

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIO DE GEODÉSICAS CIRCULARES EN SOLUCIONES DE
GRAVEDAD BHT**

**TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
FÍSICO**

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

ALVARO RAFAEL MARTÍNEZ GÓMEZ

alvaro.martinez@epn.edu.ec

DIRECTOR: ÁLVARO DUEÑAS VIDAL, PH.D.

adv@usal.es

Quito, noviembre 2019

Declaración de Autoría

Yo ALVARO RAFAEL MARTÍNEZ GÓMEZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

Firma:

Alvaro Rafael Martínez Gómez

Certificación

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por ALVARO RAFAEL MARTÍNEZ GÓMEZ, bajo mi supervisión.

Firma:

Álvaro Dueñas Vidal, Ph.D.
Director del Proyecto

Agradecimientos

A mi familia, quienes me han apoyado incondicionalmente en el transcurso de mi carrera.

A mi tutor, Álvaro Dueñas Vidal, por su trabajo sincero y a conciencia para que este trabajo de titulación llegue a su fin, por su orientación e innumerables sugerencias para el desarrollo del presente trabajo.

“A quienes emprendieron el estudio de la física por amor a ella y a quienes, pese a los cursos, demandas de resultados sólidos y presiones del mercado, aún aman su ciencia, no perdieron la esperanza de comprenderla mejor y se atreven a formular preguntas radicales. Pues es de ellos el Reino de los Fotones.”

Mario Bunge

El presente trabajo está dedicado a todas las personas que han dedicado su vida sinceramente a la ciencia, sobre todo a las personas que han aportado al desarrollo de la ciencia en el Ecuador.

Índice general

Declaración de Autoría	I
Certificación	II
Agradecimientos	III
Índice general	VI
Índice de Figuras	VIII
Índice de Cuadros	IX
Notación y convenciones	X
Resumen	XI
Abstract	XII
1. Introducción	1
1.1. Teoría de Einstein de la gravedad	1
1.2. La RG como un campo de spin 2 no masivo	7
1.2.1. Aproximación para campos gravitatorios débiles	7
1.2.2. Acción para un campo de spin 2 no masivo	10
1.3. Gravedad en $D < 4$	12
1.3.1. Gravedad de Einstein en $D = 3$	13
1.4. Geodésicas	18
2. Teorías en 3 Dimensiones	23
2.1. Solución BTZ	23
2.2. Otros modelos en $D = 3$	25
2.3. Gravedad masiva BHT	28
3. Estabilidad de geodésicas circulares en soluciones BHT	33
3.1. Soluciones de agujero negro de BHT	33

3.1.1. Constante cosmológica $\Lambda = 0$	34
3.1.2. Constante cosmológica $\Lambda < 0$	34
3.1.3. Constante cosmológica $\Lambda > 0$	35
3.2. Estabilidad de geodésicas circulares mediante exponentes de Lyapunov	36
3.2.1. Geodésicas temporales	37
3.2.2. Geodésicas nulas	38
3.3. Condiciones de estabilidad en geodésicas circulares	38
3.3.1. Constante cosmológica $\Lambda = 0$	38
3.3.2. Constante cosmológica $\Lambda < 0$	40
3.3.3. Constante cosmológica $\Lambda > 0$	46
4. Conclusiones	51
A. Algunos Tensores de la RG	55
B. Estabilidad de Lyapunov	57
B.1. Definiciones básicas	57
B.2. El método indirecto de Lyapunov	59
B.3. Exponentes de Lyapunov	60
Bibliografía	62

Índice de figuras

3.1.	Región de estabilidad de geodésicas temporales circulares para $\Lambda = 0$	39
3.2.	Regiones de estabilidad para geodésicas temporales circulares con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ, b y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $l = 1, 2, 4$. En amarillo el caso $b > 0$, en verde $b < 0$ y $\mu > 0$, en azul $b < 0$ y $\mu < 0$	41
3.3.	Regiones de estabilidad para geodésicas temporales circulares con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ, b y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $l = 1, 2, 4$. En amarillo el caso $b > 0$, en verde $b < 0$ y $\mu > 0$, en azul $b < 0$ y $\mu < 0$. En color negro se representa la región que está dentro del horizonte de sucesos r_+	42
3.4.	En color amarillo se muestra las regiones de estabilidad de geodésicas temporales circulares con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ, l y el radio r en el caso $b > 0$, según la desigualdad (3.49), para $b = 2, 4$. En color negro la región dentro del horizonte de sucesos r_+	43
3.5.	En verde la región de estabilidad de geodésicas circulares temporales con $\Lambda < 0$, para $b < 0$ cuando $\mu = 0$ y en negro la región para la cual $r < r_+$	43
3.6.	Regiones de estabilidad para geodésicas circulares temporales con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ, l y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $b = -1, -2, -4$. En verde $\mu > 0$ y en azul $\mu < 0$	44
3.7.	Regiones de estabilidad para geodésicas circulares temporales con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ, l y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $b = -1, -2, -4$. En verde $\mu > 0$ y en azul $\mu < 0$. En negro se sobrepone la región que se encuentra dentro del horizonte de sucesos r_+	45
3.8.	En verde se muestra la región de estabilidad para geodésicas nulas circulares con $\Lambda < 0$ y en negro la región que cumple con la condición de estar dentro del horizonte de sucesos r_+	46
3.9.	En amarillo se muestra las regiones de estabilidad en función de los parámetros μ, b y el radio r , para geodésicas temporales circulares con $\Lambda > 0$, según la desigualdad (3.62), para $l = 1, 2, 4$. Además en negro se representa las regiones que están dentro del horizonte de sucesos r_+	48
3.10.	En amarillo se muestran las regiones de estabilidad para geodésicas temporales circulares con $\Lambda > 0$, en función de los parámetros μ, l y el radio r según la desigualdad (3.62), para $b = 1, 2, 4$. En negro las región dentro del horizonte de sucesos r_+	49
3.11.	Región de estabilidad para geodésicas nulas circulares con $\Lambda > 0$ en amarillo y la región que se encuentra dentro del horizonte de sucesos r_+ en negro.	. . .	50

Índice de cuadros

4.1. Condiciones para la estabilidad de geodésicas circulares para agujeros negros en BHT para los distintos casos de Λ , en función de los parámetros l , μ , b y el radio r	51
4.2. Condiciones en las cuales las geodésicas circulares dejan de ser estables.	. . .	52
A.1. Componentes independientes de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ y R	55

Notación y convenciones

- En todo el trabajo usaremos unidades naturales, es decir $c = G = 1$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G la constante de gravitación universal de Newton.
- La dimensión del espacio-tiempo se denota por D .
- Los índices espacio-temporales se representan por letras griegas:
 $\mu, \nu, \gamma, \dots \in \{0, 1, \dots, D - 1\}$.
- Los índices espaciales se representan por letras latinas:
 $a, b, c, \dots \in \{1, 2, \dots, D - 1\}$, a menos que se diga lo contrario.
- Usamos la signatura mayormente positiva, $(-, +, \dots, +)$.
- La contracción para el tensor de Ricci es $R_{\beta\mu} = R_{\alpha\beta}{}^{\alpha}{}_{\mu}$ y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ corresponde a la curvatura escalar.
- Se usa $\Delta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.
- ∇_{μ} es la conexión de Levi-Civita.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Resumen

Facultad de Ciencias
Departamento de Física

por Alvaro Martínez

La Relatividad General (RG) es una de las teorías más exitosas de la física moderna. Junto con la Teoría Cuántica de Campos, es uno de los pilares fundamentales del modelo estándar actual, y ha sobrevivido a más de 100 años de corroboraciones experimentales. Sin embargo, la RG falla cuando se trata de la descripción de la gravedad a escalas microscópicas, siendo este un gran vacío en la física contemporánea. Por esta razón, se ha buscado entender mejor la RG de varias formas, siendo una de estas formas el estudio de modelos de gravedad en dimensiones más bajas, donde la teoría de campos correspondiente resulta tratable. Así, uno de los marcos para comprender mejor la RG ha sido estudiar la gravedad en $(2 + 1)$ dimensiones. Sin embargo, la RG clásica en $(2 + 1)$ dimensiones no posee grados de libertad para la propagación de la gravedad, y se hace necesario introducir modificaciones para poder llegar a resultados válidos. En concreto, en este trabajo nos centraremos en estudiar soluciones dentro del marco de la Gravedad Masiva BHT. Esta consiste en una modificación de la RG en la que se considera un gravitón masivo para mantener grados de libertad propagantes.

En este trabajo de titulación, para las soluciones encontradas por Oliva, Tempo y Troncoso [1] de BHT, analizaremos la estabilidad de las geodésicas circulares temporales y nulas en función de parámetros de las soluciones. Las soluciones analizadas tienen además de un parámetro de masa, un parámetro extra de *gravitational hair*, que no puede existir en RG clásica en virtud del teorema de no-hair.

Como resultado obtenemos los conjuntos de los parámetros de las soluciones de agujero negro para los cuales existen geodésicas circulares estables. Esto se logra analizando la estabilidad de las órbitas mediante exponentes de Lyapunov, específicamente con el método desarrollado por Cardoso et al. [2].

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Abstract

Facultad de Ciencias
Departamento de Física

por Alvaro Martínez

General Relativity (GR) is one of the most successful theories of modern physics. Together with the Quantum Field Theory, it is one of the fundamental pillars of the current standard model, and has survived more than 100 years of experimental corroborations. However, GR fails when it comes to the description of gravity at microscopic scales, which constitutes a great void in contemporary physics. For this reason, we have sought to understand the GR in several ways, one of these forms being the study of gravity models in lower dimensions, where the corresponding field theory is treatable. Thus, one of the frameworks to better understand GR has been to study gravity in $(2 + 1)$ dimensions. However, classic RG in $(2 + 1)$ dimensions does not have degrees of freedom for the propagation of gravity, and it is necessary to introduce modifications in order to reach valid results. In particular, in this work we will focus on studying solutions within the framework of the BHT Massive Gravity. This consists of a modification of the GR in which a massive graviton is considered to maintain propagating degrees of freedom.

In this undergraduate thesis, for the solutions found by Oliva, Tempo and Troncoso [1] of BHT, we will analyze the stability of the time-like and null circular geodesics based on the parameters of the solutions. The analyzed solutions have in addition to a mass parameter, an extra parameter of *gravitational hair*, which can not exist in classical GR by virtue of the no-hair theorem.

As a result we obtain the sets of the parameters of the black hole solutions for which there are stable circular geodesics. This is achieved by analyzing the stability of the orbits by exponents of Lyapunov, specifically with the method developed by Cardoso et al. [2].

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la Relatividad General (RG) describe la gravedad como una modificación de la geometría (curvatura) del espacio-tiempo. Junto con la Teoría Cuántica de Campos, forma los pilares fundamentales de la física moderna.

Aunque la RG ha tenido gran éxito al explicar fenómenos a escala de nuestro Sistema Solar, e incluso a escalas cosmológicas, esto no quiere decir que esté exenta de problemas. En este capítulo de introducción haremos un breve repaso y exploraremos cómo se comporta la RG en tres dimensiones.

1.1. Teoría de Einstein de la gravedad

La Relatividad General modela el espacio-tiempo como una variedad pseudo-Riemanniana, con signatura Lorentziana y conexión de Levi-Civita¹. La dinámica en cada punto viene dada por las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ la curvatura escalar, y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento. Dado que el tensor de curvatura depende en primeras derivadas de los símbolos de Christoffel y estos, a su vez, en primeras derivadas de la métrica, la ecuación tensorial anterior implica un sistema de 10 ecuaciones diferenciales de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$. Además, se trata de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales. Se pueden escribir en términos del Tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2)$$

¹La conexión de Levi-Civita es aquella sin torsión que cumple $\nabla_k g_{ij} = 0$.

El tensor de energía-momento establece las densidades de energía y momento, así como sus flujos, en cada punto del espacio-tiempo. Se obtiene a partir del contenido en materia² que existen en la variedad. Así, si \mathcal{L}_m es la densidad Lagrangiana de materia,

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad S_m = \int_M d^4x \mathcal{L}_m \quad (1.3)$$

El tensor de energía momento que surge de la expresión anterior cumple la ecuación,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.4)$$

es covariantemente conservado, aunque no conservado (en sentido clásico).

La ec. de Campo de Einstein puede obtenerse de un principio variacional. Así, definiendo la acción de Einstein-Hilbert como,

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1.5)$$

puede recuperarse la ec. (1.1) a partir de las correspondientes ecs. de Euler-Lagrange para la métrica $g_{\mu\nu}$ en la acción $S_{EH} + S_m$. Nótese que el funcional (1.5) es el más sencillo que se puede proponer para la geometría de una variedad. Una generalización sencilla, también propuesta por Einstein, es añadir un término de constante cosmológica³,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) . \quad (1.6)$$

Sin embargo, clásicamente esto ya no se considera RG sino una modificación (sencilla) de la misma.

Una métrica g_{ik} que satisface las ecuaciones de campo (1.1) en todos los puntos del espacio-tiempo se dice que es una solución exacta. El espacio de Minkowski es la solución trivial, de vacío, a la ec. (1.1). Sin embargo no es la única solución de vacío. Después del espacio de Minkowski, la solución de Schwarzschild es la más interesante.

La métrica de Schwarzschild como un ejemplo

La solución de Schwarzschild es aquella de vacío con simetría esférica y asintóticamente plana. Viene dada por la métrica,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (1.7)$$

²En el marco de la RG, habitualmente se refiere por materia a todos los campos que pueden existir en el espacio-tiempo, al margen del campo gravitatorio. En este sentido, el campo electromagnético, se considera dentro de la densidad Lagrangiana de materia.

³La constante cosmológica fue introducida por Einstein cuando aplicó la RG por primera vez para desarrollar un modelo cosmológico. Su papel original, permitir soluciones estáticas homogéneas a las ecuaciones de Einstein en presencia de materia, resultó ser innecesario cuando se descubrió la expansión del Universo [3].

donde m es una constante de integración. Físicamente, describe el campo gravitacional generado por un objeto puntual en $r = 0$, siendo m su masa: como veremos más adelante, para r grandes con respecto a m , coincide en primera aproximación con la teoría de Newton para un cuerpo esférico de masa gravitacional m centrado en $r = 0$.

La solución de Schwarzschild presenta una longitud característica $r_g = 2m$, llamada radio de Schwarzschild. Cuando $r = r_g$, la componente g_{tt} se hace cero y g_{rr} diverge, mostrando que este radio debe jugar un papel clave en la estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild.

Como $1 - 2m/r$ es cero para $r = 2m$ (radio de Schwarzschild), la métrica de Schwarzschild en coordenadas estándar parece ser singular allí: g_{tt} se hace cero y g_{rr} diverge. Para $r < 2m$, $r \neq 0$, la métrica de Schwarzschild es de nuevo una métrica Lorentziana regular, pero el carácter temporal y espacial de las coordenadas t y r se intercambian. La aparente “singularidad” en $r = 2m$, tiene un profundo significado físico: ningún rayo de luz u otra señal clásica puede escapar de las regiones $r < 2m$. Por esta razón, a la hipersuperficie $\mathbb{R} \times \{r = 2m\}$ se la denomina horizonte de eventos y, al espacio-tiempo que lo contiene, agujero negro⁴(de Schwarzschild).

El comportamiento singular de la métrica (en la cual un componente desaparece o diverge en un sistema de coordenadas dado) puede surgir bien a que la geometría espacio-temporal en misma es singular en ese evento, o bien a que se ha hecho una mala elección de coordenadas. Una forma de distinguir entre estas dos situaciones es construir cantidades escalares a partir del tensor de curvatura e inspeccionar si divergen en el evento en cuestión. Una cantidad escalar tendrá el mismo valor numérico en todas las coordenadas y si diverge en un sistema de coordenadas dado, lo hará en todos los sistemas de coordenadas. Tal patología indicará que la geometría misma es singular en ese evento. El radio de Schwarzschild no es una singularidad real, el comportamiento singular del radio de Schwarzschild se debe a una mala elección de las coordenadas.

Límite Newtoniano

La teoría de Einstein de la gravedad debe coincidir con la teoría de Newton cuando el campo gravitacional es débil y se tienen velocidades bajas. En estas circunstancias, la fuente del campo gravitacional es materia pura, siendo su tensor de energía-momento,

$$T_{\mu\nu} \cong \rho u_\mu u_\nu \tag{1.8}$$

⁴Existen otras soluciones de agujeros negros en la RG de Einstein. Según tengan carga y momento angular, pueden ser de Reissner–Nordström, de Kerr o de Kerr–Newman. De hecho, en $D = 4$, un agujero negro sólo puede tener masa, carga y momento angular

con ρ la densidad de masa de la fuente y u_μ su cuadrivelocidad. Dentro de la aproximación Newtoniana, para un observador co-móvil, $u_\nu = (-1, \vec{0})$, y por lo tanto,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Por la ecuación de Einstein (1.1), el único componente distinto de cero del tensor de Einstein será G_{00} . Por lo tanto, en este análisis nos ocuparemos principalmente de los componentes 00 de los tensores.

Si el campo gravitatorio es lo suficientemente débil, el espacio-tiempo se deformará sólo ligeramente respecto al espacio libre de gravedad de Minkowski. Por lo tanto, en esta aproximación, podemos considerar la métrica espacio-temporal como una pequeña perturbación de la métrica de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1.10)$$

Para derivar la ecuación de campo en esta aproximación, sustituimos (1.10) y (1.9) en (1.1). Tomando la traza de (1.1) tenemos además que,

$$R = -8\pi\kappa T, \quad \text{con} \quad T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (1.11)$$

donde se ha tomado la traza con respecto a la métrica de Minkowski⁵ $\eta_{\mu\nu}$. Sustituyendo esta ec. en el lado izquierdo de (1.1), tenemos,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (1.12)$$

Para obtener $R_{\mu\nu}$ hasta orden lineal en $h_{\mu\nu}$, calculamos los símbolos de Christoffel a primer orden en $h_{\mu\nu}$, que son:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} (\partial_\nu h_{\delta\mu} + \partial_\mu h_{\delta\nu} - \partial_\delta h_{\mu\nu}), \quad (1.13)$$

entonces en el tensor de Ricci despreciamos los términos “ $\Gamma\Gamma$ ”, quedando la expresión,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \\ &= \frac{1}{2} (-\Delta h_{\mu\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\mu h_\alpha^\alpha) + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2), \end{aligned} \quad (1.14)$$

tomando en cuenta que el campo es estático y despreciando términos no lineales en $h_{\mu\nu}$, tenemos

$$R_{00} = \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h_{00}. \quad (1.15)$$

⁵De hecho, podemos usar la métrica de Minkowski para subir y bajar índices en un objeto de cualquier orden definido en $h_{\mu\nu}$, ya que las correcciones sólo contribuirían con órdenes no lineales en $h_{\mu\nu}$.

Además, si se reemplaza la métrica (1.10) y el tensor (1.9) en la ec. (1.12), se tiene,

$$R_{00} = 4\pi\kappa\rho \quad (1.16)$$

comparando la última expresión con la ec. (1.15) y definiendo $h_{00} = -2\Phi$, con Φ una función escalar, se llega a

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\kappa\rho \quad (1.17)$$

Esta es, precisamente la ec. de campo para el potencial gravitatorio Newtoniano. Recuperamos entonces la teoría de Newton para $\kappa = G$.

Análogamente, tomando el límite⁶ $\frac{2m}{r} \ll 1$ para la métrica de Schwarzschild, obtenemos,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \frac{2m}{r}dx^0 dx^0 + \frac{2m}{r}dx^1 dx^1. \quad (1.18)$$

Comparando esto con (1.10), tenemos $h_{00} = -2\Phi = -\frac{2m}{r}$, y por lo tanto,

$$\Phi = \frac{m}{r} \quad (1.19)$$

que es el potencial gravitatorio Newtoniano de una masa puntual m , entonces m queda identificado como la masa gravitacional del agujero negro de Schwarzschild.

Soluciones maximalmente simétricas

Para determinar la simetría de un espacio-tiempo en general, se deben calcular sus vectores de Killing. Si una simetría es generada por un campo vectorial $v_\mu(x)$, entonces su derivada de Lie es cero[4]. El campo vectorial $v_\mu(x)$ se denomina campo de Killing si genera isometrías, es decir

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = 0 \iff \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu = 0, \quad (1.20)$$

que son las ecuaciones de Killing. El número máximo de vectores de Killing en una variedad D dimensional es la suma de D translaciones y $D(D-1)/2$ rotaciones [5]. La suma de rotaciones y translaciones es $D(D+1)/2$, es decir 10 para $D = 4$. El espacio-tiempo de la RG se denomina maximalmente simétrico si su tensor métrico tiene diez vectores de Killing independientes.

Los espacio-tiempos con signatura Lorentziana de curvatura constante son máximamente simétricos[6]. Los espacio-tiempos de curvatura constante son espacios cuyo tensor de Weyl es cero (véase Apéndice A). A, el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\gamma\delta}$ se puede escribir como,

$$R_{\mu\nu\gamma\delta} = \frac{R}{D(D-1)} (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (1.21)$$

⁶Es decir cuando nos encontramos a una distancia muy grande comparada con el parámetro m .

