ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE AGUJEROS DE GUSANO GENERADOS POR EL EFECTO CASIMIR ASINTÓTICAMENTE ANTI DE SITTER A TRAVÉS DEL FORMALISMO *THIN SHELL*

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE FÍSICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

EDISON SANTIAGO CARRERA UNAUCHO
edison.carrera@epn.edu.ec

Director: OSCAR ANDRÉS LASSO ANDINO, PHD
oscar.lasso@udla.edu.ec

Codirector: CHRISTIAN LEONARDO VÁSCONEZ VEGA, PHD
christian.vasconez@epn.edu.ec

QUITO, MARZO, 2021

DECLARACIÓN

Yo EDISON SANTIAGO CARRERA UNAUCHO, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

_____

Edison Santiago Carrera Unaucho

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por EDISON SANTIAGO CARRERA UNAUCHO, bajo nuestra supervisión.

Oscar Andrés Lasso Andino, PhD
Director del Proyecto

Christian Leonardo Vásconez Vega, PhD
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia, especialmente a mi hermana, la única persona que siempre cree en mi. A mis amigos, por todo el apoyo que han dado durante toda la carrera. A Rebeca, quien a pesar de estar miles de kilómetros me sigue brindando su apoyo incondicional. También, quiero agradecer a mi tutor Oscar Lasso por su paciencia y porque a pesar de no ser su obligación, me ayudó a desarrollar este proyecto. A Álvaro Dueñas, uno de los mejores profesores que he tenido, por introducirme en el fantástico mundo de la Relatividad General. Finalmente, agradezco a Nicolás Vásquez por ser más que un profesor, un amigo, quien me enseñó lo importante que es la humildad en un científico.

DEDICATORIA

A la Física,
por permitirme conocer que hay
una infinidad de cosas que desconozco.

Índice general

Resumen x

Abstract xi

1. Introducción a la Relatividad General 1

1.1. Postulados 1

1.2. Magnitudes físicas básicas en Relatividad General 2

1.3. Soluciones a la ecuación de Einstein 4

1.4. Espacio tiempo de Schwarzschild Anti de Sitter 6

1.4.1. Movimiento de partículas y fotones. 8

1.4.2. Diagramas de Embebimiento 10

2. Agujeros de Gusano 12

2.1. Agujero de gusano de Morris-Thorne 13

2.1.1. Ecuaciones características 14

2.1.2. Tensor energía-impulso y ecuaciones de Einstein 15

2.1.3. Embebimiento 17

2.1.4. Atravesabilidad 19

2.2. Condiciones de energía clásicas 22

2.3. Desigualdades cuánticas (QEIs) 23

2.4. Agujeros de gusano tipo *thin Shell* 24

2.4.1. Presión radial 27

3. Agujeros de gusano de Casimir 30

3.1. Efecto Casimir 30
3.1.1. Condición débil de energía cuántica (QWEC) 33
3.2. Ecuación de Einstein y el efecto Casimir 34
3.3. Agujeros de gusano QWEC 36

4. Agujeros de gusano de Casimir asintóticamente anti de Sitter 41
4.1. QWEC 43
4.2. QWEC con fuerza tidal nula 50
4.3. Formulación *Thin Shell* 57
4.4. Atravesabilidad y compatibilidad cuántica 62

5. Conclusiones 68

A. Estructura conforme asintótica del espacio Anti de Sitter 71

B. *Photon escape cones* 74

C. Soluciones Particulares 77

Bibliografía 79

Índice de figuras

1.1. Diagrama de emebebimiento del espacio tiempo de Schwarzschild AdS. Los diagramas están dados para a) $y = -10^{-6}$, b) $y = -0{,}002$. [43] 11

2.1. Diagrama de embebimiento de un agujero de gusano con función de forma constante en un espacio Euclídeo de coordenadas cilíndricas . 18

4.1. Presión radial P_r y densidad energética ρ en escala logarítmica de la materia que genera un agujero de gusano asintóticamente AdS con $\alpha = 2$. Las componentes del tensor energía impulso cumplen con la QWEC (sec.3.3). Los valores supuestos son: constante cosmológica $\Lambda = -10^{-5}[m^{-2}]$ y el radio de la garganta $r_0 = 10^3[m]$. 47

4.2. Presión radial P_r y densidad energética ρ en escala logarítmica de la materia que genera un agujero de gusano asintóticamente AdS con $\alpha = 4$. Las componentes del tensor energía impulso cumplen con la QWEC (sec.3.3). Los valores supuestos son: constante cosmológica $\Lambda = -10^{-5}[m^{-2}]$ y el radio de la garganta $r_0 = 10^3[m]$. 49

4.3. Radio de la garganta en escala semilogarítmica del agujero de gusano para diferentes valores de distancia entre las placas. La constante cosmológica Λ_i se le tomo nula. 54

4.4. Densidad de energía de la materia que genera un agujero de gusano sin fuerza tidal. Se asumió la constante cosmológica genérica $\Lambda_i = 0$ la distancia entre las placas $d = 1[\mu m]$ 55

4.5. Función $\omega(r)$ de la ecuación de estado $P_r = \omega\rho$. Se supuso que la distancia entre las placas es $d = 1[\mu m]$. 56

4.6. Diagramas embebidos en un cilindro, alrededor de la garganta de agujeros de gusano con diferente tamaño de garganta. Para todos se supuso: $d = 1[\mu m]$ y $\Lambda_i = 0$ 57

4.7. Transición entre la componente radial de la métrica de agujero de gusano de Morris Thorne y métrica de Schwarzschild. Se supuso: $\Lambda_i = 10^{-2}[\mu m^{-2}]$, $d = 1[\mu m]$ y $\Lambda_e = 10^{-3}[\mu m^{-2}]$. 59

4.8. Duración del viaje de una partícula con velocidad V=0.01c de un lado al otro del *thin shell*. Se supuso $d = 1[\mu m]$ y $\Lambda_i = 0$. 63

4.9. Cantidad total de materia exótica necesaria para establecer un agujero de gusano atravesable. Se consideró que $d = 1[\mu m]$ y diferentes valores de constante cosmológica interna Λ_i. 64

4.10. Comparación entre las escalas r_0 y r_1 en función del factor α. La escala mínima $\forall \alpha$ es r_1. Gráfico realizado en escala semilogarítmica. 64

4.11. Restricción en la función $H(\alpha, d)$ como consecuencia de requerir que la materia exótica que genera el agujero de gusano cumpla con la desigualdad de energía cuántica, $H(\alpha, d) < 3l_p/2\pi f^2$. Gráfico en escala semilogarítmica. 66

A.1. Representación bidimensional del espacio CAdS. El campo electromagnético se conoce en $t = t_0$ en la superficie tipo espacial H^3. Solo dentro de $D^+(H^3)$ se determina la dinámica del campo. H^+ denota la frontera, donde los rayos de luz provenientes del infinito alteran la dinámica del campo y lo vuelven impredecible en instantes arbitrarios[41]. 72

B.1. Cono de escape de fotones en el espacio tiempo de Schwarzschild AdS. El cono AdS se graficó con $y = -10^{-3}$ (gris claro) y se lo compara con el cono plano (gris oscuro). Para todos los valores de $r \neq 3$ el cono AdS es más grande que el cono plano y en $r = 3$ coinciden. Además, asintóticamente el cono AdS toma un valor constante y el cono plano toma un valor nulo. [43] 76

Resumen

En el contexto de la Relatividad General se han establecido restricciones fenomenológicas que los campos de materia tienen que satisfacer, estas restricciones se denominan condiciones de energía. Los agujeros de gusano aparecen como soluciones a las ecuaciones de Einstein, y la materia que los genera no cumple con estas condiciones. El efecto Casimir es el único fenómeno medido experimentalmente donde se puede encontrar energía con presión negativa, un cierto tipo de energía exótica. Sin embargo, solo en los recientes años se ha hecho un primer acercamiento al estudio de los agujeros de gusano de Casimir. En estos estudios se buscan agujeros de gusano asintóticamente planos, sostenidos por la energía que viene del efecto Casimir. En este trabajo se trató de construir agujeros de gusano asintóticamente AdS que satisfacen la ecuación semiclásica de Einstein con el tensor energía impulso del efecto Casimir, encontrando soluciones no analíticas para la función de *redshift*. También, se analizó las consecuencias de imponer la condición de energía cuántica débil (QWEC) en un agujero de gusano asintóticamente AdS/dS, obteniendo una familia de soluciones en el espaciotiempo AdS que en el límite $\Lambda \to 0$ no convergen perfectamente a una solución de agujero de gusano de Casimir. Asumiendo la QWEC y utilizando la formulación *thin shell* para unir construir un agujero de gusano sin fuerza tidal con el espacio tiempo de Schwarzschild AdS, se encontró restricciones en comportamiento de la materia. Estas llevan a un agujero de gusano atravesable en principio, generado por energía que tiene similitud con la del efecto Casimir.

Abstract

In the context of General Relativity, it has been established phenomenological constraints that matter fields must fulfill, these restrictions are denominated energy conditions. Wormholes appear as solutions to Einstein equations, and their matter source violets these energy conditions. Casimir effect is the only phenomenon, which has been measure experimentally, where we can find energy with negative pressure, a kind of exotic matter. However, an approach to the study of Casimir wormholes has been made only in recent years. On those papers, asymptotically flat wormholes sourced by Casimir effect are studied. In this work, we tried to build an AdS wormhole sourced by the Casimir effect that fulfills the semiclassical Einstein equation. Solving the field equations we find non-analytic solutions to the redshift function. Further, we analyzed the consequences of imposing the quantum weak energy condition (QWEC) on AdS/dS wormholes, finding an AdS wormholes family that in the limit $\Lambda \to 0$ does not converge perfectly to a Casimir flat wormhole solution. Assuming QWEC and using the thin shell formulation to "cut and paste" a zero tidal force wormhole with Schwarzschild AdS spacetime, we find constraints on matter behavior. These restrictions allow us to construct a traversable wormhole sourced by energy similar to the Casimir effect one.

Capítulo 1

Introducción a la Relatividad General

En este capítulo se presenta una breve introducción a los conceptos fundamentales de la teoría General de la Relatividad. Se describen brevemente los postulados de esta teoría. Se introducen las magnitudes físicas que se utilizarán más adelante en la descripción de atravesabilidad de un agujero de gusano. Además, se resumen algunas de las soluciones a la ecuación de Einstein, resaltando la solución de Schwarzschild, la cual la cual se utilizará posteriormente en la descripción de agujeros de gusano tipo *thin shell*[1]. Finalmente, se explica como la métrica de Schwarzschild afecta a la dinámica de partículas (con y sin masa) y se discuten los diagramas de embebimiento.

La Relatividad General es una teoría clásica que combina el espacio y el tiempo en un único continuo donde transcurren todos los eventos, el espaciotiempo. Matemáticamente, este espaciotiempo se describe como una variedad Lorentziana $(\mathcal{M}, g)$, localmente Minkowski (plana), donde g es una métrica de signatura $(-+++)$[31]. Esta teoría se construye a partir de los siguientes postulados.

1.1. Postulados

El principio de equivalencia En la vecindad espaciotemporal de una concentración de masa, el movimiento de los cuerpos no puede ser distinguido por ningún experimento, del comportamiento físico de cuerpos en una región con aceleración uniforme.[23]

[1] Agujeros de gusano donde la materia que genera este objeto está limitada a una zona específica y el resto del espacio es vacío o tiene materia común.

Principio de Covarianza Establece que las leyes de la Física no pueden depender de un sistema referencia. Esto sugiere que la dinámica de campos de materia puede ser descrita por las mismas ecuaciones tensoriales establecidas en Relatividad Especial, añadiendo términos que dependan de la curvatura del espacio-tiempo.

Causalidad Local La trayectoria de un campo de materia en un subconjunto (convexo) abierto del espacio-tiempo tiene un vector tangente de tipo no espacial.[31]

Ecuación de Einstein El campo gravitacional es una consecuencia de que el espacio tiempo no es plano, por lo cual es proporcional al tensor de curvatura [9]. Además, la deformación del espacio tiempo es causada por campos de materia, los cuales son descritos por el tensor de energía impulso T_{ab}, el cual es simétrico y cumple con la ecuación $\nabla^a T_{ab} = 0$. Por lo tanto, la forma más sencilla en la que se puede relacionar la curvatura del espacio tiempo y la materia es la ecuación de Einstein

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \tag{1.1}$$

donde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ se conoce como el tensor de Einstein, donde R_{ab} es el tensor de Ricci el cual es función de la métrica y sus derivadas. La ecuación de Einstein también puede obtenerse formalmente mediante un principio variacional, donde el funcional a minimizar es la acción de Hilbert-Einstein [35].

La teoría de la Relatividad General también establece que la medición del tiempo y otras magnitudes físicas dependen del sistema de referencia del observador.

1.2. Magnitudes físicas básicas en Relatividad General

En las variedades pseudo Riemmanianas el intervalo infinitesimal invariante $ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$ puede ser: positivo (tipo temporal), negativo (tipo espacial) o nulo (tipo lumínico). Esto permite clasificar a las curvas en una variedad como temporal, espacial o lumínica, dependiendo de su intervalo infinitesimal. Por ejemplo, la trayectoria de cuerpos masivos es de tipo temporal y la trayectoria de la luz es de tipo lumínica. Además, las magnitudes físicas medidas por estos cuerpos dependen de su velocidad y su posición en el espacio tiempo [9].

Tiempo Transcurrido. La medición de un intervalo de tiempo depende del sistema de referencia del observador. Un reloj físico que se mueve con una velocidad

coordenada V^i respecto a un observador $\mathcal{O}$, mide un intervalo de tiempo $\Delta\tau_{\vec{V}}$. Este se relaciona con el tiempo transcurrido en un reloj en reposo, como lo indica la siguiente ecuación

$$\Delta\tau_{\vec{V}} = \Delta\tau_{\vec{0}} \left(1 + \frac{2g_{0i}V^i}{g_{00}} + \frac{g_{ij}V^iV^j}{g_{00}}\right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

donde $\Delta\tau_{\vec{0}} = \sqrt{-g_{00}}\Delta t$ es el tiempo que mide un reloj en reposo con respecto observador $\mathcal{O}$.

Rapidez. La rapidez de un punto masivo con velocidad coordenada V^i, medida con respecto a un observador $\mathcal{O}$, está dada por la ecuación

$$\beta = \sqrt{1 - g^{00}\left(g_{00} + 2g_{0i}V^i + g_{ij}V^iV^j\right)}. \tag{1.3}$$

En el espacio plano esta se reduce a $\beta = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$.

Longitud. La longitud medida depende del sistema de referencia. Considerando que con respecto a un observador $\mathcal{O}$, una partícula masiva se mueve con una velocidad física

$$\beta^i = V^i\sqrt{-g^{00}} + \frac{g^{0i}}{\sqrt{-g^{00}}}, \tag{1.4}$$

y que el intervalo espacial es $\Delta l = \beta\Delta\tau$, se encuentra que[2]

$$\Delta l = \Delta l_0\sqrt{1 - g_{ij}\beta^i\beta^j}. \tag{1.5}$$

Esta ecuación relaciona el intervalo espacial Δl medido por un observador $\mathcal{O}$ y el intervalo espacial propio Δl_0 medido por una partícula masiva que se mueve respecto a $\mathcal{O}$. Si el espacio tiempo es plano $\beta^i = V^i$ y la ec.(1.5) se reduce a la contracción de la longitud de la Relatividad Especial $\Delta l = \Delta l_0(1 - V^2)^{1/2}$.

Gravedad Local. La Relatividad General indica que para calcular la aceleración gravitacional de un cuerpo se calcula la "fuerza" necesaria para que este objeto mantenga sus coordenadas espaciales constantes. Este objeto es tipo temporal y no sigue necesariamente una geodésica. Consecuentemente, considerando que la velocidad

[2]La demostración de este resultado se encuentra en [9]

local es nula, se encuentra que las componentes espaciales de la aceleración son [9]

$$a^i = \frac{1}{2}\left(g^{ij}g^{00} - g^{0j}g^{0i}\right)\partial_j \frac{1}{g^{00}}. \tag{1.6}$$

De esta ecuación se encuentra que la aceleración local causada por la gravedad es $g^i = -a^i$. Si $g_{00} = const. \Rightarrow a^i = 0$. Esto indica que en un espacio tiempo donde la componente temporal de la métrica es constante, un observador estático sigue una geodésica.

Las magnitudes físicas encontradas dependen de la métrica del espacio tiempo. No obstante, obtener una métrica que sea solución general de la ecuación de campo de Einstein es muy complicado a causa de su alta no linealidad [3]. La resolución de la ecuación de campo se facilita al asumir que la solución tiene ciertas simetrías [9]. A continuación, se describirá brevemente algunas de las soluciones analíticas, para mayores detalles ver [9].

1.3. Soluciones a la ecuación de Einstein

Espacio tiempo de Minkowski

El espaciotiempo de Minkowski es la unión del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$ y el tiempo, en una variedad de dimensión 4, donde el intervalo

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (t, x, y, z) \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Al ser las componentes de la métrica constantes, su tensor de Riemman es nulo, por lo cual se lo denomina espacio tiempo plano [9].

Espacio tiempo de Schwarzschild

El teorema de Birkhoff [39] enuncia que la única solución de vacío de a la ecuación de Einstein (1.1) con simetría esférica, invariante bajo traslaciones temporales y

[3] La ecuación de Einstein puede ser resuelta con métodos numéricos y algoritmos. Por ejemplo, en el análisis computacional de agujeros negros, ondas gravitacionales y estrellas de neutrones [3].

en (3+1) dimensiones es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1.8}$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ y R_s se denomina radio de Schwarzschild. Si $r \to \infty$ entonces la métrica (1.8) converge al espaciotiempo de Minkowski en coordenadas esféricas, por lo cual se denomina asintóticamente plano. Al aproximarse al límite clásico, es decir a la gravitación Newtoniana, se encuentra que $R_s = 2GM$.

Es claro que el elemento de línea de la ec.(1.8) tiene dos singularidades, en $r = 0$ y $r = R_s$. Sin embargo, la segunda singularidad es coordenada, es decir, las coordenadas que hemos escogido no son lo suficientemente buenas para describir el espaciotiempo dado. Así, al trabajar en el sistema de coordenadas de Kruskal esta desaparece [31].

Espacio tiempo de Robertson-Walker

El espacio de Schwarzschild es estático y simétrico. Además, su métrica describe un cuerpo aislado e idealizado. Otro tipo de idealización es un espacio tiempo isotrópico y espacialmente homogéneo, como nuestro universo. De esta forma, se establece la métrica de Robertson-Walker como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2\right), \tag{1.9}$$

donde $k = -1, 0$ o 1 si se tiene geometría hiperbólica, Euclídea o esférica, respectivamente. Además, el termino $a(t)$ se denomina factor de escala.

Existen otras soluciones a la ecuación de Einstein. Por ejemplo, el espacio tiempo de Reisser-Nördstron que describe el campo gravitatorio y electromagnético de un cuerpo masivo con carga eléctrica. También, las métricas de Kerr y Kerr-Newman, las cuales son generalizaciones a la métrica de Schwarzschild y Reisser-Nordstron respectivamente, para cuerpos con momento angular no nulo. Otra generalización al espacio tiempo de Schwarzschild, es la solución que se obtiene al añadir la constante cosmológica a la ecuación de Einstein en el vacío. A continuación se describirá más a detalle está solución, ya que luego se utilizará este espaciotiempo para la

construcción de agujeros de gusano tipo *thin shell* [25].

1.4. Espacio tiempo de Schwarzschild Anti de Sitter

La ecuación de Einstein (1.1) permite añadir un termino extra H_{ab} en el miembro izquierdo, el cual no debe depender de las derivadas de la métrica y también $\nabla^a H_{ab} = 0$. La forma más sencilla de dar un valor a H_{ab} que dependa de la métrica es $H_{ab} = \Lambda g_{ab}$, donde Λ es una constante universal [35]. Por lo tanto, la ecuación de Einstein adquiere la siguiente forma

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}. \tag{1.10}$$

La constante cosmológica se la puede interpretar físicamente como la energía del vacío si se reescribe la ecuación de Einstein como

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ab} + T_{ab}^{(vac)} \right), \tag{1.11}$$

donde $T_{ab}^{(vac)} = -g_{ab} \dfrac{\Lambda c^4}{8\pi G}$. Además, se puede formular un tensor energía impulso total

$$\overline{T}_{ab} = T_{ab} + T_{ab}^{(vac)}, \tag{1.12}$$

el cual permite regresar a la forma original de la ecuación de Einstein

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} \overline{T}_{ab}. \tag{1.13}$$

En [25] se explica que si se establece simetría esférica e invarianza bajo traslaciones temporales en la ecuación de Einstein (1.10) en el vacío, se obtiene el siguiente elemento de línea

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} + \\ & + r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Si comparamos este elemento de línea con el de la ec.(1.14) se observa que tiene la misma forma a excepción del factor $\Lambda r^2/3$. La denominación del espaciotiempo depende del signo de la constante cosmológica Λ. Si $\Lambda = 0$ se obtiene la solución

de Schwarzschild (1.8). Si la constante cosmológica es positiva $\Lambda > 0$ se consigue la solución Schwarzschild de Sitter. En cambio, si $\Lambda < 0$ la solución se denomina Schwarzschild Anti de Sitter [25]. Se le da este nombre pues si $r \to \infty$ el elemento de línea Schwarzschild AdS converge a

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{|\Lambda| r^2}{3}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{|\Lambda| r^2}{3}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2), \tag{1.15}$$

el cual corresponde al elemento de línea del espacio tiempo AdS_4 [41]. El espacio tiempo Anti de Sitter posee una estructura infinita conforme tipo temporal, la cual tiene algunas implicaciones interesantes. Sobre esto se detalla en el apéndice A.

El espacio tiempo Schwarzschild AdS tiene un horizonte en r_b solución a

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{|\Lambda| r^2}{3}\right) = 0. \tag{1.16}$$

Si se define los siguientes factores

$$A = \left(\frac{3c^4}{8|\Lambda| G^2 M^2}\right)^{1/3} \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{c^4}{9|\Lambda| G^2 M^2}}}, \tag{1.17}$$

$$B = \left(\frac{3c^4}{8|\Lambda| G^2 M^2}\right)^{1/3} \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{c^4}{9|\Lambda| G^2 M^2}}}, \tag{1.18}$$

entonces r_b se escribe como [4]

$$r_b = \frac{2GM}{c^2}(A + B). \tag{1.19}$$

El espacio tiempo de Schwarzschild AdS, al ser asintóticamente Anti de Sitter sus propiedades son afectadas a causa de la estructura infinita conforme tipo temporal de este este espacio[5]. Esto se observa al analizar el "potencial efectivo", *Photon escape cones* y los diagramas embebidos en un instante de tiempo. A continuación, se explicará brevemente estas propiedades descritas en detalle en [43].

