ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

DESARROLLO DEL MODELO DINÁMICO LINEAL EN PARAMETROS INERCIALES DE UN ROBOT PARALELO PARA REHABILITACIÓN DE RODILLA

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGÍSTER EN MECATRÓNICA Y ROBÓTICA

CATALINA ELIZABETH ARMAS FREIRE

elizabeth.armas@epn.edu.ec

DIRECTOR: ING. IVÁN ZAMBRANO, M.Sc.

ivan.zambrano@epn.edu.ec

Quito, Octubre, 2018

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por **Catalina Elizabeth Armas Freire**, bajo mi supervisión.

_____

Ing. Iván Zambrano, M.Sc.

DIRECTOR DE PROYECTO

DECLARACIÓN

Yo, **Catalina Elizabeth Armas Freire**, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondiente a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normativa institucional vigente.

_____

Catalina Elizabeth Armas Freire

DEDICATORIA

A Dios que ha estado siempre junto a mí y me ha llenado de bendiciones.

A mi hijo, que no solo es mi alegría, sino también mi inspiración.

Catalina Elizabeth Armas Freire

AGRADECIMIENTO

A Dios porque cada día siento su presencia, su guía y amor.

A mi madre Marianín por su apoyo.

A mi director de tesis Ing. Iván Zambrano MSc. por confiarme el desarrollo de este trabajo, por el tiempo dedicado y los conocimientos compartidos.

Al Dr Vicente Mata y Dr. Angel Valera por su interés y la valiosa información compartida para el desarrollo de este trabajo.

GRACIAS

ÍNDICE

Certificación i
Declaración ii
Dedicatoria iii
Agradecimiento iv
Índice de figuras viii
Índice de tablas x
Glosario de términos xi
Resumen xiii
Abstract xiv
Introducción 1
Pregunta de Investigación 2
Objetivo general 2
Objetivos específicos 2
Alcance 2
1. MARCO TEÓRICO 4
1.1. Robot paralelo 4
1.1.1. Configuraciones estructurales de los robots paralelos 5
1.1.2. Robot paralelo de cuatro grados de libertad 6
1.1.3. Robot paralelo de 4GDL tipo 3UPS + 1RPU 6
1.2. Modelamiento de robots paralelos 8
1.2.1. Sistemas de coordenadas 10
1.2.2. Problema cinemático directo e inverso 11
1.2.3. Restricciones cinemáticas de posición 12
1.2.4. Restricciones cinemáticas de velocidad 13
1.2.5. Restricciones cinemáticas de aceleración 15
1.2.6. Ecuaciones explicitas de Gibbs-Appell para robots de lazo cerrado 16
1.3. Modelos de fricción 21
1.3.1. Modelo de fricción estática 22
1.4. Modelo dinámico lineal considerando modelos de fricción 23
1.5. Procedimiento de identificación de parámetros base 24
1.5.1. Factibilidad física 25
1.6. Parámetros Base 26
1.6.1. Método de descomposición en valores singulares (SVD) 27
1.6.2. Método de factorización QR 29
1.7. Trayectorias de identificación 31
1.7.1. Función objetivo 31

1.7.2. Método de generación de trayectorias 32
1.7.3. Limites mecánicos de las articulaciones activas 33
1.7.4. Límites de las articulaciones esféricas 35
1.7.5. Límites del espacio de trabajo 36
1.7.6. Proceso de optimización de trayectorias 36
1.8. Análisis de residuos 37
2. METODOLOGÍA 38
2.1. Modelo dinámico en parámetros inerciales 39
2.1.1. Geometría del robot 39
2.1.2. Restricciones cinemáticas de posición 40
2.1.3. Restricciones cinemáticas de velocidad 48
2.1.4. Restricciones cinemáticas de aceleración 53
2.1.5. Velocidad y aceleración angular en las articulaciones del robot 53
2.1.6. Aceleración lineal en el origen de los sistemas de referencia 58
2.1.7. Ecuaciones explicitas de Gibbs-Appell para cadena cerrada 60
2.2. Modelo de fricción 73
2.3. Modelo dinámico lineal en parámetros inerciales y de fricción 76
2.4. Diseño de trayectorias óptimas de identificación 76
2.4.1. Parámetros para generación de trayectorias 77
2.4.2. Trayectoria de identificación de parámetros base 80
2.4.3. Trayectoria para análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados 80
2.5. Identificación de parámetros base 81
2.5.1. Planta de simulación en Adams/View 83
2.6. Compatibilidad del modelo dinámico en parámetros base 85
3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN 87
3.1. Resultados 87
3.1.1. Parámetros base 87
3.1.2. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optima de identificación 88
3.1.3. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optima de verificación (análisis de compatibilidad de parámetros base) 91
3.2. Discusión 93
3.2.1. Modelo dinámico lineal en parámetros inerciales y de fricción 93
3.2.2. Parámetros base 94
3.2.3. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optimas de identificación 95
3.2.4. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optimas de verificación 95
4. CONCLUSIONES 96
4.1.1. Recomendaciones 97

4.1.2. Trabajos Futuros 97
Referencias Bibliográficas 98
Anexos 100

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Robot paralelo genérico. 4
Figura 1.2. Robot planar de: (a) 2 GDL. (b) 3 GDL. 5
Figura 1.3. Robot espacial de 5 GDL. 5
Figura 1.4. Robot paralelo de 4 GDL con cadenas cinemáticas distintas. 6
Figura 1.5. Configuración tipo 3UPS + 1RPU. 6
Figura 1.6. Grados de libertad del robot paralelo tipo 3UPS + 1RPU. 8
Figura 1.7. Análisis de robots paralelos mediante corte de cadenas cerradas. 9
Figura 1.8. Sistema de referencia bajo la notación D-H modificada. 10
Figura 1.9. Representación de un para esférico con notación D-H modificada. 11
Figura 1.10. Problema cinemático directo e inverso de un robot manipulador. 12
Figura 1.11. Ecuaciones de compatibilidad de velocidad y aceleración. 13
Figura 1.12. Modelo de fricción de Coulomb. 22
Figura 1.13. Modelo de fricción de Coulomb y viscoso. 22
Figura 1.14. Modelo de fricción estática, de Coulomb y viscoso. 23
Figura 1.15. Proceso de identificación de parámetros base. 25
Figura 1.16. Límites de una articulación esférica: (a) Corte transversal, (b) Vista general. 35
Figura 1.17. Proceso de optimización de trayectorias. 37
Figura 2.1. Sistema de coordenadas del robot 3UPS+1RPU. 39
Figura 2.2. Dimensiones de la (a) plataforma base. (b) plataforma móvil. 39
Figura 2.3. Sistemas de referencia para los 4 GDL del robot paralelo. 41
Figura 2.4. Representación simplificada de los sistemas de referencia en la plataforma móvil. 42
Figura 2.5. Cadena cinemática cerrada (a) 1. (b) 2. (c) 3. 43
Figura 2.6. Sistemas de referencia para la pata 1. 44
Figura 2.7. Representación simplificada de los sistemas de referencia en la pata 1. 45
Figura 2.8. Cadena cinemática cerrada 4. 46
Figura 2.9. Sistema de referencia para la pata 4. 47
Figura 2.10. Representación simplificada de los sistemas de referencia en la pata 4. 48
Figura 2.11. Restricción de velocidad, cadena cinemática cerrada (a) 1. (b) 2. (c) 3. 49
Figura 2.12. Restricción de velocidad, cadena cinemática cerrada 4. 51
Figura 2.13. Velocidad angular en los sistemas de referencia de la pata 1. 54
Figura 2.14. Velocidad angular en los sistemas de referencia de la pata 4. 56
Figura 2.15. Velocidad angular en los sistemas de referencia de la plataforma móvil. 57
Figura 2.16. Trayectorias optimas: (a) $nH = 2$. (b) $nH = 6$. (c) $nH = 10$. (d) $nH = 14$. 78
Figura 2.17. Límites de posición y estimación inicial para las trayectorias óptimas. 78
Figura 2.18. Angulo máximo para una articulación esférica del robot. 79
Figura 2.19. Trayectorias optimas de posición en los cuatro actuadores lineales, para identificación de parámetros base. 80
Figura 2.20. Trayectorias óptimas de posición de los cuatro actuadores lineales, para verificar los parámetros base identificados. 81
Figura 2.21. Diagrama de flujo para identificación de parámetros base del robot 3UPS + 1RPU. 83
Figura 2.22. Diagrama para iniciar la simulación dinámica del robot paralelo. 84

Figura 2.23. Diagrama de flujo del análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados para el robot paralelo 3UPS + 1RPU. 86
Figura 3.1. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 1. 89
Figura 3.2. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 2. 89
Figura 3.3. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 3. 90
Figura 3.4. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 4. 90
Figura 3.5. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 1. 91
Figura 3.6. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 2. 91
Figura 3.7. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 3. 92
Figura 3.8. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 4. 92

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1. Grados de libertad de cada articulación del robot 3UPS + 1RPU 7
Tabla 1.2. Ventajas y desventajas de la configuración 3UPS + 1RPU 8
Tabla 1.3. Criterios para establecer la función objetivo de trayectorias óptimas..... 32
Tabla 2.1. Vectores que definen los vértices de las plataformas base y móvil 40
Tabla 2.2. Parámetros geométricos de las plataformas base y móvil 40
Tabla 2.3. Componentes de la matriz A para la pata 1..... 62
Tabla 2.4. Componentes de la matriz $B1$ para la pata 1..... 63
Tabla 2.5. Componentes de la matriz $B2$ para la pata 1..... 63
Tabla 2.6. Componentes de la matriz A para la pata 4..... 67
Tabla 2.7. Componentes de la matriz $B1$ para la pata 4..... 67
Tabla 2.8. Componentes de la matriz $B2$ para la pata 4..... 67
Tabla 2.9. Componentes de la matriz A para la plataforma móvil..... 69
Tabla 2.10. Componentes de la matriz $B1$ para la plataforma móvil..... 70
Tabla 2.11. Componentes de la matriz $B2$ para la plataforma móvil..... 71
Tabla 3.1. Parámetros inerciales que no ejercen efecto en el modelo dinámico del robot..... 87
Tabla 3.2. Parámetros base optimizados mediante análisis de factibilidad física. 88
Tabla 3.3. Trayectoria de identificación: ECM de las fuerzas generalizadas activas del robot..... 90
Tabla 3.4. Trayectoria de análisis de compatibilidad: ECM de las fuerzas generalizadas activas para el robot 3UPS + 1RPU 92

GLOSARIO DE TÉRMINOS

n	Numero de variables generalizadas.
m	Numero de ecuaciones de restricción.
UPS	Cadena cinemática formada por una articulación universal, una prismática y una esférica.
RPU	Cadena cinemática formada por una articulación de revolución, una prismática y una universal.
GDL	Grados de libertad.
${}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i}$	Vector de posición desde el origen del sistema $i-1$ hasta el origen del sistema i, representado en el sistema de referencia $i-1$.
${}^{j}R_{i-1}$	Tensor de rotación, relaciona la orientación del sistema de referencia $i-1$ con respecto al sistema j.
θ_i	Ángulo de la articulación medida desde X_{i-1} hasta X_i con referencia al eje Z_i.
α_i	Ángulo de separación medida desde Z_{i-1} hasta Z_i con referencia al eje X_{i-1}.
d_i	Distancia entre X_{i-1} hasta X_i a lo largo del eje Z_i.
a_i	Distancia entre Z_{i-1} hasta Z_i a lo largo del eje X_{i-1}.
$A(\vec{q})$	Matriz Jacobiana del robot paralelo.
$A_d(\vec{q})$	Matriz Jacobiana de las variables generalizadas dependientes.
$A_i(\vec{q})$	Matriz Jacobiana de las variables generalizadas independientes.
${}^{i}\ddot{\vec{r}}^{k^*}_{O_i}$	Aceleración lineal absoluta del punto O_i^k expresado en el sistema de referencia i, después de anular las aceleraciones generalizadas.
${}^{i}\vec{\omega}_i^k$	Velocidad angular absoluta del cuerpo i expresada en el sistema de referencia i.
${}^{p}\dot{\vec{\omega}}_i^{k^*}$	Aceleración angular absoluta del cuerpo i expresada en el sistema de referencia i, después de anular las aceleraciones generalizadas.
${}^{i}\vec{r}_{O_i^k p}$	Vector de posición entre el punto O_i^k y el punto p sobre el cuerpo i expresada en el sistema de referencia i.
${}^{i-1}\vec{r}^{k}_{O_{i-1}O_i}$	Vector de posición entre el punto O_{i-1}^k y el punto O_i^k expresada en el sistema de referencia $i-1$.
ρ_i^k	Tipo de articulación, $\rho_i^k = 1$ para un par de revolución y $\rho_i^k = 0$ para un par prismático.

${}^{i}\vec{z}_i^k$	Vector unitario en la dirección del eje Z del sistema de referencia del cuerpo i expresado en el sistema de referencia i.
k	Rama que se ha seguido a lo largo del mecanismo.
τ_k	Fuerza generalizada en el cuerpo k.
τ_f	Fuerza generalizada de fricción.
F_{c_i}	Coeficiente de Coulomb de la articulación i.
F_{v_i}	Coeficiente de fricción viscosa de la articulación i.
$signo(x)$	Función para determinar el signo de la variable x.
$\tilde{}$	Vector anti-simétrico.
$K(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}})$	Matriz de observación del sistema para una configuración no especifica.
$K_f(\dot{\vec{q}})$	Matriz de observación de fricción para una configuración no especifica.
W	Matriz de observación para una trayectoria definida.
$\vec{\Phi}_i$	Vector de parámetros inerciales.
$\vec{\Phi}_f$	Vector de parámetros de inercia.
m_j	Masa del cuerpo $j-esimo$.
κ	Coeficiente de condiciones de una matriz de observación.
${}^{j}I_{G_i}$	Tensor de inercia del cuerpo i con respecto al centro de masa, en el sistema de referencia j.
ECM	Error cuadrático medio.
ε	Precisión del computador.
X_m	Coordenada en el eje X de la plataforma móvil, respecto al sistema de referencia 0.
Y_m	Coordenada en el eje Y de la plataforma móvil, respecto al sistema de referencia 0.
Z_m	Coordenada en el eje Z de la plataforma móvil, respecto al sistema de referencia 0.
ϕ	Ángulo de rotación de la plataforma móvil alrededor del eje X_0.
θ	Ángulo de rotación de la plataforma móvil alrededor del eje Y_0.
ψ	Ángulo de rotación de la plataforma móvil alrededor del eje Z_0.

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla el modelo dinámico lineal con respecto a parámetros inerciales (masa, primer momento de masa y momento de inercia) para el robot paralelo tipo 3UPS+1RPU desarrollado en la Escuela Politécnica Nacional como parte del proyecto PIMI-1504, además se incorpora un modelo lineal de fricción lineal de coulomb y de viscosidad para mejorar la estimación del modelo del comportamiento real del robot en análisis. Posteriormente, el modelo dinámico lineal se simplifica (modelo en parámetros base) mediante el método numérico de descomposición en valores singulares. Para la reducción del modelo dinámico, se emplea una curva de identificación de parámetros base que se genera mediante series de Fourier finitas optimizada a través de algoritmos de minimización con restricciones, las restricciones empleadas en este trabajo son límites de recorrido, velocidad y aceleración de los actuadores lineales, así como también, restricciones en el espacio de trabajo y el ángulo alcanzado por las articulaciones esféricas que constituyen la estructura del robot paralelo 3UPS+1RPU. Finalmente, el grado de compatibilidad del modelo dinámico reducido desarrollado, se cuantifica a través del cálculo del error cuadrático medio, determinado entre las fuerzas generalizadas de las articulaciones independientes estimadas por el modelo dinámico lineal en parámetros base y las fuerzas simuladas en el software Adams/View. Para el análisis de compatibilidad se emplea una trayectoria optimizada de prueba generada mediante series de Fourier finitas.

Palabras clave: Modelo dinámico lineal, parámetros base, robot paralelo, análisis de compatibilidad, descomposición de valores singulares.

ABSTRACT

In the present work the linear dynamic model is developed with respect to inertial parameters (mass, first moment of mass and moment of inertia) for the parallel robot type 3UPS + 1RPU developed in the Escuela Politécnica Nacional as part of the PIMI-1504 project. A lineal model of linear friction of coulomb and viscosity is incorporated to improve the estimation of the model to real behavior of the robot in analysis. Subsequently, the dynamic linear model is simplified (model in base parameters) by the numerical method of decomposition into singular values. For the dynamic model reduction, a curve of identification of base parameters is used which is generates by means of finite Fourier series optimized through minimization algorithms with restrictions. The restrictions used in this work are limits of travel, speed and acceleration of the actuators linear, as well as, restrictions in the workspace and the angle reached by the spherical joints that constitute the structure of the parallel robot 3UPS + 1RPU. Finally, the degree of compatibility of the developed reduced dynamic model is quantified through calculation of the mean square error determined between the generalized forces of the independent joints estimated by the linear dynamic model in base parameters and the forces simulated in the Adams/View software. For this compatibility analysis, an optimized test path generated by finite Fourier series is used.

Keywords: Linear dynamic model, base parameters, parallel robot, compatibility analysis, decomposition of singular values.

DESARROLLO DEL MODELO DINÁMICO LINEAL EN PARÁMETROS INERCIALES DE UN ROBOT PARALELO PARA REHABILITACIÓN DE RODILLA.

INTRODUCCIÓN

Actualmente en el área de rehabilitación clínica, los robots paralelos permiten desarrollar terapias de rehabilitación activas y pasivas bajo mínima supervisión del fisioterapeuta (Vallés, y otros, 2015).

En robots paralelos, para poder realizar movimientos rápidos y precisos se requiere emplear un modelo dinámico del robot. La resolución del modelo dinámico tiene un costo computacional alto, para enfrentar éste problema se requiere emplear un modelo dinámico simplificado (Díaz, Valera, Mata, & Valles, 2013). El método de identificación de parámetros base permite obtener modelos lineales reducidos con alto grado de similitud con la realidad, partiendo de un modelo dinámico lineal en parámetros inerciales (Farhat, 2006).

En Ecuador, la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Escuela Politécnica Nacional (EPN), como parte del proyecto PIMI-1504 está desarrollando un robot paralelo para diagnosis y rehabilitación de rodilla. El robot está compuesto por tres eslabones prismáticos (unidos mediante un par universal y uno esférico), y un eslabón prismático unido mediante un par de revolución y un par universal, es decir, una configuración 3UPS + 1RPU (Zamora, 2016). Aquino & Pozo (2017) desarrollaron un modelo dinámico no lineal del robot 3UPS + 1RPU mediante la metodología de Gibbs Appell, sin embargo este modelo representa los esfuerzos generalizados de forma implícita, y no considera los esfuerzos producidos por la fricción entre las articulaciones del robot, lo que ocasiona un error de alrededor del 20% con respecto al comportamiento dinámico simulado del robot paralelo (Pulloquinga, 2018).

Con base en lo expuesto, el presente proyecto propone desarrollar un modelo dinámico en forma lineal respecto a parámetros inerciales que incorpore un modelo de fricción para reducir el error de estimación respecto a la simulación del robot paralelo, posteriormente para reducir la complejidad del modelo lineal, se realiza la simplificación usando identificación de parámetros base; el modelo reducido o simplificado facilita la futura implementación de controladores electrónicos basados en modelos dinámicos, al disminuir el costo computacional empleado en la resolución del modelo, es decir,

permitirá al proyecto de investigación PIMI-1504 realizar el diseño y sintonización de controladores electrónicos basados en pasividad.

Finalmente, para asegurar el grado de compatibilidad del modelo reducido (modelo en parámetros base) se compara las respuestas calculadas para las fuerzas generalizadas independientes, con las fuerzas generalizadas simuladas en el robot paralelo virtual en el software Adams/View.

Pregunta de Investigación

Al desarrollar un modelo dinámico en parámetros base (modelo reducido o simplificado) del robot paralelo 3UPS+1RPU del proyecto PIMI-1504, es posible representar de forma adecuada el comportamiento dinámico del robot paralelo con aplicación de rehabilitación de rodilla.

Objetivo general

Desarrollar el modelo dinámico lineal en parámetros inerciales de un robot paralelo para rehabilitación de rodilla, mediante ecuaciones explícitas de Gibbs Appell.

Objetivos específicos

- Revisar la información disponible sobre modelamiento de robots paralelos con base en parámetros inerciales y de fricción, para desarrollar un modelo dinámico lineal para el robot paralelo 3UPS + 1RPU.
- Determinar el modelo lineal en parámetros inerciales y de fricción para el robot paralelo, usando como herramienta computacional el software Matlab.
- Reducir el modelo lineal en parámetros inerciales y de fricción a un modelo de parámetros base, utilizando trayectorias de identificación optimizadas mediante restricciones no lineales del espacio de trabajo del robot.
- Verificar la compatibilidad entre el modelo lineal reducido y el mecanismo simulado del robot paralelo 3UPS + 1RPU, mediante el software Adams/View.

Alcance

Para alcanzar los objetivos de la investigación se realizarán las siguientes actividades:

- Revisar el proceso de modelamiento dinámico en parámetros inerciales y de fricción para robots de cadena cerrada.

- Revisar diferentes metodologías aplicadas para obtener modelos en parámetros base partiendo de un modelo en parámetros inerciales y de fricción para robots paralelos.
- Diseñar trayectorias de identificación de parámetros base.
- Determinar el modelo en parámetros base partiendo de un modelo de parámetros inerciales y de fricción.
- Resolver el modelo en parámetros base para una trayectoria de prueba previamente diseñada.
- Simular el movimiento del robot para rehabilitación de rodilla para la trayectoria de prueba diseñada.
- Realizar el análisis cuantitativo de los errores producidos entre los cálculos del modelo en parámetros base del robot paralelo y los resultados de la simulación del mismo.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. Robot paralelo

Un robot paralelo es un conjunto de cadenas cinemáticas cerradas caracterizado por que su efector final (plataforma móvil) está conectado a la base a través de varias cadenas cinemáticas abiertas. Los principales elementos de un robot paralelo (Figura 1.1) son:

- Base: Elemento fijo del robot.
- Plataforma móvil: Elemento rígido donde es montado el efector final del robot.
- Cadena cinemática: Enlace entre la base y la plataforma móvil, también se le conoce como pata del robot.

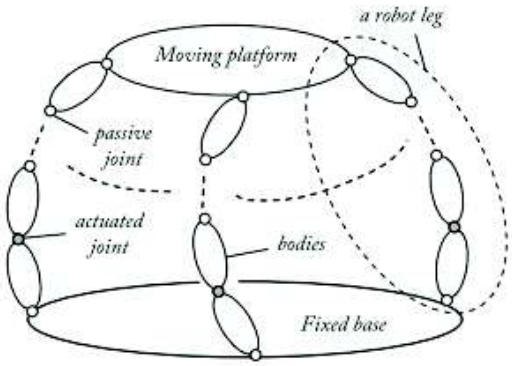


Figura 1.1. Robot paralelo genérico.
(Fuente: (Briot & Khalil, 2015))

Las principales ventajas de un robot paralelo (Aracil, Saltarén, Sabater, & Reinoso, 2006) son:

- Los actuadores son también elementos estructurales del robot, incrementando la relación carga/potencia del robot paralelo en comparación a un robot serie.
- Estructuras de alta rigidez y bajo peso en comparación con los robots serie.
- Altas velocidades de operación, con alto grado de precisión.

Por otro lado, entre las desventajas más notables se tiene:

- Cinemática de mecanismos compleja, algunas veces se requiere sensores redundantes para establecer lazos de control.
- Al alcanzar una configuración de singularidad, se incrementa el número de GDL incrementando en gran medida las fuerzas de los actuadores, ocasionando que la efectividad del sistema de control se pierda.

- Espacio de trabajo más pequeño que el de un robot serie.
- No posee un modelo dinámico general como en el caso de los robots serie, dificultando el desarrollo de algoritmos de control estandarizados.

Las aplicaciones más relevantes de este tipo de robots son simuladores de vuelo, maquinado de piezas, medicina y manejo de productos a alta velocidad.

1.1.1. Configuraciones estructurales de los robots paralelos

En robots paralelos el tipo de cadenas cinemáticas, las combinaciones en el número de cadenas cinemáticas, las restricciones entre las articulaciones del robot, etc. hacen difícil tener una clasificación estandarizada de los robots paralelos. Sin embargo, Merlet (2006) clasifica a los robots según el tipo de movimiento en:

- Robot Planar: El movimiento está restringido al plano, este tipo de robots tienen dos (Figura 1.2a) o tres grados de libertad (GDL) (Figura 1.2b).

(a) (b)

Figura 1.2. Robot planar de: (a) 2 GDL. (b) 3 GDL.
(Fuente: (Aracil, Saltarén, Sabater, & Reinoso, 2006))

- Robot Espacial: El movimiento del robot se desarrolla en todo el espacio tridimensional. Estos robots se pueden subdividir de acuerdo a los grados de libertad en: robot desde tres GDL hasta seis GDL y robots de grados de libertad mixto. La Figura 1.3 muestra un robot paralelo de 5 grados de libertad.

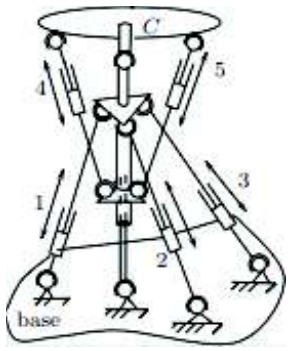


Figura 1.3. Robot espacial de 5 GDL.
(Fuente: (Merlet, 2006))

1.1.2. Robot paralelo de cuatro grados de libertad

Un robot paralelo de cuatro grados de libertad, de dos movimientos de traslación y dos de rotación, no se puede diseñar con cuatro cadenas cinemáticas idénticas. Para lograr diseñar un robot de este tipo se puede establecer un mecanismo de restricción pasivo, usar diferentes cadenas cinemáticas o combinar robots serie con robots paralelo.

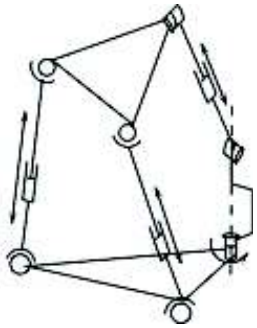


Figura 1.4. Robot paralelo de 4 GDL con cadenas cinemáticas distintas.
(Fuente: (Merlet, 2006))

La Figura 1.4 representa un robot con tres conjuntos de accionamiento idénticos, con una modificación en el tercer conjunto de accionamiento para lograr desarrollar el cuarto grado de libertad. Actualmente, los robots paralelos de cuatro grados de libertad con cuatro conjuntos de accionamiento no idénticos y de configuraciones con restricciones pasivas, se encuentran en estudio y desarrollo.

1.1.3. Robot paralelo de 4GDL tipo 3UPS + 1RPU

El Robot paralelo tipo 3UPS + 1RPU (Figura 1.5) está formado por tres cadenas cinemáticas independientes UPS unidas mediante una articulación universal (U), un actuador lineal o articulación prismática (P) y una articulación esférica (S) y una cadena cinemática independiente tipo RPU en el centro del robot unida mediante una articulación de revolución (R), una articulación prismática (P) y una universal (U).

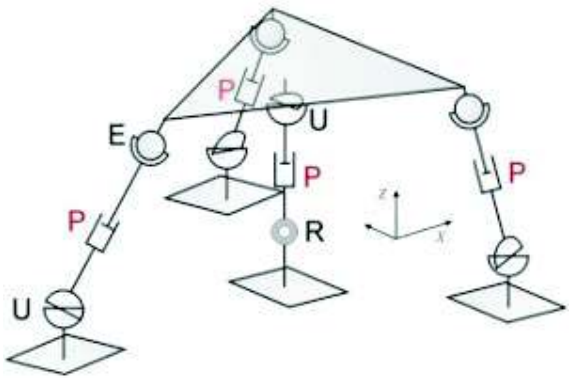


Figura 1.5. Configuración tipo 3UPS + 1RPU.
(Fuente: (Zamora, 2016))

Para determinar el número de grados de libertad (GDL) de la configuración 3UPS + 1RPU se emplea la fórmula de Grübler para robots de tipo espacial (Avello, 2014):

$$GDL = 6(N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i$$

Ec. 1.1

Donde:

N Numero de eslabones, incluye el eslabón fijo.

J Numero de articulaciones o juntas.

f_i Grados de libertad de la articulación i.

El robot paralelo tipo 3UPS + 1RPU está formado por 10 eslabones y 12 articulaciones. En la Tabla 1.1 se muestra el grado de libertad de cada articulación y el cálculo del termino f_i.

Tabla 1.1. Grados de libertad de cada articulación del robot 3UPS + 1RPU

Articulación	Cantidad	DOF	f_i
Revolución	1	1	1
Prismática	4	1	4
Universal	4	2	8
Esférica	3	3	9
		TOTAL	**22**

(Fuente: Autor)

Al reemplazar los datos de la Tabla 1.1 en la Ec. 1.1 se determina que el robot paralelo 3UPS + 1RPU posee cuatro grados de libertad. La Figura 1.6 muestra que el robot puede desplazarse sobre el eje X_m y sobre el eje Z_m, además existen dos movimientos de rotación alrededor del eje Z_m y el eje Y_m. En la fase de implementación, para obtener los 4 GDL se coloca la articulación de revolución en el eje Y para evitar el desplazamiento sobre este eje, y la rotación alrededor del eje X se elimina usando una articulación universal en la parte superior de la pata central del robot.

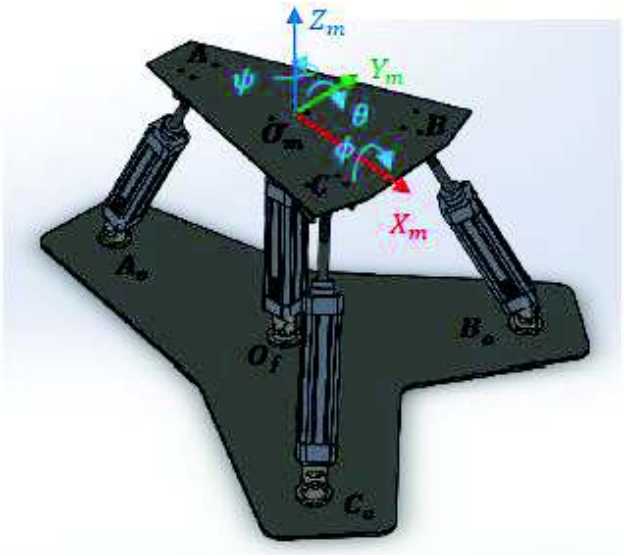


Figura 1.6. Grados de libertad del robot paralelo tipo 3UPS + 1RPU.
(Fuente: (Pulloquinga, 2018))

Los robots paralelos tipo 3PUS+1PRU y 2PRRR+2PUSR también proporcionan 4 GDL, sin embargo, para la aplicación específica de rehabilitación de rodilla la configuración con mayores ventajas es la de tipo 3UPS + 1RPU (Zamora, 2016). La Tabla 1.2 muestras las principales ventajas y desventajas de la configuración 3UPS + 1RPU con respecto a las configuraciones antes mencionadas.

Tabla 1.2. Ventajas y desventajas de la configuración 3UPS + 1RPU

Ventajas	Desventajas
Movimientos con mínimas singularidades en el espacio de trabajo. Existe una singularidad en los movimientos ejecutados alrededor del eje Z.	Las articulaciones esféricas que se pueden adquirir en el mercado tienen movilidad limitada.
Configuración mecánica simple, la fase de implementación es sencilla. Todos los elementos son comerciales y de fácil adquisición.	Articulación rotacional unida a la base del robot paralelo debe ser construida con materiales de alta rigidez, caso contrario no se puede evitar el desplazamiento sobre el eje Y.
Diseño mecánico portable.	

(Fuente: Autor)

1.2. Modelamiento de robots paralelos

El modelamiento de robots paralelos busca establecer las formulaciones matemáticas que describen el comportamiento cinemático y dinámico del robot. Previo al modelo dinámico es necesario establecer el comportamiento cinemático (modelo cinemático); en robots paralelos la posición, velocidad y aceleración generalizadas dependientes se obtienen resolviendo ecuaciones de restricción con base en los valores establecidos a las coordenadas generalizadas independientes (Farhat, 2006). Generalmente las articulaciones activas (con actuadores de cualquier tipo) se establecen como

coordenadas generalizadas independientes, mientras que las articulaciones pasivas se establecen como coordenadas generalizadas dependientes.

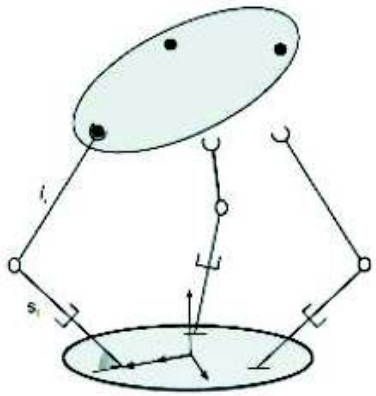


Figura 1.7. Análisis de robots paralelos mediante corte de cadenas cerradas.
(Fuente: (Aquino & Pozo, 2017))

En robots paralelos no existe una ecuación general para establecer la dinámica del robot, por lo que, usualmente se cortan las cadenas cinemáticas cerradas en ciertas articulaciones (ver Figura 1.7) para estudiarlas como un conjunto equivalente de cadenas cinemáticas abiertas, donde las fuerzas internas producidas por los cortes en las articulaciones se introducen en el modelamiento dinámico mediante la matriz jacobiana de las restricciones cinemáticas y los multiplicadores de Lagrange. El modelo del sistema de cadenas abiertas equivalente al robot paralelo se puede establecer mediante los principios de Newton-Euler, Lagrange-Euler, Kane o Gibbs-Appell, al determinar las fuerzas/pares reales sobre el espacio de trabajo de todas las coordenadas generalizadas.

El modelo dinámico general de un robot manipulador ideal (Provenzano, 2001) compuesto por n cuerpos y expresado en coordenadas independientes, está definido como:

$$\vec{\tau} = D(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \vec{C}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) + \vec{G}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) + J^T(\vec{q})\vec{F}$$

Ec. 1.2

Donde:

$\vec{\tau}$	Vector de fuerzas/pares que ejercen los actuadores.
$\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}}$	Vector de posición, velocidad y aceleración de las articulaciones.
$D(\vec{q})$	Matriz de inercia del robot.
$\vec{C}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$	Vector de fuerzas centrifugas y de Coriolis.
$\vec{G}(\vec{q},\dot{\vec{q}})$	Vector de fuerzas gravitacionales.

$\vec{F}$ Vector de fuerzas externas aplicadas al efector final.

$J(\vec{q})$ Matriz Jacobiana del robot.

1.2.1. Sistemas de coordenadas

El sistema de coordenadas de un robot paralelo se puede definir usando coordenadas generalizadas (coordenadas de nudo) bajo la notación de Denavit-Hartenberg (D-H) modificada. La notación D-H modificada (Khalil & Dombre, 2002) define la orientación y posición de la barra (i) respecto a la barra $(i-1)$ mediante cuatro parámetros θ_i, α_i, d_i y a_i (ver Figura 1.8). El vector posición entre los orígenes O_{i-1} y O_i $({}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i})$ de los sistemas de coordenadas establecidos en la barra $(i-1)$ e (i), en la notación D-H modificada se define como:

$$ {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1},O_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \sin\alpha_i \\ -d_i \cos\alpha_i \end{bmatrix} $$

Ec. 1.3

La matriz de rotación $({}^{i-1}R_i)$ que permite expresar un vector del sistema de coordenadas de la barra (i) en el sistema de coordenadas de la barra $(i-1)$ se establece así:

$$ {}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \cos\alpha_i \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \cos\theta_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} $$

Ec. 1.4

La coordenada generalizada (q_i) que representa una articulación de revolución sustituye al parámetro θ_i (Ec. 1.4), mientras que si la articulación es de tipo prismática reemplaza al parámetro d_i (Ec. 1.3).

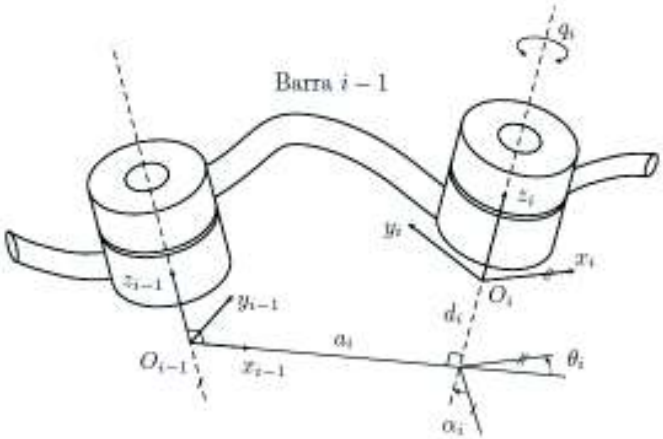


Figura 1.8. Sistema de referencia bajo la notación D-H modificada.
(Fuente: (Díaz, 2009))

De acuerdo con Diaz (2009), las articulaciones esféricas pueden ser modeladas, mediante la notación D-H modificada, como una combinación de tres pares de revolución (Figura 1.9), los tres pares de revolución deben ser consecutivos con ejes de rotación perpendiculares uno con respecto a otro. En el sistema equivalente de tres articulaciones de revolución las dos primeras tienen masas ficticias y solo la tercera articulación posee las propiedades inerciales del eslabón unido a la articulación esférica.

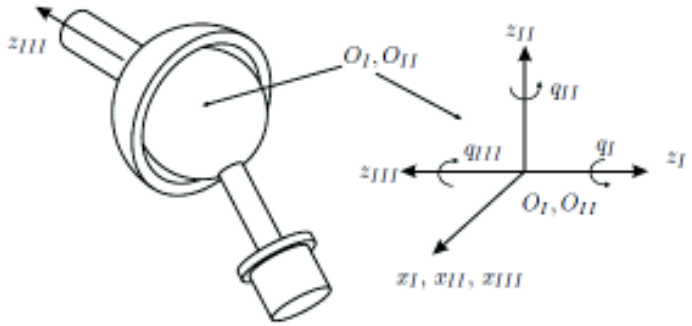


Figura 1.9. Representación de un para esférico con notación D-H modificada.
(Fuente: (Díaz, 2009))

La matriz de rotación de una articulación esférica, se obtiene al multiplicar consecutivamente las matrices de rotación de los tres giros de las articulaciones de revolución ficticias, es decir:

$$^{i-1}R_i = {}^{i-1}R_I\,{}^{I}R_{II}\,{}^{II}R_i$$

Ec. 1.5

1.2.2. Problema cinemático directo e inverso

Los robots paralelos tienen la tarea de posicionar y orientar la plataforma móvil (efector final) mediante una serie de configuraciones en el espacio de trabajo. El problema cinemático inverso consiste en determinar el valor de las coordenadas generalizadas activas (independientes) a partir de la posición y orientación del efector final, mientras que el problema de cinemática directa consiste en obtener la posición y orientación del efector final a partir de los valores de las coordenadas independientes (Figura 1.10).

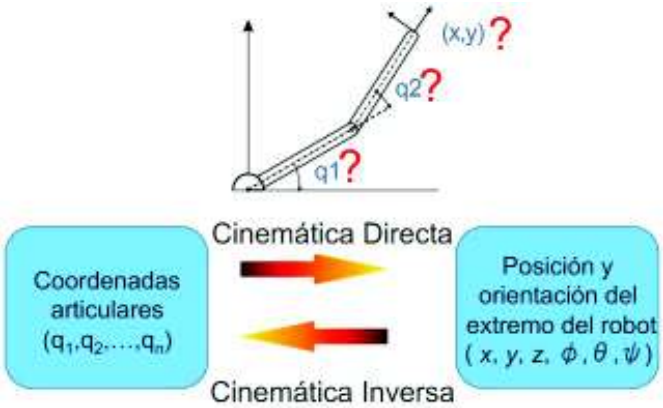


Figura 1.10. Problema cinemático directo e inverso de un robot manipulador.
(Fuente: (Mandón, 2014))

De acuerdo con Merlet (2006) en robots paralelos, a diferencia de los robots serie, resolver el problema cinemático inverso es más simple que la resolución del problema cinemático directo. En robots paralelos determinar el valor de las variables generalizadas partiendo de la posición y orientación del efector final es un problema simple ya que se puede dividir el problema, al analizar la cinemática inversa de cada cadena cinemática que une la plataforma base con la plataforma móvil. Por el contrario, determinar la posición y orientación del efector final para determinados valores de las variables generalizadas implica que todas las cadenas cinemáticas que unen la plataforma base y móvil puedan alcanzar una misma posición y orientación del efector final. En este trabajo se analiza el problema de cinemática directa mediante las ecuaciones de restricción cinemática, y utilizando la optimización de curvas para las articulaciones activas (actuadores prismáticos) del robot.

1.2.3. Restricciones cinemáticas de posición

Desde el punto de vista cinemático, un robot paralelo puede considerarse como un conjunto de robots serie restringidos a seguir unas trayectorias determinadas. Estas restricciones se definen por un conjunto de ecuaciones holónomas que dependen de la configuración geometría del robot (no dependen del tiempo). En general las restricciones cinemáticas de posición se establecen así:

$$f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Ec. 1.6

Donde:

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ Son las n coordenadas generalizas.

m Numero de ecuaciones de restricción.

A excepción de los mecanismos sobrerestringidos, se cumple que el número de grados de libertad de un robot está definido como:

$$GDL = n - m$$

Ec. 1.7

1.2.4. Restricciones cinemáticas de velocidad

Al derivar la Ec. 1.6 y reorganizar las velocidades generalizadas (Farhat, 2006), se determinan las ecuaciones de restricción de velocidad del robot, generando el siguiente sistema:

$$A(\vec{q}).\dot{\vec{q}}(t) = \vec{0}$$

Ec. 1.8

Donde:

$A(\vec{q})$ Matriz Jacobiana $(m \times n)$ del robot paralelo.

$\dot{\vec{q}}(t)$ Vector $(n \times 1)$ de velocidades generalizadas.

La matriz Jacobiana se obtiene de forma recursiva mediante el principio de compatibilidad de velocidades. Este principio establece que "cualquier sistema de referencia en un robot paralelo tiene las mismas velocidad lineal y angular, si estas se calculan siguiendo cualquier camino sobre barras y pares del propio robot" (Figura 1.11).

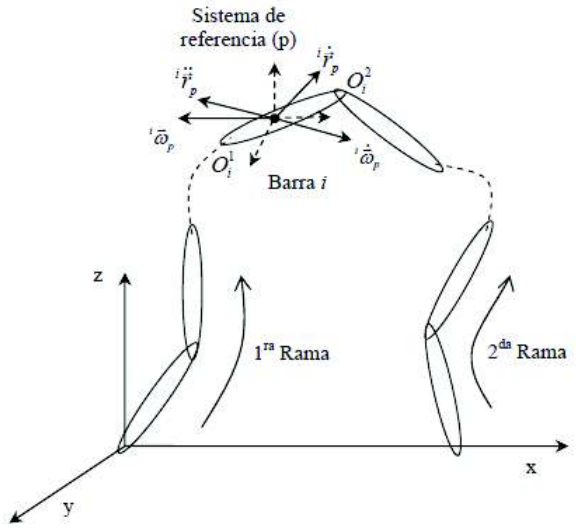


Figura 1.11. Ecuaciones de compatibilidad de velocidad y aceleración.
(Fuente: (Farhat, 2006))

Las velocidades lineales y angulares del sistema de referencia p unido al cuerpo (i), siguiendo el camino denotado $k - ésimo$, están definidas como:

$$\begin{bmatrix} {}^{p}\dot{\vec{r}}^{k}_{O_p} \\ {}^{p}\vec{\omega}^{k}_{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{p}\psi^{k}_{i} & {}^{p}\psi^{k}_{i-1} & \dots & {}^{p}\psi^{k}_{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}^{k}_{i} \\ \dot{q}^{k}_{i-1} \\ \vdots \\ \dot{q}^{k}_{1} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.9

$${}^{p}\psi^{k}_{i} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{p}\vec{z}^{k}_{i} \times {}^{p}\vec{r}^{k}_{O_iO_p} \\ {}^{p}\vec{z}^{k}_{i} \end{bmatrix} & si\ el\ nudo\ (i) de\ revolución \\ \begin{bmatrix} {}^{p}\vec{z}^{k}_{i} \\ \vec{0} \end{bmatrix} & si\ el\ nudo\ (i) de\ prismático \end{bmatrix}$$

Ec. 1.10

Donde:

${}^{p}\dot{\vec{r}}^{k}_{O_p}$	Velocidad absoluta del origen O^k_p, en el sistema de referencia p.
${}^{p}\vec{\omega}^{k}_{p}$	Velocidad angular absoluta del sistema de referencia p.
$\dot{q}^{k}_{i}$	Velocidad generalizada de la articulación i.
${}^{p}\vec{r}^{k}_{O_iO_p}$	Vector posición de O^k_i a O^k_p en el sistema de referencia p.
${}^{p}\vec{z}^{k}_{i}$	Vector unitario en la dirección del eje Z del sistema de referencia del cuerpo i expresado en el sistema de referencia p.
k	Rama que se ha seguido a lo largo del mecanismo.

