ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIÓN BIARMÓNICA CON DISCONTINUIDADES NO LINEALES

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

MARCELO EDUARDO ARIAS CARVAJAL
eduardo.arias.94@outlook.es

DIRECTOR: Ph.D. MARCO VINICIO CALAHORRANO RECALDE
marco.calahorrano@epn.edu.ec

Quito, abril 2021

Índice General

DECLARACIÓN

Yo MARCELO EDUARDO ARIAS CARVAJAL, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Marcelo Eduardo Arias Carvajal

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por MARCELO EDUARDO ARIAS CARVAJAL, bajo mi supervisión.

Ph.D. Marco Vinicio Calahorrano Recalde
Director del Proyecto

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que me han apoyado a lo largo de esta curva nO sUaVe.

En esta investigación se utilizaron recursos del Proyecto Semilla PIS-17-01.

Dedicatoria

Al amor de mi vida, al que venga primero...

Resumen

En el presente trabajo se hará uso de la teoría de puntos críticos y el análisis no lineal, los cuales nos permitirán estudiar, desde otro punto de vista, la existencia de soluciones débiles de las ecuaciones diferenciales parciales. En particular estudiaremos la existencia de solución o soluciones (en algún sentido) de la ecuación biarmónica con discontinuidades no lineales, considerando condiciones sobre la frontera Dirichlet homogéneas. De manera más precisa consideraremos el problema:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= H(u-a)q(u) && \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{PBDN}$$

donde Δ es el operador de Laplace, $a > 0$, H denota la función de Heaviside y $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

La idea es buscar soluciones del problema anterior adaptando el método introducido por Ambrosetti y Badiale (1989), que es una modificación al *Principio de Acción Dual de Clarke* mostrado por Clarke y Ekeland (1980). Lo más notable de este método es el suavizado que genera, en el sentido que este permitirá buscar soluciones del problema (PBDN) como puntos críticos de un funcional que, a pesar de la discontinuidad de $H(s-a)q(s)$ en $s = a$, es $\mathcal{C}^1$.

Introducción

Muchas de las aplicaciones de la ecuación biarmónica provienen de la consideración de procesos mecánicos y físicos complejos que involucran fluidos y sólidos. Una de las primeras aplicaciones de la ecuación biarmónica fue en la teoría clásica de la flexión de placas elásticas, que fue desarrollada por L. Bernoulli, Euler , Lagrange, Germain, Poisson, Navier, Cauchy y Lame; contribuyeron también a la teoría: Kirchhoff, Levy , J. C. Maxwell y Horace Lamb.

Los trabajos de Green, G. G. Stokes, J. C. Maxwell, Hertz, Love, Morera, Beltrami y Galerkin se enmarcan en áreas relacionadas con problemas tridimensionales de la teoría matemática de elasticidad, que a su vez también proponen formulaciones donde aparece el operador biarmónico. Estos autores, mediante sus formulaciones, ponen las bases para el estudio matemático de la teoría de la elasticidad, rama de la mecánica de medios deformables.

Algunos problemas de frontera libre pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u)H(u-\mu) && \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde Δ representa el operador de Laplace, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no lineal continua, Ω es la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ y H es la función de Heaviside que asigna 1 si su argumento es positivo y 0 si su argumento es no positivo. Podemos observar que dicho problema es una ecuación diferencial parcial elíptica con discontinuidades no lineales. Una característica interesante acerca del conjunto $\{\, x \in \Omega\colon u(x) = \mu \,\}$, al cual se lo llama frontera libre, es que pueden ser un conjunto de puntos, curvas, superficies o hiper superficies que no son conocidas a priori y que pueden separar regiones con características geométricas diferentes. Bensid y Bouguima (2008), con apropiadas condiciones sobre f, probaron la existencia de dos soluciones positivas y radiales para (1) y además lograron demostrar que la frontera libre asociada a cada solución es de clase $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$.

Problemas que están relacionados con el estudio de puentes colgantes son del tipo frontera libre, y en este aspecto enmarcan el estudio de las soluciones del tipo estacionario de modelos actuales para el comportamiento de la resonancia. Trabajos de este estilo fueron realizados por Berchio E., Gazzola F., Buoso D. y Zucco D. (2018), y Bonheure D., Gazzola F. y Dos Santos (2019).

