C}^2 \left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + 2\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \right) \\
&\leq \hat{C}^2 \left[\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + 2 \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \right) + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \right] \\
&= 2\hat{C}^2 \left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} \right)
\end{aligned}$$

y tomando $C = 2\hat{C}^2$ una nueva constante, se sigue que

$$\|\mathbf{u}'_m\|^2_{H^{-1}(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)}\right). \tag{3.47}$$

Integrando (3.47) con respecto a $0 \leq t \leq T$ y utilizando la desigualdad (3.43)

$$\int_0^T \|\mathbf{u}'_m\|^2_{H^{-1}(U)} dt \leq C\int_0^T \left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)}\right) dt \leq \tilde{C}\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).$$

Por tanto, definiendo una nueva constante C positiva tenemos que

$$\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \leq C\left(\|g\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right). \tag{3.48}$$

Por último, sumamos (3.39), (3.43) y (3.48), sacamos raíz cuadrada en ambos lados y obtenemos

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H^1_0(U))} + \|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}).$$

□

3.3.3. Existencia y unicidad

A continuación pasaremos al límite cuando $m \to \infty$, para construir una solución débil de nuestro problema parabólico (3.21). En primer lugar revisemos dos resultados de gran importancia.

Teorema 19 (Eberlein-Šmulian)**.** *X es un espacio de Banach reflexivo si y solamente si cada sucesión de X acotada contiene una subsucesión que converge débilmente a un elemento de X.*

Demostración. Ver [18, pág 141-145]. □

Lema 1. *Asumamos que*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} & en \quad L^2(0,T;H^1_0(U)) \\ \mathbf{u}'_k \rightharpoonup \mathbf{v} & en \quad L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases}$$

Entonces $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$.

Demostración. Primeramente demostremos que, dado $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$ y $w \in H_0^1(U)$, entonces

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_k', \varphi w \rangle \, dt = -\int_0^T \langle \mathbf{u}_k, \varphi' w \rangle \, dt.$$

Con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el corchete de dualidad entre $H^{-1}(U)$ y $H_0^1(U)$. Por hipótesis tenemos que $\varphi w \in C_c^\infty(0,T;H_0^1(U)) \subseteq L^2(0,T;H_0^1(U))$. Por tanto, utilizando el Teorema de representación de Riesz y el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{u}_k', \varphi w \rangle \, dt &= \int_0^T (\mathbf{u}_k', \varphi w)_{L^2(U)} \, dt \\ &= \int_0^T \left(\int_U \mathbf{u}_k' \varphi w \, dx \right) dt \\ &= \int_U w \left(\int_0^T \mathbf{u}_k' \varphi \, dt \right) dx.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_0^T \mathbf{u}_k' \varphi \, dt = \mathbf{u}_k \varphi \Big|_0^T - \int_0^T \mathbf{u}_k \varphi' \, dt = -\int_0^T \mathbf{u}_k \varphi' \, dt.$$

Así

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathbf{u}_k', \varphi w \rangle \, dt &= \int_U w \left(-\int_0^T \mathbf{u}_k \varphi' \, dt \right) dx \\ &= -\int_0^T \left(\int_U \mathbf{u}_k \varphi' w \, dx \right) dt \\ &= -\int_0^T \langle \mathbf{u}_k, \varphi' w \rangle \, dt,\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_k', \varphi w \rangle \, dt = -\int_0^T \langle \mathbf{u}_k, \varphi' w \rangle \, dt.$$

Luego, haciendo $k \to \infty$

$$\int_0^T \langle \mathbf{v}, \varphi w \rangle \, dt = -\int_0^T \langle \mathbf{u}, \varphi' w \rangle \, dt \tag{3.49}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$ y para todo $w \in H_0^1(U)$. Por definición de espacios que involucran tiempo (ver sección 5.9.2. en [10]) tenemos que

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}', \varphi w \rangle \, dt = -\int_0^T \langle \mathbf{u}, \varphi' w \rangle \, dt. \tag{3.50}$$

Por (3.49) y (3.50) obtenemos

$$\int_0^T \langle \mathbf{v}, \varphi w \rangle \ dt = \int_0^T \langle \mathbf{u}', \varphi w \rangle \ dt,$$

y así

$$\int_0^T \langle \mathbf{v} - \mathbf{u}', \varphi w \rangle \ dt = \int_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}', \varphi w)_{L^2(U)} \ dt = 0.$$

Más aún

$$\int_0^T \left(\int_U (\mathbf{v} - \mathbf{u}') \varphi w \ dx \right) dt = 0$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$ y para todo $w \in H_0^1(U)$. Como $C_c^\infty(0,T)$ es denso en $L^2(0,T)$, se tiene que para $\phi \in L^2(0,T)$, existe $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in C_c^\infty(0,T)$ tal que $\varphi_n \to \phi$ en $L^2(0,T)$. Por tanto

$$\int_0^T \left(\int_U (\mathbf{v} - \mathbf{u}') \varphi_n w \ dx \right) \ dt = 0 \qquad \text{para toda } n = 1, 2, \ldots.$$

Haciendo $n \to \infty$

$$\int_0^T \left(\int_U (\mathbf{v} - \mathbf{u}') \phi w \ dx \right) \ dt = 0 \qquad \text{para toda } \phi \in L^2(0,T).$$

Más aún

$$\int_0^T \phi \left(\int_U (\mathbf{v} - \mathbf{u}') w \ dx \right) dt = 0 \qquad \text{para toda } \phi \in L^2(0,T),$$

de donde tenemos que

$$\int_U (\mathbf{v} - \mathbf{u}') w \ dx = 0 \qquad \text{c.t.p. } t \in [0,T]$$

por lo tanto $\mathbf{v} - \mathbf{u}' = 0$ c.t.p. $t \in [0,T]$ y c.t.p. $x \in U$. Como w es arbitrario, concluímos que $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$. □

Teorema 20 (Existencia de la solución débil)**.** *Existe una solución débil para el problema* (3.21)*.*

Demostración. Gracias al Teorema 18, tenemos que la sucesión $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ es acotada en $L^2(0,T; H_0^1(U))$ y $\{\mathbf{u}_m'\}_{m=1}^\infty$ es acotada en $L^2(0,T; H^{-1}(U))$. Por el teorema de Eberlein-Šmulian, existen una subsucesión $\{\mathbf{u}_{m_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq \{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ y una función $\mathbf{u} \in L^2(0,T; H_0^1(U))$ tal que,

$$\mathbf{u}_{m_k} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{en } L^2(0,T; H_0^1(U)).$$

Además existen una subsucesión $\{\mathbf{u}_{m_{k_j}}'\}_{j=1}^\infty \subseteq \{\mathbf{u}_{m_k}'\}_{k=1}^\infty \subseteq \{\mathbf{u}_m'\}_{m=1}^\infty$ y una función $\mathbf{v} \in$

$L^2(0,T;H^{-1}(U))$ tal que,

$$\mathbf{u}'_{m_{k_j}} \rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{en } L^2(0,T;H^{-1}(U)).$$

Tomemos $\{m_l\}_{l=1}^{\infty} = \{m_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$, gracias al Lema 1 tenemos que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u} & \text{en} \quad L^2(0,T;H_0^1(U)) \\ \mathbf{u}'_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u}' & \text{en} \quad L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases}$$

Luego, fijamos un entero N y elegimos $\mathbf{v} \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ con la forma

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k$$

donde $\{d^k\}_{k=1}^N$ son funciones suaves. Sea $m \geq N$, multiplicamos (3.26) por $d^k(t)$, sumamos sobre $k = 1, \ldots, N$ e integramos con respecto a t para obtener

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}'_m, \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t] \right) \, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \, dt. \tag{3.51}$$

Sea $m = m_l$ y pasando al límite débil cuando $l \to \infty$

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] \right) \, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \, dt.$$

Como $C^1([0,T];H_0^1(U))$ es denso en $L^2(0,T;H_0^1(U))$, para $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, existe $\{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty} \in$

$C^1([0,T];H_0^1(U))$ tal que $\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v}$ en $L^2(0,T;H_0^1(U))$. Así

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}', \mathbf{v}_n \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}_n; t] \right) \, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_n) \, dt,$$

y haciendo $n \to \infty$

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t] \right) \, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}) dt \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \in L^2(0,T;H_0^1(U)). \tag{3.52}$$

En particular, para todo $v \in H_0^1(U)$ y c.t.p. t, tomemos $\overline{\mathbf{v}}(t) = \varphi(t)v$ con $\varphi \in C_c^{\infty}(0,T)$ tal que

$$\int_0^T \left(\langle \mathbf{u}', \varphi v \rangle + B[\mathbf{u}, \varphi v; t] \right) \, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi v) \, dt.$$

Más aún

$$\int_0^T \varphi\left(\langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\right)\, dt = \int_0^T \varphi(\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt,$$

y por tanto

$$\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v), \tag{3.53}$$

con lo cual por el Teorema 12 tenemos que $\mathbf{u} \in C([0,T]; L^2(U))$. Ahora, para poder probar la condición inicial $\mathbf{u}(0) = g$ trabajemos la ecuación (3.52). En efecto, gracias al teorema de Fubini, teorema fundamental del cálculo y tomando $\mathbf{v} \in C^1([0,T]; H_0^1(U))$ con $\mathbf{v}(T) = 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle\, dt &= \int_0^T \left(\int_U \mathbf{u}'\mathbf{v}\; dx\right) dt \\
&= \int_U \left(\int_0^T \mathbf{u}'\mathbf{v}\; dt\right) dx \\
&= \int_U \left(\mathbf{u}\mathbf{v}\Big|_0^T - \int_0^T \mathbf{v}'\mathbf{u}\, dt\right) dx \\
&= \int_U \left(\mathbf{u}(T)\mathbf{v}(T) - \mathbf{u}(0)\mathbf{v}(0) - \int_0^T \mathbf{v}'\mathbf{u}\, dt\right) dx \\
&= -\int_U \mathbf{u}(0)\mathbf{v}(0)\, dx - \int_U \left(\int_0^T \mathbf{v}'\mathbf{u}\, dt\right) dx \\
&= -(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)) - \int_0^T \left(\int_U \mathbf{v}'\mathbf{u}\, dx\right) dt \\
&= -(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)) - \int_0^T \langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle\, dt
\end{aligned}$$

por tanto obtenemos

$$\int_0^T \left(-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt + (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)) \tag{3.54}$$

para cada $\mathbf{v} \in C^1([0,T]; H_0^1(U))$ con $\mathbf{v}(T) = 0$. De manera análoga, trabajamos la ecuación (3.51) obteniendo así

$$\int_0^T \left(\langle -\mathbf{v}', \mathbf{u}_m\rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\right) dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt + (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0)). \tag{3.55}$$

Por otro lado, probemos que $\mathbf{u}_m(0) \longrightarrow g$ en $L^2(U)$. Sabemos que

$$\mathbf{u}_m(0) = \sum_{k=1}^m d_m^k(0) w_k \quad \text{y} \quad d_m^k(0) = (g, w_k)$$

entonces

$$\mathbf{u}_m(0) = \sum_{k=1}^{m}(g, w_k)w_k.$$

Demostremos que

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}(g, w_k)w_k - g\right\|^2_{L^2(U)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad m \to \infty.$$

Así

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m}(g, w_k)w_k - g\right\|^2_{L^2(U)} &= \left(\sum_{k=1}^{m}(g, w_k)w_k - g, \sum_{j=1}^{n}(g, w_j)w_j - g\right)_{L^2(U)} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(g, w_k)\left(w_k, \sum_{j=1}^{n}(g, w_j)w_j - g\right)_{L^2(U)} \\
&\quad - \left(g, \sum_{j=1}^{n}(g, w_j)w_j - g\right)_{L^2(U)} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(g, w_k)\left[\sum_{j=1}^{n}(g, w_j)(w_k, w_j) - (w_k, g)\right] - \sum_{j=1}^{n}(g, w_j)^2 + (g, g)_{L^2(U)} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left((g, w_k)^2 - (w_k, g)^2\right) - \sum_{j=1}^{n}(g, w_j)^2 + (g, g)_{L^2(U)} \\
&= -\sum_{k=1}^{m}(w_k, g)^2 + \|g\|^2_{L^2(U)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad m \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

ya que por la identidad de Parseval (Teorema 16) $\sum_{k=1}^{\infty}(w_k, g)^2 = \|g\|^2_{L^2(U)}$. Por tanto $\mathbf{u}_m(0) \to g$ en $L^2(U)$. A continuación, tomamos $m = m_l$ en (3.55) y pasamos al límite débil cuando $l \to \infty$

$$\int_0^T \left(-\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\right)\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt + (g, \mathbf{v}(0)). \tag{3.56}$$

De (3.54) y (3.56) tenemos que

$$(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)) = (g, \mathbf{v}(0)) \quad \text{para todo} \quad \mathbf{v} \in L^2(0, T; H_0^1(U)).$$

Por último, como $\mathbf{v}(0)$ es arbitrario, basta tomar $\overline{\mathbf{v}}(t) = \dfrac{T-t}{T}\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}(T) = 0$ para todo $\mathbf{v} \in H_0^1(U)$, entonces

$$(\mathbf{u}(0), \overline{\mathbf{v}}(0)) = (g, \overline{\mathbf{v}}(0))$$

$$(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) = (g, \mathbf{v})$$

$$\mathbf{u}(0) = g.$$

□

Teorema 21 (Unicidad de la solución débil)**.** *La solución débil de* (3.21) *es única.*

Demostración. En este caso es suficiente probar que la única solución débil de (3.21), tomando $\mathbf{f} \equiv g \equiv 0$, es

$$\mathbf{u} \equiv 0. \tag{3.57}$$

Como $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, existe $\{\overline{\mathbf{v}}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C^1([0,T];H_0^1(U))$ tal que

$$\overline{\mathbf{v}}_n \to \mathbf{u} \quad \text{en } L^2(0,T;H_0^1(U))$$

donde

$$\overline{\mathbf{v}}_n(t) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k$$

con $d^k(t)$ funciones suaves. A continuación, utilizando la ecuación (3.53) tenemos que

$$\left\langle \mathbf{u}', \overline{\mathbf{v}}_n \right\rangle + B[\mathbf{u}, \overline{\mathbf{v}}_n; t] = (\mathbf{f}, \overline{\mathbf{v}}_n)$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$

$$\left\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \right\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}),$$

como $\mathbf{f} \equiv 0$ tenemos

$$\left\langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \right\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = 0$$

para c.t.p. $t \in [0,T]$. Luego, aplicando el Teorema 12

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = 0. \tag{3.58}$$

Ahora utilizamos (3.12), con lo cual

$$B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] \geq \beta \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U)}^2 - \gamma \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2 \geq -\gamma \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}^2; \tag{3.59}$$

utilizando (3.59) en (3.58) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)} \leq 2\gamma\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}.$$

Procedemos a tomar

$$\eta(t) = \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}$$

y

$$\psi(t) = 0,$$

por tanto

$$\eta'(t) \leq 2\gamma\,\eta(t).$$

Utilizamos la desigualdad de Gronwall en su forma diferencial para obtener

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)} \leq e^{2\gamma t}\left(\|g\|^2_{L^2(U)}\right).$$

Como $g \equiv 0$ se concluye que $\mathbf{u} = 0$. Por último, suponemos que $\mathbf{u}^1$ y $\mathbf{u}^2$ (utilizamos la notación en negrilla dado que se trabaja en un espacio de Bochner) son soluciones débiles para el problema (3.21), así

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)_t + L(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) = 0 \quad \text{en} \quad U_T \\ \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial U \times [0,T] \\ \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 = 0 \quad \text{sobre} \quad U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Por lo tanto $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$. □

3.4. Regularidad

En esta sección vamos a estudiar la regularidad de nuestra solución débil $\mathbf{u}$ del problema parabólico de segundo orden con valores iniciales y valores en la frontera. Nuestro objetivo será probar que $\mathbf{u}$ es suave, siempre que los coeficientes de la EDP y la frontera del dominio sean suaves.

Durante toda esta sección asumiremos que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección completa de funciones propias de $-\Delta$ en $H_0^1(U)$ y que U es acotado, abierto, con ∂U suave. Además supondremos que los coeficientes a^{ij}, b^i, c $(i,j = 1,\ldots,n)$ son suaves sobre $\bar{U}$ y no dependen de t. Antes de empezar con el primer teorema de regularidad revisemos algunos resultados útiles.

Lema 2. *Supongamos que* H *es un espacio de Hilbert con norma* $\|\cdot\|$*, y*

$$\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \qquad \text{en} \quad L^2(0,T;\mathrm{H}).$$

Supongamos que también tenemos las cotas uniformes

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|\mathbf{u}_k(t)\| \le C \qquad (k=1,\dots)$$

para alguna constante $C>0$*. Entonces*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|\mathbf{u}(t)\| \le C.$$

Demostración. Primeramente consideremos $v \in \mathrm{H}$ y $0 \le a \le b \le T$. Probemos que

$$\int_a^b (v, \mathbf{u}_k(t))\, dt \le C\|v\|\, |b-a|. \tag{3.60}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int_a^b (v, \mathbf{u}_k(t))\, dt &\le \int_a^b \|v\|\|\mathbf{u}_k(t)\|\, dt \\ &\le \|v\| \int_a^b C\, dt \qquad \text{ya que } \|\mathbf{u}_k(t)\| \le C \\ &= C\|v\|\, |b-a|.\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la definición de convergencia débil tenemos que para todo $\varphi \in (L^2(0,T;\mathrm{H}))^*$, se cumple $\varphi(\mathbf{u}_k) \to \varphi(\mathbf{u})$. Más aún, para todo $\varphi \in L^2(0,T;\mathrm{H})$, se cumple $(\varphi, \mathbf{u}_k)_{L^2(0,T;\mathrm{H})} \to (\varphi, \mathbf{u})$ cuando $k \to \infty$. En particular para $v \in \mathrm{H}$, definamos $\bar{\mathbf{v}} \in L^2(0,T;\mathrm{H})$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}} : [0,T] &\longrightarrow \mathrm{H} \\ t &\longmapsto \bar{\mathbf{v}}(t) = v.\end{aligned}$$

Entonces, dados $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ y utilizando (3.60),

$$\int_{t_1}^{t_2} (\bar{\mathbf{v}}(t), \mathbf{u}_k(t))_{\mathrm{H}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (v, \mathbf{u}_k(t))_{\mathrm{H}}\, dt \le C\|v\|(t_2 - t_1).$$

Más aún,

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (v, \mathbf{u}_k(t))_{\mathrm{H}} \, dt \leq C\|v\|.$$

De forma equivalente, tomando $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ tenemos

$$\frac{1}{t_0 - t} \int_{t_0}^{t} (v, \mathbf{u}_k(\tau))_{\mathrm{H}} \, d\tau \leq C\|v\|.$$

Luego, como $\mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u}$

$$\frac{1}{t_0 - t} \int_{t_0}^{t} (v, \mathbf{u}(\tau))_{\mathrm{H}} \, d\tau \leq C\|v\|.$$

Ahora, tomemos

$$F(s) = \int_0^s (v, \mathbf{u}(\tau))_{\mathrm{H}} \, d\tau.$$

Se sigue que

$$F(t) - F(t_0) = \int_0^t (v, \mathbf{u}(\tau))_{\mathrm{H}} \, d\tau - \int_0^{t_0} (v, \mathbf{u}(\tau))_{\mathrm{H}} \, d\tau = \int_{t_0}^t (v, \mathbf{u}(\tau))_{\mathrm{H}} \, d\tau$$

y por (3.60), tenemos que

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \leq C\|v\|.$$

Tomamos el límite cuando $t \to t_0$

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \right) \leq C\|v\|$$

que resulta ser lo mismo que

$$F'(t_0) \leq C\|v\|.$$

Por la definición de $F(t_0)$ y el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$(v, \mathbf{u}(t_0))_{\mathrm{H}} \leq C\|v\|$$

c.t.p. $t_0 \in [0, T]$. En particular,

$$(v, \mathbf{u}(t))_{\mathrm{H}} \leq C\|v\| \tag{3.61}$$

c.t.p. $t \in [0, T]$. Por otro lado, utilizando un procedimiento análogo, definimos $\bar{\mathbf{v}}(t) = -v$ con $\bar{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; \mathrm{H})$ con lo cual

$$(-v, \mathbf{u}(t))_{\mathrm{H}} \leq C\|v\|. \tag{3.62}$$

Así, por (3.61) y (3.62) tenemos que

$$|\,(v, \mathbf{u}(t))_{\mathrm{H}}\,| \leq C\|v\|$$

c.t.p. $t \in [0,T]$. Tomando $v \neq 0$ y supremo en ambos lados obtenemos

$$\sup_{\|v\|\neq 0} \frac{|\,(v, \mathbf{u}(t))_{\mathrm{H}}\,|}{\|v\|} \leq C.$$

Ahora, por el teorema de representación de Riesz tenemos que $\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathrm{H}^{-1}} \leq C$ c.t.p. $t \in [0,T]$. Por lo tanto

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\| \leq C.$$

□

Teorema 22 (Regularidad elíptica H^2 de frontera)**.** *Asumamos*

$$a^{ij} \in C^1(\bar{U}),\ b^i,\ c \in L^\infty(U) \quad (i,j = 1,\ldots,n)$$

y

$$f \in L^2(U).$$

Supongamos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil del problema elíptico con valores en la frontera

$$\begin{cases} Lu = f & en \quad U \\ u = 0 & sobre \quad \partial U. \end{cases}$$

Finalmente asumamos

$$\partial U \ es\, C^2.$$

Entonces

$$u \in H^2(U),$$

y tenemos la estimación

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}\right),$$

la constante C depende solamente de U y de los coeficientes de L.