Las ecuaciones (1.1) son las ecuaciones de campo sin constante cosmológica Λ . Las ecuaciones más generales con $\Lambda \neq 0$ son,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Añadir el termino $\Lambda g_{\mu\nu}$ es compatible con los principios de la RG, ya que este término sigue cumpliendo que su derivada covariante es nula⁷. Desde el punto de vista de la RG clásica, la constante cosmológica es un parámetro adicional, sin una justificación clara con unidades de (longitud)⁻². Puede considerarse que añadir una constante cosmológica es equivalente a sumar al lado derecho de la ecuación (1.1) un tensor energía-momento para un fluido⁸ con la ecuación de estado $p = -\Lambda/8\pi\kappa$ [5](que recibe el nombre de Energía Oscura en el Universo observado), pero seguiría sin estar claro de qué se compone tal fluido. La física de partículas, sin embargo, aporta una perspectiva diferente en la que la constante cosmológica resultaría ser una medida de la densidad de energía del vacío. A día de hoy, no obstante, el valor medido en nuestro universo está varios órdenes por debajo de la densidad de energía de vacío que proporciona el modelo estándar [7].

Los espacios con signatura Lorentziana de curvatura constante, según su curvatura son el espacio de De Sitter (positiva), el espacio de Minkowski (cero) y el espacio anti-De Sitter (negativa). Como tales, son soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein de vacío con una constante cosmológica positiva, cero o negativa, respectivamente.

- Si $\Lambda = 3/\ell^2 > 0$, el elemento de línea del espacio-tiempo de de Sitter puede escribirse como,

$$ds^2 = -(1 - r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{1}{(1 - r^2/\ell^2)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.23)$$

esta solución fue construida en 1917 por Willem de Sitter. No es realista, porque es una solución de vacío, pero fue el primer ejemplo de un espacio-tiempo Einsteiniano dependiente del tiempo y en expansión.

- Si $\Lambda = -3/\ell^2 < 0$, el elemento de línea del espacio-tiempo anti-de Sitter se puede escribir como,

$$ds^2 = -(1 + r^2/\ell^2)dt^2 + \frac{1}{(1 + r^2/\ell^2)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.24)$$

El espacio-tiempo de anti-de Sitter en cinco dimensiones juega un papel importante en el campo de las teorías supersimétricas con respecto a la denominada correspondencia AdS-CFT [5].

⁷En la conexión de Levi-Civita, $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$

⁸El tensor de energía momento para un fluido ideal es $T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$. Si el observador es co-móvil y fijamos $p = -\rho = -\Lambda/8\pi\kappa$, se tiene que $T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}/8\pi\kappa$.

1.2. La RG como un campo de spin 2 no masivo

En la actualidad se puede plantear la RG como una teoría de campos, aunque no es el camino que siguió Einstein para formular la RG. Este nuevo análisis es el que lleva a la gravedad como la teoría de campos de una partícula sin masa de spin 2.

1.2.1. Aproximación para campos gravitatorios débiles

La RG predice que las fluctuaciones en la métrica del espacio-tiempo pueden propagarse como ondas gravitacionales [8]. Este hecho fue primeramente confirmado experimentalmente, de forma indirecta en las observaciones del pulsar binario de Hulse-Taylor en 1974 [9, 10]. Más recientemente, en 2016, se pudo confirmar mediante detección directa en el experimento LIGO y, más tarde, en VIRGO y GEO600 [11, 12].

Ya que la ecuación (1.12) es no lineal, soluciones generales para las ondas gravitacionales son difíciles de encontrar. En muchos casos, podemos suponer que las ondas gravitacionales son “débiles”, lo que permite usar la métrica (1.10) para calcular la aproximación linealizada de las soluciones de las ecuaciones de Einstein. Se obtiene una ecuación para la evolución espacio-temporal de la perturbación $h_{\mu\nu}$, que no es más que una ecuación de ondas al uso.

A partir de la ec. (1.14), tomando la traza, tenemos por el escalar de Ricci,

$$R = \frac{1}{2} (-\Delta h + \partial_\alpha \partial_\mu h^{\mu\alpha} + \partial_\alpha \partial_\mu h^{\mu\alpha} - \Delta h) = \partial_\alpha \partial_\mu h^{\mu\alpha} - \Delta h. \quad (1.25)$$

Entonces el tensor de Einstein a primer orden en $h_{\mu\nu}$ queda como,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-\Delta h_{\mu\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\mu h_\alpha^\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu h^{\mu\alpha} \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \Delta h). \quad (1.26)$$

Así llegamos a la ecuación de la gravedad linealizada:

$$-\Delta h_{\mu\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\mu h_\alpha^\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu h^{\mu\alpha} \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \Delta h = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

Esta ecuación es bastante complicada. Por lo general, se prefiere escribir la perturbación en la métrica utilizando el tensor de “traza invertida”⁹, definido por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{h} \eta_{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Sustituyendo en (1.27) tenemos, la ec. más sencilla,

$$-\Delta \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu \bar{h}_\mu^\alpha + \partial_\nu \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \partial_\mu \bar{h}^{\mu\alpha} \eta_{\mu\nu} = 16\pi\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

Ahora tenemos, en el límite de gravedad débil, un sistema de 10 EDPs lineales para 10 variables $\bar{h}_{\mu\nu}$ en términos de las fuentes. Por lo tanto, es tentador tratar de resolver el

⁹El hecho de que $\bar{h} \equiv \bar{h}_\mu^\mu = -h$ explica la terminología.

sistema para $\bar{h}_{\mu\nu}$. Desafortunadamente, esto no es posible porque no hemos elegido un sistema de coordenadas. A este respecto, además, hay una libertad de gauge en RG correspondiente a elementos de línea que en realidad son la misma métrica, pero en distintos sistemas de coordenadas. Si $\phi : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo sobre el espacio-tiempo M , las métricas $g_{\mu\nu}$ y $\phi^*g_{\mu\nu}$ representan la misma geometría del espacio-tiempo, donde ϕ^* es la aplicación sobre los campos tensoriales inducidos por ϕ . En la aproximación lineal, esto implica que dos perturbaciones $h_{\mu\nu}$ y $h'_{\mu\nu}$ representan la misma perturbación física sí (y sólo sí) difieren por la acción de un difeomorfismo infinitesimal generado por un campo vectorial ξ^μ . El cambio generado en un campo tensorial por este tipo de difeomorfismo viene dado por la derivada de Lie. Así, bajo un difeomorfismo infinitesimal, $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}$. Por tanto $h_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}$ son perturbaciones equivalentes para todo ξ^μ . Dicho de otro modo, dado que $\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$, la dinámica gravitacional linealizada tiene la libertad gauge,

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \quad (1.30)$$

Podemos usar esta libertad para simplificar aún más la ec. eligiendo un gauge adecuado. Una elección adecuada es el gauge de Lorentz, en el que se cumple,

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.31)$$

En el gauge de Lorentz, la ecuación de Einstein linealizada (1.29) queda simplemente:

$$\Delta \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

En el vacío $T_{\mu\nu} = 0$, recuperamos la ec. de ondas $T_{\mu\nu}$ dispersiva habitual, aunque sobre un tensor de rango 2.

La condición de gauge (1.31) también impone la condición $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Esto muestra que, en el orden más bajo en $h_{\mu\nu}$ en el que estamos trabajando, se conserva el tensor fuente de energía-momento y se ignora la reacción de la fuente debido al campo gravitatorio. Sabemos, sin embargo, que para cualquier fuente $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Expandiendo la derivada covariante, tenemos la estructura $\nabla T \sim \partial T + \Gamma T$. La ecuación de campo (1.32) nos dice que $h_{\mu\nu}$ esta en el orden de $T_{\mu\nu}$; por lo tanto, ΓT es del orden de $h_{\mu\nu}^2$, lo cual se ignora en nuestra aproximación haciendo que todo sea consistente.

Podemos encontrar soluciones de vacío a (1.32) como superposición de ondas planas. Esto es,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \alpha_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda} + \alpha_{\mu\nu}^* e^{-ik_\lambda x^\lambda} \quad (1.33)$$

donde $\alpha_{\mu\nu}$ es una matriz simétrica 4×4 que se denomina tensor de polarización, y k_λ el vector de onda. Como $\alpha_{\mu\nu}$ es simétrico, el tensor de polarización generalmente debe tener 10 componentes independientes. Sin embargo, para que se satisfaga la ecuación de onda

$\Delta \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ tenemos

$$k_\mu k^\mu = 0. \quad (1.34)$$

Luego k^μ es un vector nulo.

El gauge de Lorentz (1.31) impone la condición

$$\alpha^{\mu\nu} k_\nu = 0. \quad (1.35)$$

Esta ligadura elimina 4 de los grados de libertad de $\alpha_{\mu\nu}$, por lo que sólo quedarían 6 grados de libertad en $\alpha_{\mu\nu}$. Además, hay una libertad de gauge residual en el gauge de Lorentz: si introducimos un cambio de coordenadas infinitesimal generado por el campo,

$$\xi^\mu = iB^\mu e^{ik_\lambda x^\lambda} + (iB^\mu)^* e^{-ik_\lambda x^\lambda}, \quad (1.36)$$

donde B^μ es cualquier vector, entonces se cumple $\Delta \xi^\mu = 0$, y por lo tanto se preserva la condición del gauge de Lorentz. Bajo (1.36), la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ cambia como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu}. \quad (1.37)$$

Sustituyendo en (1.33), el tensor de polarización es físicamente insensible al cambio,

$$\alpha_{\mu\nu} \rightarrow \alpha_{\mu\nu} + k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu - k_\lambda B^\lambda \eta_{\mu\nu}. \quad (1.38)$$

Esta libertad gauge residual nos permite eliminar aún más grados de libertad, dado que tenemos libertad para elegir B_μ ,

$$\alpha_\lambda^\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_{0i} = 0. \quad (1.39)$$

Esta elección, combinada con la ecuación (1.35), se llama gauge transversal. En total tenemos 4 condiciones adicionales, lo que nos deja con sólo 2 grados de libertad¹⁰. Como veremos en la siguiente subsección, esto corresponde con estados de polarización de una partícula sin masa de spin 2.

¹⁰La inversión fija por completo el gauge (es decir, especifica B_μ), por lo que estas ondas son “reales” en el sentido de que una transformación de gauge no puede eliminarlas.

1.2.2. Acción para un campo de spin 2 no masivo

Una partícula de spin 2 sin masa¹¹ esta descrita de la forma más simple por un campo tensorial simétrico¹² $h_{\mu\nu}$ invariante respecto a transformaciones de Lorentz [14]. El término cinético del campo se puede descomponer en cuatro posibles contribuciones locales¹³:

$$S = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} + c_1 \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial_\mu h_\nu^\lambda + c_2 \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + c_3 \partial^\mu h \partial_\mu h \right] \quad (1.40)$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes, y $h \equiv h_\mu^\mu$. Para estudiar los grados de libertad, descomponemos el campo en sus partes transversales y longitudinales: $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^T + h_{\mu\nu}^L$ y, por conveniencia, tomamos¹⁴ $\partial_\mu h^{T\mu\nu} = 0$ para la parte transversal y $\partial_{[\lambda} h_{\mu]\nu}^L = 0$ para la parte longitudinal. Entonces podemos escribir $h_{\mu\nu}^L = 2\partial_{(\mu} H_{\nu)}$, para algún campo vectorial H_μ . Reemplazando el campo expresado en sus componentes transversales y longitudinales en (1.40), después de algunas integraciones por partes, se tiene que las expresiones en la densidad Lagrangiana que dan lugar a derivadas de mayor grado que dos en las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} & (-1 + c_1) \Delta H^\mu \Delta H_\mu + (-1 + 3c_1 + 4c_2 + 4c_3) \Delta H^\mu \partial_\mu \partial_\nu H^\nu \\ & - 2(c_1 + c_2) \partial_\mu \partial_\nu h^{T\mu\nu} \partial_\lambda H^\lambda - 2(-1 + c_1) \partial_\mu h^{T\mu\nu} \Delta H_\nu \\ & - 2(c_2 + 2c_3) \Delta h \partial_\lambda H^\lambda. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Para evitar fantasmas de Ostrogradsky¹⁵ los coeficientes de estas expresiones deben ser cero: $c_1 = 1, c_2 = -1$, y $c_3 = 1/2$. Entonces la acción queda como

$$S = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h \right]. \quad (1.42)$$

Esta acción coincide con la acción linealizada de Einstein-Hilbert y de la cual se pueden obtener las ecuaciones de campo de Einstein en orden lineal (1.27) con $T_{\mu\nu} = 0$. Como ya se vio la aproximación lineal de la RG está dotada con la libertad de gauge (1.30), lo que reduce el número de grados de libertad de propagación.

¹¹Los grados de libertad en el espacio-tiempo tetradimensional son partículas clasificadas por su spin. Un campo ϕ , que lleva una partícula de masa m satisface la ecuación de Klein-Gordon $(\Delta - m^2)\phi = 0$, cuya solución (suponiendo que ϕ es estático y esféricamente simétrico) a una distancia r de una fuente localizada es similar $\sim r^{-1}e^{-mr}$. Las fuerzas de alcance infinito, aquellas sin supresión exponencial como la gravedad, deben por lo tanto ser descritas por campos sin masa.

¹²En general, un tensor simétrico con N índices contiene momentos angulares hasta $j = N$ [13].

¹³La expresión más general será la suma de los diferentes escalares obtenidos al contraer pares de índices en $\partial_\sigma h_{\mu\nu} \partial_\alpha h_{\beta\gamma}$ de diferentes maneras, asumiendo la invarianza de Lorentz, ignorando los términos que son equivalentes a la integración por partes y exigiendo de que no haya fantasmas presentes.

¹⁴Para un tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ existe un vector único N_μ y un único tensor con divergencia cero $K_{\mu\nu}$, tal que la siguiente fórmula de descomposición es válida: $T_{\mu\nu} = \nabla_\mu N_\nu + \nabla_\nu N_\mu + K_{\mu\nu}$ [15].

¹⁵La generalización para ordenes de derivadas superiores de Ostrogradsky de la construcción de Hamilton se publicó en 1850 [16]. La construcción de Ostrogradsky implica que existe una inestabilidad lineal en los Hamiltonianos asociados con los Lagrangianos que dependen de derivadas del tiempo de orden mayor o igual que dos, de tal manera que las derivadas más altas no pueden eliminarse por integración parcial. Probablemente esta sea la razón por la que Newton tuvo razón al asumir que las leyes de la física toman la forma de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuando se expresan en términos de variables dinámicas fundamentales.

El siguiente paso es agregar un acoplamiento entre el tensor y las fuentes de “materia”:

$$S = \int d^D x \left[-\frac{1}{2} \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\lambda h^{\mu\nu} \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \kappa h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right], \quad (1.43)$$

donde κ es una constante de acople. Obsérvese que la fuente debe conservarse, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, de lo contrario la acción pierde la simetría de gauge (1.30). Pero aquí se tiene un problema: debido a que el tensor de energía-momento depende de los campos de materia, el acoplamiento con $h_{\mu\nu}$ modificará necesariamente las ecuaciones de movimiento para estos campos; y ya que la igualdad $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ se mantiene sólo si se usa las ecuaciones de movimiento de la materia sin gravedad, se debe concluir que $T^{\mu\nu}$ no se conserva. Considérese, por ejemplo, un campo escalar libre: el tensor de energía-momento es [14]

$$T_\phi^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} ((\partial\phi)^2 + m^2 \phi^2), \quad (1.44)$$

se puede ver que $\partial_\mu T_\phi^{\mu\nu} = 0$ siempre que se cumple la ecuación Klein-Gordon $\Delta\phi = m^2\phi$. Pero el acople $\kappa h_{\mu\nu} T_\phi^{\mu\nu}$ en (1.43) implica que la ecuación libre de Klein-Gordon se modifica de forma que

$$(\Delta - m^2)\phi = \kappa [2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - h \Delta\phi + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - \partial_\mu h \partial^\mu \phi + m^2 h \phi], \quad (1.45)$$

de aquí sigue que

$$\partial_\mu T_\phi^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi (\Delta - m^2)\phi \neq 0, \quad (1.46)$$

obstaculizando así la invarianza de gauge de la acción (1.43). Esto no es sólo un problema con la simetría, sino que en realidad se traduce en una inconsistencia de las ecuaciones de movimiento. Lo último se puede escribir como $\varepsilon_{\mu\nu} = -16\pi\kappa T_{\mu\nu}$, donde $\varepsilon_{\mu\nu}$ es la ecuación de Einstein linealizada que satisface la identidad de Noether $\partial_\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$, de ahí la necesidad de tener una fuente conservada.

La resolución de este problema se logra postulando que el gravitón debe estar acoplado no sólo a la materia sino también a su propio tensor de energía-momento $T_g^{\mu\nu}$. Si se calcula entonces el tensor de energía-momento a partir de la acción de EH linealizada (1.43), se tiene una expresión cuadrática en $h_{\mu\nu}$, denotada como $T_g^{(2)\mu\nu}$. En este caso el acoplamiento de $T_g^{(2)\mu\nu}$ al gravitón, introduciría auto-interacciones de orden cúbico para $h_{\mu\nu}$, modificando $T_g^{\mu\nu}$ por la adición de una parte cúbica $T_g^{(3)\mu\nu}$ [14]. Este procedimiento iterativo, que en principio debería continuar indefinidamente, fue seguido por Deser¹⁶ [17] quien logró demostrar que la serie suma a la acción de EH,

$$I = \int d^D x \sqrt{-g} R[g], \quad (1.47)$$

¹⁶De hecho, Deser hizo uso del formalismo de Palatini y una inteligente elección de variables, en términos de las cuales la serie termina después de una sola iteración.

donde $R[g]$ es el escalar de curvatura construido con la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. En resumen, al exigir interacciones consistentes entre un campo de spin 2 sin masa y materia, necesariamente el gravitón también debe acoplarse a sí mismo con vértices de orden arbitrariamente alto, produciendo así una serie infinita que suma a la acción de la gravedad de Einstein-Hilbert. Con esto se demuestra que la RG corresponde a un campo de spin 2 sin masa cuya acción, en el límite de gravedad débil, es (1.42).

El gravitón libre no tiene masa y se mueve a la velocidad de la luz, por lo que nunca podemos encontrar un marco en el que esté en reposo. Por lo tanto, el gravitón sin masa debe aparecer con dos polarizaciones o helicidades, y no más.

1.3. Gravedad en $D < 4$

Uno de los mayores desafíos para la física teórica ha sido la descripción adecuada del campo gravitacional en escalas de la mecánica cuántica. Aunque el problema aún no está resuelto, existen diferentes propuestas interesantes, que incluyen la supergravedad, la teoría de cuerdas, y la gravedad cuántica de bucles[18]. Como ninguna de las propuestas es totalmente satisfactoria, una parte de la comunidad ha intentado en paralelo seguir un enfoque más modesto, centrándose en modelos de “juguete”, más sencillos, que capturan algunas de las características clave del campo gravitacional. La motivación para estudiar la gravedad en dos y tres dimensiones del espacio-tiempo surge de la esperanza de que los modelos simplificados en estas dimensiones inferiores proporcionarán una mejor comprensión de la gravedad en cuatro dimensiones y nos ayudarán a apreciar aquellas características de la gravedad que están estrechamente relacionadas con el hecho de que espacio-tiempo tiene cuatro dimensiones. Por ejemplo, en el caso en el que tenemos una constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$) en tres dimensiones, se obtiene soluciones de agujero negro que copian las características de las soluciones en 4 dimensiones, aunque sobre el espacio de anti-deSitter AdS_3 [19].

A primera vista se puede concluir que la gravedad de Einstein funciona en cualquier dimensión, pero con un análisis más detallado encontramos algunos problemas para $D < 4$. Una forma sencilla de notar estos problemas es contar las componentes independientes del tensor de curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ y el tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (ver Apéndice A). Así, para $D = 4$ el tensor de Ricci y el tensor de Einstein tienen 10 componentes independientes, mientras que el tensor de Riemann tiene 20. Sin embargo para $D = 3$ el tensor de Riemann tiene las mismas componentes independientes que el tensor de Ricci y, por tanto el tensor de Weyl no tiene componentes. Ya que en cualquier espacio-tiempo que sea una solución de vacío para la ecuación de Einstein, el tensor de Weyl determina la curvatura, en tres dimensiones la curvatura fuera de las fuentes es nula.

En el caso de 2 dimensiones tenemos una situación aún más complicada. En este caso, el tensor de Einstein es cero (véase Apéndice A) y, por lo tanto, no se pueden obtener soluciones no triviales a las ecuaciones de Einstein. Específicamente, según el teorema de Gauss-Bonnet

[20], para una variedad V pseudo-Riemanniana compacta orientable de dimensión dos sin borde, se cumple,

$$\int_V R dA = 4\pi\chi(V), \quad (1.48)$$

donde R es la curvatura escalar de V , dA el elemento de área y $\chi(V)$ es la característica de Euler de V , que es un invariante topológico¹⁷. En superficies orientadas cerradas $\chi(V)$ se puede relacionar con su género g , que es un número que describe la cantidad de “asas” que tiene la superficie

$$\chi(V) = 2 - 2g. \quad (1.49)$$

Así se puede ver que por el teorema anterior, la acción de Einstein-Hilbert en dos dimensiones,

$$\int_V dx^2 \sqrt{-g} R, \quad (1.50)$$

está fijado por la topología de la variedad V . Un invariante topológico utilizado como acción no produce ecuaciones de campo en absoluto [21]. Así pues, no puede haber gravedad en $D = 2$.

Como conclusión, vemos que la dimensión más baja donde una acción de la forma (1.50) tiene sentido es $D = 3$. Pero incluso en tres dimensiones, el término de Einstein-Hilbert no produce modos gravitacionales de propagación: mientras que en cuatro dimensiones, las ecuaciones de vacío de Einstein $R_{\mu\nu} = 0$ permiten excitaciones gravitacionales no triviales (como las ondas gravitatorias), en $D = 3$ implican que el espacio-tiempo es plano, esto es, $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, en el vacío. Por lo tanto, para obtener dinámica gravitacional en $D = 3$ se hace necesario introducir modificaciones en (1.50) (como lo es introducir una constante cosmológica distinta de cero en las ecuaciones de Einstein).