En el presente trabajo vamos a estudiar un problema de tipo frontera libre en el cual está involucrado el operador biarmónico. De manera más precisa, vamos a estudiar la existencia de solución o soluciones del problema:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= H(u-a)q(u) && \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

A este problema nos referiremos como *ecuación biarmónica con discontinuidades no lineales*

Centraremos nuestro estudio en el marco de los métodos variacionales que utilizan el *teorema de paso de montaña* introducido por Ambrosetti y Rabinowitz (1973). En específico, utilizaremos el denominado Principio Variacional Dual formulado por Ambrosetti y Badiale (1989), el cual está basado en el Método de Acción Dual de Clarke y Ekeland (1980) (una explicación de estos métodos las veremos en los capítulos 6 y 3, respectivamente).

Si construyésemos el funcional de energía asociado al problema (2) tendríamos que dicho funcional no es diferenciable, pues la discontinuidad de la ecuación diferencial parcial es de salto. Es por esto que modificaremos ligeramente el Principio Variacional Dual para construir un funcional de clase $\mathcal{C}^1$ tal que sus puntos críticos sean "soluciones" de (2). Este planteamiento nos permite obtener un efecto de suavizado, a pesar de las discontinuidades de la no linealidad.

Capítulo 1

Conceptos y resultados básicos del análisis no lineal

Consideremos E un espacio de Banach real con la norma $\|\cdot\|$ y $U \subset E$ un abierto. Un funcional f sobre U es una aplicación $f\colon U \subset E \to \mathbb{R}$.

Diremos que f es ***Fréchet diferenciable*** (o simplemente diferenciable) en $u \in U$ si existe $A_u \in E'$ tal que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{f(u+v) - f(u) - A_u v}{\|v\|} = 0.$$

Escrito de otra manera, f es diferenciable en $u \in U$ siempre que se pueda escribir

$$f(u+v) - f(u) = A_u v + \mathbf{o}(\|v\|)$$

cuando $\|v\| \to 0$ para algún $A_u \in E'$.

Si existe la aplicación diferencial, A_u, esta es única y la notaremos por $f'(u) = A_u$ o $df(u)$.

Siempre que f sea diferenciable para todo $u \in U$ diremos que f es diferenciable sobre U. La aplicación $f'\colon U \to E'$, que envía $u \in U$ a $f'(u) \in E'$, es llamada ***derivada de Fréchet*** (o simplemente derivada) de f. En general, la aplicación f' es no lineal y no es continua. En el caso en que f' sea continua diremos que f es de clase $\mathcal{C}^1$ y escribiremos $f \in \mathcal{C}^1(U)$.

Un caso particular e importante es cuando consideramos un espacio de Hilbert H con producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$. Gracias al *teorema de representación de Riesz* podemos identificar H' con H vía el isomorfismo de Riesz, $R\colon H' \to H$, en el siguiente sentido: dado $B \in H'$ tenemos

$$B(u) = \langle B, u \rangle_{H',H} = (RB \mid u), \quad \forall u \in H.$$

De esta manera, si $U \subset H$ es un abierto y $f\colon U \to \mathbb{R}$ es un funcional diferenciable en $u \in U$, a través del isomorfismo de Riesz, al elemento $Rf'(u) \in H$ lo llamaremos el ***gradiente*** de f en u y lo notaremos por $\nabla f(u)$, el cual y verifica la propiedad

$$f'(u)v = (\nabla f(u) \mid v), \quad \forall v \in H.$$

Una vez definida la diferencial que vamos a utilizar veamos algunas propiedades de esta. Dados funcionales $f, g\colon U \subset E \to \mathbb{R}$, con U un abierto, diferenciables en $u \in U$, las siguientes propiedades se verifican:

(1) Para $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg$ es diferenciable en u y
$$(af + bg)'(u) = af'(u) + bg'(u).$$
(2) El producto fg es diferenciable en u y
$$(fg)'(u) = f(u)g'(u) + g(u)f'(u).$$
(3) Si $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$ es diferenciable en t_0 y $u = \gamma(t_0) \in U$, entonces la composición $f \circ \gamma$ es diferenciable en t_0 y
$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(u)\gamma'(t_0).$$
(4) Si $h\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $f(u) \in A$, entonces $h \circ f$ es diferenciable en u y
$$(h \circ f)'(u) = h'(f(u))f'(u).$$

Una demostración de las propiedades antes mencionadas se encuentra en Cartan (1967, Capítulo 2).

Muchas veces encontrar la diferencial de un funcional es bastante complejo por lo que recurriremos a una definición más débil de diferenciabilidad.

Diremos que $f\colon U \subset E \to \mathbb{R}$, con U un abierto y E un espacio de Banach real, es ***Gâteaux diferenciable*** en $u \in U$ si existe $A_u \in E'$ tal que para todo $v \in E$ se verifica
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = A_u v.$$
Si f es Gâteaux diferenciable en $u \in U$, entonces existe un único $A_u \in E'$ que satisface el límite anterior y lo llamaremos ***diferencial de Gâteaux*** de f en u y lo notaremos por $f'_G(u) = A_u$.