Demostración. Ver [10, pág 335-340]. □

Teorema 23 (Teorema de isomorfismo de Banach)**.** *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Entonces T^{-1} es también continuo (T es un isomorfismo de espacios de Banach).*

Demostración. Ver [2, pág 35]. □

Lema 3. *El operador $-\Delta$ definido como*

$$\begin{aligned} -\Delta : H^2(U) \cap H_0^1(U) &\longrightarrow L^2(U) \\ u &\longmapsto -\Delta u \end{aligned} \tag{3.63}$$

es un isomorfismo de espacios de Banach considerando en $H^2(U) \cap H_0^1(U)$ la norma $\|\cdot\|_{H^2(U)}$. En particular, para todo $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ tenemos la estimación

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(U)},$$

donde la constante $C > 0$ depende solamente de U.

Demostración. En primer lugar, demostremos que $H^2(U) \cap H_0^1(U)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{H^2(U)}$. En efecto, sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H^2(U) \cap H_0^1(U)$ una sucesión tal que $u_n \to u$ en $H^2(U)$. Entonces, para $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{H_0^1(U)} &= \|\nabla(u_n - u_m)\|_{L^2(U)} \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{L^2(U)} + \|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^2(U)} + \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha(u_n - u_m)\|_{L^2(U)} \\ &\leq C\|u_n - u_m\|_{H^2(U)} \to 0, \end{aligned}$$

cuando $n, m \to \infty$. Así $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $H_0^1(U)$ el cual es un espacio de Banach, por tal motivo existe $\tilde{u} \in H_0^1(U)$ tal que $u_n \to \tilde{u}$ en $H_0^1(U)$. Probemos que $u = \tilde{u}$. Como $u_n \to u$ en $H^2(U)$, por el teorema de Riesz-Fischer (Teorema 2) existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $u_{n_k} \to u$ c.t.p. $x \in U$. Luego $u_{n_k}(x) \to \tilde{u}(x)$ en $H_0^1(U)$. Nuevamente, existe $\{u_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $u_{n_{k_j}}(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in U$ y $u_{n_{k_j}}(x) \to \tilde{u}(x)$ c.t.p. $x \in U$. Así, $\tilde{u}(x) = u(x)$ c.t.p. $x \in U$, es decir, $u = \tilde{u}$. Por tanto $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$. Esto prueba que $H^2(U) \cap H_0^1(U)$ es cerrado en $H^2(U)$, y por ende es de Banach pues $H^2(U)$ lo es.

Ahora demostremos que $-\Delta$ es continuo. Sea $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ entonces

$$\begin{aligned}
\| -\Delta u\|_{L^2(U)} &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2(U)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2(U)} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(U)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \\
&\leq C\|u\|_{H^2(U)},
\end{aligned}$$

con C una constante positiva. Así, $-\Delta$ es continuo.

Demostremos que $-\Delta : H^2(U) \cap H_0^1(U) \to L^2(U)$ es biyectivo. Probemos que $-\Delta$ es sobreyectivo. Sea $f \in L^2(U)$, debemos hallar $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ tal que $f = -\Delta u$. Para empezar, probemos que existe $u \in H_0^1(U)$ tal que $f = -\Delta u$. Así, definamos

$$\begin{aligned}
a : H_0^1(U) \times H_0^1(U) &\to \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto a(u, v) = \int_U \nabla u \nabla v \, dx,
\end{aligned}$$

y $\varphi \in H^{-1}(U)$ por

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_U fv \, dx.$$

$a(\cdot\,, \cdot)$ claramente es bilineal. Demostremos que $a(\cdot\,, \cdot)$ es continua. En efecto,

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left| \int_U \nabla u \nabla v \, dx \right| \\
&\leq \int_U |\nabla u \nabla v| \, dx \\
&\leq \int_U |\nabla u| \, |\nabla v| \, dx \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(U)} \|\nabla v\|_{L^2(U)} \\
&= \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}.
\end{aligned}$$

Demostremos que $a(\cdot\,, \cdot)$ es coerciva. En efecto,

$$a(u, u) = \int_U \nabla u \nabla u \, dx = \int_U |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1(U)}^2.$$

Por otro lado, φ es claramente lineal, demostremos que φ es continuo. Así,

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, v\rangle| &= \left| \int_U fv \, dx \right| \\ &\leq \int_U |f| \, |v| \, dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{L^2(U)} \\ &\leq C_p \|f\|_{L^2(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \end{aligned}$$

con C_p la constante de Poincaré. Por el teorema de Lax-Milgram, existe un único $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v\rangle \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U)$$

es decir,

$$\int_U \nabla u \nabla v \, dx = \int_U fv \, dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U). \tag{3.64}$$

Así, u es solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad U \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

entonces por el Teorema 22 (regularidad elíptica H^2 de frontera), $u \in H^2(U)$. En particular $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$. De (3.64), aplicando fórmulas de Green tenemos que

$$\int_U (-\Delta u)v \, dx - \int_U \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_U fv \, dx \quad \text{para todo } H_0^1(U),$$

de donde

$$\int_U (-\Delta u - f)v \, dx = 0 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U),$$

más aún

$$\int_U (-\Delta u - f)v \, dx = 0 \quad \text{para todo } v \in C_c^\infty(U),$$

es decir, por densidad,

$$(-\Delta u - f, v)_{L^2(U)} = 0 \quad \text{para todo } v \in L^2(U)$$

y entonces

$$-\Delta u = f.$$

Probemos que $-\Delta$ es inyectivo. Basta probar que $ker(-\Delta) = \{0\}$. En efecto, sea $u \in ker(-\Delta)$, es decir, $-\Delta u = 0$. Así, $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ y $-\Delta u = 0$ por ende

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en} \quad U \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

gracias al teorema de Lax-Milgram, existe un único u que resuelve este problema . Más aún, la función constante 0 es solución de este problema, por tanto $u = 0$. Así, $-\Delta$ es inyectivo y por lo tanto es biyectivo.

Hemos probado que $-\Delta$ es lineal, continuo y biyectivo entre dos espacios de Banach. Por el teorema de isomorfismo de Banach, el operador $-\Delta$ definido en (3.63) es un isomorfismo de espacios de Banach. Entonces existe el operador

$$(-\Delta)^{-1} : L^2(U) \to H^2(U) \cap H_0^1(U)$$

y es continuo, por ende existe una constante positiva C tal que

$$\left\|(-\Delta)^{-1} w\right\|_{H^2(U)} \leq C \|w\|_{L^2(U)} \quad \text{para todo } w \in L^2(U).$$

Sea $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$, tomemos $w := -\Delta u \in L^2(U)$, de donde

$$\left\|(-\Delta)^{-1}(-\Delta u)\right\|_{H^2(U)} \leq C \| - \Delta u\|_{L^2(U)} \quad \text{para todo } u \in H^2(U) \cap H_0^1(U),$$

por lo tanto concluimos que

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(U)} \quad \text{para todo } u \in H^2(U) \cap H_0^1(U).$$

□

Observación 6. El operador $-\Delta$ puede verse como un operador de $H_0^1(U) \to H^{-1}(U)$ de la

siguiente manera: Si $f \in H^{-1}(U)$, por el Teorema 5, existe un único $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad U \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

en el sentido débil $\big($es decir, $\int_U \nabla u \cdot \nabla v = \langle f, v \rangle_{(H^{-1}(U), H_0^1(U))}$ para todo $v \in H_0^1(U)\big)$. Se define $(-\Delta)^{-1} f = u$, y por ende $(-\Delta u) = f$. Se puede probar que $-\Delta$ es un isomorfismo de Banach entre $H_0^1(U)$ y $H^{-1}(U)$ sin recurrir al Teorema 22.

La demostración del teorema a continuación contiene varios resultados que no se tratan a fondo en este trabajo debido a que corresponden a otras áreas de estudio, sin embargo, el resultado de la demostración es de gran importancia para el primer teorema de regularidad de este capítulo.

Teorema 24. *Existen constantes $\beta > 0$ y $\gamma \geq 0$ tales que*

$$\beta \|u\|^2_{H^2(U)} \leq (Lu, -\Delta u)_{L^2(U)} + \gamma \|u\|^2_{H_0^1(U)}$$

para todo $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$.

Demostración. Las ideas que se incluyen en esta demostración se obtuvieron de [3] y [13]. Supondremos por ahora que $u \in C^3(\bar{U})$, u=0 en ∂U. Escribimos $\partial U = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$, siendo $\{\Gamma_i\}_{i=1}^m$ un recubrimiento de ∂U junto a un difeomorfismo $H_i : U_i \to \tilde{U}_i$ que verifica $H_i(U_i) \subseteq R_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ y $H_i(\Gamma_i) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, con U_i vecindad abierta de Γ_i y $\tilde{U}_i \subseteq R_+^n$ abierto. Esto es posible pues ∂U es de clase C^1 (al menos).
Además, sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^\infty(\bar{U})$ tales que cumplen lo siguiente

1. $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$ para todo $x \in U$.
2. $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, y
3. para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $\varphi_i(x) = 0$ para todo $x \in U$ que verifica

$$dist(x, \partial U \setminus \Gamma_i) \leq \varepsilon_i.$$

La existencia de estas funciones se da gracias al teorema de partición de la unidad (ver [18], pág 60-61). Fijemos $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomemos $H = H_i$, $\Gamma = H_i(\Gamma_i)$, $\varphi = \varphi_i$ y consideremos el

operador L en su forma de no divergencia (descrita en (3.5)) con $c \equiv 0$ (luego demostraremos para $c \neq 0$). Así

$$\begin{aligned}\left(\varphi Lu, -\Delta u\right)_{L^2(U)} &= \int_U \left(-\sum_{i,j=1}^n \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n \varphi b^i u_{x_i}\right)\left(-\sum_{k=1}^n u_{x_k x_k}\right)\, dx \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \int_U \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k x_k}\, dx - \sum_{i,k=1}^n \int_U \varphi b^i u_{x_i} u_{x_k x_k}\, dx. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Ahora, integramos por partes con $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ el vector normal exterior a ∂U

$$\begin{aligned}\int_U \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k x_k}\, dx &= -\int_U \left(\varphi a^{ij} u_{x_i x_j}\right) u_{x_k}\, dx + \int_{\partial U} \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k} \nu_k\, d\sigma \\ &= -\int_U \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k}\, dx - \int_U \varphi a^{ij} u_{x_i x_j x_k} u_{x_k}\, dx \\ &\quad + \int_{\partial U} \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k} \nu_k\, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Integramos nuevamente por partes

$$\begin{aligned}\int_U \varphi a^{ij} u_{x_i x_j x_k} u_{x_k}\, dx &= -\int_U \left(\varphi a^{ij} u_{x_k}\right)_{x_j} u_{x_i x_k}\, dx + \int_{\partial U} \varphi a^{ij} u_{x_i x_k} u_{x_k} \nu_j\, d\sigma \\ &= -\int_U \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i x_k} u_{x_k}\, dx - \int_U \varphi a^{ij} u_{x_j x_k} u_{x_i x_k}\, dx \\ &\quad + \int_{\partial U} \varphi a^{ij} u_{x_i x_k} u_{x_k} \nu_j\, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Sustituyendo (3.67) en (3.66) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_U \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k x_k}\, dx &= -\int_U \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k}\, dx + \int_U \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i x_k} u_{x_k}\, dx \\ &\quad + \int_U \varphi a^{ij} u_{x_j x_k} u_{x_i x_k}\, dx - \int_{\partial U} \varphi a^{ij} u_{x_i x_k} u_{x_k} \nu_j\, d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial U} \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k} \nu_k\, d\sigma \\ &= \int_U \left[\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i x_k} u_{x_k} - \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k}\right]\, dx + \int_U \varphi a^{ij} u_{x_j x_k} u_{x_i x_k}\, dx \\ &\quad + \int_{\partial U} \varphi a^{ij} \left(u_{x_i x_j} u_{x_k} \nu_k - u_{x_i x_k} u_{x_k} \nu_j\right)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.68}$$

De la ecuación (3.65) tenemos que

$$\sum_{i,j,k=1}^n \int_U \varphi a^{ij} u_{x_i x_j} u_{x_k x_k}\, dx = \left(\varphi Lu, -\Delta u\right)_{L^2(U)} + \sum_{i,k=1}^n \int_U \varphi b^i u_{x_i} u_{x_k x_k}\, dx,$$

lo que junto con (3.68) nos da

$$\begin{aligned}\left(\varphi Lu, -\Delta u\right)_{L^2(U)} + \sum_{i,k=1}^{n} \int_U \varphi b^i u_{x_i} u_{x_k x_k}\, dx &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_U \varphi a^{ij} u_{x_j x_k} u_{x_i x_k}\, dx \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\{ - \int_U \left[\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k} - \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i x_k} u_{x_k} \right] dx \right. \\ &+ \left. \int_{\partial U} \varphi a^{ij} \left(u_{x_i x_j} u_{x_k} \nu_k - u_{x_i x_k} u_{x_k} \nu_j \right)\, d\sigma \right\}\end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \int_U \varphi a^{ij} u_{x_j x_k} u_{x_i x_k}\, dx &= \left(\varphi Lu, -\Delta u\right)_{L^2(U)} + \sum_{i,k=1}^{n} \int_U \varphi b^i u_{x_i} u_{x_k x_k}\, dx \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\{ \int_U \left[\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k} - \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i x_k} u_{x_k} \right] dx \right. \\ &+ \left. \int_{\partial U} \varphi a^{ij} \left(u_{x_i x_k} u_{x_k} \nu_j - u_{x_i x_j} u_{x_k} \nu_k \right)\, d\sigma \right\}. \qquad (3.69)\end{aligned}$$

Ahora, recordemos que L es uniformemente elíptico, es decir, existe una constante $\theta > 0$ tal que para todo vector $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \text{c.t.p. } x \in U.$$

Puesto que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in U$ tomemos $\xi_j = \sqrt{\varphi(x)} u_{x_k x_j}$. Así

$$\theta \sum_{j=1}^{n} \varphi (u_{x_k x_j})^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \varphi (u_{x_k x_j})(u_{x_k x_i}) \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, n\},$$

sumando sobre k e integrando obtenemos

$$\theta \int_U \varphi \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2\, dx \leq \sum_{i,j,k=1}^{n} a^{ij} \varphi (u_{x_k x_j})(u_{x_k x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \int_U a^{ij} \varphi (u_{x_k x_j})(u_{x_k x_i})$$

lo que, por la desigualdad (3.69) nos da

$$\begin{aligned}\theta \int_U \varphi \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2\, dx &\leq \left(\varphi Lu, -\Delta u\right)_{L^2(U)} + \sum_{i,k=1}^{n} \int_U \varphi b^i u_{x_i} u_{x_k x_k}\, dx \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{n} \left\{ \int_U \left[\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k} - \left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i x_k} u_{x_k} \right] dx \right.\end{aligned}$$

$$+\int_{\partial U}\varphi a^{ij}\left(u_{x_ix_k}u_{x_k}\nu_j-u_{x_ix_j}u_{x_k}\nu_k\right)\,d\sigma\Bigg\}.$$

Reescribamos esto como

$$\theta\int_U\varphi\sum_{j,k=1}^n(u_{x_kx_j})^2\,dx\le\left(\varphi Lu,-\Delta u\right)_{L^2(U)}+\int_U P\,dx+\int_{\partial U}Q\,d\sigma \tag{3.70}$$

donde

$$P=\sum_{i,k=1}^n\varphi b^iu_{x_i}u_{x_kx_k}+\sum_{i,j,k=1}^n\left[\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k}u_{x_ix_j}u_{x_k}-\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j}u_{x_ix_k}u_{x_k}\right]$$

y

$$Q=\sum_{i,j,k=1}^n\varphi a^{ij}\left(u_{x_ix_k}u_{x_k}\nu_j-u_{x_ix_j}u_{x_k}\nu_k\right).$$

A continuación encontremos estimaciones para $\displaystyle\int_U P\,dx$. Sea $\varepsilon>0$. Como $\varphi\in C^\infty(\bar U)$, $D^\alpha\varphi\in L^\infty(U)$, para todo multiíndice α. Esto en particular implica que $D^\alpha\big(\varphi a^{ij}\big)$ y $D^\alpha\big(\varphi b^i\big)$ pertenencen a $L^\infty(U)$. Además, como $0\le\varphi\le1$, $\|\varphi w\|_{L^\infty(U)}\le\|w\|_{L^\infty(U)}$, para todo $w\in L^\infty(U)$. Entonces de la primera parte de P tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_U\varphi b^iu_{x_i}u_{x_kx_k}\,dx\right|&\le\|\varphi b^i\|_{L^\infty(U)}\int_U|u_{x_i}u_{x_kx_k}|\,dx\\&\le\|\varphi b^i\|_{L^\infty(U)}\left(\frac{\tilde{\varepsilon_1}}{\|\varphi b^i\|_{L^\infty(U)}}\int_U(u_{x_kx_k})^2\,dx+\frac{\|\varphi b^i\|_{L^\infty(U)}}{4\tilde{\varepsilon_1}}\int_U|u_{x_i}|^2\,dx\right)\end{aligned}$$

en donde utilizamos la desigualdad de Cauchy con $\frac{\tilde{\varepsilon_1}}{\|\varphi b^i\|_{L^\infty(U)}}>0$ y $b^i\neq0$ ($\tilde{\varepsilon_1}$ será precisado más adelante). Así

$$\left|\int_U\varphi b^iu_{x_i}u_{x_kx_k}\right|\le\tilde{\varepsilon_1}\int_U|u_{x_kx_k}|^2\,dx+\frac{D^{(1)}_{i,k}}{\tilde{\varepsilon_1}}\int_U|u_{x_i}|^2\,dx, \tag{3.71}$$

con $D^{(1)}_i:=\dfrac{1}{4}\|\varphi b^i\|^2_{L^\infty(U)}$. Por otro lado, de manera completamente similar obtenemos

$$\begin{aligned}\int_U\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k}u_{x_ix_j}u_{x_k}\,dx&\le\|\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_k}\|_{L^\infty(U)}\int_U|u_{x_ix_j}u_{x_k}|\,dx\\&\le\tilde{\varepsilon_2}\int_U|u_{x_ix_j}|^2\,dx+\frac{D^{(2)}_{i,j,k}}{\tilde{\varepsilon_2}}\int_U|u_{x_k}|^2\,dx\end{aligned} \tag{3.72}$$

y

$$\int_U\left(\varphi a^{ij}\right)_{x_j}u_{x_ix_k}u_{x_k}\,dx\le\tilde{\varepsilon_2}\int_U|u_{x_ix_k}|^2\,dx+\frac{D^{(3)}_{i,j}}{\tilde{\varepsilon_2}}\int_U|u_{x_k}|^2\,dx, \tag{3.73}$$

con $D^{(2)}_{i,j,k}$ y$D^{(3)}_{i,j}$ definidos de manera similar a $D^{(1)}_i$ y $\tilde{\varepsilon_2} > 0$ que será precisado más adelante. Sustituyendo (3.71), (3.72) y (3.73) en la definición de P tenemos que

$$\left|\int_U P\,dx\right| \leq \sum_{i,k=1}^{n}\left(\tilde{\varepsilon_1}\int_U |u_{x_k x_k}|^2\,dx + \frac{D^{(1)}_{i,k}}{\tilde{\varepsilon_1}}\int_U |u_{x_i}|^2\,dx\right) + \sum_{i,j,k=1}^{n}\left[\tilde{\varepsilon_2}\int_U \left(|u_{x_i x_j}|^2 + |u_{x_i x_k}|^2\right)\,dx + \frac{2D^{(4)}_{i,j,k}}{\tilde{\varepsilon_2}}\int_U |u_{x_k}|^2\,dx\right],$$

con $D^{(4)}_{i,j,k} = \text{máx}\left\{D^{(2)}_{i,j,k}, D^{(3)}_{i,j}\right\}$. Así, si $\tilde{\varepsilon_1} = \dfrac{\varepsilon}{2n}$ y $\tilde{\varepsilon_2} = \dfrac{\varepsilon}{4n}$

$$\left|\int_U P\,dx\right| \leq \varepsilon\int_U \sum_{j,k=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2\,dx + \frac{D}{\varepsilon}\int_U |\nabla u|^2\,dx \tag{3.74}$$

donde $D = 2nD^{(1)}_i + 4nD^{(4)}_{i,j,k}$.