[4] La demostración de este resultado se detalla en [25]

[5] Sobre esto se detalla en el apéndice A

1.4.1. Movimiento de partículas y fotones.

La curvatura del espacio tiempo altera la trayectoria de las partículas que se mueven el él. A partir de la métrica de Schwarzschild Λ (1.15) se puede determinar un "potencial efectivo" que permite analizar el movimiento de partículas y fotones. Para facilitar el desarrollo matemático en esta sección se trabajará en unidades $c = 1$ y $G = 1$. Además, se establece la constante $y = \Lambda M^2/3$ y el sistema de coordenadas adimensional $t \to t/M$, $r \to r/M$. En este sistema de coordenadas el horizonte de sucesos está determinado por

$$1 - \frac{2}{r} - yr^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{r-2}{r^3}. \tag{1.20}$$

Por otra parte, el movimiento de las partículas está gobernado por la estructura geodésica del espacio tiempo

$$\frac{Dp_\mu}{d\lambda} = 0, \tag{1.21}$$

donde p_μ es el cuadrimomento, λ es un parámetro afín y $p_\mu p^\mu = -m^2$.

La simetría de la métrica de Schwarzschild Λ (1.15) indica que el movimiento de partículas está permitido en planos centrales y también presenta los vectores de Killing [6] $\zeta_{(t)} = \partial_t$ y $\zeta_{(\phi)} = \partial_\phi$[35]. Así, dos constantes de movimiento deben existir, las cuales son proyecciones del cuadrimomento en los vectores de Killing

$$p_t = g_{ta}p^a = -\epsilon, \quad p_\phi = g_{\phi a}p^a = \Phi. \tag{1.22}$$

En los espacios que no son asintóticamente planos, no se puede definir ϵ y Φ como energía y momento angular, respectivamente [43]. Por consiguiente, se establece la energía específica E, el momento angular específico L y el parámetro de impacto l

$$E = \frac{\epsilon}{M}, \quad L = \frac{\Phi}{M}, \quad l = \frac{\Phi}{\epsilon}. \tag{1.23}$$

En [42] se muestra que si se supone el movimiento de la partículas en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), entonces a partir de la métrica (1.15) se obtiene que el movi-

[6] Un vector de Killing ζ define un grupo de isometrías sobre la métrica asociada a una variedad. Además, estos cumplen con la ecuación $\nabla_a\zeta_b + \nabla_b\zeta_a = 0$

miento de las mismas esta regido por el potencial efectivo

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \tag{1.24}$$

El movimiento de objetos masivos está permitido si $E^2 \geq V_{eff}$, y los puntos retornos del movimiento radial están determinados por $E^2 = V_{eff}$. En el caso de los fotones se define análogamente el "potencial generalizado" l_R^2, el cual establece que el movimiento está permitido en regiones donde

$$l^2 \leq l_R^2 = \frac{r^3}{r - 2 - yr^3}. \tag{1.25}$$

Al igual que en el caso de las partículas, los puntos de retorno del movimiento radial están dados por $l^2 = l_R^2$ [44].

En el espacio de Schwarzschild AdS, el potencial efectivo de las partículas V_{eff} se anula en el horizonte de sucesos y el de los fotones l_R^2 diverge en este punto. Además, l_R^2 tiene un mínimo en $r = 3$, el cual es independiente del valor de la constante y, por lo cual existe una orbita circular de fotones en este punto. Por otro lado, si $r \to \infty$ en las ec. (1.24) y(1.25), se observa la dinámica asintótica de partículas y fotones esta determinada por

$$V_{eff}(r \to \infty) = -yr^2, \qquad l_R^2(r \to \infty) = -\frac{1}{y}. \tag{1.26}$$

Este resultado implica que en el espacio Schwarzschild AdS ($y < 0$) el potencial efectivo de las partículas es positivo y creciente asintóticamente. Por otra parte, los fotones tienen un potencial generalizado asintótico constante y positivo. También, la ec.(1.26) muestra que si la constante cosmológica fuese nula, el potencial efectivo de las partículas es nulo y el de los fotones diverge.

Otra herramienta útil para analizar un espacio tiempo es el diagrama de embebimiento, el cual da una perspectiva de la forma del espacio en tres dimensiones. A continuación, se explicará el diagrama embebido del espacio tiempo Schwarzschild-AdS y su dependencia de la magnitud de la constante cosmológica.

1.4.2. Diagramas de Embebimiento

Los diagramas de embebimiento del espacio tiempo de Schwarzschild-AdS permiten conocer como afecta la adición de la constante cosmológica a la estructura del espacio tiempo. Si se establece en el elemento de línea de Schwarzschild Λ (1.15) que el tiempo coordenado t es constante y además se fija el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, se obtiene el elemento de línea

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2}{r} - yr^2} + r^2 d\phi^2, \tag{1.27}$$

el cual corresponde a una hipersuperficie ecuatorial $t = cte$. Por otra parte, el elemento de línea del espacio Euclídeo en coordenadas cilíndricas, se escribe

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \tag{1.28}$$

Si consideramos que la superficie embebida está dada por $z = z(\rho)$, se puede escribir la ecuación (1.28) como:

$$dl^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right] d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2. \tag{1.29}$$

Usando (1.27) y (1.29) se obtiene la siguiente relación para la superficie embebida

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{2 + yr^3}{r - 2 - yr^3}}, \tag{1.30}$$

la cual depende de la constante y. En la figura 1.1 se observa la dependencia de los diagramas embebidos del espacio tiempo Schwarzschild-AdS con respecto a la magnitud de la constante cosmológica. El tamaño del horizonte de eventos aumenta con la constante y, la cual es proporcional a la constante cosmológica. Por otro lado, la ec.(1.30) impone la restricción que los diagramas embebidos pueden solo realizarse entre el horizonte de sucesos r_b y $r_e = \left(-\frac{2}{y}\right)^{1/3}$.

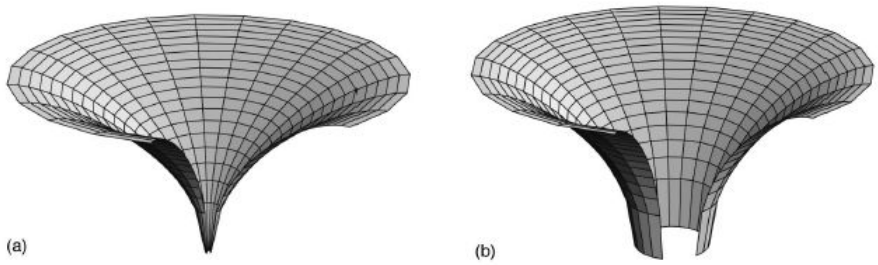


Figura 1.1: Diagrama de emebebimiento del espacio tiempo de Schwarzschild AdS. Los diagramas están dados para a) $y = -10^{-6}$, b) $y = -0{,}002$. [43]

Otra propiedad que ayuda a caracterizar el espacio Schwarzschild AdS son los *Photon escape cones* [44]. Estos han sido utilizados en [44, 43] para estudiar propiedades ópticas de diferentes tipos de agujeros negros. Sin embargo, esto no es de interés en el estudio de agujeros de gusano que se realizará. En el apéndice B se describe brevemente el impacto de la constante cosmológica en el comportamiento de los *photon escape cones* relacionada a una familia de observadores estáticos.

Las soluciones a la ecuación de Einstein nombradas en este capítulo son permitidas por la Física clásica. Sin embargo, existe un grupo de soluciones que se no se consideran de carácter físico, puesto que no cumplen con las condiciones de energía[7]. Una solución de particular interés es la de agujero de gusano atravesable propuesta por Morris-Thorne [33]. La materia que sostiene este tipo de agujeros no satisface las condiciones de energía y por eso se la conoce como *exótica*. En el siguiente capítulo se discutirá las características de este espacio tiempo. Además, se hará especial hincapié en agujeros de gusano tipo *thin shell*, puesto que en estos se limita el uso de materia exótica.

[7]Las condiciones de energía tratan de implementar la idea de que el tensor energía impulso es ”positivo” en presencia de materia y que la gravedad es atractiva [26]

Capítulo 2

Agujeros de Gusano

Un agujero de gusano es una geometría -espaciotiempo- que describe dos ”agujeros” conectados y separados una cierta distancia [45]. Estos ”pasadizos” han recibido varias interpretaciones, y actualmente se encuentran en el centro del debate de la física de altas energías[48]. Una de las primeras propiedades de estos agujeros en ser estudiada fue la atravesabilidad, es decir, el estudio de las condiciones para que un humano pueda atravesar el agujero de gusano desde un lado hasta el otro. Se ha descubierto que en Relatividad General no existen agujeros de gusano atravesables. En [33] los autores demuestran que para sostener al agujero de gusano se requiere la presencia de materia exótica[1] alrededor de su garganta. Uno de los primeros agujeros de gusano en ser teorizados fueron los puentes de Einstein-Rosen. Estos tienen un horizonte de eventos que evita el viaje en ambos sentidos [10]. Además, poseen fuerzas tidales muy fuertes que destrozarían a un viajero que trate de atravesarlos. A pesar de estos inconvenientes, los agujeros de gusano se han convertido en campo de investigación floreciente. La razón principal gira en torno al hecho de que pueden ser usados en modelos que permiten la extracción de información de agujeros negros. Por ejemplo, en [19] se demuestra que el entrelazamiento de dos cuasi-partículas con color tiene un dual holográfico a un agujero de gusano no atravesable. En [17], incluyendo fluctuaciones cuánticas, se logra transformar un agujero de gusano no atravesable en atravesable.

La cantidad de trabajos que tratan de profundizar en el estudio de los agujeros de gusano es enorme. Por citar algunos ejemplos, en [49] se discuten varias propiedades de este espaciotiempo, así como de otros tipos de agujeros de gusano como el de Kerr y también los agujeros tipo Euclídeo. En [4] se muestra que la curvatura Gaussiana de la métrica de Jacobi del agujero de Morris-Thorne está directamente

[1] La materia exótica no satisface las propiedades de energía usuales y se considera que no es física.

relacionada con la condición de ensanchamiento del agujero. Un texto relativamente nuevo de referencia es [26], otro texto imprescindible es [1]. A continuación, siguiendo a [25] se expondrá primero la teoría de los agujeros de gusano atravesables de Morris-Thorne y después se explicará el proceso para construir un agujero tipo *thin shell*.

2.1. Agujero de gusano de Morris-Thorne

En [33] se aclara que siguiendo todos los postulados de la Relatividad General y las condiciones de energía, la única de forma de crear un ”puente” entre dos puntos distantes del universo es un agujero de gusano de Kerr o de Schwarzschild. Sin embargo, estos son muy inestables y a la mínima perturbación, la conexión entre ambos puntos se rompe. Incluso, aunque se consiga aislarlos, las fuerzas de marea destruirían a cualquier viajero que trate de atravesarlos. De este modo, en [33] se propone las siguientes condiciones de atravesabilidad que un agujero de gusano debe satisfacer para ser catalogado como atravesable:

- Para simplificar cálculos, la métrica debe ser estática y tener simetría esférica. Sin embargo, el agujero de gusano puede ser inestable ante perturbaciones no esféricas.
- La solución debe obedecer la ecuación de Einstein en todo lugar.
- La garganta debe conectar dos espacios asintóticamente planos
- No debe tener horizonte para permitir el viaje en los dos sentidos.
- Las fuerzas de marea experimentadas por el viajero debe ser pequeñas.
- La duración del viaje debe ser finita (menos de un año) tanto para el viajero como para quienes le esperan fuera.
- Los campos de materia que generan el agujero de gusano deben tener un tensor energía impulso físicamente razonable.

Pensando en satisfacer las condiciones anteriores, en [33] se propone el siguiente

elemento de línea para describir geométricamente un agujero de gusano [2]

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{b(r)}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2\right), \tag{2.1}$$

donde $\Phi(r)$ y $b(r)$ son funciones arbitrarias que determinan las propiedades geométricas del agujero de gusano. $b(r)$ caracteriza la forma espacial, por lo que se le denomina "función de forma". En la garganta r_0 esta función satisface $r_0 = b(r_0) = b_0$. $\Phi(r)$ determina el *redshift* gravitacional, por lo cual se le define como "función de *redshift*". Además, la coordenada r es monótona, es decir, disminuye de $+\infty$ a b_0 en el universo inferior y aumenta de b_0 a $+\infty$ en el universo superior.

A través de la métrica de Morris-Thorne y las ecuaciones de Einstein se puede obtener la relación geométrica con el campo de materia que sostiene este espacio. A continuación se presentan algunos resultados conocidos para la métrica (2.1)

2.1.1. Ecuaciones características

Para simplificar los cálculos se trabajará en un sistema de referencia ortogonal (observador estático con (r, θ, ϕ) constantes), de modo que nos permitirá trabajar en el espacio tangente. En este espacio la métrica del espaciotiempo se reduce a la métrica de Minkowski $g_{\hat{a}\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}} = diag(-1, 1, 1, 1)$. El nuevo sistema $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ se define como

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi}\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = \sqrt{1-b/r}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = (1/r)\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r\sin\theta)^{-1}\mathbf{e}_\phi. \tag{2.2}$$

En este sistema de coordenadas las ecuaciones de Einstein se escriben como [33]:

$$G_{\hat{a}\hat{b}} + \Lambda\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\hat{a}\hat{b}}. \tag{2.3}$$

Asimismo, las componentes del tensor de Einstein se transforman en:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'(r)}{r^2}, \tag{2.4}$$

[2] A esta métrica se le denomina métrica de Morris-Thorne [33].

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r}, \tag{2.5}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} + \frac{\Phi'}{r}\right], \tag{2.6}$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}, \tag{2.7}$$

donde el acento "primaïndica derivación con respecto a la coordenada radial r.

Adicionalmente, en este sistema de coordenadas las componentes del tensor de curvatura están dadas por

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\Phi'' + (\Phi')^2\right) + \frac{\Phi'}{2r^2}(b - b'r), \tag{2.8}$$

$$R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r}, \tag{2.9}$$

$$R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{1}{2r^3}(b'r - b), \tag{2.10}$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{b}{r^3}. \tag{2.11}$$

El resto de componentes se anulan, excepto aquellas relacionadas por simetría a las ya mencionadas.

Una vez que el tensor de Einstein ha sido calculado, el tensor Energía-Impulso queda determinado a través de las ecuaciones de Einstein. Cuando se estudian los agujeros de gusano, la forma habitual de proceder es dar una métrica, y usando las ecuaciones de Einstein, se determina las condiciones que las componentes de la métrica deben satisfacer si se impone un tensor energía-impulso determinado.

2.1.2. Tensor energía-impulso y ecuaciones de Einstein

Como se mencionó anteriormente, la única solución de vacío esféricamente simétrica y asintóticamente plana de las ecuaciones de Einstein es el métrica de Schwarzschild. Por lo tanto, los agujeros de gusano deben ser generados por materia,

con un tensor de energía-impulso no nulo. Además, este tensor $T_{\hat{a}\hat{b}}$ debe tener la misma estructura que el tensor de Einstein $G_{\hat{a}\hat{b}}$. Consecuentemente, en este sistema de coordenadas las componentes del tensor de energía impulso son las siguientes

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho, \tag{2.12}$$

$$T_{\hat{r}\hat{r}} = P_r, \tag{2.13}$$

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = P_t, \tag{2.14}$$

$$T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}}, \tag{2.15}$$

donde ρ es la densidad energética, P_r es la presión radial y P_t es la presión tangencial de la materia que genera el agujero de gusano[3].

Conocidas las componentes de $G_{\hat{a}\hat{b}}$, $T_{\hat{a}\hat{b}}$ y utilizando las ecuaciones de campo, se puede obtener las igualdades que relacionan la materia y la geometría del espacio. Así, reemplazando los resultados (2.4)-(2.7), en las ecuaciones de Einstein (2.3) se obtiene:

$$\frac{b'(r)}{r^2} - \Lambda = K\rho, \tag{2.16}$$

$$-\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r} + \Lambda = KP_r, \tag{2.17}$$

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right)\left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} + \frac{\Phi'}{r}\right] + \Lambda = KP_t. \tag{2.18}$$

Las ecuaciones anteriores relacionan las características geométricas del agujero de gusano, con las propiedades de la materia que lo conforma. Además, derivando con respecto a r la ecuación (2.17) y usando (2.16) y (2.18) se obtiene la siguiente

[3]Un caso especial de las ecuaciones anteriores es el tensor de energía impulso de fluido ideal, donde $P_r = P_t$

expresión[4]

$$P_r' = \frac{2}{r}(P_t - P_r) - \Phi'(\rho + P_r). \tag{2.19}$$

Las ecuaciones (2.16)-(2.18) se pueden resolver de dos formas. Asumiendo que se conoce el tensor energía impulso $T_{\hat{a}\hat{b}}$ de la materia que mantiene el agujero de gusano y obteniendo las características del mismo. Por el contrario, se puede ajustar las características geométricas del agujero de gusano (b y Φ) a nuestra conveniencia y obtener la descripción de la clase de materia que permitiría la existencia del mismo.

Las métricas de espaciotiempo -como la métrica de Morris-Thorne- son espaciotiempos de 4 dimensiones, tres espaciales y una temporal. Es por eso que, tanto su visualización así como su análisis, se facilitan cuando se estudian sus diagramas de embebimiento. Estos diagramas permiten tener una mejor perspectiva de la forma del agujero de gusano, de este modo, a continuación se realizará un procedimiento similar al de la sec.1.4.2 para la métrica de Morris-Thorne.

2.1.3. Embebimiento

En el segmento de línea de Morris-Thorne (2.1) se establece un tiempo constante y se considera una sección ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. A través de estas suposiciones se obtiene el segmento de linea

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 d\phi^2. \tag{2.20}$$

Por otra parte, la métrica Euclídea en coordenadas cilíndricas se puede escribir como

$$ds^2 = \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{2.21}$$

En adición, se observa que esta tiene simetría axial en z al igual que la sección del agujero de gusano en (2.20), por lo cual se la puede utilizar para estudiar gráficamente un agujero de gusano. Comparando las métricas (2.20) y (2.21) y consideran-

[4]La ec.(2.19) se la puede obtener también a partir la conservación del tensor energía-impulso $\nabla_a T^{ab} = 0$. A este resultado se le conoce como la ecuación relativista de Euler o ecuación hidrostática en equilibrio [33]

do que (r, ϕ) son las coordenadas del objeto embebido, se obtiene que la superficie embebida cumple con la ecuación

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b} - 1}}. \tag{2.22}$$

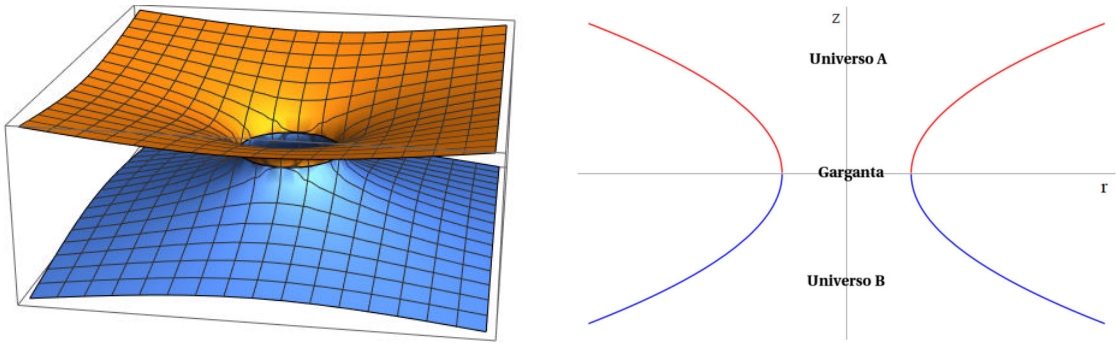
Al integrar (2.22) se obtiene la función $z(r)$, la cual permite ilustrar gráficamente la forma de un agujero de gusano cerca de su garganta. Por ejemplo, en [33] se indica que una solución de agujero de gusano se obtiene al considerar

$$b(r) = B, \quad B = const. \tag{2.23}$$

Reemplazando esta función de forma en la ec.(2.22) e integrando, se obtiene la superficie embebida

$$z(r) = 2Br(r/B - 1)^{1/2}. \tag{2.24}$$

Las figs.2.1a y 2.1b ilustran la forma de la garganta de de un agujero de gusano con función de forma constante. Estas muestran como la garganta de un agujero de gusano sirve de conexión entre dos universos.



(a) Representación tridimensional **(b)** Representación bidimensional

Figura 2.1: Diagrama de embebimiento de un agujero de gusano con función de forma constante en un espacio Euclídeo de coordenadas cilíndricas

La ec.(2.22) muestra que cuando $b(r_0) = r_0$, es decir, en la garganta del agujero de gusano, la función $\frac{dz}{dr} \to \infty$. Por consiguiente, la coordenada radial r no permite estudiar al agujero de gusano cerca de la garganta, por lo cual un mejor parámetro

es la longitud propia

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b(r')}{r'}}}, \tag{2.25}$$

la cual se comporta correctamente en todo el espacio tiempo. La función de forma debe ser positiva y $\frac{b(r)}{r} < 1$ para que $\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}$ sea real. Sin embargo, esto no se cumple para cualquier valor de constante cosmológica lejos de la garganta, como se mencionó en la sección 1.4.2. No obstante, la importancia del embebimiento es cerca de la garganta, donde se observa la condición de *flare-out*[5].

Si bien el embebimiento nos da una perspectiva gráfica del agujero de gusano, existen otras herramientas que ayudan a entender sus propiedades. Como se mencionó en la sección 2.1 hay varias restricciones que tienen que satisfacerse para que estos agujeros sean atravesables. A continuación, se explicará como se obtiene el tiempo propio del viajero y de quienes lo esperan fuera (obs. estáticos). También, se obtendrá la intensidad gravitacional que perciben los observadores estáticos. Finalmente, se analizarán las restricciones geométricas que se imponen como consecuencia de las condiciones de atravesabilidad.