1.3.1. Gravedad de Einstein en $D = 3$

Como ya se vio en cuatro dimensiones, la linealización de las ecuaciones de Einstein (1.1) llevan a la teoría de la gravitación de Newton. Esto ya no es cierto en tres dimensiones. La ruptura del límite Newtoniano es la razón principal del fracaso de nuestra intuición cuando tratamos con fenómenos gravitacionales en un espacio-tiempo tridimensional.

En 3 dimensiones, el funcional de Einstein-Hilbert con una constante cosmológica, toma la forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + L_m) \quad (1.51)$$

donde R es el escalar de curvatura en tres dimensiones, Λ es la constante cosmológica y L_m el Lagrangiano de materia. Variando la acción de Einstein-Hilbert en tres dimensiones y

¹⁷Un número definido que sirve para describir la forma o la estructura de una clase de espacios topológicos.

tomando $8\pi G = 1$, resultan las ecuaciones de campo,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}(R - 2\Lambda) = T_{ab} \quad (1.52)$$

donde los índices latinos corren desde 0 a 2. En $D = 3$ el tensor de curvatura queda completamente determinado por el tensor de Einstein o Ricci,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}G_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}G_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}G_{\alpha\delta} + G(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}), \quad (1.53)$$

entonces de (1.52) y la ecuación anterior se tiene

$$R_{abcd} = g_{ac}(T_{bd} - \Lambda g_{bd}) + g_{bd}(T_{ac} - \Lambda g_{ac}) - g_{ad}(T_{bc} - \Lambda g_{bc}) - g_{bc}(T_{ad} - \Lambda g_{ad}) \\ + (T - 3\Lambda)(g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd}). \quad (1.54)$$

Por lo tanto en el vacío ($T_{ab} = 0$), el espacio-tiempo es localmente plano (si $\Lambda = 0$), localmente de Sitter (si $\Lambda > 0$), o localmente anti-de Sitter (si $\Lambda < 0$). Es decir cualquier solución de vacío a las ecuaciones de campo con una constante cosmológica, cumple que

$$R_{ab} = 2\Lambda g_{ab}, \quad (1.55)$$

es decir, tiene curvatura constante.

Constante cosmológica nula

En el caso de $\Lambda = 0$, no existe un efecto gravitatorio a distancia en el sentido de la teoría de Newton, de modo que dos cuerpos separados por el vacío se mueven uniformemente sin saber el uno del otro. No hay modos de propagación en gravedad tridimensional. Eso implica que tampoco existen ondas gravitacionales en $D = 3$. En cuanto al límite Newtoniano, la ausencia de curvatura fuera de la distribución de la materia también muestra que no existe una aproximación Newtoniana natural.

Aunque parece no tener sentido estudiar una teoría sin grados de libertad físicos, esta característica hace al modelo $D = 3$ muy atractivo matemáticamente. Como veremos la superficie temporal del espacio tridimensional se puede ver como un cono embebido en el espacio $(3 + 1)$ de Minkowski. Si tomamos coordenadas cilíndricas, la superficie temporal corresponde a cortar el cono (un cono no tiene curvatura intrínseca) en $\phi = 0$ y tenderlo en un plano.

Como ejemplo se puede analizar la geometría asociada a una distribución puntual de materia. Si se toman coordenadas de Schwarzschild, el elemento de línea tiene la forma,

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (1.56)$$

sustituyendo esta métrica en las ecuaciones de vacío $R_{ab} = 0$, se encuentra que, $A(r) = A_0 = cte$, $B(r) = B_0 = cte$. Se puede eliminar la constante A_0 tomando una coordenada temporal nueva $t' = (A_0)^{1/2} t$. Entonces la solución general es

$$ds^2 = -dt'^2 + B_0 dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (1.57)$$

Este elemento de línea puede reinterpretarse como la métrica inducida en la superficie

$$z(r) = (B_0 - 1)^{1/2} r, \quad (1.58)$$

embedida en el espacio de Minkowski de cuatro dimensiones con coordenadas cilíndricas $\{t, r, z, \phi\}$. Visto de este modo, el espacio-tiempo en $D = 3$ dado por (1.57) no es más que un cono tridimensional con vértice en el origen del espacio de Minkowski. Se puede escoger nuevas coordenadas:

$$r' = (B_0)^{1/2} r \quad y \quad \phi' = (B_0)^{-1/2} \phi, \quad (1.59)$$

tales que, en estas coordenadas

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\phi'^2, \quad (1.60)$$

que es sólo la métrica plana de Minkowski en 3 dimensiones escrita en coordenadas polares. Ahora $0 \leq \phi < 2\pi$, mientras

$$0 \leq \phi' < (B_0)^{-1/2} 2\pi. \quad (1.61)$$

Por lo tanto, el cono tiene un déficit de ángulo d en su vértice, dado por,

$$d = 2\pi \left(1 - B_0^{-1/2}\right). \quad (1.62)$$

Dado que $B_0 = 1 - M/2\pi$, con M la masa de la fuente, el déficit de ángulo es proporcional a M [22]. La curva $t'(\tau) = \tau$, $r(\tau) = cte$, $\phi(\tau) = cte$ es una geodésica, lo que muestra que M no ejerce una atracción gravitatoria en el sentido Newtoniano. Sin embargo, la particularidad yace, en que las trayectorias de las partículas que son inicialmente paralelas y pasan en lados opuestos de M eventualmente se intersectarán entre sí en un ángulo de $d \neq 0$ [23]. Así vemos que existen efectos globales que genera un cuerpo central en el espacio-tiempo circundante [24].

Para mostrar que no existe un límite Newtoniano en 3 dimensiones se parte de la aproximación para campos gravitatorios débiles, que se generaliza a un espacio D -dimensional de una forma similar que la mostrada anteriormente para $D = 4$. Las ecuaciones de Einstein linealizadas, en el gauge de Lorentz, se reducen a la ecuación de onda no homogénea,

$$\Delta h_{\alpha\beta} = -2\kappa \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{D-2} T \eta_{\alpha\beta} \right), \quad (1.63)$$

para pequeñas perturbaciones $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$ en un espacio de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. En el límite no relativista, podemos además, despreciar las otras componentes del tensor $T_{\alpha\beta}$ comparadas con la densidad de masa T_{00} y asumir que las fuentes del campo son cuasiestáticas. EN este caso, la ecuación (1.63) se reduce a la ecuación de Poisson para h_{00}

$$\nabla^2 h_{00} = -2\kappa \frac{D-3}{D-2} T_{00}. \quad (1.64)$$

Para $D = 4$, tomando $\kappa = 8\pi G$, la ecuación (1.64) reproduce la ecuación de campo gravitatorio de Newton, con $\phi = -2h_{00}$ jugando el papel del potencial escalar Newtoniano. Sin embargo, para $D = 3$, encontramos el siguiente problema: sustituyendo $D = 3$ en (1.64), h_{00} se desacopla del término de masa T_{00} , y la teoría linealizada no reproduce la teoría Newtoniana. En otras palabras, el potencial escalar ϕ se desacopla de la densidad de masa, y de la ecuación (1.64) se obtiene la ecuación de Laplace y no la ecuación de Poisson, como se esperaría en la teoría de Newton.

De la ecuación (1.63) sigue también la no existencia de ondas gravitacionales en $D = 3$. En el vacío, la ecuación de onda (1.63) toma la forma,

$$\Delta h_{ab} = 0. \quad (1.65)$$

Tomando el gauge transversal, $h_{0\beta} = 0$ y $h_a^a = 0$, la solución general a (1.65) esta dada por la superposición de ondas planas

$$h_{ab} = \alpha_{ab} e^{ik_\lambda x^\lambda} + \alpha_{ab}^* e^{-ik_\lambda x^\lambda} \quad (1.66)$$

que satisfacen,

$$h_a^b k_b = 0, \quad (1.67)$$

con k_b un vector nulo.

En tres dimensiones, las dos ecuaciones de (1.67) que corresponden a la parte espacial, ($a = 1, 2$), tienen sólo la solución trivial

$$h_{ab} = 0. \quad (1.68)$$

Como resultado, no existen ondas gravitacionales linealizadas en tres dimensiones.

En este punto se puede suponer que de alguna forma la ausencia del límite Newtoniano está conectado con la ausencia de ondas gravitacionales. Esto se puede descartar analizando la electrodinámica de Maxwell en dos y tres dimensiones. La electrodinámica clásica en un espacio D -dimensional plano se basa en las ecuaciones de campo [24]

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \sigma J^\alpha, \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad (1.69)$$

y la ecuación de movimiento

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\alpha_\beta U^\beta \quad (1.70)$$

donde $U^\alpha = \gamma(c, \vec{v})$ ¹⁸ es la cuadrivelocidad, q la carga y m la masa de la partícula de prueba. La corriente J^α se acopla al campo $F^{\alpha\beta}$ por medio de la constante σ . Además la conservación de carga $\partial_\alpha J^\alpha = 0$, se sigue de las ecuaciones de campo. En el espacio libre, las ecuaciones de Maxwell con el gauge de Coulomb toman la forma

$$A_0 = 0, \quad \Delta A_a = 0, \quad \partial_a A^a = 0 \quad (1.71)$$

y se tiene la solución general como superposición de ondas parciales,

$$A_a = \alpha_a e^{ik_\beta x^\beta}, \quad (1.72)$$

que satisfaciendo la condición de transversalidad se tiene

$$A_a k^a = 0. \quad (1.73)$$

En un espacio-tiempo de dos dimensiones, la ecuación (1.73) sólo tiene la solución trivial $A_a = 0$. No existen ondas electromagnéticas en dos dimensiones, exactamente como no existe radiación gravitacional en tres dimensiones. Sin embargo existe un límite no relativista a la teoría de Maxwell en dos dimensiones para campos cuasiestáticos y cargas de prueba con velocidades bajas comparadas con la de la luz. En este límite las ecuaciones de movimiento (1.70) se reducen a

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = \frac{q}{m} \delta^{ab} \partial_b A_0 \quad (1.74)$$

mientras que las ecuaciones de campo (1.69) con el gauge de Lorentz $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, determinan A_0 :

$$\nabla^2 A_0 = \sigma J_0. \quad (1.75)$$

El potencial escalar $\phi = -A_0$ se acopla a la densidad de carga $\rho = -J_0$ independientemente de la dimensionalidad del espacio.

De forma similar, en tres dimensiones el tensor F^{ab} tiene tres componentes independientes [23],

$$F^{01} = E_1, \quad F^{02} = E_2, \quad F^{12} = B. \quad (1.76)$$

Entonces existe un campo vectorial E y un escalar B . Existen ondas electromagnéticas que viajan a la velocidad de la luz y, por lo tanto, fotones. Además, el campo eléctrico de una carga puntual en reposo decae con la ley $(1/r)$. De este ejemplo se puede ver que el problema con el límite Newtoniano no está conectado con la ausencia de grados de libertad de radiación.

¹⁸ $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ es el factor de Lorentz.

La coincidencia de estas dos características en $D = 3$ tiene que ver con que la gravedad es un campo de spin 2.

1.4. Geodésicas

Intuitivamente, las geodésicas son líneas que “se curvan lo menos posible”; son las “líneas más rectas posibles” que se pueden dibujar en una geometría curva. Las geodésicas describen el movimiento de las partículas materiales en un campo gravitacional dado. Partículas masivas caen libremente en el campo gravitatorio en trayectorias descritas por geodésicas temporales, y partículas sin masa por geodésicas nulas.

Un significado implícito en el adjetivo “recto” es que su dirección no cambia a medida que avanzamos en él. La otra propiedad asociada con una línea recta es que representa la ruta de la distancia más corta entre dos puntos dados. Ahora investigaremos qué curvas están implicadas por estas dos definiciones en el espacio-tiempo de Riemann más general.

Dirección invariante: se puede definir una geodésica como una curva diferenciable $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, tal que su vector tangente u^β es transportado paralelamente a lo largo de sí mismo,

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0; \quad (1.77)$$

esto es, en coordenadas locales, si

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta u^\beta \right) = \frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (1.78)$$

con $\Gamma_{\beta\gamma}^\rho$ los símbolos de Christoffel. En realidad, para satisfacer el requisito intuitivo de que la curva sea “lo más recta posible”, sólo se puede requerir que el vector tangente a la curva apunte en la misma dirección que la propagación paralela, y no exigir que se mantenga igual longitud. Esto daría lugar a la condición más débil,

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = \phi(\lambda) u^\beta; \quad (1.79)$$

donde $\phi(\lambda)$ es una función arbitraria de la curva. Sin embargo, es fácil mostrar que dada una curva que satisface la ecuación (1.79) siempre podemos reparameterizarla para que satisfaga la ecuación (1.77), sólo es necesario que la función $\phi(\lambda)$ y el nuevo parámetro $q(\lambda)$ satisfagan,

$$\frac{d^2 \lambda}{dq^2} + \phi(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{dq} \right)^2 = 0, \quad (1.80)$$

así, tomando una solución no trivial de $\lambda(q)$ se puede definir implícitamente $q(\lambda)$. El parámetro en términos del cual la ecuación geodésica toma la forma (1.77) se llama parámetro afín. Podemos derivar la relación que deben tener entre sí los parámetros para que sean afines,

tomando $\lambda' = f(\lambda)$, entonces

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2 x^\alpha}{(d\lambda')^2} \left(\frac{d\lambda'}{d\lambda} \right)^2 + \frac{dx^\alpha}{d\lambda'} \frac{d^2 \lambda'}{(d\lambda)^2}, \quad (1.81)$$

insertando esta ecuación en (1.78), se tiene que

$$\left(\frac{d\lambda'}{d\lambda} \right)^2 \left[\frac{d^2 x^\alpha}{(d\lambda')^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda'} \frac{dx^\gamma}{d\lambda'} \right] + \frac{dx^\alpha}{d\lambda'} \frac{d^2 \lambda'}{(d\lambda)^2} = 0. \quad (1.82)$$

Por lo tanto, λ' es un parámetro afín sólo si $d^2 \lambda' / (d\lambda)^2 = 0$, es decir $\lambda' = a\lambda + b$; esto es, λ y λ' están conectadas por una transformación afín.

Usando (1.77) se puede inferir una propiedad importante del vector tangente de una geodésica, a lo largo de una geodésica, se tiene

$$u^\alpha u_\beta \nabla_\alpha u^\beta \equiv u^\alpha \nabla_\alpha (u_\beta u^\beta) \equiv \frac{d}{d\lambda} (u_\beta u^\beta) = 0. \quad (1.83)$$

De esto se define que el escalar

$$u^\alpha u_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (1.84)$$

es constante a lo largo de una geodésica. Si la constante en la ecuación (1.84) es cero, se dice que la geodésica es una geodésica nula. Si la constante es positiva, la geodésica es espacial, y si es negativa, la geodésica es temporal. En los dos últimos casos podemos normalizar la constante para que sea $+1$ o -1 y reemplazar λ por s , la distancia medida a lo largo de la geodésica.

Distancia más corta: sean P_1 y P_2 dos puntos en el espacio-tiempo y γ una curva que une los dos puntos. Si γ esta parametrizada por $x_\mu(\lambda)$ con $\lambda = 0$ en P_1 y $\lambda = 1$ en P_2 . La distancia entre P_1 y P_2 medida a lo largo de γ es,

$$s(P_1, P_2 | \gamma) = \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda. \quad (1.85)$$

Si consideramos una familia de curvas, todas comenzando desde P_1 y terminando en P_2 obtenemos diferentes valores de $s(P_1, P_2 | \gamma)$. Buscamos la curva para la cual $s(P_1, P_2 | \gamma)$ es estacionaria. Las ecuaciones de Euler para este funcional son

$$2g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \left(2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0; \quad (1.86)$$

que se pueden escribir como,

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (1.87)$$

que es la misma ecuación que (1.78). Por lo tanto, una geodésica puede considerarse como

una línea de distancia estacionaria y como una línea de dirección invariable. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que las dos definiciones concuerdan debido a la elección de la conexión afín.

Este método, sin embargo, falla para geodésicas nulas, en las cuales la expresión dentro de la integral (1.85) es cero en todo el espacio-tiempo. Por esta razón, es mejor considerar otro problema variacional relacionado:

$$\delta \int_0^1 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda = 0. \quad (1.88)$$

De donde se puede calcular la primera integral de las ecuaciones de Euler que nos da,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \text{const}. \quad (1.89)$$

Esto tiene la ventaja de hacer a λ un múltiplo de s para geodésicas no nulas, y también trata con geodésicas nulas en el caso de que la constante en la ecuación anterior sea cero. La integral en la ecuación (1.88), sin embargo, no tiene la interpretación simple de (1.85).

Ya que los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son funciones conocidas de las coordenadas x^α , la ecuación de las geodésicas (1.87), es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal para $x^\alpha(\lambda)$. Se tiene una solución única cuando las condiciones iniciales en $\lambda = \lambda_0$ están dadas: $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$ y $u_0^\alpha = (dx^\alpha/d\lambda)_{\lambda_0}$. Entonces, al dar una posición inicial (x_0^α) y una dirección inicial (u_0^α), además de especificar si la curva es nula, temporal o espacial obtenemos una geodésica única.

Cálculo de geodésicas

Generalmente para encontrar geodésicas no se resuelven directamente las ecuaciones diferenciales (1.87), lo más común es usar las simetrías de la métrica. A cada vector de Killing le corresponde una cantidad conservada de la ecuación geodésica. Este es un caso especial de un teorema mucho más general de Noether: las simetrías en un principio variacional conducen a leyes de conservación. Para demostrar esto se puede escribir:

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} v^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = v^\mu \frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] + g_{\mu\nu} \partial_\rho v^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (1.90)$$

De la ecuación de las geodésicas (1.87) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\beta} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0, \\ g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.91)$$

entonces tenemos para una geodésica

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.92)$$

Si reemplazamos la última ecuación en (1.90)

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} v^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = v^\mu \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \partial_\rho v^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}, \quad (1.93)$$

donde el lado izquierdo de la última ecuación se puede reescribir en términos de la derivada de Lie,

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} v^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = \frac{1}{2} [\mathcal{L}_v g]_{\rho\nu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.94)$$

Por lo tanto, si v es un campo de Killing y x^μ es una geodésica, tenemos la ley de conservación

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} v^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0. \quad (1.95)$$

Dado que el vector tangente a la geodésica tiene una longitud constante, siempre tenemos una ley de conservación. Ni siquiera necesitamos un vector de Killing para esto. Esto se deduce del hecho de que τ no aparece explícitamente en la acción. En el lenguaje de la mecánica, el Hamiltoniano se conserva cuando el Lagrangiano es independiente del parámetro de evolución (τ en nuestro caso).

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = H = \text{const}. \quad (1.96)$$

Este parámetro tiene el significado físico del cuadrado de la masa.

Para una geodésica de tipo temporal, esta constante es positiva: la masa es real y no es cero. Es conveniente τ como el tiempo propio. Para las geodésicas nulas H será cero. Las geodésicas espaciales tienen $H < 0$. Esto no implica masa negativa ya que no puede haber partículas que sigan geodésicas espaciales.

Para ejemplificar este método vamos a derivar las ecuaciones de geodésicas en un espacio estacionario y esféricamente simétrico en $D = 3$:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + r^2d\varphi, \quad (1.97)$$

donde $f(r)$ y $g(r)$ son funciones que se determinan resolviendo las ecuaciones de campo. Por la simetría del espacio se tienen dos vectores de Killing ∂_t y ∂_φ , para los cuales usando (1.95) tenemos las cantidades conservadas

$$-f(r) \dot{t} \equiv -E = \text{const}, \quad (1.98)$$

$$r^2 \dot{\varphi} \equiv L = \text{const}. \quad (1.99)$$

De esto se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{f(r)}. \quad (1.100)$$

Ahora para calcular las geodésicas se sigue a Chandrasekhar [25]. El Lagrangiano de (1.97) es

$$2\mathcal{L} = -f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{g(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad (1.101)$$

donde φ es la coordenada angular. El momento generalizado respecto a r es

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{g(r)}\dot{r}, \quad (1.102)$$

los momentos respecto a t y φ corresponden a las cantidades conservadas E y L respectivamente. El Hamiltoniano está dado por

$$2\mathcal{H} = 2(p_t\dot{t} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_r\dot{r} - \mathcal{L}) \quad (1.103)$$

reemplazando el momento p_r y las cantidades conservadas E y L , tenemos

$$2\mathcal{H} = 2\mathcal{L} = -E\dot{t} + L\dot{\varphi} + \frac{1}{g(r)}\dot{r}^2 = \delta_1 = \text{const.} \quad (1.104)$$

Al volver a escalar el parámetro afín τ , podemos hacer que $2\mathcal{L}$ tenga el valor -1 para geodésicas de tipo temporal. Para geodésicas nulas, tiene el valor cero. Entonces $\delta_1 = -1, 0$ para geodésicas temporales y nulas, respectivamente.

De esto podemos relacionar las ecuaciones de movimiento (1.100), reemplazándolas en la última ecuación se tiene

$$V_r = g(r) \left[\frac{E^2}{f(r)} - \frac{L^2}{r^2} + \delta_1 \right], \quad (1.105)$$

donde se ha usado que $\dot{r}^2 = V_r$.

Capítulo 2

Teorías en 3 Dimensiones

Como vimos en el capítulo anterior, la RG como teoría geométrica, se puede plantear en cualquier dimensión mayor que dos, aunque en tres dimensiones los grados de libertad desaparecen y su aproximación Newtoniana no existe. En este capítulo estudiaremos cómo se puede modificar la RG para lograr grados de libertad suficientes para que la gravedad se propague en 3 dimensiones.