Ahora hallaremos estimaciones para $\displaystyle\int_{\partial U} Q\,d\sigma$. Recordemos que $\varphi = 0$ cerca de $\partial U \setminus \Gamma$ (ver tercer punto de las propiedades de φ), por ende, de la definición de Q

$$\int_{\partial U} Q\,d\sigma = \int_\Gamma Q\,d\sigma + \int_{\partial U\setminus\Gamma} Q\,d\sigma = \int_\Gamma Q\,d\sigma.$$

Puesto que $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$ y $u \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ (condiciones impuestas sobre el difeomorfismo H) tenemos que $\nu = (0,\ldots,0,-1)$, por tanto, sobre Γ tenemos

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i,j=1}^{n}\varphi a^{ij}u_{x_i x_j}u_{x_n} - \sum_{i,k=1}^{n}\varphi a^{in}u_{x_i x_k}u_{x_k} \\ &= \varphi\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_i x_j}u_{x_n} - \sum_{i,k=1}^{n} a^{in}u_{x_i x_k}u_{x_k}\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a^{in}u_{x_i x_n}u_{x_n} + \sum_{j=1}^{n} a^{nj}u_{x_n x_j}u_{x_n} - \sum_{k=1}^{n} a^{nn}u_{x_n x_k}u_{x_k} - \sum_{i=1}^{n} a^{in}u_{x_i x_n}u_{x_n}\right). \end{aligned}$$

Ahora, como $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$ entonces para $i,j \in \{1,\ldots,n-1\}$ tenemos que $u_{x_i x_j} = 0$ sobre Γ. Así,

$$Q = \varphi\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}u_{x_n x_j}u_{x_n} = \frac{1}{2}\varphi\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj}\left(|u_{x_n}|^2\right)_{x_j}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$, sea $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces, como $\Gamma \subseteq$

$\{x_n = 0\}$

$$\left|\int_{\partial U} Q\, d\sigma\right| = \left|\int_{\Gamma} Q\, d\sigma\right| = \left|\int_{\Gamma} Q\, dx'\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\Gamma} \varphi \sum_{i=1}^{n-1} a^{nj}\left(|u_{x_n}|^2\right)_{x_j}\, dx'\right|,$$

integrando por partes (en $\mathbb{R}^{n-1}$) obtenemos

$$\left|\int_{\partial U} Q\, d\sigma\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\Gamma}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\varphi a^{nj})_{x_j}\right]|u_{x_n}|^2\, dx'\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\|(\varphi a^{nj})_{x_j}\|_{L^\infty(\Gamma)}\int_{\Gamma}|u_{x_n}|^2\, dx'.$$

Ahora como $\nu = (0,\ldots,0,-1)$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = -u_{x_n}$, tenemos que $|u_{x_n}|^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2$, por tanto

$$\left|\int_{\partial U} Q\, d\sigma\right| \leq E\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \leq E\int_{\partial U}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma \tag{3.75}$$

con $E = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\|(\varphi a^{nj})_{x_j}\|_{L^\infty(\Gamma)}$.

A continuación, encontraremos una estimación para el término $\displaystyle\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma$. Nótese para empezar que, utilizando fórmulas de Green tenemos:

$$\int_U |\nabla u|\Delta u\, dx = \int_{\partial U}|\nabla u|\cdot\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma - \int_U \nabla|\nabla u|\cdot\nabla u\, dx = \int_{\partial U}|\nabla u|\nabla u\cdot\nu\, d\sigma - \int_U(\Delta u)|\nabla u|\, dx.$$

Así

$$2\int_U |\nabla u|\Delta u\, dx = \int_{\partial U}|\nabla u|\nabla u\cdot\nu\, d\sigma = \int_{\partial U}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma$$

pues $u \equiv 0$ sobre ∂U. Entonces sea $\varepsilon' > 0$, aplicando desigualdad de Cauchy con $\dfrac{\varepsilon'}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial U}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma &= 2\int_U |\nabla u|\Delta u\, dx \\ &\leq \varepsilon'\int_U |\Delta u|^2\, dx + \frac{1}{4\varepsilon'}\int_U |\nabla u|^2\, dx \\ &\leq \varepsilon'\int_U \sum_{k,j=1}^{n}|u_{x_j x_k}|^2\, dx + \frac{1}{4\varepsilon'}\int_U |\nabla u|^2\, dx.\end{aligned}$$

Con esto y (3.75) obtenemos

$$\left|\int_{\partial U} Q\, d\sigma\right| \leq E\varepsilon'\int_U \sum_{k,j=1}^{n}|u_{x_j x_k}|^2\, dx + \frac{E}{4\varepsilon'}\int_U |\nabla u|^2\, dx. \tag{3.76}$$

Ahora, aplicamos (3.74) y (3.76) en (3.70) para obtener

$$\theta \int_U \varphi \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2 \, dx \leq \big(\varphi Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \varepsilon \int_U \sum_{j,k=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2 \, dx + \frac{D}{\varepsilon} \int_U |\nabla u|^2 \, dx$$
$$+ E\varepsilon' \int_U \sum_{k,j=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2 \, dx + \frac{E}{4\varepsilon'} \int_U |\nabla u|^2 \, dx,$$

más aún, tomando $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + E\varepsilon'$ y $\tilde{C} = \dfrac{D}{\varepsilon} + \dfrac{E}{4\varepsilon'}$, tenemos

$$\theta \int_U \varphi \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2 \, dx \leq \big(\varphi Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \bar{\varepsilon} \int_U \sum_{j,k=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2 \, dx + \tilde{C} \int_U |\nabla u|^2 \, dx.$$

Recordemos que $\varphi = \varphi_i$, de modo que

$$\theta \int_U \varphi_i \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2 \, dx \leq \big(\varphi_i Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \bar{\varepsilon} \int_U \sum_{j,k=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2 \, dx + \tilde{C} \|\nabla u\|^2_{L^2(U)}.$$

Sumando sobre $i \in \{1, \ldots, n\}$ y recordando que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1$ se sigue que

$$\theta \int_U \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2 \, dx \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + n\bar{\varepsilon} \int_U \sum_{j,k=1}^{n} |u_{x_j x_k}|^2 \, dx + n\tilde{C} \|\nabla u\|^2_{L^2(U)}.$$

A continuación, elegimos $\bar{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeño tal que $\theta - n\bar{\varepsilon} > 0$, así

$$(\theta - n\bar{\varepsilon}) \int_U \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2 \, dx \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + n\tilde{C} \|\nabla u\|^2_{L^2(U)},$$

tomemos $\beta = \theta - n\bar{\varepsilon} > 0$ (nótese que si $\bar{\varepsilon} \to 0$, $\beta \to \theta$). Entonces

$$\beta \left(\int_U \sum_{j,k=1}^{n} (u_{x_k x_j})^2 \, dx + \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + \|u\|^2_{L^2(U)} \right) \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + (n\tilde{C} + \beta) \|\nabla u\|^2_{L^2(U)}$$
$$+ \beta \|u\|^2_{L^2(U)}.$$

Como $u \in H^1_0(U)$, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(U)}$. Así

$$\beta \|u\|^2_{H^2(U)} \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + (n\tilde{C} + \beta) \|u\|^2_{H^1(U)} \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + C^2 (n\tilde{C} + \beta) \|u\|^2_{H^1_0(U)},$$

tomando $\gamma = C^2(n\tilde{C} + \beta)$ obtenemos

$$\beta\|u\|^2_{H^2(U)} \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \gamma\|u\|^2_{H^1_0(U)}.$$

Ahora probemos el caso general, cuando $c \neq 0$. Sea $\tilde{L}u = Lu - cu$, de modo que por lo anterior, existen $\tilde{\beta} > 0$ y $\tilde{\gamma} > 0$ tal que

$$\tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \tilde{\gamma}\|u\|^2_{H^1_0(U)}.$$

Como $u = 0$ sobre ∂U,

$$\begin{aligned}
\big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} &= \big(\tilde{L}u, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \big(cu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} \\
&\geq \tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} - \tilde{\gamma}\|u\|^2_{H^1_0(U)} + \int_U cu(-\Delta u)\, dx \\
&= \tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} - \tilde{\gamma}\|u\|^2_{H^1_0(U)} - \int_{\partial U} cu\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma + \int_U \nabla(cu)\cdot\nabla u\, dx \\
&= \tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} - \tilde{\gamma}\|u\|^2_{H^1_0(U)} + \int_U u\nabla c\cdot\nabla u\, dx + \int_U c|\nabla u|^2\, dx \\
&\geq \tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} - \tilde{\gamma}\|u\|^2_{H^1_0(U)} - \|\nabla c\|_{L^\infty(U)}\int_U |u||\nabla u|\, dx - \|c\|_{L^\infty(U)}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} \\
&\geq \tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} - \big(\tilde{\gamma} + \|c\|_{L^\infty(U)}\big)\|u\|^2_{H^1_0(U)} - 2\|\nabla c\|_{L^\infty(U)}\Big(\|u\|^2_{L^2(U)} \\
&\quad + \|\nabla u\|^2_{L^2(U)}\Big).
\end{aligned}$$

A continuación, como $u \in H^1_0(U)$, existe $C_p > 0$ tal que $\|u\|_{L^2(U)} \leq C_p\|u\|_{H^1_0(U)}$ y así

$$\big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} \geq \tilde{\beta}\|u\|^2_{H^2(U)} - \big(\tilde{\gamma} + \|c\|_{L^\infty(U)} + 2C_p^2\|\nabla c\|_{L^\infty(U)} + 2\|\nabla c\|_{L^\infty(U)}\big)\|u\|^2_{H^1_0(U)}$$

de donde, tomando $\beta = \tilde{\beta}$ y $\gamma = \tilde{\gamma} + \|c\|_{L^\infty(U)} + 2C_p^2\|\nabla c\|_{L^\infty(U)} + 2\|\nabla c\|_{L^\infty(U)}$ obtenemos

$$\beta\|u\|^2_{H^2(U)} \leq \big(Lu, -\Delta u\big)_{L^2(U)} + \gamma\|u\|^2_{H^1_0(U)}. \tag{3.77}$$

Finalmente, si $u \in H^1_0(U) \cap H^2(U)$, tomamos una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C^3(\bar{U})$ tal que $u_n = 0$ sobre ∂U, y tal que $u_n \to u$ en $H^2(U)$ (por densidad). Por tanto, de (3.77)

$$\beta\|u_n\|^2_{H^2(U)} \leq \big(Lu_n, -\Delta u_n\big)_{L^2(U)} + \gamma\|u_n\|^2_{H^1_0(U)},$$

haciendo $n \to \infty$ se sigue el resultado. □

Teorema 25 (Regularidad mejorada)**.**

(I) *Asumamos que*

$$g \in H_0^1(U),\ \mathbf{f} \in L^2(0,T;L^2(U)).$$

Supongamos también que $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$*, con* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$*, es la solución débil de*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & en \quad U_T \\ u = 0 & sobre \quad \partial U \times [0,T] \\ u = g & sobre \quad U \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^2(U)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(U)), \mathbf{u}' \in L^2(0,T;L^2(U))$$

y tenemos la estimación

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))} \le C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)}\right), \tag{3.78}$$

la constante C *depende solamente de* U, T *y los coeficientes de* L*.*

(II) *Si además*

$$g \in H^2(U), \mathbf{f}' \in L^2(0,T;L^2(U))$$

entonces

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H^2(U)), \mathbf{u}' \in L^\infty(0,T;L^2(U)) \cap L^2(0,T;H_0^1(U)), \mathbf{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$$

con la estimación

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'(t)\|_{L^2(U)}\right) + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \le C\left(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}\right). \tag{3.79}$$

Demostración. Fijamos $m \ge 1$, multiplicamos la ecuación (3.26) por $d_m^{k'}(t)$ y sumamos sobre $k = 1, \dots, m$, entonces

$$\sum_{k=1}^n \left(\mathbf{u}_m', w_k d_m^{k'}(t)\right) + \sum_{k=1}^n B\left[\mathbf{u}_m, w_k d_m^{k'}(t); t\right] = \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{f}, w_k d_m^{k'}(t)\right)$$

de donde

$$\left(\mathbf{u}'_m, \sum_{k=1}^{n} w_k d_m^{k'}(t)\right) + B\left[\mathbf{u}_m, \sum_{k=1}^{n} w_k d_m^{k'}(t); t\right] = \left(\mathbf{f}, \sum_{k=1}^{n} w_k d_m^{k'}(t)\right).$$

Por (3.24) sabemos que $\mathbf{u}'_m(t) = \sum_{k=1}^{n} d_m^{k'}(t) w_k$, además w_k no depende de t. Por tanto obtenemos

$$(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m) + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m; t] = (\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m) \qquad \text{c.t.p. } 0 \le t \le T. \tag{3.80}$$

Ahora, tomemos

$$\begin{aligned} B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m] &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_{m,x_j} \, dx + \int_U \left(\sum_{i=1}^{n} b^i \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_m + c \mathbf{u}_m \mathbf{u}'_m \right) dx \\ &=: A_1 + A_2. \end{aligned}$$

y sea

$$A[u, v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{v}_{x_j} \, dx \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(U).$$

Luego, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] &= \frac{d}{dt} \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}_{m,x_j} \, dx \\ &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}_{m,x_j}) \, dx \\ &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} (\mathbf{u}'_{m,x_i} \mathbf{u}_{m,x_j} + \mathbf{u}'_{m,x_j} \mathbf{u}_{m,x_i}) \, dx \\ &= 2 \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \mathbf{u}_{m,x_i} \mathbf{u}'_{m,x_j} \, dx \\ &= 2A_1 \end{aligned}$$

ya que A_1 es una forma bilineal y simétrica (pues $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1, ..., n)$ y estos coeficientes no dependen de t), entonces

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m] \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}|A_2| &\leq \int_U \sum_{i=1}^n \left(|b^i||\mathbf{u}_{m,x_i}||\mathbf{u}'_m| + |c||\mathbf{u}_m||\mathbf{u}'_m|\right) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\|b^i\|_{L^\infty(U)}\|\mathbf{u}_{m,x_i}\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)} + \|c\|_{L^\infty(U)}\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}\right) \\ &\leq C\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)}\end{aligned}$$

donde $C := \left(\sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(U)} + \|c\|_{L^\infty(U)}\right) C_p$, siendo C_p la constante de Poincaré. Así, por la desigualdad de Cauchy para cada $\varepsilon > 0$, obtenemos

$$|A_2| \leq C\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} + \varepsilon\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}.$$

Por otro lado,

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m)| \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \varepsilon\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}.$$

Sustituyendo en (3.80) tenemos que

$$\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + (A_1 + A_2) = (\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m);$$

más aún,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m]\right) &= (\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m) - A_2 \\ &\leq |(\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m)| + |A_2| \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \varepsilon\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{4\varepsilon}\|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} + \varepsilon\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\right) + 2\varepsilon\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}.\end{aligned}$$

Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{4}$, entonces

$$\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m]\right) \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}$$

luego restamos $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}$ en ambos lados, con lo que

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m]\right) \leq \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)},$$

y multiplicamos por 2 en ambos lados para obtener

$$\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)} + \frac{d}{dt}\left(A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m]\right) \leq 2\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\right).$$

Ahora, integremos sobre $[0,t]$,

$$\int_0^t \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}\,d\tau + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(A[\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m]\right)\,d\tau \leq 2\int_0^t \left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\right)\,d\tau,$$

usamos el teorema fundamental del cálculo y tomamos una constante C positiva, con lo cual

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}\,d\tau + A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)] \leq C\Bigg(&A[\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m(0)] + \int_0^t \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)}\,d\tau \\ &+ \int_0^t \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\,d\tau\Bigg).\end{aligned}$$

A continuación tomamos el supremo sobre $[0,T]$, y así

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}\,dt + \sup_{0\leq t\leq T} A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)]& \\ \leq C\left(A[\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m(0)] + \int_0^T \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)}\,dt + \int_0^T \|\mathbf{u}_m\|^2_{H_0^1(U)}\,dt\right)&.\end{aligned} \tag{3.81}$$

Por otro lado, haciendo uso del Teorema 14 con α y β constantes positivas, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H_0^1(U)} &\leq B[\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m(0)] + \gamma\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)} \\ &\leq |B[\mathbf{u}_m(0),\mathbf{u}_m(0)]| + \gamma\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)} \\ &\leq \alpha\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H_0^1(U)} + \gamma\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)} \\ &= \alpha\left\|Q\Big|_{V_m} g\right\|^2_{H_0^1(U)} + \gamma\left\|P\Big|_{V_m} g\right\|^2_{L^2(U)} \\ &= \alpha\left(Q\Big|_{V_m} g\,, Q\Big|_{V_m} g\right)_{H_0^1(U)} + \gamma\left(P\Big|_{V_m} g, P\Big|_{V_m} g\right) \\ &= \alpha\left(\sum_{k=1}^m \frac{(g,w_k)_{H_0^1(U)}}{\|w_k\|^2_{H_0^1(U)}} w_k, \sum_{j=1}^m \frac{(g,w_j)_{H_0^1(U)}}{\|w_j\|^2_{H_0^1(U)}} w_j\right)_{H_0^1(U)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma\left(\sum_{k=1}^{m}(g,w_k)w_k,\sum_{j=1}^{m}(g,w_j)w_j\right)\\
&=\alpha\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{(g,w_k)_{H_0^1(U)}(g,w_j)_{H_0^1(U)}(w_k,w_j)_{H_0^1(U)}}{\|w_k\|^2_{H_0^1(U)}\|w_j\|^2_{H_0^1(U)}}\\
&\quad+\gamma\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(g,w_k)(g,w_j)(w_k,w_j)\\
&=\alpha\sum_{k=1}^{m}\frac{|(g,w_k)|^2_{H_0^1(U)}\|w_k\|^2_{H_0^1(U)}}{\|w_k\|^4_{H_0^1(U)}}+\gamma\sum_{k=1}^{m}|(g,w_k)|^2\|w_k\|^2_{L^2(U)}\\
&=\alpha\sum_{k=1}^{m}\left|\left(g,\frac{w_k}{\|w_k\|}\right)_{H_0^1(U)}\right|^2+\gamma\sum_{k=1}^{m}|(g,w_k)|^2\\
&\leq\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(g,\frac{w_k}{\|w_k\|}\right)_{H_0^1(U)}\right|^2+\gamma\sum_{k=1}^{\infty}|(g,w_k)|^2\\
&=\alpha\|g\|^2_{H_0^1(U)}+\gamma\|g\|^2_{L^2(U)}\\
&\leq\alpha\|g\|^2_{H_0^1(U)}+\gamma C_p\|g\|^2_{H_0^1(U)}\\
&\leq C\|g\|^2_{H_0^1(U)}
\end{aligned}
$$

donde $P\Big|_{V_m}$ es la proyección ortogonal de $L^2(U)$ en $V_m=span(w_1,...,w_m)$ y $Q\Big|_{V_m}$ es la proyección ortogonal de $H_0^1(U)$ en $V_m=span(w_1,...,w_m)$, y $C:=\text{máx}\{\alpha,\gamma C_p\}$ una constante positiva. Así

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H_0^1(U)}\leq C\|g\|^2_{H_0^1(U)} \tag{3.82}$$

siendo C una nueva constante. Por tanto, utilizando (3.82) y el Teorema 18 de estimaciones de energía parabólicas en (3.81) obtenemos

$$\int_0^T\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}\,dt+A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)]\leq C(\|g\|^2_{H_0^1(U)}+\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}). \tag{3.83}$$

Ahora, utilizamos la elipticidad uniforme de L:

$$A[u,u]=\int_U\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\geq\theta\int_U|Du|^2\,dx$$

para todo $u\in H_0^1(U)$ y para algún $\theta>0$. Así, de (3.83) obtenemos

$$\theta\sup_{0\leq t\leq T}\int_U|D\mathbf{u}_m(t)|^2\,dx\leq\sup_{0\leq\tau\leq T}A[\mathbf{u}_m(t),\mathbf{u}_m(t)]$$

$$\leq \int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}\, dt + \sup_{0\leq t\leq T} A[\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)]$$
$$\leq C(\|g\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}),$$

dividiendo para θ y reemplazando $\frac{C}{\theta}$ por una nueva constante C, tenemos que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H_0^1(U)} \leq C(\|g\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}) \tag{3.84}$$

entonces como $\mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u}$, utilizamos el Lema 2 y haciendo $m = m_l \to \infty$ obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(U))} \leq C(\|g\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}) \tag{3.85}$$

por tanto $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H_0^1(U))$. Nuevamente utilizando (3.83), tenemos

$$\int_0^T \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)}\, dt \leq C(\|g\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}).$$

Como $\mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u}$, por el Lema 2 obtenemos

$$\|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \leq C(\|g\|^2_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}) \tag{3.86}$$

por tanto $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;L^2(U))$.