2.1.4. Atravesabilidad

Los agujeros de gusano atravesables deben ser cruzados en un tiempo finito, tanto para el viajero como para los observadores estáticos que lo esperan fuera. También, para que la gravedad no destroce al viajero, se requiere que esta sea pequeña (comparable a la gravedad terrestre).

De la métrica de Morris-Thorne (2.1) se encuentra que el intervalo de tiempo que mide un observador estático cerca del agujero de gusano es

$$d\tau_0 = e^{\Phi(r)} dt, \tag{2.26}$$

donde t es el tiempo coordenado. De la ecuación (1.3) se obtiene que la velocidad radial con la que se mueve un objeto hacía el agujero de gusano, con respecto a un

[5]Esta condición establece que cerca de la garganta del agujero de gusano, la tensión superficial debe ser mayor que la densidad de energía para mantener la estructura [22].

observador estático es

$$\beta = \frac{e^{-\Phi(r)}}{\sqrt{1-\frac{b(r)}{r}}}\frac{dr}{dt}. \tag{2.27}$$

Usando la definición de longitud propia (2.25), esta ecuación puede reescribirse como

$$\beta = e^{-\Phi}\frac{dl}{dt}. \tag{2.28}$$

La ecuación (1.2) relaciona el tiempo medido por un observador estático ($\Delta\tau_0$) con el medido por un viajero que se mueve con una velocidad V ($\Delta\tau_v$). Sustituyendo (2.27) y (2.1) en (2.27) obtenemos

$$d\tau_v = \sqrt{1-\left(\frac{\beta}{c}\right)^2}d\tau_0. \tag{2.29}$$

Este resultado relaciona el tiempo que mide un observador estático con el medido por un viajero que atraviesa el agujero de gusano con una velocidad radial β.

Para conocer la aceleración gravitacional local de un agujero de gusano, reemplazamos la métrica de Morris-Thorne (2.1) en la ec.(1.6) de donde se cuentra:

$$g = c^2\Phi'\left(1-\frac{b}{r}\right). \tag{2.30}$$

Los observadores estáticos, para mantenerse en una posición fija deben tener una aceleración g.
Estableciendo la situación hipotética de dos estaciones espaciales (observadores estáticos) y un pasajero de viaja de la estación A a la estación B en diferentes universos, entonces las estas estaciones espaciales deben encontrarse a una distancia lejana del agujero de gusano $+l_2$ y $-l_1$ respectivamente, para que los efectos gravitacionales sean mínimos en ellas. Por lo tanto, $b/r << 1$ para que el universo sea casi plano, $|\Phi| << 1$ para que el *redshift* gravitacional sea casi nulo y la gravedad medida $g \simeq \Phi' c^2 \lesssim g_{tierra}$.

Como $|\Phi| << 1$ entonces el intervalo de tiempo medido por el observador estático es igual al tiempo coordenado (2.26). Además, si consideramos que el intervalo

de tiempo medido por el viajero y por las estaciones es adecuado para un ser humano (1 año)[33]. A partir de las ecuaciones (2.29) y (2.28) se obtienen las siguientes condiciones

$$\Delta\tau_v = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{\beta\gamma} \lesssim 1 \quad \text{año}, \tag{2.31}$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{\beta e^{\Phi}} \lesssim 1 \quad \text{año}. \tag{2.32}$$

Las condiciones, impuestas a los parámetros geométricos del agujero de gusano para hacerlo atravesable por un viajero hipotético, tienen también consecuencias en la materia que genera el agujero de gusano. Las ecuaciones de campo de Einstein permiten obtener restricciones en el tipo de materia que generan esta clases objetos. Siguiendo a [33] definiremos la función de exoticidad como

$$\xi = \frac{-\bar{P}_r - \bar{\rho}}{|\bar{\rho}|} = \frac{\dfrac{b}{r} - 2r\left(1 - \dfrac{b}{r}\right)\Phi' - b'}{|b' - \Lambda r^2|}. \tag{2.33}$$

En [22] se detalla sobre la condición de *flare-out* con la cual debe cumplir un agujero de gusano para ser atravesable. Brevemente, la función $r(z)$ (función inversa de la superficie embebida) debe cumplir con la condición $d^2r/dz^2 > 0$ cerca de la garganta, como indica la Fig. (2.1b). Obteniendo la inversa y derivando la función (2.22) se obtiene

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0. \tag{2.34}$$

Combinando las ecuaciones (2.33) y (2.34) se consigue la siguiente expresión para la función de exoticidad

$$\xi = \frac{2b^2}{r|b' - \Lambda r^2|}\frac{d^2r}{dz^2} - 2r\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{|b' - \Lambda r^2|}. \tag{2.35}$$

Cerca de la garganta se satisface $\left(1 - \dfrac{b}{r}\right)\Phi' \to 0$. Sustituyendo en esta ecuación los resultados obtenidos de la ecuación de Einstein con la métrica de Morris-Thorne (2.16) y(2.17), se encuentra

$$\xi(r_0) = \frac{-\bar{P}_r(r_0) - \bar{\rho}(r_0)}{|\bar{\rho}(r_0)|} \geq 0. \tag{2.36}$$

Consecuentemente, cerca de la garganta $\bar{P}_r + \bar{\rho} = P_r + \rho \leq 0$. Por lo tanto, para crear un agujero de gusano atravesable se requiere que la materia cerca de la garganta viole la condición de energía nula (NEC)[33]. A continuación, se explicarán los conceptos básicos sobre las condiciones de energía clásicas.

2.2. Condiciones de energía clásicas

La Relatividad General establece que el la materia afecta a la curvatura del espacio tiempo. Sin embargo, no se explicita las características debe tener la materia. Consecuentemente, se han desarrollado diferentes reglas que se espera que la energía macroscópica satisfaga. Estas se utilizan para la resolución de ciertas demostraciones como los teoremas de singularidad [9] y para estudiar la plausibilidad de soluciones exóticas como agujeros de gusano, *Warp drives* o máquinas del tiempo [26]. Existen diferentes tipos de restricciones en la forma del tensor energía impulso. A continuación se nombra las condiciones de energía lineales, donde v^a es la cuadrivelocidad de un observador tipo temporal y K^a es un vector tipo lumínico.

- Un tensor energía-impulso T_{ab} satisface la condición de energía débil (WEC) si $T_{ab}v^a v^b \geq 0$. Por lo tanto, no existe la energía negativa.
- Un tensor energía-impulso T_{ab} satisface la condición de energía fuerte (SEC) si $(T_{ab} - Tg_{ab}/2)v^a v^b \geq 0$, donde T es la traza de T_{ab}. Consecuentemente, la gravedad es siempre atractiva.
- Un tensor energía-impulso T_{ab} satisface la condición de energía dominante (DEC) si $F_a F^a \leq 0$, $T_{ab}v^a v^b \geq 0$, donde $F_a = -T_{ab}v^b$. Por lo cual, la densidad energética es no negativa y se propaga causalmente.
- Un tensor energía-impulso T_{ab} satisface la condición de energía nula (NEC) si $T_{ab}K^a K^b \geq 0$. Es decir, la congruencia de geodésicas nulas es localmente no divergente.

Se ha demostrado que algunos campos cuánticos no cumplen con estas condiciones de energía [49]. Por ejemplo, la SEC se viola en escenarios cosmológicos durante la fase temprana de expansión inflacionaria [47]. El efecto Casimir presenta densidad de energía negativa, por lo que no cumple con ninguna de las condiciones de energía [32]. En consecuencia, se han establecido condiciones de energía medias. Por

ejemplo, la condición de energía nula media (ANEC) establece que en promedio la gravedad es atractiva [49]

$$\int_0^\infty T_{ab}K^aK^b d\lambda \geq 0 \textit{ para toda geodésica nula.} \tag{2.37}$$

De forma equivalente se establecen el resto de condiciones de energía media en geodésicas tipo temporales. También, existen otro tipo de restricciones, como las condiciones no lineales. Por ejemplo, la condición de flujo de energía (FEC) aclara que el flujo de energía se propaga de forma causal [25]. Por otra parte, se han establecido restricciones en la materia descrita por la teoría cuántica de campos conocidas como desigualdades cuánticas [12].

2.3. Desigualdades cuánticas (QEIs)

La materia descrita por la teoría cuántica de campos no cumple con las condiciones de energía. Sin embargo, satisfacen condiciones semejantes a estas denominadas desigualdades cuánticas de energía. Estas limitan la magnitud y duración de la densidad de energía cuántica negativa medida por un observador inercial [11]. Sea $\langle T_{ab}\rangle$ el tensor energía impulso medio renormalizado de un campo escalar, libre y mínimamente acoplado en un estado arbitrario. Sea u^a la cuadrivelocidad de un observador, tal que este mide la densidad de energía local $\langle T_{ab}u^au^b\rangle$ [11]. En el sistema de un unidades $G = \hbar = c = 1$ esta desigualdad establece

$$\frac{\tau_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\langle T_{ab}u^au^b\rangle d\tau}{\tau^2+\tau_0^2} \geq -\frac{3}{32\pi\tau_0^4}, \quad \forall\tau_0, \tag{2.38}$$

donde τ es el tiempo propio del observador inercial. La distribución Lorentziana se escoge a conveniencia, pues muestrea la energía en un intervalo de duración τ_0 alrededor un punto arbitrario de la trayectoria del observador. La condición (2.38) establece que mientras más negativa sea la densidad de energía en un intervalo τ_0, más pequeña debe ser la duración de τ_0. Esta formulación es para espacios planos [12], por lo que su aplicación en espacios curvos requiere ciertas restricciones.

En [11] se menciona que para aplicar las QEIs en un espacio tiempo curvo, se debe restringir la duración del intervalo τ_0 a ser mucho más pequeña que el radio

de curvatura característico. Las escalas longitudinales características de un agujero de gusano son

$$\overline{r_0} = b, \quad r_1 = \left|\frac{b}{b'}\right| \quad R_2 = \frac{1}{|\Phi'|}, \quad r_3 = \left|\frac{\Phi'}{\Phi''}\right|. \tag{2.39}$$

Además, la más pequeña de las escalas se define como

$$r_m = \text{mín}\left(\overline{r_0}, r_1, R_2, r_3\right). \tag{2.40}$$

En [11] se demuestra que si se define R_{max} como la máxima componente del tensor de curvatura

$$r_c \simeq \frac{1}{\sqrt{R_{max}}} \gtrsim r_m. \tag{2.41}$$

Esta condición se cumple en la garganta del agujero de gusano. Es decir, si estamos interesados en aplicar QEIs alrededor de la garganta, la condición anterior establece que para que el espacio tiempo sea semejante al de Minkowski se debe trabajar en una escala menor a $r_m(r_0)$ y por lo tanto se restringe la duración del intervalo a $\tau_0 << r_m(r_0)$[6]

En [33] se aclara que la creación de un agujero de gusano requiere una gran cantidad de materia exótica. Una forma de minimizar la cantidad de energía necesaria es confinar la zona donde se ubica la materia exótica, es decir, establecer que la distribución de energía se limite a una pequeña zona alrededor de la garganta y que el resto del espacio este vacío o contenga materia común [49].

2.4. Agujeros de gusano tipo *thin Shell*

Los agujeros de gusano tipo *thin shell* se construyen mediante el procedimiento de "cortar" y "pegar". Este procedimiento consiste en unir el espacio tiempo que describe un agujero de gusano con un espacio tiempo vacío, a través de una hipersuperficie conocida como *thin shell*, la cual mantiene la materia exótica confinada [49]. En [33, 14, 25] se menciona como este proceso ayuda a minimizar la violación de las condiciones de energía. Ahora, siguiendo el procedimiento realizado en [25],

[6]En los ejemplos realizados en [11] se supone que $\tau_0 = f r_m(r_0)$, donde $f \sim 0{,}001$.

se considerará a la constante cosmológica interna del agujero de gusano como Λ_i. Por otra parte, a la constante cosmológica del espacio tiempo externo al agujero de gusano se la denominará Λ_e. La unión se la realizará entre el espacio tiempo de Schwarzschild (externo) y el agujero de gusano de Morris-Thorne (interno), ambos con constantes cosmológicas genéricas.

Las componentes de ambos tensores métricos deben coincidir en la frontera de unión. Sin embargo, esta restricción no es suficiente para lograr una transición suave entre estos. Lo usual es utilizar la segunda forma fundamental como se muestra en [37, 49]. No obstante, en [25] se indica que para espacios con simetría esférica es suficiente utilizar la ecuación de campo de Einstein. A partir de la ecuación de campo se puede determinar el tensor energía-impulso t_{ab} de la superficie S que une ambos espacios. Si la superficie no posee características energéticas o de presión se le denomina superficie de frontera. Por el contrario, si $t_{ab} \neq 0$ se le designa como *thin shell*.

Si consideramos que la superficie de unión S se encuentra en $r = a$ y que en esta la métrica externa (Schwarzschild) (1.14) e interna (Morris-Thorne) (2.1) coinciden, se obtiene que

$$\Phi_i(a) = \Phi_e(a) = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2GM}{c^2 a} - \frac{\Lambda_e a^2}{3}\right), \tag{2.42}$$

$$b_i(a) = b_e(a) = \frac{2GM}{c^2} + \frac{\Lambda_e a^3}{3}, \tag{2.43}$$

donde el subíndice i indica que la función pertenece al espacio tiempo interno y e al externo. Además, de la ec.(2.43) se obtiene una expresión para la masa del agujero de gusano

$$M = \frac{c^2}{2G}\left(b_i(a) - \frac{\Lambda_e a^3}{3}\right). \tag{2.44}$$

Para estudiar el comportamiento de las derivadas de la métrica en $r = a$, se utiliza la ecuación de Einstein. Esto permite relacionar la estructura geométrica de ambos espacios con las propiedades de la superficie de unión S. En [49] se muestra que S posee propiedades energéticas dependientes de las características geométricas la variedad interna y externa. Ahora, siguiendo el procedimiento de [25] se obten-

drá el tensor energía impulso del *thin shell*. Por facilidad solo se considerarán los espacios de fuerza tidal nula , $\Phi_i' = 0$.

Anteriormente, se encontró la igualdad con la que deben cumplir ambas métricas para tener una unión continua en S. Sin embargo, como indica [33] esto no necesariamente sucede con las primeras y segundas derivadas de la métrica. Al depender el tensor de Einstein $G_{\hat{a}\hat{b}}$ de estos elementos y además ser proporcional a $T_{\hat{a}\hat{b}}$, el tensor energía-impulso refleja esta discontinuidad. Por consiguiente, se puede considerar que en la frontera S

$$T_{\hat{a}\hat{b}}(\hat{r} = \hat{a}) = t_{\hat{a}\hat{b}}\delta(\hat{r} - \hat{a}), \tag{2.45}$$

donde $\hat{r} = \sqrt{g_{rr}}r$ es la distancia propia hasta el *thin shell* y $t_{\hat{a}\hat{b}}$ el tensor energía impulso de S [7]. Para encontrar las componentes de $t_{\hat{a}\hat{b}}$ tomaremos la integral infinitesimal a través de la frontera

$$\int_-^+ G_{\hat{a}\hat{b}}d\hat{r} = \frac{8\pi G}{c^4}\int_-^+ t_{\hat{a}\hat{b}}\delta(\hat{r} - \hat{a})d\hat{r}, \tag{2.46}$$

donde (-) indica la variedad interna y (+) la externa. Utilizando las propiedades de la función δ, $\delta(f(x)) = f'(x)^{-1}\delta(x)$ y $\int_-^+ g(x)\delta(x - x_0)dx = g(x_0)$, se obtiene de la ecuación (2.46) la siguiente expresión

$$t_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{c^4}{8\pi G}\int_-^+ G_{\hat{a}\hat{b}}d\hat{r}. \tag{2.47}$$

Al ser una superficie infinitesimal no existe presión en la dirección radial. Por lo tanto, los únicos elementos de $t_{\hat{a}\hat{b}}$ son la densidad de energía superficial Σ y la presión tangencial superficial $\mathcal{P}$.

El valor de la densidad de energía superficial $\Sigma = t_{\hat{t}\hat{t}}$ se lo calculará usando (2.47). Sin embargo, la ec. (2.4) muestra que $G_{\hat{t}\hat{t}}$ depende solo de la primera derivada. Por lo tanto, por continuidad de la métrica en la frontera (2.43), se consigue

$$\Sigma = 0 \tag{2.48}$$

El valor de la presión tangencial superficial $\mathcal{P} = t_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ se lo calculará de la misma

[7] Recordando que se nota $\hat{x}$ al sistema de referencia ortogonal de un observador estático.

forma. En este caso, la ec.(2.6) muestra que el único termino que contribuye a la integral es $(1 - b/r)\Phi''$, el resto de términos están en función de las componentes de la métrica y sus primeras derivadas. Por lo tanto se obtiene

$$\mathcal{P} = \frac{c^4}{8\pi G}\sqrt{1 - \frac{b(a)}{a}}(\Phi'(+) - \Phi'(-)). \tag{2.49}$$

Sustituyendo en esta ecuación: $\Phi'_- = 0, \Phi'_+(a) = (1/2)(2GM/c^2a^2 - 2\Lambda_e a/3)/(1 - 2GM/c^2a - \Lambda_e a^2/3)$ y la ec. (2.43), se encuentra la expresión

$$\mathcal{P} = \frac{c^4}{8\pi Ga}\frac{\frac{GM}{c^2a} - \frac{\Lambda_e a^2}{3}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2a} - \frac{\Lambda_e a^2}{3}}}. \tag{2.50}$$

Esta ecuación indica que en el caso Schwarzschild Anti de Sitter y Schwarzschild plano, la presión tangencial superficial siempre es positiva.

Los resultados obtenidos indican que el tensor energía impulso de la hipersuperficie S tiene solo un elemento, la presión tangencial superficial $\mathcal{P}$. Por lo tanto, para tener una superficie de frontera (tensor de energía impulso nulo) basta con requerir que $\mathcal{P} = 0$, es decir

$$\Lambda_e = \frac{3GM}{c^2a^3}. \tag{2.51}$$

La nulidad del tensor energía impulso de S no representa un problema en la continuidad de la métrica. Las ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.19) requieren que la presión radial converja suavemente a 0 en la frontera S. No obstante, la densidad de energía y la presión tangencial pueden cortarse de forma discontinua [33]. A continuación, se explicará el comportamiento que tiene la presión radial alrededor del *thin shell*.

2.4.1. Presión radial

Para construir soluciones específicas de agujeros de gusano con constante cosmológica genérica, es necesario conocer el comportamiento de la presión radial a través del *thin shell*. La presión radial debe anularse suavemente en las proximidades de la hipersuperficie S, pero el resto de componentes pueden ser finitas. Este análisis se simplifica si se considera que $b_i(a) = b_e(a)$, $\Phi_i(a) = \Phi_e(a)$ y $\Phi'_i = 0$.

Sustituyendo estas suposiciones en la ecuación (2.17) se obtiene

$$\frac{b_i(a)}{a^3} = KP_{r(i)}(a) + \Lambda_i + 2\left(1 - \frac{b_i(a)}{a}\right)\frac{\Phi_i'(a)}{a}, \tag{2.52}$$

$$\frac{b_e(a)}{a^3} = KP_{r(e)}(a) + \Lambda_e + 2\left(1 - \frac{b_e(a)}{a}\right)\frac{\Phi_e'(a)}{a}. \tag{2.53}$$

De la ecuación(2.49), considerando que $e^{\Phi(a)} = \sqrt{1 - b(a)/a}$, se obtiene que

$$Ke^{\Phi(a)}\mathcal{P} = \left(1 - \frac{b(a)}{a}\right)\Phi_e'(a). \tag{2.54}$$

Usando (2.52),(2.54) y (2.53), la continuidad de la métrica en Sy la función de *redshift* interna constante, se obtiene:

$$-P_i(a) + \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda_i = -P_e(a) + \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda_e + \frac{2}{a}\mathcal{P}e^{\Phi(a)}. \tag{2.55}$$

La ec.(2.55) permite conocer como se relaciona la presión radial en la superficie con la presión tangencial en el *thin shell*. Por ejemplo, un caso particular es cuando $\mathcal{P} = 0$. En esta situación la masa del agujero de gusano es $M = \Lambda_e c^2 a^3/(3G)$ y $\Phi_e'(a) = 0$. Por lo tanto, existe continuidad de Φ' a través de la frontera. Además, de (2.43) se obtiene que $b_e(a) = \Lambda_e a^3$. También, como para todo valor de Λ_e, $P_{r(e)}(r) = 0$, la ec.(2.55) se reduce a

$$-P_i(a) + \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda_i = \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda_e. \tag{2.56}$$

Por lo tanto, esta solución fija la presión radial interna del agujero de gusano cerca de la frontera en función de la diferencia de las constantes cosmológicas.

Durante toda esta sección se han discutido las propiedades del agujero de gusano de Morris-Thorne. Entre todas estas se mencionó que la fuente de este objeto es la materia exótica, la cual no satisface las condiciones de energía. Teóricamente existen varios tipos de materia cuántica que violan estas condiciones [49]. Sin embargo, el único fenómeno capaz de producir energía exótica, que se ha medido experimentalmente, es el efecto Casimir. En el siguiente capítulo, se describirá como se puede utilizar la densidad de energía que proviene del efecto Casimir para construir agujeros de gusano. Para esto se usara una ecuación semiclásica de Einstein y

una versión cuántica de la condición de energía débil [13].

Capítulo 3

Agujeros de gusano de Casimir

Un agujero de gusano es una solución a la ecuación de Einstein que requiere materia exótica alrededor de su garganta para ser atravesable [33]. Sin embargo, no existe materia macroscópica que viole las condiciones de energía. Hasta ahora, el efecto Casimir [1] es la única fuente experimental de materia exótica de origen cuántico [49, 16]. A continuación se explicará en que consiste el efecto Casimir y que consideraciones deben realizarse para introducir su tensor energía impulso en la ecuación de Einstein. Además, se resumirá el procedimiento realizado en [13] para emplear la energía del efecto Casimir en la creación agujeros de gusano asintóticamente planos.

3.1. Efecto Casimir

El efecto Casimir es un fenómeno cuántico que surge cuando se perturba con placas conductoras el vacío cuántico electrodinámico. Fue predicho teóricamente en 1948 y se confirmó experimentalmente en los laboratorios Phillips [36]. La verificación experimental y los cálculos teóricos de la magnitud del efecto Casimir es una clara evidencia de la realidad del vacío cuántico.

Este experimento consiste de dos placas largas, paralelas, sin carga eléctrica, perfectamente conductoras y separadas a una distancia a. En efecto, se usan placas conductoras para imponer condiciones de frontera a los campos electromagnéticos.