En la primera sección, como punto de partida, revisaremos la solución que Bañados, Teitelboim y Zanelli propusieron en el año 1999 como ejemplo de gravedad no trivial en $D = 3$. Para ello fue necesario modificar ligeramente la RG clásica, introduciendo una constante cosmológica negativa. En la segunda sección, introduciremos otros modelos de gravedad posibles en $D = 3$. Finalmente en la sección tres presentamos la teoría de Bergshoeff, Hohm y Townsend. En este modelo de gravedad tridimensional se tiene un funcional que da lugar a ecuaciones de movimiento de cuarto orden, que al linealizarlas son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de la teoría de Fierz-Pauli.

2.1. Solución BTZ

Aunque la gravedad tridimensional ha sido ampliamente reconocida como un *laboratorio* útil para estudiar problemas conceptuales, las soluciones encontradas en tres dimensiones no son físicamente útiles al carecer de dinámica. Por esto resultó ser una sorpresa cuando Bañados, Teitelboim y Zanelli [19], encontraron soluciones no triviales en $D = 3$, con características análogas a las de Schwarzschild, Reissner–Nordström y Kerr, al añadir una constante cosmológica $\Lambda < 0$.

En coordenadas adecuadas, la solución BTZ con momento angular y sin carga viene dada por,

$$ds^2 = -(N)^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 \left(d\phi + N^\phi dt \right)^2, \quad (2.1)$$

donde las funciones N^2 y N^ϕ son:

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2}, \quad (2.2)$$

con $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ y ℓ es una escala que fija la constante cosmológica $\Lambda = -1/\ell^2$. La métrica (2.1) es estacionaria y axialmente simétrica para $J \neq 0$, con vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ . Las dos constantes de integración M y J que aparecen en (2.2) son la masa ADM y la cantidad conservada asociada con la invarianza rotacional (momento angular) [26].

Comenzando desde el infinito y yendo hacia $r = 0$, la primera superficie particular para la solución BTZ que encontramos, es la superficie donde $g_{tt} = -N^2 + r^2 N^{\phi^2}$ se anula. Esto ocurre cuando la coordenada radial toma el valor:

$$r_{erg} = M^{1/2} \ell. \quad (2.3)$$

Para valores $r < r_{erg}$, ∂_t tiene una norma positiva; por lo tanto no puede existir un observador estático con una cuadrivelocidad colineal a ∂_t , ya que t ya no es una coordenada temporal. Así, se tiene una, ergosfera como en la solución de Kerr, que sólo existe si $M > 0$.

Otro conjunto de valores críticos de r son las raíces la ecuación $N^2(r) = 0$, donde g_{rr} diverge. Las raíces positivas de esta ecuación son:

$$r_{\pm} = \ell \sqrt{\frac{M}{2}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{M\ell}\right)^2}}. \quad (2.4)$$

Denotemos por \mathcal{H}_{\pm} las curvas evaluadas en r_{\pm} . Estas existen si y sólo si,

$$|J| \leq M\ell, \quad M > 0. \quad (2.5)$$

Esto limita el espectro de las soluciones permitidas, ya que r_{\pm} se vuelve complejo si $|J| > M\ell$ y los horizontes desaparecen, dejando expuesta la singularidad¹ en $r = 0$. Se dice que son extremos si $|J| = M\ell$ o equivalentemente $r_- = r_+$. Finalmente la superficie $r = 0$ no es una singularidad de curvatura sino, más bien, una singularidad en la estructura causal[26].

Puede verse que la superficie externa \mathcal{H}_+ es una superficie nula. Aprovechando nuestro conocimiento sobre el agujero negro Kerr, suponemos que la superficie $r = r_+$ es un horizonte de Killing formado por curvas integrales del vector de Killing $\xi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi$, para alguna función Ω_H . Para encontrar Ω_H usamos, $g_{\mu\nu} \xi^\nu \xi^\mu = 0$ en $r = r_+$. Así, tenemos:

$$\Omega_H = -g_{tt}/g_{t\phi}|_{r=r_+} = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}|_{r=r_+} = -N^\phi(r_+) = J/2r_+^2. \quad (2.6)$$

¹La hipótesis débil de la censura cósmica afirma que no puede haber singularidad visible desde el futuro infinito nulo. En otras palabras, las singularidades deben ocultarse a un observador en el infinito por un horizonte de eventos [4].

Esta es la velocidad angular del horizonte. Por lo tanto, hemos comprobado que \mathcal{H}_+ es un horizonte de Killing, este horizonte corresponde al horizonte de eventos[27] y a partir de ahora podemos utilizar el nombre de agujero negro sin abuso². Este horizonte existe, sólo si existe r_+ . Debemos notar que $r_- \leq r_+ \leq r_{erg}$. Por tanto, hay una región no trivial más allá de la ergosfera y todavía fuera del horizonte donde los observadores experimentan algún arrastre debido a la rotación del agujero negro. Esta ergoregión es una característica complementaria que el agujero negro de BTZ comparte con la solución de Kerr en 4 dimensiones.

Pueden considerarse soluciones con $M < 0$. En este caso, se tienen singularidades desnudas cónicas y, por lo tanto, deben ser excluidas del espectro físico de soluciones [19]. Sin embargo existe el caso excepcional para $M = -1$ y $J = 0$ en el que la singularidad desaparece. No hay horizonte, pero tampoco hay una singularidad que ocultar. Se recupera como resultado el espacio de anti-de Sitter:

$$ds^2 = - (1 + (r/\ell)^2) dt^2 + (1 + (r/\ell)^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, el espacio anti-de Sitter emerge separado del espectro de agujero negro continuo por una diferencia de masa de una unidad. El vacío corresponde a tomar el límite $M \rightarrow 0$ en (2.1), lo que implica $J \rightarrow 0$, y se obtiene la métrica de vacío,

$$ds_{vac}^2 = - (r/\ell)^2 dt^2 + (r/\ell)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.8)$$

Entonces la solución anti-de Sitter (2.7) no se puede deformarse continuamente en el vacío (2.8), ya que la deformación requeriría pasar por una secuencia de singularidades desnudas que no están incluidas en el espacio de configuración.

El agujero negro BTZ difiere de las soluciones Schwarzschild y Kerr en algunos aspectos importantes: es asintóticamente anti-de Sitter³ en lugar de asintóticamente plano, y no tiene singularidad de curvatura en el origen. Sin embargo, es claramente un agujero negro: tiene un horizonte de eventos y, en el caso de rotación, una ergoesfera.

2.2. Otros modelos en $D = 3$

Como vimos en la sección 1.3, si consideramos la RG como un modelo para la interacción gravitacional sobre el espacio de Minkowski y que las partículas asociadas con las ondas gravitacionales (gravitones), son partículas sin masa con dos posibles estados de helicidad⁴

²El horizonte de eventos es intuitivamente la superficie nula en el espacio-tiempo donde la atracción gravitacional es tan fuerte que incluso la luz no puede escapar. Un tipo especial de superficie nula es un horizonte de Killing \mathcal{H} , que surge si un campo de Killing ξ es normal a la superficie nula [5].

³En el sentido de que se satisfacen las condiciones de contorno de Brown-Henneaux sobre el campo gravitatorio, que obedecen los siguientes criterios: (i) son $\mathbf{O}(3, 2)$ invariantes; (ii) hacen las integrales de superficie $\mathbf{O}(3, 2)$ finitas; (iii) incluyen la métrica de Kerr-AdS[28].

⁴Las partículas no masivas se caracterizan por la forma en que se transforman bajo rotaciones transversales a su dirección de movimiento. La transformación bajo este grupo para bosones se caracteriza por un número entero $h \geq 0$, que llamamos la helicidad.

independientes, entonces a la gravedad le corresponde una partícula de spin 2 sin masa [29]. A pesar de que la RG es una teoría de campos clásica consistente, la tarea de cuantizar la RG sigue siendo uno de los problemas destacados de la física teórica. Los obstáculos para cuantizar la gravedad son en parte técnicos: la RG es una teoría no lineal complicada, y uno debería esperar que sea más difícil que, por ejemplo, la electrodinámica. Además, vista como una teoría de campo común, la RG tiene una constante de acoplamiento con dimensión de masa⁵ $[G_N] = -2$, y los argumentos estándar de conteo de potencias, confirmados por cálculos explícitos, indican que la teoría no es renormalizable, es decir, que la teoría cuántica perturbativa implica un número infinito de contratérminos que no pueden sumarse [30].

Debido a que los gravitones no son renormalizables, es útil considerar a la RG en 3 dimensiones, ya que en esta dimensionalidad se esperan interacciones menos severas a distancias cortas [31]. Sin embargo, como se vio en el primer capítulo, cuando se aborda la RG en tres dimensiones se encuentra que para un gravitón, sin masa, no hay grados de libertad que se propaguen. En este sentido, hay varias generalizaciones de la RG (2 + 1) dimensional que restauran los grados locales de libertad, haciendo que la dinámica se parezca más a la de la gravedad en (3 + 1) dimensiones.

Un ejemplo de este tipo de generalizaciones, consiste en añadir un campo escalar φ (dilatón) que también contribuye a la dinámica gravitacional. En su forma más general, la acción puede escribirse como [30],

$$S_{DG} = \int_M d^3x \sqrt{-g} \left(C[\varphi]R - \frac{\omega[\varphi]}{\varphi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + 2\varphi V[\varphi] \right), \quad (2.9)$$

donde C , ω y V son funciones arbitrarias de φ . Modelos de este tipo surgen naturalmente en teoría de cuerdas⁶, con

$$C[\varphi] = \varphi, \quad \omega[\varphi] = -1, \quad V[\varphi] = \Lambda/2, \quad (2.10)$$

mientras que la elección

$$C[\varphi] = \varphi, \quad \omega[\varphi] = \omega_0, \quad V[\varphi] = 0, \quad (2.11)$$

corresponde a la teoría tridimensional de Brans-Dicke-Jordan. En tales modelos, el campo escalar φ se convierte en un nuevo grado de libertad dinámico local, y una elección correcta de acoplamientos puede conducir a un límite similar a la gravedad Newtoniana [30]. Se sabe que muchas versiones de gravedad con dilatón tienen soluciones de agujero negro (ver , por ejemplo, [32–34]).

⁵Si se toma unidades naturales las escalas de longitud L tienen unidades de masa inversa o equivalentemente de energía inversa, y así decimos $[L] = -1$, es decir $[L] = [M]^{-1}$.

⁶En teoría de cuerdas, el campo φ es usualmente denotado como $e^{-2\phi}$.

Una segunda generalización es única para las dimensiones $(2 + 1)$, donde un término de Chern-Simons,

$$S_{CS} = -\frac{1}{32\pi G\mu} \int_M d^3x \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho \left(\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\tau \right), \quad (2.12)$$

se puede agregar a la acción gravitacional de Einstein-Hilbert [35]. La expresión (2.12) no parece ser generalmente covariante, pero lo es, al menos cuando la variedad M es cerrada: se puede verificar que un cambio infinitesimal de coordenadas simplemente agrega una derivada total al Lagrangiano, sin modificar la acción [36]. La variación de la acción total $I + I_{CS}$ produce las ecuaciones de movimiento,

$$G^{\mu\nu} + \mu^{-1} C^{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

donde $C^{\mu\nu}$ es el Tensor de Cotton (conformemente invariante, véase Apéndice A). El argumento de conteo simple que nos dio el número de grados de libertad en la gravedad de Einstein ya no se cumple: las ecuaciones del movimiento para (2.13) son de tercer orden y, como consecuencia, tanto la métrica espacial como su derivada temporal deben tratarse como variables del espacio de configuración con momentos canónicos asociados, y el análisis se vuelve más elaborado. En cambio, como Deser, Jackiw, Templeton observaron por primera vez [35], las ecuaciones de movimiento linealizadas son las de un campo escalar masivo, con masa μ ,

$$(\Delta + \mu^2) \phi = 0, \quad (2.14)$$

donde

$$\phi = \left(\delta_{ij} + \hat{\partial}_i \hat{\partial}_j \right) h^{ij}, \quad \text{con} \quad \hat{\partial}_i = \partial_i (-\nabla^2)^{-1/2}. \quad (2.15)$$

La existencia de una excitación masiva como esta se puede confirmar al observar la interacción efectiva de las fuentes externas estáticas: uno encuentra un acople de tipo Yukawa, con una energía de interacción [30],

$$E = - \int d^2x T_{00} (-\nabla^2 + \mu^2)^{-1} T_{00}, \quad (2.16)$$

como se esperaba para un gravitón escalar masivo. Este modelo se conoce comúnmente como gravedad topológica masiva (TMG por sus siglas en inglés). Se ha demostrado que la gravedad topológicamente masiva es renormalizable de forma perturbativa [37–39], y se conocen varias soluciones clásicas interesantes.

Así podemos observar, como se modifican las características del campo que propaga la fuerza gravitatoria si modificamos de manera adecuada la acción de Einstein-Hilbert. En especial vemos como el gravitón pasa a ser un campo masivo si tenemos en cuenta el término de Chern-Simons.

2.3. Gravedad masiva BHT

Una modificación popular para restaurar los grados de libertad de la RG en tres dimensiones es proponer un modelo en el que el gravitón adquiera masa. A estas teorías se las llama de gravedad masiva. La propagación de un gravitón masivo en tres dimensiones tiene el mismo número de grados de libertad que un gravitón sin masa en cuatro dimensiones [40].

La posibilidad de un gravitón masivo se ha estudiado de forma intermitente durante los últimos 70 años. Durante este tiempo, se descubrieron curiosidades como la discontinuidad de Van Dam, Veltman y Zakharov (vDVZ) [41] y el fantasma Boulware-Deser [42]. Hoy en día, el interés en la gravedad masiva ha visto un resurgimiento debido al progreso reciente que ha resuelto sus problemas tradicionales [40], generando una vía para abordar importantes preguntas abiertas, como el problema de la naturalidad de la constante cosmológica.

Construir una teoría de gravedad masiva no es sencillo. La analogía con un campo spin 1, A_μ , donde se podría simplemente agregar un término de masa $m^2 A_\mu A_\mu$ al término cinético, no funcionará aquí. La razón es que no sabemos cómo construir un término de masa para el campo de la métrica sola, ya que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ es sólo una constante. El problema es mucho más fácil en el caso de la RG linealizada. En este caso, hay dos formas de introducir una masa en el gravitón. La primera opción es introducir el gravitón masivo, en un fondo dado, a través de términos masivos explícitos. Para un fondo plano, esto conduce a la conocida teoría de Fierz-Pauli (FP), que analizaremos más adelante en esta sección.

Otra forma de introducir un gravitón masivo es agregando términos no lineales en derivadas de la métrica, al término cinético. Como vimos, en el modelo de Chern-Simons, la inclusión de términos superiores en derivadas lleva a un gravitón masivo. Otro ejemplo es la gravedad masiva BHT (Bergshoeff, Hohm y Townsend) [31], que es el marco teórico sobre el que se sitúan los resultados de este trabajo. A diferencia de FP, BHT no parte de una linealización de la teoría, sino que el gravitón adquiere masa a partir de términos añadidos al funcional de Einstein-Hilbert.

De aquí en adelante nos centraremos en la gravedad masiva BHT. Específicamente, esta variante de la RG en 3D se basa en agregar términos de cuarto grado en derivadas de la métrica, como R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, además del término de Einstein-Hilbert. Estos términos, en principio, pueden ser considerados dentro de la acción ya que son invariantes Lorentz. La teoría resultante describe un campo de interacción de gravitones con estados de helicidad ± 2 [43].

El funcional de BHT es,

$$S_{BHT}[g] = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} [\sigma R + m^{-2} K - 2\Lambda] , \quad (2.17)$$

donde $\kappa^2 = 1/M_3$ define la masa 3-dimensional de Planck, $\sigma = \pm 1$ controla el signo del término de Einstein-Hilbert, m es la masa del gravitón, Λ es la constante cosmológica y,

$$K \equiv R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2. \quad (2.18)$$

Una característica notable de esta teoría es que, a pesar de los términos cuadráticos en derivadas, propaga dos modos de un gravitón masivo en un vacío máximamente simétrico para $\sigma = -1$, lo que significa que el término de EH tiene el signo “incorrecto” (relativo a la acción de EH de la RG). La razón de la presencia del signo “incorrecto” es evitar que el gravitón masivo sea un modo fantasma [43]. El coeficiente $-3/8$ en (2.18) está ajustado de tal manera que esta acción no describe ningún escalar masivo en 3D. La acción BHT está libre de fantasmas y describe dos grados de libertad que se propagan.

Las ecuaciones de movimiento derivadas de la acción (2.17)son:

$$\sigma \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] + \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}K_{\mu\nu} = 0, \quad (2.19)$$

donde el tensor $K_{\mu\nu}$ esta dado por,

$$K_{\mu\nu} = 2\Delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu R + g_{\mu\nu}\Delta R) + 4R_{\mu\gamma\nu\rho}R^{\gamma\rho} - \frac{3}{2}RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left[\frac{3}{8}R^2 - R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma} \right]. \quad (2.20)$$

Como consecuencia de la invarianza bajo difeomorfismos de la acción (2.17), tenemos la identidad tipo Bianchi, $\partial^\mu K_{\mu\nu} = 0$. Una característica especial del escalar K , y el tensor $K_{\mu\nu}$ derivado de este, es que

$$g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = K, \quad (2.21)$$

donde K quedo definido por la ecuación (2.18). Como consecuencia, la traza de (2.20) es,

$$m^2R = K. \quad (2.22)$$

Nótese que en particular, la ausencia en el lado derecho de un término ΔR , que contribuiría a la ecuación linealizada si estuviera presente dentro de la acción BHT (2.17).

Para demostrar que, en el límite lineal de BHT con $\Lambda = 0$ se recupera la teoría de FP, es conveniente escribir la acción (2.17) de una forma alternativa, para esto usamos un campo auxiliar simétrico $\tilde{f}_{\mu\nu}$,

$$S_{BHT} = \int d^3x \sqrt{-g} \left[\sigma R - 2\Lambda + \tilde{f}^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{m^2}{4} \left(\tilde{f}^{\mu\nu}\tilde{f}_{\mu\nu} - \tilde{f}^2 \right) \right], \quad (2.23)$$

donde $\tilde{f} = g^{\mu\nu} \tilde{f}_{\mu\nu}$ y se puede eliminar el campo auxiliar $\tilde{f}_{\mu\nu}$, para recuperar el Lagrangiano (2.17) mediante sus ecuaciones de campo,

$$\tilde{f}_{\mu\nu} = \frac{2}{m^2} S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\mu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

La descripción estándar de un campo libre de gravitones masivo esta dada por el Lagrangiano de Fierz y Pauli en términos de un campo tensorial simétrico, que llamaremos $f_{\mu\nu}$ [40]. La acción de FP es

$$S_{FP}[f] = S_{EH}^{(2)}[f] - \frac{1}{4} m^2 \int d^3x (f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - f^2), \quad (2.25)$$

con $f = \eta^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$ para la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, y

$$S_{EH}^{(2)}[f] = -\frac{1}{2} \int d^3x f^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(lin)}(f), \quad (2.26)$$

donde $G_{\mu\nu}^{(lin)}(f)$ es el tensor lineal de Einstein expresado como un operador diferencial autoadjunto actuando en el campo tensorial f . La acción de FP, por lo tanto, se reduce a la aproximación cuadrática de la acción de Einstein-Hilbert (EH)⁷ en el límite sin masa. Las ecuaciones de campo son equivalentes a

$$(\Delta - m^2) f_{\mu\nu} = 0. \quad (2.27)$$

Además se elige el gauge,

$$\partial^\mu f_{\mu\nu} = 0, \quad f = 0, \quad (2.28)$$

la primera condición diferencial es necesaria para eliminar los modos fantasma, y la condición de traza cero es necesaria para eliminar los modos de spin más bajos. En 3D, las ecuaciones de FP propagan dos estados de helicidad ± 2 de una partícula de spin 2 masiva [44]. En contraste, para 4D el término de masa rompe la simetría bajo difeomorfismos [45], dejando cuatro ligaduras menos, por lo que se tiene 6 grados de libertad contando los dos grados de libertad no masivos. Por otro lado, sabemos que los grados de libertad de una partícula masiva spin-2 deberían ser cinco, el sexto es un fantasma (el llamado fantasma Boulware-Deser). Es un hecho aceptado que, si el término de masa está limitado a ser uno en particular, es decir, el término de Fierz-Pauli [46], se elimina el sexto grado de libertad fantasma.

Reemplazando $\Lambda = 0$ en la acción (2.23), y linealizando alrededor de un vacío de Mikowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, el Lagrangiano linealizado correspondiente está dado por:

$$\mathcal{L}_{BHT} = \left(\tilde{f}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(lin)}(h) \right) - \frac{m^2}{4} \left(\tilde{f}^{\mu\nu} \tilde{f}_{\mu\nu} - \tilde{f}^2 \right), \quad (2.29)$$

⁷La acción (2.26) sólo difiere por una derivada total de la acción (1.42)

donde $G_{\mu\nu}^{(\text{lin})}(h)$ esta dado por:

$$G_{\mu\nu}^{(\text{lin})}(h) = R_{\mu\nu}^{(\text{lin})} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{(\text{lin})}. \quad (2.30)$$

Ahora, si redefinimos en (2.29) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - f_{\mu\nu}$ se obtiene el Lagrangiano de FP

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^{(\text{lin})}(h) + \frac{1}{2}\left[\tilde{f}^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^{(\text{lin})}(\tilde{f}) - \frac{m^2}{2}\left(\tilde{f}^{\mu\nu}\tilde{f}_{\mu\nu} - \tilde{f}^2\right)\right] \quad (2.31)$$

lo que nos da para la acción cuadrática BHT, en su límite lineal,

$$S_{BHT}^{(2)}[h, \tilde{f}] = -S_{EH}^{(2)}[h] + S_{FP}[\tilde{f}]. \quad (2.32)$$

Como la acción cuadrática de Einstein-Hilbert para $h_{\mu\nu}$ no propaga ningún modo, los modos propagados por la teoría BHT linealizada son los mismos que los de la teoría FP.