En particular, utilizando (3.26) y para cada $v \in H_0^1(U)$ tenemos que

$$(\mathbf{u}_m', v) + B[\mathbf{u}_m, v; t] = (\mathbf{f}, v).$$

Sea $m = m_l$ y pasando al límite débil cuando $l \to \infty$

$$(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)$$

para cada $v \in H_0^1(U)$ y c.t.p. $t \in [0,T]$, entonces

$$B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}', v).$$

Tomando $\mathbf{h} := \mathbf{f} - \mathbf{u}'$,

$$B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{h}, v).$$

Sabemos que $\mathbf{u}'(t) \in L^2(U)$, además $\mathbf{f}(t) \in L^2(U)$ c.t.p. $t \in [0,T]$. Por tanto $\mathbf{h} \in L^2(U)$ c.t.p. $t \in [0,T]$. Así, para c.t.p. $t \in [0,T]$ tenemos, por el Teorema 22, que $\mathbf{u} \in H^2(U)$ y se tiene la estimación

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2_{H^2(U)} &\leq C\left(\|\mathbf{h}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right) \\ &\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right) \end{aligned} \tag{3.87}$$

con C una constante que depende de U y de los coeficientes de L. A continuación, procedemos a integrar en $[0,T]$

$$\int_0^T \|\mathbf{u}\|^2_{H^2(U)}\, dt \leq C \int_0^T \left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right)\, dt.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(U))} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \\ &\leq C \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1_0(U)} \\ &= C\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(U))} \end{aligned}$$

y utilizando (3.85) y (3.86), tenemos

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(0,T;H^2(U))} \leq C(\|g\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}). \tag{3.88}$$

Por lo tanto $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^2(U))$. Sumando (3.85), (3.86) y (3.88) obtenemos la estimación en (I).

Para la demostración del punto (II) supondremos que $g \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$, $\mathbf{f}' \in L^2(0,T;L^2(U))$. Fijamos $m \geq 1$, derivamos la ecuación (3.26) con respecto a t y tomamos $\tilde{\mathbf{u}}_m := \mathbf{u}'_m$, con lo que

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, w_k) + B[\tilde{\mathbf{u}}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}', w_k). \tag{3.89}$$

Ahora multiplicamos (3.89) por $d_m^{k'}(t)$ y sumamos sobre $k = 1, \ldots, m$, así

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) + B[\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{\mathbf{u}}_m; t] = (\mathbf{f}', \tilde{\mathbf{u}}_m).$$

Haciendo uso del Teorema 14 tenemos que

$$\beta \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{H_0^1(U)} - \gamma \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)} \leq B[\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{\mathbf{u}}_m; t],$$

más aún,

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) + \beta \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{H_0^1(U)} - \gamma \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)} \leq B[\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{\mathbf{u}}_m; t] + (\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) = (\mathbf{f}', \tilde{\mathbf{u}}_m).$$

Entonces

$$(\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) + \beta \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{H_0^1(U)} \leq (\mathbf{f}', \tilde{\mathbf{u}}_m) + \gamma \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)}.$$

Luego, como $(\tilde{\mathbf{u}}'_m, \tilde{\mathbf{u}}_m) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)}\right)$ y $(\mathbf{f}', \tilde{\mathbf{u}}_m) \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)}\right) + \beta \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{H_0^1(U)} &\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(U)} + \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)} + \gamma \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)} \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(U)} + C\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)} \end{aligned}$$

con $C := \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)$ una constante positiva. Más aún

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)} + 2\beta \|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{H_0^1(U)} \leq \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(U)} + C\|\tilde{\mathbf{u}}_m\|^2_{L^2(U)}. \tag{3.90}$$

Sabemos que $\tilde{\mathbf{u}}_m := \mathbf{u}'_m$. Así, de (3.90) tenemos

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} \leq \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(U)} + C\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}.$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Gronwall, tomamos $\eta(t) = \|\mathbf{u}'_m(t)\|^2_{L^2(U)}$ y $\xi(t) = \|\mathbf{f}'(t)\|^2_{L^2(U)}$, y obtenemos que

$$\eta'(t) \leq C\eta(t) + \xi(t).$$

Entonces

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t C\, ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \xi(s)\, ds\right],$$

de donde

$$\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)} \leq e^{Ct}\left[\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \int_0^t \|\mathbf{f}'(s)\|^2_{L^2(U)}\, ds\right].$$

Tomando supremo sobre $0 \leq t \leq T$ en ambos lados tenemos que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C\left[\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \int_0^t \|\mathbf{f}'(s)\|^2_{L^2(U)}\, ds\right]$$

por lo tanto

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C\left[\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right], \tag{3.91}$$

equivalentemente

$$\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(U))} \leq C\left[\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right]. \tag{3.92}$$

Por otro lado, recordamos que $\tilde{\mathbf{u}}_m := \mathbf{u}_m'$ e integramos (3.90) con repecto a $t \in [0,T]$, así

$$\|\mathbf{u}_m'(T)\|^2_{L^2(U)} + 2\beta\int_0^T \|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{H_0^1(U)}\, dt \leq \|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + C\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))},$$

más aún,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} &\leq C\left(\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right)\\
&\leq C\left(\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(U))}\right)\\
&\leq C\left(\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right)
\end{aligned} \tag{3.93}$$

ya que $\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \leq C\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(U))}$ y se ha hecho uso de (3.92).

Por tanto, sumando (3.91) con (3.93) y tomando una constante apropiada tenemos que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \leq C\left(\|\mathbf{u}_m'(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right). \tag{3.94}$$

Por otro lado, utilizando (3.80),

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(U)} &= (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m') - B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'; t]\\
&= \left|(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m') - B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'; t]\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|(\mathbf{f}, \mathbf{u}'_m)\right| + \left|B[\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m; t]\right| \\
&\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)} + C\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)} \\
&\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)} + C\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} \\
&\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} + C\|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} \\
&= C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right)\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)}.
\end{aligned}
$$

Esto se da gracias al uso del Teorema 14, al teorema de representación de Riesz y al hecho de que $\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(U)} \leq \|\mathbf{u}'_m\|_{H_0^1(U)}$. Luego, utilizando la desigualdad (3.46) del Teorema 18,

$$
\|\mathbf{u}'_m\|_{H^{-1}(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right),
$$

así obtenemos

$$
\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}\right)^2 \qquad \text{para todo } 0 \leq t \leq T.
$$

En particular,

$$
\|\mathbf{u}'_m(0)\|^2_{L^2(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}(0)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)}\right)^2. \tag{3.95}
$$

Recordemos que $\mathbf{f}(0)$ está bien definida pues por hipótesis $\mathbf{f}' \in L^2(0,T;L^2(U))$ y por ende $\mathbf{f} \in H^1(0,T;L^2(U))$; y como el conjunto [0,T] es de dimensión 1 y de medida finita, gracias al Teorema 9 la inmersión compacta

$$
H^1(0,T;L^2(U)) \hookrightarrow C([0,T];L^2(U)).
$$

Como $\|\mathbf{f}(0)\|_{L^2(U)} \leq \|\mathbf{f}\|_{C([0,T];L^2(U))} \leq \|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}$, en (3.95) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}'_m(0)\|^2_{L^2(U)} &\leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m(0)\|_{H_0^1(U)}\right)^2 \\
&\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H_0^1(U)}\right) \\
&\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H^2(U)}\right),
\end{aligned}
$$

más aún,

$$
\|\mathbf{u}'_m(0)\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{f}'\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H^2(U)}\right) \tag{3.96}
$$

para una nueva constante C positiva. Por lo tanto, utilizando (3.96) en (3.94), obtenemos

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|^2_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m'\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(U))}\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))}+\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H^2(U)}\right). \tag{3.97}$$

Ahora, nos concentraremos en acotar el último sumando del lado derecho de (3.97). Recordemos que $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección de funciones propias (suaves) para el operador $L=-\Delta$ en $H_0^1(U)$. Entonces por definión de funciones propias tenemos que existen $\lambda_k\in\mathbb{R}$ tal que $-\Delta-\lambda_k I$ no es inyectiva y $w_k\in(-\Delta-\lambda_k I)$, por lo cual

$$(-\Delta-\lambda_k I)w_k=0$$

de donde

$$-\Delta w_k=\lambda_k w_k \tag{3.98}$$

para $k=1,2,\ldots$. Luego, como $w_k\in H_0^1(U)$ entonces $w_k=0$ en ∂U por tanto

$$-\Delta w_k=\lambda_k w_k=0 \qquad \text{en } \partial U. \tag{3.99}$$

Así $\Delta w_k=0$ en ∂U. Por otro lado, aplicamos el operador $-\Delta$ en (3.24) y utilizamos (3.98) para obtener

$$-\Delta\mathbf{u}_m(t)=\sum_{k=1}^{m}d_m^k(t)(-\Delta w_k)=\sum_{k=1}^{m}d_m^k(t)\lambda_k w_k \tag{3.100}$$

para todo $t\in[0,T]$. Entonces por (3.99)

$$\Delta\mathbf{u}_m=0.$$

Por el Lema 3 tenemos que

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|^2_{H^2(U)}\leq C\|\Delta\mathbf{u}_m(0)\|^2_{L^2(U)}=C\big(\Delta\mathbf{u}_m(0),\Delta\mathbf{u}_m(0)\big)=C\big(\mathbf{u}_m(0),\Delta^2\mathbf{u}_m(0)\big).$$

Por otro lado, sabemos que $-\Delta w_k=\lambda_k w_k$ con $\lambda_k\in\mathbb{R}$ y $k=1,\ldots,m$ entonces

$$-\Delta(-\Delta w_k)=-\Delta(\lambda_k w_k)=\lambda_k(-\Delta w_k)=\lambda_k(\lambda_k w_k)=\lambda_k^2 w_k.$$

Así

$$\Delta^2 w_k = \lambda_k^2 w_k. \tag{3.101}$$

A continuación aplicamos el operador Δ^2 en (3.24) y utilizamos (3.101), con lo cual

$$\Delta^2 \mathbf{u}_m(0) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(0)\Delta^2 w_k = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(0)\lambda_k^2 w_k$$

por tanto $\Delta^2 \mathbf{u}_m(0) \in span\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $(\mathbf{u}_m(0), w_k) = (g, w_k)$ para $k = 1, \ldots, m$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 &\leq C(\mathbf{u}_m(0), \Delta^2 \mathbf{u}_m(0)) \\
&= C\left(\mathbf{u}_m(0), \sum_{k=1}^{m} d_m^k(0)\lambda_k^2 w_k\right) \\
&= C\sum_{k=1}^{m} d_m^k(0)\lambda_k^2(\mathbf{u}_m(0), w_k) \\
&= C\sum_{k=1}^{m} d_m^k(0)\lambda_k^2(g, w_k) \\
&= C\left(g, \sum_{k=1}^{m} d_m^k(0)\lambda_k^2 w_k\right) \\
&= C(g, \Delta^2 \mathbf{u}_m(0)) \\
&= C(\Delta g, \Delta \mathbf{u}_m(0)) \\
&= \varepsilon C\|\Delta g\|_{L^2(U)}^2 + \frac{C}{4\varepsilon}\|\Delta \mathbf{u}_m(0))\|_{L^2(U)}^2 \\
&= \frac{C^2}{2}\|g\|_{H^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m(0))\|_{H^2(U)}^2
\end{aligned}$$

en donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy con $\varepsilon = C/2$, en particular

$$\|\mathbf{u}_m(0)\|_{H^2(U)}^2 \leq C^2\|g\|_{H^2(U)}^2. \tag{3.102}$$

Por lo tanto, reemplazamos (3.102) en (3.97) para obtener

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m'(t)\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}^2 \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2\right). \tag{3.103}$$

Ahora utilizando (3.26) tenemos

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}_m', w_k)$$

para $k = 1, \ldots, m$ y $0 \leq t \leq T$. Sea λ_k el k-ésimo valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(U)$. Entonces, fijamos $m \geq 1$ y multiplicamos la anterior ecuación por $\lambda_k d_m^k(t)$ para obtener,

$$B\left[\mathbf{u}_m, \lambda_k d_m^k(t) w_k; t\right] = \left(\mathbf{f} - \mathbf{u}_m', \lambda_k d_m^k(t) w_k\right),$$

luego sumamos sobre $k = 1, \ldots, m$

$$B\left[\mathbf{u}_m, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k d_m^k(t) w_k; t\right] = \left(\mathbf{f} - \mathbf{u}_m', \sum_{k=1}^{m} \lambda_k d_m^k(t) w_k\right)$$

utilizamos (3.100) en la anterior ecuación con lo cual obtenemos

$$B\left[\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m; t\right] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}_m', -\Delta \mathbf{u}_m).$$

Como $\Delta \mathbf{u}_m = 0$ en ∂U y además tomando en cuenta el problema parabólico inicial (3.15) tenemos que

$$\mathbf{f} - \mathbf{u}_m' = L\mathbf{u}_m$$

entonces

$$B\left[\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m; t\right] = (\mathbf{f} - \mathbf{u}_m', -\Delta \mathbf{u}_m) = (L\mathbf{u}_m, -\Delta \mathbf{u}_m).$$

A continuación utilizamos la desigualdad demostrada en el Teorema 24,

$$\beta \|u\|_{H^2(U)}^2 \leq (Lu, -\Delta u) + \gamma \|u\|_{H_0^1(U)}^2,$$

con $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ y constantes $\beta > 0$ y $\gamma \geq 0$, así

$$\begin{aligned}
\beta \|\mathbf{u}_m\|_{H^2(U)}^2 &\leq (L\mathbf{u}_m, \Delta \mathbf{u}_m) + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&= (\mathbf{f} - \mathbf{u}_m', -\Delta \mathbf{u}_m) + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&\leq \|\mathbf{f} - \mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)} \| - \Delta \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)} + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&\leq \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)} + \| - \mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}\right) \| - \Delta \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)} + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\| - \Delta \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\| - \mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\| - \Delta \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 \\
&\quad + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|_{L^2(U)}^2 + \| - \Delta \mathbf{u}_m\|_{L^2(U)}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(U)}^2 + \gamma \|\mathbf{u}_m\|_{H_0^1(U)}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^2(U)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)}\right) + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)} \\
&\quad + \gamma\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} && \text{por (3.87)} \\
&\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}\right)
\end{aligned}
$$

con C una constante positiva y gracias a que $\|\mathbf{u}_m\|^2_{L^2(U)} \leq C\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)}$. Por lo tanto

$$
\|\mathbf{u}_m\|^2_{H^2(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(U)}\right). \tag{3.104}
$$

Luego, tomando el supremo sobre $0 \leq t \leq T$ en ambos lados y utilizando (3.84) obtenemos

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{L^2(U)} \leq C \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H^1_0(U)} \leq C\left(\|g\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right); \tag{3.105}
$$

de manera similar tomando el supremo sobre $0 \leq t \leq T$ en la ecuación (3.104) se obtiene

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H^2(U)} \leq C\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{f}(t)\|^2_{L^2(U)} + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H^1_0(U)} + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}'_m(t)\|^2_{L^2(U)}\right).
$$

Luego como $\mathbf{f} \in H^1(0,T;L^2(U))$, por el Teorema 11 y utilizando (3.105) y (3.103) vemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H^2(U)} &\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}'_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \|g\|^2_{H^1_0(U)} + \|\mathbf{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(U))}\right) \\
&\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}'_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \|g\|^2_{H^2(U)}\right) \\
&\leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|^2_{H^2(U)}\right).
\end{aligned}
$$

Sumamos (3.103) con la anterior desigualdad y tomamos una nueva constante C positiva, así

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}'_m(t)\|^2_{L^2(U)} + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}_m(t)\|^2_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'_m\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(U))} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|^2_{H^2(U)}\right).
$$

Pasamos al límite con $m = m_l \to \infty$, para obtener

$$
\sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}'(t)\|^2_{L^2(U)} + \sup_{0\leq t\leq T}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(U))} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|^2_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|^2_{H^2(U)}\right). \tag{3.106}
$$

Por lo tanto $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;H^2(U))$ y $\mathbf{u}' \in L^\infty(0,T;L^2(U)) \cap L^2(0,T;H^1_0(U))$.

Por último, demostraremos que $\mathbf{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Para esto tomemos $v \in H_0^1(U)$ con $\|v\|_{H_0^1(U)}$, y consideremos $v = v^1 + v^2$, como en la demostración del Teorema 18. Entonces para c.t.p. $t \in [0,T]$ tenemos que

$$\langle \mathbf{u}_m'', v \rangle = (\mathbf{u}_m'', v) = (\mathbf{u}_m'', v^1) = (\mathbf{f}', v^1) - B[\mathbf{u}_m', v^1; t]$$

ya que $v^1 \in span\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(v^2, w_k) = 0$ con $k = 1, ..., m$ y por (3.89) con $\mathbf{u}_m'' = \tilde{\mathbf{u}}_m'$. Además, por (3.46)

$$|\langle \mathbf{u}_m'', v \rangle| \leq C \left(\|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)} \right)$$

con $\|v^1\|_{H_0^1(U)} \leq 1$. Más aún,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \frac{|\langle \mathbf{u}_m'', v \rangle|}{\|v\|_{H_0^1(U)}} = \|\mathbf{u}_m''\|_{H^{-1}(U)} \leq C \left(\|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)} \right),$$

elevando al cuadrado ambos lados, integrando con respecto a $t \in [0,T]$ y utilizando la desigualdad (3.103) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathbf{u}_m''\|_{H^{-1}(U)}^2 \, dt &\leq C \int_0^T \left(\|\mathbf{f}'\|_{L^2(U)}^2 + \|\mathbf{u}_m'\|_{H_0^1(U)}^2 \right) \, dt \\ &= C \left(\|\mathbf{f}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}^2 + \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}^2 \right) \\ &\leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2 \right). \end{aligned}$$

Así

$$\|\mathbf{u}_m''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}^2 \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))}^2 + \|g\|_{H^2(U)}^2 \right). \tag{3.107}$$

Por lo tanto $\mathbf{u}_m''$ es acotado en $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Pasando al límite con $m = m_l \to \infty$ concluímos que $\mathbf{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

Sumando (3.106) y (3.107) obtenemos la estimación del punto (II). □

Ahora, basándonos en el resultado anterior demostremos el siguiente resultado de regularidad:

Teorema 26 (Regularidad alta)**.** *Asumamos que*

$$g \in H^{2m+1}(U), \ \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2m-2k}(U)) \quad (k = 0, \ldots, m).$$

Supongamos tambien que las m-ésimas condiciones de compatibilidad se mantienen:

$$\begin{cases} g_0 := g \in H_0^1(U),\ g_1 := \mathbf{f}(0) - Lg_0 \in H_0^1(U), \\ \ldots, g_m := \dfrac{d^{m-1}\mathbf{f}}{dt^{m-1}}(0) - Lg_{m-1} \in H_0^1(U). \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U)) \quad (k=0,\ldots,m+1)$$

y tenemos la estimación

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))} + \|g\|_{H^{2m+1}(U)} \right),$$

la constante C depende solamente de m, U, T y de los coeficientes del operador L.

Observación 7. Tomando en cuenta el Teorema 11 podemos ver que, para $2m-(2k+1)$ con $k=\{0,\ldots,m-1\}$, se cumple

$$\mathbf{f} \in H^{2m-1}(U),\ \mathbf{f}\,'(0) \in H^{2m-3},\ \ldots,\ \mathbf{f}\,^{m-1}(0) \in H^1(U)$$

y por tanto

$$g_0 \in H^{2m+1}(U),\ g_1 \in H^{2m-1}(U),\ \ldots,\ g_m \in H^1(U)$$

con $\mathbf{f}\,^{(k)}(0) \in H^{2m-(2k+1)}$. Las condiciones de compatibilidad son requerimientos para que cada una de estas funciones sea igual a 0 en ∂U en el sentido de la traza $\big(u \in H_0^1(U) \iff T(u)=0$, es decir, $u\big|_{\partial U}=0\big)$.