[1] Otra fuente de materia exótica es el *Squeezed Vacuum*, el cual surge por distorsiones en el vacío cuántico electrodinámico. Utilizando el principio de incertidumbre se disminuye la energía de una región del vacío y en otra se aumenta, produciendo densidad de energía negativa. Este fenómeno viola las condiciones de energía clásicas, pero no las condición medias [49].

Si las dos placas se encuentran en el plano XY, entonces la componente Z del vector de onda de las fluctuaciones se escribe como

$$k_z = \frac{n\pi}{a}, \tag{3.1}$$

donde n es un número entero. La ec.(3.1) indica que la longitud de onda de las fluctuaciones del vacío entre las placas es una fracción de a, entonces la energía negativa renormalizada que se obtiene, mediante teoría cuántica de campos, es:

$$E^{Ren}(a) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^3} S, \tag{3.2}$$

donde S es la superficie de las placas[2]. La ecuación (3.2) indica que la energía que surge entre las placas es negativa, lo cual es consecuencia de lo establecido en (3.1). Es decir, la cantidad de fluctuaciones entre las placas es menor que las que se producen fuera de esta zona, alrededor de las placas. Además, se observa que $E^{Ren}(a)$ es inversamente proporcional al cubo de la distancia a, por lo que un aumento pequeño de a reduce la magnitud de la energía drásticamente. También, a partir de esta energía negativa, se obtiene una fuerza atractiva entre las placas dada por

$$F(a) = -\frac{dE^{Ren}(a)}{da} = -3S\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^4}, \tag{3.3}$$

la cual a su vez produce una presión

$$P(a) = \frac{F(a)}{S} = -3\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^4}. \tag{3.4}$$

Considerando que las placas son planas, el volumen entre estas es $V = Sa$, por lo que, de (3.2) se consigue que la densidad de energía entre las placas es

$$\rho_c = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^4}. \tag{3.5}$$

Las ecuaciones (3.5) y (3.4) indican que existe una relación entre la presión P y la densidad de energía ρ_c, lo cual permite establecer la ecuación de estado $P = \omega\rho$, donde $\omega = 3$.

Es importante notar que la energía del vacío depende de la geometría de las

[2]La deducción completa de este resultado se detalla en [52]

placas. En [8] se demuestra que la energía del efecto Casimir en cascarones esféricos es positiva. Por otra parte, en [49] se menciona que si se ignora la masa de las placas planas, el tensor energía impulso renormalizado del efecto Casimir en un sistema de referencia ortogonal es

$$\langle T^{\hat{a}\hat{b}} \rangle = \frac{\hbar c \pi^2}{720 a^4} \left(\eta^{\hat{a}\hat{b}} - 4 z^{\hat{a}} z^{\hat{b}} \right), \tag{3.6}$$

donde $z^a = (0, 0, 0, 1)$ y η_{ab} es la métrica de Minkowski. Es claro que el tensor energía impulso (3.6) lleva al siguiente resultado

$$P + \rho = -4 \frac{\hbar c \pi^2}{720 a^4} < 0, \quad \rho < 0. \tag{3.7}$$

Por otra parte, en [26] se muestra que la NEC[3] para tensores energía-impulso diagonales es

$$\rho + P_i \geq 0. \tag{3.8}$$

Asimismo, la WEC[4] para este tipo de tensores esta dada por

$$P_i + \rho \geq 0, \quad \rho \geq 0. \tag{3.9}$$

Por lo tanto, el efecto Casimir viola la condición débil de energía (WEC) y la condición nula de energía (NEC). Consecuentemente, no cumple con el resto de condiciones de energía clásicas [31]. Por otro lado, en [49] se menciona que, en un escenario real, la masa de las placas es mucho mayor que la cantidad de energía negativa $E^{Ren}(a)$. En [49] se estimó que para que no se cumpla la ANEC, la separación entre las placas debe ser del orden de la distancia inter-atómica. Por lo tanto, la violación a las condiciones de energía clásicas es mínima. Aun así, en [50] se aclara que es posible crear agujeros de gusano que violen mínimamente estas restricciones.

Se ha mencionado que los agujeros de gusano requieren materia exótica. Sin embargo, no existe una regla que imponga un límite a la cantidad de este tipo de energía, por lo que podría llegar a ser incluso infinita [50] . En [32] se estableció una versión cuántica de las condiciones de energía, donde se permite la materia exótica bajo ciertas condiciones.

[3] Condición nula de energía 2.2
[4] Condición débil de energía 2.2

3.1.1. Condición débil de energía cuántica (QWEC)

Los campos cuánticos no cumplen con las condiciones de energía clásicas, por lo que, se propusieron versiones cuánticas de algunas de estas [32]. Sin embargo, el cumplimiento de estas nuevas condiciones no es algo trivial. Una de las restricciones que tienen su versión cuántica y es de gran interés en la generación de agujeros de gusano es la WEC.

La condición débil de energía establece que $T_{ab}V^aV^b \geq 0$ para todo V^a tipo temporal, por consiguiente, no permite que exista energía negativa. Una formulación cuántica de esta restricción es la condición débil de energía cuántica (QWEC). Esta permite la existencia de valores negativos de energía, siempre que estos se encuentren acotados. Es decir, la energía medida por cualquier observador no puede ser excesivamente negativa. Esta condición se escribe como [32]

$$\langle T_{ab}\rangle V^aV^b \geq -\zeta\frac{\hbar N}{L^4}(U_aV^a)^2, \tag{3.10}$$

donde ζ es una constante positiva del orden de la unidad, N es la cantidad de campos, L la escala característica asociada al sistema, U^a es la cuadrivelocidad del sistema y V^a la cuadrivelocidad del observador.

La WEC establece que los tensores energía-impulso diagonales deben cumplir con la desigualdad (3.9). Igualmente, en este tipo de tensores, la QWEC $(\zeta = 1)$ se escribe como

$$P_i + \rho \geq -\frac{\hbar N}{L^4}, \quad \rho \geq -\frac{\hbar N}{L^4}. \tag{3.11}$$

Esto permite notar explícitamente que la cantidad de materia exótica está acotada. En [32] se establece de forma equivalente otras condiciones cuánticas como la QSEC y la QDEC. También, en [32] se demuestra que el efecto Casimir cumple con la QWEC y el resto de condiciones cuánticas. La QWEC permite establecer una relación lineal entre las componentes del tensor energía impulso, más adelante se explicará como [13] utiliza esta condición para encontrar soluciones de agujero de gusano de Casimir.

El efecto Casimir ha sido aplicado de diferentes maneras en la construcción de

agujeros de gusano [20, 21, 13, 14]. La forma más usual es utilizar la ecuación de Einstein y la métrica de Morris-Thorne, para obtener la función de forma b y *redshift* Φ de un agujero de gusano generado este fenómeno cuántico. Sin embargo, se deben tomar ciertas consideraciones, a causa de la naturaleza cuántica de este efecto.

3.2. Ecuación de Einstein y el efecto Casimir

La ecuación de Einstein establece que la curvatura del espacio tiempo es causada por la energía de un campo de materia, en este caso la energía del efecto Casimir. Siguiendo el procedimiento realizado en [13], se considerará que la distancia entre las placas no es constante, si no variable. Así, la constante a se torna en la coordenada radial r. El cambio realizado es semejante a considerar placas esféricas, ignorando los efectos causados por la curvatura de las placas [13]. Al realizar este cambio en la ec.(3.6) se consigue el tensor de energía impulso renormalizado

$$\langle T^{\hat{a}\hat{b}} \rangle = \frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4} \left(\eta^{\hat{a}\hat{b}} - 4 z^{\hat{a}} z^{\hat{b}} \right). \tag{3.12}$$

Al ser este un fenómeno cuántico, lo correcto sería utilizar una teoría cuántica de la gravedad, para describir sus efectos gravitacionales del efecto Casimir. Sin embargo, en la actualidad no existe un teoría unificadora valida experimentalmente. Por consiguiente, se utilizará la aproximación semiclásica de la ecuación de Einstein

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} \langle T_{ab} \rangle_{\omega}^{Ren}. \tag{3.13}$$

Esta ecuación se obtiene al cambiar el tensor energía impulso clásico T_{ab} de la ecuación de Einstein (1.1), por el tensor de energía impulso medio de un campo cuántico en el estado ω [40]. A esta formulación se le considera el punto medio entre la gravedad clásica y la hasta ahora elusiva gravedad cuántica. La ecuación semiclásica de Einstein considera que la materia tiene naturaleza cuántica y está descrita por la teoría cuántica de campos, mientras que al espacio tiempo lo define como clásico.

Suponiendo que las componentes del tensor energía-impulso del efecto Casimir

son

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4}, \quad T_{\hat{1}\hat{1}} = \omega\rho, \quad T_{\hat{2}\hat{2}} = T_{\hat{3}\hat{3}} = P_t, \tag{3.14}$$

la ecuación semiclásica de Einstein (3.13) con la métrica de Morris-Thorne (2.1) nos llevan a las ecuaciones (2.4)-(2.6), sin constante cosmológica. No obstante, las componentes del tensor energía impulso tienen origen cuántico. Al sustituir en estas ecuaciones las componentes del tensor energía-impulso (3.14), se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\frac{b'(r)}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4}, \tag{3.15}$$

$$-\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r} = -\omega\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4}, \tag{3.16}$$

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right)\left[\Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} + \frac{\Phi'}{r}\right] = \frac{8\pi G}{c^4}P_t. \tag{3.17}$$

Resolviendo las ecuaciones (3.15) y (3.16) se obtiene la siguiente función de forma y *redshift* respectivamente

$$b(r) = r_0 - \frac{r_1^2}{r_0} + \frac{r_1^2}{r}, \quad r_1^2 = \frac{\pi^3 l_p^2}{90}, \tag{3.18}$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}(\omega - 1)\log\left(\frac{r(\omega+1)}{\omega r + r_0}\right) + \Phi(r_0), \tag{3.19}$$

donde l_p es la longitud de Planck y se estableció

$$\omega = \omega_0 = (r_0/r_1)^2 \tag{3.20}$$

para evitar singularidades. Además, para que el agujero de gusano sea asintóticamente plano se ajusta el término

$$\Phi(r_0) = -\frac{1}{2}(\omega - 1)\log\left(\frac{\omega+1}{\omega}\right). \tag{3.21}$$

Por lo tanto la función de *redshift* se reduce a

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}(\omega - 1)\log\left(\frac{r\omega}{r\omega + r_0}\right) \tag{3.22}$$

y la función de forma a

$$b(r) = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) r_0 + \frac{r_0^2}{\omega r} \tag{3.23}$$

Reemplazando (3.22) y (3.23) en (3.17) se obtiene

$$P_t(r) = w_t(r)\rho(r), \quad -\frac{\omega^2(4r - r_0) + r_0(4\omega + 1)}{4(\omega r + r_0)} = w_t(r). \tag{3.24}$$

Por lo tanto, se consigue el siguiente tensor energía impulso

$$T_{ab} = \frac{r_0^2}{Kr^4}\left[diag(-1, -\omega, 1, 1) + (\omega_t(r) - 1)diag(0, 0, 1, 1)\right], \tag{3.25}$$

donde $K = 8\pi G/c^4$. Para que se cumpla la ecuación de estado del efecto Casimir se establece que $\omega = 3$, por lo que de la ec.(3.20) se consigue que $r_0^2 = 3r_1^2$. Es decir, el agujero de gusano tiene una garganta cuyo radio es del orden de la longitud de Planck. Además, si se compara el tensor energía impulso encontrado con el de la ec.(3.12) se nota que existe un aporte extra en la presión tangencial, causado por tener la coordenada radial r en lugar de la constante a [13].

Existen otras consideraciones que se pueden tomar para obtener una solución de agujero de gusano. Por ejemplo, en [14] se encontró agujeros de gusano cosmológicos usando el tensor energía impulso con la distancia entre las placas constante (3.6). Por otra parte, en [13] se utilizó la QWEC[5] y la ec. (3.13) para establecer una función de forma dependiente de una función de *redshift*.

3.3. Agujeros de gusano QWEC

Anteriormente se mencionó que el efecto Casimir cumple con las condiciones de energía cuántica propuestas en [32]. Por lo tanto, para imponer que el tensor energía impulso del efecto Casimir con la distancia entre las placas igual a la coordenada

[5]Formulación cuántica de la condición de energía débil (WEC)

radial (3.12) cumpla también con QWEC, [13] propone la siguiente restricción

$$\rho + P_r = -f(r) = -A\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha}, \tag{3.26}$$

donde A es una constante relacionada con la densidad de energía. La ec.(3.26) tiene una conexión directa con el cuantificador integral de volumen, el cual otorga información de la cantidad total de materia que viola la ANEC[6]. El cuantificador integral de volumen se define como [47]

$$I_V = \int |\rho + P_r| dV. \tag{3.27}$$

A través de la ecuación de Einstein es posible establecer $I_V(\rho, P_r) \rightarrow I_V(b(r), \Phi(r))$. Al sustituir (2.16) y (2.17) en (3.27) se obtiene

$$I_V = \frac{1}{K}\int (r - b(r))\frac{d}{dr}\left(\log\left(\frac{e^{2\Phi}}{1-\frac{b}{r}}\right)\right) dr. \tag{3.28}$$

Sustituyendo en esta ecuación los resultados obtenidos para el agujero de gusano de Casimir encontrado con la ecuación semiclásica se Einstein, se obtiene que la cantidad de energía total que viola las condiciones de energía es

$$I_V = -\frac{r_0 c^4}{6\pi G}. \tag{3.29}$$

Por lo tanto, al ser $r_0 \approx l_p$, la cantidad de energía total necesaria para la creación de un agujero de gusano Planckiano[7] con la densidad de energía del efecto Casimir, es arbitrariamente pequeña.

La QWEC se puede utilizar para obtener una función de forma $b(r)$ dependiente de una función de *redshift* $\Phi(r)$ y la condición (3.26). Reemplazando los resultados de la ecuación de Einstein (2.16) y (2.17) en (3.26) se encuentra[8]

$$b(r) = r\left(1 - Ke^{2\Phi(r)}\int_{r_0}^{r} e^{-2\Phi(r')} f(r') r' dr'\right), \tag{3.30}$$

la cual es independiente de la constante cosmológica Λ presente en la ecuación

[6]Condición de energía nula promedio 2.2
[7]Agujero de gusano cuya garganta tiene un tamaño semejante a la longitud de Planck.
[8]La demostración de este resultado se detalla en [13].

de Einstein. Sustituyendo en esta ecuación la función de *redshift* (3.22), se consigue una función de forma que asintóticamente es [13]

$$b(r) \approx r\left[1 - \frac{2AKr_0^2(8\alpha^2 - 12\alpha + 1)}{9\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}\right]. \tag{3.31}$$

Para que el agujero de gusano sea asintóticamente plano $b(r \to \infty)/r \to 0$. Al realizar el cambio de coordenadas

$$r = \hat{r}\sqrt{\frac{2AKr_0^2(8\alpha^2 - 12\alpha + 1)}{9\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}}, \tag{3.32}$$

se obtiene que la métrica del agujero de gusano es asintóticamente

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + d\hat{r}^2 + \Delta\hat{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{3.33}$$

donde

$$\Delta = \frac{2AKr_0^2(8\alpha^2 - 12\alpha + 1)}{9\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}, \tag{3.34}$$

dependiendo si $\Delta < 0$ o $\Delta > 0$ se dice que existe una deficiencia o exceso de ángulo sólido. En [7, 6] se relaciona esta variación en el ángulo sólido a la presencia de monopolos globales. Para eliminar esta alteración al ángulo sólido se establece que $\Delta = 1$. Consecuentemente, se obtiene que

$$A = \frac{9\alpha(\alpha-2)(\alpha-1)}{2Kr_0^2(8\alpha^2 - 12\alpha + 1)}. \tag{3.35}$$

Al sustituir este resultado en la función de forma y suponer que $\alpha = 4$, se encuentra [13]

$$b(r) = \frac{r_0}{3(3r + r_0)^2 r}\left[(2r + r_0)(3r + r_0)^2\right] = \frac{2r_0}{3} + \frac{r_0^2}{3r}. \tag{3.36}$$

Conocidas las funciones geométricas que caracterizan al agujero de gusano (b y Φ) se puede utilizar la ecuación de Einstein para obtener información sobre la materia que lo genera. Reemplazando la función de forma (3.36) y la función de *redshift* (3.22) en las ec. (2.16)-(2.18), se encuentran las componentes del tensor energía im-

pulso

$$\rho = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 r^4}, \quad P_r = 3\rho, \quad P_t = -\left(\frac{9r + r_0}{3r + r_0}\right)\rho, \quad r_0 = \sqrt{\frac{\pi^3}{30}} l_p. \tag{3.37}$$

La ecuación anterior muestra que al igual que el resultado (3.25) existe una diferencia con el valor de la presión tangencial (3.12). Además, el tamaño de la garganta del agujero de gusano se encuentra en la escala de Planck.

La libertad que da la ec.(3.30) de suponer funciones de *redshift* y obtener funciones de forma, permite a [13] suponer que $\Phi = 0$ en la ec.(3.30) y obtener

$$b(r) = r\left[1 - \frac{KAr_0^\alpha}{(\alpha - 2)r_0^{\alpha-2}} + \frac{KAr_0^\alpha}{(\alpha - 2)r^{\alpha-2}}\right], \quad \alpha \neq 2, \tag{3.38}$$

la cual presenta también una alteración en el ángulo sólido. Este problema se elimina al establecer que

$$r_0 = \sqrt{\frac{\alpha - 2}{KA}}, \tag{3.39}$$

donde $K = 8\pi G/c^4$. Por lo tanto, el radio de la garganta del agujero de gusano r_0 adquiere dependencia del factor A. Reemplazando el valor de r_0 (3.39) en la función de forma (3.38), se encuentra

$$b = \frac{r_0^{\alpha-2}}{r^{\alpha-3}}. \tag{3.40}$$

Al igual que antes, se puede utilizar la ecuación Einstein para obtener el tensor energía impulso de la materia que genera a este agujero de gusano. Considerando que $\Phi = 0$ y reemplazando la función de forma (3.40) en (2.16)-(2.18) se obtiene:

$$\rho = -(\alpha - 3)\frac{r_0^{\alpha-2}}{Kr^\alpha}, \quad P_r = -\frac{r_0^{\alpha-2}}{Kr^\alpha}, \quad P_t = -(\alpha - 2)\frac{r_0^{\alpha-2}}{2Kr^\alpha}. \tag{3.41}$$

Si $\alpha = 4$ y $r_0^2 = \dfrac{\pi^3 l_p^2}{90}$, la densidad de energía resultante es

$$\rho = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4}, \quad A = \frac{45\hbar c}{2 l_p^4 \pi^4}, \tag{3.42}$$

Por lo tanto, el radio de la garganta el agujero de gusano $r_0 \approx l_p$ y consecuentemente, la densidad de energía A es absurdamente grande. Por otro lado, considerando un caso general, se puede definir a la constante A como

$$A = \frac{4\hbar c\pi^2}{720a^4} \Rightarrow a = 0{,}7l_p, \tag{3.43}$$

para que corresponda con el resultado de la ec.(3.42). Sin embargo, esto es completamente absurdo, puesto que implica que la distancia entre las placas es del orden de la escala de Planck. Por otra parte, si no se impone que $a = 0{,}7l_p$, al reemplazar la ec.(3.43) en el radio de la garganta r_0 (3.39) se consigue que

$$r_0 = \frac{a^2}{l_p}\sqrt{\frac{90(\alpha - 2)}{4\pi^3}}. \tag{3.44}$$

Suponiendo que la distancia entre las placas del efecto Casimir es $a \sim 1[\mu m]$, la ecuación anterior indica que $r_0 \sim 10^{22}[m]$, es decir, el agujero de gusano es cosmológico [13]. Por otro lado, de (3.44)deduce que para conseguir que $r_0 \sim 10^5[m]$, la distancia entre las placas es $a \sim 1[fm]$.

De esta forma se concluye que el efecto Casimir genera agujeros de gusano Planckianos ($r_0 \sim l_p$), con la metodología propuesta en [13]. Por lo tanto, se ha tratado de encontrar una forma diferente de obtener agujeros de gusano de mayor tamaño y que requieran menor cantidad de materia exótica. Por ejemplo, en [14] se mantiene la distancia entre las placas constantes y se cambia $\omega \to \omega(r)$ en la ecuación de estado. De esta forma se logró obtener agujeros de gusano con un radio $r_0 \sim 10^{-17}m$. Por otro lado, en [20] usando la formulación del efecto Casimir de [13] y el principio de incertidumbre generalizado (GUP), se ha reducido la cantidad de materia exótica requerida. También, como se mencionó anteriormente, hay otras formas de minimizar el uso de energía exótica, como el confinamiento.

Las propiedades del agujero de gusano de Casimir mencionadas corresponden a un espacio tiempo asintóticamente plano. La adición de la constante cosmológica podría afectar al tamaño de la garganta, así como sus propiedades. Por otra parte, el tensor energía impulso (3.12) establece que la energía del efecto Casimir se distribuye hasta el infinito, lo cual va en contra de la formulación original de este fenómeno. Por consiguiente, un planteamiento más correcto sería confinar esta materia exótica.

Capítulo 4

Agujeros de gusano de Casimir asintóticamente anti de Sitter

Los agujeros de gusano asintóticamente planos han sido estudiados enormemente [49, 26]. Sin embargo, existen otros comportamiento asintóticos. Por ejemplo, los agujeros de gusano en un espacio tiempo inflacionario no son estáticos, por lo cual pueden aumentar el tamaño de su garganta a través del mecanismo de expansión del espacio tiempo [38]. Los agujeros de gusano asintóticamente anti de Sitter (AdS) son también de particular interés. En este caso las regiones asintóticas se expanden exponencialmente a causa de la constante cosmológica negativa [5]. Estos agujeros de gusano pueden verse como estados excitados suponiendo que la constante cosmológica se interprete como la energía de campos de materia asintóticos no nulos [5]. Además, en la física de altas energías, y en el contexto de la dualidad AdS/CFT (anti De Sitter/teorías de campo conformes) los agujeros de gusano AdS tienen asociada una CFT de modo que se pueden estudiar propiedades de entrelazamiento usando información proveniente del agujero de gusano[28]. Por consiguiente, es de interés encontrar soluciones de agujeros de gusano en con límite asintótico anti de Sitter.