En conclusión las principales propiedades de la teoría BHT son: propaga dos grados de libertad correspondientes a una partícula masiva de spin 2 (a diferencia de la RG en tres dimensiones, que no tiene ninguna, o la Gravedad Topológicamente Masiva que tiene sólo una), que hace de esta teoría un modelo de juguete muy útil para estudiar la gravedad en cuatro dimensiones. Su utilidad consiste en tener los mismos grados de libertad que la RG clásica en cuatro dimensiones.

Las ecuaciones de movimiento (2.19) con $\sigma = 1$, admiten soluciones exactas AdS_3 (Anti-de Sitter en tres dimensiones)[43]. Como hemos visto el elemento de línea AdS_3 en coordenadas adecuadas, se puede escribir de la siguiente forma,

$$ds^2 = -(1 + r^2/l^2)dt^2 + \frac{1}{(1 + r^2/l^2)}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (2.33)$$

donde l es “radio” de la solución, el viene dado en términos de Λ y m . En este sistema de coordenadas la frontera del espacio está localizada en $r = \infty$. Para BHT se tiene que l puede tomar dos valores,

$$l_{\pm}^2 = -\frac{1}{2\Lambda} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\Lambda}{m^2}} \right), \quad (2.34)$$

esto muestra que BHT admite dos soluciones de “vacío” maximalmente simétricas AdS_3 , cada una de ellas con una constante cosmológica efectiva diferente correspondiente a $\Lambda_{\pm} = l_{\pm}^{-2}$. De esta misma forma se puede probar que BHT admite una única solución de vacío dS_3 , con $\sigma = -1$ en las ecuaciones de movimiento (2.19)[43].

Toda solución de agujero negro debe recuperar asintóticamente, el grupo de simetrías de la solución maximálmente simétrica. Por lo tanto, tenemos soluciones de agujero negro si y sólo si $\Lambda = \Lambda_-$ o $\Lambda = \Lambda_+$. En el caso en el que $|\Lambda| = m^2$, tendremos una única familia de soluciones. En el siguiente capítulo nos centraremos, por conveniencia, en este caso.

Las extensiones de orden mayor que dos en derivadas para las ecuaciones de movimiento de la RG en 4D se han investigado desde el intento de Weyl de 1918 de una teoría unificada de la gravedad y el electromagnetismo. Una característica especial de los invariantes de curvatura de grado cuadrático, es que contribuyen a la aproximación cuadrática en una expansión alrededor de un vacío de Minkowski, por lo que contribuyen a las ecuaciones de campo linealizadas, que se convierten de cuarto orden en lugar de segundo orden. Las ecuaciones de mayor orden que dos generalmente propagan fantasmas (modos de energía negativa) además de los modos físicos, y esto es lo que sucede en 4D: además del gravitón sin masa, también hay un modo escalar masivo y un modo fantasma de spin 2 [47]. El caso en 3D es diferente porque la acción de EH por sí misma no propaga ningún modo, por lo que el gravitón sin masa ahora está ausente. Esto significa que somos libres de cambiar el signo general de la acción para disponer que los modos masivos de spin 2 sean físicos, es decir, no fantasmas. Entonces podemos asegurarnos de que no sean taquiones mediante una elección de signo relativo para el término de EH y los términos de curvatura de segundo orden. Sin embargo, todavía existe el modo escalar masivo, que ahora es un fantasma. Sorprendentemente, la masa de este modo escalar fantasma tiende al infinito si el coeficiente relativo de los dos términos independientes de curvatura cuadráticos se ajusta al valor que produce la “combinación K ” de (2.18), por lo que terminamos con el modelo masivo unitario de spin 2 puro, que es BHT.

Una motivación para considerar la acción de EH con el signo “incorrecto” es que esta es una característica de la teoría TMG [31], que también tiene un orden en derivadas mayor que dos porque involucra el término de Cherns-Simons de tercer orden que viola la paridad. TMG propaga sólo un modo de spin 2, que es posible en 3D si se viola la paridad.

Hay una generalización natural de BHT sugerida por la teoría TMG, agregando un término CS a la acción (2.17). Esto produce lo que se ha llamado “gravedad masiva general” (GMG) [43]. En GMG hay dos parámetros de masa, que pueden intercambiarse por las dos masas m_{\pm} de los dos modos spin 2 de helicidad ± 2 . Como la paridad cambia el signo de las helicidad, un modelo con $m_{+} \neq m_{-}$ rompe la paridad. Cuando $m_{+} = m_{-}$ el término LCS que viola la paridad está ausente y recuperamos BHT. El límite $m_{-} \rightarrow \infty$ para m_{+} fijo produce TMG, en el cual el término de curvatura cuadrático está ausente, por lo que tanto BHT como TMG son casos especiales de GMG.

Capítulo 3

Estabilidad de geodésicas circulares en soluciones BHT

En este capítulo estudiaremos la estabilidad de geodésicas circulares en soluciones de agujero negro de BHT[1]. Para ello, haremos uso del método de Cardoso et al. [2], basado en el cálculo de exponentes de Lyapunov.

En la primera parte del capítulo presentaremos las soluciones de agujero negro sobre las que se trabajará. Seguido de esto, calcularemos los exponentes de Lyapunov y determinaremos condiciones de estabilidad para las órbitas en función de los parámetros de las soluciones de agujero negro.

3.1. Soluciones de agujero negro de BHT

Las ecuaciones de campo de la gravedad masiva BHT (2.19), en el caso que existe una única solución maximalmente simétrica, admiten la siguiente solución encontrada por Oliva-Tempo-Troncoso[1]:

$$ds^2 = -(-\Lambda r^2 + br - \mu) dt^2 + \frac{dr^2}{-\Lambda r^2 + br - \mu} + r^2 d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde b y μ son constantes de integración, y Λ la constante cosmológica. El escalar de Ricci de esta métrica esta dado por [1],

$$R = 6\Lambda - \frac{2b}{r}, \quad (3.2)$$

de donde se puede ver que si $r \rightarrow \infty$, la curvatura escalar es constante. En lo que sigue presentamos soluciones para la constante cosmológica nula, negativa y positiva; siempre en el caso de que exista una única solución simétrica, que como se vio en el anterior capítulo satisface que, $|\Lambda| = m^2$, con m el parámetro de masa que aparece en la acción BHT (2.17).

3.1.1. Constante cosmológica $\Lambda = 0$

En el caso que la constante cosmológica sea a cero, tenemos el límite $m \rightarrow 0$, la acción BHT (2.19) se reduce a [43],

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} K . \quad (3.3)$$

Esto se puede probar tomando el límite $m \rightarrow 0$ en la acción (2.23), definiendo un nuevo campo auxiliar $\bar{f}_{\mu\nu} = m^2 \tilde{f}_{\mu\nu}$ y manteniendo fijo $m\kappa = \beta$, esto nos da la acción,

$$S_{m \rightarrow 0} = \frac{1}{\beta^2} \int d^3x \sqrt{-g} \left[\bar{f}^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (\bar{f}^{\mu\nu} \bar{f}_{\mu\nu} - \bar{f}^2) \right] , \quad (3.4)$$

y la eliminación de $\bar{f}_{\mu\nu}$ nos lleva a la acción (3.3). Una solución de agujero negro, asintóticamente localmente plana de BHT se puede obtener de la métrica (3.1) tomando $\Lambda = 0$,

$$ds^2 = -(br - \mu) dt^2 + \frac{dr^2}{br - \mu} + r^2 d\varphi^2 . \quad (3.5)$$

Este agujero negro posee una singularidad espacial en el origen, que está rodeada por un horizonte de eventos ubicado en $r_0 = \mu/b$, siempre que $b > 0$ y $\mu > 0$ [1].

3.1.2. Constante cosmológica $\Lambda < 0$

En el caso de constante cosmológica negativa, $\Lambda \equiv -\frac{1}{l^2}$, una solución Lorentziana de las ecuaciones de campo (2.19), esta dada por,

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + br - \mu \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{l^2} + br - \mu} + r^2 d\phi^2 , \quad (3.6)$$

y para el rango de las coordenadas $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, siempre que la función lapso g_{tt} admita una raíz real positiva se tienen agujeros negros asintóticamente AdS. En términos de las raíces correspondientes ($r_+ > r_-$), la métrica se puede escribir como,

$$ds^2 = -\frac{1}{l^2} (r - r_+) (r - r_-) dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{(r - r_+) (r - r_-)} + r^2 d\phi^2 , \quad (3.7)$$

donde,

$$b = -\frac{1}{l^2} (r_+ + r_-) , \quad (3.8)$$

$$\mu = -\frac{r_+ r_-}{l^2} , \quad (3.9)$$

$$r_- = -\frac{1}{2} bl^2 - \frac{l}{2} \sqrt{b^2 l^2 + 4\mu} , \quad (3.10)$$

$$r_+ = -\frac{1}{2} bl^2 + \frac{l}{2} \sqrt{b^2 l^2 + 4\mu} . \quad (3.11)$$

Sorprendentemente, como la masa está parametrizada exclusivamente en términos de la constante de integración μ , la constante b se puede considerar como una especie de *gravitational hair*¹. Además, el agujero negro no tiene cargas globales adicionales generadas por las simetrías asintóticas [1].

En el caso de $b = 0$, la solución se reduce al agujero negro estático BTZ, mientras que cuando se activa el parámetro de gravitational hair ($b \neq 0$), la geometría desarrolla una singularidad de curvatura en el origen ($r = 0$), como se puede ver de (3.2). Según el signo de b , la singularidad puede estar rodeada por uno o dos horizontes para un rango adecuado de la masa [1].

3.1.3. Constante cosmológica $\Lambda > 0$

En el caso de constante cosmológica negativa, $\Lambda \equiv \frac{1}{l^2}$, la métrica se puede escribir como,

$$ds^2 = - \left(-\frac{r^2}{l^2} + br - \mu \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-\frac{r^2}{l^2} + br - \mu} + r^2 d\phi^2, \quad (3.12)$$

con $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, la solución describe agujeros negros asintóticamente dS siempre que la función de lapso g_{tt} admita dos raíces reales positivas. En términos de las raíces correspondientes, $r_+ > r_-$, la métrica se puede escribir como,

$$ds^2 = -\frac{1}{l^2}(r - r_-)(r_+ - r)dt^2 + \frac{l^2 dr^2}{(r - r_-)(r_+ - r)} + r^2 d\phi^2, \quad (3.13)$$

donde el parámetro b y la masa están dados por,

$$b = \frac{1}{l^2}(r_- + r_+) > 0, \quad (3.14)$$

$$\mu = \frac{r_- r_+}{l^2} > 0, \quad (3.15)$$

y las raíces son,

$$r_- = \frac{1}{2}bl^2 - \frac{l}{2}\sqrt{b^2l^2 - 4\mu}, \quad (3.16)$$

$$r_+ = \frac{1}{2}bl^2 + \frac{l}{2}\sqrt{b^2l^2 - 4\mu}. \quad (3.17)$$

Se puede ver que el espacio-tiempo dS se recupera para $b = 0$ y $\mu = -1$. El agujero negro (3.12) existe para el rango,

$$0 < \mu \leq \frac{1}{4}b^2l^2. \quad (3.18)$$

¹El teorema de no-hair postula que todas las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de gravitación y electromagnetismo de Einstein-Maxwell en la RG pueden caracterizarse completamente por sólo tres parámetros clásicos observables externamente: masa, carga eléctrica y momento angular [48]. Toda otra información (para la cual *hair* es una metáfora) sobre la materia que formó un agujero negro o que cae dentro de él, “desaparece” detrás del horizonte de eventos del agujero negro y, por lo tanto, es permanentemente inaccesible para los observadores externos.

Hay que tener en cuenta que el agujero negro existe debido a la presencia de la constante de integración b .

3.2. Estabilidad de geodésicas circulares mediante exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov son una medida de la velocidad promedio a la que convergen o divergen las trayectorias cercanas en el espacio de fase. Un exponente de Lyapunov positivo indica una divergencia entre las trayectorias cercanas, es decir, una alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Una discusión breve de las definiciones básicas de estabilidad y del método del análisis de sistemas no lineales se puede ver en el [Apéndice B](#).

Para órbitas circulares el espacio de fase bidimensional tiene la forma $X_i(t) = (p_r(t), r(t))$. Esto incluye órbitas circulares en espacios estacionarios con simetría esférica y órbitas circulares en espacios $(2 + 1)$ dimensionales, como las soluciones de agujeros negros de BHT expuestas anteriormente. Al linealizar las ecuaciones de movimiento con $X_i(t) = (p_r(t), r(t))$, sobre órbitas de r constantes obtenemos la matriz de estabilidad (véase [Apéndice B](#)),

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

donde

$$K_1 = \frac{d}{dr} \left(\dot{t}^{-1} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r} \right), \quad (3.20)$$

$$K_2 = (\dot{t} g_{rr})^{-1}, \quad (3.21)$$

para \mathcal{L} , el Lagrangiano del movimiento geodésico. Por lo tanto, para órbitas circulares, los principales exponentes de Lyapunov pueden expresarse como,

$$\lambda = \pm \sqrt{K_1 K_2}. \quad (3.22)$$

De ahora en adelante, ignoraremos el signo \pm y simplemente nos referiremos al “exponente de Lyapunov”. De las ecuaciones de movimiento se deduce que,

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{r}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r}, \quad (3.23)$$

y

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{r}} = \frac{d}{d\tau} (g_{rr} \dot{r}) = \dot{r} \frac{d}{dr} (g_{rr} \dot{r}). \quad (3.24)$$

Definiendo

$$\dot{r}^2 = V_r, \quad (3.25)$$

podemos reescribir esto como,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta r} = \frac{1}{2g_{rr}} \frac{d}{dr} (g_{rr}^2 V_r). \quad (3.26)$$

Reemplazando la última ecuación en (3.20) y luego reemplazando (3.20) y (3.21) en (3.22), teniendo en cuenta que para geodésicas circulares² $V_r = V_r' = 0$ [49], se llega a la expresión derivada en [2] para el exponente de Lyapunov,

$$\lambda = \sqrt{\frac{V_r''}{2\dot{t}^2}}. \quad (3.27)$$

3.2.1. Geodésicas temporales

De la condición $V_r = V_r' = 0$ y usando el cálculo de geodésicas del primer capítulo (1.105), con $\delta_1 = -1$ tenemos que,

$$E^2 = \frac{2f^2}{2f - rf'}, \quad L^2 = \frac{r^3 f'}{2f - rf'}, \quad (3.28)$$

donde todas las cantidades de aquí en adelante están evaluadas en el radio de una órbita circular temporal. Ya que la energía debe ser real, se requiere que,

$$2f - rf' > 0. \quad (3.29)$$

La segunda derivada del potencial es,

$$V_r'' = 2 \frac{g}{f} \frac{-3ff'/r + 2(f')^2 - ff''}{2f - rf'}. \quad (3.30)$$

Usando las ecuaciones (3.25), (1.100) y (3.30) para evaluar el exponente de Lyapunov en las geodésicas circulares temporales se tiene,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{g}{f} \left[\frac{3ff'}{r} - 2(f')^2 + ff'' \right]} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(2f - rf') V_r''(r)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Teniendo en cuenta que $2f - rf' > 0$ y que las órbitas inestables están definidas por $V_r'' > 0$, podemos ver que para órbitas inestables λ será siempre real.

²En este análisis, el punto denota una derivada con respecto al tiempo propio y la prima la derivada con respecto a r .

3.2.2. Geodésicas nulas

Para geodésicas circulares nulas $\delta_1 = 0$, y se tiene que:

$$\frac{E}{L} = \pm \sqrt{\frac{f_c}{r_c^2}}, \quad (3.32)$$

$$2f_c = r_c f'_c, \quad (3.33)$$

desde aquí el subíndice c significa que las cantidades están evaluadas en el radio $r = r_c$ de una geodésica circular nula. En este caso la segunda derivada del potencial es

$$V_r''(r_c) = \frac{L^2 g_c}{r_c^4 f_c} [2f_c - r_c^2 f_c''], \quad (3.34)$$

De forma similar que en las geodésicas temporales, usando las ecuaciones (3.25), (1.100), (3.32) y (3.34), para geodésicas circulares nulas

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_c^2 f_c}{L^2} V_r''(r_c)}. \quad (3.35)$$

3.3. Condiciones de estabilidad en geodésicas circulares

En esta sección vamos a aplicar el método descrito arriba para las soluciones de BHT expuestas en la sección 3.1.

3.3.1. Constante cosmológica $\Lambda = 0$

La solución (3.5) de agujero negro asintóticamente localmente plana de BHT es,

$$ds^2 = -(br - \mu) dt^2 + \frac{dr^2}{br - \mu} + r^2 d\varphi^2. \quad (3.36)$$

Para aplicar el análisis con exponentes de Lyapunov en esta solución basta con identificar,

$$f(r) = g(r) = br - \mu. \quad (3.37)$$

Entonces reemplazando estas funciones en (3.29) y (3.30) se tiene,

$$br - 2\mu > 0, \quad (3.38)$$

$$V_r''(r) = \frac{2 \left(2b^2 - \frac{3(br-\mu)b}{r} \right)}{br - 2\mu}. \quad (3.39)$$

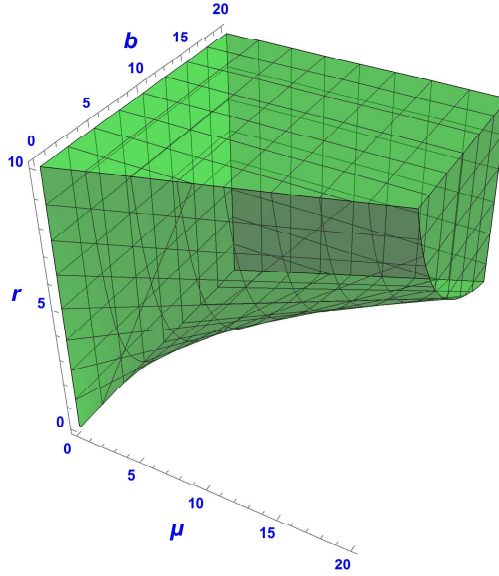


FIGURA 3.1: Región de estabilidad de geodésicas temporales circulares para $\Lambda = 0$.

A partir de esta expresión se puede evaluar el exponente de Lyapunov las geodésicas temporales (3.31),

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \left(2b^2 - \frac{3(br-\mu)b}{r} \right)}{br - 2\mu}} br - 2\mu. \quad (3.40)$$

De (3.38) se deduce que para que $V_r''(r) < 0$, es decir, para que las órbitas sean estables se tiene que cumplir

$$br - 3\mu > 0. \quad (3.41)$$

En la Figura 3.1 mostramos la región que cumple con esta condición. También se ve que $r > \frac{3\mu}{b} > r_0 = \frac{\mu}{b}$, por lo tanto todas las órbitas estables están fuera del horizonte de sucesos.

Para evaluar las geodésicas nulas usamos la ecuación (3.33) para determinar r_c y se tiene que,

$$r_c = \frac{2\mu}{b} > r_0 \quad (3.42)$$

entonces,

$$V_r''(r_c) = \frac{L^2 b^4}{8\mu^3}, \quad (3.43)$$

así reemplazando la última ecuación en (3.35) para geodésicas nulas se tiene

$$\lambda = \frac{b}{2} > 0, \quad (3.44)$$

de lo que se deduce que todas las geodésicas nulas circulares son inestables.

3.3.2. Constante cosmológica $\Lambda < 0$

En el caso de constante cosmológica negativa, $\Lambda \equiv -\frac{1}{l^2}$, la solución (3.6) de BHT está dada por,

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + br - \mu \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{l^2} + br - \mu} + r^2 d\phi^2. \quad (3.45)$$

En este caso tenemos:

$$f(r) = g(r) = br - \mu + \frac{r^2}{l^2}. \quad (3.46)$$

Usando el mismo análisis que en el caso $\Lambda = 0$, se tiene de (3.29) y (3.30) que para las geodésicas temporales:

$$\left(b + \frac{2r}{l^2} \right) r - 2br + 2\mu - \frac{2r^2}{l^2} < 0, \quad (3.47)$$

$$V_r''(r) = - \frac{2 \left(2 \left(b + \frac{2r}{l^2} \right)^2 - \frac{3 \left(br - \mu + \frac{r^2}{l^2} \right) \left(b + \frac{2r}{l^2} \right)}{r} - \frac{2 \left(br - \mu + \frac{r^2}{l^2} \right)}{l^2} \right)}{\left(b + \frac{2r}{l^2} \right) r - 2br + 2\mu - \frac{2r^2}{l^2}}. \quad (3.48)$$

Usando las dos ecuaciones anteriores y (3.31), se deduce que las geodésicas estables temporales deben cumplir:

$$b^2 l^2 r - 3bl^2 \mu + 3br^2 - 8r\mu > 0. \quad (3.49)$$

Entonces, podemos distinguir dos casos para la estabilidad de geodésicas temporales, según el signo de b :

- **$b > 0$.**- Cuando el parámetro $b > 0$, se cumple que $\mu \geq 0$ para que el agujero negro exista, y hay un horizonte único ubicado en $r = r_+$. Para el caso extremo $\mu = 0$ el horizonte coincide con la singularidad en el origen y de (3.49) se tiene que

$$b^2 l^2 r + 3br^2 > 0, \quad (3.50)$$

lo que nos dice que en este caso extremo, cuando $b > 0$ y $\mu = 0$, todas las órbitas son estables.