Demostración. Procedemos a realizar inducción sobre m, el caso $m=0$ se demostró en el la parte (I) del Teorema 25. Ahora asumamos que el teorema se cumple para un entero no negativo m, y supongamos entonces que

$$g \in H^{2m+3}(U),\ \frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U)) \quad (k=0,\ldots,m+1)$$

y las m-ésimas condiciones de compatibilidad se mantienen. Diferenciemos con respecto a t el

problema parabólico (3.21) y tomemos $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}'$. Así,

$$\begin{cases} \tilde{u}_t + L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{en} \quad U_T \\ \tilde{u} = 0 & \text{sobre} \quad \partial U \times [0,T] \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{sobre} \quad \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Con $\tilde{f} := f_t$ y $\tilde{g} = f(\cdot,0) - Lg$. Además, evaluando en 0 tenemos $\tilde{u}(0) = \tilde{g}$, entonces $\tilde{u}_t(0) = f(0) - L\tilde{u}(0) = f(\cdot,0) - Lg = \tilde{g}$ y $\tilde{f} := f_t$. Por el Teorema 25 parte (II) tenemos que $\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ y $\tilde{\mathbf{u}}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$, como f y g satisfacen las m-ésimas condiciones de compatibilidad de (m+1)-orden, se sigue que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ satisfacen las m-ésimas condiciones de compatibilidad. Por tanto, aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$\frac{d^k\tilde{\mathbf{u}}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U)) \quad (k = 0,\dots,m+1)$$

y

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k\tilde{\mathbf{u}}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k\tilde{\mathbf{f}}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(U))} + \|\tilde{g}\|_{H^{2m+1}(U)} \right),$$

para $\tilde{f} := f_t$ y $\tilde{g} = f(\cdot,0) - Lg$. Como $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'$, podemos reescribir la anterior ecuación tomando

$$\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k} \in L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(U)) \quad (k = 1,\dots,m+2)$$

y haciendo uso de la desigualdad triangular en $\tilde{g} = f(\cdot,0) - Lg$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m+2} \left\| \frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(U))} \\ &\qquad \leq C \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))} + \|\mathbf{f}(0)\|_{H^{2m+1}(U)} + \|Lg\|_{H^{2m+1}(U)} \right). \end{aligned} \tag{3.108}$$

Por otro lado, sabemos que

$$Lg = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial g}{\partial x_i} + cg.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz tenemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| a^{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{H^{2m+1}(U)} = \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a^{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(U)} + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{|\alpha| \leq 2m+1} \left\| D^\alpha a^{ij} \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(U)}$$

$$\leq C\|g\|_{H^{2m+3}(U)}, \tag{3.109}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|b^i\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\|_{H^{2m+1}(U)} \leq C\|g\|_{H^{2m+3}(U)} \tag{3.110}$$

y

$$\|cg\|_{H^{2m+1}(U)} \leq C\|g\|_{H^{2m+3}(U)}. \tag{3.111}$$

Así, sumando (3.109), (3.110) y (3.111) obtenemos

$$\|Lg\|_{H^{2m+1}(U)} \leq C\|g\|_{H^{2m+3}(U)}.$$

Gracias al Teorema 4 en 5.9.2. de [10] tenemos la estimación

$$\|\mathbf{f}(0)\|_{H^{2m+1}(U)} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))} + \|\mathbf{f}'\|_{L^2(0,T;H^{2m}(U))}\right),$$

reemplazando en (3.108) tenemos

$$\sum_{k=1}^{m+2}\left\|\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(U))} \leq C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))} + \|\mathbf{g}\|_{H^{2m+3}(U)}\right). \tag{3.112}$$

Ahora para c.t.p. $t \in [0,T]$: $L\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mathbf{u}' =: \mathbf{h}$. Tomando en cuenta el Teorema 5 en 6.3.2. de [10] tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{H^{2m+4}(U)} &\leq \tilde{C}\left(\|\mathbf{h}\|_{H^{2m+2}(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}\right)\\ &\leq \tilde{C}\left(\|\mathbf{f}\|_{H^{2m+2}(U)} + \|\mathbf{u}'\|_{H^{2m+2}(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(U)}\right)\end{aligned}$$

con $\tilde{C}$ una constante positiva. A continuación, integramos con respecto a t la anterior desigualdad, y así

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{2m+4}(U))} \leq \tilde{C}\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).$$

Sumamos $\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{2m+4}(U))}$ en ambos lados de (3.112), con lo cual

$$\sum_{k=1}^{m+2}\left\|\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(U))} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{2m+4}(U))} = \sum_{k=0}^{m+2}\left\|\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(U))}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}+\|\mathbf{g}\|_{H^{2m+3}(U)}\right)\\
&\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{2m+4}(U))}\\
&\leq C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}+\|\mathbf{g}\|_{H^{2m+3}(U)}\right)\\
&\quad+\tilde{C}\big(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))}+\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))}\\
&\quad+\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}\big)\\
&\leq C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}+\|\mathbf{g}\|_{H^{2m+3}(U)}\right.\\
&\quad+\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))}+\|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{2m+2}(U))}\\
&\quad\left.+\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando la ecuación (3.112) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m+2}\left\|\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+4-2k}(U))}\\
&\qquad\leq C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k\mathbf{f}}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(U))}+\|\mathbf{g}\|_{H^{2m+3}(U)}+\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}\right).
\end{aligned}
$$

Por último, por el Teorema 18 tenemos que

$$
\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}\leq C\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}\leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{L^2(U)}\right),
$$

obteniendo así la estimación del teorema para $m+1$. □

Teorema 27 (Diferenciabilidad infinita)**.** *Asumamos que*

$$
g\in C^\infty(\bar{U}),\ f\in C^\infty(\bar{U}_T),
$$

y que las m-ésimas condiciones de compatibilidad se mantienen para $m=0,1,\ldots$. Entonces el problema parabólico con valores iniciales y valores en la frontera (3.21) tiene solución única

$$
u\in C^\infty(\bar{U}_T).
$$

Demostración. Se obtiene directamente aplicando el Teorema 26 para $m=0,1,\ldots$. □

Así, hemos logrado producir una solución suave de nuestro problema parabólico de segundo orden (3.21) con valores iniciales y valores en la frontera. Esta afirmación requiere que las condiciones de compatibilidad expuestas en el Teorema 26 se mantengan para todo m, y es fácil ver que estas condiciones son necesarias para la existencia de una solución suave sobre $\bar{U}$.

Capítulo 4

Problemas no locales

Para este capítulo asumiremos que Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave a trozos, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ para alguna variable temporal fija $T > 0$ y $\Omega_I := \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \alpha(x,y) \neq 0, \text{ para algún } x \in \Omega\}$ un dominio de interacción de Ω con $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una función antisimétrica (es decir, $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$). Así, Ω_I consiste en esos puntos que están afuera de Ω pero que interactúan con puntos de Ω. Empecemos introduciendo los problemas no locales los cuales serán objeto de estudio en este capítulo. Consideremos los dos siguientes problemas no locales:

- Problema elíptico no local

$$-\mathcal{L}u = f \quad \text{en } \Omega. \tag{4.1}$$

  Este problema será estudiado con más profundidad en la sección 4.6.1.

- Problema parabólico no local

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = f & \text{en} \quad \Omega_T \\ \qquad u = g & \text{sobre} \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones dadas y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es desconocida, con $u = u(t,x)$ y $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$. El operador no local $\mathcal{L}$ se define en la siguiente sección.

4.1. Operadores no locales

A continuación introduciremos varias definiciones para el estudio de los problemas antes mencionados. La letra $\mathcal{L}$ denota un operador no local en función de $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ el cual está

dado por

$$\mathcal{L}u(x) := 2\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y) - u(x)\big)\gamma(x,y)\, dy \quad \text{para todo } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{4.3}$$

donde el kernel $\gamma(x,y) : \ \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una función simétrica no negativa (es decir,$\gamma(x,y) = \gamma(y,x)$), con $\gamma(x,y) := \alpha(x,y) \cdot \alpha(x,y)$. Para las funciones $\nu(x,y),\ \alpha(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ la acción del operador no local de divergencia $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está definido como

$$D(\nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\nu(x,y) + \nu(y,x)\big) \cdot \alpha(x,y)\, dy \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

La acción del operador adjunto $D^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobre una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está dada por

$$D^*(u)(x,y) = -\big(u(y) - u(x)\big)\alpha(x,y) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Así, $-D^*$ define un operador gradiente no local. Por tanto

$$\mathcal{L}u(x) := -D(D^*u)(x) \tag{4.6}$$

el cual es el mismo operador introducido en (4.3). De esta manera, el cálculo no local nos permite expresar el operador no local (4.3) como una composición de un operador no local de divergencia y un operador gradiente no local.

Por último, correspondiente al operador de divergencia $D(\nu) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido en (4.4), definimos el operador no local de interacción $\mathcal{N}(\nu) : \Omega_I \to \mathbb{R}$ sobre ν como

$$\mathcal{N}(\nu)(x) := -\int_{\Omega \cup \Omega_I} \big(\nu(x,y) + \nu(y,x)\big) \cdot \alpha(x,y)\, dy \quad \text{para todo } x \in \Omega_I. \tag{4.7}$$

4.2. Cálculo vectorial no local

En esta sección incluiremos algunos resultados vistos en [11] detallando sus demostraciones, dichos resultados serán útiles a lo largo de este capítulo. La definición (4.4) y la definición del conjunto Ω_I nos conducen a los teoremas de cálculo vectorial no local, los cuales imitan los teoremas básicos de cálculo vectorial para el caso local de operadores diferenciales.

Proposición 8. *Sea D el operador definido en (4.4). Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} D(\nu)(x)\, dx = 0.$$

Demostración. Gracias a (4.4), al Teorema de Fubini y dado que α es antisimétrica $\big(\alpha(x,y) + \alpha(y,x) = 0\big)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} D(\nu)(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(x,y) + \nu(y,x)) \cdot \alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,y) \cdot \alpha(x,y)\, dy\, dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(y,x) \cdot \alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,y) \cdot \alpha(x,y)\, dy\, dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(y,x) \cdot \alpha(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,y) \cdot \alpha(x,y)\, dy\, dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,y) \cdot \alpha(y,x)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,y) \cdot \big(\alpha(x,y) + \alpha(y,x)\big)\, dy\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} D(\nu)(x)\, dx = 0.$$

□

Proposición 9. *Asumamos la definición (4.4). Entonces el operador adjunto no local D^* : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se define como*

$$D^*(u)(x,y) = -\big(u(y) - u(x)\big)\alpha(x,y) \quad \textit{para } x, y \in \mathbb{R}^n$$

y verifica

$$\langle D(v)|u\rangle = \langle v|D^*(u)\rangle$$

Demostración. Debemos demostrar que

$$\langle D(\nu)|u\rangle = \langle \nu|D^*(u)\rangle$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(D(\nu)(x)\big)u(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nu\big(D^*(u)(x,y)\big)\, dy\, dx.$$

Consideremos $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definido como $\xi(x,y) = u(x)\nu(x,y)$. Entonces

$$\big(\xi(x,y) + \xi(y,x)\big) \cdot \alpha(x,y) = \big(u(x)\nu(x,y) + u(y)\nu(y,x)\big) \cdot \alpha(x,y).$$

Haciendo uso de la Proposición 8 y la definición (4.4) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(D(\xi)(x)\big)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \big(\xi(x,y)+\xi(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(x)\nu(x,y)+u(y)\nu(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(u(x)\big(\nu(x,y)+\nu(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)+\big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\Big)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(x,y)+\nu(y,x))\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)D(\nu)(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)D(\nu)(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx.$$

Concluimos que

$$D^*(u)(x,y) = -\big(u(y)-u(x)\big)\alpha(x,y).$$

□

Teorema 28 (Teorema de Gauss no local)**.** *Asumiendo* (4.4) *y* (4.7)*, tenemos*

$$\int_{\Omega} D(\nu)(x)\, dx = \int_{\Omega_I} \mathcal{N}(\nu)(x)\, dx.$$

Demostración. Por la Proposición 8 tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega\cup\Omega_I} D(\nu)(x)\, dx \\
&= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\mathbb{R}^n} \big(\nu(x,y)+\nu(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(x,y)+\nu(y,x))\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx + \int_{\Omega_I}\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(x,y)+\nu(y,x))\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(x,y)+\nu(y,x))\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx + \int_{\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} (\nu(x,y)+\nu(y,x))\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\Omega} D(\nu)(x)\, dx - \int_{\Omega_I} \mathcal{N}(\nu)(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega D(\nu)(x)\,dx = \int_{\Omega_I} \mathcal{N}(\nu)(x)\,dx.$$

□

Corolario 1 (Fórmula de integración por partes no local)**.** *Asumiendo* (4.4)*,* (4.5) *y* (4.7)*, y dadas las funciones* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\nu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*, tenemos*

$$\int_\Omega u(x)D(\nu)(x)\,dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)(x,y)\cdot\nu(x,y)\,dy\,dx = \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}(\nu)(x)\,dx.$$

Demostración. Tomemos $\xi = u\nu$. Gracias a (4.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
D(\xi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \big(\xi(x,y)+\xi(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(x)\nu(x,y)+u(y)\nu(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(u(x)\big(\nu(x,y)+\nu(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)+\big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\Big)\,dy \\
&= u(x)\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(x,y)+\nu(y,x))\cdot\alpha(x,y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy \\
&= u(x)D(\nu)(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy \\
&= u(x)D(\nu)(x) + \int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue por la definición del conjunto $\Omega\cup\Omega_I$. Luego, utilizando (4.7)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\xi)(x) &= -\int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(\xi(x,y)+\xi(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)\,dy \\
&= -\int_{\Omega\cup\Omega_I} \Big(u(x)\big(\nu(x,y)+\nu(y,x)\big)\cdot\alpha(x,y)+\big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\Big)\,dy \\
&= u(x)\mathcal{N}(\nu)(x) - \int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 28 y la linealidad del operador de integración obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega D(\xi)(x)\,dx - \int_{\Omega_I} \mathcal{N}(\xi)(x)\,dx \\
&= \int_\Omega u(x)D(\nu)(x)\,dx - \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}(\nu)(x)\,dx + \int_\Omega\int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_\Omega u(x)D(\nu)(x)\,dx + \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u(y)-u(x)\big)\nu(y,x)\cdot\alpha(x,y)\,dy\,dx
\end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}(\nu)(x)\, dx.$$

Por tanto, por (4.5) y como α es una función antisimétrica concluímos que

$$\int_{\Omega} u(x)D(\nu)(x)\, dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)(x,y)\cdot\nu(x,y)\, dy\, dx = \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}(\nu)(x)\, dx.$$

□

A continuación estudiaremos las identidades de Green no locales, las cuales son consecuencia directa del Corolario 1.

Corolario 2 (Primera identidad de Green no local)**.** *Dadas las funciones* $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $\nu(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, *entonces*

$$\int_{\Omega} u(x)D\big(D^*(v)\big)\, dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)D^*(v)\, dy\, dx = \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}\big(D^*(v)\big)\, dx.$$

Demostración. Se sigue directamente tomando $\nu = D^*(v)$ y sustituyendo en el resultado del Corolario 1. □

Corolario 3 (Segunda identidad de Green no local)**.** *Dadas las funciones* $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $v(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_{\Omega} u(x)D\big(D^*(v)\big)\, dx - \int_{\Omega} v(x)D(D^*(u))\, dx = \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}\big(D^*(v)\big)\, dx - \int_{\Omega_I} v(x)\mathcal{N}\big(D^*(u)\big)\, dx.$$

Demostración. En el resultado del Corolario 2 tomemos u por v y v por u. Así

$$\int_{\Omega} v(x)D\big(D^*(u)\big)\, dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(v)D^*(u)\, dy\, dx = \int_{\Omega_I} v(x)\mathcal{N}\big(D^*(u)\big)\, dx.$$

Ahora restamos el resultado original del Corolario 2 con la anterior expresión

$$\int_{\Omega} u(x)D\big(D^*(v)\big)\, dx - \int_{\Omega} v(x)D(D^*(u))\, dx = \int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}\big(D^*(v)\big)\, dx - \int_{\Omega_I} v(x)\mathcal{N}\big(D^*(u)\big)\, dx$$

concluyendo la demostración. □

Veamos la razón por la cual el operador no local D es un operador de divergencia. Para esto, presentaremos algunas proposiciones de [6] en donde se demuestra dicha aseveración haciendo

uso de la distribución delta de Dirac definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta : C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \delta(\varphi) = \varphi(0) \end{aligned}$$

cuyo gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla\delta : C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (\nabla\delta)(\varphi) = -\nabla\varphi(0). \end{aligned}$$

Además, vista como función generalizada, la distribución delta de Dirac cumple con la siguiente propiedad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\delta(x)\, dx = \varphi(0) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \tag{4.8}$$

la demostración de esta propiedad no tiene importancia en cuanto al objetivo de este capítulo por lo que la omitiremos.

Empezaremos con la identificación del operador no local de divergencia D a través del operador diferencial de divergencia $\nabla\cdot$.

Proposición 10. *Sea $\nu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Consideremos la distribución antisimétrica*

$$\alpha(y, x) = -\nabla_y \delta(y - x)$$

donde ∇_y y $\delta(y-x)$ denotan el gradiente diferencial con respecto a la variable y y la distribución delta de Dirac, respectivamente. Entonces,

$$D(\nu)(x) = \nabla \cdot \nu(x, x) \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

donde $\nabla\cdot$ denota el operador de divergencia.

Demostración. Por la regla de la cadena y por las definiciones de α y del operador no local D tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nu(x, x) &= \big(\nabla_x \cdot \nu(x, y)\big)\big|_{y=x} + \big(\nabla_y \cdot \nu(x, y)\big)\big|_{y=x} \\ &= \big(\nabla_y \cdot \nu(y, x)\big)\big|_{y=x} + \big(\nabla_y \cdot \nu(x, y)\big)\big|_{y=x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(\nabla_y \cdot (\nu(y,x) + \nu(x,y))\big)\big|_{y=x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y \cdot (\nu(y,x) + \nu(x,y))\delta(y-x)\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(y,x) + \nu(x,y)) \cdot \nabla_y \delta(y-x)\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} (\nu(y,x) + \nu(x,y)) \cdot \alpha(x,y)\, dy = D(\nu)(x),
\end{aligned}
$$

como se deseaba. □

La siguiente proposición nos muestra que la acción del operador D^* puede ser relacionada, en el sentido distribucional, con la acción de $-\nabla$.

Proposición 11. *Sea $u \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\alpha(y,x) = -\nabla_y \delta(y-x)$. Entonces,*

$$
\int_{\mathbb{R}^n} D^*(u)\, dy = -\nabla u(x) \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.
$$

Demostración. Por las definiciones del operador no local D^* y de α, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} D^*(u)\, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} -\big(u(y) - u(x)\big)\alpha(x,y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y) - u(x)\big)\nabla_y \delta(y-x)\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y-x)\nabla_y\big(u(y) - u(x)\big)\, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y-x)\nabla_y u(y)\, dy = -\nabla u(x) = (\nabla\cdot)^* u(x).
\end{aligned}
$$

La última igualdad se da debido a la definición de operador adjunto. Así, para $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tenemos que

$$
\langle \nabla \cdot u | v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot u) v\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \nabla v\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot (-\nabla) v\, dx = \langle u | -\nabla v \rangle .
$$

Por tanto

$$
(\nabla\cdot)^* = -\nabla.
$$

□

Ahora relacionaremos, en el sentido distribucional, la interacción del operador $\mathcal{N}$ con la componente normal a lo largo de la frontera.