En este capítulo se aplicará la metodología de [13] para encontrar una métrica de agujero de gusano que sea asintóticamente AdS, además este agujero debe sostenerse por la energía negativa proveniente del efecto Casimir. En la sec.4.1 se examina las consecuencias de suponer que la materia cumpla con la QWEC[1] en un espacio tiempo asintóticamente AdS. En la sec. 4.2 se utiliza la QWEC para construir aguje-

[1]Condición de energía cuántica, sec.3.1.1

ros de gusano de Casimir sin fuerza tidal[2]. En la sec.4.3 se aplica la formulación *thin shell* para unir al agujero de gusano sin fuerza tidal con el espacio tiempo de Schwarzschild con constante cosmológica. Finalmente, en la sec.4.4 se analiza la atravesabilidad del agujero de gusano tipo *thin shell*, así como su compatibilidad cuántica[3].

En la sec.3.2 se aclaró que la ecuación semiclásica de Einstein permite estudiar como los efectos cuánticos afectan al espacio tiempo clásico. También, en la sec.1.4 se mostró que la ecuación de Einstein admite la adición de un término extra, conocido como constante cosmológica Λ. Por lo tanto, la ecuación semiclásica de Einstein puede escribirse

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}\langle T_{ab}\rangle. \tag{4.1}$$

En adelante T_{ab} respresentará $\langle T_{ab}\rangle$, teniendo en cuenta que se hace referencia al tensor de energía impulso medio (normal ordenado) de un campo cuántico. En el sistema de referencia ortogonal de un observador estático la ecuación de Einstein (4.1) se reduce a

$$G_{\hat{a}\hat{b}} + \Lambda \eta_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\hat{a}\hat{b}}. \tag{4.2}$$

La resolución de la ecuación semiclásica de Einstein con la métrica de Morris-Thorne, lleva a las igualdades (2.16)-(2.18). Estas relacionan la función de forma $b(r)$ y la función de *redshift* $\Phi(r)$ con las componentes del tensor energía impulso diagonal $T_{\hat{a}\hat{b}} = diag(\rho, P_r, P_t, P_t)$.

Al igual que en [13] se supone que en el efecto Casimir la distancia entre las placas no es constante, sino que está dada por la coordenada radial r, por lo cual las componentes del tensor energía impulso son

$$\rho = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4}, \quad P_r = \omega \rho \tag{4.3}$$

donde ρ es la densidad de energía, P_r la presión radial y ω es una constante, la cual en el caso del efecto Casimir es $\omega = 3$. Una vez definidas las componentes del tensor energía impulso, se utilizan los resultados de la ecuación de Einstein con la métrica de Morris-Thorne para obtener $b(r)$ y $\Phi(r)$. Reemplazando la densidad de energía

[2]En [33] se dice $\Phi' = 0$ es un agujero de gusano sin fuerza tidal desde la perspectiva de un observador estacionario.

[3]Se dice que es compatible cuánticamente si cumple la desigualdad cuántica de energía, sec.2.3

ρ de (4.3) en (2.16) y la presión radial P_r de (4.3) en (2.17), se encuentra

$$-\frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4} = \frac{b'(r)}{K r^2} - \frac{\Lambda}{K}, \tag{4.4}$$

$$-\omega \frac{\hbar c \pi^2}{720 r^4} = \frac{1}{K r^2}\left(2\Phi'(r)(r - b(r)) - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{\Lambda}{K}, \tag{4.5}$$

donde $K = 8\pi G/c^4$. De (4.4) se obtiene la función de forma

$$b(r) = r_1^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \frac{\Lambda}{3}(r^3 - r_0^3) + r_0, \tag{4.6}$$

donde $r_1^2 = \pi^3 l_p^2/90$ y $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$ es la longitud de Planck. Reemplazando (4.6) en (4.5) se encuentra que

$$\Phi'(r) = \frac{1}{2}\frac{\Lambda r r_0(2r^3 + r_0^3) + 3r(r_1^2 - r_0^2) + 3r_0 r_1^2(\omega - 1)}{r(r - r_0)(r r_0(-3 + \Lambda(r^2 + r r_0 + r_0^2)) - 3r_1^2)}. \tag{4.7}$$

Esta ecuación no puede ser resuelta directamente de forma analítica. Aún así, en el apéndice C se describen algunas condiciones particulares bajo las cuales puede ser resuelta. Sin embargo, no se logró encontrar agujero de gusano alguno que sea atravesable.

A continuación, se examinará las consecuencias de asumir la condición de energía cuántica (QWEC) en un espacio tiempo asintóticamente AdS/dS y su conexión con el efecto Casimir.

4.1. QWEC

La condición débil de energía cuántica (QWEC) permite la existencia de materia exótica de forma limitada [37]. Esta condición fue utilizada por [13] para obtener (3.30), la cual permite encontrar funciones de forma $b(r)$ a partir de una función de *redshift* $\Phi(r)$ particular. Una forma de establecer que el espacio tiempo sea asintóticamente AdS es asumir que la función de *redshift* del agujero de gusano es

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\log(1 - r^2\frac{\Lambda}{3} + \zeta(r)), \tag{4.8}$$

donde Λ es la constante cosmológica y $\zeta(r)$ es una función asintóticamente decreciente. Además, las soluciones a la ecuación

$$1 - r^2\frac{\Lambda}{3} + \zeta(r) = 0, \tag{4.9}$$

deben ser complejas o menores que el radio de la garganta del agujero de gusano r_0, para que no existan horizontes de eventos y así se permita el viaje a través del agujero de gusano en ambos sentidos.

Si se asume que las componentes del tensor energía impulso que generan al agujero de gusano cumplen con la condición de energía cuántica (3.26), propuesta por [13][4]. Entonces, al reemplazar la función de *redshift* de la ec.(4.8) en la ec. (3.30) se encuentra la función de forma

$$b(r) = r\left(1 - KAr_0^{\alpha}\left(1 - r^2\frac{\Lambda}{3} + \zeta(r)\right)J(r,\alpha)\right), \quad K = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{4.10}$$

donde A es una constante relacionada con la cantidad de materia exótica presenta en la garganta, α es una constante y

$$J(r,\alpha) = \int_{r_0}^{r}\frac{r'}{r'^{\alpha}}\frac{dr'}{1 - \dfrac{\Lambda r'^2}{3} + \zeta(r')}. \tag{4.11}$$

La función ζ más sencilla que puede definirse es trivialmente, $\zeta = 0$. Si se supone que $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces en la ecuación anterior, utilizando el método de integración por fracciones parciales se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned} J(r,\alpha) = &\sum_{i=0}^{\frac{\alpha}{2}-2}\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^i\frac{-1}{\alpha - 2(1+i)}\left(\frac{1}{r^{\alpha-2(1+i)}} - \frac{1}{r_0^{\alpha-2(1+i)}}\right) + \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\log\left(\frac{r}{r_0}\right) - \\ &- \frac{3}{2\Lambda}\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\log\left(\frac{3 - \Lambda r^2}{3 - \Lambda r_0^2}\right), \quad \alpha \text{ par}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

[4]Esta condición establece que la densidad de energía ρ y la presión radial P_r de un agujero de gusano cumplen con $\rho + P_r = -A\frac{r_0^{\alpha}}{r^{\alpha}}$.

$$J(r,\alpha)=\sum_{i=0}^{\frac{\alpha-3}{2}}\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{i}\frac{-1}{\alpha-2(1+i)}\left(\frac{1}{r^{\alpha-2(1+i)}}-\frac{1}{r_0^{\alpha-2(1+i)}}\right)+ \\ +\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left[arctanh\left(r\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)-arctanh\left(r_0\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)\right],\quad \alpha \text{ impar.} \tag{4.13}$$

El termino $\log((3-\Lambda r^2)/(3-\Lambda r_0^2))$ en (4.12) indica que si α es par, $J(r,\alpha)$ está bien definido para toda constante cosmológica negativa. Por otra parte, si $\Lambda > 0$ se debe imponer la siguiente condición

$$r_0^2 > \frac{3}{\Lambda}, \tag{4.14}$$

la cual es una restricción fuerte, puesto que si la garganta tuviese un radio semejante a la longitud de Planck, la constante cosmológica $\Lambda \sim 10^{70}[m^{-2}]$.
La manera más sencilla de obtener una función de forma a través de la (4.10) es considerar que $\alpha = 2$. Así, a partir de la (4.12) se encuentra

$$J(r,2)=\log\left(\frac{r}{r_0}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{-\Lambda r^2+3}{-\Lambda r_0^2+3}\right). \tag{4.15}$$

Después, reemplazando (4.15) en (4.10) se obtiene la función de forma

$$b(r)=r\left(1-AKr_0^2\left(\frac{-\Lambda r^2}{3}+1\right)\left(\log\left(\frac{r}{r_0}\right)-\frac{1}{2}\log\left(\frac{-\Lambda r^2+3}{-\Lambda r_0^2+3}\right)\right)\right). \tag{4.16}$$

La métrica de agujero de gusano de Morris-Thorne (2.1) indica que la componente radial de la métrica es

$$g_{rr}=\frac{1}{1-\dfrac{b}{r}}. \tag{4.17}$$

Entonces, usando (4.16) se encuentra que

$$g_{rr}=\frac{1}{-AKr_0^2\left(1-\dfrac{r^2\Lambda}{3}\right)\log\left(\sqrt{\dfrac{3-r^2\Lambda}{3-r_0^2\Lambda}}\dfrac{r_0^2}{r^2}\right)}. \tag{4.18}$$

Por consiguiente, en el límite asintótico se consigue

$$g_{rr}(r \to \infty) = \frac{1}{\frac{AKr_0^2}{2}\left(1 - \frac{r^2\Lambda}{3}\right)\log\left(1 - \frac{3}{r_0^2\Lambda}\right)}. \tag{4.19}$$

Para que la métrica del agujero de gusano converja asintóticamente a la métrica de AdS/dS[5], se establece que

$$A = \frac{1}{Kr_0^2\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{3}{r_0^2\Lambda}\right)}. \tag{4.20}$$

La constante A debe ser positiva para que se cumpla la condición (3.26) y la condición de *flare out*[6], esto solo se consigue si $\Lambda < 0$ [7]. Por lo tanto, esta solución es un agujero de gusano de Morris-Thorne si es asintóticamente AdS. Reemplazando en (4.16) el valor de la constante A dada en (4.20), se encuentra que la función de forma se reduce a

$$b(r) = \frac{r\left(\Lambda r^2 - 3\right)\left(2\log\left(\frac{r}{r_0}\right) - \log\left(\frac{\Lambda r^2 - 3}{\Lambda r_0^2 - 3}\right)\right)}{3\log\left(1 - \frac{3}{\Lambda r_0^2}\right)} + r. \tag{4.21}$$

La ecuación (2.16) permite obtener una densidad de energía a partir una función de forma conocida, por lo cual sustituyendo (4.21) en (2.16) se consigue

$$\rho = \frac{2\left(\Lambda r^2 - 1\right)\log\left(\frac{r}{r_0}\right) + \left(1 - \Lambda r^2\right)\log\left(\frac{\Lambda r^2 - 3}{\Lambda r_0^2 - 3}\right) + \left(1 - \Lambda r^2\right)\log\left(1 - \frac{3}{\Lambda r_0^2}\right) - 2}{Kr^2\log\left(1 - \frac{3}{\Lambda r_0^2}\right)}, \tag{4.22}$$

la cual es la densidad de energía que origina a este agujero de gusano asintóticamente AdS. Por otro lado, sustituyendo la densidad de energía (4.22) en la ec.(3.26)

---

[5] $ds^2 = -\left(1 - r^2\frac{\Lambda}{3}\right) + \left(1 - r^2\frac{\Lambda}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$, si $\Lambda > 0$ de Sitter, si $\Lambda < 0$ anti de Sitter

[6] Un agujero de gusano de Morris-Thorne cumple con $\rho(r_0) + P_r(r_0) < 0$, sec.2.1.4 [33].

[7] Si $\Lambda > 0 \Rightarrow A < 0$ y por lo tanto $\rho(r) + P_r(r) = -\frac{Ar_0^\alpha}{r^\alpha} > 0$, es decir no se cumple la condición *flare out*, la cual es necesaria para la atravesabilidad del agujero de gusano, sec.2.1.4

se obtiene la presión radial

$$P_r(r) = -\frac{1}{\frac{K}{2}\log\left(1-\frac{3}{r_0^2\Lambda}\right)}\frac{1}{r^2} - \rho(r). \tag{4.23}$$

En la fig.4.1 se observa que con $\alpha = 2$ la densidad de energía es positiva en el sistema de referencia de un observador estático. Aún más, esta aumenta a medida que la coordenada radial se acerca a la garganta. Aunque parece que la densidad de energía positiva va en contra de la definición de materia exótica, la ecuación (4.23) muestra que $P_r + \rho < 0$, por lo cual se cumple la condición de *flare out* y se viola la condición de energía débil. La densidad de energía negativa es medida por observadores relativistas como consecuencia de la condición de *flare out*, no necesariamente por observadores estáticos [33].

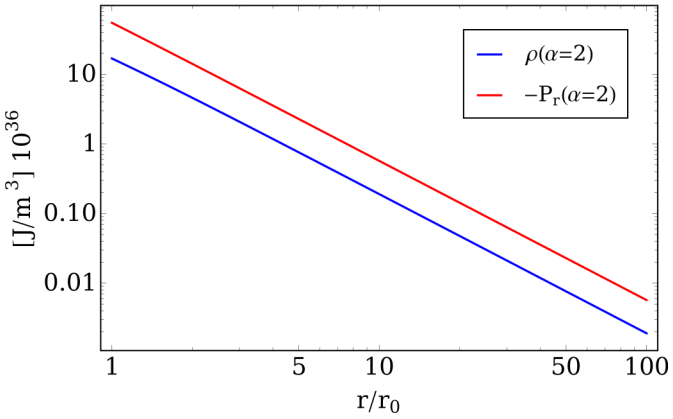


Figura 4.1: Presión radial P_r y densidad energética ρ en escala logarítmica de la materia que genera un agujero de gusano asintóticamente AdS con $\alpha = 2$. Las componentes del tensor energía impulso cumplen con la QWEC (sec.3.3). Los valores supuestos son: constante cosmológica $\Lambda = -10^{-5}[m^{-2}]$ y el radio de la garganta $r_0 = 10^3[m]$.

El mismo análisis puede realizarse para otros valores de α. Por ejemplo, si se asume que $\alpha = 4$, de la ecuación (4.12), se encuentra que

$$J(r,4) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}\log\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{\Lambda}{6}\log\left(\frac{3+\Lambda r^2}{3+\Lambda r_0^2}\right). \tag{4.24}$$

Reemplazando este resultado en (4.10) se consigue la función de forma

$$b(r) = r\left(1 - 3AKr_0^4\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\left(-\frac{1}{18}\Lambda \log\left(\frac{3-\Lambda r^2}{3-\Lambda r_0^2}\right) - \frac{1}{6r^2} + \frac{1}{6r_0^2} + \frac{1}{9}\Lambda \log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)\right). \tag{4.25}$$

Al igual que con $\alpha = 2$, la constante A debe tomar un valor específico para lograr que la métrica sea asintóticamente AdS/dS. Por consiguiente, se debe imponer que

$$A = \frac{1}{Kr_0^4\frac{\Lambda}{6}\left[\log\left(1 - \frac{3}{r_0^2\Lambda}\right) + \frac{3}{\Lambda r_0^2}\right]}, \tag{4.26}$$

donde se advierte que

$$\log\left(1 - \frac{3}{r_0^2\Lambda}\right) + \frac{3}{\Lambda r_0^2} < 0, \tag{4.27}$$

utilizando la restricción (4.14). Por lo tanto, A es positivo si la constante cosmológica Λ es negativa. Al igual que el resultado encontrado para $\alpha = 2$, esta solución es un agujero de gusano de Morris-Thorne si el espacio tiempo es asintóticamente AdS. Sustituyendo (4.26) en (4.25) se encuentra que la función de forma se reduce a

$$b(r) = \frac{\left(\Lambda r^2 - 3\right) r\left(\Lambda r_0^2 \log\left(\frac{\Lambda - 3/r_0^2}{\Lambda - 3/r^2}\right) + 3\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\right)}{3\left(\Lambda r_0^2 \log\left(1 - 3/(\Lambda r_0^2)\right) + 3\right)} + r. \tag{4.28}$$

Una vez encontrada la función de forma se la reemplaza en la métrica de Morris-Thorne (2.1) junto con la función de *redshift* (4.8) y se obtiene la métrica de agujero de gusano

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)c^2dt^2 + \frac{\left(\frac{\Lambda r_0^2}{3}\log\left(1 - \frac{3}{\Lambda r_0^2}\right) + 1\right)dr^2}{\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\left(\frac{\Lambda r_0^2}{3}\log\left(\frac{\Lambda - \frac{3}{r_0^2}}{\Lambda - \frac{3}{r^2}}\right) + 1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)} + r^2 d\Omega^2. \tag{4.29}$$

Al igual que con $\alpha = 2$, reemplazando la ec.(4.28) en la ec.(2.16) se obtiene la densidad de energía

$$\rho(r) = \frac{-r_0^2}{3Kr^4\left(\frac{\Lambda}{3}r_0^2\log\left(1-\frac{3}{\Lambda r_0^2}\right)+1\right)}\Bigg[3\Lambda r^2+ \\ +\Lambda r^2\left(\Lambda r^2-1\right)\left(\log\left(\frac{\Lambda r^2-3}{\Lambda r_0^2-3}\right)+\log\left(1-\frac{3}{\Lambda r_0^2}\right)-2\log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)+3\Bigg]. \tag{4.30}$$

Por otro lado, la presión radial se obtiene a partir de la condición (3.26)

$$P_r(r) = -\frac{1}{r^4\frac{K\Lambda}{6}\left[\log\left(1-\frac{3}{r_0^2\Lambda}\right)+\frac{3}{\Lambda r_0^2}\right]}-\rho(r) \tag{4.31}$$

En la fig.4.2 se muestra que a diferencia de los resultados con $\alpha = 2$ (fig.4.1), con $\alpha = 4$ la densidad de energía es negativa en el sistema de referencia de un observador estático. Aún más, se advierte que conforme la coordenada radial se aproxima a la garganta aumenta la densidad de energía negativa.

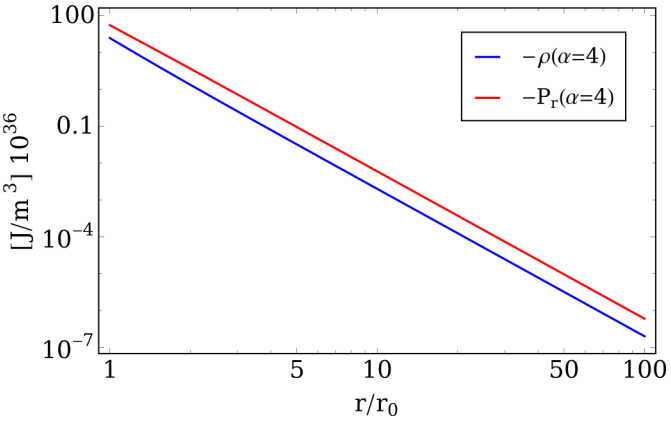


Figura 4.2: Presión radial P_r y densidad energética ρ en escala logarítmica de la materia que genera un agujero de gusano asintóticamente AdS con $\alpha = 4$. Las componentes del tensor energía impulso cumplen con la QWEC (sec.3.3). Los valores supuestos son: constante cosmológica $\Lambda = -10^{-5}[m^{-2}]$ y el radio de la garganta $r_0 = 10^3[m]$.

Las componentes del tensor energía impulso que describen al efecto Casimir están dadas por la ecuaciones (4.3). Estas fueron propuestas para describir como este fenómeno cuántico puede crear agujeros de gusano asintóticamente planos [13]. Por

consiguiente, para comparar los resultados obtenidos con los de la ecuación (4.3) se debe trabajar en el límite en el cual la constante cosmológica se anula. Si $\alpha = 4$ la densidad de energía dada por la ec.(4.30) muestra que si se toma el límite $\Lambda \to 0$ se consigue

$$\lim_{\Lambda \to 0} \rho(r, \alpha = 4) = -\frac{r_0^2}{Kr^4}. \tag{4.32}$$

Igualmente, para la presión radial dada en (4.31) se encuentra

$$\lim_{\Lambda \to 0} P_r(r, \alpha = 4) = -\frac{r_0^2}{Kr^4}. \tag{4.33}$$

Esto indica que si $\Lambda \to 0$ la presión radial es igual a la densidad de energía, por lo cual su ecuación de estado en este límite es $P_r = \omega\rho$, donde $\omega = 1$. Para que la densidad de energía corresponda con la de Casimir, se supone la igualdad (4.32) con la densidad de energía dada en (4.3) y se encuentra que $r_0 = \sqrt{\pi^3/30} l_p$. Por lo tanto, el agujero de gusano "de Casimir" asintóticamente AdS tiene una garganta cuyo tamaño es similar a longitud de Planck, lo cual también ha sido encontrado en el espacio tiempo plano [13].

En la siguiente sección se explorará un tipo de restricciones que pueden imponerse en la materia que cumple con la QWEC, para que se comporte como el efecto Casimir y origine agujeros de gusano sin fuerza tidal.

4.2. QWEC con fuerza tidal nula

A través de la QWEC se obtiene (3.30), la cual permite encontrar una familia de funciones forma a partir de una función de *redshift* establecida. Una de las funciones más sencillas que se puede asumir es considerar que la función de *redshift* es constante, es decir el caso de fuerza tidal nula. En la sección 3.3 se mostró que en este caso el agujero de gusano de Casimir es Planckiano [13]. Sin embargo, se pueden asumir otras restricciones para conseguir un agujero de gusano con un mayor tamaño de garganta, cuya materia tenga un comportamiento similar a la del efecto Casimir.