Para el caso general (3.49), podemos visualizar las regiones en donde las órbitas son estables dando valores al parámetro l . Esto se puede ver en la Figura 3.2, donde la región amarilla corresponde al caso $b > 0$ y se muestran casos para $l = 1, 2, 4$. En la Figura 3.4 mostramos las regiones de estabilidad en función de l , μ y r para dos valores de b . Además de la estabilidad, se puede considerar que el radio r sea mayor que el horizonte de sucesos r_+ . En las Figuras 3.3 y 3.4 se puede ver en color negro la región que no cumple esta condición extra.

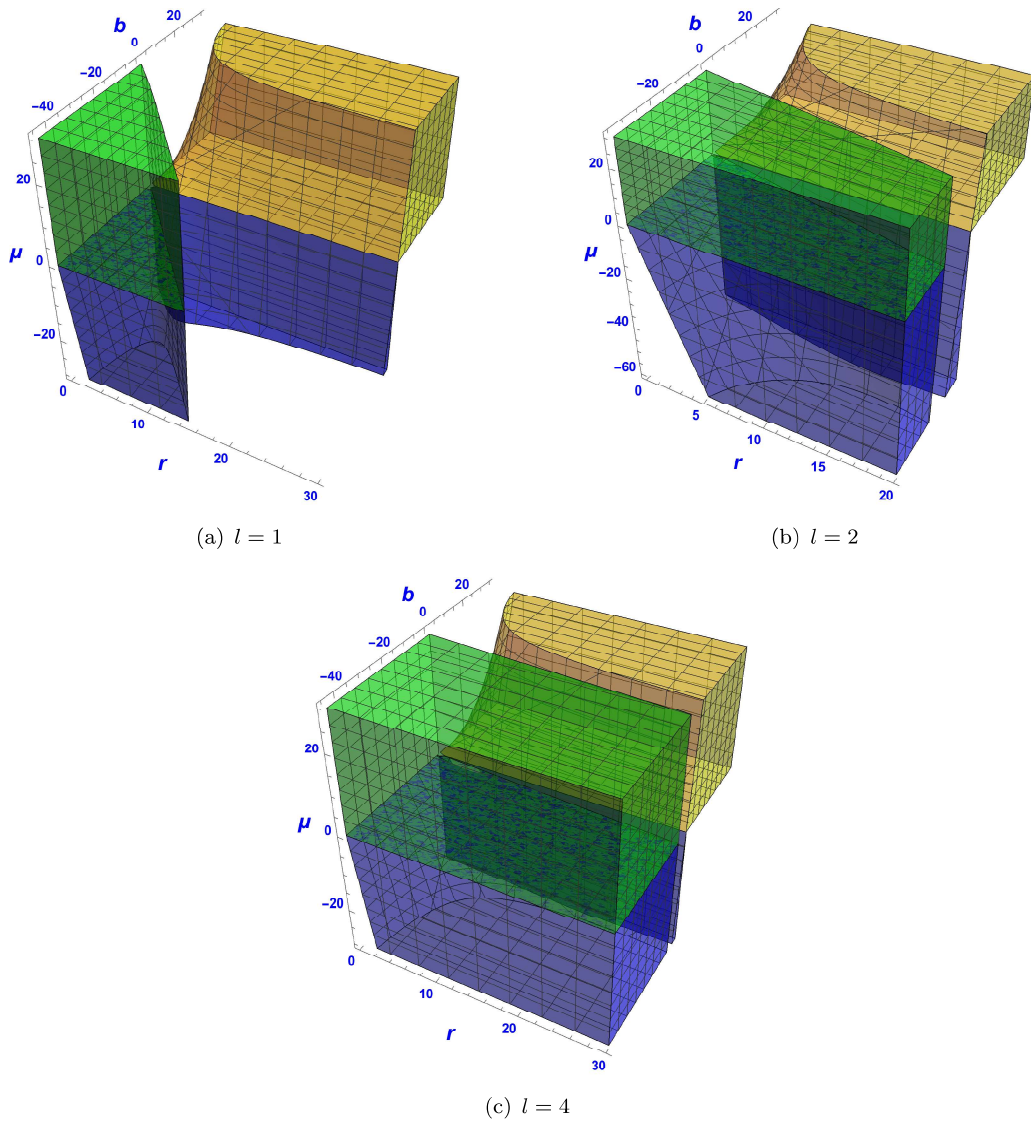


FIGURA 3.2: Regiones de estabilidad para geodésicas temporales circulares con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ , b y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $l = 1, 2, 4$. En amarillo el caso $b > 0$, en verde $b < 0$ y $\mu > 0$, en azul $b < 0$ y $\mu < 0$.

- $b < 0$.- Para $b < 0$ tenemos que el parámetro μ tiene un límite inferior $\mu \geq -\frac{1}{4}b^2l^2$. Primero observemos que pasa cuando $\mu = 0$, se tiene la desigualdad (3.50) con la diferencia de que ahora los valores de b son negativos y la desigualdad no se cumple para todos los casos. En la Figura 3.5 mostramos la región de estabilidad en función de l , b y r . También, la Figura 3.5 muestra en negro el conjunto de parámetros que están dentro del horizonte de sucesos r_+ y se puede ver que no hay geodésicas estables fuera de r_+ .

En el caso extremo de $\mu = -\frac{1}{4}b^2l^2$ tenemos la siguiente condición para geodésicas estables:

$$\frac{3}{4}b^3l^4 + 3b^2l^2r + 3br^2 > 0, \quad (3.51)$$

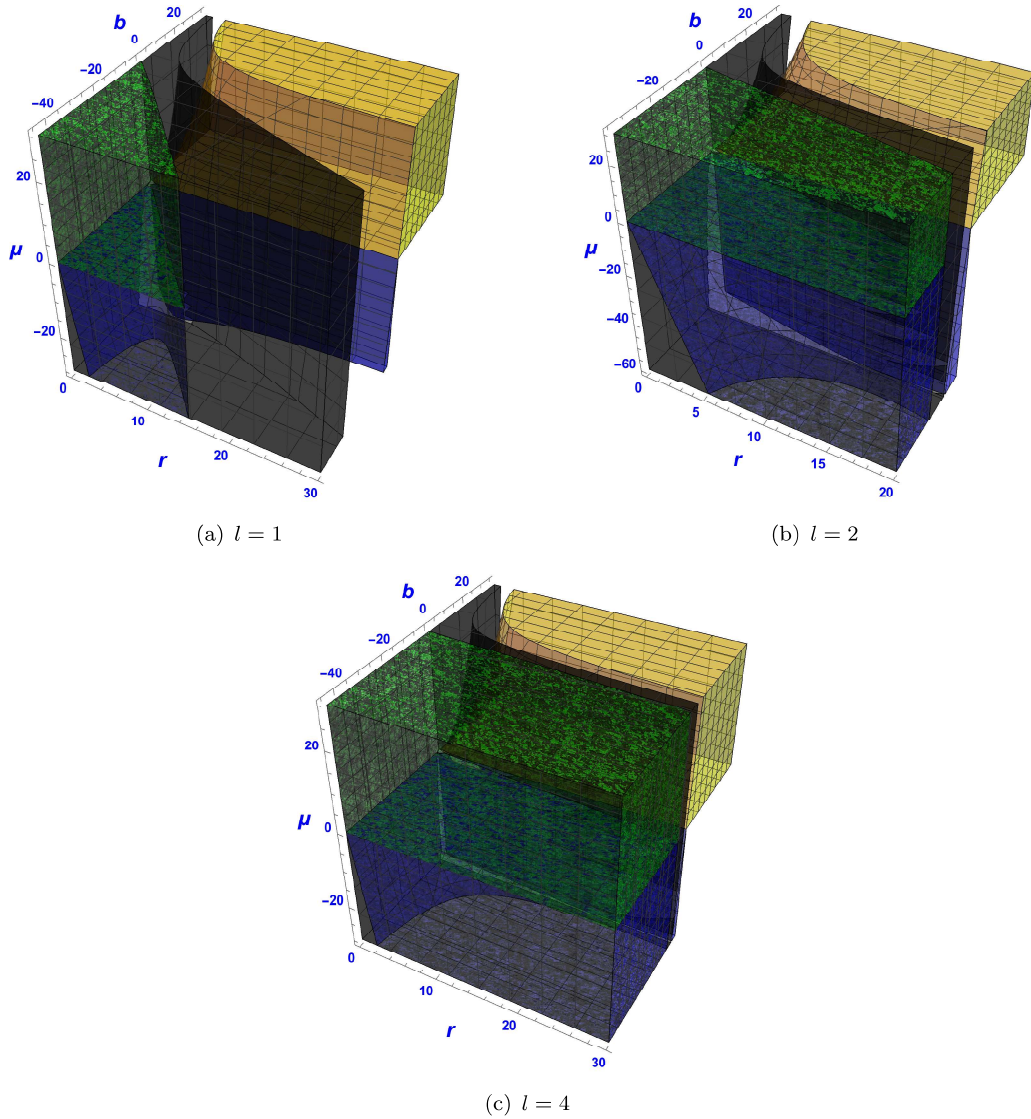


FIGURA 3.3: Regiones de estabilidad para geodésicas temporales circulares con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ , b y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $l = 1, 2, 4$. En amarillo el caso $b > 0$, en verde $b < 0$ y $\mu > 0$, en azul $b < 0$ y $\mu < 0$. En color negro se representa la región que está dentro del horizonte de sucesos r_+ .

la cual no se cumple para ningún conjunto de valores de los parámetros, ya que el último término a la derecha cuadrático en r es negativo y crece más rápido que el término de la mitad. Además, del término cúbico en b también domina la expresión haciendo que siempre sea negativa.

En la Figura 3.2, del mismo modo que hemos hecho para observar la región de estabilidad para los demás casos, mostramos con los colores verde y azul los casos de, $\mu > 0$ y $\mu < 0$ respectivamente. Además, en la Figura 3.6, tomamos varios de b , y tenemos regiones estables en función de l , μ y r . En las Figuras 3.3 y 3.7, como en los casos anteriores, se muestra en negro la región que está dentro del horizonte de sucesos r_+ .

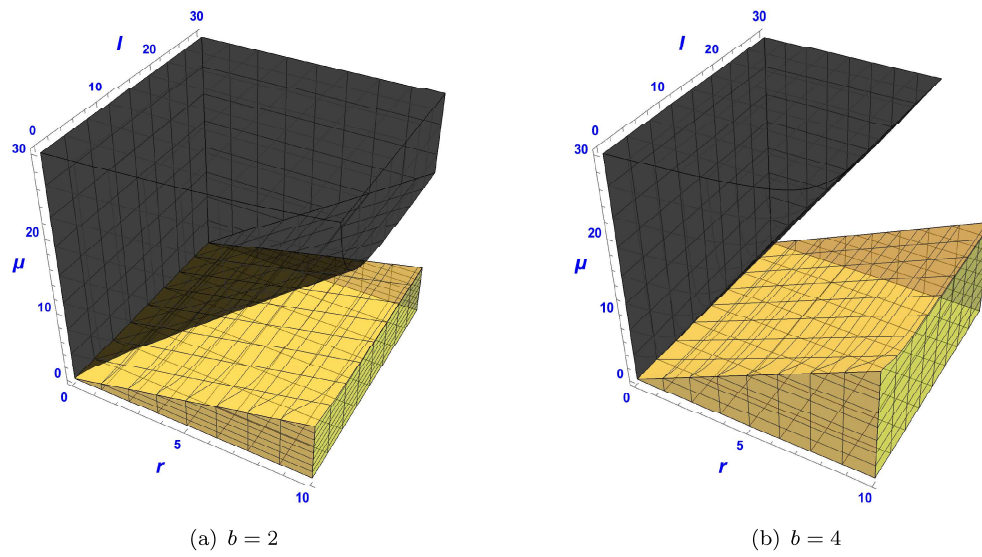


FIGURA 3.4: En color amarillo se muestra las regiones de estabilidad de geodésicas temporales circulares con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ , l y el radio r en el caso $b > 0$, según la desigualdad (3.49), para $b = 2, 4$. En color negro la región dentro del horizonte de sucesos r_+ .

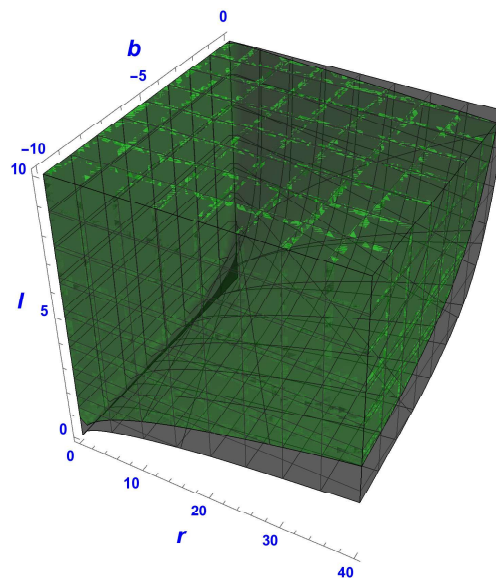


FIGURA 3.5: En verde la región de estabilidad de geodésicas circulares temporales con $\Lambda < 0$, para $b < 0$ cuando $\mu = 0$ y en negro la región para la cual $r < r_+$.

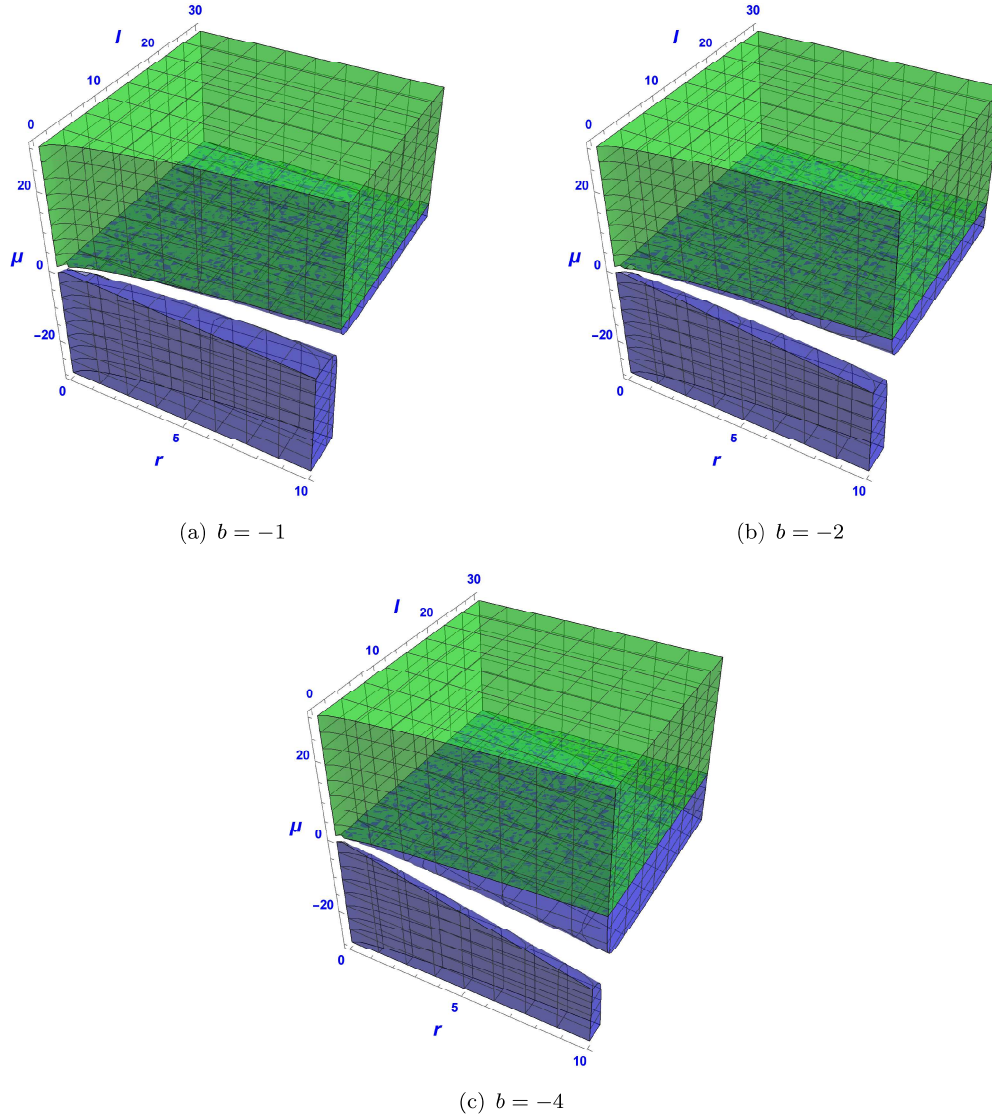


FIGURA 3.6: Regiones de estabilidad para geodésicas circulares temporales con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ , l y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $b = -1, -2, -4$. En verde $\mu > 0$ y en azul $\mu < 0$.

En el caso de geodésicas nulas, el radio r_c es,

$$r_c = \frac{2\mu}{b}. \quad (3.52)$$

Para que r_c este fuera del horizonte de sucesos, se debe cumplir que

$$b^2 l^2 - \sqrt{b^2 l^2 + 4\mu b l} + 4\mu > 0. \quad (3.53)$$

Así, se tiene para geodésicas nulas,

$$V_r''(r_c) = \frac{L^2 b^4}{8\mu^3}, \quad (3.54)$$

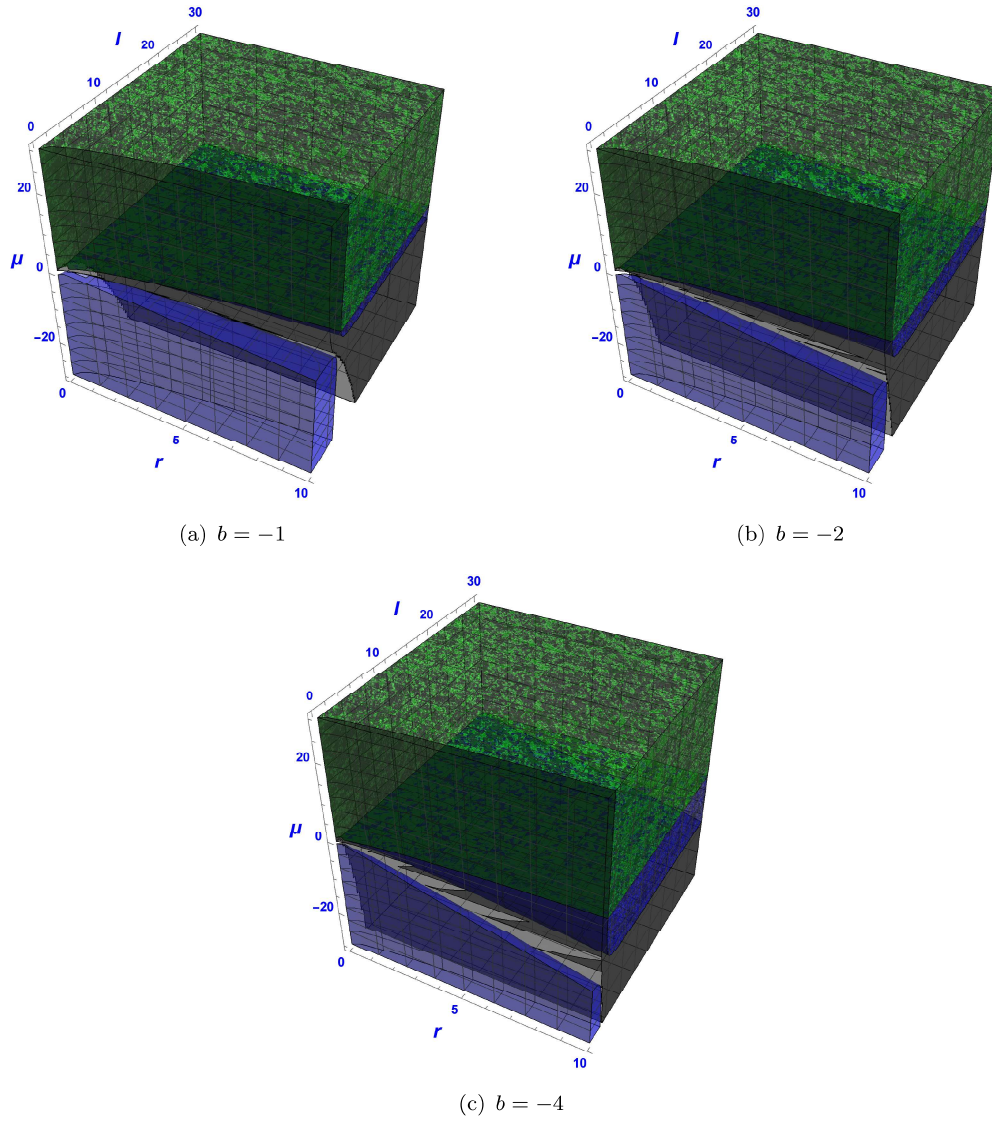


FIGURA 3.7: Regiones de estabilidad para geodésicas circulares temporales con $\Lambda < 0$, en función de los parámetros μ , l y el radio r , según la desigualdad (3.49), para $b = -1, -2, -4$. En verde $\mu > 0$ y en azul $\mu < 0$. En negro se sobrepone la región que se encuentra dentro del horizonte de sucesos r_+ .

y para el exponente de Lyapunov,

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu + \frac{4\mu^2}{b^2 l^2}}{\mu}} |b|. \quad (3.55)$$

Para órbitas estables nulas se debe cumplir que:

$$\mu < 0, \quad (3.56)$$

$$b^2 l^2 + 4\mu > 0. \quad (3.57)$$

De las dos últimas expresiones se puede ver que las geodésicas nulas circulares estables

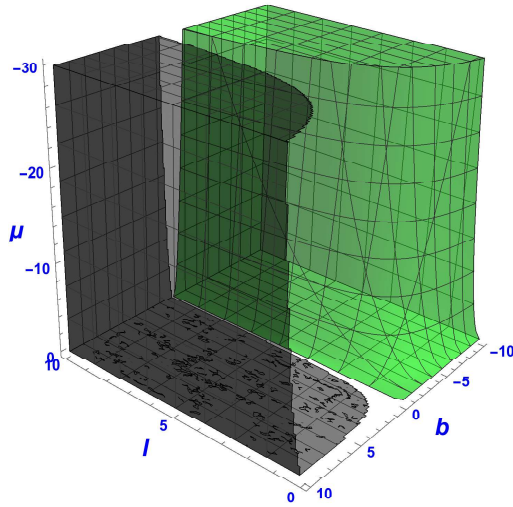


FIGURA 3.8: En verde se muestra la región de estabilidad para geodésicas nulas circulares con $\Lambda < 0$ y en negro la región que cumple con la condición de estar dentro del horizonte de sucesos r_+ .

caen en el caso $\mu < 0$ (por lo tanto $b < 0$). La región de estabilidad se puede ver en la Figura 3.8. Por lo tanto en el caso $b > 0$ no existen órbitas estables. Además, en la Figura 3.8 se muestra en negro la región que está dentro de r_+ , observamos que se encuentra fuera de la región estable.