Si las velocidades lineal y angular del cuerpo i en el sistema de referencia p (Figura 1.11) son iguales al seguir la rama 1 o la rama 2, las ecuaciones de restricción de velocidad están definidas como:

$$\begin{bmatrix} {}^{p}\psi^{1}_{i} & {}^{p}\psi^{k}_{i-1} & \cdots & {}^{p}\psi^{1}_{1} & -{}^{p}\psi^{2}_{i} & -{}^{p}\psi^{2}_{i-1} & \cdots & -{}^{p}\psi^{2}_{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}^{1}_{i} \\ \dot{q}^{1}_{i-1} \\ \vdots \\ \dot{q}^{1}_{1} \\ \dot{q}^{2}_{i} \\ \dot{q}^{2}_{i-1} \\ \vdots \\ \dot{q}^{2}_{1} \end{bmatrix} = \vec{0}_{6\times1}$$

Ec. 1.11

Al analizar la Ec. 1.11 con respecto a la Ec. 1.8, la matriz $A(\vec{q})$ se define como:

$$A(\vec{q}) = \begin{bmatrix} {}^{p}\psi^{1}_{i} & {}^{p}\psi^{k}_{i-1} & \cdots & {}^{p}\psi^{1}_{1} & -{}^{p}\psi^{2}_{i} & -{}^{p}\psi^{2}_{i-1} & \cdots & -{}^{p}\psi^{2}_{1} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.12

En robots paralelos, las ecuaciones de restricción de velocidad (Ec. 1.8) pueden ser separadas en función de las variables generalizadas independientes y dependientes,

permitiendo establecer una relación entre las velocidades generalizadas dependientes (articulaciones pasivas) e independientes (articulaciones activas), así:

$$A_i\dot{\vec{q}}_i + A_d\dot{\vec{q}}_d = 0 \equiv \dot{\vec{q}}_d = -{A_d}^{-1}A_i\dot{\vec{q}}_i$$

Ec. 1.13

Donde:

A_i	Matriz Jacobiana de las variables q independientes ($mxGDL$).
A_d	Matriz Jacobiana de las variables q dependientes (mxm).

1.2.5. Restricciones cinemáticas de aceleración

Al derivar la Ec. 1.8 se obtendrá las expresiones de restricción para la aceleración, es decir el sistema de ecuaciones:

$$A(\vec{q}).\ddot{\vec{q}}(t) - \vec{b} = \vec{0}$$

Ec. 1.14

Donde:

$\ddot{\vec{q}}(t)$	Vector $(n \times 1)$ de aceleraciones generalizadas.
$\vec{b}$	Vector $(n \times 1)$ de términos no dependientes de $\ddot{\vec{q}}(t)$.

De acuerdo con Farhat (2006), el vector $\vec{b}$ en una rama k está definido como:

$$\vec{b}^k = \begin{bmatrix} {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{k^*} + {}^i\vec{\omega}_i^k \times \left({}^i\vec{\omega}_i^k \times {}^i\vec{r}_{O_i^k p}\right) + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{k^*} \times {}^i\vec{r}_{O_i^k p} \\ {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{k^*} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.15

Donde:

${}^i\vec{\omega}_i^k$	Velocidad angular absoluta del cuerpo i, en el sistema de referencia i.
${}^i\vec{r}_{O_i^k p}$	Vector de posición entre el punto O_i^k y el punto p sobre el cuerpo i expresada en el sistema de referencia i.
${}^{i-1}\vec{r}^{k}_{O_{i-1}O_i}$	Vector de posición entre el punto O_{i-1}^k y el punto O_i^k expresada en el sistema de referencia $i-1$.
ρ_i^k	Tipo de articulación, $\rho_i^k = 1$ (par de revolución) o $\rho_i^k = 0$ (par prismático).

${}^{i}\vec{z}_i^k$	Vector unitario en la dirección del eje Z del sistema de referencia del cuerpo i expresado en el sistema de referencia i. Generalmente se tiene que ${}^{i}\vec{z}_i^k = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$
k	Rama que se ha seguido a lo largo del mecanismo.

El termino ${}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{k^*}$, de la Ec. 1.15, representa la aceleración angular absoluta del cuerpo i expresada en el sistema de referencia i, después de eliminar las aceleraciones generalizadas $\ddot{\vec{q}}(t)$ de la expresión recursiva determinada por Provenzano (2001), así:

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^k &= {}^{i}R_{i-1}^k \; {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}^k + \left({}^{i}\vec{z}_i^k \cdot \ddot{q}_i^k + {}^{i}R_{i-1}^k \; {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^k \times \left({}^{i}\vec{z}_i^k \cdot \dot{q}_i^k \right) \right) \rho_i^k \\
{}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{k^*} &= {}^{i}R_{i-1}^k \; {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}^{k^*} + \left({}^{i}R_{i-1}^k \; {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^k \times \left({}^{i}\vec{z}_i^k \cdot \dot{q}_i^k \right) \right) \rho_i^k
\end{aligned}
$$

Ec. 1.16

Por otro lado, ${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{k^*}$ indica la aceleración lineal absoluta del punto O_i^k expresado en el sistema de referencia i, después de anular las aceleraciones generalizadas $\ddot{\vec{q}}(t)$:

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^k = {}^{i}R_{i-1}^k \Big(& {}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}}^k + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^k \times \left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^k \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}O_i}^k \right) + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}^k \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}O_i}^k \Big) + (1 \\
& - \rho_i^k)\left({}^{i}\vec{z}_i^k \cdot \ddot{q}_i^k + 2\left({}^{i}\vec{\omega}_i^k \times {}^{i}\vec{z}_i^k \cdot \dot{q}_i^k \right) \right) \\
{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{k^*} = {}^{i}R_{i-1}^k \Big(& {}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}}^{k^*} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^k \times \left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^k \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}O_i}^k \right) + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}^{k^*} \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}O_i}^k \Big) + 2(1 \\
& - \rho_i^k)\left({}^{i}\vec{\omega}_i^k \times {}^{i}\vec{z}_i^k \cdot \dot{q}_i^k \right)
\end{aligned}
$$

Ec. 1.17

1.2.6. Ecuaciones explicitas de Gibbs-Appell para robots de lazo cerrado

De acuerdo con Provenzano (2001), la dinámica de un robot de cadena cinemática abierta, con n solidos rígidos, puede ser expresado mediante ecuaciones de Gibbs-Appell como:

$$
\tau_k = \sum_{i=k}^{n} m_i \cdot {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{G_i}^T \cdot \frac{\partial {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k} + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot {}^{i}I_{G_i} \cdot \left(\frac{\partial {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right)^T \cdot \left[{}^{i}\vec{\omega}_i \times \left({}^{i}I_{G_i} \cdot {}^{i}\vec{\omega}_i \right) \right]
$$

Ec. 1.18

Donde:

τ_k	Fuerza o par generalizado de la articulación k.
$\mathrm{m_i}$	Masa del cuerpo i.
${}^{i}I_{G_i}$	Tensor de inercia de la barra i con respecto al eje centroidal de la barra i, en el sistema de referencia i.

${}^{i}\ddot{\vec{r}}_{G_i}$ Aceleración lineal del centro de gravedad del cuerpo i expresada en el sistema de referencia i.

Mata, Benimeli, Farhat & Valera (2005), partiendo de la Ec. 1.18 y de las expresiones recursivas establecidas por Benimeli (2005) para las derivadas parciales $\frac{\partial {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial \ddot{q}_k}$ y $\frac{\partial {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{G_i}}{\partial \ddot{q}_k}$, han desarrollado expresiones explicitas para las fuerzas generalizadas en pares de tipo revolución (R) y prismático (P), así:

$$\tau_k = \begin{cases} {}^{k}\vec{Z}_k^T \cdot \sum_{i=k}^{n} {}^{k}R_i \cdot \left\{ {}^{i}\hat{\eta}_i \cdot {}^{i}\vec{I}_i + \left({}^{i}\tilde{r}_{O_kO_i}\, {}^{i}\tilde{\eta}_i - {}^{i}\tilde{\ddot{r}}_{O_i} \right) \cdot m_i\, {}^{i}\vec{r}_{O_iG_i} + {}^{i}\tilde{r}_{O_kO_i}\, {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} \cdot m_i \right\} & Si\ k\ es\ R \\ {}^{k}\vec{Z}_k^T \cdot \sum_{i=k}^{n} {}^{k}R_i \cdot \left(m_i \cdot {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^{i}\tilde{\eta}_i \cdot m_i\, {}^{i}\vec{r}_{O_iG_i} \right) & Si\ k\ es\ P \end{cases}$$

Ec. 1.19

Como se puede observar en la Ec. 1.19 en pares prismáticos la fuerza externa que debe ejercer, únicamente se ve afectada por los parámetros gravitacionales y no por los parámetros de inercia. El término ${}^{i}\vec{I}_i$ agrupa de forma vectorial los términos del tensor de inercia de la barra i con respecto al sistema de referencia i, es decir:

$${}^{i}I_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \approx {}^{i}\vec{I}_i = [I_{xx} \quad I_{xy} \quad I_{xz} \quad I_{yy} \quad I_{yz} \quad I_{zz}]^T$$

Ec. 1.20

Por otro lado, los términos ${}^{i}\hat{\eta}_i$ y ${}^{i}\tilde{\eta}_i$ de la Ec. 1.19 se determinan por:

$${}^{i}\hat{\eta}_i = \left({}^{i}\dot{\hat{\omega}}_i + {}^{i}\tilde{\omega}_i + {}^{i}\hat{\omega}_i \right) \ y \ {}^{i}\tilde{\eta}_i = \left({}^{i}\dot{\tilde{\omega}}_i + {}^{i}\tilde{\omega}_i \cdot {}^{i}\tilde{\omega}_i \right)$$

Ec. 1.21

El tensores antisemíticos $\tilde{\omega}$ se definen como:

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ec. 1.22

Y $\hat{\omega}$ se definen como:

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_x & 0 & \omega_x & \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & \omega_x & 0 & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix}$$

Ec. 1.23

En el trabajo de Provenzano (2001), la velocidad angular ($\vec{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$) se determina de forma recursiva como:

$$ {}^{i}\vec{\omega}_i = {}^{i}R_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} + \rho_i \cdot {}^{i}\vec{z}_i \cdot \dot{q}_i $$

Ec. 1.24

Donde:

${}^{\mathrm{i}}\mathrm{R}_{\mathrm{i}-1}$	Matriz de rotación que permite expresar las coordenadas del sistema de referencia $i-1$ en el sistema de referencia i. ${}^{\mathrm{i}}\mathrm{R}_{\mathrm{i}-1} = \left({}^{\mathrm{i}-1}\mathrm{R}_{\mathrm{i}}\right)^{-1}$
ρ_{i}	Tipo de articulación. De revolución $\rho_{\mathrm{i}} = 1$, y prismática $\rho_{\mathrm{i}} = 0$.
${}^{\mathrm{i}}\vec{\mathrm{z}}_{\mathrm{i}}$	Vector unitario del sistema de referencia i. ${}^{\mathrm{i}}\vec{\mathrm{z}}_{\mathrm{i}} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$

Además, la expresión que determina la aceleración angular (Provenzano, 2001) es:

$$ {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i = {}^{i}R_{i-1} \; {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} + \rho_i \cdot \left[{}^{i}\vec{z}_i \cdot \ddot{q}_i + \left({}^{i}R_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\right) \times \left({}^{i}\vec{z}_i \cdot \dot{q}_i\right)\right] $$

Ec. 1.25

Y el vector de aceleración en el origen de cada sistema de referencia (Provenzano, 2001) se define como:

$$ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} = {}^{i}R_{i-1} \cdot \left[{}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}} + {}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times \left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}O_i}\right) + {}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\vec{r}_{O_{i-1}O_i}\right] $$
$$ + (1-\rho_i) \cdot \left[{}^{i}\vec{z}_i \cdot \ddot{q}_i + \; 2\left({}^{i}\vec{\omega}_i \times {}^{i}\vec{z}_i \cdot \dot{q}_i\right)\right] $$

Ec. 1.26

Finalmente, la Ec. 1.19 permite expresar las fuerzas/pares generalizados en forma matricial (lineal con respecto a los parámetros inerciales) como:

$$ \vec{\tau} = K\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}\right) \cdot \vec{\Phi}_i $$

Ec. 1.27

Donde:

$\vec{\tau}$	Vector de fuerzas generalizadas ($nx1$).
$\mathrm{K}\left(\vec{\mathrm{q}}, \dot{\vec{\mathrm{q}}}, \ddot{\vec{\mathrm{q}}}\right)$	Matriz de observación del sistema para una configuración no especifica ($nx10n$).
$\vec{\Phi}_{\mathrm{i}}$	Vector que reagrupa los parámetros inerciales ($10nx1$).

En la Ec. 1.27 el vector $\vec{\Phi}_{\mathrm{i}}$ está estructurado como:

$$\vec{\Phi}_i = \left[\left[\underbrace{I_{xx_j} \quad I_{xy_j} \quad I_{xz_j} \quad I_{yy_j} \quad I_{yz_j} \quad I_{zz_j}}_{j=GDL,GDL-1,\ldots,1}\right]\left[\underbrace{mx_j \quad my_j \quad mz_j}_{j=GDL,GDL-1,\ldots,1}\right]\left[\underbrace{m_j}_{j=GDL,GDL-1,\ldots,1}\right]\right]^T$$

Ec. 1.28

Donde:

m_j	Masa del cuerpo $j-esimo$.
$[mx_j \quad my_j \quad mz_j]^T = \mathrm{m_j} \cdot {}^{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{O_jG_j}}$	Vector del primer momento de masa.

La investigación realizada por Mata, Benimeli, Farhat & Valera (2005), define la matriz $\mathrm{K}(\vec{\mathrm{q}}, \dot{\vec{\mathrm{q}}}, \ddot{\vec{\mathrm{q}}})$ como:

$$K(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) = D \cdot AB$$

Ec. 1.29

Donde:

$$\mathrm{AB} = [A \quad B_1 \quad B_2]$$

La matriz D, de la Ec. 1.29, se determina mediante:

$$D = \begin{bmatrix} \left(\partial^n \dot{\vec{\omega}}_n / \partial \ddot{q}_n\right)^T & 0_{1\times3} & \cdots & 0_{1\times3} \\ 0_{1\times3} & \left(\partial^{n-1} \dot{\vec{\omega}}_{n-1} / \partial \ddot{q}_{n-1}\right)^T & \cdots & 0_{1\times3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0_{1\times3} & 0_{1\times3} & & \left(\partial^1 \dot{\vec{\omega}}_1 / \partial \ddot{q}_1\right)^T \end{bmatrix}$$

Ec. 1.30

Donde $\left(\frac{\partial^j \dot{\vec{\omega}}_j}{\partial \ddot{q}_j}\right)^T = [0 \quad 0 \quad 1]$.

La matriz A (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005) se calcula mediante:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0_{3\times6} & \cdots & 0_{3\times6} \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,n-1} & \cdots & 0_{3\times6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{n,1} & A_{n,n-1} & & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.31

Donde los componentes de la matriz A, se calculan como:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{n-k+1,n-i+1} = {}^kR_i \cdot {}^i\hat{\eta}_i & Si\ k\ es\ R \\ A_{n-k+1,n-i+1} = 0_{3\times6} & Si\ k\ es\ P \end{array}\right\} i = k \ldots n$$

Ahora, la matriz B_1 de la Ec. 1.29 se establece así:

$$B_1 = \begin{bmatrix} {}^{n}\widetilde{H}_n & 0_{3\times3} & \cdots & 0_{3\times3} \\ {}^{n-1}\widetilde{H}_n & {}^{n-1}\widetilde{H}_{n-1} & \cdots & 0_{3\times3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ {}^{1}\widetilde{H}_n & {}^{1}\widetilde{H}_{n-1} & & {}^{1}\widetilde{H}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 1.32

Donde:

$$\left.\begin{array}{ll} {}^{k}\widetilde{H}_i = {}^{k}R_i \ ({}^{i}\tilde{r}_{O_kO_i} \ {}^{i}\tilde{\eta}_i - {}^{i}\ddot{\tilde{r}}_{O_i}) & Si \text{ k es R} \\ {}^{k}\widetilde{H}_i = {}^{k}R_i \ \cdot {}^{i}\tilde{\eta}_i & \text{Si k es P} \end{array}\right\} i = k \ldots n$$

Por otro lado, la matriz B_2 se determina mediante:

$$B_2 = \begin{bmatrix} {}^{n}\vec{h}_n & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \\ {}^{n-1}\vec{h}_n & {}^{n-1}\vec{h}_{n-1} & \cdots & \vec{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ {}^{1}\vec{h}_n & {}^{1}\vec{h}_{n-1} & & {}^{1}\vec{h}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 1.33

Los términos de la Ec. 1.33 se calculan así:

$$\left.\begin{array}{ll} {}^{k}\vec{h}_i = {}^{k}R_i \cdot {}^{i}\tilde{r}_{O_kO_i} \ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} & k{:}\,R \\ {}^{k}\vec{h}_i = {}^{k}R_i \ \cdot {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} & k{:}\,P \end{array}\right\} i = k \ldots n$$

Finalmente, las fuerzas/pares generalizados para robots de cadena cerrada, se establecen partiendo de la separación de los términos asociados a las variables generalizadas independientes y dependientes:

$$\vec{\tau}_i = K_i \cdot \vec{\Phi}_i \ \ y \ \ \vec{\tau}_d = K_d \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 1.34

Donde:

$\vec{\tau}_i$	Vector de fuerzas generalizadas independientes ($GDLx1$).
$\vec{\tau}_d$	Vector de fuerzas generalizadas dependientes ($mx1$).
K_i	Matriz de observación de las variables generalizadas independientes, para una configuración no especifica ($GDLx10n$).
K_d	Matriz de observación de las variables generalizadas dependientes, para una configuración no especifica ($mx10n$).

Partiendo de las ecuaciones explicitas de Gibbs-Appell para robots de cadena abierta, Farhat (2006) determina las fuerzas/pares generalizadas para un robot de cadena cerrada, al aplicar el principio de Gauss de la Mínima Acción, como:

$$\vec{\tau}_i - X^T \cdot \vec{\tau}_d = [K_i - X^T \cdot K_d] \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 1.35

Con $X = A_d^{-1} \cdot A_i$

Si las fuerzas generalizadas dependientes ($\vec{\tau}_d$) son pasivas, entonces la Ec. 1.35 se reduce a:

$$\vec{\tau}_i = [K_i - X^T \cdot K_d] \cdot \vec{\Phi}_i \equiv \vec{\tau}_i = K(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 1.36

Para determinar la matriz de observación de una determinada trayectoria, se debe aplicar la Ec. 1.36 a los distintos puntos (n_{pts}) de la trayectoria, es decir:

$$\begin{bmatrix} [\vec{\tau}_i]_1 \\ [\vec{\tau}_i]_2 \\ \vdots \\ [\vec{\tau}_i]_{n_{pts}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_i & -X^T \cdot K_d]_1 \\ [K_i & -X^T \cdot K_d]_2 \\ & \vdots \\ [K_i & -X^T \cdot K_d]_{n_{pts}} \end{bmatrix} \cdot \vec{\Phi}_i \equiv \vec{\tau} = W \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 1.37

Donde:

W Matriz de observación para una trayectoria definida ($(n_{pts} \cdot GDL) \times 10n$).

$\vec{\tau}$ Vector de fuerzas/pares generalizadas para una trayectoria definida ($(n_{pts} \cdot GDL) \times 1$).

1.3. Modelos de fricción

Los modelos de fricción se clasifican en dos grandes grupos:

- Modelo de fricción estática: Se caracterizan por no modelar la fuerza de fricción en el intervalo de velocidad nula, lo que genera información minina de esta zona.
- Modelo de fricción dinámica: Buscan simular el comportamiento de la fricción en el intervalo de velocidad nula. Este tipo de modelo es más complejo que los modelos de fricción estáticos.

1.3.1. Modelo de fricción estática

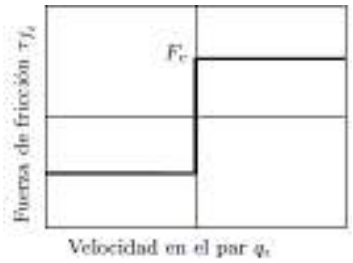


Figura 1.12. Modelo de fricción de Coulomb.
(Fuente: (Díaz, 2009))

El modelo más simple de fricción estática (Díaz, 2009), es el modelo de Coulomb (Figura 1.12), donde la fuerza de fricción se relaciona directamente con la carga normal, así:

$$\tau_{f_i} = F_{c_i} \cdot signo(\dot{q}_i)$$

Ec. 1.38

Donde:

τ_f Fuerza de fricción para la articulación i.

F_{c_i} Coeficiente de Coulomb de la articulación i.

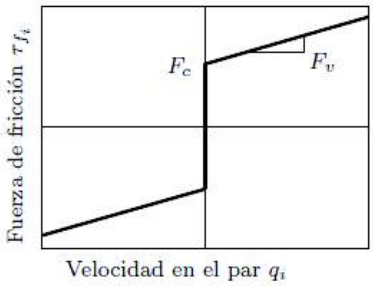


Figura 1.13. Modelo de fricción de Coulomb y viscoso.
(Fuente: (Díaz, 2009))

Cuando las articulaciones están lubricadas, al modelo de Coulomb se le añade la relación lineal conocida como fricción viscosa (Figura 1.13), esto origina la siguiente expresión:

$$\tau_{f_i} = F_{c_i} \cdot signo(\dot{q}_i) + F_{v_i} \cdot \dot{q}_i$$

Ec. 1.39

Donde:

F_{v_i} Coeficiente de fricción viscosa de la articulación i.

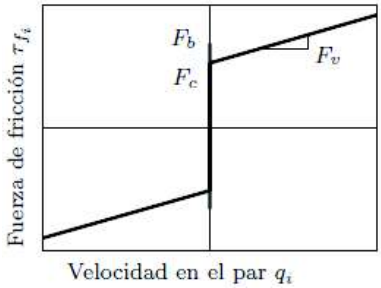


Figura 1.14. Modelo de fricción estática, de Coulomb y viscoso.
(Fuente: (Díaz, 2009))

El valor de la fricción en el intervalo de detención (velocidad relativa nula entre los cuerpos en contacto), puede tomar valores mayores al de la fricción de Coulomb. Para incluir esta fuerza en el intervalo de inicio de movimiento (Figura 1.14) se establece la siguiente ecuación:

$$\tau_{f_i} = \begin{cases} F_{b_i} & Si\ \dot{q}_i = 0 \\ F_{c_i} \cdot signo(\dot{q}_i) + F_{v_i} \cdot \dot{q}_i & Si\ \dot{q}_i \neq 0 \end{cases}$$

Ec. 1.40

Donde:

F_{b_i} Fuerza de fricción estática de la articulación i.

De acuerdo con Díaz (2009), el modelo de fricción más empleado para la identificación de parámetros inerciales y de fricción en robots paralelos de 4GDL y 6GDL, es el mostrado en la Ec. 1.39. Su frecuente uso se debe a que las fuerzas de fricción generalizadas de las articulaciones independientes se pueden expresar de forma lineal como:

$$\vec{\tau}_{f_i} = K_f(\dot{q}_i) \cdot \vec{\Phi}_f$$

Ec. 1.41

Con $\vec{\Phi}_f = \left[\underbrace{F_{v_j} \quad F_{c_j}}_{\mathrm{j=GDL,GDL-1,\ldots,1}} \right]^T$

1.4. Modelo dinámico lineal considerando modelos de fricción

El modelo de fricción puede ser incorporado al modelo dinámico del robot paralelo substrayendo las fuerzas de fricción de las fuerzas/pares generalizados determinados en la Ec. 1.36. Esta diferencia se puede realizar ya que las fuerzas generalizadas y las

fuerzas de fricción son modeladas en función de las mismas coordenadas generalizadas. Analíticamente se tiene:

$$\vec{\tau_i} - \vec{\tau}_{f_i} = K(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 1.42

Si el modelo de fricción es de tipo lineal, el modelo dinámico del robot paralelo considerando la fricción en forma matricial (Farhat, 2006) está definido como:

$$\vec{\tau} = K^*(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \cdot \vec{\Phi}$$

Ec. 1.43

En este caso $K^*(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$ se obtiene recombinando las matrices $K(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$ y $K_f(\dot{q}_i)$ de modo que los parámetros inerciales y de fricción se distribuyan en $\vec{\Phi} = [\vec{\Phi}_i \quad \vec{\Phi}_f]^T$. Por otro lado, la matriz de observación del modelo dinamico considerando modelos de fricción lineal, está definida como:

$$\vec{\tau} = W^* \cdot \vec{\Phi}$$

Ec. 1.44

1.5. Procedimiento de identificación de parámetros base

El proceso de identificación de parámetros basé (Figura 1.15) parte de las trayectorias de identificación generadas mediante métodos numéricos (sección 1.7), al introducir estas trayectorias de identificación (generadas solo para las variables generalizadas independientes q_i) en el modelo dinámico lineal con modelos de fricción (sección 1.4) se obtiene la matriz de observación para la trayectoria de identificación (W^*).

La matriz W^* junto con los parámetros $\vec{\Phi}$, permiten determinar los parámetros base mediante la metodología de descomposición de valores singulares (SVD) (ver sección 1.6). Posteriormente, se calcula las fuerzas generalizadas en las juntas del robot ($\vec{\tau}_m$), mediante los parámetros base determinados (sección 1.6).

Finalmente, para reducir el error de estimación del modelo reducido, en cada articulación independiente del robot, se comparan las fuerzas generalizadas calculadas ($\vec{\tau}_m$) con las fuerzas generalizadas medidas ($\vec{\tau}_s$), en un robot real o en su defecto en una simulación equivalente al real (Ver Figura 1.15). Luego de esta comparación, los parámetros base son ajustados para disminuir el error entre $\vec{\tau}_m$ y $\vec{\tau}_s$ a través de un análisis de factibilidad física de los parámetros base, es decir, se determina si los parámetros base ajustados son físicamente posibles.

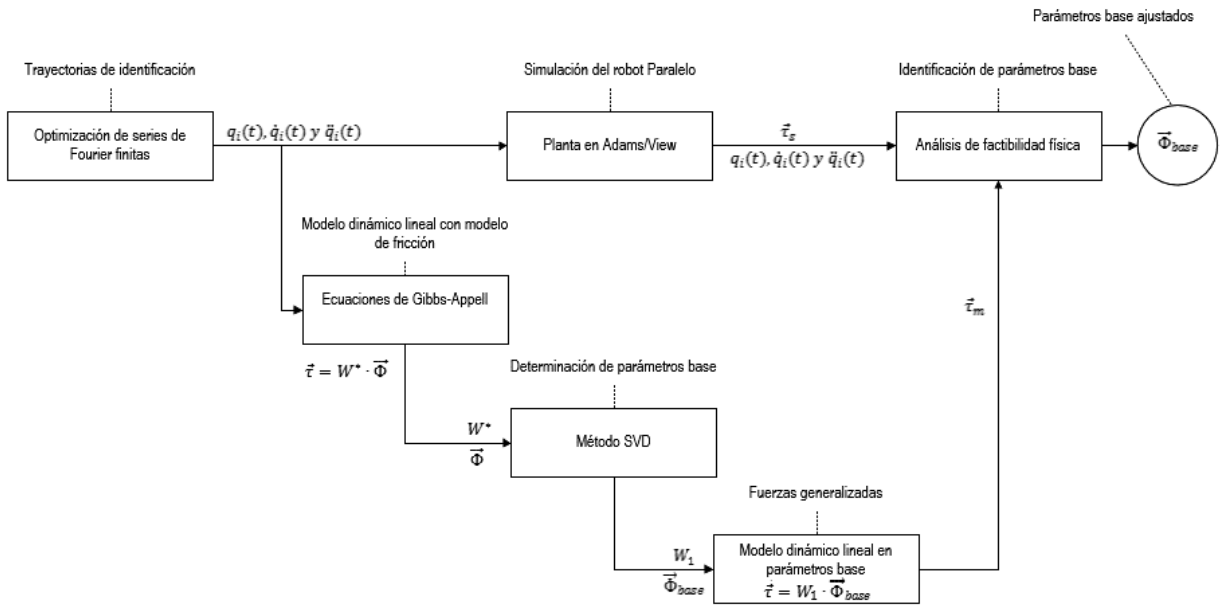


Figura 1.15. Proceso de identificación de parámetros base.
(Fuente: Autor)

1.5.1. Factibilidad física

Yoshida & Khalil (2000), aseguran que la factibilidad física de los parámetros base identificados es indispensable en la resolución del problema dinámico inverso, debido a que si los parámetros no son físicamente factibles la matriz de masas podría no invertirse y ocasionar una falla en la resolución.

El análisis de esta factibilidad física se realiza mediante las siguientes expresiones:

$$m_i > 0$$

Ec. 1.45

$$I_{xx}{}^g > 0$$

Ec. 1.46

$$I_{xx}{}^g I_{yy}{}^g - \left(I_{xy}{}^g\right)^2 > 0$$

Ec. 1.47

$$I_{xx}{}^g I_{yy}{}^g I_{zz}{}^g + 2I_{xy}{}^g I_{xz}{}^g I_{yz}{}^g - I_{xx}{}^g\left(I_{yz}{}^g\right)^2 - I_{yy}{}^g(I_{xz}{}^g)^2 - I_{zz}{}^g\left(I_{xy}{}^g\right)^2 > 0$$

Ec. 1.48

Donde

m_i Masa de la barra i.

$I_{kl}{}^g$ Componentes de la matriz inercial ${}^iI_i{}^g$ con respecto al sistema de referencia asignado al centro de gravedad de la barra i.

1.6. Parámetros Base

En el proceso de identificación, con base en la estructura del robot en análisis la Ec. 1.44 nos indica los parámetros que no influyen en el comportamiento dinámico del robot, y los que en combinaciones lineales si influyen. Los parámetros inerciales que no afectan a la dinámica del robot son las columnas nulas de la matriz de observación (W^*). Además, el análisis de la dependencia entre columnas de W^* permite determinar el número de parámetros mínimos (parámetros base) necesarios para simplificar o reducir el modelo dinámico lineal con respecto a los parámetros $\vec{\Phi}$ (Grotjahn & Heimann, 2003).

El número de parámetros base depende del rango de la matriz W^* y de la estructura mecánica del robot. Existen dos procedimientos para determinar los parámetros base, el método simbólico y el método numérico; el método numérico es el más empleado en identificación de parámetros y se puede realizar mediante Descomposición en Valores Singulares (SVD) o Factorización QR (Benimeli, 2005).

El proceso de factorización QR requiere menos recursos computacionales, sin embargo, el proceso SVD tiene una mejor precisión en estimación de parámetros base con mal acondicionamiento numérico de los datos, por lo que, en identificación de parámetros base el método más usado es el SVD.

La identificación de parámetros base (Díaz, 2009) busca los parámetros que minimicen la diferencia entre la respuesta del modelo dinámico y las mediciones experimentales de las fuerzas generalizadas.

$$s(\vec{\Phi}) = \sum_{j=1}^{GDL} \sum_{i=1}^{n_{pts}} \left(K_j(\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i, \ddot{\vec{q}}_i)\vec{\Phi} - \vec{\tau}_{j,i}\right)^2$$

Ec. 1.49

Donde:

j Identificador de la fuerza generalizada ejecutada por el actuador.

Para un modelo lineal sobre determinado, la solución $\vec{\Phi}^*$ que minimiza el error cuadrático de la Ec. 1.49, se puede usar únicamente cuando W tiene rango completo, es decir:

$$\vec{\Phi}^* = \left(W^{*T} W^*\right)^{-1} \cdot W^{*T} \cdot \vec{\tau}$$

Ec. 1.50

1.6.1. Método de descomposición en valores singulares (SVD)

Las diferentes configuraciones que representa la Ec. 1.44 generalmente son seleccionadas en intervalos de tiempo t_i durante la trayectoria especifica que desarrolla el robot, por lo cual se obtiene el sistema sobredeterminado:

$$\vec{\tau}_{n\times 1} = W_{n\times m} \cdot \vec{\Phi}_{m\times 1}$$

Ec. 1.51

Donde $n \geq m$ y las columnas nulas de la matriz W^* han sido eliminadas. En la Ec. 1.51 se ha eliminado el * por facilidad de representación únicamente.

De acuerdo con Farhat (2006), el objetivo de la Descomposición en Valores Singulares (SVD) es encontrar un sistema reducido (simplificado) equivalente tal que:

$$W \cdot \vec{\Phi} = W_b \cdot \vec{\Phi}_b$$

Ec. 1.52

Para lograr dicho objetivo la matriz W se puede descomponer así:

$$W_{n\times m} = U_{n\times n} \cdot S_{n\times m} \cdot V^T_{m\times m}$$

Ec. 1.53

Donde:

U y V	Matrices ortogonales.
S	Matriz diagonal con los valores singulares de W, ordenados en forma descendente ($s_1 \geq s_2 \ldots \geq s_m \geq 0$).

Si el sistema mecánico en análisis tiene dependencia lineal, el rango (b) de la matriz W es menor a m, produciendo $m - b$ valores singulares iguales a cero. Sin embargo, debido a la precisión computacional los valores singulares que deberían ser cero son valores cercanos a cero; la precisión (ε_c) del computador se usa para determinar los valores singulares que se considerarán cero, es decir $s_i = 0 \; si \; s_i < n \times \varepsilon_c \times s_1$. Entonces, al reordenar la descomposición SVD de la matriz W (Ec. 1.53) se tiene:

$$W_{n\times m} \cdot \begin{bmatrix} V_{1_{m\times b}} & V_{2_{m\times(m-b)}} \end{bmatrix} = U_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} S_{b\times b} & 0_{b\times(m-b)} \\ 0_{(n-b)\times b} & 0_{(n-b)\times(m-b)} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.54

De la expresión anterior se deduce que:

$$W \cdot V_2 = 0_{n\times(m-b)}$$

Ec. 1.55

Farhat (2006), afirma que las columnas de V_2 definen las combinaciones lineales buscadas en W. Ya que el rango de W es b, entonces en V_2 existe una submatriz V_{21} con b filas dependientes, y una submatriz V_{22} que tiene $m-b$ filas independientes, es decir, la submatriz V_{22} es de rango completo. Mediante la matriz de permutación P, la matriz V_2 se puede ordenar como:

$$P^T V_2 = \begin{bmatrix} V_{21_{b\times(m-b)}} \\ V_{22_{(m-b)\times(m-b)}} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.56

La matriz V_{22} se puede obtener a partir de la primera fila de la matriz V_2 (Díaz, 2009), añadiendo filas sucesivas, bajo la condición que la fila añadida incremente el rango de la matriz resultante (fila independiente de las anteriores). La matriz P se forma al mismo tiempo que se añaden las filas linealmente independientes.

Al aplicar P a la Ec. 1.55 se tiene:

$$WPP^T V_2 = \begin{bmatrix} W_{1_{n\times b}} & W_{2_{n\times(m-b)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21_{b\times(m-b)}} \\ V_{22_{(m-b)\times(m-b)}} \end{bmatrix} = 0_{n\times(m-b)}$$

Ec. 1.57

A partir de la Ec. 1.57, Díaz (2009) establece:

$$W_2 = W_1 \beta$$

Ec. 1.58

Donde:

$\beta = -V_{21} {V_{22}}^{-1}$

Si se aplica la matriz P en la igualdad de la Ec. 1.51 se tiene que :

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix}$$

Ec. 1.59

Ahora, con una solución arbitraria $\vec{\Phi}_b$, se debe cumplir la igualdad:

$$[W_1 \quad W_2]\begin{bmatrix}\vec{\Phi}_1\\ \vec{\Phi}_2\end{bmatrix} = [W_1 \quad W_2]\begin{bmatrix}\vec{\Phi}_{b1}\\ \vec{\Phi}_{b2}\end{bmatrix}$$

Ec. 1.60

Al substituir la Ec. 1.58 en la Ec. 1.60 se tiene:

$$W_1[I_{b\times b} \quad \beta]\begin{bmatrix}\vec{\Phi}_1\\ \vec{\Phi}_2\end{bmatrix} = W_1[I_{b\times b} \quad \beta]\begin{bmatrix}\vec{\Phi}_{b1}\\ \vec{\Phi}_{b2}\end{bmatrix}$$

Ec. 1.61

Donde:

$I_{b\times b}$ Matriz identidad.

De la Ec. 1.61 Farhat (2006) se deduce que:

$$\vec{\Phi}_{b1} = \vec{\Phi}_1 + \beta\left(\vec{\Phi}_2 - \vec{\Phi}_{b2}\right)$$

Ec. 1.62

Se puede ver que $\vec{\Phi}_{b1}$ es una combinación lineal de los parámetros $\vec{\Phi}$ y del vector $\vec{\Phi}_{b2}$, donde para cualquier valor de $\vec{\Phi}_{b2}$ se cumple la Ec. 1.52. La solución de los parámetros base se obtiene para $\vec{\Phi}_{b2} = 0$, matemáticamente es:

$$\vec{\Phi}_{base} = [I_{b\times b} \quad \beta_{b\times(m-b)}]P^T\vec{\Phi}$$

Ec. 1.63

Finalmente, el modelo expresado en parámetros base (modelo reducido) para una trayectoria de movimiento se puede expresar como:

$$\vec{\tau} = W_1 \cdot \vec{\Phi}_{base}$$

Ec. 1.64

1.6.2. Método de factorización QR

En la investigación de Benimeli (2005) , la factorización QR establece que la matriz W^* de la Ec. 1.44 se puede representar como:

$$W_{n\times m} \cdot \Pi_{m\times m} = Q_{n\times n} \cdot \mathrm{R}_{n\times m}$$

Ec. 1.65

Con:

$$R = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec. 1.66

Donde:

W	Representación de la matriz W^* en esta sección.
Π	Matriz de permutación.
Q	Matriz ortogonal.

En la Ec. 1.65 $n \geq m$. La matriz de permutación Π ocasiona que los elementos de la diagonal principal de R estén en orden decreciente.

Dentro de la matriz R, T_1 es una matriz triangular de dimensiones $b \times b$ donde $b < m$ es el rango de la matriz W. Para determinar el rango b de la matriz W se parte de la búsqueda de la matriz T_1, donde los términos de la diagonal principal de R son cero si $R_{i,i} < n \cdot |\mathrm{T}_{11}| \cdot \varepsilon_c$, debido al error de redondeo computacional.

Si se considera una matriz de permutación P que permita separar los términos dependientes e independientes de la matriz W, entonces la factorización QR se expresa:

$$\begin{bmatrix} W_{1_{n\times b}} & W_{2_{n\times(m-b)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1_{n\times b}} & Q_{2_{n\times(n-b)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec. 1.67

De la expresión anterior se determina la relación de dependencia lineal:

$$W_2 = W_1 \cdot \kappa$$

Ec. 1.68

Con $\kappa = {T_1}^{-1} \cdot T_2$

Al aplicar una solución arbitraria $\vec{\Phi}_d$ en la Ec. 1.51 (Benimeli, 2005), se cumple:

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{d1} \\ \vec{\Phi}_{d2} \end{bmatrix}$$

Ec. 1.69

Al reemplazar la Ec. 1.68 en la Ec. 1.69 se obtiene una relación entre la solución $\vec{\Phi}_d$ y los parámetros $\vec{\Phi}$:

$$\vec{\Phi}_{d1} = \vec{\Phi}_1 + \kappa\left(\vec{\Phi}_2 - \vec{\Phi}_{d2}\right)$$

Ec. 1.70

Una posible solución del sistema es considerar los parámetros linealmente independientes como cero ($\overrightarrow{\Phi}_{d2} = 0$), con lo cual la solución de los parámetros base es:

$$\overrightarrow{\Phi}_{base} = [I_{b\times b} \quad \kappa_{b\times(m-b)}]P^T\overrightarrow{\Phi}$$

Ec. 1.71

Finalmente, el modelo expresado en parámetros base se puede expresar como:

$$\vec{\tau} = W_1 \cdot \overrightarrow{\Phi}_{base}$$

Ec. 1.72

1.7. Trayectorias de identificación

La identificación de parámetros consiste en ajustar la respuesta del modelo dinámico al comportamiento obtenido en un experimento sobre el robot analizado; esto implica que cada trayectoria (trayectoria de excitación) que ejerza el robot corresponde a una respuesta dinámica especifica (Fuerzas medidas). Díaz (2009) asegura que la trayectoria ejecutada puede excitar parámetros inerciales que no contribuyan la respuesta dinámica, por lo tanto, la trayectoria que sigue el robot afecta la precisión en la identificación de parámetros base. Las trayectorias de excitación en este trabajo se obtienen mediante procesos de optimización para aumentar la precisión con la que se realiza la identificación de parámetros y por lo que se denominan “trayectorias óptimas”.

1.7.1. Función objetivo

En el proceso de generación de trayectorias óptimas (Díaz, 2009), la función objetivo S es la expresión matemática que se desea minimizar, con el objetivo de cumplir las restricciones g, es decir:

$$Minimizar\ S(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$$
$$sujeto\ a\ g(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) \leq 0$$

Ec. 1.73

Donde:

$S(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$ Función objetivo.

$g(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$ Restricciones del movimiento permitido en los actuadores.

En la Tabla 1.3 se muestran los criterios para establecer la función S en generación de trayectorias óptimas. En la investigación de Renaud y otros (2006), se determina que los numérales 2 y 5 son los criterios más empleados en generación de trayectorias de

excitación para robots paralelos. El criterio del numeral 5 se recomienda cuando se tiene información de las características del ruido en las mediciones

Tabla 1.3. Criterios para establecer la función objetivo de trayectorias óptimas

N°	Criterio
1	$\frac{1}{s_{min}(I^*)}$
2	$\kappa(W) = \frac{s_{max}}{s_{min}}$
3	$w_1\kappa(W) + w_2\frac{\lvert W_{j,imax}\rvert}{\lvert W_{j,imin}\rvert}$
4	$w_1\kappa(W) + \frac{1}{s_{min}(I^*)}$
5	$-\log(\det(I^*))$

(Fuente: (Díaz, 2009))

En dicha tabla κ determina el número de condición de una matriz definida como la relación entre el valor singular máximo (s_{max}) y mínimo (s_{min}) de una matriz W. El número de condición nos indica en que grado se trasmite el error de las mediciones al resultado final (Díaz, Valera, Mata, & Valles, 2013), es decir un κ muy alto hace que el error en las lecturas de posición, velocidad y aceleración produzca un error aún mayor en la estimación de esfuerzos generalizados para las variables generalizadas independientes.

Por otro lado, I^* es la matriz de información relacionada con la desviación estándar de la estimación de parámetros inerciales y se puede determinar mediante:

$$I^* = W^T \cdot W$$

Ec. 1.74

1.7.2. Método de generación de trayectorias

De acuerdo con Benimeli (2005) el método más adecuado para la generación de trayectorias de identificación de parámetros base, se fundamenta en series finitas de Fourier. Estas series armónicas se prefieren, por permitir generar trayectorias explicitas periódicas, que se pueden modificar al variar los parámetros de la serie de Fourier.

Farhat (2006), define la forma de la trayectoria de cada actuador (articulación independiente) en series finitas de Fourier está como:

$$q_i(t) = q_{i0} + \sum_{j=1}^{n_H} \left[\frac{a_{ij}}{2\pi \cdot f \cdot j} \sin(2\pi f \cdot j \cdot t) - \frac{b_{ij}}{2\pi \cdot f \cdot j} \cos(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right]$$

$$\dot{q}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_H} \left[a_{ij} \cos(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) + b_{ij} \sin(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right]$$

$$\ddot{q}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_H} \left[-2\pi \cdot f \cdot j \cdot a_{ij} \sin(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) + 2\pi \cdot f \cdot j \cdot b_{ij} \cos(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right]$$

Ec. 1.75

Con:

$$f = \frac{1}{T_f}$$

Donde:

f	Frecuencia fundamental de la serie de Fourier.
T_f	Tiempo de duración de la trayectoria.
n_H	Numero de armónicos empleados para generar la trayectoria.
q_{i0}	Posición de las articulaciones independientes en $t = 0$.
a_{ij} y b_{ij}	Parámetros de la serie de Fourier. Con $i = 1 \ldots GDL$ y $j = 1 \ldots n_H$.
$q_i, \dot{q}_i$ y $\ddot{q}_i$	Posición, velocidad y aceleración de las articulaciones independientes.

En el proceso de generación de trayectorias optimas, q_{i0}, a_{ij} y b_{ij} son los parámetros de la serie de Fourier que se van ajustar (optimizar), en la Ec. 1.75 cada serie de Fourier contiene $n_H + 1$ parámetros, generalmente el vector de parámetros que definen las series finitas de Fourier se agrupan como $\vec{\delta}_p$.

Los criterios de ajuste para la optimización de las trayectorias de identificación (series finitas de Fourier) de las articulaciones activas, son los límites mecánicos de posición, velocidad y aceleración de las articulaciones activas del robot (Farhat, 2006), es decir, que estos límites conforman la función g, de la Ec. 1.73.

1.7.3. Limites mecánicos de las articulaciones activas

En una articulación de tipo prismática que sigue un movimiento definido por la Ec. 1.75, los límites mecánicos se establecen por la carrera, la velocidad y aceleración indicadas en las especificaciones de fábrica del motor y el sistema de trasmisión. En el caso específico del sistema sobredeterminado conformado por n_{pts}, se debe verificar en cada

punto que los actuadores no sobrepasen los límites permitidos. Farhat (2006) define estos límites mecánicos como:

$$lb_{p_i} \leq q_{i0} + \sum_{j=1}^{n_H} \left[\frac{a_{ij}}{2\pi \cdot f \cdot j} \sin(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) - \frac{b_{ij}}{2\pi \cdot f \cdot j} \cos(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right] \leq ub_{p_i}$$

$$lb_{v_i} \leq \sum_{j=1}^{n_H} \left[a_{ij} \cos(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) + b_{ij} \sin(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right] \leq ub_{v_i}$$

$$lb_{a_i} \leq \sum_{j=1}^{n_H} \left[-2\pi \cdot f \cdot j \cdot a_{ij} \sin(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) + 2\pi \cdot f \cdot j \cdot b_{ij} \cos(2\pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right] \leq ub_{a_i}$$

Ec. 1.76

Donde:

lb_{p_i}, ub_{p_i}	Límite inferior y superior de la posición del actuador i.
lb_{v_i}, ub_{v_i}	Límite inferior y superior de la velocidad del actuador i.
lb_{a_i}, ub_{a_i}	Límite inferior y superior de la aceleración del actuador i.