Proposición 12. *Asumimos las hipótesis de la Proposición 11. Entonces, para toda función suave* $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\Omega_I} u\mathcal{N}(\nu)\, dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x,x)\cdot n\, d\sigma$$

donde n *denota el vector normal exterior a lo largo de* $\partial\Omega$ *y* $d\sigma$ *denota el diferencial de superficie.*

Demostración. Por las definiciones de α y del operador D^*, tenemos

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)\cdot\nu(x,y)\, dy\, dx &= \int_{\Omega}\int_{\Omega}(u(y))-u(x))\nu(x,y)\cdot\alpha(x,y)\, dy\, dx \\
&= -\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}(u(y))-u(x))\nu(x,y)\cdot\nabla_y\delta(y-x)\, dy\, dx \\
&= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\nabla_y(u(y))-u(x))\cdot\nu(x,y)\delta(y-x)\, dy\, dx \\
&\quad + \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}(u(y))-u(x))\delta(y-x)\nabla_y\cdot\nu(x,y)\, dy\, dx \\
&\quad - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\partial(\Omega\cup\Omega_I)}(u(y))-u(x))\delta(y-x)\nu(x,y)\cdot n\, dy\, dx \\
&= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\nabla_y u(y)\cdot\nu(x,y)\delta(y-x)\, dy\, dx \\
&= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\nabla u(x)\cdot\nu(x,x)\, dx,
\end{aligned}$$

ya que $u(y)-u(x)=0$ cuando $y=x$, $\nabla_y u(x)=0$ Realizamos un cambio de variable en (4.8), tenemos que $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\delta(y-x)\, dy = \varphi(x)$. Luego, utilizando el resultado de la Proposición 10,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} uD(\nu)(x)\, dx &= \int_{\Omega} u(x)\nabla\cdot\nu(x,x)\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x,x)\cdot n\, d\sigma - \int_{\Omega}\nabla u(x)\cdot\nu(x,x)\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x,x)\cdot n\, d\sigma - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\nabla u(x)\cdot\nu(x,x)\, dx.
\end{aligned}$$

Sustituimos los dos últimos resultados en el resultado del Corolario 1 para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_I} u(x)\mathcal{N}(\nu)(x)\, dx &= \int_{\Omega} u(x)D(\nu)(x)\, dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)(x,y)\cdot\nu(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} u(x)\nu(x,x)\cdot n\, d\sigma.
\end{aligned}$$

□

Consideremos la composición del operador no local de divergencia y su operador adjunto; es

decir, $D(D^*)$, el cual, de acuerdo a la siguiente proposición puede ser identificado, en el sentido de las distribuciones, como $-\Delta = \nabla \cdot (-\nabla)$, donde Δ denota el operador laplaciano.

Proposición 13. *Sea $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y tomemos $|\alpha(x,y)|^2 = \frac{1}{2}\Delta_y \delta(y-x)$. Entonces,*

$$D(D^*u(x)) = -\Delta u(x) \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Utilizando (4.4) y (4.5) tenemos que

$$\begin{aligned} D(D^*u)(x) &= -2\int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x))|\alpha(x)|^2\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x))\Delta_y \delta(y-x)\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y-x)\Delta_y (u(y)-u(x))\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y-x)\Delta_y u(y)\, dy \\ &= -\Delta u(x) = -\nabla \cdot \nabla u(x) = \nabla \cdot (\nabla \cdot)^* u(x). \end{aligned}$$

□

4.3. Estudio del Kernel

Vamos a asumir que Ω, Ω_I, y $\Omega \cup \Omega_I$ son acotados con frontera suave a trozos y que satisfacen las condiciones de cono interior (es decir, se requiere que para cada punto en el subconjunto Ω un cono con vértice en ese punto debe estar contenido en el subconjunto mismo). También asumiremos que el kernel simétrico satisface las siguientes condiciones

$$\gamma(x,y) \geq 0 \quad \text{para todo } y \in B_\varepsilon(x), \tag{4.9}$$

$$\gamma(x,y) \geq \gamma_0 > 0 \quad \text{para todo } y \in B_{\varepsilon/2}(x) \tag{4.10}$$

y

$$\gamma(x,y) = 0 \quad \text{para todo } y \in \Omega \cup \Omega_I \setminus B_\varepsilon(x) \tag{4.11}$$

para todo $x \in \Omega \cup \Omega_I$, con γ_0 y ε constantes positivas dadas y $B_\varepsilon(x) := \{y \in \Omega \cup \Omega_I : \ |y-x| \leq \varepsilon\}$; por tanto las interacciones no locales están limitadas a una bola de radio ε que se conoce

como el radio de interacción. Esto implica que

$$\Omega_I := \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \ |y - x| < \varepsilon, \text{ para algún } x \in \Omega\}. \tag{4.12}$$

A continuación presentaremos tres casos en los cuales el kernel γ es estudiado (ver [7], [8]).

- Caso 1: asumiremos que se cumplen (4.9), (4.10), (4.11) y supongamos que existe $s \in (0,1)$ y constantes positivas γ_* y γ^* tal que, para todo $x \in \Omega$,

$$\frac{\gamma^*}{|y-x|^{n+2s}} \leq \gamma(x,y) \leq \frac{\gamma_*}{|y-x|^{n+2s}} \quad \text{para todo } y \in B_\varepsilon(x). \tag{4.13}$$

  En este caso tenemos que el espacio no local de energía $V(\Omega \cup \Omega_I)$ es equivalente al espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\Omega \cup \Omega_I)$, resultado que se introducirá en la siguiente sección. Como ejemplo tenemos

$$\gamma(x,y) = \frac{\sigma(x,y)}{|y-x|^{n+2s}}$$

  con $\sigma(x,y)$ simétrico y acotado por arriba y por abajo por constantes positivas.

- Caso 2: asumiremos que se cumplen (4.9), (4.10), (4.11) y que existen constantes positivas γ_1 y γ_2 tal que

$$\gamma_1 \leq \int_{(\Omega \cup \Omega_I) \cap B_\varepsilon(x)} \gamma(x,y)\, dy \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

  y

$$\int_{\Omega \cup \Omega_I} \gamma^2(x,y)\, dy \leq \gamma_2 \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

  En este caso el espacio no local de energía $V(\Omega \cup \Omega_I)$ es equivalente al espacio $L^2(\Omega \cup \Omega_I)$.

- Caso 3: asumiremos que se cumplen (4.9), (4.10), (4.11) y supongamos que existen constantes positivas γ_3 y γ_4 tal que, para todo $x \in \Omega$,

$$\frac{\gamma_3}{|y-x|^n} \leq \gamma(x,y) \leq \frac{\gamma_4}{|y-x|^n} \quad \text{para } y \in B_\varepsilon(x).$$

  El espacio de energía asociado no es equivalente a $H^s(\Omega \cup \Omega_I)$ ni a $L^2(\Omega \cup \Omega_I)$; sin embargo, es un espacio de Hilbert separable que es subespacio de $L^2(\Omega \cup \Omega_I)$ y cuya norma de energía

satisface la desigualdad no local de Poincaré[1]

$$\|v\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} \leq C_p|||v||| \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$$

con C_p la constante de Poincaré, esta desigualdad también se satisface para los Casos 1 y 2. Un ejemplo para el Caso 3 está dado por

$$\gamma(x,y) = \frac{\xi(x,y)}{|x-y|^n}$$

con $\xi(x,y)$ acotado por arriba y por abajo por constantes positivas. Notemos que, en general, el Caso 3 no puede ser tratado como un caso especial del Caso 1 con $s = 0$. Este caso aparece con frecuencia en modelos lineales de mecánica sólida.

En este trabajo nos centraremos en el estudio del Caso 1 debido a que nos interesa estudiar la equivalencia entre el espacio no local de energía $V(\Omega\cup\Omega_I)$ y el espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\Omega\cup\Omega_I)$, y además este caso es el más utilizado en el estudio de ecuaciones no locales. Antes de pasar al tema de equivalencia de espacios, es importante revisar un concepto fundamental, el cual presentaremos a continuación.

4.4. Espacios de Sobolev fraccionarios

Los espacios fraccionarios, y sus correspondientes ecuaciones no locales, están teniendo una gran repercusión en áreas como: optimización, finanzas, leyes de conservación, membranas semipermeables y propagación del calor, ciencia de materiales, problemas elípticos, problemas elípticos no uniformes, flujos cuasigeostróficos, etc. Procederemos a definir los espacios de Sobolev fraccionarios utilizando la aproximación de Gagliardo y algunas propiedades básicas. Esta teoría puede ser vista en [15].

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para cualquier real $s > 0$ y para cualquier $p \in [1, +\infty)$, queremos definir los espacios de Sobolev fraccionarios $W^{s,p}(\Omega)$. Comúnmente los espacios de tipo Sobolev fraccionarios son conocidos también como espacios de Aronszajn, Gagliardo o Slobodeckij, por los nombres de quienes introdujeron este tema, casi simultáneamente.

[1] La definición de la norma $|||\cdot|||$ que se presenta a continuación se puede ver en la página 100.

Empecemos fijando el exponente fraccionario $s \in (0,1)$. Para cualquier $p \in [1, +\infty)$, definimos $W^{s,p}(\Omega)$ como

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}; \tag{4.14}$$

es decir, un espacio de Banach intermedio entre $L^p(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$ dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dx \, dy \right)^{1/p}, \tag{4.15}$$

donde el término

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dx \, dy \right)^{1/p}$$

es llamado la seminorma de Gagliardo de u.

Además, definimos el espacio $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$ equipado con la norma

$$(u,v)_{H^s(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{\big(u(x) - u(y)\big)\big(v(x) - v(y)\big)}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy.$$

Tomemos en cuenta un resultado respecto a la completitud de estos espacios (ver [5]). Para su demostración, haremos uso del siguiente lema.

Lema 4 (Fatou)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión no negativa de funciones medibles en E. Si $\{f_n\} \to f$ c.t.p. sobre E, entonces*

$$\int_E f \, dx \leq \liminf \int_E f_n \, dx.$$

Demostración. Ver [[16], pág 82-83]. □

Proposición 14. *Sea $s \in (0,1)$. El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ dotado con la norma descrita en (4.15). Es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $W^{s,p}(\Omega)$. Demostremos que dicha sucesión converge en $L^p(\Omega)$. En efecto, gracias a (4.15) tenemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega |u_n - u_m|^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dx \, dy \\ &\geq \int_\Omega |u_n - u_m|^p \, dx = \|u_n - u_m\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{s,p}(\Omega)$,

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|u_n - u_m\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \longrightarrow 0$$

cuando $n, m \to \infty$. Así $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Ahora tomemos

$$v_n(x,y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}$$

demostremos que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega \times \Omega)$.

$$\begin{aligned}\|v_n - v_m\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega |v_n - v_m|^p \, dx \, dy \\ &\leq \int_\Omega \int_\Omega |v_n - v_m|^p \, dx \, dy + \int_\Omega |u_n - u_m|^p \, dx = \|u_n - u_m\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \longrightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $k \to \infty$. Así $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega \times \Omega)$. Luego, por el Teorema 2, existen $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^p(\Omega \times \Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $v_n \to v$ en $L^p(\Omega \times \Omega)$. Además existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $u_{n_k}(x) \to u_n(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$. Entonces

$$v_{n_k}(x,y) = \frac{u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \longrightarrow \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}$$

cuando $n, k \to \infty$. Utilizando el Lema 4 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \right|^p dx \, dy &= \int_\Omega \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} |v_{n_k}(x,y)|^p \, dx \, dy \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega |v_{n_k}(x,y)|^p \, dx \, dy \\ &= \liminf_{k\to\infty} \|v_n\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}^p < \infty\end{aligned}$$

ya que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada por ser sucesión de Cauchy. Así

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega)$$

y por tanto $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Ahora probemos que $u_n \to u$ en $W^{s,p}(\Omega)$. Tenemos que

$$\|u_n - u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p + [u_n - u]_{W^{s,p}(\Omega)},$$

ya demostramos que $\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0$, Faltaría demostrar que $[u_n - u]_{W^{s,p}(\Omega)} \to 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
[u_n - u]_{W^{s,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \frac{\big|\big(u_n(x) - u_n(y)\big) - \big(u(x) - u(y)\big)\big|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy \\
&= \int_\Omega \int_\Omega |v_n(x,y) - v(x,y)|^p\, dx\, dy \\
&= \|v_n - v\|^p_{L^p(\Omega\times\Omega)} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, pues $v_n \to v$ y además $v_{n_k} \to \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}$. Por unicidad del límite concluímos que

$$v(x,y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}},$$

por lo tanto $u_n \to u$ en $W^{s,p}(\Omega)$. □

Teorema 29. *El espacio $W^{s,p}(\Omega)$ es reflexivo.*

Demostración. Consideremos el siguiente operador

$$\begin{aligned}
T : W^{s,p}(\Omega) &\longrightarrow L^p(\Omega) \times L^p(\Omega \times \Omega) \\
u &\longmapsto Tu = (u, Nu),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
Nu : \Omega \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto Nu = \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}.
\end{aligned}$$

Además consideramos la norma

$$\|(u,v)\|_{X,p} = \big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|v\|^p_{L^p(\Omega)}\big)^{1/p}$$

la cual (gracias a una demostración análoga a la del teorema 7) es equivalente a la norma

$$\|(u,v)\|_{X,1} = \big(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\big).$$

Como X es reflexivo, basta probar que $T(W^{s,p}(\Omega))$ es cerrado. En efecto, sea $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq W^{s,p}(\Omega)$

tal que $Tu_n \to (w, v) \in X$. Demostremos que $(w, v) \in T(W^{s,p}(\Omega))$.

Tenemos que

$$Tu_n = (u_n, Nu_n) \to (w, v) \quad \text{en } X,$$

es decir, $u_n \to w$ en $L^p(\Omega)$ y $Nu_n \to v$ en $L^p(\Omega \times \Omega)$. Probemos que $v = Nw$.

Como $u_n \to w$ en $L^p(\Omega)$, por el teorema de Riesz-Fischer (Teorema 2) existe $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $u_{n_k} \to w$ c.t.p. en Ω, y para $h \in L^p(\Omega)$ tenemos que $|u_{n_k}| \leq h$.

Por otro lado, $Nu_{n_k} \to v$ en $L^p(\Omega \times \Omega)$, entonces existe $\{Nu_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{Nu_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $Nu_{n_{k_j}} \to v$ c.t.p. en $\Omega \times \Omega$, y para $g \in L^p(\Omega \times \Omega)$ tenemos que $|Nu_{n_{k_j}}| \leq g$. Además $u_{n_{k_j}} \to w$ c.t.p. en Ω. Por el teorema de convergencia dominada (Teorema 4), tenemos que $w \in W^{s,p}(\Omega)$ y

$$\frac{u_{n_{k_j}}(x) - u_{n_{k_j}}(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \to \frac{w(x) - w(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \quad \text{c.t.p. } (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Así, por unicidad del límite

$$v(x, y) = \frac{w(x) - w(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} = Nw(x, y) \quad \text{c.t.p. } (x, y) \in \Omega \times \Omega.$$

Por lo tanto $W^{s,p}(\Omega)$ es reflexivo. □

Por otro lado, notemos que, en el caso clásico en que s sea un entero, el espacio $W^{s',p}$ tiene inmersión continua en $W^{s,p}$ cuando $s \leq s'$, como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Lema 5. *Sea $p \in [1, +\infty)$ y $0 < s \leq s' < 1$. Sea Ω subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s',p}(\Omega)}$$

con una constante positiva $C = C(n, s, p) \geq 1$. En particular

$$W^{s',p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega).$$

Demostración. Puede verse en [15, pág 6] □

Otro resultado importante es el siguiente.

Teorema 30. *Para cualquier $s > 0$, el espacio $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ de funciones continuas y soporte compacto es denso en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Puede encontrarse en [1, Teorema 7.38] □

Además, cuando s es un entero, bajo ciertas suposiciones de regularidad en el dominio Ω, cualquier funcion en $W^{s,p}(\Omega)$ puede ser extendida a una función en $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Los resultados de extensión son importantes en algunas aplicaciones y son necesarios para mejorar ciertos teoremas de inmersión. Por tanto damos a conocer la siguiente definición.

Definición. Para cualquier $s \in (0,1)$ y cualquier $p \in [1,+\infty)$, decimos que un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio de extensión para $W^{s,p}$ si existe una constante positiva $C = C(n,s,p,\Omega)$ tal que: para cada función $u \in W^{s,p}(\Omega)$ existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $\tilde{u}(x) = u(x)$ para todo $x \in \Omega$ y $\|\tilde{u}\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

En general, un conjunto abierto arbitrario no es un dominio de extensión para $W^{s,p}$. El problema de caracterizar las clases de conjuntos que son dominios de extensión para $W^{s,p}$ es abierto. Cuando s es un entero, podemos citar [12] para una completa caracterización en el caso $s = 1$, $p = 2$ y $n = 2$. En [14] se realiza un estudio profundo de este tema.

Otro punto importante que podemos considerar dentro de este tema son las desigualdades de Sobolev fraccionarias. A continuación vamos a presentar algunos resultados, sus demostraciones pueden ser vistas en [15, pág 46-49].

Teorema 31. *Sean $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tales que $sp < n$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n,p,s)$ tal que, para cualquier función medible con soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tenemos*

$$\|f\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy$$

donde $p^* = p^*(n,s)$ es conocido como exponente crítico fraccional y es igual a $np/(n-sp)$. Por tanto, el espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tiene inmersión continua en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $q \in [p,p^*]$.

Teorema 32. *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp < n$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de extensión para $W^{s,p}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n,p,s,\Omega)$ tal que, para cualquier $f \in W^{s,p}(\Omega)$, tenemos*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para cualquier $q \in [p,p^*]$; es decir, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ tiene inmersión continua en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [p,p^*]$. Si además, Ω es acotado, entonces el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ tiene inmersión compacta en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [1,p^*]$.

Cuando $sp \to n$ el exponente crítico p^* tiende a ∞ y por tanto en este caso, si f está en $W^{s,p}$ entonces f pertenece a L^q para cualquier q como se establece en los dos siguientes teoremas.

Teorema 33. *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp = n$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n,p,s)$ tal que, para cualquier función medible con soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tenemos*

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

para cualquier $q \in [p,+\infty)$; es decir, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ tiene inmersión continua en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [p,+\infty)$.

Teorema 34. *Sean $s \in (0,1)$ y $p \in [1,+\infty)$ tales que $sp = n$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de extensión para $W^{s,p}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(n,p,s,\Omega)$ tal que, para cualquier $f \in W^{s,p}(\Omega)$, tenemos*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para cualquier $q \in [p,p^*]$; es decir, el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ tiene inmersión continua en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [p,+\infty)$.
Si además, Ω es acotado, entonces el espacio $W^{s,p}(\Omega)$ tiene inmersión compacta en $L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [1,+\infty)$.

4.5. Equivalencia de espacios

Comenzaremos definiendo ciertos elementos necesarios para trabajar este tema.

- Seminorma no local de energía

$$|||u|||^2 := \frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)(x,y)\cdot D^*(u)(x,y)\,dy\,dx. \tag{4.16}$$

- Espacio no local de energía

$$V(\Omega\cup\Omega_I) := \{u \in L^2(\Omega\cup\Omega_I) :\ |||u||| < \infty\}. \tag{4.17}$$

- Espacio no local de energía de volumen limitado

$$V_c(\Omega \cup \Omega_I) := \{u \in V(\Omega \cup \Omega_I) : E_c(u) = 0\}, \tag{4.18}$$

donde E_c es un operador lineal y continuo[2] definido sobre $V(\Omega \cup \Omega_I)$ con valores en un espacio normado, tal que si $E_c(u) = 0$, entonces $u = 0$ con u una función constante. Un caso particular de esta definición es

$$V_c(\Omega \cup \Omega_I) := \{u \in V(\Omega \cup \Omega_I) : \ u = 0 \text{ sobre } \Omega_I\}. \tag{4.19}$$

A continuación demostraremos que efectivamente $|||\cdot|||$ es seminorma en $V(\Omega \cup \Omega_I)$ y bajo la condición del espacio $V_c(\Omega \cup \Omega_I)$, $|||\cdot|||$ es norma.

- Homogeneidad: Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $u \in V(\Omega \cup \Omega_I)$. Demostremos que $|||\alpha u||| = |\alpha| \ |||u|||$.
  En efecto,

$$\begin{aligned} |||\alpha u||| &= \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(\alpha u)(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} \\ &= |\alpha| \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(u)(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} = |\alpha| \ |||u|||. \end{aligned}$$

- Desigualdad triangular: Sean $u, v \in V(\Omega \cup \Omega_I)$. Demostremos que $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$.
  Aplicando la desigualdad de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned} |||u+v||| &= \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(u+v)(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(u)(x,y) + D^*(v)(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(u)(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(v)(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} \\ &= |||u||| + |||v|||. \end{aligned}$$

[2] Es decir, existe una constante C tal que

$$|E_c(u)| \leq C\left(|||u|||^2 + \|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\right) \quad \text{para todo } u \in V(\Omega \cup \Omega_I).$$

- Positividad: Sea $u \in V(\Omega \cup \Omega_I)$. Entonces $|||u||| \geq 0$, lo que se obtiene directamente de la definición de $|||\cdot|||$.

- Nulidad: Sea $u \in V(\Omega \cup \Omega_I)$. Demostremos que si $u = 0$ entonces $|||u||| = 0$, pero que si $|||u||| = 0$ no necesariamente tenemos que $u = 0$.