Para el caso extremo $\mu = -\frac{1}{4}b^2l^2$, reemplazando este valor en el exponente de Lyapunov (3.55), se tiene que $\lambda = 0$.

3.3.3. Constante cosmológica $\Lambda > 0$

Para la constante cosmológica positiva, $\Lambda \equiv \frac{1}{l^2}$, la solución (3.12) de las ecuaciones de campo BHT es

$$ds^2 = - \left(-\frac{r^2}{l^2} + br - \mu \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-\frac{r^2}{l^2} + br - \mu} + r^2 d\phi^2 . \quad (3.58)$$

Así para el análisis con exponentes de Lyapunov se tiene en este caso

$$f(r) = g(r) = br - \mu - \frac{r^2}{l^2} . \quad (3.59)$$

Reemplazando estas funciones en (3.29) y (3.30) se tiene

$$\left(b - \frac{2r}{l^2}\right)r - 2br + 2\mu + \frac{2r^2}{l^2} < 0 \quad (3.60)$$

$$V_r''(r) = -\frac{2\left(2\left(b - \frac{2r}{l^2}\right)^2 - \frac{3\left(br - \mu - \frac{r^2}{l^2}\right)\left(b - \frac{2r}{l^2}\right)}{r} + \frac{2\left(br - \mu - \frac{r^2}{l^2}\right)}{l^2}\right)}{\left(b - \frac{2r}{l^2}\right)r - 2br + 2\mu + \frac{2r^2}{l^2}}. \quad (3.61)$$

Entonces, del mismo modo que en los anteriores casos, llegamos a la condición de estabilidad de las geodésicas temporales:

$$b^2l^2r - 3bl^2\mu - 3br^2 + 8r\mu > 0. \quad (3.62)$$

Para este caso los parámetros siempre son positivos y μ tiene una cota superior, $0 < \mu \leq \frac{1}{4}b^2l^2$, con $b > 0$.

Analizando el caso extremo $\mu = \frac{1}{4}b^2l^2$, se tiene que la desigualdad general (3.62) se convierte en

$$-\frac{3}{4}b^3l^4 + 3b^2l^2r - 3br^2 > 0. \quad (3.63)$$

Esta desigualdad no se cumple para ningún valor de los parámetros, por las mismas razones que la desigualdad (3.51) tampoco se cumple en ningún caso.

Para el caso general descrito por la desigualdad (3.62) podemos ver las regiones de estabilidad en función de r , b y μ para l fijos en la Figura 3.9, y en función de r , b y l para μ fijos en la Figura 3.10. En este caso de las Figuras 3.9 y 3.10, donde en negro se muestra la región que yace dentro del horizonte de sucesos r_+ , se puede ver que la región de inestabilidad siempre se encuentra fuera de r_+ .

Para geodésicas nulas, el radio r_c es,

$$r_c = \frac{2\mu}{b}, \quad (3.64)$$

y para que este radio este fuera del horizonte de sucesos r_+ , tenemos que,

$$-b^2l^2 + bl\sqrt{b^2l^2 - 4\mu} + 4\mu > 0. \quad (3.65)$$

Así, para geodésicas nulas, se tiene,

$$V_r''(r_c) = \frac{L^2b^4}{8\mu^3}, \quad (3.66)$$

y para el exponente de Lyapunov,

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu - \frac{4\mu^2}{b^2l^2}}{\mu}}. \quad (3.67)$$

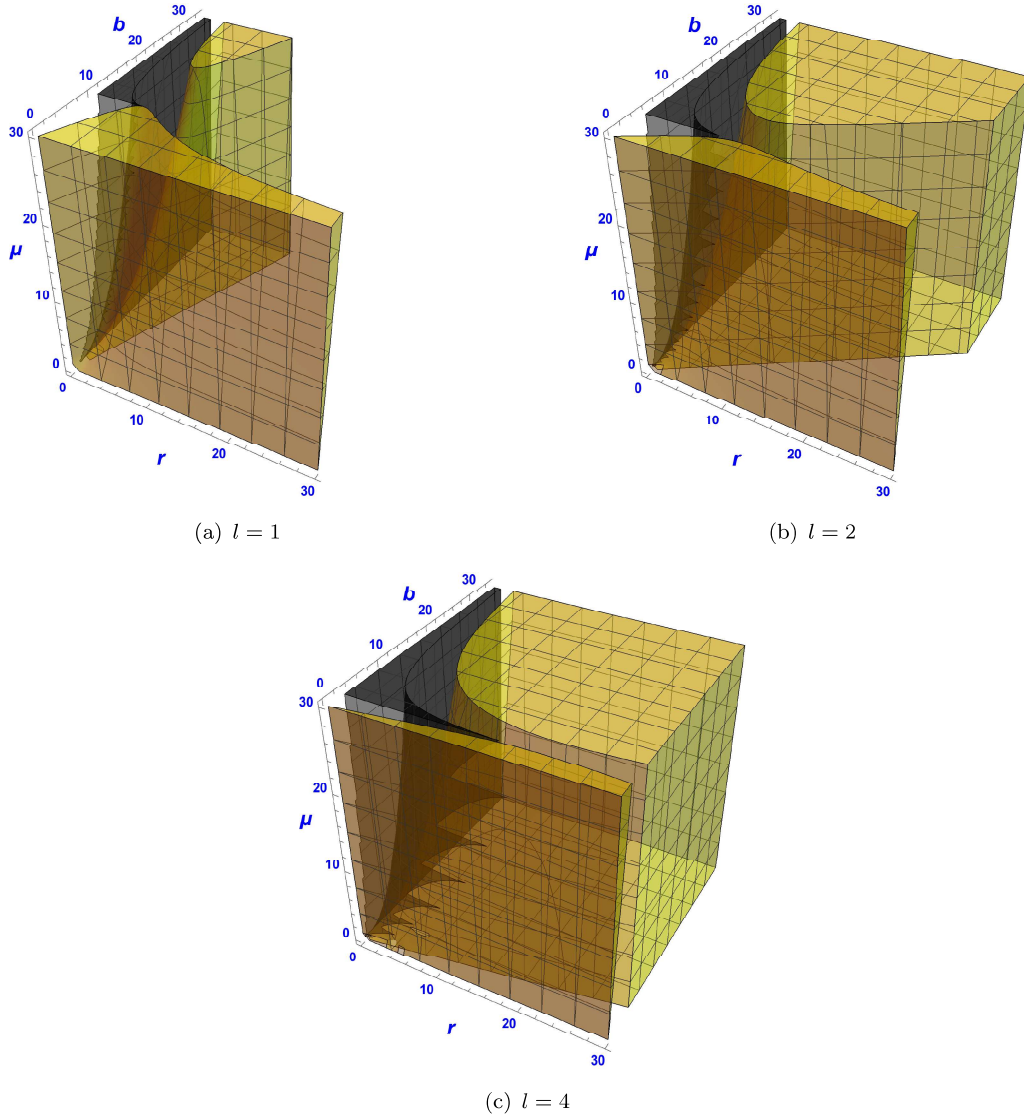


FIGURA 3.9: En amarillo se muestra las regiones de estabilidad en función de los parámetros μ , b y el radio r , para geodésicas temporales circulares con $\Lambda > 0$, según la desigualdad (3.62), para $l = 1, 2, 4$. Además en negro se representa las regiones que están dentro del horizonte de sucesos r_+ .

Entonces si se quiere geodésicas nulas estables, debe cumplirse,

$$-b^2 l^2 + 4\mu > 0. \quad (3.68)$$

Esta región de estabilidad se muestra en la Figura 3.11. Además, la Figura 3.11 muestra en negro la región dentro del horizonte de sucesos r_+ que cumple con (3.65). Se puede ver que la región de estabilidad siempre está fuera de este horizonte de sucesos.

Para el caso extremo $\mu = \frac{1}{4}b^2 l^2$, reemplazando este valor en (3.68), resulta que $\lambda = 0$.

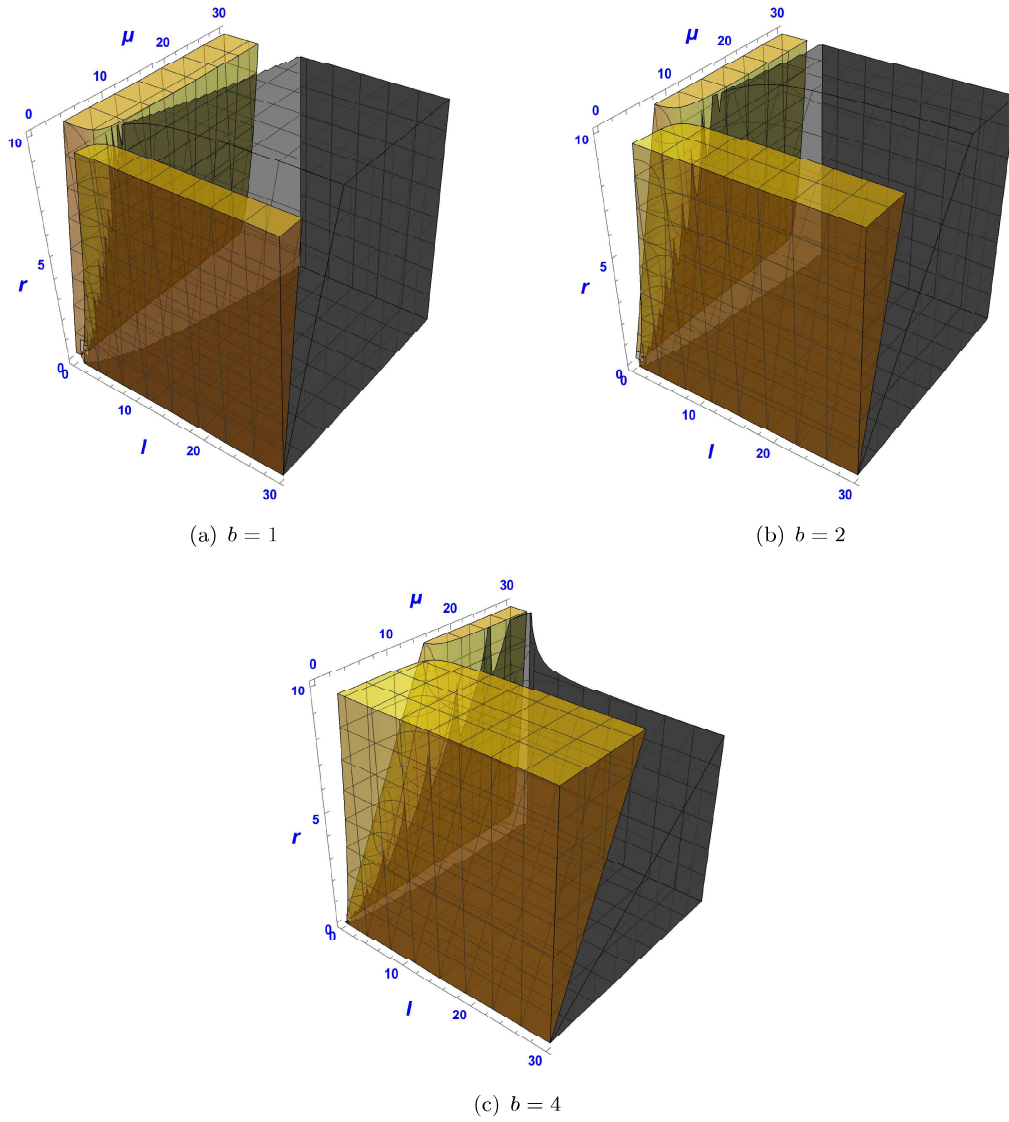


FIGURA 3.10: En amarillo se muestran las regiones de estabilidad para geodésicas temporales circulares con $\Lambda > 0$, en función de los parámetros μ , l y el radio r según la desigualdad (3.62), para $b = 1, 2, 4$. En negro la región dentro del horizonte de sucesos r_+ .

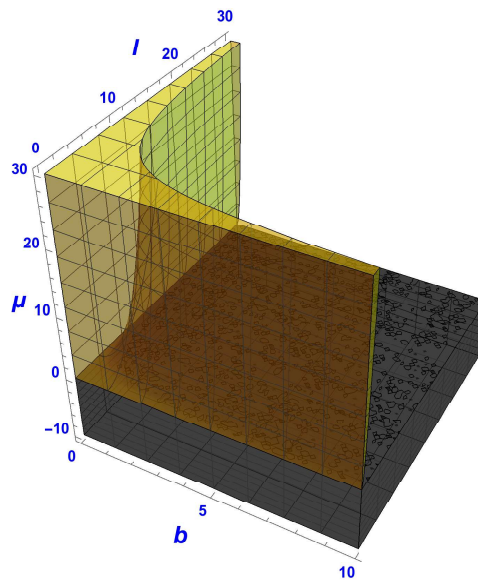


FIGURA 3.11: Región de estabilidad para geodésicas nulas circulares con $\Lambda > 0$ en amarillo y la región que se encuentra dentro del horizonte de sucesos r_+ en negro.

Capítulo 4

Conclusiones

En este proyecto de titulación se han revisado aspectos importantes de la Relatividad General y sus extensiones en espacio-tiempos de dimensión tres. Se calculó específicamente conjuntos de estabilidad para los parámetros de soluciones en BHT de agujeros negros, para geodésicas circulares temporales y nulas.

Mediante el análisis de la estabilidad de exponentes de Lyapunov se determinó desigualdades en función de las constantes de integración μ , b , la constante cosmológica Λ y el radio de las órbitas circulares r (Cuadro 4.1). Para cada solución, dependiendo del signo de Λ , se analizaron los diferentes casos existentes. En cada caso de la constante cosmológica (nula, positiva o negativa) según los posibles rangos de los parámetros b y μ se muestran las distintas regiones de estabilidad (Figuras: 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11).

	$\Lambda = 0$	$\Lambda < 0$	$\Lambda > 0$
Temp.	$br - 2\mu > 0$	$b^2l^2r - 3bl^2\mu + 3br^2 - 8r\mu > 0$	$b^2l^2r - 3bl^2\mu - 3br^2 + 8r\mu > 0$
Nulas	X	$\mu < 0; \quad b^2l^2 + 4\mu > 0$	$-b^2l^2 + 4\mu > 0$

CUADRO 4.1: Condiciones para la estabilidad de geodésicas circulares para agujeros negros en BHT para los distintos casos de Λ , en función de los parámetros l , μ , b y el radio r .

De los resultados obtenidos, se puede observar algunos comportamientos de las regiones de estabilidad de las geodésicas temporales en función de b y la longitud característica l ¹.

- $\Lambda < 0$ (Figura 3.2):

- Si l crece, la región de estabilidad crece.

- Si $b < 0$, mientras b es más negativo, la brecha entre los dos espacios de estabilidad para $\mu < 0$ se va trasladando de tal forma, que las fronteras de estabilidad tienen pendientes más negativas en el plano $\mu - r$.

- $\Lambda > 0$:

¹Recordemos que $\Lambda = \pm \frac{1}{l^2}$, según el signo de la constante cosmológica.

·Si l aumenta, la región de estabilidad aumenta y la brecha se hace más pequeña entre las dos regiones de estabilidad (Figura 3.9).

·Si b crece, la región de estabilidad que tiene como límite el plano $\mu = 0$ crece y la que limita con el plano $l = 0$ decrece (Figura 3.10).

También se puede observar en algunos gráficos, que entre los espacios de estabilidad existen brechas en las cuales no existen órbitas estables. Estas brechas dividen claramente las regiones de estabilidad.

Se encontró los casos en los cuales las geodésicas circulares no son estables (Cuadro 4.2). En el caso de $\Lambda = 0$, las geodésicas nulas no son estables en ningún caso. Para $\Lambda < 0$, existen geodésicas inestables temporales en el caso extremo de $\mu = -\frac{1}{4}b^2l^2$ cuando $b < 0$. Además, las geodésicas nulas son inestables para $\mu > 0$ cuando $b > 0$ y también en el caso extremo de $\mu = -\frac{1}{4}b^2l^2$. Cuando $\Lambda > 0$, el caso extremo de $\mu = \frac{1}{4}b^2l^2$ es inestable para las geodésicas, sean circulares o temporales. Estas regiones inestables son algunas de las brechas que se observa entre las regiones estables en los distintos casos estudiados.

$\Lambda = 0$	geodésicas nulas
$\Lambda < 0$	$\mu = -\frac{1}{4}b^2l^2$
	geodésicas nulas con $b > 0$ y $\mu > 0$
$\Lambda > 0$	$\mu = \frac{1}{4}b^2l^2$

CUADRO 4.2: Condiciones en las cuales las geodésicas circulares dejan de ser estables.

Se puede también observar, el comportamiento del radio de las geodésicas circulares, en función de μ y b en las soluciones de agujeros negros para los diferentes casos.

■ $\Lambda = 0$ (Figura 3.1):

·Si $b = \text{const}$, mientras el radio de la geodésica estable aumenta, la cota superior de la masa aumenta.

·Si $\mu = \text{const}$, mientras r decrece la cota inferior de b , para órbitas estables decrece.

■ $\Lambda < 0$ y $b > 0$:

·Si $l = \text{const}$ (Figura 3.2):

Para μ fijo, si r para geodésicas estables decrece, la cota inferior de b disminuye.

Para b fijo, si r estable aumenta, la cota superior de μ aumenta.

·Si $b = \text{const}$ (Figura 3.4):

Si la masa esta fija, r no depende de l .

Si l es constante, mientras el radio de la geodésica estable crece la cota superior de μ también crece.

- $\Lambda < 0$ y $b < 0$:

- Si $\mu = 0$ (Figura 3.5):

Si l es fijo, entonces mientras b decrece la cota superior de r crece.

Si b es constante, mientras l aumenta la cota superior de r también aumenta.

- Si $l = \text{const}$ (Figura 3.2):

Cuando $\mu > 0$, r no depende de b .

Cuando $\mu < 0$, se tienen dos regiones de estabilidad que se muestran en la Figura 3.2 en azul.

- Si $b = \text{const}$ (Figura 3.6):

Para $\mu > 0$, mientras l decrece el límite superior de r también decrece.

Para $\mu < 0$ se tiene dos regiones que se muestran en azul en la Figura 3.6.

- Nulas ($\mu < 0$) (Figura 3.8) :

Cuando se fija l , tenemos que mientras b se hace más negativo la cota inferior de μ decrece.

Para b fijo, si l crece la cota inferior de μ decrece.

- $\Lambda > 0$:

- Si $b = \text{const}$ o $l = \text{const}$, se tienen dos regiones de estabilidad mostradas en las Figuras 3.9 y 3.10, respectivamente.

- En el caso de las geodésicas nulas (Figura 3.11), fijando μ se tiene que l no depende de b .

Cuando se exige que las órbitas estables estén más allá de los respectivos horizontes de sucesos de las soluciones de agujero negro, se tiene varios casos donde la región de estabilidad es la misma o es menor, ya que parte de las órbitas estables se encuentran dentro de los horizontes de sucesos (Figuras: 3.3, 3.4, 3.5, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11).

Para $\Lambda = 0$ (Figura 3.1) y $\Lambda > 0$ (Figuras: 3.9, 3.10 y 3.11), todas las regiones de estabilidad están fuera del horizonte de sucesos, así que el conjunto de parámetros estables no sufre ningún cambio cuando imponemos la condición de estar fuera del horizonte de sucesos.

En el caso de $\Lambda < 0$ (Figura 3.3), tenemos los siguientes casos:

- Cuando l esta fijo, las órbitas estables que quedan fuera del horizonte de sucesos son: la región con $b > 0$ y una de las regiones estables para el caso $b < 0$ con $\mu < 0$.
- Si b se mantiene constante y es mayor que cero (Figura 3.4), todas las órbitas estables están fuera del horizonte de sucesos.
- Cuando $b < 0$ y $\mu = 0$, todas las órbitas estables están dentro del horizonte de sucesos (Figura 3.5), por lo que no quedan geodésicas estables en este caso.