Al aplicar la Ec. 1.76 a toda la trayectoria, se obtendrá un total de $n_{pts}xGDL$ ecuaciones que representan los límites mecánicos de las articulaciones prismáticas. Al agrupar matemáticamente las ecuaciones antes mencionadas, tenemos:

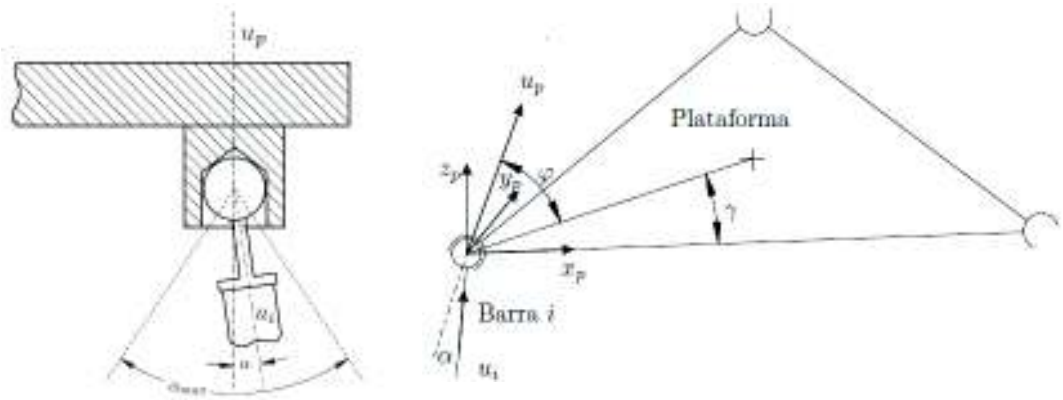
$$\overrightarrow{lb} \leq A_{x,y} \cdot \vec{\delta}_{p_n,1} \leq \overrightarrow{ub} \equiv A_{x,y} \cdot \vec{\delta}_{p_n,1} \leq \overrightarrow{b_l}$$

Ec. 1.77

Donde:

$\overrightarrow{lb}, \overrightarrow{ub}$	Vector de límites inferior y superior de posición, velocidad y aceleración en los actuadores.
$\overrightarrow{b_l}$	Vector que agrupa los vectores $\overrightarrow{lb}$ y $\overrightarrow{ub}$.
x	Filas de la matriz de restricciones, calculada $x = n_{pts} \times GDL$.
y	Columnas de la matriz de restricciones, calculada $y = (n_H + 1) \times GDL$.

1.7.4. Límites de las articulaciones esféricas



(a) (b)

Figura 1.16. Límites de una articulación esférica: (a) Corte transversal, (b) Vista general.
(Fuente: (Díaz, 2009))

La Figura 1.16a muestra el ángulo de trabajo de una articulación esférica α, medido entre el eje de simetría de la articulación esférica (p) y la barra conectada a la plataforma móvil (i). De acuerdo con Díaz (2009) α debe limitarse el máximo ángulo permitido por la articulación esférica ($^{\alpha_{max}}/_{2}$), matemáticamente se determina como:

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\vec{\mu}_p \cdot \vec{\mu}_i\right)$$

Ec. 1.78

Con:

$$\vec{\mu}_p = [\cos(\varphi)\cos(\gamma) \quad \cos(\varphi)\sin(\gamma) \quad \sin(\varphi)]^T$$

Donde:

$\vec{\mu}_p$ Vector unitario del eje de simetría de la articulación esférica respecto a la plataforma móvil.

$\vec{\mu}_i$ Vector unitario del eje paralelo al eslabón i unido a la plataforma móvil.

φ Ángulo medido entre el vector $\vec{\mu}_p$ y la plataforma móvil ($\varphi = 90°$).

γ Ángulo medido desde el eje x_p y la línea definida por el origen de la plataforma móvil y el centro de la articulación esférica (ver Figura 1.16b).

Para realizar el producto punto $\vec{\mu}_p \cdot \vec{\mu}_i$, ambos vectores deben ser expresados en el mismo sistema de coordenadas. Finalmente, la Ec. 1.78 no se puede expresar de forma explícita (ecuación no lineal), por lo que, para el proceso de optimización de trayectorias de identificación los límites de las articulaciones esféricas se expresa como:

$$c(\vec{\delta})_{(n_{pts} \cdot GDL)x1} \leq 0$$

Ec. 1.79

1.7.5. Límites del espacio de trabajo

De acuerdo con Pond & Carretero (2007), los límites del espacio de trabajo de un robot paralelo están relacionadas con la resolución de las velocidades generalizadas dependientes, específicamente se dice que se pueden evitar puntos de bloqueo si la matriz A_d es invertible. En este sentido, el espacio de trabajo se puede definir como el máximo valor que puede ser asignado al número de condición, entonces las limitaciones del espacio de trabajo se pueden establecer como:

$$\kappa(A_d) \leq J_{MAX}$$

Ec. 1.80

Donde:

J_{MAX} Valor máximo permitido para evitar singularidades.

1.7.6. Proceso de optimización de trayectorias

De acuerdo con Díaz (2009), el proceso de optimización consiste en minimizar de la función objetivo (ver sección 1.7.1), sujeto a las limitaciones lineales (sección 1.7.3 y 1.7.4) y las limitaciones no lineales (sección 1.7.5). De forma analítica se tiene:

$$Min\, f(\vec{\delta}_p)\ \ \vec{\delta}_p \in R^{n_p}$$

$$sujeto\ a \begin{cases} c(\vec{\delta}_p) \leq 0 \\ A\vec{\delta}_p \leq \overrightarrow{b_l} \end{cases}$$

Ec. 1.81

Donde, la función objetivo $f(\vec{\delta}_p)$ se establece mediante la Tabla 1.3. En la Figura 1.17 se muestra el proceso de optimización para trayectorias de identificación de parámetros tomando como función objetivo el número de condición $\kappa(W)$.

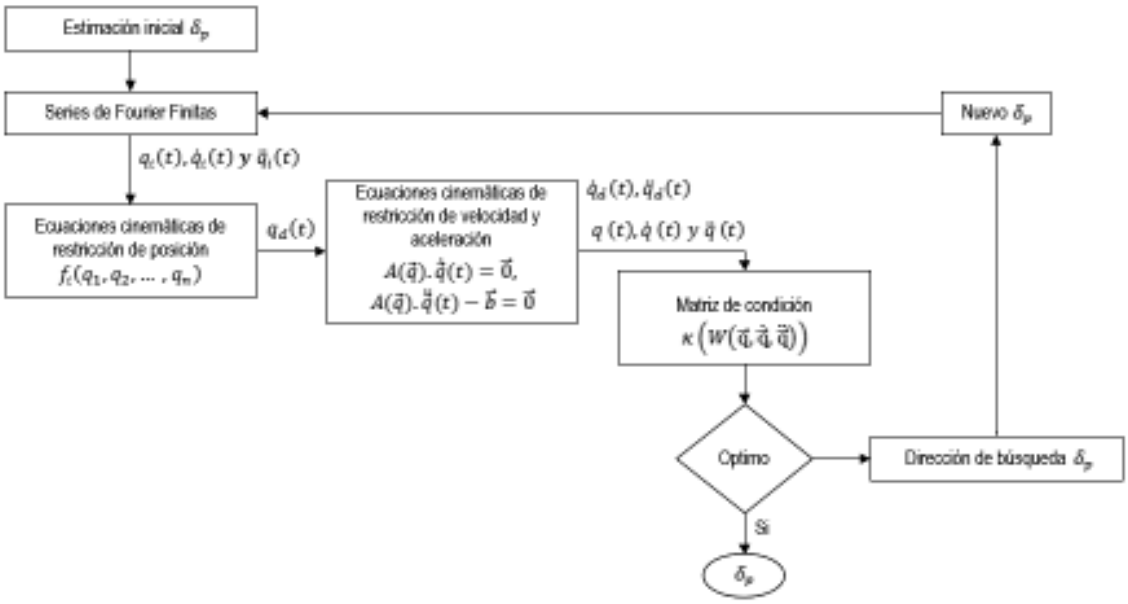


Figura 1.17. Proceso de optimización de trayectorias.
(Fuente: (Díaz, 2009))

1.8. Análisis de residuos

Anónimo (2005), define un residuo (ε) como la diferencia entre el valor medido en el robot real o simulación (y) y el valor calculado mediante el modelo matemático (y_e). La expresión que define un residuo es:

$$\varepsilon(t) = y(t) - y_e(t)$$

Ec. 1.82

Un conjunto de residuos puede ser cuantificado mediante el error cuadrático medio (ECM), matemáticamente se define como:

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t}^{N} \varepsilon^2(t)}$$

Ec. 1.83

Donde:

N Número de elementos simulados.

2. METODOLOGÍA

En el presente capitulo se describe el desarrollo del modelo dinámico lineal en parámetros inerciales para el robot 3UPS + 1RPU, mediante las ecuaciones de Gibbs-Appell explicitas desarrolladas por Mata, Benimeli, Farhat & Valera (2005), partiendo de las dimensiones mecánicas especificadas en el trabajo de Aquino & Pozo (2017). Además, con base en las ventajas expuestas en la sección 1.3.1, el modelo de fricción que se desarrolla es el de Coulomb con efecto viscoso (modelo lineal de fricción).

Luego, usando series finitas de Fourier se desarrollan dos trayectorias óptimas, una de identificación y una de verificación o prueba. Ambas trayectorias óptimas deben cumplir las limitaciones mecánicas, ángulo de articulaciones esféricas y de espacio de trabajo indicadas en la sección 1.7.

Mediante la trayectoria optima de identificación, se aplica el método de descomposición en valores singulares (SVD) para obtener los parámetros base que definen el modelo dinámico lineal simplificado del robot paralelo 3UPS + 1RPU (sección 1.6.1). Una vez identificados los parámetros base, mediante la simulación dinámica de la trayectoria optima de identificación en Adams/View, y el análisis de factibilidad física se ajustan los parámetros base con fin de reducir el error entre las fuerzas generalizadas independientes simuladas y calculadas (sección 1.5).

Finalmente, para verificar la calidad de los parámetros base identificados y ajustados se analiza la compatibilidad de las fuerzas generalizadas independientes determinadas por el modelo dinámico en parámetros base (modelo reducido) con respecto a las fuerzas generalizadas simuladas en Adams/View. En esta sección la entrada del modelo y la simulación será la trayectoria óptima de verificación, previamente generada. El método estadístico para cuantificar el error entre las fuerzas generalizas calculadas y simuladas es el análisis de residuos (sección 1.8).

A pesar de que el presente trabajo y el modelo dinámico desarrollado por Aquino & Pozo (2017) emplean las ecuaciones de Gibbs-Appell, la principal diferencia radica en que el trabajo de Aquino & Pozo expresa el modelo de manera implícita (no lineal), mientras que este trabajo desarrolla el modelo dinámico en forma explícita (lineal) respecto a los parámetros inerciales, para luego ser reducido a un modelo dinámico en parámetros base. En la sección 3.2 se detallan las principales diferencias del presente trabajo, así como, el principal aporte para el proyecto PIMI-1504 de la Facultad de Mecánica en la EPN.

2.1. Modelo dinámico en parámetros inerciales

2.1.1. Geometría del robot

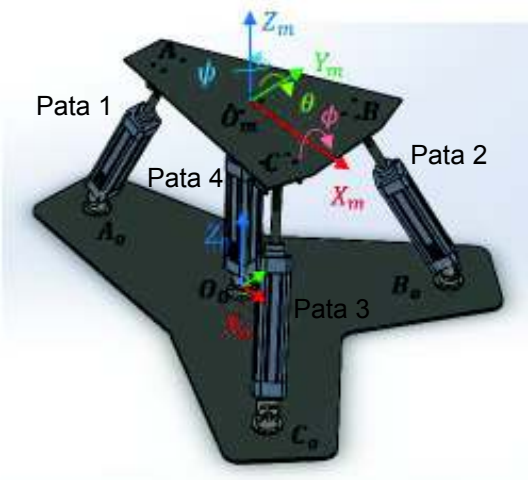
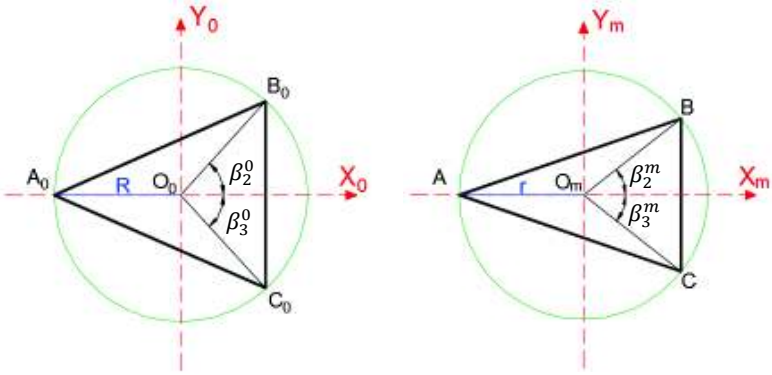


Figura 2.1. Sistema de coordenadas del robot 3UPS+1RPU.
(Fuente: Autor)

A partir del sistema de coordenadas 0 en la plataforma base, y el sistema de coordenadas m en la plataforma móvil (Figura 2.1), Aquino & Pozo (2017) establecieron las dimensiones de las plataformas base y móvil en función de un triángulo inscrito en una circunferencia (ver Figura 2.2). Las dimensiones de la plataforma base se establecen en función del radio de la circunferencia (R), el ángulo al vértice B_0 (β_2^0) y el ángulo al vértice C_0 (β_3^0); las dimensiones de la plataforma móvil se definen mediante el radio (r), el ángulo al vértice B (β_2^m) y el ángulo al vértice C (β_3^m).



(a) (b)

Figura 2.2. Dimensiones de la (a) plataforma base. (b) plataforma móvil.
(Fuente: (Aquino & Pozo, 2017))

En la Tabla 2.1 se muestran los vectores de posición de cada uno de los vértices de la plataformas base con respecto al sistema de coordenadas 0, y los vectores de posición de la plataforma móvil que son expresados con base en el sistema de coordenadas m.

Estos vectores se emplean para el modelamiento dinámico del robot paralelo (Aquino & Pozo, 2017).

Tabla 2.1. Vectores que definen los vértices de las plataformas base y móvil

Elemento	Pata 1	Pata 2	Pata 3	Pata 4
Plataforma Base	${}^{0}\vec{r}_{O_0A_o} = \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^{0}\vec{r}_{O_0B_o} = \begin{bmatrix} R\cos\beta_2^0 \\ R\sin\beta_2^0 \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^{0}\vec{r}_{O_oC_o} = \begin{bmatrix} R\cos\beta_3^0 \\ -R\sin\beta_3^0 \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^{0}\vec{r}_{O_0O_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Plataforma Móvil	${}^{m}\vec{r}_{O_mA} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^{m}\vec{r}_{O_mB} = \begin{bmatrix} r\cos\beta_2^m \\ r\sin\beta_2^m \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^{m}\vec{r}_{O_mC} = \begin{bmatrix} r\cos\beta_3^m \\ -r\sin\beta_3^m \\ 0 \end{bmatrix}$	${}^{m}\vec{r}_{O_mO_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(Fuente: (Aquino & Pozo, 2017))

De acuerdo con Aquino & Pozo (2017), las dimensiones de las plataformas que producen el menor número de puntos de singularidad y la máxima portabilidad del robot paralelo se establecen para los valores numéricos de R, r, β_2^0, β_2^m, β_3^0 y β_3^m que se muestran en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2. Parámetros geométricos de las plataformas base y móvil

Elemento			
Plataforma Base	$R = 0.4\ m$	$\beta_2^0 = 50°$	$\beta_3^0 = 40°$
Plataforma Móvil	$r = 0.2\ m$	$\beta_2^m = 40°$	$\beta_3^m = 30°$

(Fuente: (Aquino & Pozo, 2017))

2.1.2. Restricciones cinemáticas de posición

Conforme a lo desarrollado por Aquino & Pozo (2017), las ecuaciones de restricción de posición del robot paralelo 3UPS+1RPU se establecen, de forma vectorial, mediante cuatro cadenas cinemáticas cerradas conformadas por cada una de las patas del robot paralelo.

<u>Matriz de rotación de plataforma móvil a plataforma fija</u>

La matriz ${}^{0}R_m$, permite representar los vectores de posición medidos en el sistema de coordenadas m (sistema 4 de la Figura 2.3) de la plataforma móvil, en el sistema de coordenadas 0 de la plataforma fija. Este cambio de sistema de coordenadas se requiere para establecer las cadenas cinemáticas cerradas que definen las ecuaciones de restricción.

La matriz ${}^{0}R_m$ se determina, considerando los cuatro grados de libertad del robot como articulaciones pasivas del robot, es decir se va a considerar que la plataforma móvil está constituida por dos articulaciones prismáticas y dos articulaciones de revolución.

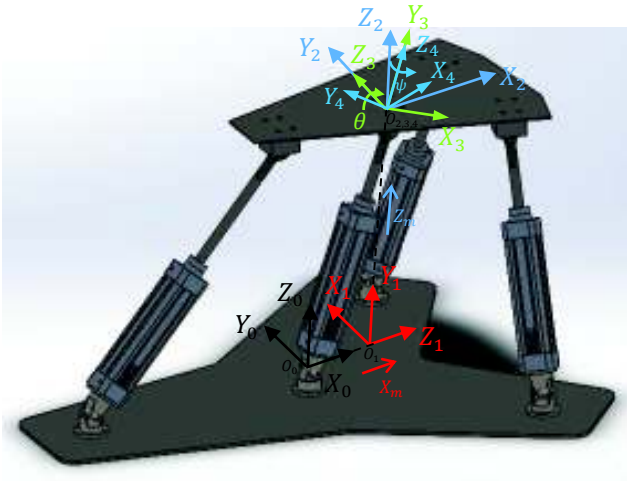


Figura 2.3. Sistemas de referencia para los 4 GDL del robot paralelo.
(Fuente: Autor)

Con base en los sistemas de referencia mostrados en la Figura 2.3, y bajo la notación D-H modificado (sección 1.2.1), la matriz de rotación ${}^{0}R_{m}$ (Provenzano, 2001) se calcula como:

$$ {}^{0}R_{m} = {}^{0}R_{PM_1} \cdot {}^{1}R_{PM_2} \cdot {}^{2}R_{PM_3} \cdot {}^{3}R_{PM_4} $$

Ec. 2.1

En la primera articulación (Figura 2.4), no es posible ir desde el sistema de referencia 1 a 0 mediante una sola matriz de rotación, por lo que se requiere un sistema de referencia auxiliar entre el sistema 0 y 1, denominado $1'$, matemáticamente la matriz ${}^{0}R_{PM_1}$ es:

$$ {}^{0}R_{PM_1} = {}^{0}R_{PM_{1'}} \cdot {}^{1'}R_{PM_1} $$

Ec. 2.2

Si:

$$ {}^{0}R_{PM_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.3

$$ {}^{1}R_{PM_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.4

$$ {}^{2}R_{PM_3} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) sin(\theta) & cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) cos(\theta) & -sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) sin(\theta) & sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) cos(\theta) & cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin(\theta) & -cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.5

$$ {}^{3}R_{PM_4} = \begin{bmatrix} cos(\psi) & -sin(\psi) & 0 \\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(\psi) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(\psi) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(\psi) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(\psi) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\psi) & -sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ sin(\psi) & cos(\psi) & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.6

Entonces, ${}^{0}R_m$ está definida como:

$$ {}^{0}R_m = \begin{bmatrix} cos(\psi)\,cos(\theta) & -sin(\psi)\,cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\psi) & cos(\psi) & 0 \\ -cos(\psi)\,sin(\theta) & sin(\psi)\,sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} $$

Ec. 2.7

Donde:

θ	Ángulo de giro de la plataforma móvil alrededor del eje Y.
ψ	Ángulo de giro de la plataforma móvil alrededor del eje Z.

La expresión R_m determinada por Aquino & Pozo (2017), difiere de la Ec. 2.7, debido a que en su trabajo se realizó bajo la notación D-H estándar. En la Figura 2.4 se muestra la representación simplificada de los sistemas de referencia establecidos en cada articulación para determinar la matriz ${}^{0}R_m$. A diferencia del trabajo realizado por Provenzano (2001), para facilitar el cálculo de las matrices de rotación en cada sistema de coordenadas establecido, se considera que cada articulación realiza un giro muy pequeño (cantidad despreciable) permitiendo mantener los ejes paralelos con respecto al sistema de referencia anterior.

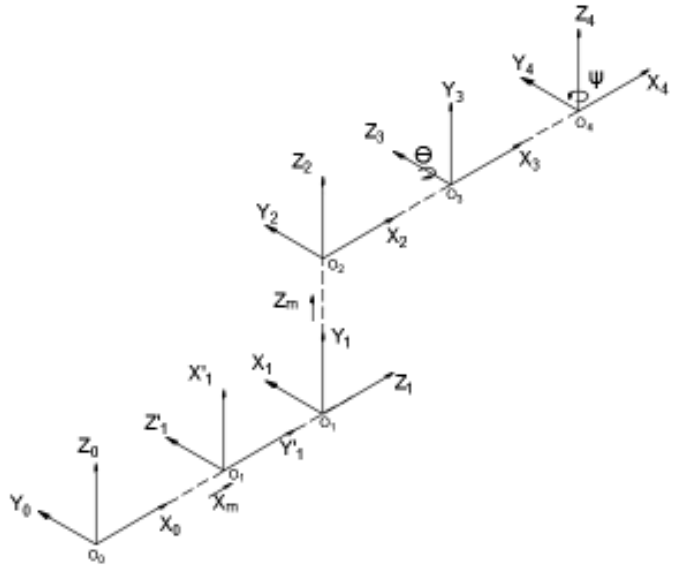


Figura 2.4. Representación simplificada de los sistemas de referencia en la plataforma móvil.
(Fuente: Autor)

<u>Cadena cerrada 1, 2 y 3</u>

Debido a que las patas 1, 2 y 3 tiene la misma configuración mecánica se puede generalizar su análisis vectorial, las primeras tres cadenas cinemáticas cerradas se muestra en la Figura 2.5.

Matemáticamente las ecuaciones de restricción para las tres primeras cadenas cinemáticas, establecidas con respecto al sistema de coordenadas 0 (Aquino & Pozo, 2017), están definidas como:

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0A_o} + {}^{0}\vec{r}_{A_oA} = {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} + {}^{0}R_m\,{}^{m}\vec{r}_{O_mA} $$

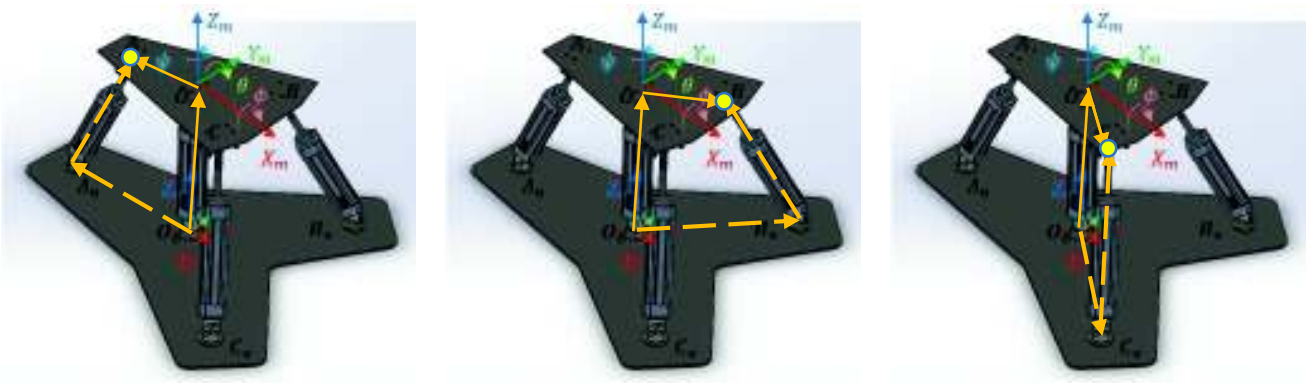
Ec. 2.8

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0B_o} + {}^{0}\vec{r}_{B_oB} = {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} + {}^{0}R_m\,{}^{m}\vec{r}_{O_mB} $$

Ec. 2.9

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0C_o} + {}^{0}\vec{r}_{C_oC} = {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} + {}^{0}R_m\,{}^{m}\vec{r}_{O_mC} $$

Ec. 2.10



(a) (b) (c)

Figura 2.5. Cadena cinemática cerrada (a) 1. (b) 2. (c) 3.
(Fuente: Autor)

Los vectores ${}^{0}\vec{r}_{O_0A_o}$, ${}^{0}\vec{r}_{O_0B_o}$, ${}^{0}\vec{r}_{O_0C_o}$, ${}^{m}\vec{r}_{O_mA}$, ${}^{m}\vec{r}_{O_mB}$ y ${}^{m}\vec{r}_{O_mC}$ están definidos en la Tabla 2.1. Por otro lado, el vector ${}^{0}\vec{r}_{O_0O_m}$ corresponde a las coordenadas del efector final, así:

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} = \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} $$

Ec. 2.11

Donde:

X_m, Y_m y Z_m — Posición del centro de la plataforma móvil sobre los ejes X, Y y Z respectivamente. Medidos en el sistema de referencia 0.

Por la configuración del robot paralelo 3UPS+1RPU, se considera $Y_m = 0$ para cualquier movimiento que se realice (Zamora, 2016).

Por otro lado, el vector ${}^{0}\vec{r}_{A_oA}$ se puede determinar mediante:

$$ {}^{0}\vec{r}_{A_oA} = {}^{0}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\vec{r}_{A_oA} $$

Ec. 2.12

La matriz de rotación ${}^{0}R_{P1_3}$ permite expresar los vectores de posición del sistemas de coordenadas 3 de la pata uno, en el sistema de coordenadas 0 (ver Figura 2.6).

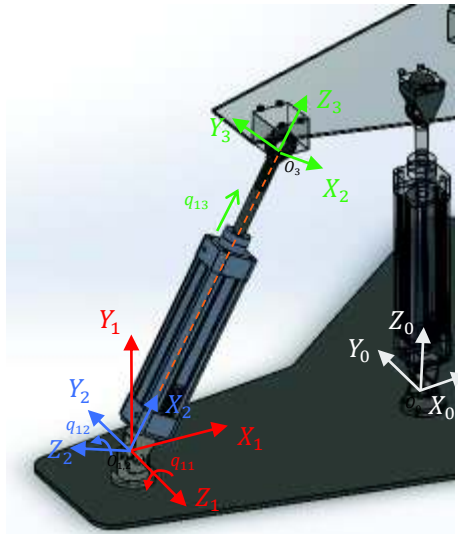


Figura 2.6. Sistemas de referencia para la pata 1.
(Fuente: Autor)

La Figura 2.6 muestra tres sistemas de coordenadas, debido a que, la articulación universal se modela como dos juntas de revolución perpendiculares una de otra (Farhat, 2006), por lo tanto, se requiere de dos sistemas de referencia (1 y 2 respectivamente). Con base en el trabajo realizado por Provenzano (2001), la expresión que define ${}^{0}R_{P1_3}$ es:

$$ {}^{0}R_{P1_3} = {}^{0}R_{P1_1} \cdot {}^{1}R_{P1_2} \cdot {}^{2}R_{P1_3} $$

Ec. 2.13

Para la matriz de rotación ${}^{2}R_{P1_3}$, en notación D-H modificado, se requiere introducir un sistema de coordenadas auxiliar $(3')$ para permitir la transformación del sistema coordenadas 3 en el sistema 2 (ver Figura 2.7).

Ahora, con:

$$ {}^{0}R_{P1_1} = \begin{bmatrix} cos(q_{11}) & -sin(q_{11}) & 0 \\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(q_{11}) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(q_{11}) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(q_{11}) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(q_{11}) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(q_{11}) & -sin(q_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ sin(q_{11}) & cos(q_{11}) & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.14

$$ {}^{1}R_{P1_2} = \begin{bmatrix} cos(q_{12}) & -sin(q_{12}) & 0 \\ cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) sin(q_{12}) & cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) cos(q_{12}) & -sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) sin(q_{12}) & sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) cos(q_{12}) & cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(q_{12}) & -sin(q_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin(q_{12}) & -cos(q_{12}) & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.15

$$ {}^{2}R_{P1_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.16

${}^{0}R_{P1_3}$ resulta:

$$ {}^{0}R_{P1_3} = \begin{bmatrix} sin(q_{11}) & -cos(q_{11})\,sin(q_{12}) & cos(q_{11})\,cos(q_{12}) \\ 0 & cos(q_{12}) & sin(q_{12}) \\ -cos(q_{11}) & sin(q_{11})\,sin(q_{12}) & sin(q_{11})\,cos(q_{12}) \end{bmatrix} $$

Ec. 2.17

Donde:

q_{11}, q_{12} Variables generalizadas para las articulaciones de revolución equivalentes al par universal de la pata 1.

q_{13} Variable generalizada para la articulación prismática de la pata 1.

La Figura 2.7 muestra una representación simplificada de los sistemas de coordenadas establecidos en la pata 1, que se usan para formar la matriz ${}^{0}R_{P1_3}$. Esta representación es una adaptación, realizada por el autor, de la metodología de Provenzano (2001) para este caso de estudio.

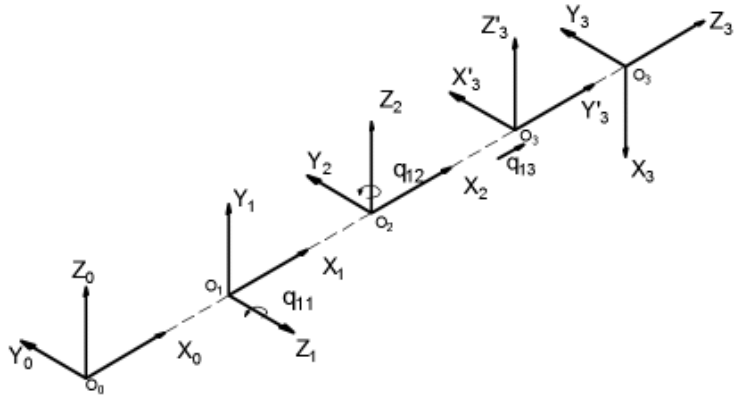


Figura 2.7. Representación simplificada de los sistemas de referencia en la pata 1.
(Fuente: Autor)

Finalmente, al reemplazar la Ec. 2.17 en la Ec. 2.12 se tiene:

$$ {}^{0}\vec{r}_{A_oA} = \begin{bmatrix} sin(q_{11}) & -cos(q_{11})\,sin(q_{12}) & cos(q_{11})\,cos(q_{12}) \\ 0 & cos(q_{12}) & sin(q_{12}) \\ -cos(q_{11}) & sin(q_{11})\,sin(q_{12}) & sin(q_{11})\,cos(q_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{13} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\vec{r}_{A_oA} = \begin{bmatrix} q_{13}\,cos(q_{11})\,cos(q_{12}) \\ q_{13}\,sin(q_{12}) \\ q_{13}\,sin(q_{11})\,cos(q_{12}) \end{bmatrix} $$

Ec. 2.18

Por la configuración mecánica idéntica de las patas 1, 2 y 3, los vectores ${}^{0}\vec{r}_{B_oB}$ y ${}^{0}\vec{r}_{C_oC}$ se obtienen de forma análoga (Benimeli, 2005) mediante la Ec. 2.12, considerando las variables generalizadas q_{21}, q_{22}, q_{23} para la pata 2 y las variables q_{31}, q_{32}, q_{33} para la pata 3, matemáticamente se establece que:

$$ {}^{0}\vec{r}_{B_oB} = \begin{bmatrix} q_{23}\, cos(q_{21})\, cos(q_{22}) \\ q_{23}\, sin(q_{22}) \\ q_{23}\, sin(q_{21})\, cos(q_{22}) \end{bmatrix} \qquad {}^{0}\vec{r}_{C_oC} = \begin{bmatrix} q_{33}\, cos(q_{31})\, cos(q_{32}) \\ q_{33}\, sin(q_{32}) \\ q_{33}\, sin(q_{31})\, cos(q_{32}) \end{bmatrix} $$

Ec. 2.19 Ec. 2.20

<u>Cadena cerrada 4</u>

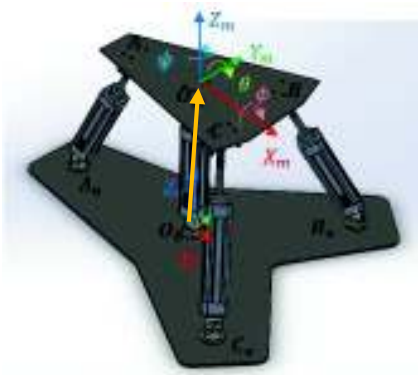


Figura 2.8. Cadena cinemática cerrada 4.
(Fuente: Autor)

De acuerdo con Aquino & Pozo (2017), la cuarta cadena cinemática (Figura 2.8) se establece al igualar la posición de la pata central (pata 4), en función de la ubicación de las articulaciones que la conforman, con las coordenadas del centro de la plataforma móvil respecto al sistema de referencia 0, es decir:

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} = {}^{0}R_{P4_2} \cdot {}^{2}\vec{r}_{O_oO_m} = \begin{bmatrix} X_m \\ 0 \\ Z_m \end{bmatrix} $$

Ec. 2.21

A diferencia del trabajo de Aquino & Pozo (2017), la matriz de rotación ${}^{0}R_{P4_2}$ se establece en notación D-H modificado con base en los sistemas de referencia asignados a las articulaciones en la pata 4, (ver Figura 2.9).

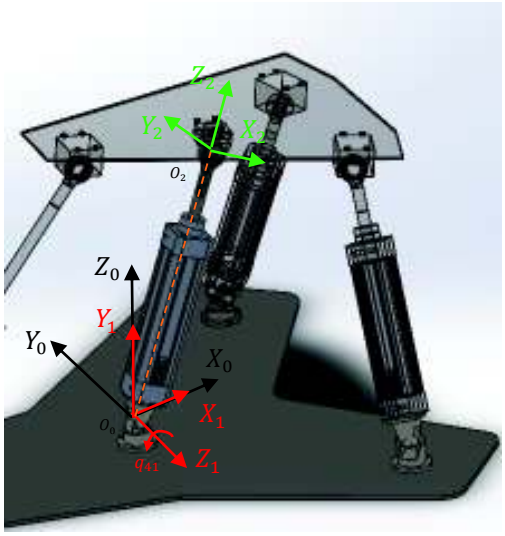


Figura 2.9. Sistema de referencia para la pata 4.
(Fuente: Autor)

La matriz ${}^{0}R_{P4_2}$ (Provenzano, 2001) puede determinarse como:

$$ {}^{0}R_{P4_2} = {}^{0}R_{P4_1} \cdot {}^{1}R_{P4_2} $$

Ec. 2.22

Con:

$$ {}^{0}R_{P4_1} = \begin{bmatrix} cos(q_{41}) & -sin(q_{41}) & 0 \\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(q_{41}) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(q_{41}) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) sin(q_{41}) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) cos(q_{41}) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(q_{41}) & -sin(q_{41}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ sin(q_{41}) & cos(q_{41}) & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.23

$$ {}^{1}R_{P4_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

Ec. 2.24

Ahora ${}^{0}R_{P4_2}$ es:

$$ {}^{0}R_{P4_2} = \begin{bmatrix} sin(q_{41}) & 0 & cos(q_{41}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -cos(q_{41}) & 0 & sin(q_{41}) \end{bmatrix} $$

Ec. 2.25

En la Ec. 2.25, q_{41} representa la variable generalizada de la articulación de revolución y q_{42} representa la articulación prismática, ambas son componentes de la pata 4. En la Figura 2.10 se observa una representación simplificada de los sistemas de coordenadas establecidos para la pata 4 y que se emplean para calcular ${}^{0}R_{P4_2}$.

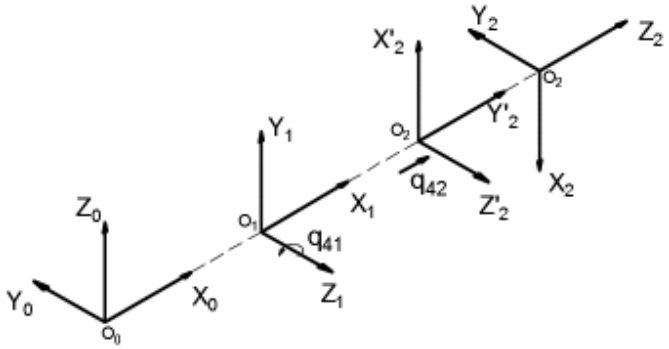


Figura 2.10. Representación simplificada de los sistemas de referencia en la pata 4.
(Fuente: Autor)

Al reemplazar la Ec. 2.25 en la Ec. 2.21 resulta:

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} = {}^{0}R_{P4_2} \cdot {}^{2}\vec{r}_{O_oO_m} = \begin{bmatrix} sin(q_{41}) & 0 & cos(q_{41}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -cos(q_{41}) & 0 & sin(q_{41}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{42} \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}\vec{r}_{O_0O_m} = \begin{bmatrix} q_{42}\, cos(q_{41}) \\ 0 \\ q_{42}\, sin(q_{41}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_m \\ 0 \\ Z_m \end{bmatrix} $$

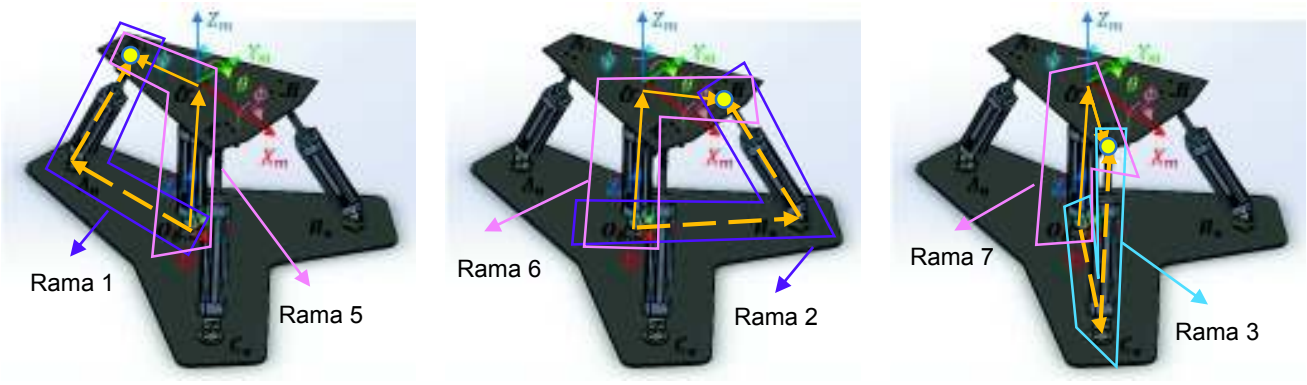
Ec. 2.26

Ya que las expresiones Ec. 2.8, Ec. 2.9, Ec. 2.10 y Ec. 2.21 son de tipo vectorial, cada una tiene tres componentes coordenados, entonces se obtienen 12 ecuaciones de restricción. Sin embargo en la Ec. 2.21 la ecuación del componente Y es nula, por lo que se obtiene 11 ecuaciones de restricción (m). Las variables generalizas (n) son 15 en total, las cuales son q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{41}, q_{42}, X_m, Z_m, θ, ψ.

2.1.3. Restricciones cinemáticas de velocidad

Con el fin de aplicar el principio de compatibilidad de velocidades (Farhat, 2006) de la Ec. 1.11, se emplean las cuatro cadenas cinemáticas cerradas analizadas en las ecuaciones de restricción de posición (sección 2.1.2). La Ec. 1.11 establece 6 ecuaciones por cada cadena cinemática (24 ecuaciones en total). Debido a que el robot paralelo 3UPS+1RPU tiene $m = 11$ se debe generar únicamente 11 ecuaciones de restricción en velocidad, por lo tanto, se analizaran únicamente los principios de compatibilidad de velocidad lineal (las primeras tres filas de la Ec. 1.11).

Cadena cerrada 1, 2 y 3



(a) (b) (c)

Figura 2.11. Restricción de velocidad, cadena cinemática cerrada (a) 1. (b) 2. (c) 3.
(Fuente: Autor)

Las restricciones de velocidad lineal en la cadena cinemática 1 (Figura 2.11a), se determina al analizar la compatibilidad de velocidad lineal (Farhat, 2006) en el vértice A de la plataforma móvil, tomando como la rama 1 los elementos que componen la pata 1 (Figura 2.6) y como la rama 5 la posición determinada por los 4GDL de la plataforma móvil (Figura 2.3), así:

$$\begin{bmatrix} {}^0\psi_3^1 & {}^0\psi_2^1 & {}^0\psi_1^1 & -{}^0\psi_4^5 & -{}^0\psi_3^5 & -{}^0\psi_2^5 & -{}^0\psi_1^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{13} \\ \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{11} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{Z}_m \\ \dot{X}_m \end{bmatrix} = \vec{0}_{3\times1}$$

Ec. 2.27

Donde, de acuerdo a la Ec. 1.10 se tiene:

$${}^0\psi_3^1 = \left[{}^0\vec{z}_3^1\right]$$
$${}^0\psi_2^1 = \left[{}^0\vec{z}_2^1 \times {}^0\vec{r}_{O_2A}^1\right]$$
$${}^0\psi_1^1 = \left[{}^0\vec{z}_1^1 \times {}^0\vec{r}_{O_1A}^1\right]$$

Ec. 2.28

$${}^0\psi_4^5 = \left[{}^0\vec{z}_4^5 \times {}^0\vec{r}_{O_4A}^5\right]$$
$${}^0\psi_3^5 = \left[{}^0\vec{z}_3^5 \times {}^0\vec{r}_{O_3A}^5\right]$$
$${}^0\psi_2^5 = \left[{}^0\vec{z}_2^5\right]$$
$${}^0\psi_1^5 = \left[{}^0\vec{z}_1^5\right]$$

Ec. 2.29

Al aplicar la notación D-H modificada (Provenzano, 2001), en la Ec. 2.28 y Ec. 2.28, los vectores unitarios z se definen como:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\vec{z}_{3}^{1} &= {}^{0}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\vec{z}_{3}^{1} \\
{}^{0}\vec{z}_{2}^{1} &= {}^{0}R_{P1_2} \cdot {}^{2}\vec{z}_{2}^{1} \\
{}^{0}\vec{z}_{1}^{1} &= {}^{0}R_{P1_1} \cdot {}^{1}\vec{z}_{1}^{1}
\end{aligned}
$$

Ec. 2.30

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\vec{z}_{4}^{5} &= {}^{0}R_{m} \cdot {}^{4}\vec{z}_{4}^{5} \\
{}^{0}\vec{z}_{3}^{5} &= {}^{0}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\vec{z}_{3}^{5} \\
{}^{0}\vec{z}_{2}^{5} &= {}^{0}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\vec{z}_{2}^{5} \\
{}^{0}\vec{z}_{1}^{5} &= {}^{0}R_{PM_1} \cdot {}^{1}\vec{z}_{1}^{5}
\end{aligned}
$$

Ec. 2.31

Donde ${}^{i}\vec{z}_{i} = [0 \quad 0 \quad 1]^{T}$.