Si establecemos en la ec.(3.30) que la función de *redshift* es $\Phi(r) = \Phi_0$, donde Φ_0

es una constante, se encuentra que

$$b(r) = r\left(1 - \frac{KAr_0^{\alpha}}{2-\alpha}\left(r^{2-\alpha} - r_0^{2-\alpha}\right)\right), \quad \alpha \neq 2, \quad K = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{4.34}$$

La ecuación (2.16), que se obtuvo a partir de la ecuación de Einstein, permite encontrar la densidad de energía de la materia que genera al agujero de gusano a través de la función de forma del mismo. Así, reemplazando la función de forma (4.34) en (2.16) se obtiene

$$K\rho = \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{AKr_0^2}{2-\alpha}\right) - \frac{AKr_0^{\alpha}}{r^{\alpha}}\left(1 + \frac{1}{2-\alpha}\right) - \Lambda_i, \tag{4.35}$$

donde Λ_i es una constante cosmológica interna genérica. Ahora, se definirán los factores β y σ

$$-\frac{\beta}{d^2} = 1 + \frac{AKr_0^2}{2-\alpha}, \tag{4.36}$$

$$\sigma\frac{d^{\alpha}}{d^4} = AKr_0^{\alpha}\frac{3-\alpha}{2-\alpha}, \tag{4.37}$$

donde d se denomina distancia entre las placas, r_0 es el radio de la garganta del agujero de gusano y A es una constante relacionada con la cantidad de materia exótica en la garganta. Reemplazando en la ecuación (4.35) los factores definidos en .(4.36) y (4.37), se obtiene la densidad de energía

$$K\rho = -\frac{\beta}{d^2r^2} - \frac{\sigma}{d^4}\left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha} - \Lambda_i. \tag{4.38}$$

El objetivo de imponer que la densidad de energía dependa de los factores β y σ es delimitar una región del espacio donde la materia tenga un comportamiento similar al del efecto Casimir. La ecuación (4.38) indica que en $r = d$ la densidad de energía es

$$\rho(r = d) = -\frac{\beta}{Kd^4} - \frac{\sigma}{Kd^4} - \frac{\Lambda_i}{K}. \tag{4.39}$$

Si suponemos que en $r = d$ la materia se comporta como el efecto Casimir. Entonces, al comparar la densidad de energía en este punto con la densidad de energía

del efecto Casimir, dada por (3.5), se obtiene la siguiente igualdad

$$\beta + \sigma + \Lambda_i d^4 = r_1^2, \quad r_1^2 = \frac{\pi^3 l_p^2}{90}, \tag{4.40}$$

donde l_p es la longitud de Planck. Por otro lado, usando (4.37) se encuentra la constante A:

$$A = \frac{1}{K r_0^\alpha} \left(\frac{2-\alpha}{3-\alpha} \right) \sigma \frac{d^\alpha}{d^4}. \tag{4.41}$$

La condición de energía cuántica débil (QWEC) de la ecuación (3.26) permite conseguir una presión radial P_r a partir de una densidad de energía ρ. Sustituyendo en esta ecuación la densidad de energía (4.38) y la constante A (4.41), se encuentra

$$P_r(r) = -\left(\frac{2-\alpha}{3-\alpha} \right) \frac{\sigma}{K d^4} \left(\frac{d}{r} \right)^\alpha - \rho(r). \tag{4.42}$$

Para que la materia tenga un comportamiento similar al efecto Casimir en $r = d$, debe suponerse que en este punto se cumple la ecuación de estado $P_r(d) = 3\rho(d)$. Esto lleva al siguiente resultado

$$4\frac{r_1^2}{d^4} = \left(\frac{2-\alpha}{3-\alpha} \right) \frac{\sigma}{d^4} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 4 \left(\frac{3-\alpha}{2-\alpha} \right) r_1^2. \tag{4.43}$$

Luego, reemplazando en la ecuación (4.40) el valor de σ encontrado, se consigue

$$\beta = r_1^2 \left(1 - 4 \left(\frac{3-\alpha}{2-\alpha} \right) \right) - \Lambda_i d^4, \tag{4.44}$$

Igualmente, sustituyendo en la ecuación (4.41) el valor de σ encontrado, se encuentra

$$A = \frac{1}{K} \left(\frac{d}{r_0} \right)^\alpha \left(\frac{4r_1^2}{d^4} \right). \tag{4.45}$$

Una vez encontrados los valores de los parámetros β, σ y A, la función de forma (4.34) se reduce a

$$b(r) = \frac{4r r_1^2}{d^2} \left(\frac{\alpha-3}{\alpha-2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\alpha-2} \left(\frac{d}{r} \right)^{\alpha-2} \right) + \Lambda_i d^2 r. \tag{4.46}$$

Reemplazando esta función de forma en la métrica de Morris-Thorne (2.1) se encuentra que la métrica del agujero de gusano sin fuerza tidal es

$$ds^2 = -\Phi_0 c^2 dt^2 + \frac{(2-\alpha)d^4}{r_1^2\left((3\alpha-10)d^2 + 4r^2\left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha}\right) + (\alpha-2)d^4\left(d^2\Lambda_i - 1\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{4.47}$$

Las componentes del tensor energía impulso $T_{\hat{a}\hat{b}} = diag(\rho, P_r, P_t, P_t)$ de la materia que cumple con la QWEC y origina al agujero de gusano, se reescriben como

$$\rho(r) = -\frac{r_1^2}{d^2 r^2 K} + \frac{4r_1^2}{Kd^4}\frac{\alpha-3}{\alpha-2}\left(\frac{d^2}{r^2} - \left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha}\right) + \frac{\Lambda_i}{K}\left(\frac{d^2}{r^2} - 1\right), \tag{4.48}$$

$$P_r(r) = -\frac{4r_1^2}{Kd^4}\left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha} - \rho(r). \tag{4.49}$$

$$P_t(r) = \frac{2r_1^2}{Kd^4}\left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha} + \Lambda_i. \tag{4.50}$$

La presión tangencial P_t se encuentra sustituyendo la función de forma (4.46) en (2.18).
Una vez encontradas las componentes del tensor energía impulso y del tensor métrico, corresponde estudiar las propiedades del agujero de gusano y de la materia que lo origina.

Radio de la garganta

Las restricciones establecidas tanto en la geometría del agujero de gusano como en el comportamiento de la materia, influyen en el tamaño de la garganta. Si se reemplaza en la ecuación (4.36) el valor de β, dado por(4.44), y se usa (4.45) se obtiene

$$r_0 = \frac{d}{\left[\frac{\alpha-2}{4}\left(\frac{d^2}{r_1^2} + 1 - \frac{\Lambda_i d^4}{r_1^2}\right) - (\alpha-3)\right]^{\frac{1}{\alpha-2}}}. \tag{4.51}$$

Este resultado muestra que el radio de la garganta del agujero de gusano r_0 depende de la distancia entre las placas d y el factor α. Además, indica que la contri-

bución de Λ_i es despreciable, su aporte es notable cuando $|\Lambda_i| \sim 1/d^2$. La fig. 4.3 señala que r_0 aumenta exponencialmente con el factor α. Sin embargo, r_0 no crece ilimitadamente sino converge a d. También, se observa que la rapidez con la aumenta el tamaño de la garganta depende de la distancia entre las placas d. Si $\alpha < 4$ la ec.(4.51) indica que $r_0 < l_p$. Por lo tanto, si suponemos que la longitud de Planck es la escala espacial mínima[8], se debe restringir $\alpha \geq 4$.

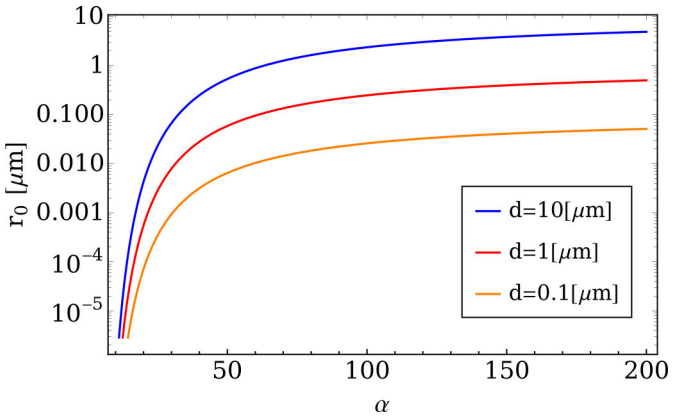


Figura 4.3: Radio de la garganta en escala semilogarítmica del agujero de gusano para diferentes valores de distancia entre las placas. La constante cosmológica Λ_i se le tomo nula.

Densidad de energía y ecuación de estado

El tamaño de la garganta afecta a la distribución de materia exótica. En la fig.4.4 se observa que con el valor de α más pequeño, $\alpha = 4$, la densidad de energía negativa se distribuye incluso en $r > d$. Adicionalmente, la presencia de energía positiva con $\alpha = 4$ es pequeña comparada con el resto de valores de α permitidos. Si se aumenta α (consecuentemente el tamaño de la garganta) la densidad de energía negativa tiende a acumularse en $r < d$. Por otra parte, la energía positiva tiende a reunirse alrededor de $r = d$ y decae con la coordenada radial r. Este resultado indica que para aumentar el tamaño de la garganta, la energía negativa debe aglomerarse mayormente alrededor del agujero de gusano. Cabe recalcar que la existencia de densidad de energía positiva, no implica que la materia sea común, puesto que las componentes del tensor energía impulso cumplen con la QWEC y por lo tanto violan las condiciones de energía clásicas. Además, la densidad de energía positiva provoca que la tensión del agujero de gusano aumente enormemente para que se

[8]Por debajo de la longitud de Planck el espacio tiempo deja de tener un comportamiento clásico y es necesario tratarlo con una teoría cuántica de la gravedad.

cumpla la QWEC impuesta[9].

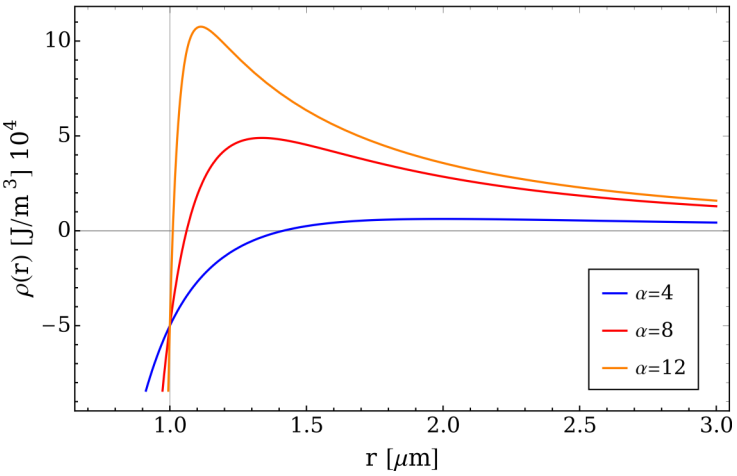


Figura 4.4: Densidad de energía de la materia que genera un agujero de gusano sin fuerza tidal. Se asumió la constante cosmológica genérica $\Lambda_i = 0$ la distancia entre las placas $d = 1[\mu m]$.

La ecuación de estado establece que existe una relación proporcional entre la presión radial y la densidad de energía. Por ejemplo, en el efecto Casimir la ecuación de estado es $P_r = 3\rho$. Para construir la ecuación de estado entre la presión radial (4.49) y la densidad de energía (4.48) se tiene que reescribir la presión radial como $P_r = \omega(r)\rho$, donde

$$\omega(r,\Lambda_i,\alpha) = \frac{4(\alpha-2)r^2r_1^2\left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha}}{-(\alpha-2)d^4\Lambda_i(d-r)(d+r)+(10-3\alpha)d^2r_1^2+4(\alpha-3)r^2r_1^2\left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha}} - 1. \tag{4.52}$$

A diferencia de los resultados obtenidos en [13], la ecuación de estado no es constante[10]. La fig. 4.5 muestra que $\omega(r)$ con la constante cosmológica nula se comporta como el efecto Casimir cerca del límite de las placas ($\omega = 3$), como se supuso en un inicio. Sin embargo, a medida que se acerca a la garganta, ω toma diferentes valores en función del coeficiente α. De hecho, si $\alpha \gg 1$, esta figura señala que $\omega(r < d) \to 0$. Por otro lado, si la constante cosmológica toma un valor no nulo, la materia tiene un comportamiento semejante a *phantom energy* para todo α, puesto que $\omega(r < d) \approx -1$ [27]. Esto puede ser causado por la densidad de energía de la constante cosmológica, pues al ser semejante a la del efecto Casimir interacciona con

[9] $\rho + P_r = -A(r_0/r)^{\alpha} < 0$

[10] Se de denomina ecuación de estado a $P_r = \omega\rho$, donde $\omega = 3$ en el caso del efecto Casimir [13].

esta o incluso llega a ser dominante, causando este comportamiento en la ecuación de estado [51]. Este resultado indica que para obtener un comportamiento similar al efecto Casimir, conviene suponer $\Lambda_i = 0$ y $\alpha \simeq 4$.

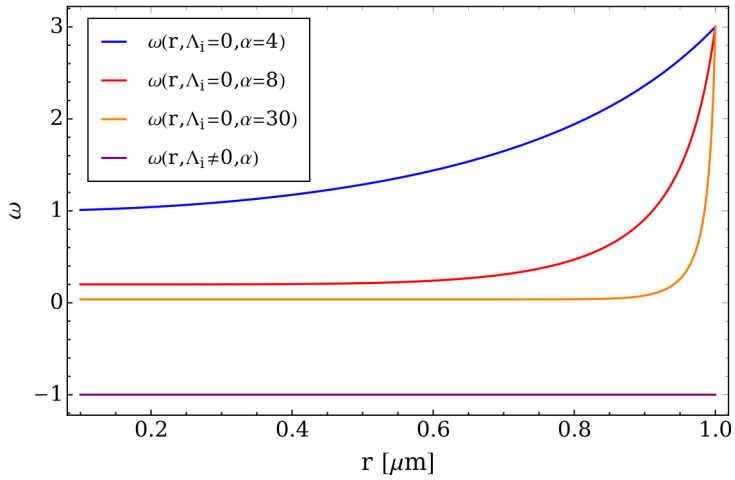


Figura 4.5: Función $\omega(r)$ de la ecuación de estado $P_r = \omega\rho$. Se supuso que la distancia entre las placas es $d = 1[\mu m]$.

Embebimiento

En la sec.2.1.3 se aclaró como el embebimiento da una perspectiva gráfica de la forma de la garganta del agujero de gusano. Además, se obtuvo la ecuación (2.22) la cual permite obtener la superficie embebida de un agujero de gusano $z(r)$ a partir de su función de forma. Sustituyendo en esta ecuación la función de forma (4.46) se obtiene los resultados de la fig.4.6, la cual muestra diferentes diagramas embebidos para distintos valores de α. En esta figura se nota que el aumento del radio de la garganta provoca que el espacio tiempo cerca de esta región tenga una mayor curvatura. También, se observa que al alejarse de este punto el espacio tiempo tiende a ser "plano" rápidamente[11]. Esto es consecuencia de lo observado en la fig.4.4. Para incrementar el tamaño de la garganta, se requiere que la densidad de energía negativa se acumule cerca del agujero de gusano, produciendo un aumento en la curvatura cerca de esta región.

Al ser un agujero de gusano con fuerza tidal nula, es posible establecer que sea asintóticamente plano, suponiendo que $\Lambda_i = 0$. Si se reemplaza la función de forma (4.46) en la métrica de Morris Thorne, se encuentra que para que el espacio tiempo

[11] Este resultado se obtiene también al calcular las componentes del tensor de Riemman $R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = K(\rho + P_r) = -(4r_1^2 d^\alpha)/(d^4 r^\alpha)$. Mientras más alto sea el valor de α la curvatura disminuye más rápido.

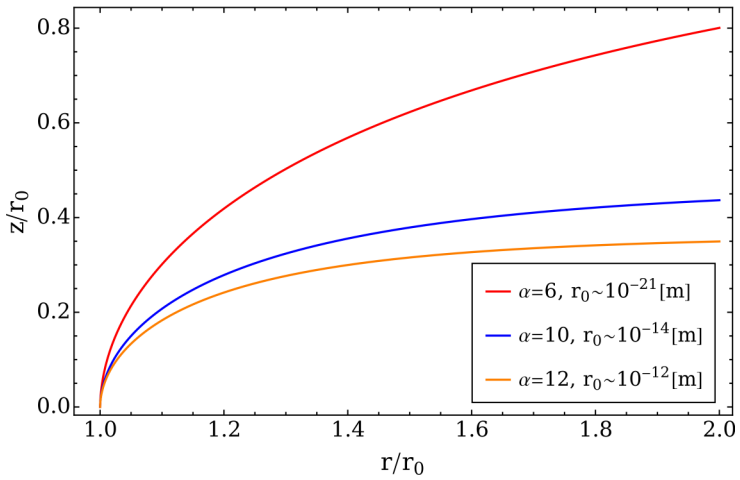


Figura 4.6: Diagramas embebidos en un cilindro, alrededor de la garganta de agujeros de gusano con diferente tamaño de garganta. Para todos se supuso: $d = 1[\mu m]$ y $\Lambda_i = 0$

sea asintóticamente plano y no exista exceso o deficiencia de ángulo sólido[12]

$$\Delta = \frac{1}{1 - \frac{4r_1^2}{d^2}\left(\frac{3\alpha - 10}{4(\alpha - 2)}\right)} = 1. \tag{4.53}$$

Consecuentemente, se encuentra que $\alpha = 3/10$, por lo que de la ec.(4.51) se consigue que el radio de la garganta es menor que la longitud de Planck. Por lo tanto, esta solución no es valida si se considera que la longitud de Planck es la escala espacial mínima. Sin embargo, este problema desaparece si se confina la materia exótica, a través de la teoría de agujeros de gusano tipo *thin shell*.

4.3. Formulación *Thin Shell*

La formulación *thin shell* minimiza la cantidad de energía exótica necesaria para originar un agujero de gusano, pues confina esta materia en una región específica del espacio, la cual está delimitada por una hipersuperficie S denominada *thin shell* [33]. La métrica de agujero de gusano sin fuerza tidal encontrada en la anterior sección, al tener una función de *redshift* constante, permite aplicar a este agujero de gusano la teoría *thin shell* desarrollada en la sec.2.4 [13]. En la sección anterior se estableció

[12] En la sec.(3.3) se realizó un proceso similar para evitar alteraciones de ángulo sólido en el agujero de gusano de Casimir de [13].

[13] Esta se desarrolló con facilidad sin la necesidad de utilizar la segunda forma fundamental, utilizando la simetría del espacio y suponiendo una función de *redshift* constante.

que la materia exótica tiene un comportamiento similar al efecto Casimir hasta la hipersuperficie $r = d$. Además, en la fig.4.4 se observa que la densidad de energía positiva se acumula cerca de $r = d$, lo cual no sucede en el efecto Casimir. Por lo tanto, considerando que en este fenómeno cuántico solo hay densidad de energía negativa se supondrá que en $r = d$ está el *thin shell S* que une al agujero de gusano con la métrica de Schwarzschild Λ.

Al ser la hipersuperficie S el punto donde se une la métrica de agujero de gusano con la de Schwarzschild, se supone que en $r = d$ ambas métricas coinciden. Por lo tanto, de la continuidad de la componente temporal de las métricas se encuentra, a partir de la ecuación (2.42) que

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2GM}{c^2 d} - \frac{\Lambda_e d^2}{3}\right). \tag{4.54}$$

De igual forma, la continuidad de la componente radial de las métricas, llevan al siguiente resultado, a partir de la ec.(2.43)

$$b_i(d) = \frac{3r_1^2}{d} + \Lambda_i d^3 = \frac{2GM}{c^2} + \frac{\Lambda_e d^3}{3}, \quad r_1^2 = \frac{\pi^3 l_p^2}{90}, \tag{4.55}$$

donde $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$ es la longitud de Planck. De la ecuación anterior se encuentra que la masa del agujero de gusano es

$$M = \frac{c^2 d^3}{2G}\left(\frac{3r_1^2}{d^4} + \Lambda_i - \frac{\Lambda_e}{3}\right). \tag{4.56}$$

Sustituyendo este resultado en (4.54) se encuentra que la función de *redshift* constante del agujero de gusano se reduce a

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{3r_1^2}{d^2} - \Lambda_i d^2\right). \tag{4.57}$$

Sustituyendo la masa M (4.56) en la métrica de Schwarzschild (1.14) se encuentra que las componentes de esta métrica se escriben

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{3r_1^2}{rd} + \frac{\Lambda_i d^3}{r} - \Lambda_e\left(r^2 - \frac{d^3}{r}\right)\right), \tag{4.58}$$

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}\left(\frac{3r_1^2}{d} + \Lambda_i d^3 + \frac{\Lambda_e}{3}\left(r^3 - d^3\right)\right)}. \tag{4.59}$$

En la fig.4.7 se ilustra la transición de la componente radial de la métrica, entre las dos variedades. En este gráfico se observa que la transición es más suave cuando las constantes cosmológicas de ambas métricas son las mismas. Lo contrario sucede si la diferencia aumenta.

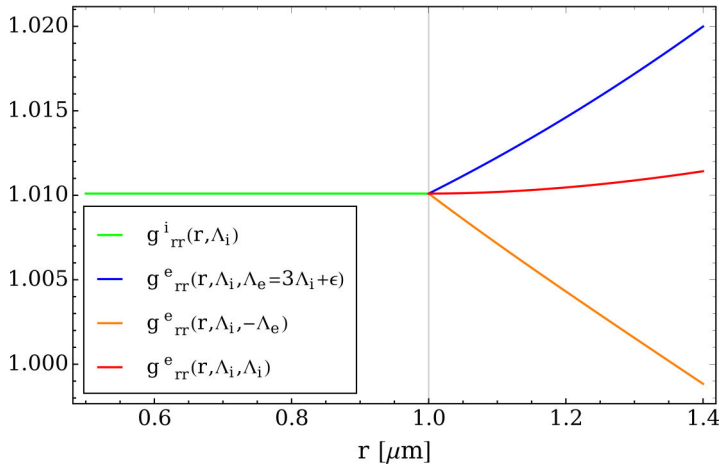


Figura 4.7: Transición entre la componente radial de la métrica de agujero de gusano de Morris Thorne y métrica de Schwarzschild. Se supuso: $\Lambda_i = 10^{-2}[\mu m^{-2}]$, $d = 1[\mu m]$ y $\Lambda_e = 10^{-3}[\mu m^{-2}]$.