  La primera parte se sigue directamente por la definicion de $|||\cdot|||$. Para la segunda parte consideremos el siguiente contraejemplo:

  Tomemos

$$\alpha(x,y) = \frac{(x-y)}{|x-y|^{\frac{n}{2}+s+1}} \mathbb{1}_{B(0,2)}$$

  donde $B(0,2)$ es la bola abierta con centro en 0 y radio igual a 2. Sean $\Omega = B(0,1)$; y $\Omega_I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 2\right\}$ tal que $\Omega \cup \Omega_I = B(0,2)$, donde $B(0,1)$ es la bola abierta con centro en 0 y radio igual a 1. Por último consideremos $u(x) = 1$ para todo $x \in \Omega \cup \Omega_I$, entonces

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I} |u(x)|^2 \, dx = \int_{\Omega\cup\Omega_I} dx = |\Omega \cup \Omega_I| = 4\pi < \infty$$

  por lo que $u \in L^2(\Omega \cup \Omega_I)$. Además

$$\begin{aligned} |||u|||^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega\cup\Omega_I} \int_{\Omega\cup\Omega_I} \left(D^*(u)(x,y)\right)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega\cup\Omega_I} \int_{\Omega\cup\Omega_I} \left(u(y) - u(x)\right)^2 \gamma(x,y) \, dy \, dx = 0 < \infty \end{aligned}$$

  y

$$\begin{aligned} \gamma(x,y) &= \alpha(x,y) \cdot \alpha(x,y) \\ &= \frac{(x-y)}{|x-y|^{\frac{n}{2}+s+1}} \mathbb{1}_{B(0,2)} \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|^{\frac{n}{2}+s+1}} \mathbb{1}_{B(0,2)} \\ &= \frac{|x-y|^2}{\left(|x-y|^{\frac{n}{2}+s+1}\right)^2} \mathbb{1}_{B(0,2)} \\ &= \frac{\mathbb{1}_{B(0,2)}}{|x-y|^{n+2s}}, \end{aligned}$$

  tomando $\gamma_* = \gamma^* = 1$ se cumple (4.13) referente a la condición de estudio del kernel, por lo cual $u \in V(\Omega \cup \Omega_I)$. Así, hemos demostrado que $|||u||| = 0$ pero $u \neq 0$ y por tanto $|||\cdot|||$ es seminorma en $V(\Omega \cup \Omega_I)$.

Por otro lado, $|||\cdot|||$ es norma en $V_c(\Omega\cup\Omega_I)$. Faltaría demostrar que si $u\in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ tal que $|||u|||=0$ entonces $u(x)=0$, para todo $x\in\Omega_I$. En efecto,

$$|||u|||^2=\frac{1}{2}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(u(y)-u(x)\big)^2\gamma(x,y)\,dy\,dx=0$$

entonces

$$\big(u(y)-u(x)\big)^2\gamma(x,y)=0\quad\text{para todo } x,y\in\Omega\cup\Omega_I,$$

lo que implica que

$$\big(u(y)-u(x)\big)^2=0\quad\text{para todo } x,y\in\Omega\cup\Omega_I$$

y así

$$u(y)=u(x)\quad\text{para todo } x,y\in\Omega\cup\Omega_I.$$

Si $y\in\Omega_I$

$$u(y)=u(x)=0\quad\text{para todo } x\in\Omega_I.$$

Por lo tanto $u=0$ y $|||\cdot|||$ es norma en $V_c(\Omega\cup\Omega_I)$.

Ahora pasaremos a demostrar que el espacio no local de energía $V(\Omega\cup\Omega_I)$ es equivalente al espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\Omega\cup\Omega_I)$. Esto implica que $V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ es un espacio de Hilbert equipado con la norma $|||\cdot|||$. En particular, tenemos que

$$C_*\|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}\le|||u|||\le C^*\|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}\quad\text{para todo } u\in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$$

con C_* y C^* dos constantes positivas. Como consecuencia, cualquier resultado obtenido bajo la norma de energía $|||\cdot|||$ puede ser visto como un resultado que involucra la norma $\|\cdot\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}$. Además la norma de energía $|||\cdot|||$ satisface la desigualdad no local de Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\le C_p|||u|||\quad\text{para todo } u\in V_c(\Omega\cup\Omega_I).$$

Lema 6. *Sea γ una función que satisface (4.9), (4.11) y (4.13). Entonces*

$$[u]^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}\le 2(\gamma^*)^{-1}|||u|||^2+4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)}\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}$$

Demostración. Consideremos la seminorma de Gagliardo y utilicemos una bola de radio ε con

centro en $x \in \Omega \cup \Omega_I$. Así

$$\begin{aligned}
[u]^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} &= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\,dx \\
&= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\left(\int_{(\Omega\cup\Omega_I)\cap B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy + \int_{\Omega\cup\Omega_I\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\right)dx \\
&= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{(\Omega\cup\Omega_I)\cap B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\,dx. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Luego, multiplicamos (4.13) por $(u(y)-u(x))^2$, obteniendo

$$\frac{(u(y)-u(x))^2\gamma^*}{|y-x|^{n+2s}} \le (u(y)-u(x))^2\gamma(x,y) \le \frac{(u(y)-u(x))^2\gamma_*}{|y-x|^{n+2s}}.$$

Trabajamos solamente con la desigualdad de la izquierda. Utilizamos (4.5) y la definición de la norma $|||u|||$ con lo cual

$$\frac{(u(y)-u(x))^2}{|y-x|^{n+2s}} \le (\gamma^*)^{-1}(u(y)-u(x))^2\gamma(x,y) = (\gamma^*)^{-1}(D^*u)(D^*u) = 2(\gamma^*)^{-1}|||u|||^2,$$

por tanto

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{(\Omega\cup\Omega_I)\cap B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\,dx \le 2(\gamma^*)^{-1}|||u|||^2. \qquad (4.21)$$

Por otro lado, dado que en el segundo término de (4.20) $y \notin B_\varepsilon(x)$ tenemos que $|y-x| \ge \varepsilon$, más aún $\dfrac{1}{|y-x|^{d+2s}} \le \varepsilon^{-(d+2s)}$ por tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{d+2s}}\,dy\,dx &\le \varepsilon^{-(d+2s)}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I\setminus B_\varepsilon(x)} (u(y)-u(x))^2\,dy\,dx \\
&\le \varepsilon^{-(d+2s)}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} (u(y)-u(x))^2\,dy\,dx \\
&\le 2\varepsilon^{-(d+2s)}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \left((u(y))^2+(u(x))^2\right)dy\,dx \\
&= 2\varepsilon^{-(d+2s)}\left(\int_{\Omega\cup\Omega_I}\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\,dx\right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega\cup\Omega_I}\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\,dy\right) \\
&= 2\varepsilon^{-(d+2s)}\left(2|\Omega\cup\Omega_I|\,\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\right) \\
&= 4\varepsilon^{-(d+2s)}|\Omega\cup\Omega_I|\,\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Por último, sumamos (4.21) con (4.22) y sustituimos en (4.20) obteniendo así el resultado deseado. □

Lema 7. *Sea γ una función que satisface (4.9), (4.11) y (4.13). Entonces*

$$|||u|||^2 \leq \gamma_* [u]^2_{H^s(\Omega \cup \Omega_I)}$$

Demostración. Tomemos la desigualdad del lado derecho de (4.13), multipliquemos por $(u(y) - u(x))^2$ e integremos respecto a y y x con lo cual

$$\int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} (u(y) - u(x))^2 \gamma(x,y)\, dy\, dx \leq \gamma_* \int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} \frac{(u(y) - u(x))^2}{|y - x|^{d+2s}}\, dy\, dx$$

por lo tanto obtenemos

$$|||u|||^2 \leq \gamma_* [u]^2_{H^s(\Omega \cup \Omega_I)}.$$

□

Lema 8 (Desigualdad no local de Poincaré)**.** *Sea γ una función que satisface (4.9), (4.11) y (4.13). Entonces, existe una constante positiva C tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)} \leq C |||u|||^2$$

para todo $u \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que el resultado es falso, es decir, para todo $c > 0$, existe $v_c \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$ tal que

$$\|v_c\|^2_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)} > c |||v_c|||^2.$$

En particular, para $c = k^2 \in \mathbb{N}$, existe $v_k \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$ tal que

$$\|v_k\|^2_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)} > k^2 |||v_k|||^2. \tag{4.23}$$

Sea $u_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)}}$, entonces

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)} = \left\| \frac{v_k}{\|v_k\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)}} \right\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)} = 1$$

y por (4.23), como $v_k = \|v_k\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}u_k$, tenemos que

$$\left\|\|v_k\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}u_k\right\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} > k^2|||\,\|v_k\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}u_k\,|||^2$$

de donde

$$\|v_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\|u_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} > k^2\|v_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}|||u_k|||^2,$$

simplificando obtenemos

$$1 = \|u_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} > k^2|||u_k|||^2,$$

lo que implica que

$$|||u_k||| < \frac{1}{k}. \tag{4.24}$$

Por otro lado, el Lema 6 nos dice que

$$[u_k]^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq 2(\gamma^*)^{-1}|||u_k|||^2 + 4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)}\|u_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}$$

sumando $\|u_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}$ en ambos lados obtenemos

$$\|u_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} + [u_k]^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} < 2(\gamma^*)^{-1}|||u_k|||^2 + \left(4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)} + 1\right)\|u_k\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}$$

de donde, por (4.24) y la definición de $\|\cdot\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}$ tenemos que

$$\|u_k\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} < \frac{2}{k}(\gamma^*)^{-1} + 4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)} + 1$$

como $\frac{1}{k} \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} < 4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)} + 1.$$

Esto implica que la sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada en $H^s(\Omega\cup\Omega_I)$. Como $H^s(\Omega\cup\Omega_I)$ es reflexivo (ver Teorema 29), por el teorema de Eberlein-Šmulian, existen una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\tilde{u} \in H^s(\Omega\cup\Omega_I)$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup \tilde{u}$ en $H^s(\Omega\cup\Omega_I)$. Por la inmersión compacta $H^s(\Omega\cup\Omega_I) \hookrightarrow L^2(\Omega\cup\Omega_I)$, la sucesión $\{u_{k_j}\}$ converge fuertemente en $L^2(\Omega\cup\Omega_I)$ hacia $\tilde{u}$ ya que la imagen bajo un operador compacto de una sucesión débilmente convergente es fuertemente

convergente. Así

$$u_{k_j} \longrightarrow \tilde{u} \quad \text{en} \quad L^2(\Omega \cup \Omega_I).$$

Podemos asumir (tomando una subsucesión de ser necesario) que $u_{k_j} \to \tilde{u}$ c.t.p. $x \in H^s(\Omega \cup \Omega_I)$. Más aún con $\|u_{k_j}\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} = 1$, tenemos que $\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} = 1$. Por tanto

$$\left(u_{k_j}(y) - u_{k_j}(x)\right)^2 \gamma(x,y) \to \left(\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)\right)^2 \gamma(x,y) \quad \text{c.t.p. } (x,y) \in \Omega \cup \Omega_I \times \Omega \cup \Omega_I.$$

Con esto

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \left(u_{k_j}(y) - u_{k_j}(x)\right)^2 \gamma(x,y)\, dy\, dx = |||u_{k_j}|||^2 < \frac{1}{k_j},$$

entonces

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \left(u_{k_j}(y) - u_{k_j}(x)\right)^2 \gamma(x,y)\, dy\, dx \leq 1 < \infty,$$

y

$$\left(u_{k_j}(y) - u_{k_j}(x)\right)^2 \gamma(x,y) \geq 0$$

para todo $(x,y) \in \Omega \cup \Omega_I \times \Omega \cup \Omega_I$. Hemos verificado las hipótesis del Lema de Fatou. Por ende tenemos que

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \left(\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)\right)^2 \gamma(x,y)\, dy\, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} \left(u_{k_j}(y) - u_{k_j}(x)\right)^2 \gamma(x,y)\, dy\, dx$$

es decir,

$$|||\tilde{u}|||^2 \leq \liminf_{j\to\infty} |||u_{k_j}|||^2$$

pero, por (4.24), $|||u_{k_j}||| \leq \dfrac{1}{k_j}$ y así

$$0 \leq \liminf_{j\to\infty} |||u_{k_j}||| \leq \lim_{j\to\infty} |||u_{k_j}||| = 0.$$

Entonces

$$\liminf_{j\to\infty} |||u_{k_j}||| = \lim_{j\to\infty} |||u_{k_j}||| = 0.$$

Así

$$0 \leq |||\tilde{u}|||^2 \leq \lim_{j\to\infty} |||u_{k_j}|||^2 = 0$$

por lo cual

$$|||\tilde{u}|||^2 = \lim_{j\to\infty} |||u_{k_j}|||^2 = 0.$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} (\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x))^2\,\gamma(x,y)dy\,dx = 0$$

lo que implica que $\tilde{u}(y) = \tilde{u}(x)$ c.t.p. $(x,y) \in \Omega\cup\Omega_I \times \Omega\cup\Omega_I$. Ahora, esto significa que $\tilde{u}$ es constante. Como $\tilde{u} \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ y $E_c(\tilde{u}) = 0$, entonces $\tilde{u}(x) = 0$ c.t.p. $x \in \Omega$, es decir, $\tilde{u} = 0$ lo que es absurdo ya que $\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} = 1 \neq 0$. Por lo tanto se concluye la demostración. □

Teorema 35. *Sea γ una función que satisface (4.9), (4.11) y (4.13). Entonces,*

$$C_*\|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq |||u||| \leq C^*\|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}$$

para todo $u \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$, donde C_* es una constante positiva que satisface $C_*^{-2} = [2(\gamma^*)^{-1} + C(4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)}+1)]$ y $C^* = \sqrt{\gamma_*}$.

Demostración. Utilizamos el resultado del Lema 6, sumamos $\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}$ en ambos lados de la desigualdad y haciendo uso de definición de $\|\cdot\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}$ obtenemos

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq 2(\gamma^*)^{-1}|||u|||^2 + (4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)}+1)\|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}.$$

Usando la desigualdad no local de Poincaré, se sigue que

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq 2(\gamma^*)^{-1}|||u|||^2 + (4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)}+1)C|||u|||^2.$$

Tomamos $C_*^2 = [2(\gamma^*)^{-1} + C(4|\Omega\cup\Omega_I|\varepsilon^{-(d+2s)}+1)]^{-1}$, así obtenemos

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq C_*^{-2}|||u|||^2$$

de donde

$$C_*\|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq |||u|||. \tag{4.25}$$

Por otro lado, como

$$[u]_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq [u]^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} = \|u\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)},$$

por el Lema 7 tenemos que

$$|||u|||^2 \leq \gamma_* [u]^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq \gamma_* \|u\|^2_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}$$

entonces, tomando $C^* = \sqrt{\gamma_*}$ obtenemos

$$|||u||| \leq C^* \|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)}. \tag{4.26}$$

De (4.25) y (4.26) concluímos que

$$C_* \|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \leq |||u||| \leq C^* \|u\|_{H^s(\Omega\cup\Omega_I)} \quad \text{para todo } u \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$$

como se quería demostrar. □

4.6. Formulaciones variacionales

En esta última sección del trabajo realizaremos las formulaciones variaciones del problema elíptico no local

$$-\mathcal{L}u = f \quad \text{en } \Omega$$

bajo condiciones de volumen de Dirichlet y Neumann, y demostraremos existencia y unicidad de soluciones débiles en ambos casos. Luego, realizaremos las formulaciones variaciones del problema parabólico no local

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = f & \text{en} \quad \Omega_T \\ u = g & \text{sobre} \quad \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bajo condiciones de volumen de Dirichlet y Neumann. Los casos que involucran condiciones de volumen de Robin no se incluirán debido a que se utiliza teoría de traza no local y teoremas de aproximaciones no locales, los cuales son temas que no se incluyen en este trabajo. Las demostraciones de existencia y unicidad de soluciones débiles para el problema parabólico no local bajo las condiciones de volumen de Dirichlet y Neumann se incluyen en el proyecto de investigación PIJ 15-22 (ver [17]) y por tanto son temas que tampoco se incluirán en este trabajo.

Para esto consideremos, como en la anterior parte, Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave a trozos, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ para algun tiempo fijo $T > 0$ y $\Omega_I := \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \alpha(x,y) \neq 0, \text{ para algún } x \in \Omega\}$ un dominio de interacción de Ω con $\alpha(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una función antisimétrica (es decir, $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$). Además consideremos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función desconocida y $\mathcal{L}$ el operador no local en función de $u(x)$ definido como

$$\mathcal{L}u(x) := -D(D^*u)(x) = 2\int_{\mathbb{R}^n} \big(u(y) - u(x)\big)\gamma(x,y)\, dy \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

donde $\gamma(x,y) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una función simétrica no negativa (es decir, $\gamma(x,y) = \gamma(y,x)$) con $\gamma(x,y) := \alpha(x,y) \cdot \alpha(x,y)$, $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el operador no local de divergencia, el cual está dado por

$$D(\nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\nu(x,y) + \nu(y,x)\big)\alpha(x,y)\, dy \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n,$$

con $\nu(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. El operador adjunto $D^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido de la siguiente manera

$$D^*(u)(x,y) = -\big(u(y) - u(x)\big)\alpha(x,y) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

y por último el operador no local de interacción $\mathcal{N}(\nu) : \Omega_I \to \mathbb{R}$ sobre ν definido como

$$\mathcal{N}(\nu)(x) := -\int_{\Omega \cup \Omega_I} \big(\nu(x,y) + \nu(y,x)\big) \cdot \alpha(x,y)\, dy \quad \text{para todo } x \in \Omega_I.$$

4.6.1. Caso elíptico

Para este caso es necesario dar a conocer ciertos elementos. Definamos $V_c'(\Omega)$ como el espacio dual de $V_c(\Omega \cup \Omega_I)$ equipado con la norma

$$\|f\|_{V_c'(\Omega)} := \sup_{v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I), v \neq 0} \frac{\left|\int_\Omega fv\, dx\right|}{|||v|||_{V_c(\Omega \cup \Omega_I)}},$$

y el espacio de traza de volumen $\tilde{V}(\Omega_I) := \left\{v\big|_{\Omega_I} : v \in V(\Omega \cup \Omega_I)\right\}$ dotado de la norma

$$\|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)} := \inf_{v \in V(\Omega \cup \Omega_I), v\big|_{\Omega_I} = g} |||v|||.$$

Condición de Dirichlet

Consideremos el problema elíptico no local con condiciones de Dirichlet

$$(P1) \quad \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{sobre} \quad \Omega_I. \end{cases}$$

Sea $\tilde{u} \in V(\Omega \cup \Omega_I)$ tal que $\tilde{u} = g$ en Ω_I, además $f \in V_c'(\Omega)$ y $g \in \tilde{V}(\Omega_I)$ tal que $u = g$ para $x \in \Omega_I$. Tomemos $w = u - \tilde{u}$, entonces

$$-\mathcal{L}(w + \tilde{u}) = DD^*(w + \tilde{u}) = f$$

de donde

$$DD^*w = f - DD^*\tilde{u}.$$

Tomemos $\tilde{f} := f - DD^*\tilde{u}$, el problema (P1) se convierte en

$$(\widetilde{P1}) \quad \begin{cases} DD^*w = \tilde{f} & \text{en} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \Omega_I. \end{cases}$$

Ahora tomemos $v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$ definido en (4.19), entonces

$$\int_{\Omega \cup \Omega_I} (DD^*w)v \, dx = \int_{\Omega \cup \Omega_I} \tilde{f}v \, dx$$

haciendo uso del Corolario 2 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cup \Omega_I} (DD^*w)v \, dx &= \int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} D^*(v)D^*(w) \, dx \, dy + \int_{\Omega_I} v\mathcal{N}(D^*w) \, dx \\ &= \int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} D^*(v)D^*(w) \, dx \, dy \end{aligned}$$

por lo que el problema $(\widetilde{P1})$ se formula variacionalmente como: Dado $f \in V_c'(\Omega)$ y $g \in \tilde{V}(\Omega_I)$, hallar $w(x) \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$ tal que $w = 0$ para $x \in \Omega_I$ y

$$\int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} D^*(v)D^*(w) \, dx \, dy = \int_{\Omega \cup \Omega_I} \tilde{f}v \, dx \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I).$$

A la función $u = w + \tilde{u}$ se la llama solución débil del problema (P1).