- Si $b < 0$, para valores constantes de b (Figura 3.7), las geodésicas con $\mu > 0$ están siempre dentro del horizonte de sucesos y se tiene que para $\mu < 0$ sólo una de las dos regiones de estabilidad queda fuera del horizonte de sucesos.
- Para órbitas nulas (Figura 3.8), toda la región de estabilidad se encuentra fuera del horizonte de sucesos.

Discusión final

El método usado es independiente de las ecuaciones de campo y sólo asume un elemento de línea estacionario y esféricamente simétrico. La misma metodología se puede aplicar en otro tipo de problemas que tengan un espacio de fase bidimensional. En el caso de las soluciones de BHT analizadas en este trabajo, se podría dotar a las soluciones de un parámetro adicional conectado con un posible momento angular de los agujeros negros y realizar el análisis de estabilidad en las nuevas soluciones. En dimensiones mayores que tres para aplicar el esquema se puede restringir el problema al plano ecuatorial, siempre y cuando el espacio sea estacionario.

Al final, el trabajo de titulación además de contribuir con los resultados de las desigualdades para las estabilidades de órbitas circulares en BHT, sirve como un recuento rápido de algunos de los puntos más relevantes de la RG y una breve introducción a teorías más allá de la RG, en el sentido de modificaciones del funcional de EH en tres dimensiones. El presente texto resulta muy útil como punto de partida para el estudio de la gravedad más allá del punto de vista geométrico, es decir desde el punto de vista de una teoría de campos semi-clásica.

Apéndice A

Algunos Tensores de la RG

Se muestran en el Cuadro A.1 el número de componentes independientes para los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ y la curvatura escalar en función de la dimensión del espacio-tiempo.

Como las contracciones de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ llevan a resultados distintos de cero en términos de $R_{\alpha\beta}$ y R , esto sugiere la posibilidad de que uno pueda restar de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ un tensor de cuarto rango adecuado construido a partir de $R_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ y R para que el tensor resultante tenga traza cero en todos los índices; es decir, la contracción en cualquiera de los dos índices de dicho tensor dará cero. Este tensor se denomina el tensor de Weyl, y se define como:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{2}{D-2} (g_{\alpha[\gamma} R_{\delta]\beta} - g_{\beta[\gamma} R_{\delta]\alpha}) + \frac{2}{(D-1)(D-2)} R g_{\alpha[\gamma} g_{\delta]\beta}. \quad (\text{A.1})$$

En relatividad, el tensor de Weyl describe la parte del campo gravitatorio que se propaga en el vacío y es detectable fuera de las fuentes, las ondas gravitacionales, entre otras cosas. Además, tensor de Weyl tiene una propiedad útil, bajo una transformación conforme $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}$, satisface,

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \Omega^2(x)C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (\text{A.2})$$

mientras que $C^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ es conformemente invariante en cualquier dimensión D . De esto se deduce que el tensor de Weyl se desvanece en cualquier espacio-tiempo que es conformemente plano. Por lo tanto, en cualquier espacio-tiempo conformemente plano con una métrica de la forma

Número de componentes independientes	Dimensión				
	D	4	3	2	1
$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$\frac{D^2(D^2-1)}{12}$	20	6	1	0
$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$\frac{D(D+2)(D+1)(D-3)}{12}$	10	0	0	0
$R_{\alpha\beta}$	$\frac{D(D+1)}{2}$, para $D > 2$	10	6	1	0
$G_{\alpha\beta}$	$\frac{D(D+1)}{2}$, para $D > 2$	10	6	0	0
R	1, para $D > 1$	1	1	1	0

CUADRO A.1: Componentes independientes de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ y R .

$g_{\mu\nu} = f^2(x)\eta_{\mu\nu}$, el tensor de curvatura se puede expresar completamente en términos de $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ y R . Lo contrario también es cierto para todos los espacios-tiempos con $D > 3$; es decir, en cuatro y más dimensiones, la desaparición del tensor de Weyl garantiza que el espacio-tiempo sea conformemente plano. La situación es especial para $D = 2, 3$. Todos los espacios con $D = 2$ son conformemente planos [5] y, por tanto, el tensor de Weyl no está definido para $D = 2$. En $D = 3$ el tensor de Weyl es cero, pero todos los espacios tridimensionales no son conformes planos [50].

En cuatro dimensiones el tensor de Riemann tiene 20 componentes, el tensor de Weyl y Ricci tienen 10 componentes independientes cada uno, por lo tanto el tensor de Riemann se puede construir a partir del tensor de Weyl y Ricci.

En tres dimensiones el tensor de Riemann y el tensor de Ricci tienen las mismas componentes independientes, que son 10, esto es consecuencia que el tensor de Weyl es cero en tres dimensiones. Por lo tanto, como se mostró en el capítulo 1, una de las diferencias más importantes de la RG al pasar de cuatro a tres dimensiones es que, en tres dimensiones los grados de libertad de la RG en el vacío no existen.

En dos dimensiones el tensor de Riemann y la curvatura escalar tienen una sola componente. Entonces ambos el tensor de Riemann y el tensor de Ricci pueden ser expresados en términos de la curvatura escalar[6]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}R(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) \quad (\text{A.3})$$

y

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.4})$$

como consecuencia de la ecuación (A.4), el tensor de Einstein se desvanece en dos dimensiones. Para $D = 1$ todos los tensores mencionados son nulos.

Apéndice B

Estabilidad de Lyapunov

B.1. Definiciones básicas

En esta sección revisaremos las herramientas de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Estas herramientas se usan para definir estabilidades en sistemas dinámicos. Presentamos aquí un resumen de los resultados sin ninguna demostración. El lector interesado debe consultar un texto estándar, como Vidyasagar [51] o Khalil [52], para más detalles.

Consideremos un sistema dinámico que satisface

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.1})$$

Supondremos que $f(x, t)$ cumple las condiciones estándar para la existencia y la unicidad de las soluciones. Intuitivamente y de manera un tanto cruda, decimos que un punto de equilibrio es localmente estable si todas las soluciones que comienzan cerca de x^* (lo que significa que las condiciones iniciales están en una vecindad de x^*) permanecen cerca de x^* para todos t . Se dice que el punto de equilibrio x^* es localmente asintóticamente estable si x^* es localmente estable y, además, todas las soluciones que comienzan cerca de x^* tienden hacia x^* como $t \rightarrow \infty$. Así, es intuitivo que un péndulo tiene un punto de equilibrio localmente estable cuando el péndulo cuelga hacia abajo y un punto de equilibrio inestable cuando está apuntando hacia arriba. Si el péndulo está amortiguado, el punto de equilibrio estable es asintóticamente localmente estable.

Al cambiar el origen del sistema, podemos suponer que el punto de interés de equilibrio ocurre en $x^* = 0$. Si existen múltiples puntos de equilibrio, tendremos que estudiar la estabilidad de cada uno de ellos cambiando el origen de manera apropiada.

El punto de equilibrio $x^* = 0$ de (B.1) es *estable* (en el sentido de Lyapunov) en $t = t_0$ si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una función $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tal que,

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{B.2})$$

La estabilidad de Lyapunov es un requisito muy débil en los puntos de equilibrio. En particular, no requiere que las trayectorias que comienzan cerca del origen tiendan asintóticamente al origen. Además, la estabilidad se define en un instante t_0 . La estabilidad uniforme es un concepto que garantiza que el punto de equilibrio no está perdiendo estabilidad. Insistimos en que para que un punto de equilibrio x^* sea uniformemente estable, δ en (B.2) no debe ser una función de t_0 , por lo que la ecuación (B.2) puede ser válida para todos t_0 . La estabilidad asintótica se precisa en la siguiente definición: un punto de equilibrio $x^* = 0$ de (B.1) es *asintóticamente estable* en $t = t_0$ si,

1. $x^* = 0$ es estable, y
2. $x^* = 0$ es localmente atractor; es decir, existe $\delta(t_0)$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Como en la definición previa, la estabilidad asintótica se define en t_0 . *Estabilidad asintóticamente uniforme* requiere:

1. $x^* = 0$ es uniformemente estable, y
2. $x^* = 0$ es localmente uniforme atractor; es decir, existe δ independiente de t_0 para la cual la ecuación (B.3) se cumple. Además, se requiere que la convergencia en la ecuación (B.3) sea uniforme¹.

Finalmente, decimos que un punto de equilibrio es inestable si no es estable.

Las definiciones dadas son definiciones locales; describen el comportamiento de un sistema cerca de un punto de equilibrio. Decimos que un punto de equilibrio x^* es globalmente estable si es estable para todas las condiciones iniciales $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La estabilidad global es muy deseable, pero en muchas aplicaciones puede ser difícil de lograr.

Las nociones de uniformidad sólo son importantes para los sistemas que varían con el tiempo. Por lo tanto, para sistemas invariantes en el tiempo, la estabilidad implica una estabilidad uniforme, y la estabilidad asintótica implica una estabilidad asintótica uniforme. Es importante tener en cuenta que las definiciones de estabilidad asintótica no cuantifican la tasa de convergencia.

¹Supongamos E un conjunto y $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ (para $n = 1, 2, 2, \dots$) son funciones reales. Se dice que la secuencia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E con límite $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ y $x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ [53].

B.2. El método indirecto de Lyapunov

El método indirecto de Lyapunov utiliza la linealización de un sistema para determinar la estabilidad local del sistema original. Consideremos el sistema,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (\text{B.4})$$

con $f(0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Definimos,

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (\text{B.5})$$

como la matriz Jacobiana de $f(x, t)$ con respecto a x , evaluada en el origen. De esto sigue que para cada t fijo, el residuo,

$$f_1(x, t) = f(x, t) - A(t)x, \quad (\text{B.6})$$

se aproxima a cero cuando x se aproxima a cero. Sin embargo, este residuo puede no aproximarse a cero uniformemente. Para que esto sea cierto, se requiere una condición más fuerte,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(x, t)\|}{\|x\|} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Si la ecuación (B.7) se cumple, entonces el sistema

$$\dot{z} = A(t)z \quad (\text{B.8})$$

se conoce como la linealización (uniforme) de la ecuación (B.1) sobre el origen. Cuando existe la linealización, su estabilidad determina la estabilidad local de la ecuación no lineal original. Entonces tenemos el siguiente teorema :

Consideres el sistema (B.4) y asumiendo que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(x, t)\|}{\|x\|} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Además, sea A definida en la ecuación (B.5) acotada. Si 0 es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable de (B.8), entonces es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable de (B.4).

El teorema anterior requiere una estabilidad asintótica uniforme del sistema linealizado para demostrar una estabilidad asintótica uniforme del sistema no lineal. Existen contraejemplos del teorema si el sistema linealizado no es uniformemente asintóticamente estable [54].

Si el sistema (B.4) es invariante en el tiempo, entonces el método indirecto dice que si los valores propios de $A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$ están en el medio plano complejo izquierdo abierto, entonces el origen es asintóticamente estable. Este teorema demuestra que la estabilidad asintótica uniforme global de la linealización implica una estabilidad asintótica uniforme local del sistema no lineal original.

B.3. Exponentes de Lyapunov

El análisis de estabilidad de geodésicas en términos de los exponentes de Lyapunov, comienza con las ecuaciones de movimiento escritas como algún conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para las variables de espacio de fase $X_i(t)$:

$$\frac{dX_i}{dt} = H_i(X_j), \quad (\text{B.10})$$

y linealizadas sobre una determinada órbita:

$$\frac{d\delta X_i(t)}{dt} = K_{ij}(t) \delta X_j(t). \quad (\text{B.11})$$

Donde

$$K_{ij}(t) = \left. \frac{\partial H_i}{\partial X_j} \right|_{X_i(t)}, \quad (\text{B.12})$$

es la matriz de estabilidad lineal [55]. La solución a las ecuaciones linealizadas se puede escribir como,

$$\delta X_i(t) = L_{ij}(t) \delta X_j(0), \quad (\text{B.13})$$

donde L_{ij} cumple,

$$\dot{L}_{ij}(t) = K_{im} L_{mj}(t). \quad (\text{B.14})$$

Llamamos a L matriz evolutiva, y cumple $L_{ij}(0) = \delta_{ij}$. La matriz de estabilidad lineal es diagonal en la base de vectores propios:

$$K_{ij}(t) = \delta_{ij} \lambda_i(t), \quad (\text{B.15})$$

sin suma en el índice i , donde los $\lambda_i(t)$ son los valores propios de $K_{ij}(t)$. La matriz de evolución también es diagonal en la base de valores propios y tiene componentes [56]:

$$L_{ij}(t) = \delta_{ij} \exp\left(\int_0^t \lambda_i(t') dt'\right). \quad (\text{B.16})$$

Una determinación de los valores propios de L_{ij} conduce al principal exponente de Lyapunov λ , que es la cantidad en la que nos enfocamos. El principal exponente de Lyapunov, o

simplemente exponente de Lyapunov, para la trayectoria se define como:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{L_{jj}(t)}{L_{jj}(0)} \right). \quad (\text{B.17})$$

Lyapunov demostró que si el sistema linealizado es regular² y su exponente de Lyapunov es negativo, entonces la solución del sistema original es asintóticamente estable. Las trayectorias con exponentes positivos de Lyapunov son inestables frente a pequeñas perturbaciones. Cuando las órbitas inestables tienen una medida distinta de cero en el espacio de fase, se dice que el sistema es caótico. Un exponente principal positivo de Lyapunov dominará la dinámica a largo plazo. Estableciendo λ_1 como el primer valor propio, la forma asintótica de la matriz de evolución se puede escribir:

$$L_{ij}(t) \simeq e^{\lambda t} \begin{bmatrix} f(t) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

donde $|f(t)| = 1$, si $X_1(t)$ es real entonces $f(t) = 1$.

²Todos los sistemas con coeficientes periódicos y constantes son regulares [54].

Bibliografía

- [1] Julio Oliva, David Tempo, and Ricardo Troncoso. Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for bht massive gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2009(07):011, 2009.
- [2] Vitor Cardoso, Alex S Miranda, Emanuele Berti, Helvi Witek, and Vilson T Zanchin. Geodesic stability, lyapunov exponents, and quasinormal modes. *Physical Review D*, 79(6):064016, 2009.
- [3] Norbert Straumann. The history of the cosmological constant problem. *arXiv preprint gr-qc/0208027*, 2002.
- [4] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870328. URL <https://books.google.com.ec/books?id=ibSdQgAACAAJ>.
- [5] T. Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139485395. URL <https://books.google.com.ec/books?id=BSfe2MjbQ3gC>.
- [6] J.V. Narlikar. *Lectures on General Relativity and Cosmology*, pages 66–68. Springer Customer Service Center GmbH, 2013. ISBN 9781349039692. URL <https://books.google.com.ec/books?id=-SJpjwEACAAJ>.
- [7] A. N. Lasenby, E. M. Waldram, Guy Pooley, Keith Grainge, M. P. Hobson, Michael E. Jones, P. F. Scott, R. Kneissl, Richard Saunders, Joanne C. Baker, C. M. M. O’Sullivan, and G. Rocha. Detection of cosmic microwave background structure in a second field with the Cosmic Anisotropy Telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308(4):1173–1178, 10 1999. ISSN 0035-8711. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02829.x. URL <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1999.02829.x>.
- [8] Yvonne Choquet-Bruhat. *Introduction to general relativity, black holes, and cosmology*. OUP Oxford, 2014.
- [9] Joseph H Taylor and Joel M Weisberg. A new test of general relativity-gravitational radiation and the binary pulsar psr 1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, 253:908–920, 1982.

-
- [10] Russell A Hulse and Joseph H Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, 195:L51–L53, 1975.
- [11] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, F Acernese, K Ackley, C Adams, T Adams, P Addresso, Rana X Adhikari, et al. Improved analysis of gw150914 using a fully spin-precessing waveform model. *Physical Review X*, 6(4):041014, 2016.
- [12] J Abadie, BP Abbott, R Abbott, T Accadia, F Acernese, R Adhikari, P Ajith, B Allen, G Allen, E Amador Ceron, et al. All-sky search for gravitational-wave bursts in the first joint ligo-geo-virgo run. *Physical Review D*, 81(10):102001, 2010.
- [13] M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2004. ISBN 9780191036996. URL <https://books.google.com.ec/books?id=aIdgAwAAQBAJ>.
- [14] Sebastian Garcia-Saenz. *Massive, massless, and partially massless spin-2 fields*. PhD thesis, Columbia University, 2016.
- [15] Gianluca Gemelli. Second-order covariant tensor decomposition in curved spacetime. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 3(3):195–216, 2000.
- [16] Richard P Woodard. The theorem of ostrogradsky. *arXiv preprint arXiv:1506.02210*, 2015.
- [17] Stanley Deser. Self-interaction and gauge invariance. *General Relativity and gravitation*, 1(1):9–18, 1970.
- [18] Cédric Troessaert, David Tempo, and Ricardo Troncoso. Asymptotically flat black holes and gravitational waves in three-dimensional massive gravity. *arXiv preprint arXiv:1512.09046*, 2015.
- [19] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849, 1992.
- [20] Pavel Grinfeld. *Introduction to tensor analysis and the calculus of moving surfaces*. Springer, 2013.
- [21] Thomas Strobl. Gravity in two spacetime dimensions. *arXiv preprint hep-th/0011240*, 2000.
- [22] Stanley Deser, Roman Jackiw, et al. Three-dimensional einstein gravity: dynamics of flat space. *Annals of Physics*, 152(1):220–235, 1984.
- [23] J Richard Gott and Mark Alpert. General relativity in a $(2+1)$ -dimensional space-time. *General Relativity and Gravitation*, 16(3):243–247, 1984.

-
- [24] Steven Giddings, James Abbott, and Karel Kuchař. Einstein's theory in a three-dimensional space-time. *General Relativity and Gravitation*, 16(8):751–775, 1984.
- [25] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Classic Texts in the Ph. Clarendon Press, 1998. ISBN 9780198503705. URL <https://books.google.com.ec/books?id=LBOVcrzFfhsC>.
- [26] Geoffrey Compère and Adrien Fiorucci. Advanced lectures in general relativity. *arXiv preprint arXiv:1801.07064*, 2018.
- [27] Steven Carlip. The $(2+1)$ -dimensional black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 12(12):2853, 1995.
- [28] J David Brown and Marc Henneaux. Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three dimensional gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 104(2):207–226, 1986.
- [29] Claudia de Rham. Massive gravity. *Living reviews in relativity*, 17(1):7, 2014.
- [30] Steven Carlip and Steven Jonathan Carlip. *Quantum gravity in 2+ 1 dimensions*, volume 50. Cambridge University Press, 2003.
- [31] Eric A Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K Townsend. Massive gravity in three dimensions. *Physical Review Letters*, 102(20):201301, 2009.
- [32] Kevin CK Chan and Robert B Mann. Spinning black holes in $(2+1)$ -dimensional string and dilaton gravity. *Physics Letters B*, 371(3-4):199–205, 1996.
- [33] Kevin CK Chan. Modifications of the btz black hole by a dilaton and scalar. *Physical Review D*, 55(6):3564, 1997.
- [34] Paulo M Sa, Antares Kleber, and Jose PS Lemos. Black holes in three-dimensional dilaton gravity theories. *Classical and Quantum Gravity*, 13(1):125, 1996.
- [35] Stanley Deser, R Jackiw, and S Templeton. Three-dimensional massive gauge theories. *Physical Review Letters*, 48(15):975–978, 1982.
- [36] Steven Carlip. Lectures in $(2+1)$ -dimensional gravity. *arXiv preprint gr-qc/9503024*, 1995.
- [37] IL Buchbinder, Simon L Lyakhovich, and VA Krykhtin. Canonical quantization of topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 10(10):2083, 1993.
- [38] Stanley Deser and X Xiang. Canonical formulations of full nonlinear topologically massive gravity. *Physics Letters B*, 263(1):39–43, 1991.

- [39] G Grignani, P Sodano, and Claudio A Scrucca. Quantum states of topologically massive electrodynamics and gravity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(12):3179, 1996.
- [40] Kurt Hinterbichler. Theoretical aspects of massive gravity. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):671, 2012.
- [41] Hendrik van Dam and Martinus Veltman. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. *Nuclear Physics B*, 22(2):397–411, 1970.
- [42] David G Boulware and Stanley Deser. Can gravitation have a finite range? *Physical Review D*, 6(12):3368, 1972.
- [43] Eric A Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul K Townsend. More on massive 3d gravity. *Physical Review D*, 79(12):124042, 2009.
- [44] Eric Bergshoeff, Olaf Hohm, and Paul Townsend. On massive gravitons in 2+ 1 dimensions. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 229, page 012005. IOP Publishing, 2010.
- [45] Alberto Blasi and Nicola Maggiore. Massive gravity and fierz–pauli theory. *The European Physical Journal C*, 77(9):614, 2017.
- [46] Markus Fierz and Wolfgang Ernst Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 173(953):211–232, 1939.
- [47] KS Stelle. Classical gravity with higher derivatives. *General Relativity and Gravitation*, 9(4):353–371, 1978.
- [48] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, and D.I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017. ISBN 9781400889099. URL <https://books.google.com.ec/books?id=zAAuDwAAQBAJ>.
- [49] James M Bardeen, William H Press, and Saul A Teukolsky. Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 178:347–370, 1972.
- [50] J. Plebanski and A. Krasinski. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139458405. URL <https://books.google.com.ec/books?id=uG9sDiUZJ94C>.
- [51] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*, volume 42. Siam, 2002.
- [52] Hassan K Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.

-
- [53] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [54] Richard M Murray. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 2017.
- [55] Neil J Cornish and Janna Levin. Lyapunov timescales and black hole binaries. *Classical and Quantum Gravity*, 20(9):1649, 2003.
- [56] Neil J Cornish. Chaos and gravitational waves. *Physical Review D*, 64(8):084011, 2001.