En la sección 2.4 se mostró que al unir dos métricas con simetría esférica y estáticas, el tensor energía impulso de la hipersuperficie de unión S tiene solo una componente, la presión tangencial superficial $\mathcal{P}$ (2.50). Sustituyendo en esta ecuación la masa del agujero de gusano (4.56) se obtiene

$$\mathcal{P}(\Lambda_i, \Lambda_e) = \frac{1}{2Kd^3} \frac{3r_1^2 + (\Lambda_i - \Lambda_e)d^4}{\sqrt{1 - \frac{3r_1^2}{d^2} - \Lambda_i d^2}}. \tag{4.60}$$

La presión tangencial superficial depende de la diferencia de las constantes cosmológicas, por lo que permite cuantificar que tan suave es la transición entre ambas variedades. Por ejemplo, anteriormente se aclaro que si ambas constantes cosmológicas son iguales ($\Lambda_i = \Lambda_e$) la transición entre ambas métricas es suave comparada con el resto de ejemplos de la fig.4.7. Por otra parte, al calcular la presión tangencial superficial (4.60) se consigue que $\mathcal{P}(\Lambda_i, \Lambda_i) < |\mathcal{P}(\Lambda_i, \Lambda_e)|$. Esto resultado muestra que existe una relación entre la suavidad de la transición de las métricas y la pre-

sión tangencial presente en la hipersuperficie de unión S. Mientras más suave sea la transición entre ambas métricas, menor será la presión tangencial en el *thin shell*[14].

La unión de ambas variedades impone restricciones en los valores de las constantes cosmológicas genéricas. Para que la presión tangencial superficial (4.60) y la función de *redshift* (4.57) estén bien definidas se debe imponer la restricción

$$\Lambda_i < \frac{1}{d^2} - \frac{3r_1^2}{d^4}. \tag{4.61}$$

Esta desigualdad aclara que la constante cosmológica genérica interna se encuentra limitada por la distancia entre las placas. Por consiguiente, su aporte en el agujero de gusano es limitado. No obstante, en la anterior sección se mencionó que la adición de la constante cosmológica interna en el espacio tiempo del agujero de gusano provoca que la materia exótica tenga un comportamiento muy alejado del efecto Casimir[15]. Si consideramos que $\Lambda_i = 0$, la restricción (4.61) impone un límite inferior en la distancia entre las placas

$$d > \sqrt{3} r_1. \tag{4.62}$$

Recordando que r_1 es del orden de la longitud de Planck, esta restricción establece que la distancia entre las placas debe ser mayor a la longitud de Planck.

Si se supone que la masa del agujero de gusano es positiva, entonces (4.56) impone la siguiente restricción

$$\Lambda_i > \frac{\Lambda_e}{3} - \frac{3r_1^2}{d^4}. \tag{4.63}$$

Al considerar las dos restricciones encontradas para la constante cosmológica interna se encuentra

$$\Lambda_e < \frac{3}{d^2} \quad si \quad \Lambda_i \neq 0. \tag{4.64}$$

[14]La presión tangencial superficial se anula si $\Lambda_i = \Lambda_e - 3r_1^2/d^4$.

[15]Si $|\Lambda_i| \lesssim 10^{-45}$ el comportamiento similar al efecto Casimir se mantiene. Sin embargo, con esta magnitud su adición no aporta a las características del agujero.

Por otra parte, si se supone que $\Lambda_i = 0$, a partir de la restricción (4.63) se consigue

$$\Lambda_e < \frac{9r_1^2}{d^4}. \tag{4.65}$$

En los experimentos realizados sobre el efecto Casimir se ha tomado una distancia entre las placas $d \simeq 1[\mu m]$[16] [24]. Considerando este hecho a través de la desigualdad anterior se obtiene que $\Lambda_e \lesssim 10^{-46}[m]$. Este resultado limita la construcción del agujero de gusano a espaciotiempos asintóticamente de Sitter con una constante cosmológica muy pequeña. Sin embargo, si es asintóticamente anti de Sitter, no hay limites para el valor de la constante cosmológica.

Otra consecuencia de anular la constante cosmológica interna se encuentra en la presión tangencial superficial del *thin shell* (4.60). Considerando que $\Lambda_i = 0$ en esta ecuación, se encuentra

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2Kd^3}\frac{3r_1^2 - \Lambda_e d^4}{\sqrt{1 - \frac{3r_1^2}{d^2}}}. \tag{4.66}$$

Al sustituir la restricción (4.65) en la ecuación anterior se encuentra que si $\Lambda_e > 0$, entonces

$$-\frac{6r_1^2}{2Kd^3\sqrt{1 - \frac{3r_1^2}{d^2}}} < \mathcal{P} < \frac{3r_1^2}{2Kd^3\sqrt{1 - \frac{3r_1^2}{d^2}}}, \tag{4.67}$$

lo cual indica que si el espacio es asintóticamente de Sitter, la presión tangencial en el *thin shell* puede ser negativa. Sin embargo, esto no sucede en un espaciotiempo asintóticamente anti de Sitter. La ecuación (4.66) muestra que si $\Lambda_e < 0$ la presión tangencial superficial es positiva para todo valor de constante cosmológica negativa.

El confinamiento de la materia exótica que genera al agujero de gusano impone ciertas restricciones en las características geométricas de la variedad interna y externa. A continuación, se explorarán otras condiciones que se deben imponer en el agujero de gusano para hacerlo atravesable, además de que sea compatible cuánticamente.

[16] Si la distancia es menor, el experimento se ve alterado por fuerzas atómicas y moleculares entre las placas [24].

4.4. Atravesabilidad y compatibilidad cuántica

Un agujero de gusano atravesable se caracteriza por la fuerza gravitacional en los observadores estáticos, la cual debe, como mucho, igual a la terrestre. También, el tiempo que tarda un viajero hipotético en atravesarlo debe durar menos de un año [33]. Además, otro parámetro de atravesabilidad es la cantidad de materia exótica total que se requiere para construir el agujero de gusano, este parámetro se cuantifica a través del cuantificador integral de volumen, establecido en la sección 3.3. Por otra parte, la compatibilidad cuántica se logra al cumplir la desigualdad cuántica de energía. Esta desigualdad establece que mientras más negativa es la energía medida en un intervalo de tiempo, menor es la duración del mismo[11].

La aceleración gravitacional de los observadores estáticos se encuentra a partir de la ecuación (2.30). Esta ecuación indica que este parámetro depende de la derivada radial de la función de *redshift*. Por lo tanto, en el agujero de gusano de fuerza tidal nula establecido en la anterior sección, se encuentra que en $r < d$ los observadores estáticos son inerciales, pues la aceleración gravitacional a la que están sometidos es nula. Por lo tanto, es claro que se cumple el requisito de que la aceleración gravitacional sea menor que la gravedad terrestre. Sin embargo, esto no es suficiente para declarar a este agujero de gusano atravesable.

En la sección 2.1.4 se demostró que el tiempo que tarda en en viajar una partícula de prueba a través del agujero de gusano, está dado por (2.32). Por otra parte, considerando que la partícula se mueve con una velocidad radial constante V, usando (1.3) se encuentra que la velocidad física es

$$\beta = V\frac{e^{-\Phi}}{\sqrt{1-\frac{b}{r}}}. \tag{4.68}$$

Sustituyendo este resultado en (2.32) y considerando que $dl\sqrt{1-b/r} = dr$, se consigue que el tiempo que tarda una partícula con velocidad V en viajar de un punto de la placa a su lado opuesto, según un observador estático es

$$\Delta t = \frac{2d}{V} \tag{4.69}$$

Por otro lado, de las ec.(2.31) y (4.68) se obtiene que la duración del viaje según

el sistema de referencia propio de la partícula viajera es

$$\Delta\tau = \frac{2e^{\Phi_0}}{V}\int_{r_0}^{d}\left(1-\frac{r}{r-b}\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} dr. \tag{4.70}$$

Es claro que Δt no depende de ningún parámetro relacionado con la geometría del espacio. Además, considerando que $d = 1[\mu m]$ y $V = 0{,}01c$, se encuentra que $\Delta t = 0{,}66[ps]$. Por otra lado, en la fig.4.8 se observa que $\Delta\tau \lesssim 1[ps]$, aún más su duración se reduce sí se aumenta el parámetro α. No obstante, el cambio no es significativo.

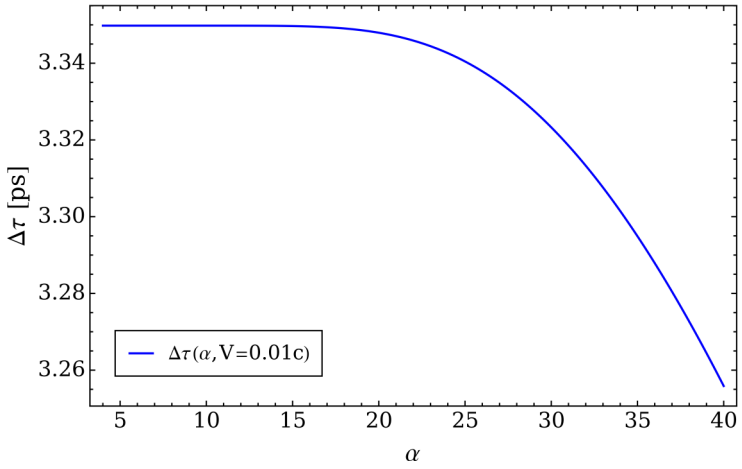


Figura 4.8: Duración del viaje de una partícula con velocidad V=0.01c de un lado al otro del *thin shell*. Se supuso $d = 1[\mu m]$ y $\Lambda_i = 0$.

La construcción de agujeros de gusano atravesables requiere materia exótica. La cantidad total que se necesita puede ser estimada a través de *volume integral quantifier* [13]. Usando los resultados encontrados en la sección 4.2 se encuentra que la materia exótica total requerida es

$$I_V = \int_{r_0}^{d} r^2(P_r+\rho)dr = -\frac{4r_1^2 d^\alpha}{Kd^4(3-\alpha)}\left(d^{3-\alpha}-r_0^{3-\alpha}\right), \quad K = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{4.71}$$

Recordando que el radio de la garganta para este agujero de gusano, está dado por (4.51), se obtiene que la cantidad total de materia exótica se reduce a

$$I_V = \frac{4r_1^2}{dK(\alpha-3)}\left[1-\left(\frac{r_1^2(10-3\alpha)+d^2(\alpha-2)-d^4(\alpha-2)\Lambda_i}{4r_1^2}\right)^{\frac{3-\alpha}{2-\alpha}}\right]. \tag{4.72}$$

Además, para valores muy grandes de α, se obtiene la siguiente aproximación

$$I_V \simeq -\frac{d}{K}, \quad \alpha >> 1. \tag{4.73}$$

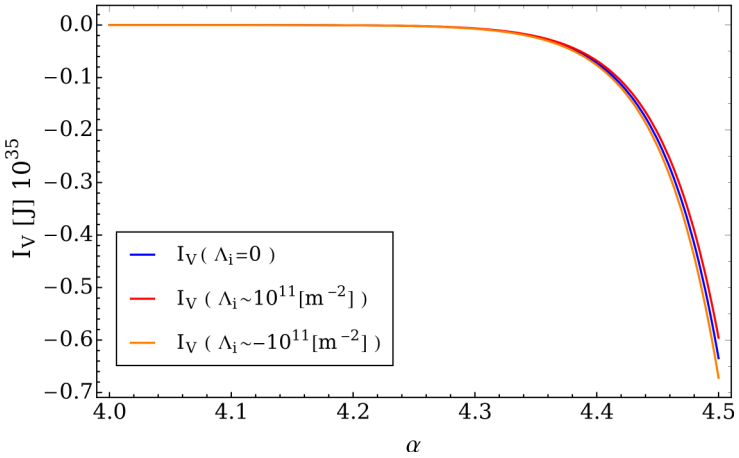


Figura 4.9: Cantidad total de materia exótica necesaria para establecer un agujero de gusano atravesable. Se consideró que $d = 1[\mu m]$ y diferentes valores de constante cosmológica interna Λ_i.

En la fig.4.9 se observa que aumentar el radio de la garganta del agujero de gusano produce un incremento en la materia exótica total requerida. Esto concuerda con lo mencionado anteriormente, pues se observó en la fig.4.4 que aumentar α produce una acumulación de densidad negativa en $r < d$. Además, la adición de la constante cosmológica interna ayuda a disminuir (o aumentar) la magnitud de materia requerida. Sin embargo, como se aclaró anteriormente la energía deja de tener un comportamiento tipo Casimir al incluir $\Lambda_i \neq 0$.

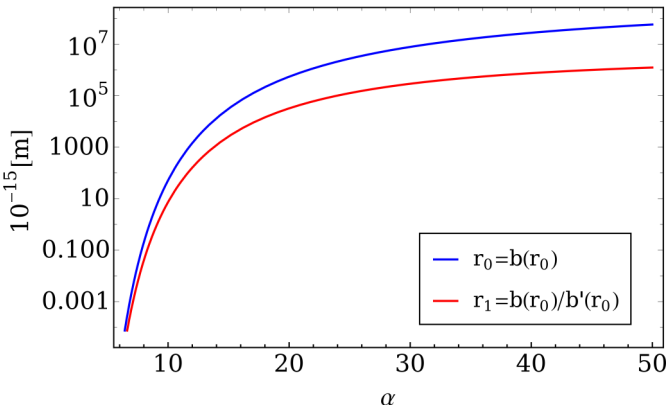


Figura 4.10: Comparación entre las escalas r_0 y r_1 en función del factor α. La escala mínima $\forall\alpha$ es r_1. Gráfico realizado en escala semilogarítmica.

La compatibilidad cuántica de la materia que genera al agujero de gusano se

estudia a través de la desigualdad cuántica de energía. Sin embargo, como se explicó en la sección 2.3 esta desigualdad fue propuesta para teoría cuántica de campos, donde el espacio tiempo es plano. Por consiguiente, el intervalo τ_0 no puede tomar cualquier valor, sino está restringido por la curvatura del espacio tiempo [17]. Para el agujero de gusano de fuerza tidal nula se encuentra a partir de (2.39) que las escalas $R_2 = r_3 = \infty$. Por lo tanto, la escala mínima cerca de la garganta se determina

$$r_m = \text{mín}\left(r_0 = b(r_0), r_1 = |\frac{b(r_0)}{b'(r_0)}|\right). \tag{4.74}$$

La fig.4.10 muestra que para todo α la escala mínima es $r_m = r_1$. Por otro lado, al ser un agujero de gusano con función de *redshift* constante, los observadores estáticos son también observadores inerciales. Por lo tanto, el intervalo de tiempo propio τ_0 en el cual estos miden la cantidad de materia exótica debe ser mucho menor que r_m[18]. Así, suponiendo que $\tau_0 = f r_1 = f|r_0/b'(r_0)|$ y que al ser un observador estático

$$\langle T_{ab} u^a u^b \rangle (r_0) = \rho_0 = \frac{b'(r_0)}{K r_0^2}, \tag{4.75}$$

donde se consideró que al ser un agujero de gusano de Morris-Thorne, la densidad de energía está dada por (2.16). Se encuentra a través de la desigualdad cuántica en (2.38) que

$$H(d, \alpha) = \sqrt{-\frac{r_0^2}{b'(r_0)^3}} \leq \frac{3 l_p}{4\pi f^2}, \tag{4.76}$$

donde l_p es la longitud de Planck y $f \sim 10^{-3}$. En la fig.4.11 se muestra que para que se cumpla la desigualdad de energía cuántica $\alpha \simeq 4$. Además, si se aumenta la distancia entre las placas d el valor límite de α permitido se reduce. Aún más, al encontrarse limitados los valores de α, se restringen ciertas características del agujero de gusano. Por ejemplo, a través de la ecuación (4.51) se encuentra el tamaño de la garganta está restringido a $r_0 \lesssim 10^{-30}[m]$.

Finalmente, para que el agujero de gusano sea atravesable el *thin shell* debe encontrarse en una posición mayor al horizonte de sucesos. La componente temporal de la métrica de Schwarzschild de (4.58) indica que la singularidad coordenada

[17] τ_0 es el tiempo que dura la medición de la cantidad de energía negativa desde el sistema de referencia propio de un observador inercial.

[18] Al igual en la sección 2.3 se utiliza el sistema de unidades $\hbar = G = c = 1$.

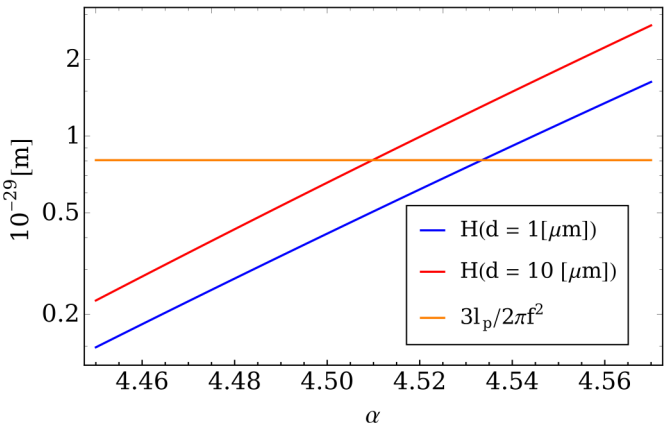


Figura 4.11: Restricción en la función $H(\alpha, d)$ como consecuencia de requerir que la materia exótica que genera el agujero de gusano cumpla con la desigualdad de energía cuántica, $H(\alpha, d) < 3l_p/2\pi f^2$. Gráfico en escala semilogarítmica.

cumple con al ecuación

$$s^3 + \frac{s}{|\Lambda_e|} = \frac{3r_1^2}{d|\Lambda_e|} + d^3, \quad r_1 \approx l_p \tag{4.77}$$

donde se consideró el caso AdS, puesto que es el que nos interesa y se supuso que $\Lambda_i = 0$ por lo explicado anteriormente. Como deseamos que la singularidad se oculte tras el *thin shell*, se debe imponer que $s < d$, por lo cual

$$r^3 + \frac{r}{|\Lambda_e|} < d^3 + \frac{d}{|\Lambda_e|}. \tag{4.78}$$

Sustituyendo la ec.(4.77) se encuentra la siguiente condición

$$d > \sqrt{3} r_1, \tag{4.79}$$

recordando que r_1 es aproximadamente igual a la longitud de Planck. Por lo tanto, en un espacio tiempo asintóticamente AdS, siempre que la distancia entre las placas d sea mayor que la longitud de Planck, no habrá horizontes que impidan la atravesabilidad del agujero de gusano estudiado en esta sección.

Al requerir que la materia exótica del efecto Casimir cumpla con la desigualdad cuántica de la energía, se encuentra que $\alpha \simeq 4$. Por otra parte, el agujero de gusano es atravesable (por partículas hipotéticas) pues los observadores estáticos no sienten atracción gravitacional, no existe horizonte de sucesos y el tiempo que dura el viaje de un punto de la placa al lado opuesto es del orden de un pico segundo. Aún más, si

$r_0 \approx l_p$ a través de la ec.(4.72) se encuentra que la cantidad de energía total necesaria es $I_V \approx -10^8[J]$, lo cual es similar a los resultados obtenidos por [13] en un espacio tiempo plano sin *thin shell*[19]. Aún más, la desigualdad cuántica permite variar el parámetro α, algo que [13] lo toma como un valor fijo y por consiguiente modificar el radio de la garganta. Por ejemplo, si $r_0 \approx 1000 l_p$, se encuentra que $I_V \approx -10^{11}[J]$. Si bien es una cantidad de de energía mucho mayor, las condiciones establecidas en el planteamiento del efecto Casimir de la sec.4.2 permiten obtener agujeros de gusano con un mayor tamaño de garganta y los cuales no son necesariamente planos, al contrario de los resultados de [13].

[19] [13] encontró que el efecto Casimir produce agujeros de gusano cuya garganta tiene un tamaño similar a la longitud de Planck. Estos resultados se resumieron en la cap.3.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se realizó una primera aproximación a los agujeros de gusano asintóticamente anti-de Sitter sostenidos por la energía proveniente del efecto de Casimir. Este estudio pretende extender la investigación presentada en [13] a un espaciotiempo asintóticamente anti de Sitter. Estos objetos no son difíciles de construir, se necesita que satisfagan las ecuaciones semiclásicas de Einsten, además de otras restricciones. Mas aún, los agujeros que se obtienen siempre tienen un tamaño de garganta Planckiano. Es natural preguntarse acerca del comportamiento de la gravedad a esas escalas y lo único que tenemos es una aproximación semiclásica. Sin la existencia de una teoría cuántica de la gravedad es muy difícil estudiar lo que sucede a tales escalas. Por otro lado, en el contexto de la dualidad AdS/CFT es importante buscar este tipo de soluciones. Así, podemos pensar en encontrar el dual (en la CFT) del agujero de gusano, en particular de los campos de materia. Este problema es altamente no trivial y representa uno de los campos de punta en física de altas energías.

Al resolver la ecuación semiclásica de Einstein con constante cosmológica (4.2), considerando que el tensor de energía impulso es el del efecto Casimir (4.3), se encontró que no existen soluciones analíticas para función de *redshift* (4.7). Aún así, se trató de obtener resultados mediante ciertas restricciones y aproximaciones, sin embargo no se encontró un agujero de gusano atravesable. No obstante, no se descarta la posibilidad de que exista alguna restricción con la que se encuentre un agujero de gusano atravesable con este método.

Un resultado interesante se obtuvo al suponer que la materia cumple con la con-

dición de energía cuántica débil (QWEC)(3.26). Se encontró una familia de agujeros de gusano de los cuales se estudió los casos más sencillos. Con $\alpha = 2$ la materia presenta densidad de energía positiva (4.22) y la métrica es asintóticamente AdS. Igualmente, con $\alpha = 4$, se obtuvo que la métrica es asintóticamente AdS (4.29), pero la densidad de energía es negativa (4.30). Sin embargo, al tomar el límite $\Lambda \to 0$ el coeficiente de la ecuación de estado es $\omega = 1$. Por lo tanto, no encaja totalmente con lo esperado para el efecto Casimir ($\omega = 3$). Aún así, al imponer que la densidad de energía en este límite sea la de Casimir, encontramos que la garganta tiene un radio similar a longitud de Planck.

Al no encontrar un resultado favorable con el método anterior, se utilizó la QWEC y la formulación *thin shell* para crear agujeros de gusano atravesables sin fuerza tidal en el espaciotiempo de Schwarzschild AdS. También, se consideró que el coeficiente de la ecuación de estado (4.52) depende de la coordenada radial. En [13] restringiendo a que este sea $\omega = 3$, al igual que en el efecto Casimir, se encontró un agujero de gusano Planckiano. Para que la ecuación de estado (4.52) sea similar a la de Casimir ($1 \leq \omega \leq 3$), y que además la materia sea compatible cuánticamente (4.77),llevando a que el radio de la garganta (4.51) sea mayor que la longitud de Planck, el parámetro α que caracteriza al agujero de gusano debe ser $\alpha \approx 4$ y la constante cosmológica interna debe ser nula. Bajo estas restricciones se encontró que la garganta del agujero de gusano es $\lesssim 10^{-30}[m]$. Además, el tiempo que tarda en viajar una partícula hipotética de un extremo de la placa al otro es $\sim 10^{-15}[s]$. Si el espacio tiempo externo es asintóticamente anti de Sitter no existe un límite para su magnitud. Sin embargo, mientras más grande sea su valor, mayor será la presión tangencial superficial en el *thin shell*.