Con base en el análisis vectorial de las restricciones cinemáticas de posición, los vectores ${}^{0}\vec{r}_{O_2A}^{1}$ y $\vec{r}_{O_1A}^{1}$ son:

$$
{}^{0}\vec{r}_{O_2A}^{1} = {}^{0}\vec{r}_{O_1A}^{1} = {}^{0}\vec{r}_{A_oA} = {}^{0}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\vec{r}_{A_oA}
$$

Ec. 2.32

Mientras que, los vectores de posición ${}^{0}\vec{r}_{O_3A}^{5}$ y ${}^{0}\vec{r}_{O_4A}^{5}$ se establecen como:

$$
{}^{0}\vec{r}_{O_3A}^{5} = {}^{0}\vec{r}_{O_4A}^{5} = {}^{0}R_{m} \cdot {}^{m}\vec{r}_{O_mA}
$$

Ec. 2.33

Ya que las cadenas cinemáticas cerradas 2 y 3 tienen la misma configuración que la cadena 1 (Figura 2.11), al aplicar el análisis de compatibilidad de velocidad (Farhat, 2006) en estas cadenas cinemáticas se tiene:

$$
[{}^{0}\psi_{3}^{2} \quad {}^{0}\psi_{2}^{2} \quad {}^{0}\psi_{1}^{2} \quad -{}^{0}\psi_{4}^{6} \quad -{}^{0}\psi_{3}^{6} \quad -{}^{0}\psi_{2}^{6} \quad -{}^{0}\psi_{1}^{6}\,] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{23} \\ \dot{q}_{22} \\ \dot{q}_{21} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{Z}_m \\ \dot{X}_m \end{bmatrix} = \vec{0}_{3\times1}
$$

Ec. 2.34

$$
[{}^{0}\psi_{3}^{3} \quad {}^{0}\psi_{2}^{3} \quad {}^{0}\psi_{1}^{3} \quad -{}^{0}\psi_{4}^{7} \quad -{}^{0}\psi_{3}^{7} \quad -{}^{0}\psi_{2}^{7} \quad -{}^{0}\psi_{1}^{7}\,] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{33} \\ \dot{q}_{32} \\ \dot{q}_{31} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{Z}_m \\ \dot{X}_m \end{bmatrix} = \vec{0}_{3\times1}
$$

Ec. 2.35

Donde, al aplicar la Ec. 1.10 (Farhat, 2006):

$$^{0}\psi_{3}^{2} = [^{0}\vec{z}_{3}^{2}]$$
$$^{0}\psi_{2}^{2} = \left[^{0}\vec{z}_{2}^{2} \times {}^{0}\vec{r}_{O_2B}^{2}\right]$$
$$^{0}\psi_{1}^{2} = \left[^{0}\vec{z}_{1}^{2} \times {}^{0}\vec{r}_{O_1B}^{2}\right]$$

Ec. 2.36

$$^{0}\psi_{3}^{3} = [^{0}\vec{z}_{3}^{3}]$$
$$^{0}\psi_{2}^{3} = \left[^{0}\vec{z}_{2}^{3} \times {}^{0}\vec{r}_{O_2C}^{3}\right]$$
$$^{0}\psi_{1}^{3} = \left[^{0}\vec{z}_{1}^{3} \times {}^{0}\vec{r}_{O_1C}^{3}\right]$$

Ec. 2.37

$$^{0}\psi_{4}^{6} = \left[^{0}\vec{z}_{4}^{6} \times {}^{0}\vec{r}_{O_4B}^{6}\right]$$
$$^{0}\psi_{3}^{6} = \left[^{0}\vec{z}_{3}^{6} \times {}^{0}\vec{r}_{O_3B}^{6}\right]$$
$$^{0}\psi_{2}^{6} = [^{0}\vec{z}_{2}^{6}]$$
$$^{0}\psi_{1}^{6} = [^{0}\vec{z}_{1}^{6}]$$

Ec. 2.38

$$^{0}\psi_{4}^{7} = \left[^{0}\vec{z}_{4}^{7} \times {}^{0}\vec{r}_{O_4C}^{7}\right]$$
$$^{0}\psi_{3}^{7} = \left[^{0}\vec{z}_{3}^{7} \times {}^{0}\vec{r}_{O_3C}^{7}\right]$$
$$^{0}\psi_{2}^{6} = [^{0}\vec{z}_{2}^{6}]$$
$$^{0}\psi_{1}^{6} = [^{0}\vec{z}_{1}^{6}]$$

Ec. 2.39

Los vectores de posición, en notación D-H modificado, para las cadenas cinemáticas cerradas 2 y 3 son:

$$^{0}\vec{r}_{O_2B}^{2} = {}^{0}\vec{r}_{O_1B}^{2} = {}^{0}\vec{r}_{B_oB} = {}^{0}R_{P2_3} \cdot {}^{3}\vec{r}_{B_oB}$$
$$^{0}\vec{r}_{O_2C}^{3} = {}^{0}\vec{r}_{O_1C}^{3} = {}^{0}\vec{r}_{C_oC} = {}^{0}R_{P3_3} \cdot {}^{3}\vec{r}_{C_oC}$$

Ec. 2.40

$$^{0}\vec{r}_{O_4B}^{6} = {}^{0}\vec{r}_{O_3B}^{6} = {}^{0}R_{m} \cdot {}^{m}\vec{r}_{O_mB}$$
$$^{0}\vec{r}_{O_4C}^{7} = {}^{0}\vec{r}_{O_3C}^{7} = {}^{0}R_{m} \cdot {}^{m}\vec{r}_{O_mC}$$

Ec. 2.41

<u>Cadena cerrada 4</u>

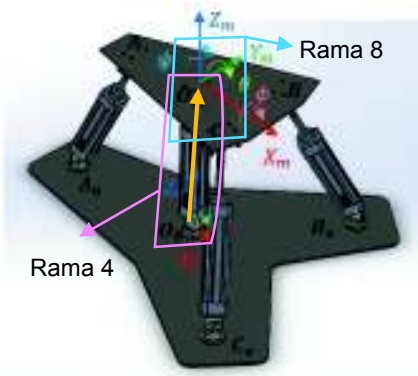


Figura 2.12. Restricción de velocidad, cadena cinemática cerrada 4.
(Fuente: Autor)

Para la cadena cinemática cerrada 4 el análisis de compatibilidad de velocidades lineales (Figura 2.12) se realiza en el origen de la plataforma móvil (Farhat, 2006), tomando como la rama 1 los elementos que componen la pata 4 (Figura 2.9) y como la rama 8 la posición determinada por los 4GDL de la plataforma móvil (Figura 2.3), así:

$$[{}^0\psi_2^4 \quad {}^0\psi_1^4 \quad -{}^0\psi_4^8 \quad -{}^0\psi_3^8 \quad -{}^0\psi_2^8 \quad -{}^0\psi_1^8\,] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{42} \\ \dot{q}_{41} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{Z}_m \\ \dot{X}_m \end{bmatrix} = \vec{0}_{3\times1}$$

Ec. 2.42

Donde, al aplicar la Ec. 1.10:

$${}^0\psi_2^4 = [{}^0\vec{z}_2^4]$$
$${}^0\psi_1^4 = \left[{}^0\vec{z}_1^4 \times {}^0\vec{r}_{O_1O_m}^4\right]$$

Ec. 2.43

$${}^0\psi_4^8 = \left[{}^0\vec{z}_4^8 \times {}^0\vec{r}_{O_4O_m}^8\right]$$
$${}^0\psi_3^8 = \left[{}^0\vec{z}_3^8 \times {}^0\vec{r}_{O_3O_m}^8\right]$$
$${}^0\psi_2^8 = [{}^0\vec{z}_2^8]$$
$${}^0\psi_1^8 = [{}^0\vec{z}_1^8]$$

Ec. 2.44

Los vectores unitarios de la Ec. 2.43 y Ec. 2.44 se determinan mediante:

$${}^0\vec{z}_2^4 = {}^0R_{P4_2} \cdot {}^2\vec{z}_2^4$$
$${}^0\vec{z}_1^4 = {}^0R_{P4_1} \cdot {}^1\vec{z}_1^4$$

Ec. 2.45

$${}^0\vec{z}_4^8 = {}^0R_m \cdot {}^4\vec{z}_4^8$$
$${}^0\vec{z}_3^8 = {}^0R_{PM_3} \cdot {}^3\vec{z}_3^8$$
$${}^0\vec{z}_2^8 = {}^0R_{PM_2} \cdot {}^2\vec{z}_2^8$$
$${}^0\vec{z}_1^8 = {}^0R_{PM_1} \cdot {}^1\vec{z}_1^8$$

Ec. 2.46

Los vectores de posición de la Ec. 2.43 y Ec. 2.44, en notación D-H modificado, son:

$${}^0\vec{r}_{O_1O_m}^4 = {}^0R_{P4_2} \cdot {}^2\vec{r}_{O_oO_m}$$

Ec. 2.47

$${}^0\vec{r}_{O_4O_m}^8 = {}^0\vec{r}_{O_3O_m}^8 = {}^0R_m \cdot {}^m\vec{r}_{O_mO_m}$$

Ec. 2.48

De acuerdo a Farhat (2006), la matriz Jacobiana de un robot paralelo se forma, al agrupar los términos de las cuatro cadenas cinemáticas, es decir:

$$A_{11x15} = \begin{bmatrix} {}^0\psi_3^1 & {}^0\psi_2^1 & {}^0\psi_1^1 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & -{}^0\psi_4^5 & -{}^0\psi_3^5 & -{}^0\psi_2^5 & -{}^0\psi_1^5 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & {}^0\psi_3^2 & {}^0\psi_2^2 & {}^0\psi_1^2 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & -{}^0\psi_4^6 & -{}^0\psi_3^6 & -{}^0\psi_2^6 & -{}^0\psi_1^6 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & {}^0\psi_3^3 & {}^0\psi_2^3 & {}^0\psi_1^3 & \vec{0} & \vec{0} & -{}^0\psi_4^7 & -{}^0\psi_3^7 & -{}^0\psi_2^7 & -{}^0\psi_1^7 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & {}^0\psi_2^4 & {}^0\psi_1^4 & -{}^0\psi_4^8 & -{}^0\psi_3^8 & -{}^0\psi_2^8 & -{}^0\psi_1^8 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.49

Al igual que en las restricciones cinemáticas de posición, la componente Y de la cadena cinemática cerrada 4 es nula, por lo que la matriz A tiene 11 filas (se elimina la fila nula). Las velocidades generalizadas conforme a la distribución de la matriz A, son:

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_{13} & \dot{q}_{12} & \dot{q}_{11} & \dot{q}_{23} & \dot{q}_{22} & \dot{q}_{21} & \dot{q}_{33} & \dot{q}_{32} & \dot{q}_{31} & \dot{q}_{42} & \dot{q}_{41} & \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{Z}_m & \dot{X}_m \end{bmatrix}^T$$

Ec. 2.50

Finalmente, las 11 ecuaciones de restricción en velocidad se definen al multiplicar la Ec. 2.49 y la Ec. 2.50. Cabe resaltar, que estas ecuaciones son distintas a las establecidas por Aquino & Pozo (2017) debido a la notación D-H modificado usada en el presente trabajo, y al uso del principio de compatibilidad de velocidad en lugar de derivar las ecuaciones de restricción.

2.1.4. Restricciones cinemáticas de aceleración

Las ecuaciones de restricción de aceleración (Farhat, 2006) se definen mediante la Ec. 1.14. En este trabajo el vector $\vec{b}$ se determina al derivar dos veces las 11 ecuaciones de restricción de posición y substraer el termino $A(\vec{q}).\ddot{\vec{q}}(t)$, es decir:

$$\vec{b} = A(\vec{q}).\ddot{\vec{q}}(t) - \frac{d^2 f_m(q_1, q_2, \dots, q_n)}{dx^2}$$

Ec. 2.51

Donde, la matriz Jacobiana (A) fue definida en la Ec. 2.49 y el vector de aceleraciones generalizadas es:

$$\ddot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{13} & \ddot{q}_{12} & \ddot{q}_{11} & \ddot{q}_{23} & \ddot{q}_{22} & \ddot{q}_{21} & \ddot{q}_{33} & \ddot{q}_{32} & \ddot{q}_{31} & \ddot{q}_{42} & \ddot{q}_{41} & \ddot{\psi} & \ddot{\theta} & \ddot{Z}_m & \ddot{X}_m \end{bmatrix}^T$$

Ec. 2.52

2.1.5. Velocidad y aceleración angular en las articulaciones del robot

En cada articulación existe un vector ${}^{i}\vec{\omega}_i = [\omega_{x_i} \quad \omega_{y_i} \quad \omega_{z_i}]^T$ que contiene las velocidades angulares de cada uno de los ejes que componen el sistema de referencia i con respecto al mismo sistema i.

<u>Pata 1, 2 y 3</u>

La pata 1 (Figura 2.13) está constituido por dos elementos rígidos, el cilindro y el vástago del actuador lineal. El cilindro se encuentra conectado a la plataforma fija mediante una articulación de tipo universal, que por fines de estudio se analiza como dos articulaciones de revolución.

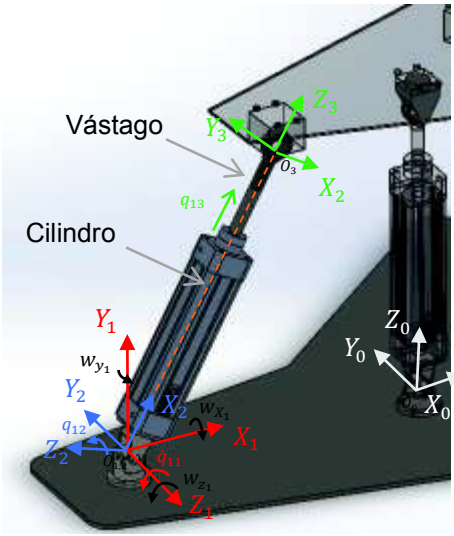


Figura 2.13. Velocidad angular en los sistemas de referencia de la pata 1.
(Fuente: Autor)

De acuerdo con Provenzano (2001), las velocidades angulares de los sistemas de coordenadas (1 y 2 respectivamente) asociados a las articulaciones de revolución en el cilindro de la pata uno, mediante la Ec. 1.24, son:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\vec{\omega}_{P1_1} &= {}^{1}R_{P1_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P1_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{11} \\
{}^{2}\vec{\omega}_{P1_2} &= {}^{2}R_{P1_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P1_1} + {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{12}
\end{aligned}
$$

Ec. 2.53

La unión entre el vástago y el cilindro de la pata uno, se considera como una articulación prismática por lo que la velocidad angular del sistema de coordenadas 3 asociado a esta articulación está definida como:

$$
{}^{3}\vec{\omega}_{P1_3} = {}^{3}R_{P1_2} \cdot {}^{2}\vec{\omega}_{P1_2}
$$

Ec. 2.54

Ahora, mediante la Ec. 1.25 (Provenzano, 2001) se define las aceleraciones angulares de los sistemas de coordenadas establecidos sobre las articulaciones del cilindro como:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P1_1} &= {}^{1}R_{P1_0} \cdot {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P1_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \ddot{q}_{11} + \left({}^{1}R_{P1_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P1_0}\right) \times {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{11} \\
{}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P1_2} &= {}^{2}R_{P1_1} \cdot {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P1_1} + {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \ddot{q}_{12} + \left({}^{2}R_{P1_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P1_1}\right) \times {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{12}
\end{aligned}
$$

Ec. 2.55

Mientras que, la aceleración angular del sistema de coordenadas de la articulación que une el vástago y el cilindro se establece como:

$$
{}^{3}\dot{\vec{\omega}}_{P1_3} = {}^{3}R_{P1_2} \cdot {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P1_2}
$$

Ec. 2.56

El sistema de referencia 0 está definido sobre la plataforma base, es decir que no se mueve, por lo que:

$$^{0}\vec{\omega}_{P1_0} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$
$$^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P1_0} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Ec. 2.57

Debido a que la pata 2 y 3 tienen la misma configuración mecánica (Benimeli, 2005), entonces la velocidad y aceleración angular (Provenzano, 2001) de los sistemas de coordenadas establecidos en la pata 2 son:

$$^{1}\vec{\omega}_{P2_1} = {}^{1}R_{P2_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P2_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{21}$$
$$^{2}\vec{\omega}_{P2_2} = {}^{2}R_{P2_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P2_1} + {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{22}$$

Ec. 2.58

$$^{3}\vec{\omega}_{P2_3} = {}^{3}R_{P2_2} \cdot {}^{2}\vec{\omega}_{P2_2}$$

Ec. 2.59

$$^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P2_1} = {}^{1}R_{P2_0} \cdot {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P2_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \ddot{q}_{21} + \left({}^{1}R_{P2_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P2_0}\right) \times {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{21}$$
$$^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P2_2} = {}^{2}R_{P2_1} \cdot {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P2_1} + {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \ddot{q}_{22} + \left({}^{2}R_{P2_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P2_1}\right) \times {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{22}$$

Ec. 2.60

$$^{3}\dot{\vec{\omega}}_{P2_3} = {}^{3}R_{P2_2} \cdot {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P2_2}$$

Ec. 2.61

Además, para los sistemas de coordenadas de la pata 3, la velocidad y aceleración angular se definen como:

$$^{1}\vec{\omega}_{P3_1} = {}^{1}R_{P3_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P3_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{31}$$
$$^{2}\vec{\omega}_{P3_2} = {}^{2}R_{P3_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P3_1} + {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{32}$$

Ec. 2.62

$$^{3}\vec{\omega}_{P3_3} = {}^{3}R_{P3_2} \cdot {}^{2}\vec{\omega}_{P3_2}$$

Ec. 2.63

$$^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P3_1} = {}^{1}R_{P3_0} \cdot {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P3_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \ddot{q}_{31} + \left({}^{1}R_{P3_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P3_0}\right) \times {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{31}$$
$$^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P3_2} = {}^{2}R_{P3_1} \cdot {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P3_1} + {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \ddot{q}_{32} + \left({}^{2}R_{P3_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P3_1}\right) \times {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{32}$$

Ec. 2.64

$$^{3}\dot{\vec{\omega}}_{P3_3} = {}^{3}R_{P3_2} \cdot {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P3_2}$$

Ec. 2.65

Pata 4

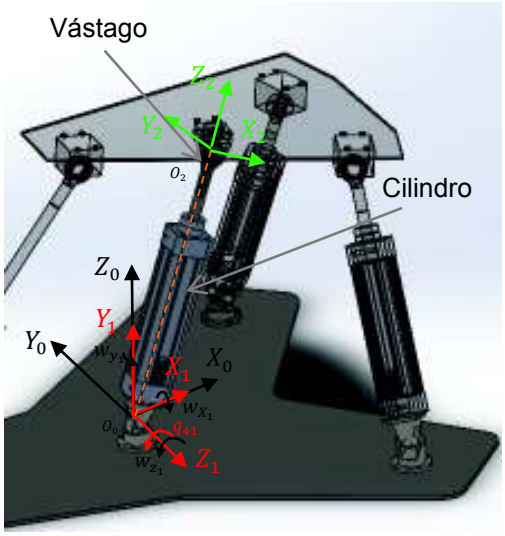


Figura 2.14. Velocidad angular en los sistemas de referencia de la pata 4.
(Fuente: Autor)

La pata 4 (Figura 2.14) está constituida por dos elementos rígidos, el cilindro y el vástago del actuador lineal. En el cilindro está unido a la plataforma fija mediante una articulación de revolución, la cual está asociado al sistema de coordenadas 1, cuya velocidad angular (Provenzano, 2001) es:

$$^{1}\vec{\omega}_{P4_1} = {}^{1}R_{P4_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P4_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{41}$$

Ec. 2.66

La unión entre el cilindro y el vástago de la pata cuatro, se considera como una articulación prismática, y la velocidad angular del sistema de coordenadas 2 establecido para esta articulación es:

$$^{2}\vec{\omega}_{P4_2} = {}^{2}R_{P4_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{P4_1}$$

Ec. 2.67

Por otro lado, la aceleración angular (Provenzano, 2001) del sistema de coordenadas 1 establecido para la articulación de revolución del cilindro es:

$$^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P4_1} = {}^{1}R_{P4_0} \cdot {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P4_0} + {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \ddot{q}_{41} + \left({}^{1}R_{P4_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{P4_0}\right) \times {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{q}_{41}$$

Ec. 2.68

Y la aceleración angular del sistema de referencia 2, para la articulación en el vástago es:

$$^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P4_2} = {}^{2}R_{P4_1} \cdot {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P4_1}$$

Ec. 2.69

Al igual que en la pata 1, 2 y 3 el sistema de referencia 0 está definido sobre la plataforma base, por lo tanto:

$$^{0}\vec{\omega}_{P4_0} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P4_0} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Ec. 2.70

Plataforma móvil

El último elemento rígido que constituye el robot paralelo 3UPS+1RPU, es la plataforma móvil. Para el análisis de las velocidades y aceleraciones angulares sobre este elemento (Figura 2.15), se considera los 4 GDL del sistema robótico como cuatro articulaciones.

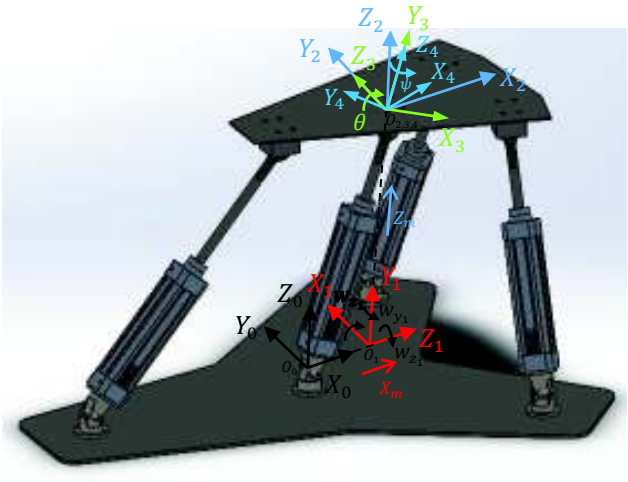


Figura 2.15. Velocidad angular en los sistemas de referencia de la plataforma móvil.
(Fuente: Autor)

La primera articulación es de tipo prismática, específicamente el desplazamiento sobre el eje X (sistema de referencia 1 de la Figura 2.15), la segunda articulación se considera el desplazamiento sobre el eje Z (sistema de coordenadas 2). La tercera articulación es de revolución, en este caso el giro alrededor del eje Y (sistema de coordenadas 3), y finalmente la cuarta articulación es el ángulo de giro alrededor del eje Z (sistema de coordenadas 4). Las velocidades angulares, al aplicar la Ec. 1.24 (Provenzano, 2001), de los 4 sistemas de referencia asociadas a las articulaciones mencionadas están definidas como:

$$^{1}\vec{\omega}_{PM_1} = {}^{1}R_{PM_0} \cdot {}^{0}\vec{\omega}_{PM_0}$$

$$^{2}\vec{\omega}_{PM_2} = {}^{2}R_{PM_1} \cdot {}^{1}\vec{\omega}_{PM_1}$$

$$^{3}\vec{\omega}_{PM_3} = {}^{3}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\vec{\omega}_{PM_2} + {}^{3}\vec{z}_3 \cdot \dot{\theta}$$

$$^{4}\vec{\omega}_{PM_4} = {}^{4}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\vec{\omega}_{PM_3} + {}^{4}\vec{z}_4 \cdot \dot{\psi}$$

Ec. 2.71

Por otro lado, las aceleraciones angulares (Provenzano, 2001) de los 4 sistemas de coordenadas asociados con las 4 articulaciones consideradas en la plataforma móvil están definidas como:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{PM_1} &= {}^{1}R_{PM_0} \cdot {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{PM_0} \\
{}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{PM_2} &= {}^{2}R_{PM_1} \cdot {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{PM_1} \\
{}^{3}\dot{\vec{\omega}}_{PM_3} &= {}^{3}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{PM_2} + {}^{3}\vec{z}_3 \cdot \ddot{\theta} + \left({}^{3}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\vec{\omega}_{PM_2}\right) \times {}^{3}\vec{z}_3 \cdot \dot{\theta} \\
{}^{4}\dot{\vec{\omega}}_{PM_4} &= {}^{4}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\dot{\vec{\omega}}_{PM_3} + {}^{4}\vec{z}_4 \cdot \ddot{\psi} + \left({}^{4}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\vec{\omega}_{PM_3}\right) \times {}^{4}\vec{z}_4 \cdot \dot{\psi}
\end{aligned}
$$

Ec. 2.72

Al analizar la plataforma móvil, el sistema de referencia 0 está definido sobre un elemento fijo (plataforma base), por lo que:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\vec{\omega}_{PM_0} &= [0 \quad 0 \quad 0]^T \\
{}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{PM_0} &= [0 \quad 0 \quad 0]^T
\end{aligned}
$$

Ec. 2.73

2.1.6. Aceleración lineal en el origen de los sistemas de referencia

<u>Pata 1, 2 y 3</u>

La aceleración lineal en el origen de cada sistema de referencia establecido en las articulaciones de la pata 1 (Figura 2.13) se establece mediante la Ec. 1.26 (Provenzano, 2001). Para el origen de los sistemas de coordenadas, de la articulación universal en el cilindro de la pata 1, se tiene:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_1}} &= {}^{1}R_{P1_0} \cdot \left[{}^{0}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_0}} + {}^{0}\vec{\omega}_{P1_0} \times \left({}^{0}\vec{\omega}_{P1_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P1_{O_0O_1}}\right) + {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P1_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P1_{O_0O_1}}\right] \\
{}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_2}} &= {}^{2}R_{P1_1} \cdot \left[{}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_1}} + {}^{1}\vec{\omega}_{P1_1} \times \left({}^{1}\vec{\omega}_{P1_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P1_{O_1O_2}}\right) + {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P1_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P1_{O_1O_2}}\right]
\end{aligned}
$$

Ec. 2.74

Para el sistema de referencia 3, establecido para la junta prismática entre el cilindro y el vástago de la pata 1 se tiene:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_3}} = {}^{3}R_{P1_2} \cdot &\left[{}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_2}} + {}^{2}\vec{\omega}_{P1_2} \times \left({}^{2}\vec{\omega}_{P1_2} \times {}^{2}\vec{r}_{P1_{O_2O_3}}\right) + {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P1_2} \times {}^{2}\vec{r}_{P1_{O_2O_3}}\right] \\
&+ \left[{}^{3}\vec{z}_3 \cdot \ddot{q}_{13} + 2\left({}^{3}\vec{\omega}_{P1_3} \times {}^{3}\vec{z}_3 \cdot \dot{q}_{13}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ec. 2.75

De acuerdo con Provenzano (2001), la velocidad lineal en el sistema de referencia de partida se establece de acuerdo a la gravedad (g) que afecta al sistema, así:

$$ {}^{0}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_0}} = [0 \quad 0 \quad -g]^T $$

Ec. 2.76

Debido a similitud mecánica de la pata 1, 2 y 3 (Benimeli, 2005), para los sistemas de coordenadas del cilindro y el vástago de la pata 2, las aceleraciones lineales en los orígenes son:

$$ {}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P2_{O_1}} = {}^{1}R_{P2_0} \cdot \left[{}^{0}\ddot{\vec{r}}_{P2_{O_0}} + {}^{0}\vec{\omega}_{P2_0} \times \left({}^{0}\vec{\omega}_{P2_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P2_{O_0O_1}} \right) + {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P2_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P2_{O_0O_1}} \right] $$

$$ {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P2_{O_2}} = {}^{2}R_{P2_1} \cdot \left[{}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P2_{O_1}} + {}^{1}\vec{\omega}_{P2_1} \times \left({}^{1}\vec{\omega}_{P2_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P2_{O_1O_2}} \right) + {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P2_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P2_{O_1O_2}} \right] $$

Ec. 2.77

$$ {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{P2_{O_3}} = {}^{3}R_{P2_2} \cdot \left[{}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P2_{O_2}} + {}^{2}\vec{\omega}_{P2_2} \times \left({}^{2}\vec{\omega}_{P2_2} \times {}^{2}\vec{r}_{P2_{O_2O_3}} \right) + {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P2_2} \times {}^{2}\vec{r}_{P2_{O_2O_3}} \right] + \left[{}^{3}\vec{z}_3 \cdot \ddot{q}_{23} + 2\left({}^{3}\vec{\omega}_{P2_3} \times {}^{3}\vec{z}_3 \cdot \dot{q}_{23} \right) \right] $$

Ec. 2.78

Mientras que, para el cilindro y vástago de la pata 3 las aceleraciones lineales en los orígenes de los tres sistemas coordenados son:

$$ {}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P3_{O_1}} = {}^{1}R_{P3_0} \cdot \left[{}^{0}\ddot{\vec{r}}_{P3_{O_0}} + {}^{0}\vec{\omega}_{P3_0} \times \left({}^{0}\vec{\omega}_{P3_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P3_{O_0O_1}} \right) + {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P3_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P3_{O_0O_1}} \right] $$

$$ {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P3_{O_2}} = {}^{2}R_{P3_1} \cdot \left[{}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P3_{O_1}} + {}^{1}\vec{\omega}_{P3_1} \times \left({}^{1}\vec{\omega}_{P3_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P3_{O_1O_2}} \right) + {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P3_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P3_{O_1O_2}} \right] $$

Ec. 2.79

$$ {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{P3_{O_3}} = {}^{3}R_{P3_2} \cdot \left[{}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P3_{O_2}} + {}^{2}\vec{\omega}_{P3_2} \times \left({}^{2}\vec{\omega}_{P3_2} \times {}^{2}\vec{r}_{P3_{O_2O_3}} \right) + {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{P3_2} \times {}^{2}\vec{r}_{P3_{O_2O_3}} \right] + \left[{}^{3}\vec{z}_3 \cdot \ddot{q}_{33} + 2\left({}^{3}\vec{\omega}_{P3_3} \times {}^{3}\vec{z}_3 \cdot \dot{q}_{33} \right) \right] $$

Ec. 2.80

<u>Pata 4</u>

En el caso de la pata 4, el cilindro está unido a la plataforma fija mediante una articulación de revolución, con su sistema de coordenadas 1 (Figura 2.14). Entonces, la aceleración lineal del origen (Provenzano, 2001) del sistema de coordenadas 1 es:

$$ {}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P4_{O_1}} = {}^{1}R_{P4_0} \cdot \left[{}^{0}\ddot{\vec{r}}_{P4_{O_0}} + {}^{0}\vec{\omega}_{P4_0} \times \left({}^{0}\vec{\omega}_{P4_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P4_{O_0O_1}} \right) + {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{P4_0} \times {}^{0}\vec{r}_{P4_{O_0O_1}} \right] $$

Ec. 2.81

En el sistema de coordenadas 2 de la articulación prismática, que une el vástago y cilindro de la pata 4, la aceleración lineal del origen es:

$$ {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P4_{O_2}} = {}^{2}R_{P4_1} \cdot \left[{}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P4_{O_1}} + {}^{1}\vec{\omega}_{P4_1} \times \left({}^{1}\vec{\omega}_{P4_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P4_{O_1O_2}} \right) + {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{P4_1} \times {}^{1}\vec{r}_{P4_{O_1O_2}} \right] + \left[{}^{2}\vec{z}_2 \cdot \ddot{q}_{42} + 2\left({}^{2}\vec{\omega}_{P4_2} \times {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{q}_{42} \right) \right] $$

Ec. 2.82

Donde:

$$ {}^{0}\ddot{\vec{r}}_{P4_{O_0}} = [0 \quad 0 \quad -g]^T $$

Ec. 2.83

Plataforma móvil

La aceleración lineal en el origen, usando la Ec. 1.26 (Provenzano, 2001), de cada uno de los cuatro sistemas de referencia establecidos en la plataforma móvil (Figura 2.15) están definidos como:

$$ \begin{aligned} {}^{1}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_1}} &= {}^{1}R_{PM_0} \cdot \left[{}^{0}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_0}} + {}^{0}\vec{\omega}_{PM_0} \times \left({}^{0}\vec{\omega}_{PM_0} \times {}^{0}\vec{r}_{PM_{O_0O_1}} \right) + {}^{0}\dot{\vec{\omega}}_{PM_0} \times {}^{0}\vec{r}_{PM_{O_0O_1}} \right] \\ &\quad + \left[{}^{1}\vec{z}_1 \cdot \ddot{X}_m + 2\left({}^{1}\vec{\omega}_{PM_1} \times {}^{1}\vec{z}_1 \cdot \dot{X}_m \right) \right] \\ {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_2}} &= {}^{2}R_{PM_1} \cdot \left[{}^{1}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_1}} + {}^{1}\vec{\omega}_{PM_1} \times \left({}^{1}\vec{\omega}_{PM_1} \times {}^{1}\vec{r}_{PM_{O_1O_2}} \right) + {}^{1}\dot{\vec{\omega}}_{PM_1} \times {}^{1}\vec{r}_{PM_{O_1O_2}} \right] \\ &\quad + \left[{}^{2}\vec{z}_2 \cdot \ddot{Z}_m + 2\left({}^{2}\vec{\omega}_{PM_2} \times {}^{2}\vec{z}_2 \cdot \dot{Z}_m \right) \right] \\ {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_3}} &= {}^{3}R_{PM_2} \cdot \left[{}^{2}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_2}} + {}^{2}\vec{\omega}_{PM_2} \times \left({}^{2}\vec{\omega}_{PM_2} \times {}^{2}\vec{r}_{PM_{O_2O_3}} \right) + {}^{2}\dot{\vec{\omega}}_{PM_2} \times {}^{2}\vec{r}_{PM_{O_2O_3}} \right] \\ {}^{4}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_4}} &= {}^{4}R_{PM_3} \cdot \left[{}^{3}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_3}} + {}^{3}\vec{\omega}_{PM_3} \times \left({}^{3}\vec{\omega}_{PM_3} \times {}^{3}\vec{r}_{PM_{O_3O_4}} \right) + {}^{3}\dot{\vec{\omega}}_{PM_3} \times {}^{3}\vec{r}_{PM_{O_3O_4}} \right] \end{aligned} $$

Ec. 2.84

Donde:

$$ {}^{0}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_0}} = [0 \quad 0 \quad -g]^T $$

Ec. 2.85

2.1.7. Ecuaciones explicitas de Gibbs-Appell para cadena cerrada

Pata 1, 2 y 3

El modelo lineal en cadena abierta de la pata 1, usando la Ec. 1.27 (Farhat, 2006), es:

$$ \vec{\tau}_{P1} = K_{P1} \cdot \vec{\Phi}_{P1_i} $$

Ec. 2.86

Donde:

$$ K_{P1} = D_{P1} \cdot [A_{P1} \quad B1_{P1} \quad B2_{P1}] $$

Ec. 2.87

En el vector $\vec{\Phi}_{P1_i}$ se agrupan la propiedades de masa, primer momento de masa y momentos de inercia del cilindro y el vástago de la pata 1. Los elementos del vector con subíndices 11 se relacionan con las propiedades del cilindro de la pata 1, y los subíndices 12 se relacionan con el vástago de la pata 1.

Como se puede ver en las restricciones cinemáticas de la pata 1, existen tres sistemas de coordenadas (dos articulaciones de revolución y una prismática) en análisis y únicamente dos elementos rígidos (cilindro y vástago), esto se debe a que la articulación universal se considera como dos articulaciones de revolución. En este caso para que exista coherencia en las dimensiones de las matrices $\mathrm{K_{P1}}$ y $\vec{\Phi}_{\mathrm{P1_i}}$ se considera que la primera articulación de la junta universal está asociado a un elemento de parámetros inerciales nulos ($\mathrm{Ixx_{11'}}$, $\mathrm{Ixy_{11'}}$, $\mathrm{Ixz_{11'}}$, $\mathrm{Iyy_{11'}}$, $\mathrm{Iyz_{11'}}$, $\mathrm{Izz_{11'}}$, $\mathrm{mx_{11'}}$, $\mathrm{my_{11'}}$, $\mathrm{mz_{11'}}$ y $\mathrm{m_{11'}}$), y se elimina las columnas de $\mathrm{K_{P1}}$ (Farhat, 2006) asociadas a las filas de los parámetros inerciales ($\vec{\Phi}_{\mathrm{P1_i}}$) consideradas nulas:

$$\vec{\Phi}_{P1_i} = \begin{bmatrix} Ixx_{12} \\ Ixy_{12} \\ Ixz_{12} \\ Iyy_{12} \\ Iyz_{12} \\ Izz_{12} \\ Ixx_{11} \\ Ixy_{11} \\ Ixz_{11} \\ Iyy_{11} \\ Iyz_{11} \\ Izz_{11} \\ Ixx_{11'} \\ Ixy_{11'} \\ Ixz_{11'} \\ Iyy_{11'} \\ Iyz_{11'} \\ Izz_{11'} \\ mx_{12} \\ my_{12} \\ mz_{12} \\ mx_{11} \\ my_{11} \\ mz_{11} \\ mx_{11'} \\ my_{11'} \\ mz_{11'} \\ m_{12} \\ m_{11} \\ m_{11'} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.88

Al aplicar la Ec. 1.30, la matriz $\mathrm{D_{P1}}$ de los tres sistemas de referencia de la pata 1 se define como:

$$\mathrm{D_{P1}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^3 \dot{\vec{\omega}}_3}{\partial \ddot{q}_{13}}\right)^T & 0_{1x3} & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & \left(\frac{\partial^2 \dot{\vec{\omega}}_2}{\partial \ddot{q}_{12}}\right)^T & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & \left(\frac{\partial^1 \dot{\vec{\omega}}_1}{\partial \ddot{q}_{11}}\right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] & 0_{1x3} & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & [0 \quad 0 \quad 1] & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & [0 \quad 0 \quad 1] \end{bmatrix}$$

Ec. 2.89

Además, la Ec. 1.31 permite establecer la matriz $\mathrm{A_{P1}}$ para los tres sistemas de coordenadas de la pata 1 como:

$$\mathrm{A_{P1}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.90

Donde los componentes de $\mathrm{A_{P1}}$, de acuerdo a las expresiones de Mata, Benimeli, Farhat & Valera (2005), son:

Tabla 2.3. Componentes de la matriz A para la pata 1.

Fila 1	Fila 2	Fila 3
$\boldsymbol{A_{11} = 0_{3x6}}$	$A_{21} = {}^2R_{P1_3} \cdot {}^3\hat{\eta}_{P1_3}$	$A_{31} = {}^1R_{P1_3} \cdot {}^3\hat{\eta}_{P1_3} = {}^1R_{P1_2} \cdot {}^2R_{P1_3} . {}^3\hat{\eta}_{P1_3}$
$\boldsymbol{A_{12} = 0_{3x6}}$	$A_{22} = {}^2R_{P1_2} \cdot {}^2\hat{\eta}_{P1_2}$	$A_{32} = {}^1R_{P1_2} \cdot {}^2\hat{\eta}_{P1_2}$
$\boldsymbol{A_{13} = 0_{3x6}}$	$A_{23} = 0_{3x6}$	$A_{33} = {}^1R_{P1_1} \cdot {}^1\hat{\eta}_{P1_1}$

(Fuente: Autor)

La matriz $\mathrm{B1_{P1}}$, para los tres sistemas de coordenadas establecidos en la pata 1, es:

$$B1_{P1} = \begin{bmatrix} {}^3\widetilde{H}_3 & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ {}^2\widetilde{H}_3 & {}^2\widetilde{H}_2 & 0_{3x3} \\ {}^1\widetilde{H}_3 & {}^1\widetilde{H}_2 & {}^1\widetilde{H}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.91

Los componentes de $B1_{P1}$ se determinan al aplicar la Ec. 1.32 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), de acuerdo al tipo de articulación en análisis, por lo que se tiene:

Tabla 2.4. Componentes de la matriz $B1$ para la pata 1.

Fila 1	Fila 2	Fila 3
$\boldsymbol{{}^{3}\widetilde{H}_3 = {}^{3}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\widetilde{\eta}_{P1_3}}$	${}^{2}\widetilde{H}_3 = {}^{2}R_{P1_3} \cdot \left({}^{3}\tilde{r}_{P1_{O_2O_3}} \cdot {}^{3}\tilde{\eta}_{P1_3} - {}^{3}\ddot{\tilde{r}}_{P1_{O_3}}\right)$ ${}^{2}\widetilde{H}_2 = {}^{2}R_{P1_2} \cdot \left({}^{2}\tilde{r}_{P1_{O_2O_2}} \cdot {}^{2}\tilde{\eta}_{P1_2} - {}^{2}\ddot{\tilde{r}}_{P1_{O_2}}\right)$	${}^{1}\widetilde{H}_3 = {}^{1}R_{P1_3} \cdot \left({}^{3}\tilde{r}_{P1_{O_1O_3}} \cdot {}^{3}\tilde{\eta}_{P1_3} - {}^{3}\ddot{\tilde{r}}_{P1_{O_3}}\right)$ ${}^{1}\widetilde{H}_2 = {}^{1}R_{P1_2} \cdot \left({}^{2}\tilde{r}_{P1_{O_1O_2}} \cdot {}^{2}\tilde{\eta}_{P1_2} - {}^{2}\ddot{\tilde{r}}_{P1_{O_2}}\right)$ ${}^{1}\widetilde{H}_1 = {}^{1}R_{P1_1} \cdot \left({}^{1}\tilde{r}_{P1_{O_1O_1}} \cdot {}^{1}\tilde{\eta}_{P1_1} - {}^{1}\ddot{\tilde{r}}_{P1_{O_1}}\right)$

(Fuente: Autor)

Para los tres sistemas de coordenadas de la pata 1, la matriz $\mathrm{B2_{P1}}$ se determina como:

$$B2_{P1} = \begin{bmatrix} {}^{3}\vec{h}_3 & \vec{0} & \vec{0} \\ {}^{2}\vec{h}_3 & {}^{2}\vec{h}_2 & \vec{0} \\ {}^{1}\vec{h}_3 & {}^{1}\vec{h}_2 & {}^{1}\vec{h}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.92

Los componentes de $B2_{P1}$ se determinan al aplicar la Ec. 1.33 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), de acuerdo al tipo de articulación en análisis, entonces:

Tabla 2.5. Componentes de la matriz $B2$ para la pata 1.

Fila 1	Fila 2	Fila 3
$\boldsymbol{{}^{3}\vec{h}_3 = {}^{3}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_3}}}$	${}^{2}\vec{h}_3 = {}^{2}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\tilde{r}_{P1_{O_2O_3}} \cdot {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_3}}$ ${}^{2}\vec{h}_2 = {}^{2}R_{P1_2} \cdot {}^{2}\tilde{r}_{P1_{O_2O_2}} \cdot {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_2}}$	${}^{1}\vec{h}_3 = {}^{1}R_{P1_3} \cdot {}^{3}\tilde{r}_{P1_{O_1O_3}} \cdot {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_3}}$ ${}^{1}\vec{h}_2 = {}^{1}R_{P1_2} \cdot {}^{2}\tilde{r}_{P1_{O_1O_2}} \cdot {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_2}}$ ${}^{1}\vec{h}_1 = {}^{1}R_{P1_1} \cdot {}^{1}\tilde{r}_{P1_{O_1O_1}} \cdot {}^{1}\ddot{\vec{r}}_{P1_{O_1}}$

(Fuente: Autor)

Por otro lado, los términos ${}^{i}\hat{\eta}_{P1_i}$ y ${}^{i}\tilde{\eta}_{P1_i}$ se determinan mediante la Ec. 1.21, con base en las expresiones que se determinaron en la sección 2.1.5.

El modelo lineal de la pata 2, se establece de forma análoga al de la pata 1 por su similitud en su configuración mecánica (Benimeli, 2005), así:

$$\vec{\tau}_{P2} = K_{P2} \cdot \vec{\Phi}_{P2_i}$$

Ec. 2.93

Donde:

$$K_{P2} = D_{P2} \cdot [A_{P2} \quad B1_{P2} \quad B2_{P2}]$$

Ec. 2.94

y

$$\vec{\Phi}_{P2_i} = \begin{bmatrix} Ixx_{22} \\ Ixy_{22} \\ Ixz_{22} \\ Iyy_{22} \\ Iyz_{22} \\ Izz_{22} \\ Ixx_{21} \\ Ixy_{21} \\ Ixz_{21} \\ Iyy_{21} \\ Iyz_{21} \\ Izz_{21} \\ mx_{22} \\ my_{22} \\ mz_{22} \\ mx_{21} \\ my_{21} \\ mz_{21} \\ m_{22} \\ m_{21} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.95

Los componentes $\mathrm{D_{P2}}$, $\mathrm{A_{P2}}$, $\mathrm{B1_{P2}}$ y $\mathrm{B2_{P2}}$ de la Ec. 2.94, se determinan bajo el mismo proceso de las matrices $\mathrm{D_{P1}}$, $\mathrm{A_{P1}}$, $\mathrm{B1_{P1}}$ y $\mathrm{B2_{P1}}$, en función de las variables generalizadas de la pata 2 dentro del mismo.

En el vector que agrupa las propiedades inerciales de los cuerpos rígidos que conforman la pata 2 ($\vec{\Phi}_{\mathrm{P2_i}}$), los elementos con subíndices 21 se refieren a las propiedades mecánicas del cilindro de la pata 2, y los subíndices 22 se asocian a las propiedades de masa, primer momento de masa y momento de inercia del vástago en la pata 2.

Por otro lado, el modelo lineal de la pata 3 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), se establece como:

$$\vec{\tau}_{P3} = K_{P3} \cdot \vec{\Phi}_{P3_i}$$

Ec. 2.96

Donde:

$$K_{P3} = D_{P3} \cdot [A_{P3} \quad B1_{P3} \quad B2_{P3}]$$

Ec. 2.97

y

$$\vec{\Phi}_{P3_i} = \begin{bmatrix} Ixx_{32} \\ Ixy_{32} \\ Ixz_{32} \\ Iyy_{32} \\ Iyz_{32} \\ Izz_{32} \\ Ixx_{31} \\ Ixy_{31} \\ Ixz_{31} \\ Iyy_{31} \\ Iyz_{31} \\ Izz_{31} \\ mx_{32} \\ my_{32} \\ mz_{32} \\ mx_{31} \\ my_{31} \\ mz_{31} \\ m_{32} \\ m_{31} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.98

Los componentes $\mathrm{D_{P3}}$, $\mathrm{A_{P3}}$, $\mathrm{B1_{P3}}$ y $\mathrm{B2_{P3}}$ de la Ec. 2.97, se determinan bajo el mismo proceso de las matrices $\mathrm{D_{P1}}$, $\mathrm{A_{P1}}$, $\mathrm{B1_{P1}}$ y $\mathrm{B2_{P1}}$, en función de las variables generalizadas asociadas a los componentes de la pata 3. Además, en el vector $\vec{\Phi}_{\mathrm{P3_i}}$ los elementos con subíndices 31 se relacionan con las propiedades mecánicas del cilindro de la pata 3, y los subíndices 32 se asocian a las propiedades del vástago de la pata 3.