Observación 8. En el caso local, el problema $(\widetilde{P1})$ es análogo al problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

y se formula variacionalmente como: Dado $f \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = 0$ y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Por otro lado, de la formulación variacional del problema $(\widetilde{P1})$ definamos

$$\begin{aligned} a : V_c(\Omega \cup \Omega_I) \times V_c(\Omega \cup \Omega_I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto a(v, w) = \int_{\Omega\cup\Omega_I} \int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(v) D^*(w) \, dx \, dy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi : V_c(\Omega \cup \Omega_I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi(v) = \int_{\Omega\cup\Omega_I} \tilde{f} v \, dx \end{aligned}$$

tal que

$$a(v, w) = \varphi(v).$$

Demostremos la existencia y unicidad de las soluciones débiles del problema $(P1)$ mediante el siguiente teorema.

Teorema 36. *El problema (P1) tiene solución débil única.*

Demostración. Sabemos que el problema $(\widetilde{P1})$ es equivalente al problema (P1), por tanto asumiremos la ecuación

$$a(v, w) = \varphi(v) \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$$

antes descrita. Demostremos que $a(v, w)$ es continua. Así, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.16) tenemos

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &= \left| \int_{\Omega\cup\Omega_I} \int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(v) D^*(w) \, dx \, dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega\cup\Omega_I} \int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(v)||D^*(w)| \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$\leq \left(\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(v)D^*(v)\,dx\,dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(w)D^*(w)\,dx\,dy\right)^{1/2}$$
$$=\sqrt{2}|||v|||\sqrt{2}|||w||| = 2|||v|||\;|||w|||.$$

A continuación demostremos que $a(v,v)$ es coerciva. En efecto,

$$a(v,v) = \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(v)D^*(v)\,dx\,dy = 2|||v|||^2.$$

Entonces, por el teorema de Lax-Milgram existe una única solución débil $w \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ tal que

$$a(v,w) = \varphi(v) \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega\cup\Omega_I).$$

□

Observación 9. La solución del problema (P1) satisface

$$|||u||| \leq \tilde{C}\left(\|f\|_{V_c'(\Omega)} + \|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}\right)$$

con $1 \leq \tilde{C} < \infty$. Para $s < \frac{1}{2}$, $\tilde{C} = 1$.

De la formulación variacional del problema $(\widetilde{P1})$, y como $\tilde{f} := f - DD^*\tilde{u}$ con $f \in V_c'(\Omega)$, tenemos

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(v)D^*(w)\,dx\,dy = \int_{\Omega\cup\Omega_I}\tilde{f}v\,dx = \int_{\Omega} fv\,dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(\tilde{u})D^*(v)\,dx\,dy.$$

En particular, trabajaremos con la parte derecha de la anterior ecuación y utilizaremos la desigualdad $|||\tilde{u}||| \leq C\|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}$[3] con $g \in \tilde{V}(\Omega_I)$ y C una constante positiva para obtener

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega\cup\Omega_I}\tilde{f}v\,dx\right| &= \left|\int_{\Omega} fv\,dx - \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(\tilde{u})D^*(v)\,dx\,dy\right| \\ &\leq \int_{\Omega}|fv|\,dx + \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}|D^*(\tilde{u})||D^*(v)|\,dx\,dy \\ &\leq \|f\|_{V_c'(\Omega)}|||v||| + 2|||\tilde{u}|||\;|||v||| \\ &\leq C\left(\|f\|_{V_c'(\Omega)} + \|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}\right)|||v|||,\end{aligned}$$

[3]Esta desigualdad se da por el hecho de que el espacio $\tilde{V}(\Omega_I)$ es equivalente al espacio $H^s(\Omega_I)$ y por el estudio de traza no local, el cual es un tema que no se incluye en este trabajo por lo que asumimos la existencia de esta desigualdad. Para tener una idea de su construcción, para $s \leq \frac{1}{2}$ podemos tomar $\tilde{u} = 0$ en Ω entonces $C = 1$. Para $s > \frac{1}{2}$ podemos utilizar el hecho de que las funciones en $H^s(\Omega)$ tienen trazas bien definidas en la frontera de Ω con lo que se construye la función $\tilde{u}$ con las propiedades deseadas.

además

$$\left|\int_{\Omega\cup\Omega_I}\tilde{f}v\,dx\right| \leq \int_{\Omega\cup\Omega_I}|\tilde{f}v|\,dx = \|\tilde{f}\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)}|||v|||,$$

de donde

$$\|\tilde{f}\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)} \leq C\left(\|f\|_{V_c'(\Omega)} + \|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}\right).$$

Por otro lado, haciendo uso de la continuidad de $a(\cdot,\cdot)$ y la formulación variacional de $(\widetilde{P1})$ tenemos que

$$2|||w|||^2 = a(w,w) = \int_{\Omega\cup\Omega_I}\tilde{f}w\,dx \leq \|\tilde{f}\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)}|||w|||$$

por lo cual

$$|||w||| \leq \frac{1}{2}\|\tilde{f}\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)}.$$

Así, como $w = u - \tilde{u}$ obtenemos

$$|||u||| - |||\tilde{u}||| \leq C\left(\|f\|_{V_c'(\Omega)} + \|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}\right),$$

más aún, haciendo uso de la desigualdad $|||\tilde{u}||| \leq C\|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}$ concluímos que

$$\begin{aligned}|||u||| &\leq |||\tilde{u}||| + C\left(\|f\|_{V_c'(\Omega)} + \|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}\right)\\ &\leq \tilde{C}\left(\|f\|_{V_c'(\Omega)} + \|g\|_{\tilde{V}(\Omega_I)}\right)\end{aligned}$$

con $\tilde{C}$ una constante positiva.

Condición de Neumann

Consideremos el problema elíptico no local con condiciones de Neumann

$$(P2)\quad \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{en } \Omega \\ \mathcal{N}(D^*u) = g & \text{sobre } \Omega_I \\ \displaystyle\int_{\Omega\cup\Omega_I} u(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

Para este tipo de condición supondremos que Ω_I es acotado, y tomaremos $E_c(u) = \displaystyle\int_{\Omega\cup\Omega_I} u(x)\,dx$ para todo $u \in V(\Omega\cup\Omega_I)$. E_c es lineal trivialmente. Demostremos que E_c es continuo. En efecto,

$$|E_c(u)| = \left|\int_{\Omega\cup\Omega_I} u(x)\,dx\right| \leq \int_{\Omega\cup\Omega_I}|u(x)|\,dx = \|u\|_{L^1(\Omega\cup\Omega_I)}.$$

Como $\Omega \cup \Omega_I$ es acotado se tiene la inmersión continua

$$L^2(\Omega \cup \Omega_I) \hookrightarrow L^1(\Omega \cup \Omega_I).$$

En particular, existe una constante C positiva tal que

$$\|u\|_{L^1(\Omega \cup \Omega_I)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)}.$$

Entonces

$$|E_c(u)| \leq C\|u\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)} \leq C\left(|||u||| + \|u\|_{L^2(\Omega \cup \Omega_I)}\right).$$

Ahora, si u es constante y $E_c(u) = 0$. demostremos que $u = 0$. En efecto, como u es constante, tomemos $u(x) = c$ c.t.p. $x \in \Omega \cup \Omega_I$. Luego

$$0 = \int_{\Omega \cup \Omega_I} u(x)\, dx = \int_{\Omega \cup \Omega_I} c\, dx = c \int_{\Omega \cup \Omega_I} dx = c|\Omega \cup \Omega_I|$$

pero $\Omega \subseteq \Omega \cup \Omega_I$, por lo cual $0 < |\Omega| \leq |\Omega \cup \Omega_I|$. Entonces, necesariamente $c = 0$ y así $u = 0$. A continuación procedemos a definir el espacio a ser utilizado para el problema (P2):

$$V_c(\Omega \cup \Omega_I) = \left\{ v \in V(\Omega \cup \Omega_I) : \int_{\Omega \cup \Omega_I} v(x)\, dx = 0 \right\}. \tag{4.27}$$

Para la formulación variacional de (P2) supongamos que $f \in V_c'(\Omega \cup \Omega_I)$, $g \in \tilde{V}(\Omega_I)$ y $v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$. Entonces utilizando la definición del operador $\mathcal{L}$ tenemos

$$\int_{\Omega \cup \Omega_I} -(\mathcal{L}u)v\, dx = \int_{\Omega \cup \Omega_I} (DD^*u)\, dx = \int_{\Omega \cup \Omega_I} fv\, dx,$$

utilizando el Corolario 2 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cup \Omega_I} (DD^*u)\, dx &= \int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} (D^*u)(D^*v)\, dx\, dy + \int_{\Omega_I} v\mathcal{N}(D^*u)\, dx \\ &= \int_{\Omega \cup \Omega_I} \int_{\Omega \cup \Omega_I} (D^*u)(D^*v)\, dx\, dy + \int_{\Omega_I} vg\, dx. \end{aligned}$$

Por tanto el problema (P2) se formula variacionalmente como: Dado $f \in V_c'(\Omega \cup \Omega_I)$ y $g \in \tilde{V}(\Omega_I)$

hallar $u \in V(\Omega \cup \Omega_I)$ tal que $\mathcal{N}(D^*u) = 0$ y

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}(D^*u)(D^*v)\,dx\,dy = \int_{\Omega\cup\Omega_I} fv\,dx - \int_{\Omega_I} vg\,dx \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I). \quad (4.28)$$

A la función u se la llama solución débil del problema (P2).

Observación 10. En el caso local, el problema $(P2)$ es análogo a

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega \\ \int_\Omega u\,dx = 0, \end{cases}$$

y se formula variacionalmente como: Dado $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in H^1_c(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma \quad \text{para todo } v \in H^1_c(\Omega),$$

donde $H^1_c(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y se define como

$$H^1_c(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u\,dx = 0 \right\}.$$

Por otro lado, de la formulación variacional del problema $(P2)$ definamos

$$\begin{aligned} a : V_c(\Omega \cup \Omega_I) \times V_c(\Omega \cup \Omega_I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)D^*(v)\,dx\,dy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi : V_c(\Omega \cup \Omega_I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi(v) = \int_{\Omega\cup\Omega_I} fv\,dx - \int_{\Omega_I} vg\,dx. \end{aligned}$$

Con esto, (4.28) puede reescribirse como

$$a(u, v) = \varphi(u) \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I).$$

Demostremos la existencia y unicidad de las soluciones débiles del problema $(P2)$ mediante el siguiente teorema.

Teorema 37. *El problema* $(P2)$ *tiene solución débil única.*

Demostración. Claramente $a(\cdot,\cdot)$ es bilineal. Demostremos que $a(u,v)$ es continua. En efecto, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)D^*(v)\,dx\,dy\right| \\
&\leq \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(vu)||D^*(v)|\,dx\,dy \\
&\leq \left(\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(u)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} |D^*(v)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}|||u|||\sqrt{2}|||v||| = 2|||u|||\;|||v|||.
\end{aligned}$$

A continuación demostremos que $a(u,u)$ es coerciva. En efecto,

$$a(u,u) = \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} D^*(u)D^*(u)\,dx\,dy = 2|||u|||^2.$$

Por otro lado, φ es claramente lineal. Demostremos que φ es continuo, para esto utilizaremos la desigualdad no local de Poincaré (8)

$$\begin{aligned}
|\varphi(u)| &= \left|\int_{\Omega\cup\Omega_I} fu\,dx - \int_{\Omega_I} ug\,dx\right| \\
&\leq \int_{\Omega\cup\Omega_I} |fu|\,dx + \int_{\Omega_I} |ug|\,dx \\
&\leq \|f\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega_I)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_p\|f\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)}|||u||| + C_p^2|||g|||\;|||u||| \\
&\leq \left(C_p\|f\|_{V_c'(\Omega\cup\Omega_I)} + C_p^2|||g|||\right)|||u|||,
\end{aligned}$$

donde C_p es la constante de Poincaré. Entonces, por el Teorema de Lax-Milgram existe una única solución débil $u \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ tal que

$$a(u,v) = \varphi(u) \quad \text{para todo } v \in V_c(\Omega\cup\Omega_I).$$

□

4.6.2. Caso parabólico

En esta parte nos centraremos en estudiar las formulaciones variacionales del problema parabólico no local antes mencionado tomando en cuenta las condiciones de volumen de Dirichlet y Neumann. En este caso no demostraremos existencia y unicidad de los problemas dado que esto sobrepasa el objetivo de este trabajo de titulación. Recordemos que consideramos Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave a trozos, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ para algún tiempo fijo $T > 0$.

Condición de Dirichlet

Consideremos el problema parabólico no local con condiciones de Dirichlet

$$(P3) \quad \begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = f & \text{en} \quad \Omega_T \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Omega_I \times [0,T] \\ u = g & \text{sobre} \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Sea $v \in V_c(\Omega \cup \Omega_I)$ definido en (4.19) y supongamos que $g \in L^2(\Omega)$ y $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Ahora

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I} (u_t)v \, dx + \int_{\Omega\cup\Omega_I} (-\mathcal{L}u)v \, dx = \int_{\Omega\cup\Omega_I} fv \, dx$$

de donde

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I} (u_t)v \, dx = \int_{\Omega\cup\Omega_I} \partial_t(uv) \, dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega\cup\Omega_I} uv \, dx = \frac{d}{dt}(u,v)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)},$$

utilizando la definicion del operador $\mathcal{L}$ y el Corolario 2 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cup\Omega_I} (-\mathcal{L}u)v \, dx &= \int_{\Omega\cup\Omega_I} (D^*(Du))v \, dx \\ &= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} (D^*u)(D^*v) \, dx \, dy + \int_{\Omega_I} v\mathcal{N}(D^*u) \, dx \\ &= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} (D^*u)(D^*v) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Entonces la forma bilineal asociada a este problema es

$$B[u(t),v;t] = \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I} (D^*u(t))(D^*v) \, dx \, dy \qquad \text{c.t.p. } t \in [0,T].$$

Por tanto el problema (P3) se formula variacionalmente como: Dado $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y

$g \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in L^2(0,T;V_c(\Omega \cup \Omega_I))$ tal que $u(t) = 0$ c.t.p. $t \in [0,T]$ y

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} + B[u(t),v;t] = (f(t),v)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} \\ (u(0,v))_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} = (g,v)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)} \qquad \text{para todo } v \in V_c(\Omega\cup\Omega_I). \end{cases}$$

Observación 11. En el caso local, el problema $(P3)$ es análogo al problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega_T \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Omega \times \{t=0\}, \end{cases}$$

y se formula variacionalmente como: Dado $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y $g \in L^2(\Omega)$, hallar $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que $u = 0$ y para c.t.p. $t \in [0,T]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla u(t)\cdot v\, dx = (f(t),v)_{L^2(\Omega)} \\ (u(0,v))_{L^2(\Omega)} = (g,v)_{L^2(\Omega)} \qquad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Condición de Neumann

Consideremos el problema parabólico no local con condiciones de Neumann

$$(P4) \quad \begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = f \quad \text{en} \quad \Omega_T \\ \mathcal{N}(D^*u) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Omega_I \times [0,T] \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Omega \times \{t=0\} \\ \int_{\Omega\cup\Omega_I} u(x,t)\, dx = 0 \quad \text{c.t.p. } t \in [0,T]. \end{cases}$$

Tomemos en cuenta la formulación de los problemas parabólicos no locales con condiciones de Neumann descritos en (4.27). Sea $v \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ definido en [4], y supongamos que Ω_I es acotado, $g \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ y $f \in L^2(0,T;V_c'(\Omega))$. Además $u(x,t) := u(t)(x)$ y $u(t) \in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$ c.t.p. $t \in [0,T]$, es decir, $u \in L^2(0,T;V_c(\Omega\cup\Omega_I))$. Ahora

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u_t(t)\big)v\, dx + \int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(-\mathcal{L}u(t)\big)v\, dx = \int_{\Omega\cup\Omega_I} f(t)v\, dx,$$

de donde

$$\int_{\Omega\cup\Omega_I} \big(u_t(t)\big)v\, dx = \int_{\Omega\cup\Omega_I} \partial_t\big(u(t)v\big)\, dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega\cup\Omega_I} u(t)v\, dx = \frac{d}{dt}\big(u(t),v\big)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}.$$

Utilizando la definicion del operador $\mathcal{L}$ y el Corolario 2 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(-\mathcal{L}u(t)\big)v\,dx &= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(D^*Du(t)\big)v\,dx\\ &= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(D^*u(t)\big)(D^*v)\,dx\,dy+\int_{\Omega_I}v\mathcal{N}\big(D^*u(t)\big)\,dx\\ &= \int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(D^*u(t)\big)(D^*v)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

así

$$\frac{d}{dt}\big(u(t),v\big)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}+\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(D^*u(t)\big)(D^*v)\,dx\,dy=\int_{\Omega\cup\Omega_I}f(t)v\,dx.$$

La forma bilineal asociada a este problema es

$$B[u(t),v;t]=\int_{\Omega\cup\Omega_I}\int_{\Omega\cup\Omega_I}\big(D^*u(t)\big)(D^*v)\,dx\,dy\qquad\text{c.t.p. } t\in[0,T].$$

Por tanto el problema (P4) se formula variacionalmente como: Dado $f\in L^2(0,T;V_c'(\Omega))$ y $g\in V_c(\Omega\cup\Omega_I)$, hallar $u\in L^2(0,T;V_c(\Omega\cup\Omega_I))$ tal que $\mathcal{N}(D^*u)=0$ y

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\big(u(t),v\big)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}+B[u(t),v;t]=(f(t),v)_{L^2(\Omega\cup\Omega_I)}\\ (u(0,v))_{L^2(\Omega)}=(g,v)_{L^2(\Omega)}\quad\text{para todo } v\in V_c(\Omega\cup\Omega_I).\end{cases}$$

Observación 12. En el caso local, el problema $(P4)$ es análogo a

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=f & \text{en}\quad \Omega_T\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{sobre}\quad \partial\Omega\times[0,T]\\ u=g & \text{sobre}\quad \partial\Omega\times\{t=0\}\\ \int_U u(x,t)\,dx=0 & \text{c.t.p. } t\in[0,T],\end{cases}$$

y se formula variacionalmente como: Dado $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y $g\in L^2(\Omega)$, hallar $u\in H_c^1(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ y para c.t.p. $t\in[0,T]$

$$\frac{d}{dt}\big(u(t),v\big)_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega\nabla u(t)\cdot\nabla v\,dx=\int_\Omega f(t)v\,dx\quad\text{para todo } v\in H_0^1(\Omega)$$

donde $H_c^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y se define como

$$H_c^1(\Omega):=\left\{v\in H^1(\Omega):\int_\Omega v(x)\,dx=0\right\}.$$

Bibliografía

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces*, volume 140. Elsevier, 2003.

[2] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[3] H. Brezis and L. C. Evans. A variational inequality approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators. *Springer-Verlag*, pages 1–13, 1979.

[4] M. Dehghan. Efficient techniques for the second-order parabolic equation subject to non-local specifications. *Elsevier, Applied Numerical Mathematics 52 39–62*, 2004.

[5] F. Demengel and G. Demengel. *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2012.

[6] J. Du, M. Gunzburger, R. B. Lehoucq, and K. Zhou. A non-local vector calculus, non-local volume-constrained problems, and non-local balance laws. *Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics*, pages 11–17, 2011.

[7] Q. Du, M. Gunzburger, R. B. Lehoucq, and K. Zhou. Analysis and Approximation of Nonlocal Diffusion Problems with Volume Constraints. *SIAM Vol. 54, No 4*, page 667–696, 2012.

[8] M. D'Elia and M. D. Gunzburger. Optimal distributed control of nonlocal steady diffusion problems. *SIAM J. Control Optim. 52*, page 243–273, 2014.

[9] Y. Eidelman, V. Milman, and A. Tsolomitis. *Functional Analysis*, volume 66. American Mathematical Society, 2004.

[10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, second edition, 2010.

[11] M. Gunzburger and R. B. Lehoucq. A Nonlocal Vector Calculus with Application to Nonlocal Boundary Value Problems. *Multiscale Model, Vol. 8*, pages 1581–1598, 2010.

[12] P. W. Jones. Quasiformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. *Acta Math.147 no. 1-2*, page 71–88, 1981.

[13] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Uraltseva. Linear and quasilinear elliptic equations. *Academic Press*, 1968.

[14] G. Leoni. A first course in Sobolev spaces. Graduate studies in Mathematics. *American Mathematical Society 105*, 2009.

[15] E. Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Elsevier*, pages 5–49, 2011.

[16] H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson Education Asia Limited and China Machine Press, fourth edition, 2010.

[17] M. Yangari. Existence and Uniqueness of weak solutions for a nonlocal parabolic problems via Galerkin method. *Preprint*, 2018.

[18] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, sixth edition, 1980.