A pesar de que la materia que mantiene a los agujeros de gusano no sea completamente la del efecto Casimir, son resultados remarcables. El efecto Casimir ha sido usado recientemente como fuente de agujeros de gusano, a pesar de que se lo ha considerado como un posible candidato desde los inicios de la teoría [34]. Aún más, su aplicación a espacios que son son asintóticamente AdS, hasta donde sabemos, no se ha desarrollado en la literatura.

El presente trabajo abre el camino para una investigación más profunda acerca de los agujeros de gusano asintóticamente AdS sostenidos por la energía del efecto Casimir. La formulación para construir soluciones tipo thin shell todavía no ha sido

aplicada con éxito a los agujeros de Casimir, incluso los asintóticamente planos. Es por eso que este estudio es pionero en ese sentido. Esperamos aplicar tal formalismo a algunas familias de agujeros de gusano. El objetivo final es encontrar agujeros de gusano asintóticamente AdS, atravesables, estables y cuya garganta sea de tamaño relativamente grande, mucho mayor que la longitud de Planck.

Apéndice A

Estructura conforme asintótica del espacio Anti de Sitter

El espacio Anti de Sitter (AdS) es una de las soluciones a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica. Además, a partir de 1998 ha llamado la atención de la comunidad científica debido a la dualidad *Anti de Sitter/Conformal Field Theory* (AdS/CFT) [29]. Esta dualidad establece que todo espacio asintóticamente anti-de Sitter tiene asociada una teoría de campos conforme. esta teoría de campos tiene una dimensión menos y está en la frontera del espacio AdS. Esto implica que las interacciones fundamentales entre partículas pueden ser descritas geométricamente a través de este espacio tiempo [18]. Al ser tan importante en física fundamental, sese lo ha estudiado de manera exhaustiva.

Por ejemplo, su estructura en el infinito, que es conocida también como estructura conforme, ha sido desarrollada de forma extendida en libros como [15]. El espacio Anti de Sitter puede ser representado en distintos sistemas de coordenadas[41].No obstante, el elemento de línea más usado es:

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\cos^2(\psi)} + \frac{a^2}{\cos^2(\psi)}\left(d\psi^2 + \sin^2(\psi)d\Omega^2\right), \tag{A.1}$$

donde a representa el escalar de curvatura, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ y $0 \leq \psi \leq \pi/2$. En este sistema de coordenadas (t, ψ, θ, ϕ) el infinito se encuentra en $\psi = \pi/2$. En este espacio se introduce la transformación conforme $\bar{g}_{ab} = \Xi^2 g_{ab}$, donde $\Xi =$

cos ψ. Con esto se obtiene el siguiente elemento de línea

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + a^2\left(d\psi^2 + \sin^2(\psi)d\Omega^2\right). \tag{A.2}$$

Este "nuevo" espacio tiempo es más grande, pues está definido en $\psi = \pi/2$. Además, en este punto $\psi = \pi/2$ se forma el espacio conforme infinito $\mathcal{I}$, el cual está descrito por

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + a^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right). \tag{A.3}$$

La hipersuperficie que define este espacio es $f = \psi - \pi/2$. Por lo tanto, el vector normal a esta es $n_a = (0, 1, 0, 0)$. Esto indica que esta estructura $\mathcal{I}$ es tipo temporal, pues $n_a n^a = 1/a^2 > 0$ y como indica la ec.A.3 su topología es $R^1 \times S^2$. Además, AdS es conformemente plano y el producto interno es invariable bajo transformaciones conformes[41]. Por lo tanto, los conos de luz en el espacio de Minkowski son los mismos que los del espacio AdS.

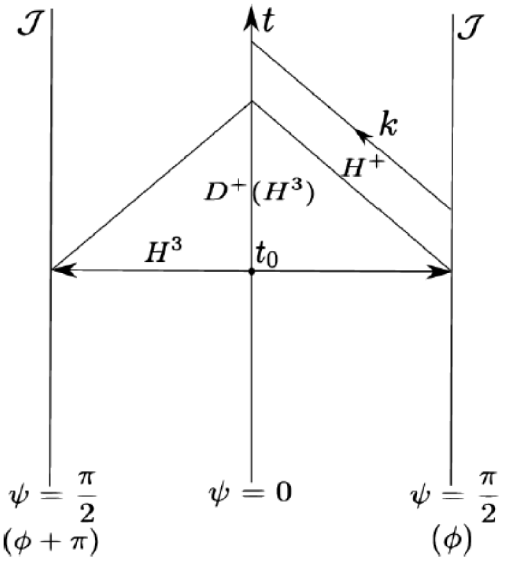


Figura A.1: Representación bidimensional del espacio CAdS. El campo electromagnético se conoce en $t = t_0$ en la superficie tipo espacial H^3. Solo dentro de $D^+(H^3)$ se determina la dinámica del campo. H^+ denota la frontera, donde los rayos de luz provenientes del infinito alteran la dinámica del campo y lo vuelven impredecible en instantes arbitrarios[41].

Al ser la hipersuperficie $\mathcal{I}$ tipo temporal, la dinámica de campos de materia no puede ser predicha en cualquier instante arbitrario. Supongamos que se quiere predecir la dinámica de un campo electromagnético del cual se conoce su estado inicial

en una hipersuperficie tipo espacial. Si tratamos de predecir el comportamiento de este campo en un instante arbitrariamente largo, señales electromagnéticas provenientes del infinito pueden perturbar al campo. En la fig.A.1 se ilustra este fenómeno. El campo se encuentra definido en el instante $t = t_0$ en la superficie H^3. Sin embargo, su dinámica solo puede ser predicha correctamente dentro de la región $D^+\left(H^3\right)$, acotada por las lineas del cono de luz de la superficie I.

Apéndice B

Photon escape cones

El análisis de fenómenos ópticos cerca de los agujeros de SChwarzschild ayuda a entender la dinámica de los discos de acreción cerca de estos objetos. Por facilidad se analizará los conos de escape de fotones desde la perspectiva de observadores estáticos. A pesar de estudiarlos en esta clase de sistemas de coordenadas, estos reflejan propiedades globales del espacio tiempo [35].

Los vectores base del observador estático son

$$e_{(t)} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \partial_t \tag{B.1}$$

$$e_{(r)} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{-1/2} \partial_r \tag{B.2}$$

$$e_{(\theta)} = \frac{1}{r}\partial_\theta \tag{B.3}$$

$$e_{(\phi)} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi \tag{B.4}$$

Las componentes del momento del fotón medidos por este observador estático son

$$p_a = p_\mu e^\mu_a. \tag{B.5}$$

En este sistema de coordenadas se puede definir el ángulo direccional del fotón ψ,

el cual es el ángulo medido por el observador, relativo a su dirección radial

$$\sin\psi = \frac{p^{(\phi)}}{p^{(t)}} = \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right)^{1/2} \frac{l}{r}, \tag{B.6}$$

$$\cos\psi = \frac{p^{(r)}}{p^{(t)}} = \left[1 - \left(1 - \frac{2}{r} - yr^2\right) \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}. \tag{B.7}$$

Para determinar los conos de escape de fotones se utiliza el potencial generalizado del fotón l_R^2 (1.25). Se establece el ángulo direccional de un fotón que escapa parcialmente como ψ_c. Asimismo, se define el parámetro de impacto inestable l_c de la orbita circular del fotón $(r = 3)$. Por facilidad se trabajará solo con la parte positiva de l_c, puesto que existe simetría alrededor de la dirección radial. En $r = 3$, el ángulo de escape es

$$\psi_c(r = 3, l = l_c) = \frac{\pi}{2}. \tag{B.8}$$

Para determinar los ángulo de escape en $r \neq 3$, se establece $l = l_c$ en las ecuaciones (B.6) y (B.7). Así, se obtiene

$$\sin\psi_c(r, y) = \sqrt{\frac{27(r - 2 - yr^3)}{r^3(1 - 27y)}}, \tag{B.9}$$

$$\cos\psi_c(r, y) = \sqrt{\frac{r^3 - 27r + 54}{r^3(1 - 27y)}}. \tag{B.10}$$

En la fig. B.1 se ilustra el comportamiento del cono de escape de fotones, para diferentes valores de r. Se puede observar que en $r = 3$ coinciden los conos AdS$(y < 0)$ y plano $(y = 0)$. Sin embargo, para el resto de valores de r, el cono AdS siempre es mayor que el cono plano. Esta diferencia se pueden notar aún más en el límite asintótico

$$\sin\psi_c(r \to \infty) \simeq 3\sqrt{\frac{3y}{27y - 1}}. \tag{B.11}$$

Esto ilustra una clara diferencia entre el espacio asintóticamente plano y el espacio AdS.

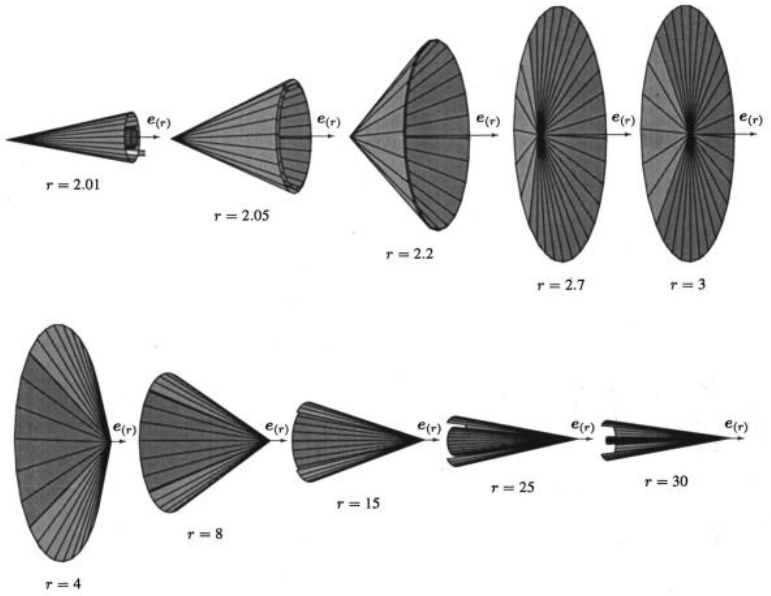


Figura B.1: Cono de escape de fotones en el espacio tiempo de Schwarzschild AdS. El cono AdS se graficó con $y = -10^{-3}$ (gris claro) y se lo compara con el cono plano (gris oscuro). Para todos los valores de $r \neq 3$ el cono AdS es más grande que el cono plano y en $r = 3$ coinciden. Además, asintóticamente el cono AdS toma un valor constante y el cono plano toma un valor nulo. [43]

Apéndice C

Soluciones Particulares

Al resolver la ecuación de Einstein considerando que las componentes del tensor energía impulso están dadas por la ecuación (4.3) se encuentra la que (4.7) no puede ser resuelta de forma analítica salvo bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, asumiendo que

$$r_0^2 - r_1^2 - \frac{\Lambda r_0^4}{3} = 0, \tag{C.1}$$

la ecuación (4.7) se reduce a

$$2\Phi'(r) = \frac{r^4 \frac{2\Lambda}{3} r_0 + (1-\omega) r_0 (r_0^2 - \frac{\Lambda r_0^4}{3})}{-\frac{\Lambda}{3} r_0 r^5 + r^3 r_0 - r_0 r \left(r_0^2 - \frac{\Lambda r_0^4}{3} \right)}. \tag{C.2}$$

La ecuación (C.2) tiene solución sin horizonte de eventos si se supone $r_0^2 = \frac{3(\omega-1)}{(1+\omega)\Lambda}$. Además, la positividad de r_0^2 indica que si $\Lambda > 0$ entonces $\omega \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Por otra parte, si $\Lambda < 0$ entonces $\omega \in (-1, 1)$. La función de *redshift* que se obtiene es

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{\omega-1}{4} ln \left(\frac{3(\omega-1)}{r^2 \Lambda(\omega+1)} \right) + \frac{\omega+1}{4} ln \left(\frac{\Lambda r^2 (1+\omega) - 6}{3(\omega-3)} \right) \tag{C.3}$$

Por lo tanto, la componente $g_{00} = e^{2\Phi(r)}$ de la métrica de Morris-Thorne es

$$g_{00} = e^{2\Phi_0} \left(\frac{r^2 \Lambda(\omega+1)}{3(\omega-1)} \right)^{(\omega-1)/2} \left(\frac{\Lambda r^2 (1+\omega) - 6}{3(\omega-3)} \right)^{(\omega+1)/2}. \tag{C.4}$$

Sin embargo, es claro que la componente temporal de la métrica de Morris-Thorne no es asintóticamente AdS o dS. Igualmente se encontró otros casos en los que sucede lo mismo. Por consiguiente, no es sencillo encontrar una suposición bajo la cual (4.7) tenga solución analítica y sea asintóticamente AdS/dS. Por otra parte, se puede considerar que la constante cosmológica es muy pequeña como para afectar a la geometría del agujero de gusano alrededor de la garganta. Además, considerando que [13] encontró que el tamaño de la garganta del agujero de gusano es semejante a la longitud de Planck, se puede suponer que un resultado similar se obtendrá en un espacio tiempo con constante cosmológica. Por lo tanto, si asumimos que $r_0^2\Lambda \ll 1$, se puede realizar la siguiente aproximación en series de Taylor

$$\Phi'(r) = \Phi'_G + \left[\frac{r^2\left(2r^2r_0 + r\left(r_0^2+r_1^2\right)+r_0^3\right) - r_0r_1^2\omega\left(r^2+rr_0+r_0^2\right)}{3r_0(r-r_0)\left(rr_0+r_1^2\right)^2}\right]\Lambda r_0^2 + O((\Lambda r_0^2)^2), \tag{C.5}$$

donde Φ_G es la función de *redshift* hallada por [13], la cual está descrita por la ec.(3.19). Por consiguiente, se debe asumir que $r_0^2 = \omega r_1^2$, para evitar horizontes de eventos en la garganta del agujero de gusano [13]. Así, usando (C.5) se consigue lo siguiente

$$\Phi(r) = \Phi_G + \frac{\Lambda}{3\omega}(\Phi_a + \Phi_b) + O((\Lambda r_0^2)^2), \tag{C.6}$$

donde,

$$\Phi_a = \left[\frac{r^3\omega^{3/2} + r^2r_1(3\omega-2)\omega + rr_1^2\left(-4\omega^2+6\omega-3\right)\sqrt{\omega} + r_1^3\left(-(\omega+2)\omega^2+\omega+1\right)}{r\sqrt{\omega}+r_1}\right]\Bigg|_{r_0}^{r}, \tag{C.7}$$

$$\Phi_b = \left[\frac{r_1^2\left(\omega^3\log\left(r-r_1\sqrt{\omega}\right) + (\omega(2(\omega-1)\omega-1)+4)\log\left(r_1\left(r\sqrt{\omega}+r_1\right)\right)\right)}{\omega+1}\right]\Bigg|_{r_0}^{r}. \tag{C.8}$$

La ecuación (C.8) muestra que existe un horizonte de eventos en $r = r_0 = r_1\sqrt{\omega}$, el cual solo puede ser eliminado si $\omega = 0$, por consiguiente la presión radial es nula[1]. Es claro que con esta aproximación no se obtiene un agujero de gusano atravesable generado por el efecto Casimir, pues en este fenómeno cuántico $\omega = 3$.

[1]Este resultado equivale a decir que la materia se comporta como polvo [23].

Bibliografía

[1] Al-Khalili, J. *Black holes, wormholes and time machines*. Institute of Physics Pub, 1 edición, 1999.

[2] Alcubierre, M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 11(5):L73–L77, May 1994.

[3] Alcubierre, M. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, USA, oup edición, 2008.

[4] Argañaraz, M. y Lasso Andino, O. Dynamics in wormhole spacetimes: a Jacobi metric approach. *Class. Quant. Grav.*, 38(4):045004, 2021.

[5] Barceló, C., Garay, L. J., Gonzalez-Diaz, P. F., y Marugán, G. A. M. Asymptotically anti-de sitter wormholes. *Physical Review D*, 53(6):3162, 1996.

[6] Barriola, M. y Vilenkin, A. Gravitational field of a global monopole. *Phys. Rev. Lett.*, 63:341–343, Jul 1989.

[7] Bouhmadi-López, M., Lobo, F. S. N., y Martín-Moruno, P. Wormholes minimally violating the null energy condition. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(11):007–007, Nov 2014.

[8] Boyer, T. H. Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the casimir model for a charged particle. *Phys. Rev.*, 174:1764–1776, Oct 1968.

[9] Date, G. *General Relativity: Basics and Beyond*. Taylor and Francis Group, USA, 2015.

[10] Einstein, A. y Rosen, N. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935.

[11] Ford, L. H. y Roman, T. A. Quantum field theory constrains traversable wormhole geometries. *Phys. Rev. D*, 53:5496–5507, May 1996.

[12] Ford, L. H. y Roman, T. A. Averaged energy conditions and quantum inequalities. *Physical Review D*, 51(8):4277, 1995.

[13] Garattini, R. Casimir wormholes. *The European Physical Journal C*, 79(11), November 2019.

[14] Garattini, R. Generalized absurdly benign traversable wormholes powered by casimir energy, 2020.

[15] Hawking, S. W. y Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.

[16] Hochberg, D. y Kephart, T. W. Lorentzian wormholes from the gravitationally squeezed vacuum. *Physics Letters B*, 268(3):377 – 383, 1991.

[17] Horowitz, G. T., Marolf, D., Santos, J. E., y Wang, D. Creating a traversable wormhole. *Classical and Quantum Gravity*, 36(20):205011, sep 2019.

[18] Hubeny, V. E. The ads/cft correspondence. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12):124010, Jun 2015.

[19] Jensen, K. y Karch, A. Holographic dual of an einstein-podolsky-rosen pair has a wormhole. *Physical Review Letters*, 111(21), November 2013.

[20] Jusufi, K., Channuie, P., y Jamil, M. Traversable wormholes supported by GUP corrected casimir energy. *The European Physical Journal C*, 80(2), February 2020.

[21] Khabibullin, A. R., Khusnutdinov, N. R., y Sushkov, S. V. The casimir effect in a wormhole spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 23(3):627–634, jan 2006.

[22] Kim, S.-W. Flare-out condition of a morris-thorne wormhole and finiteness of pressure. *Journal of the Korean Physical Society*, 63(10):1887–1891, Nov 2013.

[23] Lambourne, R. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge University Press, 2010.

[24] Lambrecht, A. The casimir effect: a force from nothing. *Physics world*, 15(9):29, 2002.

[25] Lemos, J. P. S., Lobo, F. S. N., y de Oliveira, S. Q. Morris-thorne wormholes with a cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 68:064004, Sep 2003.

[26] Lobo, F. *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions*. Springer International, USA, 2017.

[27] Lobo, F. S. N. Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 71:084011, Apr 2005.

[28] Maldacena, J. y Susskind, L. Cool horizons for entangled black holes. *Fortschritte der Physik*, 61(9):781–811, Aug 2013.

[29] Maldacena, J. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999.

[30] Maldacena, J. y Maoz, L. Wormholes in AdS. *Journal of High Energy Physics*, 2004(02):053–053, feb 2004.

[31] Martín-Martinez, E. *Lecture Notes: Introduction to General Relativity*. University of Waterloo, Canada, 2017.

[32] Martín-Moruno, P. y Visser, M. Semiclassical energy conditions for quantum vacuum states. *Journal of High Energy Physics*, 2013(9), Sep 2013.

[33] Morris, M. S. y Thorne, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 56(5):395–412, 1988.

[34] Morris, M. S., Thorne, K. S., y Yurtsever, U. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1446–1449, Sep 1988.

[35] Plebanski, J. y Krasinski, A. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.

[36] Plunien, G. The casimir effect. *Physics Reports*, 134(2-3):87–193, March 1986.

[37] Poisson, E. y Visser, M. Thin-shell wormholes: Linearization stability. *Physical Review D*, 52(12):7318–7321, December 1995.

[38] Roman, T. A. Inflating lorentzian wormholes. *Phys. Rev. D*, 47:1370–1379, Feb 1993.

[39] Schleich, K. y Witt, D. M. What does birkhoff's theorem really tell us?, 2009.

[40] Siemssen, D. The semiclassical einstein equation on cosmological spacetimes, 2015.

[41] Sokołowski, L. M. The bizarre anti-de sitter spacetime. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13(09):1630016, 2016.

[42] Stuchlik, Z. An Einstein-Strauss-de Sitter Model of the Universe. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 35:205, August 1984.

[43] Stuchlik, Z. y Hledik, S. Some properties of the Schwarzschild-de Sitter and Schwarzschild - anti-de Sitter space-times. *Phys. Rev. D*, 60:044006, 1999.

[44] Stuchlík, Z., Charbulák, D., y Schee, J. Light escape cones in local reference frames of kerr–de sitter black hole spacetimes and related black hole shadows. *The European Physical Journal C*, 78(3), Mar 2018.

[45] Susskind, L. Wormholes and time travel? Not likely. 3 2005.

[46] van Breukelen, R. y Papadodimas, K. Quantum teleportation through time-shifted AdS wormholes. *Journal of High Energy Physics*, 2018(8), August 2018.

[47] Visser, M. Energy conditions in the epoch of galaxy formation. *Science*, 276(5309):88–90, Apr 1997.

[48] Visser, M. Traversable wormholes: Some simple examples. *Phys. Rev. D*, 39:3182–3184, May 1989.

[49] Visser, M. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. Springer-Verlag, USA, 1996.

[50] Visser, M., Kar, S., y Dadhich, N. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. *Physical Review Letters*, 90(20), May 2003.

[51] Wang, B., Abdalla, E., Atrio-Barandela, F., y Pavón, D. Dark matter and dark energy interactions: theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Reports on Progress in Physics*, 79(9):096901, Aug 2016.

[52] Zee, A. *Quantum field theory in a nutshell*. In a nutshell (Princeton, N.J.). Princeton University Press, 2nd ed edición, 2010.