<u>Pata 4</u>

El modelo lineal de la pata 4 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), usando la Ec. 1.27, se establece como:

$$\vec{\tau}_{P4} = K_{P4} \cdot \vec{\Phi}_{P4_i}$$

Ec. 2.99

Donde:

$$K_{P4} = D_{P4} \cdot [A_{P4} \quad B1_{P4} \quad B2_{P4}]$$

Ec. 2.100

y

$$\vec{\Phi}_{P4_i} = \begin{bmatrix} Ixx_{42} \\ Ixy_{42} \\ Ixz_{42} \\ Iyy_{42} \\ Iyz_{42} \\ Izz_{42} \\ Ixx_{41} \\ Ixy_{41} \\ Ixz_{41} \\ Iyy_{41} \\ Iyz_{41} \\ Izz_{41} \\ mx_{42} \\ my_{42} \\ mz_{42} \\ mx_{41} \\ my_{41} \\ mz_{41} \\ m_{42} \\ m_{41} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.101

A diferencia de las patas 1, 2 y 3, de acuerdo con las restricciones cinemáticas de posición de la pata 4, existen dos sistemas de coordenadas asociados a dos articulaciones; por lo que, en la Ec. 2.101 los elementos de subíndice 11 se relacionan con las propiedades del cilindro de la pata 4, y los subíndices 12 se relacionan con el vástago de la pata 4, sin la necesidad de eliminar columnas de la matriz K_{P4} y las correspondientes filas del vector $\vec{\Phi}_{\mathrm{P4_i}}$.

Al aplicar la Ec. 1.30, la matriz D_{P4} (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005) para los dos sistemas de referencia de la pata 4 es:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{P4}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 \vec{\omega}_2}{\partial \ddot{q}_{42}}\right)^T & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & \left(\frac{\partial^1 \vec{\omega}_1}{\partial \ddot{q}_{41}}\right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & [0 \quad 0 \quad 1] \end{bmatrix}$$

Ec. 2.102

Mediante la Ec. 1.31 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), la matriz A_{P4} para los sistemas de coordenadas en las articulaciones de revolución y prismática en la pata 4, se establece como:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{P4}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.103

Los componentes de A_{P4} se establecen de acuerdo al tipo de articulación en análisis, mediante la Ec. 1.31, como:

Tabla 2.6. Componentes de la matriz A para la pata 4.

Fila 1	Fila 2
$\boldsymbol{A_{11} = 0_{3x6}}$	$A_{21} = {}^{1}R_{P4_2} \cdot {}^{2}\hat{\eta}_{P4_2}$
$\boldsymbol{A_{12} = 0_{3x6}}$	$A_{22} = {}^{1}R_{P4_1} \cdot {}^{1}\hat{\eta}_{P4_1}$

(Fuente: Autor)

Al aplicar la metodología de Mata, Benimeli, Farhat &Valera (2005), la matriz submatriz $\mathrm{B1_{P4}}$ para los dos sistemas de coordenadas establecidos en los elementos rígidos de la pata 4, se determina mediante:

$$B1_{P4} = \begin{bmatrix} {}^{2}\widetilde{H}_2 & 0_{3x3} \\ {}^{1}\widetilde{H}_2 & {}^{1}\widetilde{H}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.104

Los componentes de $B1_{P4}$, para los dos sistemas de coordenadas asociados a las articulaciones de la pata 4, son:

Tabla 2.7. Componentes de la matriz $B1$ para la pata 4.

Fila 1	Fila 2
$\boldsymbol{{}^{2}\widetilde{H}_2 = {}^{2}R_{P4_2} \cdot {}^{2}\widetilde{\eta}_{P4_2}}$	${}^{1}\widetilde{H}_2 = {}^{1}R_{P4_2} \cdot \left({}^{2}\tilde{r}_{P4_{O_1O_2}}\, {}^{2}\tilde{\eta}_{P4_2} - {}^{2}\tilde{\ddot{r}}_{P4_{O_2}}\right)$
	${}^{1}\widetilde{H}_1 = {}^{1}R_{P4_1} \cdot \left({}^{1}\tilde{r}_{P4_{O_1O_1}}\, {}^{1}\tilde{\eta}_{P4_1} - {}^{1}\tilde{\ddot{r}}_{P4_{O_1}}\right)$

(Fuente: Autor)

La submatriz $\mathrm{B2_{P4}}$, considerando las dos articulaciones de la pata 4, se determina al aplicar la Ec. 1.33 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005):

$$B2_{P4} = \begin{bmatrix} {}^{2}\vec{h}_2 & \vec{0} \\ {}^{1}\vec{h}_2 & {}^{1}\vec{h}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.105

Los componentes de la submatriz anterior son:

Tabla 2.8. Componentes de la matriz $B2$ para la pata 4.

Fila 1	Fila 2
$\boldsymbol{{}^{2}\vec{h}_2 = {}^{2}R_{P4_2} \cdot {}^{2}\vec{\ddot{r}}_{P4_{O_2}}}$	${}^{1}\vec{h}_2 = {}^{1}R_{P4_2} \cdot {}^{2}\tilde{r}_{P4_{O_1O_2}} \cdot {}^{2}\vec{\ddot{r}}_{P4_{O_2}}$
	${}^{1}\vec{h}_1 = {}^{1}R_{P4_1} \cdot {}^{1}\tilde{r}_{P4_{O_1O_1}} \cdot {}^{1}\vec{\ddot{r}}_{P4_{O_1}}$

(Fuente: Autor)

Plataforma móvil

Finalmente, el modelo lineal de la plataforma móvil, al aplicar la metodología de Mata, Benimeli, Farhat &Valera (2005), se define como:

$$\vec{\tau}_{PM} = K_{PM} \cdot \vec{\Phi}_{PM_i}$$

Ec. 2.106

Donde:

$$K_{PM} = D_{PM} \cdot [A_{PM} \quad B1_{PM} \quad B2_{PM}]$$

Ec. 2.107

y

$$\vec{\Phi}_{PM_i} = \begin{bmatrix} Ixx_m \\ Ixy_m \\ Ixz_m \\ Iyy_m \\ Iyz_m \\ Izz_m \\ I_{m_{GDL3_{6x1}}} \\ I_{m_{GDL2_{6x1}}} \\ I_{m_{GDL1_{6x1}}} \\ mx_m \\ my_m \\ mz_m \\ (m_m.\vec{r}_G)_{GDL3_{3x1}} \\ (m_m.\vec{r}_G)_{GDL2_{3x1}} \\ (m_m.\vec{r}_G)_{GDL1_{3x1}} \\ m_m \\ m_{GDL3} \\ m_{GDL2} \\ m_{GDL1} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.108

En el caso de la plataforma móvil se analizan los cuatro grados de libertad (GDL) como cuatro articulaciones, sin embargo, existe un elemento rígido. De acuerdo con Farhat (2006), cuando existen más sistemas de referencia que elementos rígidos, se eliminan las propiedades mecánicas de las primeras articulaciones asociados a los sistemas de referencia hasta equilibrar con el número de elementos rígidos, entonces las propiedades inerciales ($\vec{\Phi}_{PM_i}$) de la plataforma móvil se asignan únicamente a la articulación relacionada con el sistema de referencia 4 (sistema m) de la plataforma móvil, asumiendo que las demás articulaciones están asociadas a un elemento rígido con propiedades inerciales nulas ($I_{m_{GDL3_{6x1}}}$, $I_{m_{GDL2_{6x1}}}$, $I_{m_{GDL1_{6x1}}}$, $(m_m.\vec{r}_G)_{GDL3_{3x1}}$,

$(\mathrm{m_m}.\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{G})_{\mathrm{GDL2}_{3x1}}$, $(\mathrm{m_m}.\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{G})_{\mathrm{GDL1}_{3x1}}$, $\mathrm{m_{GDL3}}$, $\mathrm{m_{GDL2}}$ y $\mathrm{m_{GDL1}}$) y eliminando sus correspondientes columnas de la matriz $\mathrm{K_{PM}}$.

La matriz $\mathrm{D_{PM}}$ (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005) para los cuatro sistemas de referencia de la plataforma móvil, al aplicar la Ec. 1.30 es:

$$\mathrm{D_{PM}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^4 \dot{\vec{\omega}}_4}{\partial \ddot{\psi}}\right)^T & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & \left(\frac{\partial^3 \dot{\vec{\omega}}_3}{\partial \ddot{\theta}}\right)^T & 0_{1x3} & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & \left(\frac{\partial^2 \dot{\vec{\omega}}_2}{\partial \ddot{Z}_m}\right)^T & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & \left(\frac{\partial^1 \dot{\vec{\omega}}_1}{\partial \ddot{X}_m}\right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1] & 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & [0 \quad 0 \quad 1] & 0_{1x3} & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & [0 \quad 0 \quad 1] & 0_{1x3} \\ 0_{1x3} & 0_{1x3} & 0_{1x3} & [0 \quad 0 \quad 1] \end{bmatrix}$$

Ec. 2.109

La matriz $\mathrm{A_{PM}}$ (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), para cuatro sistemas de coordenadas de la plataforma móvil, se establece como:

$$\mathrm{A_{PM}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.110

Donde los componentes de $\mathrm{A_{PM}}$, considerando cada articulación de la plataforma móvil, se establecen como:

Tabla 2.9. Componentes de la matriz A para la plataforma móvil.

Fila 1	Fila 2	Fila 3	Fila 4
$\boldsymbol{A_{11}}$ $= \boldsymbol{{}^4R_{PM_4} \cdot {}^4\hat{\eta}_{PM_4}}$	$A_{21} = {}^3R_{PM_4} \cdot {}^4\hat{\eta}_{PM_4}$	$A_{31} = 0_{3x6}$	$A_{41} = 0_{3x6}$
$\boldsymbol{A_{12} = 0_{3x6}}$	$A_{22} = {}^3R_{PM_3} \cdot {}^3\hat{\eta}_{PM_3}$	$A_{32} = 0_{3x6}$	$A_{42} = 0_{3x6}$
$\boldsymbol{A_{13} = 0_{3x6}}$	$A_{23} = 0_{3x6}$	$A_{33} = 0_{3x6}$	$A_{43} = 0_{3x6}$
$\boldsymbol{A_{14} = 0_{3x6}}$	$A_{24} = 0_{3x6}$	$A_{34} = 0_{3x6}$	$A_{44} = 0_{3x6}$

(Fuente: Autor)

La submatriz $\mathrm{B1_{PM}}$, se establece al aplicar la Ec. 1.32 a los cuatro sistemas de coordenadas de la plataforma móvil:

$$B1_{PM} = \begin{bmatrix} {}^{4}\widetilde{H}_4 & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ {}^{3}\widetilde{H}_4 & {}^{3}\widetilde{H}_3 & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ {}^{2}\widetilde{H}_4 & {}^{2}\widetilde{H}_3 & {}^{2}\widetilde{H}_2 & 0_{3x3} \\ {}^{1}\widetilde{H}_4 & {}^{1}\widetilde{H}_3 & {}^{1}\widetilde{H}_2 & {}^{1}\widetilde{H}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.111

Los componentes de $B1_{PM}$ (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005), para los cuatro sistemas de coordenadas asociados a las cuatro articulaciones sobre la plataforma móvil, son:

Tabla 2.10. Componentes de la matriz $B1$ para la plataforma móvil.

Fila 1	Fila 2
$\boldsymbol{{}^{4}\widetilde{H}_4 = {}^{4}R_{PM_4} \cdot \left({}^{4}\tilde{r}_{PM_{O_4O_4}} \cdot {}^{4}\widetilde{\eta}_{PM_4} - {}^{4}\ddot{\tilde{r}}_{PM_{O_4}}\right)}$	$\boldsymbol{{}^{3}\widetilde{H}_4 = {}^{3}R_{PM_4} \cdot \left({}^{4}\tilde{r}_{PM_{O_3O_4}} \cdot {}^{4}\widetilde{\eta}_{PM_4} - {}^{4}\ddot{\tilde{r}}_{PM_{O_4}}\right)}$ $\boldsymbol{{}^{3}\widetilde{H}_3 = {}^{3}R_{PM_3} \cdot \left({}^{3}\tilde{r}_{PM_{O_3O_3}} \cdot {}^{3}\widetilde{\eta}_{PM_3} - {}^{3}\ddot{\tilde{r}}_{PM_{O_3}}\right)}$
Fila 3	**Fila 4**
$\boldsymbol{{}^{2}\widetilde{H}_4 = {}^{2}R_{PM_4} \cdot {}^{4}\widetilde{\eta}_{PM_4}}$ $\boldsymbol{{}^{2}\widetilde{H}_3 = {}^{2}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\widetilde{\eta}_{PM_3}}$ $\boldsymbol{{}^{2}\widetilde{H}_2 = {}^{2}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\widetilde{\eta}_{PM_2}}$	${}^{1}\widetilde{H}_4 = {}^{1}R_{PM_4} \cdot {}^{4}\widetilde{\eta}_{PM_4}$ ${}^{1}\widetilde{H}_3 = {}^{1}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\widetilde{\eta}_{PM_3}$ ${}^{1}\widetilde{H}_2 = {}^{1}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\widetilde{\eta}_{PM_2}$ ${}^{1}\widetilde{H}_1 = {}^{1}R_{PM_1} \cdot {}^{1}\widetilde{\eta}_{PM_1}$

(Fuente: Autor)

Al aplicar la Ec. 1.33 (Mata, Benimeli, Farhat, & Valera, 2005) en los cuatro sistemas coordenados asociados a las articulaciones de la plataforma móvil, la matriz $\mathrm{B2_{PM}}$ es:

$$B2_{PM} = \begin{bmatrix} {}^{4}\vec{h}_4 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ {}^{3}\vec{h}_4 & {}^{3}\vec{h}_3 & \vec{0} & \vec{0} \\ {}^{2}\vec{h}_4 & {}^{2}\vec{h}_3 & {}^{2}\vec{h}_2 & \vec{0} \\ {}^{1}\vec{h}_4 & {}^{1}\vec{h}_3 & {}^{1}\vec{h}_2 & {}^{1}\vec{h}_1 \end{bmatrix}$$

Ec. 2.112

Los componentes de la Ec. 2.112, para las articulaciones de la plataforma móvil, son:

Tabla 2.11. Componentes de la matriz $B2$ para la plataforma móvil.

Fila 1	Fila 2
${}^{4}\vec{h}_4 = {}^{4}R_{PM_4} \cdot {}^{4}\tilde{r}_{PM_{O_4O_4}} \cdot {}^{4}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_4}}$	${}^{3}\vec{h}_4 = {}^{3}R_{PM_4} \cdot {}^{4}\tilde{r}_{PM_{O_3O_4}} \cdot {}^{4}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_4}}$ ${}^{3}\vec{h}_3 = {}^{3}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\tilde{r}_{PM_{O_3O_3}} \cdot {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_3}}$
Fila 3	**Fila 4**
${}^{2}\vec{h}_4 = {}^{2}R_{PM_4} \cdot {}^{4}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_4}}$ ${}^{2}\vec{h}_3 = {}^{2}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_3}}$ ${}^{2}\vec{h}_2 = {}^{2}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_2}}$	${}^{1}\vec{h}_4 = {}^{1}R_{PM_4} \cdot {}^{4}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_4}}$ ${}^{1}\vec{h}_3 = {}^{1}R_{PM_3} \cdot {}^{3}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_3}}$ ${}^{1}\vec{h}_2 = {}^{1}R_{PM_2} \cdot {}^{2}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_2}}$ ${}^{1}\vec{h}_1 = {}^{1}R_{PM_1} \cdot {}^{1}\ddot{\vec{r}}_{PM_{O_1}}$

(Fuente: Autor)

<u>Robot paralelo 3UPS + 1RPU</u>

Hasta el momento, se han desarrollado los modelos dinámicos lineales en parámetros inerciales para las cadenas abiertas de la pata 1, 2, 3, 4 y la plataforma móvil. De acuerdo con Farhat (2006), para establecer el modelo dinámico lineal en parámetros inerciales, en cadena abierta, del robot paralelo 3UPS + 1RPU se deben asociar todas las cadenas abiertas expuestas anteriormente, de forma que:

$$\vec{\tau} = K_1 \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 2.113

Donde:

$$K_{1_{15x90}} = \begin{bmatrix} K_{P1} & 0_{3\times20} & 0_{3\times20} & 0_{3\times20} & 0_{3\times10} \\ 0_{3\times20} & K_{P2} & 0_{3\times20} & 0_{3\times20} & 0_{3\times10} \\ 0_{3\times20} & 0_{3\times20} & K_{P3} & 0_{3\times20} & 0_{3\times10} \\ 0_{2\times20} & 0_{2\times20} & 0_{2\times20} & K_{P4} & 0_{2\times10} \\ 0_{4\times20} & 0_{4\times20} & 0_{4\times20} & 0_{4\times20} & K_{PM} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.114

y

$$\vec{\Phi}_{i_{90x1}} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{P1_i} \\ \vec{\Phi}_{P2_i} \\ \vec{\Phi}_{P3_i} \\ \vec{\Phi}_{P4_i} \\ \vec{\Phi}_{PM_i} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.115

En la Ec. 2.114 se pueden observar 15 filas, las cuales están asociadas al número de variables generalizadas establecidas para el robot paralelo (q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23},

q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{41}, q_{42}, X_m, Z_m, θ, ψ). Además, el número de columnas de la Ec. 2.114 concuerda con los 90 parámetros inerciales del vector $\vec{\Phi}_i$. Estos 90 parámetros provienen de los 10 parámetros inerciales (6 momentos inerciales, 3 primeros momentos de masa y la masa), asociados a los 9 elementos rígidos que tienen movilidad en el robot paralelo 3UPS + 1RPU, estos son la plataforma móvil, y los 4 cilindros y 4 vástagos de las patas 1, 2, 3, 4.

Finalmente, debido a que las articulaciones dependientes son pasivas o iguales a cero, podemos emplear la Ec. 1.36 (Farhat, 2006) para establecer el modelo dinámico lineal en parámetros inerciales (al aplicar las ecuaciones explicitas de Gibbs-Appell), en cadena cerrada, del robot paralelo 3UPS + 1RPU, así:

$$\vec{\tau}_i = [K_i - X^T \cdot K_d] \cdot \vec{\Phi}_i$$
$$\vec{\tau}_i = K \cdot \vec{\Phi}_i$$

Ec. 2.116

La matriz K_i se obtiene al extraer las filas de la matriz K_1 asociadas a las variables independientes, es decir a los cuatro actuadores lineales (q_{13}, q_{23}, q_{33} y q_{42}). De la Ec. 2.89 se observa que la fila 1 de la matriz K_{P1} (3 filas y 20 columnas) se relaciona con la variable q_{13}, de forma similar la primera fila de la matriz K_{P2} (3 filas y 20 columnas) o la fila 4 de la matriz K_1 (ver Ec. 2.114) se relaciona con la variable q_{23}; la fila 7 de la matriz K_1 se relaciona con la variable q_{33} y finalmente la primera fila de la matriz K_{P4} (2 filas y 20 columnas) o la fila 10 de la matriz K_1 se relaciona con la variable q_{42}. Es decir:

$$K_{i_{4x90}} = [K_1(1,:) \quad K_1(4,:) \quad K_1(7,:) \quad K_1(10,:)]^T$$

Ec. 2.117

La matriz K_d se obtiene al extraer las filas de la matriz K_1(ver Ec. 2.114) que no fueron seleccionadas como parte de la matriz K_i así:

$$K_{d_{11x90}} = [K_1(2:3,:) \quad K_1(5:6,:) \quad K_1(8:9,:) \quad K_1(11:15,:)]^T$$

Ec. 2.118

La matriz $\mathrm{A_i}$ se obtiene al extraer las columnas de la matriz A (ver Ec. 2.49) que se asocian con las variables generalizadas independientes (filas de la Ec. 2.50). Específicamente, la columna 1 de A (11 filas y 15 columnas) se asocia con q_{13}, la columna 4 con q_{23}, la columna 7 con q_{33} y la columna 10 con q_{42}, así:

$$A_{i_{11x4}} = [A(:,1) \quad A(:,4) \quad A(:,7) \quad A(:,10)]$$

Ec. 2.119

La matriz $\mathrm{A_d}$ se obtiene de las columnas que no fueron extraídas de la matriz A para formar la matriz $\mathrm{A_i}$, así:

$$A_{d_{11x11}} = [A(:,2:3) \quad A(:,5:6) \quad A(:,8:9) \quad A(:,11:15)]$$

Ec. 2.120

El modelo dinámico de la Ec. 2.116 a diferencia del modelo determinado por el trabajo de Aquino & Pozo (2017), se puede expresar de forma explícita (lineal) con respecto a los parámetros inerciales. Otra diferencia con el trabajo de Aquino & Pozo (2017), es que el modelo dinámico de este trabajo emplea el principio de mínima acción de Gauss para eliminar las fuerzas internas que se generan al determinar el modelo en cadena cerrada simplificando el cálculo matemático requerido para resolver el problema de dinámica inversa.

En el ANEXO I se muestra en detalle, el algoritmo computacional para desarrollar las expresiones matemáticas que definen el modelo dinámico en parámetros inerciales del robot paralelo 3UPS+1RPU.

2.2. Modelo de fricción

<u>Pata 1, 2 y 3</u>

De acuerdo a la sección 1.3.1, el modelo de fricción más empleado en robots paralelos es el modelo de Coulomb y viscoso. En la cadena cinemática abierta formada por la pata 1 el modelo lineal de fricción está determinado mediante la Ec. 1.41, así:

$$\vec{\tau}_{f_{P1}} = K_{f_{P1}} \cdot \vec{\Phi}_{f_{P1}}$$

Ec. 2.121

Al aplicar la Ec. 1.39 (Díaz, 2009) a las tres articulaciones definidas en la pata 1 (q_{13}, q_{12} y q_{11}), la matriz de observación $K_{f_{P1}}$ y el vector de parámetros inerciales $\vec{\Phi}_{f_{P1}}$ son:

$$K_{f_{P1}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{13} & signo(\dot{q}_{13}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_{12} & signo(\dot{q}_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{q}_{11} & signo(\dot{q}_{11}) \end{bmatrix}$$

Ec. 2.122

$$\vec{\Phi}_{f_{P1}} = \begin{bmatrix} F_{v_{13}} \\ F_{c_{13}} \\ F_{v_{12}} \\ F_{c_{12}} \\ F_{v_{11}} \\ F_{c_{11}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.123

Por otro lado, debido a que la configuración mecánica de la pata 1 es similar a la de la pata 2, el modelo lineal de fricción está definido como:

$$\vec{\tau}_{f_{P2}} = K_{f_{P2}} \cdot \vec{\Phi}_{f_{P2}}$$

Ec. 2.124

Donde, de acuerdo con la Ec. 1.39 (Díaz, 2009), se tiene:

$$K_{f_{P2}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{23} & signo(\dot{q}_{23}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_{22} & signo(\dot{q}_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{q}_{21} & signo(\dot{q}_{21}) \end{bmatrix}$$

Ec. 2.125

$$\vec{\Phi}_{f_{P2}} = \begin{bmatrix} F_{v_{23}} \\ F_{c_{23}} \\ F_{v_{22}} \\ F_{c_{22}} \\ F_{v_{21}} \\ F_{c_{21}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.126

El modelo lineal de fricción para la cadena cinemática abierta de la pata 3 se determina de forma similar a las cadenas anteriores, es decir:

$$\vec{\tau}_{f_{P3}} = K_{f_{P3}} \cdot \vec{\Phi}_{f_{P3}}$$

Ec. 2.127

De acuerdo con la Ec. 1.39 (Díaz, 2009), $K_{f_{P3}}$ y $\vec{\Phi}_{f_{P3}}$ para las tres variables definidas para la pata 3 son:

$$K_{f_{P3}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{33} & signo(\dot{q}_{33}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_{32} & signo(\dot{q}_{32}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{q}_{31} & signo(\dot{q}_{31}) \end{bmatrix}$$

Ec. 2.128

$$\vec{\Phi}_{f_{P3}} = \begin{bmatrix} F_{v_{33}} \\ F_{c_{33}} \\ F_{v_{32}} \\ F_{c_{32}} \\ F_{v_{31}} \\ F_{c_{31}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.129

<u>Pata 4</u>

En el caso del modelo lineal de fricción para la cadena cinemática abierta de la pata 4, se tienen únicamente dos articulaciones, matemáticamente al aplicar la Ec. 1.41 se tiene:

$$\vec{\tau}_{f_{P4}} = K_{f_{P4}} \cdot \vec{\Phi}_{f_{P4}}$$

Ec. 2.130

Mediante la Ec. 1.39 (Díaz, 2009) la matriz de observación $K_{f_{P1}}$ y el vector de parámetros inerciales $\vec{\Phi}_{f_{P1}}$, para las dos articulaciones definidas en la pata 4 (q_{42} y q_{41}), son:

$$K_{f_{P4}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{42} & signo(\dot{q}_{42}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_{41} & signo(\dot{q}_{41}) \end{bmatrix}$$

Ec. 2.131

$$\vec{\Phi}_{f_{P4}} = \begin{bmatrix} F_{v_{42}} \\ F_{c_{42}} \\ F_{v_{41}} \\ F_{c_{41}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.132

Plataforma móvil

Debido a que las articulaciones definidas en la plataforma móvil son los grados de libertad del robot, es decir, físicamente no existen dichas articulaciones (Farhat, 2006), no se establece un modelo de fricción en este elemento.

Robot paralelo 3UPS + 1RPU

De acuerdo con Farhat (2006), el modelo lineal de fricción del robot paralelo en cadena abierta, se determina al agrupar las cuatro cadenas cinemáticas abiertas resulta:

$$\vec{\tau}_f = K_{1_f} \cdot \vec{\Phi}_f$$

Ec. 2.133

Donde:

$$K_{1_{f_{15x22}}} = \begin{bmatrix} K_{f_{P1}} & 0_{3\times6} & 0_{3\times6} & 0_{3\times4} \\ 0_{3\times6} & K_{f_{P2}} & 0_{3\times6} & 0_{3\times4} \\ 0_{3\times6} & 0_{3\times6} & K_{f_{P3}} & 0_{3\times4} \\ 0_{2\times6} & 0_{2\times6} & 0_{2\times6} & K_{f_{P4}} \\ 0_{4\times6} & 0_{4\times6} & 0_{4\times6} & 0_{4\times4} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.134

$$\vec{\Phi}_{f_{22x1}} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{f_{P1}} \\ \vec{\Phi}_{f_{P2}} \\ \vec{\Phi}_{f_{P3}} \\ \vec{\Phi}_{f_{P4}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.135

Finalmente, para expresar el modelo lineal de fricción en cadena cerrada, con base en el modelo de cadena abierta se tiene:

$$\vec{\tau}_{f_i} = \left[K_{f_i} - X^T \cdot K_{f_d}\right] \cdot \vec{\Phi}_f$$

$$\vec{\tau}_{f_i} = K_f \cdot \vec{\Phi}_f$$

Ec. 2.136

La expresión de la Ec. 2.136 se desarrolla de forma computacional a través de Matlab, esto se puede observar en el ANEXO I.

En la Ec. 2.136, la matriz $\mathrm{K_{f_i}}$ se obtiene al extraer las filas de la matriz $\mathrm{K_{1_f}}$ asociadas a las variables independientes, es decir a los cuatro actuadores lineales (q_{13}, q_{23}, q_{33} y q_{42}). Aplicando el criterio visto en la sección 2.1.7 para determinar la matriz $\mathrm{K_i}$, se tiene:

$$K_{f_{i_{4x22}}} = \begin{bmatrix} K_{1_f}(1,:) & K_{1_f}(4,:) & K_{1_f}(7,:) & K_{1_f}(10,:) \end{bmatrix}^T$$

Ec. 2.137

y

$$K_{f_{d_{11x22}}} = \begin{bmatrix} K_{1_f}(2:3,:) & K_{1_f}(5:6,:) & K_{1_f}(8:9,:) & K_{1_f}(11:15,:) \end{bmatrix}^T$$

Ec. 2.138

El modelo dinámico implícito determinado por Aquino & Pozo (2017), no establece un modelo de fricción, por lo cual al incluir el modelo de la Ec. 2.136 se mejora la aproximación del modelo dinámico del robot paralelo 3UPS + 1RPU a la realidad.

2.3. Modelo dinámico lineal en parámetros inerciales y de fricción

El modelo lineal en parámetros inerciales y parámetros de fricción para el robot paralelo 3UPS + 1RPU se determina al combinar la Ec. 2.116 y la Ec. 2.136, conforme a la Ec. 1.43 (Farhat, 2006), matemáticamente se tiene:

$$\vec{\tau} = K^* \cdot \vec{\Phi}$$

Ec. 2.139

Donde:

$$K^* = \begin{bmatrix} K_{4x90} & K_{f_{4x22}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.140

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{i_{90x1}} \\ \vec{\Phi}_{f_{22x1}} \end{bmatrix}$$

Ec. 2.141

El modelo dinámico lineal en parámetros inerciales considerando un modelo de fricción, del robot paralelo 3UPS+1RPU se define mediante 90 parámetros inerciales (sección 2.1.7) y 22 de fricción (sección 2.2). El modelo dinámico de la Ec. 2.139 se determina mediante computadora a través del algoritmo mostrado en el ANEXO I.

2.4. Diseño de trayectorias óptimas de identificación

Las trayectorias de identificación de este proyecto se desarrollan mediante series de Fourier finitas, posteriormente los parámetros de las series de Fourier ($q_{i0}, a_{ij}\ y\ b_{ij}$) generados aleatoriamente ingresan a un proceso de optimización con restricciones

lineales y no lineales (ver Figura 1.17), cuya función objetivo es el número de condiciones de la matriz de observación $\kappa(W)$.

El proceso de optimización con restricciones se realiza mediante el comando "$fmincon$" de Matlab (Vizcaíno, 2001). El objetivo de este comando es minimizar la función objetivo $f(x)$ sujeto a las restricciones (limites) lineales $A \cdot x \leq b$ y $A_{eq} \cdot x = b_{eq}$ (sección 1.7.3), además de las restricciones (limites) no lineales $c(x) \leq 0$ y $c_{eq}(x) = 0$ (sección 1.7.4 y 1.7.5). Las últimas dos restricciones se establecen mediante funciones desarrolladas en Matlab.

En el presente trabajo se generan dos trayectorias optimas diferentes una de identificación y la otra de verificación o prueba, cuyas formas cumplen con los límites de optimización (restricciones) descritas en el párrafo anterior. La primera trayectoria optima se denomina de identificación ya que permite identificar los parámetros base (Figura 1.15) que conforman el modelo dinámico simplificado del sistema mecánico del robot paralelo 3UPS + 1RPU. Mientras que la segunda trayectoria optima denominada de verificación, permite analizar la compatibilidad de los parámetros base es decir la exactitud con que el modelo simplificado (modelo en parámetros base) determina los esfuerzo generalizados requeridos en los actuadores lineales.

2.4.1. Parámetros para generación de trayectorias

Los parámetros generales para la generación y optimización de las trayectorias son:

- Número de armónicos (n_H): Se establecen 7 armónicos para la generación de series de Fourier finitas, debido a que después de varias pruebas realizadas (Figura 2.16), se determinó que si son menores a 7 las curvas son funciones sinusoidales puras y con un número mayor a 7 incrementa la complejidad del proceso de optimización, que a su vez afecta el tiempo de análisis computacional.

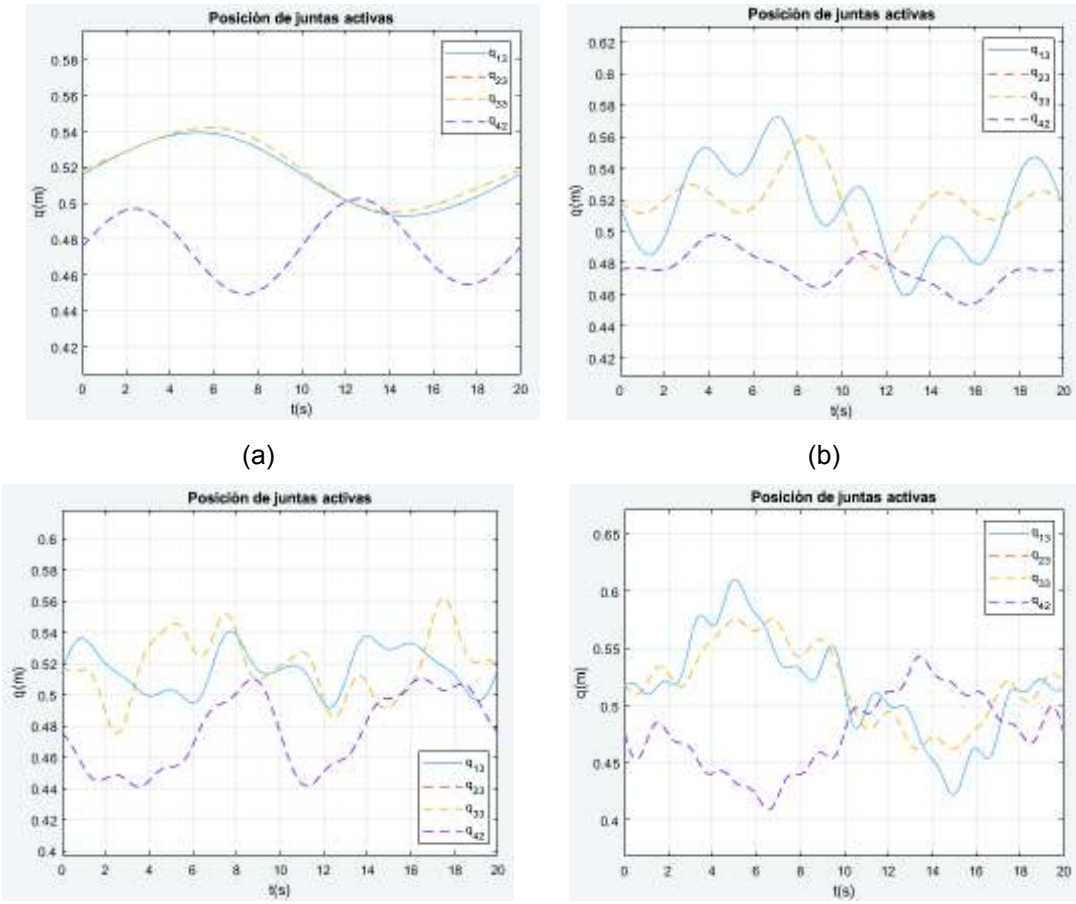


Figura 2.16. Trayectorias optimas: (a) $n_H = 2$. *(b)* $n_H = 6$. *(c)* $n_H = 10$. *(d)* $n_H = 14$.
(Fuente: Autor)

- Tiempo de muestreo: Con base en las características de simulación establecidas por Pulloquinga (2018), para mantener una precisión adecuada sin incrementar el proceso de optimización, se establece un periodo de muestreo de $dt = 0.1s$.

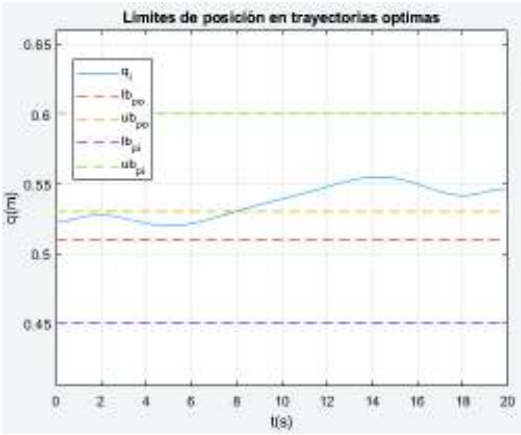


Figura 2.17. Límites de posición y estimación inicial para las trayectorias óptimas.
(Fuente: Autor)

- Límites para punto inicial de posición: Con base en el trabajo desarrollado por Aquino & Pozo (2017), se establece el rango para la posición inicial para las

trayectorias de posición (antes del proceso de optimización) de las articulaciones independientes (q_{13}, q_{23}, q_{33}, q_{42}), los vectores que establecen los limites inferiores lb_{p_0} y superiores ub_{p_0}(ver Figura 2.17) son :

$$lb_{p_0} = [\overbrace{0.4704}^{q_{13}} \quad \overbrace{0.4730}^{q_{23}} \quad \overbrace{0.4730}^{q_{33}} \quad \overbrace{0.4258}^{q_{33}}]$$
$$ub_{p_0} = [0.5625 \quad 0.5647 \quad 0.5647 \quad 0.5258]$$

Ec. 2.142

- Límites de posición para cada actuador lineal: Con base en el modelo tridimensional desarrollado por Pulloquinga (2018) para el robot paralelo en estudio, se establece los límites de posición mínimos lb_{p_i} y máximos ub_{p_i} (Figura 2.17) dentro de los cuales se deben mantener las trayectorias optimas generadas para las articulaciones independientes (q_{13}, q_{23}, q_{33}, q_{42}), es decir:

$$lb_{p_i} = [\overbrace{0.4257}^{q_{13}} \quad \overbrace{0.4285}^{q_{23}} \quad \overbrace{0.4285}^{q_{33}} \quad \overbrace{0.3758}^{q_{33}}]$$
$$ub_{p_i} = [0.6090 \quad 0.6110 \quad 0.6110 \quad 0.5753]$$

Ec. 2.143

- Límites de velocidad para cada actuador lineal: De acuerdo con el trabajo de Aquino & Pozo (2017), los actuadores lineales en las articulaciones activas del robot paralelo ($\dot{q}_{13}$, $\dot{q}_{23}$, $\dot{q}_{33}$ y $\dot{q}_{42}$), de acuerdo a especificaciones técnicas pueden alcanzar una velocidad mínima $lb_{v_i} = -0.01\, {}^{m}/_{s}$ hasta un máximo de $ub_{v_i} = 0.01\, {}^{m}/_{s}$.
- Rango de trabajo para las articulaciones esféricas: El ángulo de máxima apertura de las articulaciones esféricas, con base en el análisis geométrico del modelo mecánico tridimensional en Adams/View, es de ${}^{\alpha_{max}}/_{2} = 50°$ (Figura 2.18).

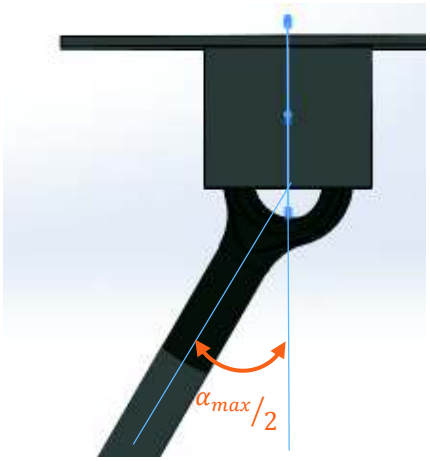


Figura 2.18. Angulo máximo para una articulación esférica del robot.
(Fuente: Autor)

2.4.2. Trayectoria de identificación de parámetros base

Con base en el tiempo de duración de los movimientos de rehabilitación de rodilla desarrollados en (Pulloquinga, 2018), se toma un promedio de 20 segundos como tiempo de ejecución (TS) para la curva optima que se empleará para la identificación de parámetros base. El número de elementos para la simulación se determina mediante:

$$N_{pts} = \frac{TS}{dt} + 1$$

Ec. 2.144

Por otra parte la frecuencia fundamental con la que se generarán la curvas se establece como el inverso de TS (ver sección 1.7.2). En la Figura 2.19 se muestra la trayectoria óptima para identificación del modelo dinámico en parámetros base, las cuales fueron obtenidas después de varios procesos de optimización de series finitas de Fourier. En este caso el número de condición κ es menor a 300, lo cual es aceptable para robot paralelos (Benimeli, 2005).

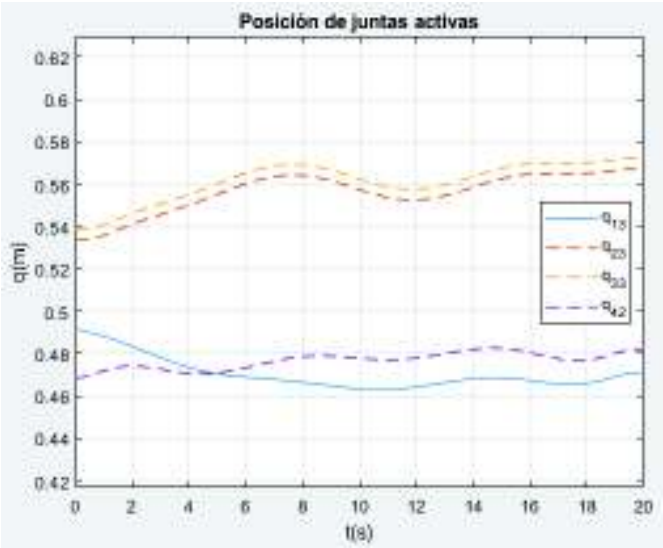


Figura 2.19. Trayectorias optimas de posición en los cuatro actuadores lineales, para identificación de parámetros base.
(Fuente: Autor)

2.4.3. Trayectoria para análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados

Para analizar la compatibilidad de los parámetros base identificados, se resuelve el problema de dinámica inversa para el modelo simplificado (modelo en parámetros base) para un conjunto de trayectorias optimas diferentes a las empleadas en el proceso de identificación de parámetros base. Las trayectorias optimas de verificación o prueba se

establecen con un tiempo de ejecución (TS) de $10s$, para diferenciarla de la trayectoria de identificación.

En la Figura 2.20, se muestran las trayectorias optimas de verificación de los cuatro actuadores lineales, que se emplean en el análisis de compatibilidad de parámetros base identificados. Se puede notar que en estas curvas generadas, la articulación q_{23} y q_{33} fueron generadas de forma idéntica. Si bien es cierto, las curvas de la Figura 2.20 pueden ser no optimizadas, en este trabajo se realiza la optimización de dichas curvas para evitar que el robot paralelo alcance puntos de singularidad.

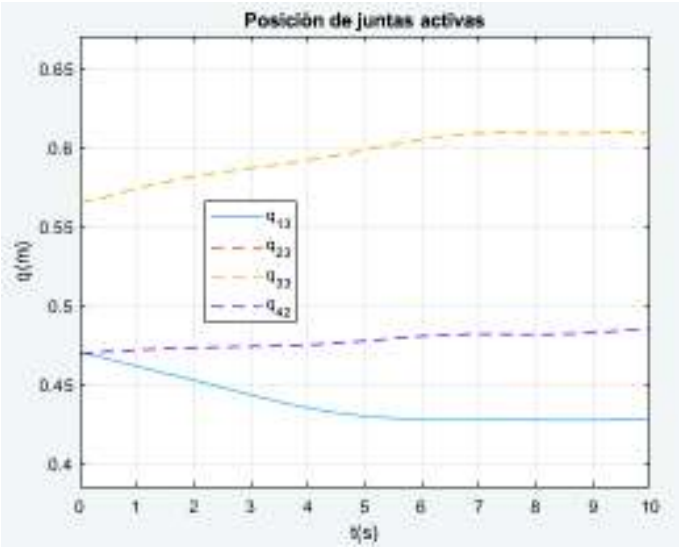


Figura 2.20. Trayectorias óptimas de posición de los cuatro actuadores lineales, para verificar los parámetros base identificados.
(Fuente: Autor)

2.5. Identificación de parámetros base

La identificación de parámetros base parte de las trayectorias de posición, velocidad y aceleración óptimas determinadas para las cuatro articulaciones activas (q_{13}, q_{23}, q_{33}, q_{42}) del robot paralelo 3UPS + 1RPU (Figura 2.19). Mediante la resolución de las restricciones cinemáticas de posición se determinan las trayectorias de posición para las articulaciones pasivas (q_{12}, q_{11}, q_{22}, q_{21}, q_{32}, q_{31}, q_{41}, ψ, θ, Z_m, X_m). Luego, mediante los datos de velocidad de las trayectorias óptimas generadas y la Ec. 1.13 se determinan las velocidades de las articulaciones pasivas, posteriormente, mediante la Ec. 1.14 se determinan las aceleraciones generalizadas para las articulaciones pasivas.

Con base en los datos de posición, velocidad y aceleración de las articulaciones activas (independientes) y pasivas (dependientes), se determinan las fuerzas generalizadas (F_{m_1}, F_{m_2}, F_{m_3} y F_{m_4}) de los cuatro actuadores lineales (Ec. 2.116). Finalmente mediante el método SVD se determinan los parámetros base identificados para el sistema robótico

3UPS+1RPU, tomando una tolerancia $\varepsilon = 1x10^{-9}$ para el algoritmo computacional de SVD. Este parámetro de tolerancia se establece en función de las especificaciones del computador empleado.

Por otro lado, las trayectorias óptimas de identificación de parámetros base son enviadas hacia Adams/View para la simulación dinámica del robot paralelo, y como resultado se registran en Matlab las fuerzas generalizadas de las cuatro articulaciones prismáticas (F_{s_1}, F_{s_2}, F_{s_3} y F_{s_4}). Con estos datos, se analiza el error que presentan las fuerzas generalizadas estimadas por el modelo (F_{m_i}) con respecto a las fuerzas simuladas (F_{s_i}) y mediante el análisis de factibilidad física de parámetros base (sección 1.5.1) se ajustan los valores de los parámetros base identificados bajo el criterio de minimizar el error cuadrático medio producido entre las F_{m_i} y las F_{s_i}.

Con base en el trabajo de investigación de Díaz (2009) y la Figura 1.15, se establece el diagrama de flujo del proceso de identificación de los parámetros base que se emplea en el presente trabajo (Figura 2.21).

El ANEXO II presenta el algoritmo desarrollado para identificar los parámetros base, que componen el modelo simplificado del robot paralelo 3UPS+1RPU.

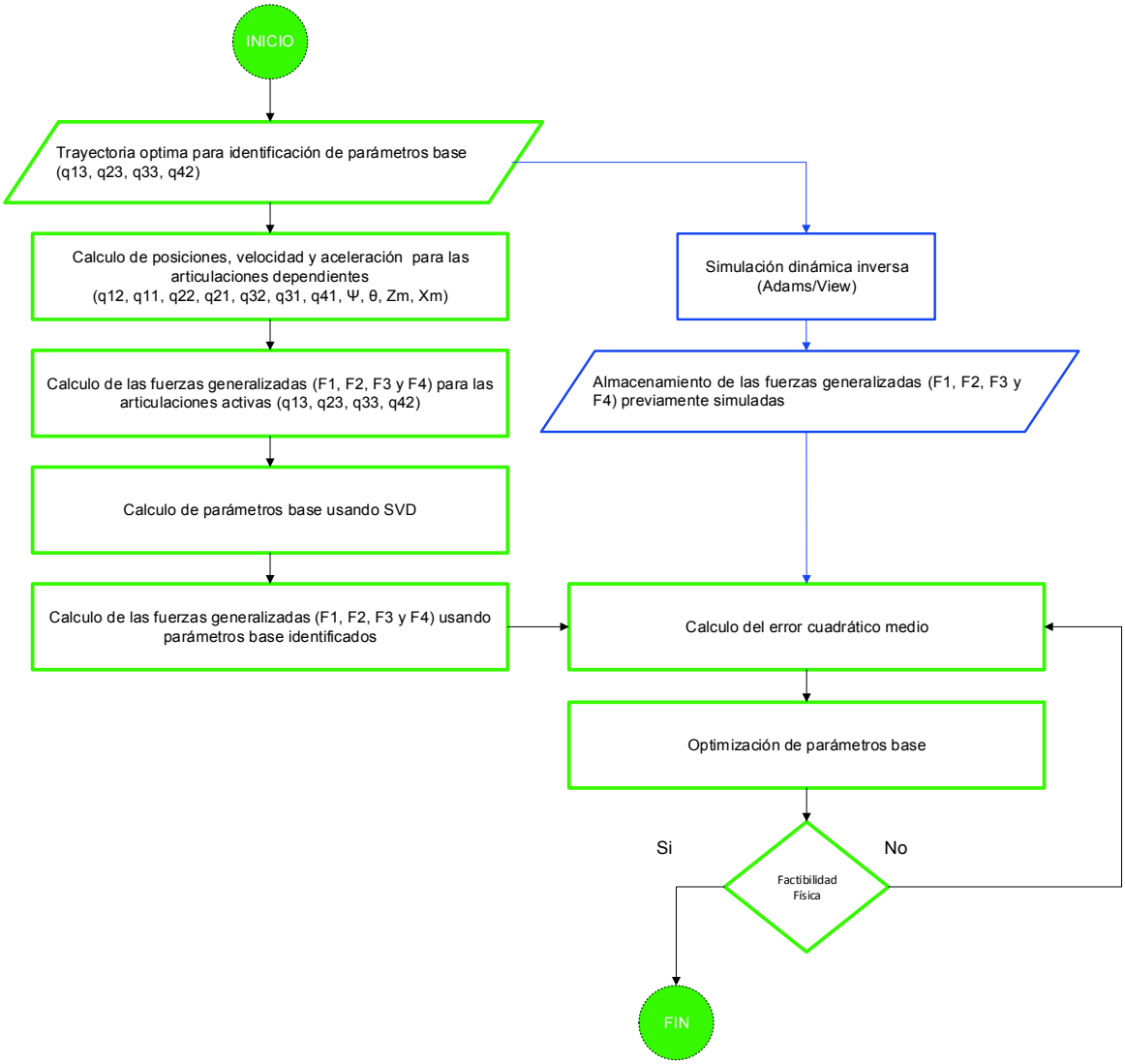


Figura 2.21. Diagrama de flujo para identificación de parámetros base del robot 3UPS + 1RPU. (Fuente: Autor)

2.5.1. Planta de simulación en Adams/View

La planta en Adams/View empleada para la simulación del comportamiento dinámico del robot 3UPS+1RPU, recibe como entradas las aceleraciones de las cuatro articulaciones prismáticas del robot ($\ddot{q}_{13}$, $\ddot{q}_{23}$, $\ddot{q}_{33}$, $\ddot{q}_{42}$), y conforme se desarrolla la simulación se registran los esfuerzos que se requieren ejercer en las articulaciones activas (F_{s_1}, F_{s_2}, F_{s_3} y F_{s_4}).

En la Figura 2.22 se muestra el diagrama de bloques en Matlab/Simulink para iniciar la simulación en Adams/View, conforme al flujograma de la Figura 2.21.

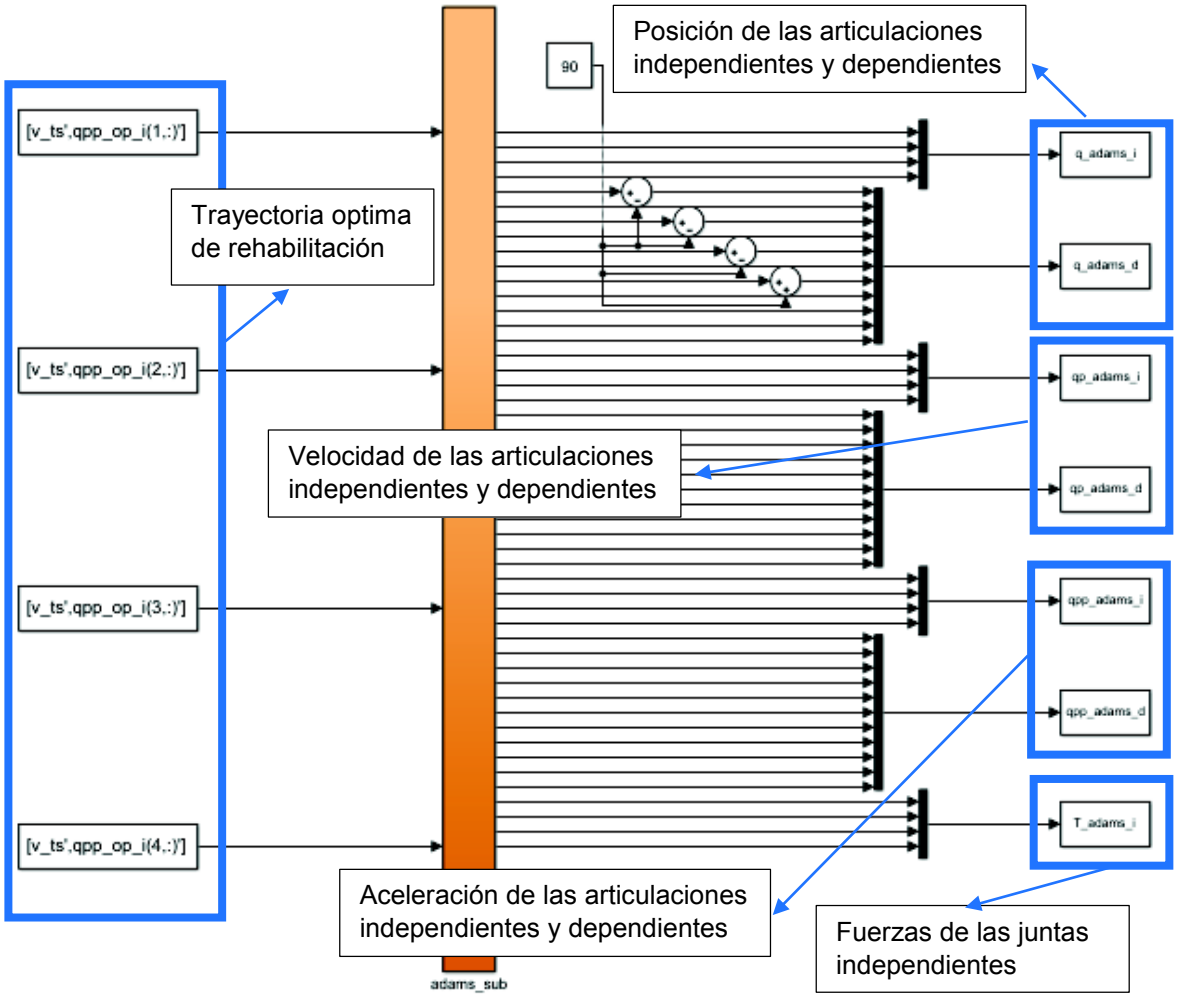


Figura 2.22. Diagrama para iniciar la simulación dinámica del robot paralelo.
(Fuente: Autor)

El diagrama de bloques de la figura anterior, parte del diagrama desarrollado por Pulloquinga (2018), sin embargo, para desarrollar la identificación de parámetros base se retiran las entradas relacionadas con las fuerzas externas (peso del pie del paciente y oposición del mismo a los movimientos de rehabilitación) y las trayectorias optimas son introducidas mediante las aceleraciones en cada articulación independiente haciendo que Adams/View integre y determine las correspondientes curvas de velocidad y posición. Por otro lado, debido a que los sistemas de coordenadas se establecen de forma distinta al trabajo de Aquino & Pozo, también es necesario ajustar las mediciones de las variables q_{12}, q_{22}, q_{32} y q_{41} que provienen del mecanismo en Adams/View.

El proceso de modificación de la plata de simulación se desarrolla en base en el trabajo (Adams, 2013).

2.6. Compatibilidad del modelo dinámico en parámetros base

El análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados inicia por determinar las fuerzas generalizadas de las cuatro articulaciones activas F_{m_1}, F_{m_2}, F_{m_3} y F_{m_4} (proceso descrito en la sección 2.5), en función de las trayectorias óptimas de validación de posición, velocidad y aceleración determinadas para las cuatro articulaciones activas (q_{13}, q_{23}, q_{33}, q_{42}) del robot paralelo 3UPS+1RPU (Figura 2.20).

Por otro lado, las trayectorias de verificación o prueba generadas para el análisis de compatibilidad, son enviadas hacia la planta de simulación en Adams/View y los resultados de las fuerzas generalizadas de las cuatro juntas prismáticas (F_{s_1}, F_{s_2}, F_{s_3} y F_{s_4}) son registrados en Matlab. Finalmente se analizan los residuos entre las fuerzas calculadas por el modelo dinámico en parámetros base (F_{m_i}) y las fuerzas simuladas (F_{s_i}). Este error se cuantifica mediante el cálculo del error cuadrático medio.

La Figura 2.23 muestra el diagrama de flujo desarrollado para el proceso de análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados, con base en el análisis de compatibilidad desarrollado en (Pulloquinga, 2018). A diferencia del análisis de compatibilidad desarrollado en (Pulloquinga, 2018) que requiere de la simulación del problema de cinemática directa y posteriormente del problema de dinámica inversa, en este trabajo se simula únicamente la dinámica inversa en función de las trayectorias óptimas.

En el ANEXO III se detalla el algoritmo desarrollado para el análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados.

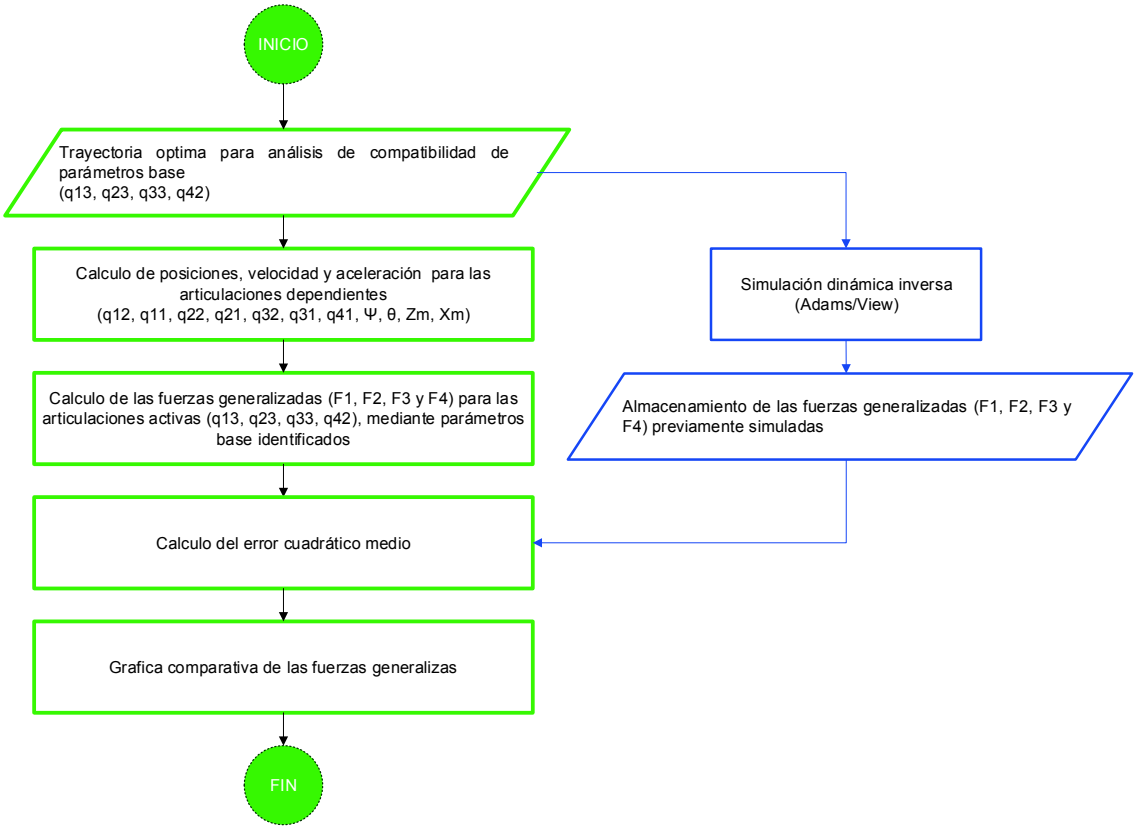


Figura 2.23. Diagrama de flujo del análisis de compatibilidad de los parámetros base identificados para el robot paralelo 3UPS + 1RPU.
(Fuente: Autor)

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Resultados

En esta sección se analizan los parámetros inerciales que no ejercen ningún efecto sobre la dinámica del robot, y los parámetros base que fueron identificados mediante el método de descomposición en valores singulares (SVD). Luego, se analiza el error que existe entre las fuerzas generalizadas, en las articulaciones activas, calculadas por el modelo y las fuerzas generalizadas simuladas en el software Adams/View.

3.1.1. Parámetros base

Luego de realizar el proceso de modelamiento dinámico expuesto en la sección 2.1.7, se determina que el modelo del robot paralelo 3UPS+1RPU depende de 90 parámetros inerciales y 22 parámetros de fricción. Luego, al analizar las columnas nulas de la matriz de observación K_1 (Ec. 2.114) se descartan 16 parámetros inerciales, estos se muestran en la Tabla 3.1. Después de eliminar los parámetros inerciales que no contribuyen al modelo dinámico, al proceso SVD para identificación de parámetros base ingresan 74 parámetros inerciales y 22 de fricción.

Tabla 3.1. Parámetros inerciales que no ejercen efecto en el modelo dinámico del robot.

Parámetro inercial descartado			
$\boldsymbol{m_{11}}$	IXX_{41}	IYZ_{41}	IYZ_{42}
$\boldsymbol{m_{21}}$	IXY_{41}	IXX_{42}	IZZ_{42}
$\boldsymbol{m_{31}}$	IXZ_{41}	IXY_{42}	my_{42}
$\boldsymbol{m_{41}}$	IYY_{41}	IXZ_{42}	mz_{41}

(Fuente: Autor)

Debido a que el proceso SVD es de tipo numérico, requiere de valores iniciales asignados a los parámetros inerciales y de fricción. Los parámetros inerciales se establecen en función de las propiedades físicas del mecanismo virtual desarrollado por Pulloquinga (2018), mientras que los, parámetros de fricción al ser un modelo simulado se establece mediante los valores determinados en el trabajo de Díaz (2009). Los valores de estos parámetros se encuentran en el ANEXO II.

Finalmente, luego de ejecutar el método SVD se determinan un total de 56 parámetros base, de ellos 34 son combinaciones lineales de los parámetros inerciales y 22 son parámetros de fricción (parámetros base del 35 al 56).

La Tabla 3.2 muestra el valor de los 56 parámetros base, después de aplicar el análisis de factibilidad física descrito en la sección 1.5.1.

Tabla 3.2. Parámetros base optimizados mediante análisis de factibilidad física.

Parámetros base identificados							
1	13.3	**15**	44.4	**29**	-0.9	**43**	*0.010*
2	-13.1	**16**	42.4	**30**	-12.8	**44**	*0.0007*
3	-0.1	**17**	-2.2	**31**	1.9	**45**	*0.010*
4	0.3	**18**	31.6	**32**	9.2	**46**	*-0.0038*
5	-46.7	**19**	11.3	**33**	0.2	**47**	*0.0099*
6	1828.2	**20**	-1.1	**34**	-8.7	**48**	*0.010*
7	-598.6	**21**	-15.5	**35**	*0.009*	**49**	*0.010*
8	-243.9	**22**	15.9	**36**	*0.010*	**50**	*0.0007*
9	218.7	**23**	-1.3	**37**	*0.010*	**51**	*0.010*
10	83.9	**24**	31.5	**38**	*0.0007*	**52**	*-0.0038*
11	157.1	**25**	-413.3	**39**	*0.010*	**53**	*-0.010*
12	-2.1	**26**	2.6	**40**	*-0.0038*	**54**	*-0.010*
13	-42.6	**27**	-62	**41**	*0.099*	**55**	*0.010*
14	-44.4	**28**	0.8	**42**	*0.010*	**56**	*0.010*

(Fuente: Autor)

3.1.2. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optima de identificación

Luego de ingresar las trayectorias de las articulaciones activas o independientes de la Figura 2.19, las fuerzas generalizadas determinadas para cada articulación prismática junto con la gráfica residuos entre el cálculo del modelo lineal en parámetros base (F_m) y la simulación dinámica del robot paralelo (F_s) se observan de la Figura 3.1 a la Figura 3.4.

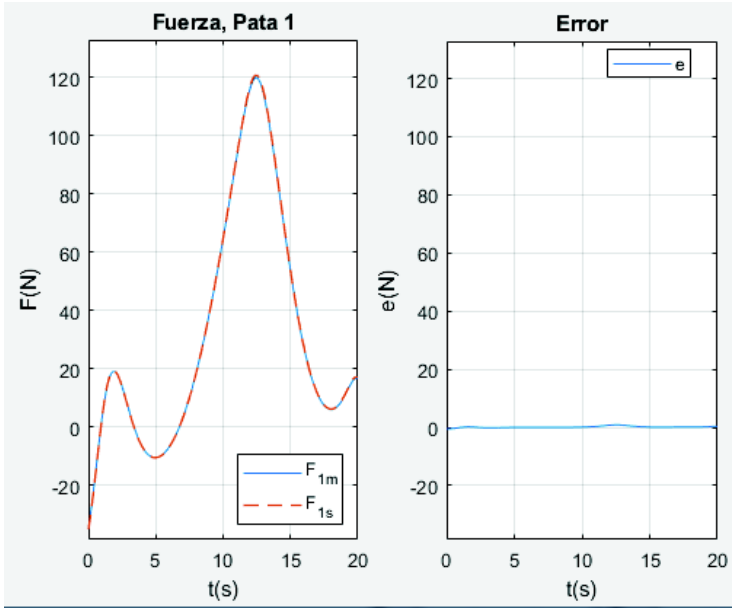


Figura 3.1. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 1.
(Fuente: Autor)

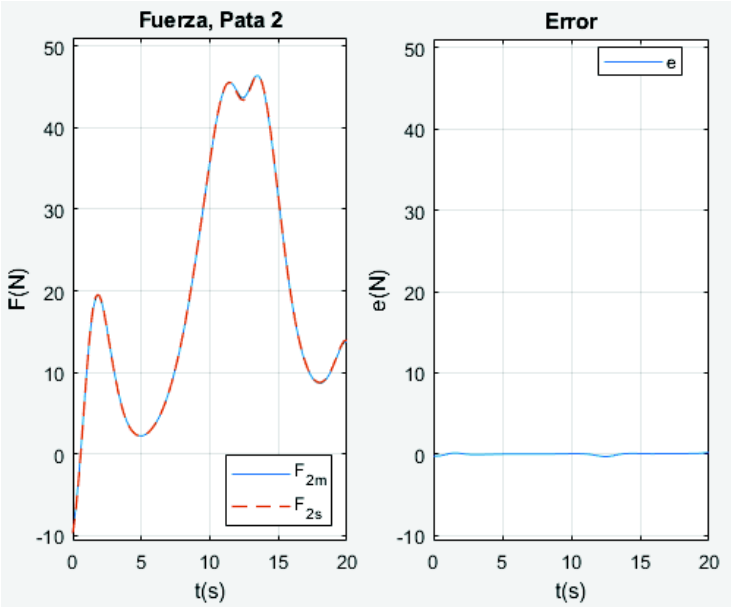


Figura 3.2. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 2.
(Fuente: Autor)

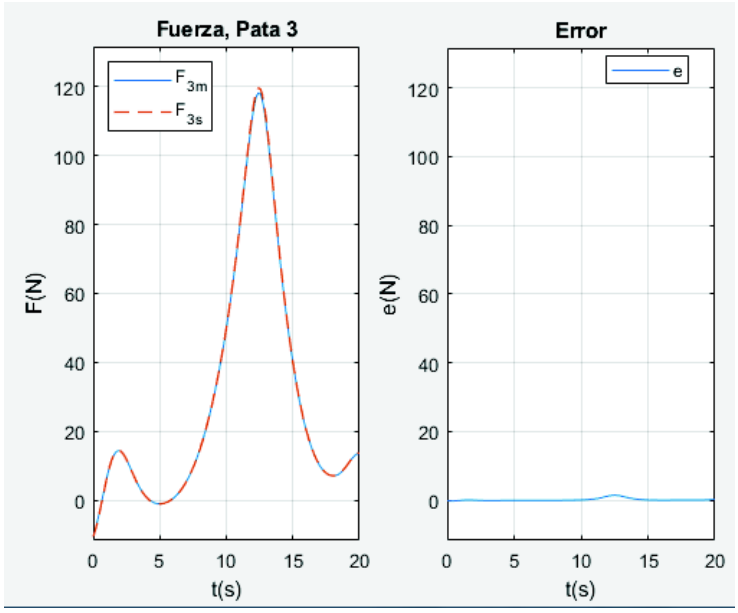


Figura 3.3. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 3.
(Fuente: Autor)

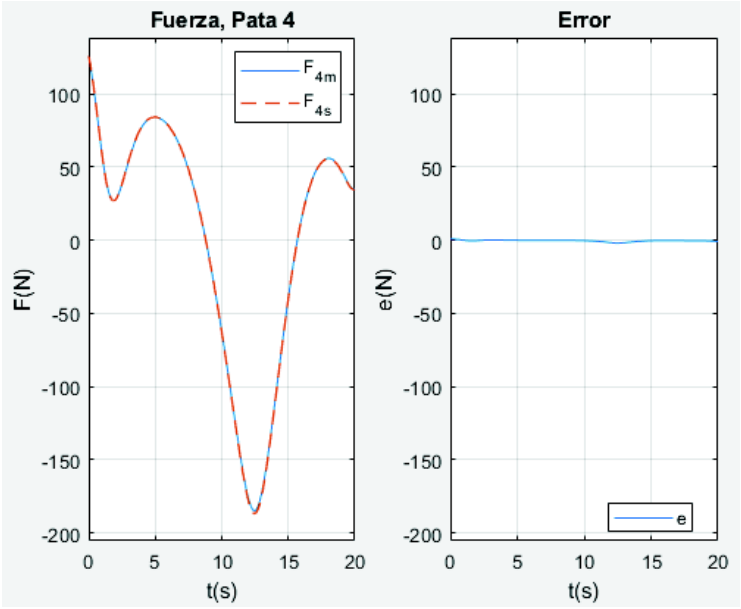


Figura 3.4. Trayectoria de identificación: Fuerza de la pata 4.
(Fuente: Autor)

El error entre las fuerzas determinadas por el modelo en parámetros base (modelo reducido) y las fuerzas simuladas por computador se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Trayectoria de identificación: ECM de las fuerzas generalizadas activas del robot.

Error	Unidad	Pata 1	Pata 2	Pata 3	Pata 4
Fuerza	N	0,2918	0,0957	0,4196	0,6259
	%	1,869	0,696	1,457	0,847

(Fuente: Autor)

3.1.3. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optima de verificación (análisis de compatibilidad de parámetros base)

Luego de resolver el problema de dinámica inversa para las trayectorias optimas de verificación de las articulaciones independientes (Figura 2.20), las fuerzas generalizadas determinadas para cada articulación prismática y la gráfica residuos entre el cálculo del modelo lineal usando parámetros base (F_m) y la simulación dinámica del robot paralelo (F_s) se observa en las ilustraciones desde la Figura 3.5 a la Figura 3.8.

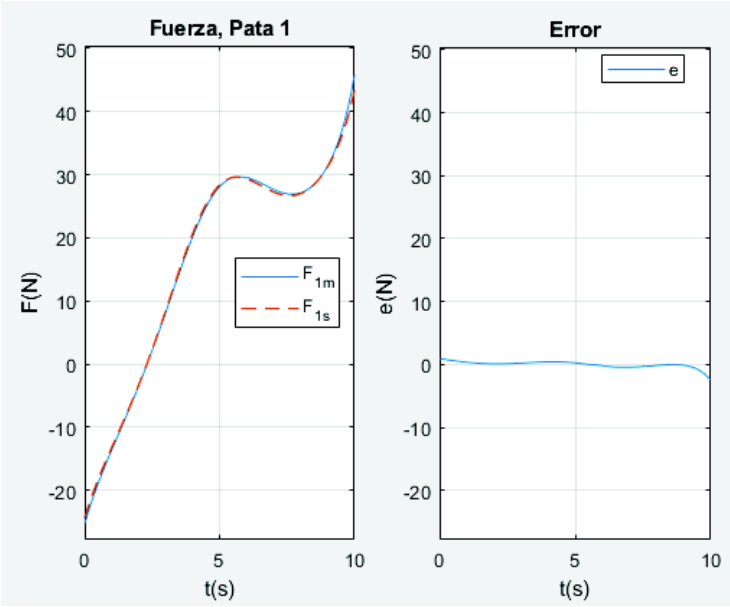


Figura 3.5. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 1.
(Fuente: Autor)

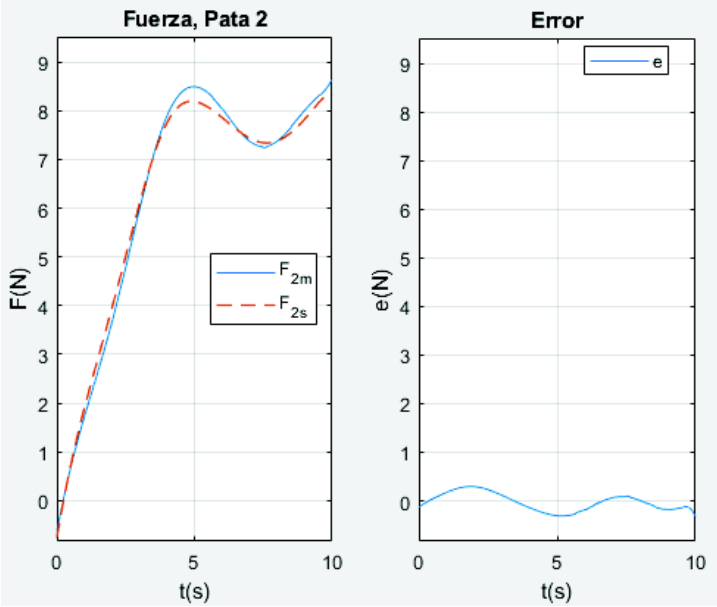


Figura 3.6. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 2.
(Fuente: Autor)

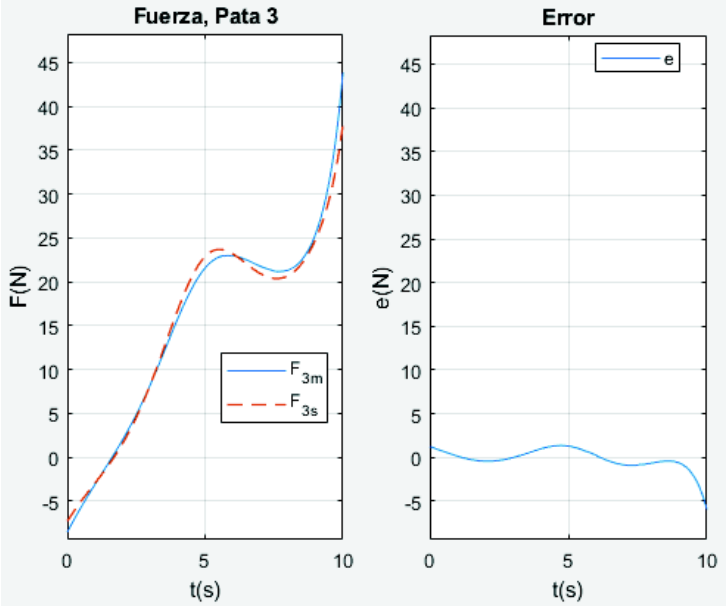


Figura 3.7. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 3.
(Fuente: Autor)

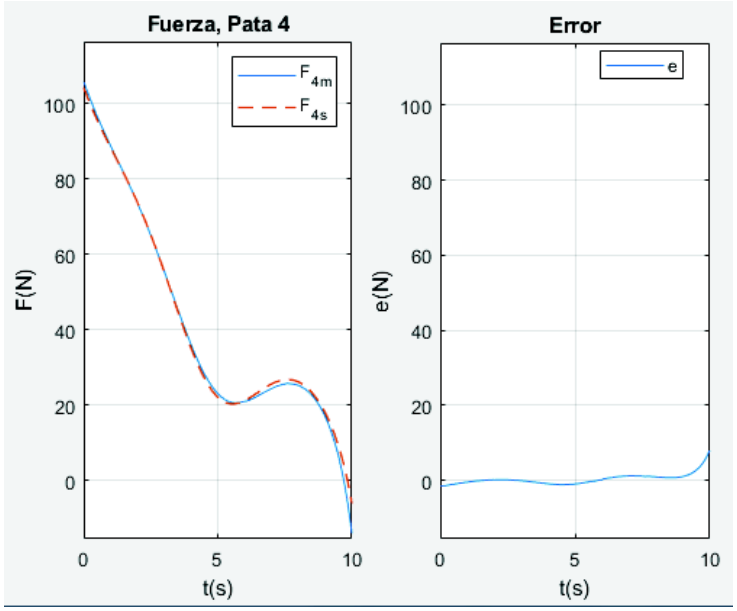


Figura 3.8. Trayectoria de análisis de compatibilidad: Fuerza de la pata 4.
(Fuente: Autor)

El error entre las fuerzas determinadas por el modelo dinámico en parámetros base (modelo reducido) y las fuerzas simuladas en computadora (Adams/View) se muestran en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Trayectoria de análisis de compatibilidad: ECM de las fuerzas generalizadas activas para el robot 3UPS + 1RPU

Error	Unidad	Pata 1	Pata 2	Pata 3	Pata 4
Fuerza	N	0.5050	0,1805	1,1703	1,4822
	%	3,458	4,492	14,537	15,806

(Fuente: Autor)

3.2. Discusión

En esta sección se analizan las principales ventajas del modelo dinámico en parámetros inerciales, las ventajas de añadir un modelo de fricción y las ventajas de identificar los parámetros base del modelo reducido (modelo en parámetros base). Además, se establece si el modelo dinámico lineal en parámetros base del robot paralelo 3UPS+1RPU es compatible con la planta de simulación en Adams/View, mediante el análisis de residuos.

3.2.1. Modelo dinámico lineal en parámetros inerciales y de fricción

El modelo dinámico desarrollado en el presente trabajo se caracteriza por permitir su expresión de forma lineal con respecto a los parámetros inerciales (Ec. 2.116), lo cual no se puede realizar mediante el modelo dinámico desarrollado previamente por Aquino & Pozo (2017). A pesar de que ambos trabajos se fundamentan en las ecuaciones de Gibbs-Appell, la diferencia radica en que el modelo dinámico que se desarrolla, aplica las ecuaciones explicitas determinadas por Mata, Benimeli, Farhat & Valera (2005), mientras que el modelo determinado por Aquino & Pozo emplea las ecuaciones implícitas estándar.

En contraste con el modelo dinámico desarrollado por Aquino & Pozo, el modelo dinámico lineal en parámetros inerciales para el robot paralelo 3UPS + 1RPU elimina la necesidad de introducir fuerzas internas en los cortes realizados para el modelamiento en cadena abierta, mediante el principio de mínima acción de Gauss, la eliminación de estas fuerzas internas reduce la complejidad en la resolución de la dinámica inversa del robot. Sin embargo, debido a que el propósito del presente trabajo es determinar un modelo simplificado o modelo en parámetros base, no se consideran las fuerzas externas aplicadas al efector final para el modelamiento, lo cual si es considerado en el trabajo de Aquino & Pozo. Dicho inconveniente se puede resolver en la fase de control electrónico introduciendo las fuerzas externas al robot, al modelo reducido mediante la Ec. 1.2.

Por otro lado, al incorporar un modelo de fricción lineal al modelo dinámico en parámetros inerciales se logra que las estimaciones de las fuerzas generalizadas en las articulaciones independientes sean más cercanas a la realidad que el modelo desarrollado por Aquino & Pozo. Si bien es cierto un modelo de fricción de tipo no lineal permite un ajuste más preciso a la realidad que un modelo lineal (Farhat, 2006), la resolución del mismo es más complejo perjudicando al sistema de control del robot paralelo.

Por otro lado, las ecuaciones de Gibbs-Appell fueron aplicadas para un robot paralelo de 3 grados de libertad tipo 3RPS (Farhat, 2006), partiendo de un análisis vectorial de tres cadenas cinemáticas abiertas (tres patas) utilizando a los 3 grados de libertad de las articulaciones esféricas como parte de las variables generalizadas. En el caso descrito se establecen 70 parámetros inerciales, y se considera un modelo lineal asimétrico de 24 parámetros de fricción identificados en un robot 3RPS real.

En el presente trabajo, se tomó la metodología de modelamiento desarrollado por Farhat como punto de partida para establecer el modelo dinámico en parámetros inerciales, en este caso las articulaciones esféricas no se consideran en el modelamiento dinámico y en su lugar se consideran los 4 GDL de la plataforma móvil como variables generalizadas. Por otro lado, ya que no se cuenta con el robot 3UPS+1RPU real el modelo de fricción se establece como tipo lineal simétrico para facilitar el modelamiento.

3.2.2. Parámetros base

Con base en la Tabla 3.1 se puede decir que la respuesta dinámica del robot paralelo no se ve afectado directamente por las masas de los cilindros de cada actuador lineal, y el único componente inercial del cilindro de la pata 4 que afecta al comportamiento dinámico del robot es el momento de inercia en el eje ZZ (IZZ_{41}).Por otro lado, también se puede determinar que en el caso del vástago de la pata 4 solo el momento de inercia en el eje YY (IYY_{42}) afecta al comportamiento dinámico del robot paralelo 3UPS+1RPU.

Partiendo de un modelo dinámico lineal en parámetros inerciales y de fricción de 112 parámetros (90 inerciales y 22 de fricción), al aplicar la metodología numérica SVD se determina un modelo dinámico lineal en 56 parámetros base (34 combinaciones inerciales y 22 de fricción); este moldeo simplificado (de menor complejidad que el modelo completo) permite reducir el tiempo empleado en la resolución del problema de dinámica inversa, que a la vez reduce la carga computacional haciéndolo el modelo más eficiente para incorporar en los sistemas de control del robot.

Los 56 parámetros base representan el 45.90% del total de parámetros inerciales y de fricción, esto significa que, a diferencia del modelo desarrollado por Aquino & Pozo, el modelo en parámetros base que se determina en el proyecto de titulación elimina los parámetros inerciales que no influyen o contribuyen en el comportamiento del robot paralelo 3UPS+1RPU.

En el Anexo II se describen al vector de parámetros base identificados como la variable “P_base” y la matriz de observación para una configuración no especifica del robot paralelo como la variable “W1_s”. Estas dos variables, le proveen al proyecto PIMI-1504

el modelo dinámico lineal en parámetros base necesario para el posterior diseño e implementación de los controladores de pasividad requeridos antes de la fase de implementación del robot paralelo.

3.2.3. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optimas de identificación

Como se observa de la Figura 3.1 a la Figura 3.4, muestran que la respuesta calculada mediante el modelo dinámico lineal en parámetros base y las fuerzas simuladas tienen un error muy bajo, de acuerdo a la Tabla 3.3 tiene un error máximo de $1{,}86\ \%$ $(0{,}29\ N)$. Al establecer un error menor al 5% se determina que el modelo dinámico lineal en parámetros base es compatible para el comportamiento dinámico del robot paralelo 3UPS+1RPU para aplicaciones de rehabilitación de rodilla, bajo el criterio de Zeigler (1979) para modelamiento de sistemas con aplicaciones médicas.

La compatibilidad del modelo dinámico en parámetros base se establece bajo el criterio de Zeigler para modelamiento de sistemas dinámicos, ya que, de acuerdo a la investigación realizada, no existe una normativa desarrollada para modelamiento de robots aplicados a la medicina o a la rehabilitación clínica.

En este caso, el error es sumamente bajo debido a que la trayectoria en análisis es la misma que se empleó para el proceso de identificación de parámetros base.

3.2.4. Fuerzas generalizadas para la trayectoria optimas de verificación

Como se observa de la Figura 3.5 a la Figura 3.8, muestran que la respuesta calculada mediante el modelo dinámico lineal en parámetros base y las fuerzas simuladas tienen un error bajo, de acuerdo a la Tabla 3.4 tiene un error máximo de $15{,}80\ \%$ $(1{,}48\ N)$. Al establecer un error menor al 16% se determina que el modelo dinámico lineal en parámetros base es compatible para el comportamiento dinámico del robot paralelo 3UPS+1RPU para aplicaciones de rehabilitación de rodilla (Zeigler, 1979).

Este error máximo de 15,80% corrobora la hipótesis de que al integrar un modelo de fricción al modelo dinámico desarrollado bajo las ecuaciones Gibbs-Appell la aproximación del modelo a la realidad es mejor. Partiendo del error máximo del 19,84% trabajo desarrollado por Pulloquinga (2018) para el modelo dinámico implícito de Aquino & Pozo del robot paralelo 3UPS + 1RPU desarrollado en la Escuela Politécnica Nacional, se puede observar que el modelo dinámico en parámetros base reduce en 4,04% el error de estimación de las fuerzas generalizadas en las articulaciones independientes, además de ser más fácil de implementar en los controladores de pasividad a desarrollar en la fase siguiente del proyecto de investigación PIMI-1504.

4. CONCLUSIONES

- Se desarrolló de forma exitosa el modelo dinámico lineal en parámetros inerciales del robot paralelo 3UPS+1RPU, incluyendo un modelo de fricción lineal simétrico. La reducción de los parámetros inerciales se desarrolló de manera efectiva mediante el método de descomposición en valores singulares.
- Los parámetros base de un modelo dinámico lineal pueden ser obtenidos de forma simbólica y numérica, el método numérico para identificación de parámetros basé es más empleado que el método simbólico por la menor complejidad que le representa al computador. Una guía completa para el desarrollo de este método es la tesis doctoral desarrollada por (Farhat, 2006).
- Generar las curvas empleadas para realizar la identificación de parámetros base requiere de un procesamiento computacional alto ya que deben cumplir todas las restricciones físicas de los actuadores lineales del robot, así como también, debido a que se deben evadir los puntos de singularidad presentes en el espacio de trabajo del robot paralelo 3UPS + 1RPU.
- El error elevado en la estimación de las fuerzas generalizadas de la pata 3 y 4 con respecto al error de las patas 1 y 2, para la curva de verificación de parámetros base identificados se debe a que la curva se genera de forma aleatoria, es decir, que los movimientos de la plataforma no son controlados.
- La comparación estadística de las fuerzas calculadas por el modelo dinámico lineal en parámetros base y las fuerzas simuladas en ADAMS/VIEW determina un error máximo de $15{,}80\ \%$ ($1{,}48\ N$), lo cual de acuerdo con Zeigler (1979) es aceptable para aplicaciones de rehabilitación de rodilla.
- El error en la estimación de las fuerzas generalizadas independientes del $15{,}80\ \%$, es menor al máximo error de 19.84% determinado en el análisis de compatibilidad desarrollado por Pulloquinga (2018), confirmando que el integrar modelos de fricción al modelo dinámico de un robot reduce el error en la estimación de las fuerzas en las articulaciones independientes.
- La importancia de los parámetros inerciales y de fricción reside, por una parte, en sus aplicaciones en los esquemas dinámicos de control. La precisión de los parámetros dinámicos juega un papel muy importante en la precisión, prestaciones, estabilidad y robustez de dichos algoritmos de control.
- La planta de simulación desarrollada en Adams/View puede ser fácilmente modificada, lo cual permitirá en la fase de construcción ajustar los parámetros inerciales de forma rápida y efectiva.

- Al determinar y analizar la compatibilidad del modelo dinámico lineal en parámetros base para el robot paralelo 3UPS + 1RPU, el proyecto de investigación PIMI-1504 puede desarrollar un controlador de pasividad basado en el modelo dinámico desarrollado en el presente trabajo.

4.1.1. Recomendaciones

- En la fase de construcción del robot paralelo 3UPS + 1RPU se deben ajustar los parámetros de fricción mediante ensayos de laboratorio para así reducir el error en la estimación de las fuerzas en las articulaciones independientes empleando el modelo dinámico lineal en parámetros base.
- Para generar trayectorias optimizadas de identificación de parámetros base se recomienda emplear un computador industrial para reducir el tiempo en el proceso del ajuste de la trayectoria a las restricciones físicas y espacio de trabajo del robot paralelo.
- En el proceso de identificación de parámetros base mediante SVD la precisión del computador no debe ser muy elevada ya que afecta al tiempo que el computador emplea para generar dicho modelo en parámetros base.
- Las curvas de verificación deben ser generadas sin optimización de trayectorias para evitar que las curvas sean aleatorias, se podrían emplear curvas de rehabilitación de rodilla basadas en el trabajo desarrollado por Aquino & Pozo (2017).

4.1.2. Trabajos Futuros

- Con base en el diseño tridimensional desarrollado para el robot paralelo tipo 3UPS + 1RPU, se requiere iniciar de la ingeniería de diseño y construcción para la implementación del robot real.
- Con base en el modelo reducido o modelo dinámico en parámetros base desarrollados en el presente trabajo, se requiere del diseño e implementación del algoritmo de control para el robot paralelo.

Referencias Bibliográficas

Adams, M. (2013). *Introducing and starting the tutorials.* Recuperado el 12 de Marzo de 2018, de MSC Software: https://simcompanion.mscsoftware.com/resources/sites/MSC/content/meta/DOCUMENTATION/10000/DOC10388/~secure/controls_gs_2013.pdf?token=ys7TE0yZFv-kXLKI4qO4YcgIk-6yXbjSbblBqF9vclyFaHltgRZuGyPCBQbxMlMCIbmsHR0B9e4VtLILG071ZBICl2ad8HfGhKAl0oeySpX1dJ6BIt-WNvNaD

Anonimo. (2005). *Identificación de sistemas-Selección de la estructura y validación del modelo.* Recuperado el 12 de Marzo de 2018, de Universidad del Cauca: ftp://ftp.unicauca.edu.co/Facultades/FIET/DEIC/Materias/Identificacion/2005a/parte%20III/clase5-III/clase_04.pdf

Aquino, S., & Pozo, E. (2017). Modelo dinámico de un robot paralelo para rehabilitación de rodilla. *Tesís de Maestría*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.

Aracil, R., Saltarén, R., Sabater, J., & Reinoso, O. (2006). Robots paralelos: Maquinas con un pasado para una robótica del futuro. *Revista iberoamericana de automática e infomatica industrial (RIAI)*.

Araujo, P., Díaz-Rodríguez, M., Mata, V., Page, Á., & Valera, A. (2016). Análisis cinemático inverso de un robot paralelo RPU+3UPS para la rehabilitación de extremidades inferiores. *Simulación y aplicaciones recientes para ciencia y tecnología*.

Avello, A. (2014). *Teoría de Máquinas* (Segunda ed.). Navarra: Universidad de Navarra.

Benimeli, F. (2005). Estimación de parámetros dinámicos en robots manipuladores. *Tesis de Doctorado*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Briot, S., & Khalil, W. (2015). *Dynamics of Parallel Robots.* Londres: Springer International Publishing Switzerland. Obtenido de https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-19788-3.pdf

Cazalilla, J., Vallés, M., Mata, V., Díaz, M., & Valera, A. (2014). Adaptive control of a 3-DOF parallel manipulator considering payload handling and relevant parameter models. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing 30*.

Díaz, M. (2009). Identificación de parámetros dinámicos de robots paralelos basados en conjunto de parametros significativos. *Tesis de Doctorado*. Valencia: Universidad Politecnica de Valencia.

Díaz, M., Valera, A., Mata, V., & Valles, M. (2013). Model-Based control of a 3-DOF parallel robot based on identified relevant parameters. *IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS*.

Farhat, N. (2006). Identificación de parámetros dinámicos en sistemas mecánicos de cadena cerrada. Aplicación a robots paralelos. *Tesis Doctoral*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Grotjahn, M., & Heimann, B. (2003). Identification of the Dynamics of Parallel Kinematic Structures for Model-Based Control. *Proceeding of the ECCOMAS Thematic Conference on Advances in computational Multibody Systems*.

Khalil, W., & Dombre, E. (2002). *Modeling, Identification and Control of Robots.* Londres: Hermes Penton Ltd.

Mandón, M. (12 de Agosto de 2014). *Cinemática directa.* Recuperado el 02 de Julio de 2018, de Scribd: https://es.scribd.com/document/236640544/4-DH-EJEMPLO-Tema-4a-Cinematica-Directa

Marizcal, A. (2017). Diseño de un exoesqueleto para terapias de rehabilitación. *Tesis de Maestría*. La Paz: Tecnológico Nacional de México.

Mata, V., Benimeli, F., Farhat, N., & Valera, A. (2005). Dynamic parameter identification in industrial robots considering physical feasibility. *Journal of Advanced Robotics, 19*(1), 101-120.

Merlet, J.-P. (2006). *Parallel Robots.* Sophia-Antipolis: Springer.

Pond, G., & Carretero, J. (2007). Quantitative dexterous workspace comparison of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory, 42*(10), 1388-1400.

Provenzano, S. (2001). Aplicaciones de las ecuaciones de Gibbs-Appell a la dinamica de robots. *Tesis de Doctorado*. Valencia: Universidad Politécnica de Valecia.

Pulloquinga, J. (2018). Analisis de compatibilidad del modelo dinámico de un robot paralelo tipo 3UPS+1RPU para rehabilitación de rodilla, mediante simulación de mecanismos en MSC-ADAMS. *Tesis de Maestría*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.

Renaud, P., Vivas, A., Andreff, N., Poignet, P., Martinet, P., Pierrot, F., & Company, O. (2006). Kinematic and dynamic identification of parallel mechanism. *Control engineering practice, 14*(9), 1099-1109.

Vallés, M., Cazalilla, J., Valera, A., Mata, V., Page, A., & Díaz-Rodriguez, M. (2015). A 3-PRS parallel manipulator for ankle rehabilitation: towards a low-cost robotic rehabilitation. *Cambridge University Press 2015*.

Vizcaíno, G. (2001). *Optimización en Matlab: la función fmincon.* Obtenido de Biblioteca de la Universidad de Sevilla: http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11191/fichero/Cap%C3%ADtulo+5.pdf+

Yoshida, K., & Khalil, W. (2000). Verification of the positive definiteness of the internal matrix of manipulators using base inertial parameters. *International Journal of Robotics Research, 19*(5), 498-510.

Zamora, P. (2016). Diseño de un robot paralelo para aplicaciones de diagnosis y rehabilitación de rodilla. *Tesis de Maestría*. Valencia: Universidad Politécnica de Valéncia.

Zeigler, B. (1979). Theory of Modelling and Simulation. *IEEE*.

Anexos

ANEXO I.

CODIGO PARA DETERMINAR EL MODELO DINAMICO DEL ROBOT PARALELO 3UPS + 1RPU MEDIANTE MATLAB

```
%ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL-MAESTRÍA EN MECATRÓNICA Y ROBÓTICA
%Ing. Elizabeth Armas
%Modelo dinámico en parámetros inerciales - Robot paralelo 3UPS+1RPU

%Limpieza de variables y espacio de trabajo
close all;clear all; clc

%Variables simbolicas
syms 'R' 'r' 'b2f' 'b3f' 'b2m' 'b3m' 'g'
syms 'q11' 'q12' 'q13' 'q21' 'q22' 'q23' 'q31' 'q32' 'q33' 'q41' 'q42'
'Xm' 'Zm' 'Tm' 'Sm'
syms 'qp11' 'qp12' 'qp13' 'qp21' 'qp22' 'qp23' 'qp31' 'qp32' 'qp33'
'qp41' 'qp42' 'VXm' 'VZm' 'Tmp' 'Smp'
syms 'qpp11' 'qpp12' 'qpp13' 'qpp21' 'qpp22' 'qpp23' 'qpp31' 'qpp32'
'qpp33' 'qpp41' 'qpp42' 'AXm' 'AZm' 'Tmpp' 'Smpp'
syms 'IXX11' 'IXY11' 'IXZ11' 'IYY11' 'IYZ11' 'IZZ11' 'IXX12' 'IXY12'
'IXZ12' 'IYY12' 'IYZ12' 'IZZ12' 'IXX21' 'IXY21' 'IXZ21' 'IYY21' 'IYZ21'
'IZZ21' 'IXX22' 'IXY22' 'IXZ22' 'IYY22' 'IYZ22' 'IZZ22' 'IXX31' 'IXY31'
'IXZ31' 'IYY31' 'IYZ31' 'IZZ31' 'IXX32' 'IXY32' 'IXZ32' 'IYY32' 'IYZ32'
'IZZ32' 'IXX41' 'IXY41' 'IXZ41' 'IYY41' 'IYZ41' 'IZZ41' 'IXX42' 'IXY42'
'IXZ42' 'IYY42' 'IYZ42' 'IZZ42' 'IXXm' 'IXYm' 'IXZm' 'IYYm' 'IYZm' 'IZZm'
syms 'mx11' 'my11' 'mz11' 'mx12' 'my12' 'mz12' 'mx21' 'my21' 'mz21'
'mx22' 'my22' 'mz22' 'mx31' 'my31' 'mz31' 'mx32' 'my32' 'mz32' 'mx41'
'my41' 'mz41' 'mx42' 'my42' 'mz42' 'mxm' 'mym' 'mzm'
syms 'm11' 'm12' 'm21' 'm22' 'm31' 'm32' 'm41' 'm42' 'mm'
syms 'XG11' 'YG11' 'ZG11' 'XG12' 'YG12' 'ZG12' 'IZY11' 'IZY12'
syms 'Fc11' 'Fc12' 'Fc13' 'Fc21' 'Fc22' 'Fc23' 'Fc31' 'Fc32' 'Fc33'
'Fc41' 'Fc42'
syms 'Fv11' 'Fv12' 'Fv13' 'Fv21' 'Fv22' 'Fv23' 'Fv31' 'Fv32' 'Fv33'
'Fv41' 'Fv42'
syms 'GAm' 'PHm'

%VECTORES DE POSICIÓN DE CADA VERTICE DE LAS PLATAFORMAS
%Plataforma fija
Rf_OfAo=[-R;0;0];
Rf_OfBo=[R*cos(b2f);R*sin(b2f);0];
Rf_OfCo=[R*cos(b3f);-R*sin(b3f);0];
Rf_OfOf=[0;0;0];
%Plataforma movil
Rm_OmA=[-r;0;0];
Rm_OmB=[r*cos(b2m);r*sin(b2m);0];
Rm_OmC=[r*cos(b3m);-r*sin(b3m);0];
Rm_OmOm=[0;0;0];

%VECTORES UNITARIOS PARA ARTICULACIONES
%Pata 1
z11_p1=[0;0;1];z22_p1=[0;0;1];z33_p1=[0;0;1];
%Pata 2
z11_p2=[0;0;1];z22_p2=[0;0;1];z33_p2=[0;0;1];
```

```
%Pata 3
z11_p3=[0;0;1];z22_p3=[0;0;1];z33_p3=[0;0;1];
%Pata 4
z11_p4=[0;0;1];z22_p4=[0;0;1];
%Plataforma móvil
z11_pm=[0;0;1];z22_pm=[0;0;1];z33_pm=[0;0;1];z44_pm=[0;0;1];

%MATRICES DE ROTACIÓN
%Pata 1
R01_p1=[cos(q11) -sin(q11) 0;round(cos(pi/2))*sin(q11)
round(cos(pi/2))*cos(q11) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(q11)
sin(pi/2)*cos(q11) round(cos(pi/2))];
R12_p1=[cos(q12) -sin(q12) 0;round(cos(-pi/2))*sin(q12) round(cos(-
pi/2))*cos(q12) -sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(q12) sin(-pi/2)*cos(q12)
round(cos(-pi/2))];
R23_p1=[round(cos(pi/2)) -sin(pi/2) 0;cos(0)*sin(pi/2)
cos(0)*round(cos(pi/2)) -sin(0);sin(0)*sin(pi/2) sin(0)*cos(pi/2)
cos(0)]*[round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2) 0;round(cos(pi/2))*sin(-pi/2)
round(cos(pi/2))*(round(cos(-pi/2))) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(-pi/2)
sin(pi/2)*round(cos(-pi/2)) round(cos(pi/2))];
R11_p1=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R22_p1=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R33_p1=[1 0 0;0 1
0;0 0 1];
%---------
R10_p1=simplify(inv(R01_p1));
R21_p1=simplify(inv(R12_p1));
R32_p1=inv(R23_p1);
%Pata 2
R01_p2=[cos(q21) -sin(q21) 0;round(cos(pi/2))*sin(q21)
round(cos(pi/2))*cos(q21) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(q21)
sin(pi/2)*cos(q21) round(cos(pi/2))];
R12_p2=[cos(q22) -sin(q22) 0;round(cos(-pi/2))*sin(q22) round(cos(-
pi/2))*cos(q22) -sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(q22) sin(-pi/2)*cos(q22)
round(cos(-pi/2))];
R23_p2=[round(cos(pi/2)) -sin(pi/2) 0;cos(0)*sin(pi/2)
cos(0)*round(cos(pi/2)) -sin(0);sin(0)*sin(pi/2) sin(0)*cos(pi/2)
cos(0)]*[round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2) 0;round(cos(pi/2))*sin(-pi/2)
round(cos(pi/2))*(round(cos(-pi/2))) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(-pi/2)
sin(pi/2)*round(cos(-pi/2)) round(cos(pi/2))];
R11_p2=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R22_p2=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R33_p2=[1 0 0;0 1
0;0 0 1];
%---------
R10_p2=simplify(inv(R01_p2));
R21_p2=simplify(inv(R12_p2));
R32_p2=inv(R23_p2);
%Pata 3
R01_p3=[cos(q31) -sin(q31) 0;round(cos(pi/2))*sin(q31)
round(cos(pi/2))*cos(q31) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(q31)
sin(pi/2)*cos(q31) round(cos(pi/2))];
R12_p3=[cos(q32) -sin(q32) 0;round(cos(-pi/2))*sin(q32) round(cos(-
pi/2))*cos(q32) -sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(q32) sin(-pi/2)*cos(q32)
round(cos(-pi/2))];
R23_p3=[round(cos(pi/2)) -sin(pi/2) 0;cos(0)*sin(pi/2)
cos(0)*round(cos(pi/2)) -sin(0);sin(0)*sin(pi/2) sin(0)*cos(pi/2)
cos(0)]*[round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2) 0;round(cos(pi/2))*sin(-pi/2)
round(cos(pi/2))*(round(cos(-pi/2))) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(-pi/2)
sin(pi/2)*round(cos(-pi/2)) round(cos(pi/2))];
R11_p3=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R22_p3=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R33_p3=[1 0 0;0 1
0;0 0 1];
%---------
R10_p3=simplify(inv(R01_p3));
```

```
R21_p3=simplify(inv(R12_p3));
R32_p3=inv(R23_p3);
%Pata 4
R01_p4=[cos(q41) -sin(q41) 0;round(cos(pi/2))*sin(q41)
round(cos(pi/2))*cos(q41) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(q41)
sin(pi/2)*cos(q41) round(cos(pi/2))];
R12_p4=[round(cos(pi/2)) -sin(pi/2) 0;round(cos(0))*sin(pi/2)
round(cos(0))*round(cos(pi/2)) -sin(0);sin(0)*sin(pi/2)
sin(0)*round(cos(pi/2)) round(cos(0))]*[round(cos(pi)) -round(sin(pi))
0;round(cos(pi/2))*round(sin(pi)) round(cos(pi/2))*(round(cos(pi))) -
sin(pi/2);sin(pi/2)*round(sin(pi)) sin(pi/2)*round(cos(pi))
round(cos(pi/2))];
R11_p4=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R22_p4=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
%---------
R10_p4=simplify(inv(R01_p4));
R21_p4=inv(R12_p4);
%Plataforma móvil
R01_pm=[round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2) 0;round(cos(-pi/2))*sin(-pi/2)
round(cos(-pi/2))*round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(-pi/2)
sin(-pi/2)*round(cos(-pi/2)) round(cos(-pi/2))]*[round(cos(-pi/2)) -sin(-
pi/2) 0;round(cos(-pi/2))*sin(-pi/2) round(cos(-pi/2))*round(cos(-pi/2))
-sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(-pi/2) sin(-pi/2)*round(cos(-pi/2))
round(cos(-pi/2))];
R12_pm=[round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2) 0;round(cos(-pi/2))*sin(-pi/2)
round(cos(-pi/2))*round(cos(-pi/2)) -sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(-pi/2)
sin(-pi/2)*round(cos(-pi/2)) round(cos(-pi/2))];
R23_pm=[cos(Tm) -sin(Tm) 0;round(cos(-pi/2))*sin(Tm) round(cos(-
pi/2))*cos(Tm) -sin(-pi/2);sin(-pi/2)*sin(Tm) sin(-pi/2)*cos(Tm)
round(cos(-pi/2))];
R34_pm=[cos(Sm) -sin(Sm) 0;round(cos(pi/2))*sin(Sm)
round(cos(pi/2))*cos(Sm) -sin(pi/2);sin(pi/2)*sin(Sm) sin(pi/2)*cos(Sm)
round(cos(pi/2))];

R11_pm=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R22_pm=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];R33_pm=[1 0 0;0 1
0;0 0 1];R44_pm=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];

%---------
R10_pm=inv(R01_pm);
R21_pm=inv(R12_pm);
R32_pm=simplify(inv(R23_pm));
R43_pm=simplify(inv(R34_pm));

%VECTORES DE POSICIÓN ENTRE LOS ORIGENES
%Pata 1
R0_O0O1_p1=[0;0;0];R1_O1O2_p1=[0;0;0];R2_O2O3_p1=R23_p1*[0;0;q13];

%-----------
R1_O1O1_p1=[0;0;0];
R2_O1O2_p1=[0;0;0];R2_O2O2_p1=[0;0;0];
R3_O1O3_p1=[0;0;q13];R3_O2O3_p1=[0;0;q13];

%Pata 2
R0_O0O1_p2=[0;0;0];R1_O1O2_p2=[0;0;0];R2_O2O3_p2=R23_p2*[0;0;q23];

%-----------
R1_O1O1_p2=[0;0;0];
R2_O1O2_p2=[0;0;0];R2_O2O2_p2=[0;0;0];
R3_O1O3_p2=[0;0;q23];R3_O2O3_p2=[0;0;q23];
```

```
%Pata 3
R0_O0O1_p3=[0;0;0];R1_O1O2_p3=[0;0;0];R2_O2O3_p3=R23_p3*[0;0;q33];

%-----------
R1_O1O1_p3=[0;0;0];
R2_O1O2_p3=[0;0;0];R2_O2O2_p3=[0;0;0];
R3_O1O3_p3=[0;0;q33];R3_O2O3_p3=[0;0;q33];

%Pata 4
R0_O0O1_p4=[0;0;0];R1_O1O2_p4=R12_p4*[0;0;q42];

%-----------
R1_O1O1_p4=[0;0;0];R2_O1O2_p4=[0;0;q42];

%Plataforma móvil
R0_O0O1_pm=R01_pm*[0;0;Xm];
R1_O1O2_pm=R12_pm*[0;0;Zm];
R2_O2O3_pm=[0;0;0];
R3_O3O4_pm=[0;0;0];

%-----------
R3_O3O3_pm=[0;0;0];
R4_O3O4_pm=[0;0;0];R4_O4O4_pm=[0;0;0];

%VECTORES DE VELOCIDAD ANGULAR
%Pata 1
w00_p1=[0;0;0];
w11_p1=R10_p1*w00_p1+z11_p1*qp11;
w22_p1=R21_p1*w11_p1+z22_p1*qp12;
w33_p1=R32_p1*w22_p1;
%Pata 2
w00_p2=[0;0;0];
w11_p2=R10_p2*w00_p2+z11_p2*qp21;
w22_p2=R21_p2*w11_p2+z22_p2*qp22;
w33_p2=R32_p2*w22_p2;
%Pata 3
w00_p3=[0;0;0];
w11_p3=R10_p3*w00_p3+z11_p3*qp31;
w22_p3=R21_p3*w11_p3+z22_p3*qp32;
w33_p3=R32_p3*w22_p3;
%Pata 4
w00_p4=[0;0;0];
w11_p4=R10_p4*w00_p4+z11_p4*qp41;
w22_p4=R21_p4*w11_p4;
%Plataforma móvil
w00_pm=[0;0;0];
w11_pm=R10_pm*w00_pm;
w22_pm=R21_pm*w11_pm;
w33_pm=R32_pm*w22_pm+z33_pm*Tmp;
w44_pm=R43_pm*w33_pm+z44_pm*Smp;

%VECTORES DE ACELERACIÓN ANGULAR
%Pata 1
wp00_p1=[0;0;0];
wp11_p1=R10_p1*wp00_p1+z11_p1*qpp11+cross((R10_p1*w00_p1),z11_p1*qp11);
wp22_p1=R21_p1*wp11_p1+z22_p1*qpp12+cross((R21_p1*w11_p1),z22_p1*qp12);
wp33_p1=R32_p1*wp22_p1;
%Pata 2
wp00_p2=[0;0;0];
```

```
wp11_p2=R10_p2*wp00_p2+z11_p2*qpp21+cross((R10_p2*w00_p2),z11_p2*qp21);
wp22_p2=R21_p2*wp11_p2+z22_p2*qpp22+cross((R21_p2*w11_p2),z22_p2*qp22);
wp33_p2=R32_p2*wp22_p2;
%Pata 3
wp00_p3=[0;0;0];
wp11_p3=R10_p3*wp00_p3+z11_p3*qpp31+cross((R10_p3*w00_p3),z11_p3*qp31);
wp22_p3=R21_p3*wp11_p3+z22_p3*qpp32+cross((R21_p3*w11_p3),z22_p3*qp32);
wp33_p3=R32_p3*wp22_p3;
%Pata 4
wp00_p4=[0;0;0];
wp11_p4=R10_p4*wp00_p4+z11_p4*qpp41+cross((R10_p4*w00_p4),z11_p4*qp41);
wp22_p4=R21_p4*wp11_p4;
%Plataforma móvil
wp00_pm=[0;0;0];
wp11_pm=R10_pm*wp00_pm;
wp22_pm=R21_pm*wp11_pm;
wp33_pm=R32_pm*wp22_pm+z33_pm*Tmpp+cross((R32_pm*w22_pm),z33_pm*Tmp);
wp44_pm=R43_pm*wp33_pm+z44_pm*Smpp+cross((R43_pm*w33_pm),z44_pm*Smp);

%VECTORES DE ACELERACIÓN LINEAL DE CADA ORIGEN
%Pata 1
Rpp0_O0_p1=[0;0;-g];
Rpp1_O1_p1=R10_p1*(Rpp0_O0_p1+cross(w00_p1,(cross(w00_p1,R0_O0O1_p1)))+cr
oss(wp00_p1,R0_O0O1_p1));
Rpp2_O2_p1=R21_p1*(Rpp1_O1_p1+cross(w11_p1,(cross(w11_p1,R1_O1O2_p1)))+cr
oss(wp11_p1,R1_O1O2_p1));
Rpp3_O3_p1=R32_p1*(Rpp2_O2_p1+cross(w22_p1,(cross(w22_p1,R2_O2O3_p1)))+cr
oss(wp22_p1,R2_O2O3_p1))+(z33_p1*qpp13+2*(cross(w33_p1,(z33_p1*qp13))));
%Pata 2
Rpp0_O0_p2=[0;0;-g];
Rpp1_O1_p2=R10_p2*(Rpp0_O0_p2+cross(w00_p2,(cross(w00_p2,R0_O0O1_p2)))+cr
oss(wp00_p2,R0_O0O1_p2));
Rpp2_O2_p2=R21_p2*(Rpp1_O1_p2+cross(w11_p2,(cross(w11_p2,R1_O1O2_p2)))+cr
oss(wp11_p2,R1_O1O2_p2));
Rpp3_O3_p2=R32_p2*(Rpp2_O2_p2+cross(w22_p2,(cross(w22_p2,R2_O2O3_p2)))+cr
oss(wp22_p2,R2_O2O3_p2))+(z33_p2*qpp23+2*(cross(w33_p2,(z33_p2*qp23))));
%Pata 3
Rpp0_O0_p3=[0;0;-g];
Rpp1_O1_p3=R10_p3*(Rpp0_O0_p3+cross(w00_p3,(cross(w00_p3,R0_O0O1_p3)))+cr
oss(wp00_p3,R0_O0O1_p3));
Rpp2_O2_p3=R21_p3*(Rpp1_O1_p3+cross(w11_p3,(cross(w11_p3,R1_O1O2_p3)))+cr
oss(wp11_p3,R1_O1O2_p3));
Rpp3_O3_p3=R32_p3*(Rpp2_O2_p3+cross(w22_p3,(cross(w22_p3,R2_O2O3_p3)))+cr
oss(wp22_p3,R2_O2O3_p3))+(z33_p3*qpp33+2*(cross(w33_p3,(z33_p3*qp33))));
%Pata 4
Rpp0_O0_p4=[0;0;-g];
Rpp1_O1_p4=R10_p4*(Rpp0_O0_p4+cross(w00_p4,(cross(w00_p4,R0_O0O1_p4)))+cr
oss(wp00_p4,R0_O0O1_p4));
Rpp2_O2_p4=R21_p4*(Rpp1_O1_p4+cross(w11_p4,(cross(w11_p4,R1_O1O2_p4)))+cr
oss(wp11_p4,R1_O1O2_p4))+(z22_p4*qpp42+2*(cross(w22_p4,(z22_p4*qp42))));
%Plataforma móvil
Rpp0_O0_pm=[0;0;-g];
Rpp1_O1_pm=R10_pm*(Rpp0_O0_pm+cross(w00_pm,(cross(w00_pm,R0_O0O1_pm)))+cr
oss(wp00_pm,R0_O0O1_pm))+(z11_pm*AXm+2*(cross(w11_pm,(z11_pm*VXm))));
Rpp2_O2_pm=R21_pm*(Rpp1_O1_pm+cross(w11_pm,(cross(w11_pm,R1_O1O2_pm)))+cr
oss(wp11_pm,R1_O1O2_pm))+(z22_pm*AZm+2*(cross(w22_pm,(z22_pm*VZm))));
Rpp3_O3_pm=R32_pm*(Rpp2_O2_pm+cross(w22_pm,(cross(w22_pm,R2_O2O3_pm)))+cr
oss(wp22_pm,R2_O2O3_pm));
Rpp4_O4_pm=R43_pm*(Rpp3_O3_pm+cross(w33_pm,(cross(w33_pm,R3_O3O4_pm)))+cr
oss(wp33_pm,R3_O3O4_pm));
```

```
%TENSOR ASIMETRICO Y ngorrito
%Pata 1
npe11_p1=vpes(wp11_p1)+(vpes(w11_p1)*vpes(w11_p1));
npe22_p1=vpes(wp22_p1)+(vpes(w22_p1)*vpes(w22_p1));
npe33_p1=vpes(wp33_p1)+(vpes(w33_p1)*vpes(w33_p1));
%--------
ngo11_p1=vgor(wp11_p1)+(vpes(w11_p1)*vgor(w11_p1));
ngo22_p1=vgor(wp22_p1)+(vpes(w22_p1)*vgor(w22_p1));
ngo33_p1=vgor(wp33_p1)+(vpes(w33_p1)*vgor(w33_p1));
%Pata 2
npe11_p2=vpes(wp11_p2)+(vpes(w11_p2)*vpes(w11_p2));
npe22_p2=vpes(wp22_p2)+(vpes(w22_p2)*vpes(w22_p2));
npe33_p2=vpes(wp33_p2)+(vpes(w33_p2)*vpes(w33_p2));
%--------
ngo11_p2=vgor(wp11_p2)+(vpes(w11_p2)*vgor(w11_p2));
ngo22_p2=vgor(wp22_p2)+(vpes(w22_p2)*vgor(w22_p2));
ngo33_p2=vgor(wp33_p2)+(vpes(w33_p2)*vgor(w33_p2));
%Pata 3
npe11_p3=vpes(wp11_p3)+(vpes(w11_p3)*vpes(w11_p3));
npe22_p3=vpes(wp22_p3)+(vpes(w22_p3)*vpes(w22_p3));
npe33_p3=vpes(wp33_p3)+(vpes(w33_p3)*vpes(w33_p3));
%--------
ngo11_p3=vgor(wp11_p3)+(vpes(w11_p3)*vgor(w11_p3));
ngo22_p3=vgor(wp22_p3)+(vpes(w22_p3)*vgor(w22_p3));
ngo33_p3=vgor(wp33_p3)+(vpes(w33_p3)*vgor(w33_p3));
%Pata 4
npe11_p4=vpes(wp11_p4)+(vpes(w11_p4)*vpes(w11_p4));
npe22_p4=vpes(wp22_p4)+(vpes(w22_p4)*vpes(w22_p4));
%--------
ngo11_p4=vgor(wp11_p4)+(vpes(w11_p4)*vgor(w11_p4));
ngo22_p4=vgor(wp22_p4)+(vpes(w22_p4)*vgor(w22_p4));
%Plataforma móvil
npe11_pm=vpes(wp11_pm)+(vpes(w11_pm)*vpes(w11_pm));
npe22_pm=vpes(wp22_pm)+(vpes(w22_pm)*vpes(w22_pm));
npe33_pm=vpes(wp33_pm)+(vpes(w33_pm)*vpes(w33_pm));
npe44_pm=vpes(wp44_pm)+(vpes(w44_pm)*vpes(w44_pm));
%--------
ngo11_pm=vgor(wp11_pm)+(vpes(w11_pm)*vgor(w11_pm));
ngo22_pm=vgor(wp22_pm)+(vpes(w22_pm)*vgor(w22_pm));
ngo33_pm=vgor(wp33_pm)+(vpes(w33_pm)*vgor(w33_pm));
ngo44_pm=vgor(wp44_pm)+(vpes(w44_pm)*vgor(w44_pm));

%ECUACIONES DE RESTRICCIÓN EN POSICIÓN
%Vectores Pata 1
Rf_OfOm=[Xm;0;Zm];
Rf_OfOm_p4=R01_p4*R12_p4*[0;0;q42];
Rf_AoA=R01_p1*R12_p1*R23_p1*[0;0;q13];
Rf_BoB=R01_p2*R12_p2*R23_p2*[0;0;q23];
Rf_CoC=R01_p3*R12_p3*R23_p3*[0;0;q33];
Rf_OmA=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmA;
Rf_OmB=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmB;
Rf_OmC=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmC;

%Cadena cinematica 1
Eqp_p1=Rf_OfAo+Rf_AoA-Rf_OfOm-Rf_OmA;
%Cadena cinematica 2
Eqp_p2=Rf_OfBo+Rf_BoB-Rf_OfOm-Rf_OmB;
%Cadena cinematica 3
```

```
Eqp_p3=Rf_OfCo+Rf_CoC-Rf_OfOm-Rf_OmC;
%Cadena cinematica 4
Eqp_p4=Rf_OfOm_p4-Rf_OfOm;

Eqp_s=[Eqp_p1;Eqp_p2;Eqp_p3;Eqp_p4(1,:);Eqp_p4(3,:)];

save('Var_Eqp.mat','Eqp_s');

%MATRIZ JACOBIANA
%Pata 1
%Vectores unitarios
zf1_p1=R01_p1*z11_p1;
zf2_p1=R01_p1*R12_p1*z22_p1;
zf3_p1=R01_p1*R12_p1*R23_p1*z33_p1;
%Vectores de posición entre origenes
Rf_O1Of_p1=R01_p1*R12_p1*R23_p1*[0;0;q13];
Rf_O2Of_p1=R01_p1*R12_p1*R23_p1*[0;0;q13];
%Pata 2
%Vectores unitarios
zf1_p2=R01_p2*z11_p2;
zf2_p2=R01_p2*R12_p2*z22_p2;
zf3_p2=R01_p2*R12_p2*R23_p2*z33_p2;
%Vectores de posición entre origenes
Rf_O1Of_p2=R01_p2*R12_p2*R23_p2*[0;0;q23];
Rf_O2Of_p2=R01_p2*R12_p2*R23_p2*[0;0;q23];
%Pata 3
%Vectores unitarios
zf1_p3=R01_p3*z11_p3;
zf2_p3=R01_p3*R12_p3*z22_p3;
zf3_p3=R01_p3*R12_p3*R23_p3*z33_p3;
%Vectores de posición entre origenes
Rf_O1Of_p3=R01_p3*R12_p3*R23_p3*[0;0;q33];
Rf_O2Of_p3=R01_p3*R12_p3*R23_p3*[0;0;q33];
%Pata 4
%Vectores unitarios
zf1_p4=R01_p4*z11_p4;
zf2_p4=R01_p4*R12_p4*z22_p4;
%Vectores de posición entre origenes
Rf_O1Of_p4=R01_p4*R12_p4*[0;0;q42];
%Plataforma movil
%Vectores unitarios
zf1_pm=R01_pm*z11_pm;
zf2_pm=R01_pm*R12_pm*z22_pm;
zf3_pm=R01_pm*R12_pm*R23_pm*z33_pm;
zf4_pm=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*z44_pm;
%Vectores de posición entre origenes
Rf_O3Of_pm1=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmA;
Rf_O4Of_pm1=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmA;

Rf_O3Of_pm2=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmB;
Rf_O4Of_pm2=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmB;

Rf_O3Of_pm3=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmC;
Rf_O4Of_pm3=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmC;

Rf_O3Of_pm4=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmOm;
Rf_O4Of_pm4=R01_pm*R12_pm*R23_pm*R34_pm*Rm_OmOm;

%Cadena cinemática 1
```

```
Sf_3_p1=[zf3_p1;zeros(3,1)];
Sf_2_p1=[cross(zf2_p1,Rf_O2Of_p1);zf2_p1];
Sf_1_p1=[cross(zf1_p1,Rf_O1Of_p1);zf1_p1];
Sf_4_pm=[cross(zf4_pm,Rf_O4Of_pm1);zf4_pm];
Sf_3_pm=[cross(zf3_pm,Rf_O3Of_pm1);zf3_pm];
Sf_2_pm=[zf2_pm;zeros(3,1)];
Sf_1_pm=[zf1_pm;zeros(3,1)];

J_p1=[Sf_3_p1 Sf_2_p1 Sf_1_p1 -Sf_4_pm -Sf_3_pm -Sf_2_pm -Sf_1_pm]
%Cadena cinemática 2
Sf_3_p2=[zf3_p2;zeros(3,1)];
Sf_2_p2=[cross(zf2_p2,Rf_O2Of_p2);zf2_p2];
Sf_1_p2=[cross(zf1_p2,Rf_O1Of_p2);zf1_p2];
Sf_4_pm=[cross(zf4_pm,Rf_O4Of_pm2);zf4_pm];
Sf_3_pm=[cross(zf3_pm,Rf_O3Of_pm2);zf3_pm];

J_p2=[Sf_3_p2 Sf_2_p2 Sf_1_p2 -Sf_4_pm -Sf_3_pm -Sf_2_pm -Sf_1_pm]
%Cadena cinemática 3
Sf_3_p3=[zf3_p3;zeros(3,1)];
Sf_2_p3=[cross(zf2_p3,Rf_O2Of_p3);zf2_p3];
Sf_1_p3=[cross(zf1_p3,Rf_O1Of_p3);zf1_p3];
Sf_4_pm=[cross(zf4_pm,Rf_O4Of_pm3);zf4_pm];
Sf_3_pm=[cross(zf3_pm,Rf_O3Of_pm3);zf3_pm];

J_p3=[Sf_3_p3 Sf_2_p3 Sf_1_p3 -Sf_4_pm -Sf_3_pm -Sf_2_pm -Sf_1_pm]
%Cadena cinemática 4
Sf_2_p4=[zf2_p4;zeros(3,1)];
Sf_1_p4=[cross(zf1_p4,Rf_O1Of_p4);zf1_p4];
Sf_4_pm=[cross(zf4_pm,Rf_O4Of_pm4);zf4_pm];
Sf_3_pm=[cross(zf3_pm,Rf_O3Of_pm4);zf3_pm];

J_p4=[Sf_2_p4 Sf_1_p4 -Sf_4_pm -Sf_3_pm -Sf_2_pm -Sf_1_pm]

J=[
    J_p1(1:3,1) J_p1(1:3,2) J_p1(1:3,3) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1)
zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) J_p1(1:3,4:7);
    zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) J_p2(1:3,1) J_p2(1:3,2) J_p2(1:3,3)
zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) J_p2(1:3,4:7);
    zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1)
J_p3(1:3,1) J_p3(1:3,2) J_p3(1:3,3) zeros(3,1) zeros(3,1) J_p3(1:3,4:7);
    zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1)
zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1) J_p4(1:3,1) J_p4(1:3,2) J_p4(1:3,3:6)
    ];
J=[J(1:10,:);J(12,:)];
J_s=simplify(J);
save('Var_J.mat','J_s');

%VECTOR B
%Ecuaciones de velocidad obtenido usando la matriz jacobiana
E_qp=J_s*[qp13;qp12;qp11;qp23;qp22;qp21;qp33;qp32;qp31;qp42;qp41;Smp;Tmp;
VZm;VXm];
%Ecuaciones de aceleración obtenido usando la matriz jacobiana
E_qpp=J_s*[qpp13;qpp12;qpp11;qpp23;qpp22;qpp21;qpp33;qpp32;qpp31;qpp42;qp
p41;Smpp;Tmpp;AZm;AXm];
%Variables de intercambio
t=sym('t','real');
%Variables generalizadas
q13t=sym('q13(t)');q12t=sym('q12(t)');q11t=sym('q11(t)');
q23t=sym('q23(t)');q22t=sym('q22(t)');q21t=sym('q21(t)');
```

```
q33t=sym('q33(t)');q32t=sym('q32(t)');q31t=sym('q31(t)');
q42t=sym('q42(t)');q41t=sym('q41(t)');
Smt=sym('Sm(t)');Tmt=sym('Tm(t)');Zmt=sym('Zm(t)');Xmt=sym('Xm(t)');
%Primera derivada de variables generalizadas
qp13t=diff(q13t);qp12t=diff(q12t);qp11t=diff(q11t);
qp23t=diff(q23t);qp22t=diff(q22t);qp21t=diff(q21t);
qp33t=diff(q33t);qp32t=diff(q32t);qp31t=diff(q31t);
qp42t=diff(q42t);qp41t=diff(q41t);
Smpt=diff(Smt);Tmpt=diff(Tmt);VZmt=diff(Zmt);VXmt=diff(Xmt);
%Segunda derivada de variables generalizadas
qpp13t=diff(qp13t);qpp12t=diff(qp12t);qpp11t=diff(qp11t);
qpp23t=diff(qp23t);qpp22t=diff(qp22t);qpp21t=diff(qp21t);
qpp33t=diff(qp33t);qpp32t=diff(qp32t);qpp31t=diff(qp31t);
qpp42t=diff(qp42t);qpp41t=diff(qp41t);
Smppt=diff(Smpt);Tmppt=diff(Tmpt);AZmt=diff(VZmt);AXmt=diff(VXmt);

sp={q13,q12,q11,q23,q22,q21,q33,q32,q31,q42,q41,Sm,Tm,Zm,Xm,qp13,qp12,qp1
1,qp23,qp22,qp21,qp33,qp32,qp31,qp42,qp41,Smp,Tmp,VZm,VXm,qpp13,qpp12,qpp
11,qpp23,qpp22,qpp21,qpp33,qpp32,qpp31,qpp42,qpp41,Smpp,Tmpp,AZm,AXm};
np={q13t,q12t,q11t,q23t,q22t,q21t,q33t,q32t,q31t,q42t,q41t,Smt,Tmt,Zmt,Xm
t,qp13t,qp12t,qp11t,qp23t,qp22t,qp21t,qp33t,qp32t,qp31t,qp42t,qp41t,Smpt,
Tmpt,VZmt,VXmt,qpp13t,qpp12t,qpp11t,qpp23t,qpp22t,qpp21t,qpp33t,qpp32t,qp
p31t,qpp42t,qpp41t,Smppt,Tmppt,AZmt,AXmt};

%Ecuaciones de velocidad y en aceleración en función del tiempo
E_qp_t=subs(E_qp,sp,np);
E_qpp_t=diff(E_qp_t);
E_qpp_s=subs(E_qpp_t,np,sp);
B_s=E_qpp-E_qpp_s;

save('Var_B.mat','B_s');

%VECTORES DE FUERZA GENERALIZADA EN PARAMETROS BASE
%Pata 1
%Matriz D
D_p1=[[0 0 1] zeros(1,3) zeros(1,3);zeros(1,3)
Tmx(jacobian(wp22_p1,qpp12)) zeros(1,3);zeros(1,3) zeros(1,3)
Tmx(jacobian(wp11_p1,qpp11))];

%Matriz A
A33=R11_p1*ngo11_p1;
A32=R12_p1*ngo22_p1;
A31=R12_p1*R23_p1*ngo33_p1;
A23=zeros(3,6);
A22=R22_p1*ngo22_p1;
A21=R23_p1*ngo33_p1;
A13=zeros(3,6);
A12=zeros(3,6);
A11=zeros(3,6);

A_p1=[A11 A12 A13;A21 A22 A23;A31 A32 A33];

%Matriz B
Hpe11=R11_p1*(vpes(R1_O1O1_p1)*npe11_p1-(vpes(Rpp1_O1_p1)));
Hpe12=R12_p1*(vpes(R2_O1O2_p1)*npe22_p1-(vpes(Rpp2_O2_p1)));
Hpe13=R12_p1*R23_p1*(vpes(R3_O1O3_p1)*npe33_p1-(vpes(Rpp3_O3_p1)));
Hpe22=R22_p1*(vpes(R2_O2O2_p1)*npe22_p1-(vpes(Rpp2_O2_p1)));
Hpe23=R23_p1*(vpes(R3_O2O3_p1)*npe33_p1-(vpes(Rpp3_O3_p1)));
Hpe33=R33_p1*npe33_p1;
```

```
B1_p1=[Hpe33 zeros(3,3) zeros(3,3);Hpe23 Hpe22 zeros(3,3);Hpe13 Hpe12
Hpe11];
%-----------------
h11=R11_p1*vpes(R1_O1O1_p1)*(Rpp1_O1_p1);
h12=R12_p1*vpes(R2_O1O2_p1)*(Rpp2_O2_p1);
h13=R12_p1*R23_p1*vpes(R3_O1O3_p1)*(Rpp3_O3_p1);
h22=R22_p1*vpes(R2_O2O2_p1)*(Rpp2_O2_p1);
h23=R23_p1*vpes(R3_O2O3_p1)*(Rpp3_O3_p1);
h33=R33_p1*(Rpp3_O3_p1);

B2_p1=[h33 zeros(3,1) zeros(3,1);h23 h22 zeros(3,1);h13 h12 h11];

B_p1=[B1_p1 B2_p1];

%Matriz AB
AB_p1=[A_p1 B_p1];

K_p1=D_p1*AB_p1;
K_p1=[K_p1(:,1:12) K_p1(:,19:24) K_p1(:,28:29)];
K_p1=simplify(K_p1)
PI_p1=[IXX12;IXY12;IXZ12;IYY12;IYZ12;IZZ12;IXX11;IXY11;IXZ11;IYY11;IYZ11;
IZZ11;mx12;my12;mz12;mx11;my11;mz11;m12;m11]

%MOdelo de fricción
Kf_p1=[qp13 sign(qp13) 0 0 0 0;0 0 qp12 sign(qp12) 0 0;0 0 0 0 qp11
sign(qp11)]
Pf_p1=[Fv13;Fc13;Fv12;Fc12;Fv11;Fc11]

%Pata 2
%Matriz D
D_p2=[[0 0 1] zeros(1,3) zeros(1,3);zeros(1,3)
Tmx(jacobian(wp22_p2,qpp22)) zeros(1,3);zeros(1,3) zeros(1,3)
Tmx(jacobian(wp11_p2,qpp21))];

%Matriz A
A33=R11_p2*ngo11_p2;
A32=R12_p2*ngo22_p2;
A31=R12_p2*R23_p2*ngo33_p2;
A23=zeros(3,6);
A22=R22_p2*ngo22_p2;
A21=R23_p2*ngo33_p2;
A13=zeros(3,6);
A12=zeros(3,6);
A11=zeros(3,6);

A_p2=[A11 A12 A13;A21 A22 A23;A31 A32 A33];

%Matriz B
Hpe11=R11_p2*(vpes(R1_O1O1_p2)*npe11_p2-(vpes(Rpp1_O1_p2)));
Hpe12=R12_p2*(vpes(R2_O1O2_p2)*npe22_p2-(vpes(Rpp2_O2_p2)));
Hpe13=R12_p2*R23_p2*(vpes(R3_O1O3_p2)*npe33_p2-(vpes(Rpp3_O3_p2)));
Hpe22=R22_p2*(vpes(R2_O2O2_p2)*npe22_p2-(vpes(Rpp2_O2_p2)));
Hpe23=R23_p2*(vpes(R3_O2O3_p2)*npe33_p2-(vpes(Rpp3_O3_p2)));
Hpe33=R33_p2*npe33_p2;

B1_p2=[Hpe33 zeros(3,3) zeros(3,3);Hpe23 Hpe22 zeros(3,3);Hpe13 Hpe12
Hpe11];
```

```
%-----------------
h11=R11_p2*vpes(R1_O1O1_p2)*(Rpp1_O1_p2);
h12=R12_p2*vpes(R2_O1O2_p2)*(Rpp2_O2_p2);
h13=R12_p2*R23_p2*vpes(R3_O1O3_p2)*(Rpp3_O3_p2);
h22=R22_p2*vpes(R2_O2O2_p2)*(Rpp2_O2_p2);
h23=R23_p2*vpes(R3_O2O3_p2)*(Rpp3_O3_p2);
h33=R33_p2*(Rpp3_O3_p2);

B2_p2=[h33 zeros(3,1) zeros(3,1);h23 h22 zeros(3,1);h13 h12 h11];

B_p2=[B1_p2 B2_p2];

%Matriz AB
AB_p2=[A_p2 B_p2];

K_p2=D_p2*AB_p2;
K_p2=[K_p2(:,1:12) K_p2(:,19:24) K_p2(:,28:29)];
K_p2=simplify(K_p2)
PI_p2=[IXX22;IXY22;IXZ22;IYY22;IYZ22;IZZ22;IXX21;IXY21;IXZ21;IYY21;IYZ21;
IZZ21;mx22;my22;mz22;mx21;my21;mz21;m22;m21]

%MOdelo de fricción
Kf_p2=[qp23 sign(qp23) 0 0 0 0;0 0 qp22 sign(qp22) 0 0;0 0 0 0 qp21
sign(qp21)]
Pf_p2=[Fv23;Fc23;Fv22;Fc22;Fv21;Fc21]

%Pata 3
%Matriz D
D_p3=[[0 0 1] zeros(1,3) zeros(1,3);zeros(1,3)
Tmx(jacobian(wp22_p3,qpp32)) zeros(1,3);zeros(1,3) zeros(1,3)
Tmx(jacobian(wp11_p3,qpp31))];

%Matriz A
A33=R11_p3*ngo11_p3;
A32=R12_p3*ngo22_p3;
A31=R12_p3*R23_p3*ngo33_p3;
A23=zeros(3,6);
A22=R22_p3*ngo22_p3;
A21=R23_p3*ngo33_p3;
A13=zeros(3,6);
A12=zeros(3,6);
A11=zeros(3,6);

A_p3=[A11 A12 A13;A21 A22 A23;A31 A32 A33];

%Matriz B
Hpe11=R11_p3*(vpes(R1_O1O1_p3)*npe11_p3-(vpes(Rpp1_O1_p3)));
Hpe12=R12_p3*(vpes(R2_O1O2_p3)*npe22_p3-(vpes(Rpp2_O2_p3)));
Hpe13=R12_p3*R23_p3*(vpes(R3_O1O3_p3)*npe33_p3-(vpes(Rpp3_O3_p3)));
Hpe22=R22_p3*(vpes(R2_O2O2_p3)*npe22_p3-(vpes(Rpp2_O2_p3)));
Hpe23=R23_p3*(vpes(R3_O2O3_p3)*npe33_p3-(vpes(Rpp3_O3_p3)));
Hpe33=R33_p3*npe33_p3;

B1_p3=[Hpe33 zeros(3,3) zeros(3,3);Hpe23 Hpe22 zeros(3,3);Hpe13 Hpe12
Hpe11];
%-----------------
h11=R11_p3*vpes(R1_O1O1_p3)*(Rpp1_O1_p3);
h12=R12_p3*vpes(R2_O1O2_p3)*(Rpp2_O2_p3);
```

```
h13=R12_p3*R23_p3*vpes(R3_O1O3_p3)*(Rpp3_O3_p3);
h22=R22_p3*vpes(R2_O2O2_p3)*(Rpp2_O2_p3);
h23=R23_p3*vpes(R3_O2O3_p3)*(Rpp3_O3_p3);
h33=R33_p3*(Rpp3_O3_p3);

B2_p3=[h33 zeros(3,1) zeros(3,1);h23 h22 zeros(3,1);h13 h12 h11];

B_p3=[B1_p3 B2_p3];

%Matriz AB
AB_p3=[A_p3 B_p3];

K_p3=D_p3*AB_p3;
K_p3=[K_p3(:,1:12) K_p3(:,19:24) K_p3(:,28:29)];
K_p3=simplify(K_p3)
PI_p3=[IXX32;IXY32;IXZ32;IYY32;IYZ32;IZZ32;IXX31;IXY31;IXZ31;IYY31;IYZ31;
IZZ31;mx32;my32;mz32;mx31;my31;mz31;m32;m31]

%MOdelo de fricción
Kf_p3=[qp33 sign(qp33) 0 0 0 0;0 0 qp32 sign(qp32) 0 0;0 0 0 0 qp31
sign(qp31)]
Pf_p3=[Fv33;Fc33;Fv32;Fc32;Fv31;Fc31]

%Pata 4
%Matriz D
D_p4=[[0 0 1] zeros(1,3);zeros(1,3) Tmx(jacobian(wp11_p4,qpp41))];

%Matriz A
A22=R11_p4*ngo11_p4;
A21=R12_p4*ngo22_p4;
A12=zeros(3,6);
A11=zeros(3,6);

A_p4=[A11 A12;A21 A22];

%Matriz B
Hpe11=R11_p4*(vpes(R1_O1O1_p4)*npe11_p4-(vpes(Rpp1_O1_p4)));
Hpe12=R12_p4*(vpes(R2_O1O2_p4)*npe22_p4-(vpes(Rpp2_O2_p4)));
Hpe22=R22_p4*npe22_p4;

B1_p4=[Hpe22 zeros(3,3);Hpe12 Hpe11];
%-----------------
h11=R11_p4*vpes(R1_O1O1_p4)*(Rpp1_O1_p4);
h12=R12_p4*vpes(R2_O1O2_p4)*(Rpp2_O2_p4);
h22=R22_p4*(Rpp2_O2_p4);

B2_p4=[h22 zeros(3,1);h12 h11];

B_p4=[B1_p4 B2_p4];

%Matriz AB
AB_p4=[A_p4 B_p4];

K_p4=D_p4*AB_p4;
K_p4=simplify(K_p4)
PI_p4=[IXX42;IXY42;IXZ42;IYY42;IYZ42;IZZ42;IXX41;IXY41;IXZ41;IYY41;IYZ41;
IZZ41;mx42;my42;mz42;mx41;my41;mz41;m42;m41]
```

```
%MOdelo de fricción
Kf_p4=[qp42 sign(qp42) 0 0;0 0 qp41 sign(qp41)]
Pf_p4=[Fv42;Fc42;Fv41;Fc41]

%Plataforma móvil
%Matriz D
D_pm=[Tmx(jacobian(wp44_pm,Smpp)) zeros(1,3) zeros(1,3)
zeros(1,3);zeros(1,3) Tmx(jacobian(wp33_pm,Tmpp)) zeros(1,3)
zeros(1,3);zeros(1,3) zeros(1,3) [0 0 1] zeros(1,3);zeros(1,3) zeros(1,3)
zeros(1,3) [0 0 1]];

%Matriz A
A44=zeros(3,6);
A43=zeros(3,6);
A42=zeros(3,6);
A41=zeros(3,6);
A34=zeros(3,6);
A33=zeros(3,6);
A32=zeros(3,6);
A31=zeros(3,6);
A24=zeros(3,6);
A23=zeros(3,6);
A22=R33_pm*ngo33_pm;
A21=R34_pm*ngo44_pm;
A14=zeros(3,6);
A13=zeros(3,6);
A12=zeros(3,6);
A11=R44_pm*ngo44_pm;

A_pm=[A11 A12 A13 A14;A21 A22 A23 A24;A31 A32 A33 A34;A41 A42 A43 A44];

%Matriz B
Hpe11=R11_pm*npe11_pm;
Hpe12=R12_pm*npe22_pm;
Hpe13=R12_pm*R23_pm*npe33_pm;
Hpe14=R12_pm*R23_pm*R34_pm*npe44_pm;
Hpe22=R22_pm*npe22_pm;
Hpe23=R23_pm*npe33_pm;
Hpe24=R23_pm*R34_pm*npe44_pm;
Hpe33=R33_pm*(vpes(R3_O3O3_pm)*npe33_pm-(vpes(Rpp3_O3_pm)));
Hpe34=R34_pm*(vpes(R4_O3O4_pm)*npe44_pm-(vpes(Rpp4_O4_pm)));
Hpe44=R44_pm*(vpes(R4_O4O4_pm)*npe44_pm-(vpes(Rpp4_O4_pm)));

B1_pm=[Hpe44 zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3);Hpe34 Hpe33 zeros(3,3)
zeros(3,3);Hpe24 Hpe23 Hpe22 zeros(3,3);Hpe14 Hpe13 Hpe12 Hpe11];
%-----------------
h11=R11_pm*(Rpp1_O1_pm);
h12=R12_pm*(Rpp2_O2_pm);
h13=R12_pm*R23_pm*(Rpp3_O3_pm);
h14=R12_pm*R23_pm*R34_pm*(Rpp4_O4_pm);
h22=R22_pm*(Rpp2_O2_pm);
h23=R23_pm*(Rpp3_O3_pm);
h24=R23_pm*R34_pm*(Rpp4_O4_pm);
h33=R33_pm*vpes(R3_O3O3_pm)*(Rpp3_O3_pm);
h34=R34_pm*vpes(R4_O3O4_pm)*(Rpp4_O4_pm);
h44=R44_pm*vpes(R4_O4O4_pm)*(Rpp4_O4_pm);
```

```
B2_pm=[h44 zeros(3,1) zeros(3,1) zeros(3,1);h34 h33 zeros(3,1)
zeros(3,1);h24 h23 h22 zeros(3,1);h14 h13 h12 h11];

B_pm=[B1_pm B2_pm];

%Matriz AB
AB_pm=[A_pm B_pm];

K_pm=D_pm*AB_pm;
K_pm=[K_pm(:,1:6) K_pm(:,25:27) K_pm(:,37)];
K_pm=simplify(K_pm)
PI_pm=[IXXm;IXYm;IXZm;IYYm;IYZm;IZZm;mxm;mym;mzm;mm]

%MODELO LINEAL DEL ROBOT PARALELO
%Agrupación de matriz de observación y parametros inerciales
Kf=[
    Kf_p1 zeros(3,6) zeros(3,6) zeros(3,4);
    zeros(3,6) Kf_p2 zeros(3,6) zeros(3,4);
    zeros(3,6) zeros(3,6) Kf_p3 zeros(3,4);
    zeros(2,6) zeros(2,6) zeros(2,6) Kf_p4;
    zeros(4,22)
    ];
Pf=[Pf_p1;Pf_p2;Pf_p3;Pf_p4];
KI=[
    K_p1 zeros(3,20) zeros(3,20) zeros(3,20) zeros(3,10);
    zeros(3,20) K_p2 zeros(3,20) zeros(3,20) zeros(3,10);
    zeros(3,20) zeros(3,20) K_p3 zeros(3,20) zeros(3,10);
    zeros(2,20) zeros(2,20) zeros(2,20) K_p4 zeros(2,10);
    zeros(4,20) zeros(4,20) zeros(4,20) zeros(4,20) K_pm
    ];

PI=[PI_p1;PI_p2;PI_p3;PI_p4;PI_pm];

K=[KI Kf];
P=[PI;Pf];

Ka=K;
aux=sum(Ka);
K=[];
P_s=[];
Pdes=[];
[a,b]=size(Ka);
for i=1:b
    if aux(i)==0
        Pdes=[Pdes;P(i)];
    else
        K=[K Ka(:,i)];
        P_s=[P_s;P(i)];
    end
end
%Coordenadas generalizadas independientes
J_i=[J(:,1) J(:,4) J(:,7) J(:,10)];
K_i=[K(1,:);K(4,:);K(7,:);K(10,:)];
Ji_s=J_i;
Ki_s=K_i;
save('Var_Ji.mat','Ji_s');
save('Var_Ki.mat','Ki_s');
%Coordenadas generalizadas dependientes
J_d=[J(:,2:3) J(:,5:6) J(:,8:9) J(:,11:15)];
```

```
K_d=[K(2:3,:);K(5:6,:);K(8:9,:);K(11:15,:)];
Jd_s=J_d;
Kd_s=K_d;
save('Var_Jd.mat','Jd_s');
save('Var_Kd.mat','Kd_s');
%Matriz de observación, parametros inerciales y de fricción
K_s=K;
save('Var_K.mat','K_s');
save('Var_P.mat','P_s');
```

ANEXO II.

IDENTIFICACIÓN DE PARAMETROS BASE PARA EL MODELO LINEAL DEL ROBOT 3UPS + 1RPU

```
%ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL-MAESTRÍA EN MECATRÓNICA Y ROBÓTICA
%Ing. Elizabeth Armas
%Modelo dinámico en parámetros inerciales - Robot paralelo 3UPS+1RPU

%IDENTIFICACIÓN DE PARAMETROS BASE

clear all; close all; clc

%DECLARACIÓN DE VARIABLES GLOBALES
global R r b2f b3f b2m b3m g q_i_f

%Carga de Trayectorias optimas para el proceso de identificación
load('Var_foptimas.mat','v_ts','q_op_i','qp_op_i','qpp_op_i');

%Configuración fsolve
al_fsolve=optimoptions(@fsolve,'Algorithm','levenberg-marquardt');

%PRECISIÓN DE CÁLCULO DEL COMPUTADOR
e_r=1e-9;

%PARAMETROS DE SIMULACIÓN
[f_ts,c_ts]=size(v_ts);  %Tamaño de la serie de tiempo del experimento
TS=v_ts(c_ts);      %Tiempo del experimento
dt=v_ts(2)-v_ts(1);     %Delta de tiempo
Nptos=c_ts;    %Numero de puntos
psim=0.05;     %Delta de muestreo

%CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DEL ROBOT
%Plataforma fija
R=0.4;
b2f=50*(pi/180);
b3f=40*(pi/180);
%Plataforma móvil
r=0.2;
b2m=40*(pi/180);
b3m=30*(pi/180);
%GRAVEDAD
g=-9.81;

%DESPLAZAMENTOS PARA CADA ARTICULACIÓN ACTIVA
%Puntos de inicio de cada actuador
qo=[0.425729;0.428574;0.428574;0.375826];

%Trayectorias de desplazamiento para cada articulación activa
auxqop=q_op_i;
for i=1:c_ts
    dq_op_i(:,i)=auxqop(:,i)-qo;
end

%PARAMETROS DINÁMICOS
```

```
%Pata 1
%Vastago: Propiedades medidas desde la parte superior del elemento
m12=0.54294842;
xg12=0;yg12=0;zg12=-0.14335819;
mx12=m12*xg12;my12=m12*yg12;mz12=m12*zg12;
IXX12=0.00508677;IXY12=0;IXZ12=0;IYY12=0.00509475; IYZ12=0;
IZZ12=0.00002566;

%Cilindro: Medido en el sistema de referencia 2
m11=1.47771854;
xg11=0.14383546;yg11=0.00032196;zg11=-0.00004067;
mx11=m11*xg11;my11=m11*yg11;mz11=m11*zg11;
IXX11=0.00081606;IXY11=-0.00000038;IXZ11=-0.00000104; IYY11=0.01288718;
IYZ11=0.00000002; IZZ11=0.01290515;

%Articulaciones
Fv13=0;  Fc13=0;
Fv12=0;  Fc12=0;
Fv11=0;  Fc11=0;

%Pata 2
%Vastago
m22=m12;
xg22=xg12;yg22=yg12;zg22=zg12;
mx22=m22*xg22;my22=m22*yg22;mz22=m22*zg22;
IXX22=IXX12;IXY22=IXY12;IXZ22=IXZ12;IYY22=IYY12; IYZ22=IYZ12;
IZZ22=IZZ12;
%Cilindro
m21=m11;
xg21=xg11;yg21=yg11;zg21=zg11;
mx21=m21*xg21;my21=m21*yg21;mz21=m21*zg21;
IXX21=IXX11;IXY21=IXY11;IXZ21=IXZ11; IYY21=IYY11; IYZ21=IYZ11;
IZZ21=IZZ11;
%Articulaciones
Fv23=0;  Fc23=0;
Fv22=0;  Fc22=0;
Fv21=0;  Fc21=0;

%Pata 3
%Vastago
m32=m12;
xg32=xg12;yg32=yg12;zg32=zg12;
mx32=m32*xg32;my32=m32*yg32;mz32=m32*zg32;
IXX32=IXX12;IXY32=IXY12;IXZ32=IXZ12;IYY32=IYY12; IYZ32=IYZ12;
IZZ32=IZZ12;
%Cilindro
m31=m11;
xg31=xg11;yg31=yg11;zg31=zg11;
mx31=m31*xg31;my31=m31*yg31;mz31=m31*zg31;
IXX31=IXX11;IXY31=IXY11;IXZ31=IXZ11; IYY31=IYY11; IYZ31=IYZ11;
IZZ31=IZZ11;
%Articulaciones
Fv33=0;  Fc33=0;
Fv32=0;  Fc32=0;
Fv31=0;  Fc31=0;

%Pata 4
%Vastago: Propiedades medidas desde la parte superior del elemento
m42=0.59204458;
```

```
xg42=0;yg42=0;zg42=-0.13147001;
mx42=m42*xg42;my42=m42*yg42;mz42=m42*zg42;
IXX42=0.00601509;IXY42=0;IXZ42=0;IYY42=0.00602440; IYZ42=0;
IZZ42=0.00002865;

%Cilindro: Medido en el sistema de referencia 1
m41=m11;
xg41=0.14383546;yg41=-0.00004067;zg41=-0.00032196;
mx41=m41*xg41;my41=m41*yg41;mz41=m41*zg41;
IXX41=0.00081606;IXY41=-0.00000104;IXZ41=0.00000038; IYY41=0.01290515;
IYZ41=-0.00000002; IZZ41=0.01288718;

%Articulaciones
Fv42=0;  Fc42=0;
Fv41=0;  Fc41=0;

%Plataforma movil
mm=5.39602353;
xgm=0.03191104;ygm=0.00978093;zgm=0.03260286;
mxm=mm*xgm;mym=mm*ygm;mzm=mm*zgm;
IXXm=0.03962002;IXYm=0.00171831;IXZm=-0.00022880; IYYm=0.11646212;
IYZm=0.00007127; IZZm=0.15439899;

%Vector con los parametros iniciales antes de optimizarlos
P_din=[IXX12, IXY12, IXZ12, IYY12, IYZ12, IZZ12, IXX11, IXY11, IXZ11,
IYY11, IYZ11, IZZ11, mx12, my12, mz12, mx11, my11, mz11, m12, IXX22,
IXY22, IXZ22, IYY22, IYZ22, IZZ22, IXX21, IXY21, IXZ21, IYY21, IYZ21,
IZZ21, mx22, my22, mz22, mx21, my21, mz21, m22, IXX32, IXY32, IXZ32,
IYY32, IYZ32, IZZ32, IXX31, IXY31, IXZ31, IYY31, IYZ31, IZZ31, mx32,
my32, mz32, mx31, my31, mz31, m32, IYY42, IZZ41, mx42, mz42, mx41, my41,
m42, IXXm, IXYm, IXZm, IYYm, IYZm, IZZm, mxm, mym, mzm, mm, Fv13, Fc13,
Fv12, Fc12, Fv11, Fc11, Fv23, Fc23, Fv22, Fc22, Fv21, Fc21, Fv33, Fc33,
Fv32, Fc32, Fv31, Fc31, Fv42, Fc42, Fv41, Fc41];

%SIMULACIÓN DE TRAYECTORIA USANDO ADAMS/VIEW
dir_prin=pwd;     %Carpeta principal de los programas
dir_sim=strcat(dir_prin,'\Planta Adams');    %Carpeta de la planta
dinámica
cd(dir_sim);      %Cambio a directorio
Planta_1;         %Configuración de la planta en Matlab
sim('Planta_adams_1');  %Inicio de simulación para la trayectoria
seleccionada
cd(dir_prin);       %Retorna a la carpeta principal
%Extracción de datos
q_ad_i=q_adams_i.Data';     %Extrancción de los datos de posición para
las juntas indepentientes
q_ad_d=q_adams_d.Data';     %Extrancción de los datos de posición para
las juntas depentientes
q_ad_d(1:9,:)=q_ad_d(1:9,:)*pi/180;     %Conversión de grados a radianes
qp_ad_i=qp_adams_i.Data';   %Extrancción de los datos de velocidad para
las juntas indepentientes
qp_ad_d=qp_adams_d.Data';   %Extrancción de los datos de velocidad para
las juntas depentientes
qp_ad_d(1:9,:)=qp_ad_d(1:9,:)*pi/180;   %Conversión de grados a radianes
qpp_ad_i=qpp_adams_i.Data'; %Extrancción de los datos de aceleración para
las juntas indepentientes
qpp_ad_d=qpp_adams_d.Data'; %Extrancción de los datos de aceleración para
las juntas depentientes
qpp_ad_d(1:9,:)=qpp_ad_d(1:9,:)*pi/180; %Conversión de grados a radianes
```

```
T_ad_i=T_adams_i.Data';     %extracción de fuerzas generalizadas
estimadas en ADAMS/VIEW

%CALCULO DE FUERZAS GENERALIZADAS Y MATRIZ DE OBSERVACIÓN PARA LAS
ARTICULACIONES ACTIVAS

%POSICIÓN INICIAL DE LAS JUNTAS DEPENDIENTES
qo11=57.881454*(pi/180);qo12=(89.429556-90)*(pi/180);
qo21=96.050422*(pi/180);qo22=(70.966135-90)*(pi/180);
qo31=98.618857*(pi/180);qo32=(107.422735-90)*(pi/180);
qo41=(90-6.784472)*(pi/180);Tmo=-
14.098356*(pi/180);Smo=1.402507*(pi/180);Xmo=0.055332;Zmo=0.465105;

%Calculo de la posición de las variables generalizadas dependientes
qo_d=[qo12,qo11,qo22,qo21,qo32,qo31,qo41,Smo,Tmo,Zmo,Xmo];       %Punto
inicial de las variables generalizadas dependientes del Robot
T_m_i=[];
W_m_i=[];
W_f_i=[];
q_m_d=[];
qp_m_d=[];
qpp_m_d=[];
T_m_p1=[];  %Aux
for k=1:Nptos
    q_i_f=q_op_i(:,k)';    %Puntos de evaluación de las variables
generalizadas independientes
    qaux_d=fsolve(@erpos,qo_d,al_fsolve);       %Calculo de la posición
de las variables generalizadas en el punto "k" ,al_fsolve
    qo_d=qaux_d;        %Actualizo el punto inicial para las variables
generalizadas dependientes
    q_m_d=[q_m_d qaux_d'];  %Almacenamiento de las variables calculadas
para el punto "k"

    %CÁLCULO DE VELOCIDADES
    Jd=MJd(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:9,k));
    Ji=MJi(q_m_d(1:7,k));
    X=Jd\Ji; %Operación equivalente a "inv(Jd)*Ji;"
    qpaux_d=-X*qp_op_i(:,k);   %Calculo de la velocidad de las variables
generalizadas dependiente en el punto "k"
    qp_m_d=[qp_m_d qpaux_d];            %Almacenamiento de las
velocidades calculadas

    %CÁLCULO DE ACELERACIONES
    B=VBac(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:9,k),qp_op_i(1:4,k),qp_m_d(1:9,k));
%Calculo de la componente no dependiente de las aceleraciones
generalizadas
    qppaux_d=-X*qpp_op_i(:,k)+B;  %Calculo de la aceleración de las
variables generalizadas dependiente en el punto "k"
    qpp_m_d=[qpp_m_d qppaux_d];             %Almacenamiento de las
aceleraciones calculadas

    %Matriz de observación de cada punto de simulación

[Kd_p,Kd_f]=MKd(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:11,k),qp_op_i(1:4,k),qp_m_d(1:11,k)
,qpp_op_i(1:4,k),qpp_m_d(1:11,k));     %Cálculo de la matriz K de las
variables dependientes para el punto "k"

[Ki_p,Ki_f]=MKi(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:11,k),qp_op_i(1:4,k),qp_m_d(1:11,k)
```

```
,qpp_op_i(1:4,k),qpp_m_d(1:11,k));     %Cálculo de la matriz K de las
variables independientes para el punto "k"
    Waux_p=Ki_p-(X')*Kd_p;
%Cálculo de la fila para el punto "k" de la matriz de observación-modelo
inercial
    Waux_f=Ki_f-(X')*Kd_f;
%Cálculo de la fila para el punto "k" de la matriz de observación-modelo
de fricción
    Taux=[Waux_p Waux_f]*P_din';       %Fuerzas generalizadas calculadas
para el punto "k"
    W_m_i=[W_m_i;Waux_p];   %Matriz de observación-modelo inercial
    W_f_i=[W_f_i;Waux_f];   %Matriz de observación -modelo de fricción
    T_m_i=[T_m_i Taux];     %Fuerzas generalizadas calculadas
end

%CALCULO DE ERRORES
%Variables independientes
e_q_i=q_ad_i-q_op_i;
e_qp_i=qp_ad_i-qp_op_i;
e_qpp_i=qpp_ad_i-qpp_op_i;
%Variables dependientes
e_q_d=q_ad_d-q_m_d;
e_qp_d=qp_ad_d-qp_m_d;
e_qpp_d=qpp_ad_d-qpp_m_d;
%Fuerzas generalizadas
e_T_i=T_ad_i-T_m_i;

%GRAFICAS COMPARATIVAS

eti_t='t(s)';eti_q_i='q(m)';eti_qp_i='qp(m/s)';eti_qpp_i='qpp(m/s^2)';
eti_q_d='q(rad)';eti_qp_d='qp(rad/s)';eti_qpp_d='qpp(rad/s^2)';
eti_T_i='F(N)';eti_e_T_i='e(N)';
eti_e_q_i='e(m)';eti_e_qp_i='e(m/s)';eti_e_qpp_i='e(m/s^2)';
eti_e_q_d='e(rad)';eti_e_qp_d='e(rad/s)';eti_e_qpp_d='e(rad/s^2)';

%GRAFICA DE FUERZAS GENERALIZADAS PARA LAS ARTICULACIONES INDEPENDIENTES

fgrafica(v_ts,[T_m_i(1,:);T_ad_i(1,:);e_T_i(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
1','Error'},{'F_1_m','F_1_s','e'},46)
fgrafica(v_ts,[T_m_i(2,:);T_ad_i(2,:);e_T_i(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
2','Error'},{'F_2_m','F_2_s','e'},47)
fgrafica(v_ts,[T_m_i(3,:);T_ad_i(3,:);e_T_i(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
3','Error'},{'F_3_m','F_3_s','e'},48)
fgrafica(v_ts,[T_m_i(4,:);T_ad_i(4,:);e_T_i(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
4','Error'},{'F_4_m','F_4_s','e'},49)

%%
%FUERZAS GENERALIZADAS PARA LAS ARTICULACIONES ACTIVAS EN FORMA VECTORIAL
[f,c]=size(T_ad_i); %Tamaño del vector de datos para las fuerzas
generalizadas independientes
VT_ad_i=[];         %Variable para almacenar las fuerzas generalizadas en
forma vectorial
for k=1:c
    %Vector de fuerzas generalizadas para los puntos "Nptos"
    VT_ad_i=[VT_ad_i;T_ad_i(:,k)];
```

```
end

%REDUCCIÓN DEL MODELO USANDO SVD
%Dimensiones de la matriz de observación
[r_W,c_W]=size(W_m_i);
%Obtención de la Matriz U, S y V
[U,S,V]=svd(W_m_i);
S_max=S(1,1);                       %Maximo valor singular
c1=r_W;                             %Columnas de la matriz de observación

for i=1:c_W
    if S(i,i)<(c1*e_r*S_max)
        S(i,i)=0;        %Eliminar valores singulares por debajo de la
tolerancia
    end
end

b=rank(S);                  %Calculo del rango de la matriz de observación

r_v2=c_W;                   %Número de filas de las matriz V2
c_v2=c_W-b;                 %Número de columnas de las matriz V2

V2=V(1:r_v2,(b+1):c_W);     %Se determina la submatriz V2 de la matriz V

%Verificación de la obtención de las matrices V2
e_V2=sum(sum(W_m_i*V2))

%Obtención de la matriz de permutación y las matrices V21 y V22
Pt=zeros(r_v2,r_v2);      %Matriz de permutación transpuesta
V21=[];
V22=[];
V22(1,:)=V2(1,:);        %Primera fila de la matriz V22
Pt(b+1,1)=1;
j=2;
k=1;
for i=2:r_v2
    if (rank([V22;V2(i,:)]))==j && j<=c_v2
        V22(j,:)=V2(i,:);                    %Obtención de las filas de la
matriz V22
        Pt(b+j,i)=1;
        j=j+1;
    else
        V21(k,:)=V2(i,:);                    %Obtención de las filas de la
matriz V21
        Pt(k,i)=1;
        k=k+1;
    end
end

%Verificación de la obtención de las matrices V21 y V22
e_V21_V22=sum(sum(Pt*V2-[V21;V22]))

P=Pt';  %Obtención de la matriz de permutación P

Beta=-V21/V22; %-V21*inv(V22)

W_P=W_m_i*P;    %Calculo de la matriz W permutada
```

```
W1_p=W_P(1:r_W,1:b); %Extraccion de las columnas independientes de la
matriz permutada
W1=[W1_p W_f_i];     %Matriz de observación reducida incluyendo modelo de
fricción
Fr=[eye(b) Beta]*Pt;       %Factor para reducción a parametros Base

%Carga de variables simbolicas
load('Var_Ji.mat');
load('Var_Ki.mat');
load('Var_Jd.mat');
load('Var_Kd.mat');
load('Var_P.mat');

X_s=Jd_s\Ji_s;
W_p_s=Ki_s(:,1:74)-Tmx(X_s)*Kd_s(:,1:74);     %Obtencion de la Matriz W-
modelo inercial en forma simbolica
W_f_s=Ki_s(:,75:96)-Tmx(X_s)*Kd_s(:,75:96);     %Obtencion de la Matriz
W-modelo de fricción en forma simbolica

WP_p_s=W_p_s*P;
W1_p_s=WP_p_s(:,1:b); %Matriz W1 en forma simbolica
W1_s=[W1_p_s W_f_s];
P_p_base=Fr*P_s(1:74);   %Parametros Base en forma simbolica
P_base=[P_p_base;P_s(75:96)];
save('Var_Param_base.mat','W1','P','b','Fr','VT_ad_i','W1_s','P_base')

%Valores numericos de los parametros base calculados
W_P_num=W_m_i*P;
W1_num=W_P_num(1:r_W,1:b);
P_base_num=(inv(W1_num'*W1_num))*W1_num'*VT_ad_i;
save('Var_Param_base_num.mat','P_base_num');
```

ANEXO III.

ANÁLISIS DE COMPATIBILIDAD DE LOS PARÁMETROS BASE IDENTIFICADOS PARA EL MODELO DINÁMICO LINEAL DEL ROBOT 3UPS + 1RPU

```
%ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL-MAESTRÍA EN MECATRÓNICA Y ROBÓTICA
%Ing. Elizabeth Armas
%Modelo dinamico en parametros inerciales - Robot paralelo 3UPS+1RPU

%VALIDACIÓN DE PARAMETROS BASE IDENTIFICADOS

clear all; close all; clc

%DECLARACIÓN DE VARIABLES GLOBALES
global R r b2f b3f b2m b3m g q_i_f

%Carga de Trayectorias optimas para el proceso de identificación
load('Var_foptimas2.mat','v_ts','q_op_i','qp_op_i','qpp_op_i');
load('Var_Param_base.mat','W1','P','b','Fr')
load('Var_Param_base_num.mat','P_base_num')
load('Var_Pajustados','P_din_op')

%Configuración fsolve
al_fsolve=optimoptions(@fsolve,'Algorithm','levenberg-marquardt');

%PRECISIÓN DE CÁLCULO DEL COMPUTADOR
e_r=1e-9;

%PARAMETROS DE SIMULACIÓN
[f_ts,c_ts]=size(v_ts);  %Tamaño de la serie de tiempo del experimento
TS=v_ts(c_ts);      %Tiempo del experimento
dt=v_ts(2)-v_ts(1);     %Delta de tiempo
Nptos=c_ts;    %Numero de puntos
psim=0.05;     %Delta de muestreo

%DESPLAZAMENTOS PARA CADA ARTICULACIÓN ACTIVA
%Puntos de inicio de cada actuador
qo=[0.425729;0.428574;0.428574;0.375826];

%Trayectorias de desplazamiento para cada articulación activa
auxqop=q_op_i;
for i=1:c_ts
    dq_op_i(:,i)=auxqop(:,i)-qo;
end
%%
%CARACTERISTICAS GEOMETRICAS DEL ROBOT
%Plataforma fija
R=0.4;
b2f=50*(pi/180);
b3f=40*(pi/180);
%Plataforma móvil
r=0.2;
b2m=40*(pi/180);
b3m=30*(pi/180);
```

```
%GRAVEDAD
g=-9.81;

%SIMULACIÓN DE TRAYECTORIA USANDO ADAMS/VIEW
dir_prin=pwd;     %Carpeta principal de los programas
dir_sim=strcat(dir_prin,'\Planta Adams Validacion');    %Carpeta de la
planta dinámica %
cd(dir_sim);      %Cambio a directorio
Planta_1;         %Configuración de la planta en Matlab
sim('Planta_adams_2');  %Inicio de simulación para la trayectoria
seleccionada
cd(dir_prin);       %Retorna a la carpeta principal
%Extracción de datos
q_ad_i=q_adams_i.Data';     %Extrancción de los datos de posición para
las juntas indepentientes
q_ad_d=q_adams_d.Data';     %Extrancción de los datos de posición para
las juntas depentientes
q_ad_d(1:9,:)=q_ad_d(1:9,:)*pi/180;     %Conversión de grados a radianes
qp_ad_i=qp_adams_i.Data';   %Extrancción de los datos de velocidad para
las juntas indepentientes
qp_ad_d=qp_adams_d.Data';   %Extrancción de los datos de velocidad para
las juntas depentientes
qp_ad_d(1:9,:)=qp_ad_d(1:9,:)*pi/180;   %Conversión de grados a radianes
qpp_ad_i=qpp_adams_i.Data'; %Extrancción de los datos de aceleración para
las juntas indepentientes
qpp_ad_d=qpp_adams_d.Data'; %Extrancción de los datos de aceleración para
las juntas depentientes
qpp_ad_d(1:9,:)=qpp_ad_d(1:9,:)*pi/180; %Conversión de grados a radianes
T_ad_i=T_adams_i.Data';     %extracción de fuerzas generalizadas
estimadas en ADAMS/VIEW

%%
%CALCULO DE FUERZAS GENERALIZADAS Y MATRIZ DE OBSERVACIÓN PARA LAS
ARTICULACIONES ACTIVAS

%POSICIÓN INICIAL DE LAS JUNTAS DEPENDIENTES
qo11=57.881454*(pi/180);qo12=(89.429556-90)*(pi/180);
qo21=96.050422*(pi/180);qo22=(70.966135-90)*(pi/180);
qo31=98.618857*(pi/180);qo32=(107.422735-90)*(pi/180);
qo41=(90-6.784472)*(pi/180);Tmo=-
14.098356*(pi/180);Smo=1.402507*(pi/180);Xmo=0.055332;Zmo=0.465105;

%Calculo de la posición de las variables generalizadas dependientes
qo_d=[qo12,qo11,qo22,qo21,qo32,qo31,qo41,Smo,Tmo,Zmo,Xmo];       %Punto
inicial de las variables generalizadas dependientes del Robot
T_m_i=[];
q_m_d=[];
qp_m_d=[];
qpp_m_d=[];
for k=1:Nptos
    q_i_f=q_op_i(:,k)';    %Puntos de evaluación de las variables
generalizadas independientes
    qaux_d=fsolve(@erpos,qo_d,al_fsolve);       %Calculo de la posición
de las variables generalizadas en el punto "k" ,al_fsolve
    qo_d=qaux_d;        %Actualizo el punto inicial para las variables
generalizadas dependientes
    q_m_d=[q_m_d qaux_d'];  %Almacenamiento de las variables calculadas
para el punto "k"
```

```
    %CÁLCULO DE VELOCIDADES
    Jd=MJd(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:9,k));
    Ji=MJi(q_m_d(1:7,k));
    X=Jd\Ji; %Operación equivalentea "inv(Jd)*Ji;"
    qpaux_d=-X*qp_op_i(:,k);   %Calculo de la velocidad de las variables
generalizadas dependiente en el punto "k"
    qp_m_d=[qp_m_d qpaux_d];            %Almacenamiento de las
velocidades calculadas

    %CÁLCULO DE ACELERACIONES
    B=VBac(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:9,k),qp_op_i(1:4,k),qp_m_d(1:9,k));
%Calculo de la componente no dependiente de las aceleraciones
generalizadas
    qppaux_d=-X*qpp_op_i(:,k)+B;  %Calculo de la aceleración de las
variables generalizadas dependiente en el punto "k"
    qpp_m_d=[qpp_m_d qppaux_d];             %Almacenamiento de las
aceleraciones calculadas

    %Matriz de observación de cada punto de simulación

[Kd_p,Kd_f]=MKd(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:11,k),qp_op_i(1:4,k),qp_m_d(1:11,k)
,qpp_op_i(1:4,k),qpp_m_d(1:11,k));     %Cálculo de la matriz K de las
variables dependientes para el punto "k"

[Ki_p,Ki_f]=MKi(q_op_i(1:4,k),q_m_d(1:11,k),qp_op_i(1:4,k),qp_m_d(1:11,k)
,qpp_op_i(1:4,k),qpp_m_d(1:11,k));     %Cálculo de la matriz K de las
variables independientes para el punto "k"
    Waux_p=Ki_p-(X')*Kd_p;
%Cálculo de la fila para el punto "k" de la matriz de observación-modelo
inercial
    Waux_f=Ki_f-(X')*Kd_f;
%Cálculo de la fila para el punto "k" de la matriz de observación-modelo
de fricción
    W_P=Waux_p*P;    %Calculo de la matriz W permutada
    W1_p=W_P(:,1:b); %Extraccion de las columnas independientes de la
matriz permutada
    W1=[W1_p Waux_f];   %Matriz de observación reducida, incluye el
modelo de fricción
    P_p_b=Fr*P_din_op(1:74)';
    P_b=[P_p_b;P_din_op(75:96)'];
    Taux=W1*P_b;       %Fuerzas generalizadas calculadas para el punto
"k"
    %Taux=[Waux_p Waux_f]*P_din_op';       %Fuerzas generalizadas
calculadas para el punto "k"
    T_m_i=[T_m_i Taux];     %Fuerzas generalizadas calculadas
end

%CALCULO DE ERRORES
%Variables independientes
e_q_i=q_ad_i-q_op_i;
e_qp_i=qp_ad_i-qp_op_i;
e_qpp_i=qpp_ad_i-qpp_op_i;
%Variables dependientes
e_q_d=q_ad_d-q_m_d;
e_qp_d=qp_ad_d-qp_m_d;
e_qpp_d=qpp_ad_d-qpp_m_d;
%Fuerzas generalizadas
e_T_i=T_ad_i-T_m_i;
```

```
%ERROR CUADRATICO MEDIO DE FUERZAS GENERALIZADAS
ECMF=sqrt((sum((e_T_i.^2),2))/(Nptos+1));

%GRAFICAS COMPARATIVAS

eti_t='t(s)';eti_q_i='q(m)';eti_qp_i='qp(m/s)';eti_qpp_i='qpp(m/s^2)';
eti_q_d='q(rad)';eti_qp_d='qp(rad/s)';eti_qpp_d='qpp(rad/s^2)';
eti_T_i='F(N)';eti_e_T_i='e(N)';
eti_e_q_i='e(m)';eti_e_qp_i='e(m/s)';eti_e_qpp_i='e(m/s^2)';
eti_e_q_d='e(rad)';eti_e_qp_d='e(rad/s)';eti_e_qpp_d='e(rad/s^2)';

%Posición juntas idependientes
%fgrafica(v_ts,[q_op_i(1,:);q_ad_i(1,:);e_q_i(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_i,eti_e_q_i},{'Posición de junta activa, pata
1','Error'},{'q_1_3_m','q_1_3_s','e'},1)
%fgrafica(v_ts,[q_op_i(2,:);q_ad_i(2,:);e_q_i(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_i,eti_e_q_i},{'Posición de junta activa, pata
2','Error'},{'q_2_3_m','q_2_3_s','e'},2)
%fgrafica(v_ts,[q_op_i(3,:);q_ad_i(3,:);e_q_i(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_i,eti_e_q_i},{'Posición de junta activa, pata
3','Error'},{'q_3_3_m','q_3_3_s','e'},3)
%fgrafica(v_ts,[q_op_i(4,:);q_ad_i(4,:);e_q_i(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_i,eti_e_q_i},{'Posición de junta activa, pata
4','Error'},{'q_4_2_m','q_4_2_s','e'},4)
%Posición juntas dependientes
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(1,:);q_ad_d(1,:);e_q_d(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 1','Error'},{'q_1_2_m','q_1_2_s','e'},5)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(2,:);q_ad_d(2,:);e_q_d(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 1','Error'},{'q_1_1_m','q_1_1_s','e'},6)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(3,:);q_ad_d(3,:);e_q_d(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 2','Error'},{'q_2_2_m','q_2_2_s','e'},7)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(4,:);q_ad_d(4,:);e_q_d(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 2','Error'},{'q_2_1_m','q_2_1_s','e'},8)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(5,:);q_ad_d(5,:);e_q_d(5,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 3','Error'},{'q_3_2_m','q_3_2_s','e'},9)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(6,:);q_ad_d(6,:);e_q_d(6,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 3','Error'},{'q_3_1_m','q_3_1_s','e'},10)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(7,:);q_ad_d(7,:);e_q_d(7,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Posición de junta dependiente,
pata 3','Error'},{'q_4_1_m','q_4_1_s','e'},11)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(8,:);q_ad_d(8,:);e_q_d(8,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Orientación alrededor del eje Z, P
movil','Error'},{'S_m','S_s','e'},12)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(9,:);q_ad_d(9,:);e_q_d(9,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_d,eti_e_q_d},{'Orientación alrededor del eje Y, P
movil','Error'},{'T_m','T_s','e'},13)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(10,:);q_ad_d(10,:);e_q_d(10,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_i,eti_e_q_i},{'Posición en el eje Z, P
movil','Error'},{'Z_m','Z_s','e'},14)
%fgrafica(v_ts,[q_m_d(11,:);q_ad_d(11,:);e_q_d(11,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_q_i,eti_e_q_i},{'Posición en el eje X, P
movil','Error'},{'X_m','X_s','e'},15)
```

```
%Velocidad juntas idependientes
%fgrafica(v_ts,[qp_op_i(1,:);qp_ad_i(1,:);e_qp_i(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_i,eti_e_qp_i},{'Velocidad de junta activa, pata
1','Error'},{'qp_1_3_m','qp_1_3_s','e'},16)
%fgrafica(v_ts,[qp_op_i(2,:);qp_ad_i(2,:);e_qp_i(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_i,eti_e_qp_i},{'Velocidad de junta activa, pata
2','Error'},{'qp_2_3_m','qp_2_3_s','e'},17)
%fgrafica(v_ts,[qp_op_i(3,:);qp_ad_i(3,:);e_qp_i(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_i,eti_e_qp_i},{'Velocidad de junta activa, pata
3','Error'},{'qp_3_3_m','qp_3_3_s','e'},18)
%fgrafica(v_ts,[qp_op_i(4,:);qp_ad_i(4,:);e_qp_i(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_i,eti_e_qp_i},{'Velocidad de junta activa, pata
4','Error'},{'qp_4_2_m','qp_4_2_s','e'},19)
%Velocidad juntas dependientes
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(1,:);qp_ad_d(1,:);e_qp_d(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 1','Error'},{'qp_1_2_m','qp_1_2_s','e'},20)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(2,:);qp_ad_d(2,:);e_qp_d(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 1','Error'},{'qp_1_1_m','qp_1_1_s','3'},21)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(3,:);qp_ad_d(3,:);e_qp_d(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 2','Error'},{'qp_2_2_m','qp_2_2_s','e'},22)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(4,:);qp_ad_d(4,:);e_qp_d(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 2','Error'},{'qp_2_1_m','qp_2_1_s','e'},23)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(5,:);qp_ad_d(5,:);e_qp_d(5,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 3','Error'},{'qp_3_2_m','qp_3_2_s','e'},24)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(6,:);qp_ad_d(6,:);e_qp_d(6,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 3','Error'},{'qp_3_1_m','qp_3_1_s','e'},25)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(7,:);qp_ad_d(7,:);e_qp_d(7,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad de junta dependiente,
pata 4','Error'},{'qp_4_1_m','qp_4_1_s','e'},26)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(8,:);qp_ad_d(8,:);e_qp_d(8,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad alrededor del eje Z, P
movil','Error'},{'Sp_m','Sp_s','e'},27)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(9,:);qp_ad_d(9,:);e_qp_d(9,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_d,eti_e_qp_d},{'Velocidad alrededor del eje Y, P
movil','Error'},{'Tp_m','Tp_s','e'},28)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(10,:);qp_ad_d(10,:);e_qp_d(10,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_i,eti_e_qp_i},{'Velocidad en el eje Z, P
movil','Error'},{'VZ_m','VZ_s','e'},29)
%fgrafica(v_ts,[qp_m_d(11,:);qp_ad_d(11,:);e_qp_d(11,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qp_i,eti_e_qp_i},{'Velocidad en el eje X, P
movil','Error'},{'VX_m','VX_s','e'},30)
%Aceleración juntas idependientes
%fgrafica(v_ts,[qpp_op_i(1,:);qpp_ad_i(1,:);e_qpp_i(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_i,eti_e_qpp_i},{'Aceleración de junta activa,
pata 1','Error'},{'qpp_1_3_m','qpp_1_3_s','e'},31)
%fgrafica(v_ts,[qpp_op_i(2,:);qpp_ad_i(2,:);e_qpp_i(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_i,eti_e_qpp_i},{'Aceleración de junta activa,
pata 2','Error'},{'qpp_2_3_m','qpp_2_3_s','e'},32)
%fgrafica(v_ts,[qpp_op_i(3,:);qpp_ad_i(3,:);e_qpp_i(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_i,eti_e_qpp_i},{'Aceleración de junta activa,
pata 3','Error'},{'qpp_3_3_m','qpp_3_3_s','e'},33)
%fgrafica(v_ts,[qpp_op_i(4,:);qpp_ad_i(4,:);e_qpp_i(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_i,eti_e_qpp_i},{'Aceleración de junta activa,
pata 4','Error'},{'qpp_4_2_m','qpp_4_2_s','e'},34)
```

```
%Aceleración juntas dependientes
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(1,:);qpp_ad_d(1,:);e_qpp_d(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 1','Error'},{'qpp_1_2_m','qpp_1_2_s','e'},35)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(2,:);qpp_ad_d(2,:);e_qpp_d(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 1','Error'},{'qpp_1_1_m','qpp_1_1_s','e'},36)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(3,:);qpp_ad_d(3,:);e_qpp_d(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 2','Error'},{'qpp_2_2_m','qpp_2_2_s','e'},37)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(4,:);qpp_ad_d(4,:);e_qpp_d(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 2','Error'},{'qpp_2_1_m','qpp_2_1_s','e'},38)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(5,:);qpp_ad_d(5,:);e_qpp_d(5,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 3','Error'},{'qpp_3_2_m','qpp_3_2_s','e'},39)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(6,:);qpp_ad_d(6,:);e_qpp_d(6,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 3','Error'},{'qpp_3_1_m','qpp_3_1_s','e'},40)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(7,:);qpp_ad_d(7,:);e_qpp_d(7,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración de junta
dependiente, pata 3','Error'},{'qpp_4_1_m','qpp_4_1_s','e'},41)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(8,:);qpp_ad_d(8,:);e_qpp_d(8,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración alrededor del eje
Z, P movil','Error'},{'Spp_m','Spp_s','e'},42)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(9,:);qpp_ad_d(9,:);e_qpp_d(9,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración alrededor del eje
Y, P movil','Error'},{'Tpp_m','Tpp_s','e'},43)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(10,:);qpp_ad_d(10,:);e_qpp_d(10,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración en el eje Z, P
movil','Error'},{'AZ_m','AZ_s','e'},44)
%fgrafica(v_ts,[qpp_m_d(11,:);qpp_ad_d(11,:);e_qpp_d(11,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_qpp_d,eti_e_qpp_d},{'Aceleración en el eje X, P
movil','Error'},{'AX_m','AX_s','e'},45)

fgrafica(v_ts,[T_m_i(1,:);T_ad_i(1,:);e_T_i(1,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
1','Error'},{'F_1_m','F_1_s','e'},46)
fgrafica(v_ts,[T_m_i(2,:);T_ad_i(2,:);e_T_i(2,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
2','Error'},{'F_2_m','F_2_s','e'},47)
fgrafica(v_ts,[T_m_i(3,:);T_ad_i(3,:);e_T_i(3,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
3','Error'},{'F_3_m','F_3_s','e'},48)
fgrafica(v_ts,[T_m_i(4,:);T_ad_i(4,:);e_T_i(4,:)],[0 TS],[2
1],{eti_t,eti_t},{eti_T_i,eti_e_T_i},{'Fuerza, Pata
4','Error'},{'F_4_m','F_4_s','e'},49)
```