Siempre que f sea Gâteaux diferenciable para todo $u \in U$ diremos que f es Gâteaux diferenciable sobre U, y a la aplicación $f'_G\colon U \to E'$, que envía $u \in U$ a $f'_G(u) \in E'$, la llamaremos ***derivada de Gâteaux*** de f.

De las definiciones de Frèchet diferenciable y Gâteaux diferenciable podemos ver que la primera implica la segunda, y además las diferenciales coinciden; pero no siempre se verifica el recíproco. El siguiente resultado muestra condiciones suficientes para que esto se verifique.

Sea $f\colon U \subset E \to \mathbb{R}$, con U un abierto y E un espacio de Banach, un funcional Gâteaux diferenciable sobre U. Si $f'_G\colon U \to E'$ es continua en algún $u \in U$, entonces f es diferenciable en u y además $f'(u) = f'_G(u)$. Una demostración del resultado más general que el anterior se encuentra en Ambrosetti y Prodi (1995, Teorema 1.9).

Supongamos que $f\colon E \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre E. Diremos que $u \in E$ es un ***punto crítico*** de f si $f'(u) = 0$. Diremos que $c \in \mathbb{R}$ es un ***nivel crítico*** de f si existe un punto crítico $u \in E$ tal que $f(u) = c$.

A un operador $A\colon E \to E'$ lo llamamos ***variacional*** si existe un funcional $f \in \mathcal{C}^1(E)$ tal que $A = f'$.

Siempre que un problema se pueda traducir en una ecuación del tipo

$$A(u) = 0,$$

con A un operador variacional, lo denominaremos ***problema variacional***.

EJEMPLO 1. *Sea Ω un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ de $\mathbb{R}^N$. De aquí en adelante, consideraremos a $N > 2$, a menos que se diga lo contrario.*

Sea $p\colon \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$|p(s,x)| \leq a_1 + a_2|s|^l \quad \forall x \in \Omega \tag{3}$$

donde $l \leq \dfrac{N+2}{N-2}$ es la condición de crecimiento, y a_1 y a_2 constantes positivas.

Consideremos la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} -\Delta u &= p(u(x), x) \quad && \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Si multiplicamos por $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ a la ecuación anterior e integramos sobre Ω, obtenemos

$$-\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = \int_\Omega p(u(x), x) v \, dx.$$

Utilizando una de las fórmulas de Green, junto con la condición de borde sobre u concluimos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega p(u(x), x) v \, dx, \tag{5}$$

para cada $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. De la densidad de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ concluimos que dicha identidad se verifica para $v \in H_0^1(\Omega)$.

A una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica (5) para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ la llamaremos solución débil de (4).

Definamos el funcional

$$P(t,x) := \int_0^t p(s,x) \, ds$$

y notemos que del crecimiento de p existen constantes positivas a_3 y a_4 tal que

$$|P(t,x)| \leq \int_0^t |p(s,x)| \, ds \leq \int_0^t \left[a_1 + a_2|s|^l\right] \, ds \leq a_3|t| + a_4|t|^{l+1}.$$

Como $l + 1 \leq \dfrac{2N}{N-2} = 2^*$, del teorema de las inyecciones de Sobolev se tiene $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{l+1}(\Omega)$ con inmersión continua y en consecuencia podemos definir el funcional $\phi\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(u) := \int_\Omega P(u(x), x) \, dx.$$

Usando el crecimiento de p, como lo muestra Badiale y Serra (2010), en particular para $l + 1 = 2^*$, se puede mostrar que $\phi \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega))$ y

$$\phi'(u)v = \int_\Omega p(u,x) v \, dx.$$

Si consideramos $l < \dfrac{N+2}{N-2}$, *el teorema de Rellich-Kondrachov afirma que la inyección* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *es compacta y, en consecuencia, el gradiente* ϕ' *es compacto.*

Definamos el funcional $g\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$g(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Este funcional es $C^1(H_0^1(\Omega))$ *y para cada* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tenemos*

$$g'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De la identidad (5), *el problema* (4) *se puede reescribir como*

$$\frac{1}{2} g'(u)v = \phi'(u)v$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Si consideramos el funcional $f\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$f(u) := \frac{1}{2} g(u) - \phi(u),$$

podemos ver que $f \in C^1(H_0^1(\Omega))$ *y*

$$f'(u)v = \frac{1}{2} g'(u)v - \phi'(u)v.$$

Puesto que los puntos críticos del funcional f *son soluciones débiles de* (4), *dicha ecuación diferencial parcial puede reescribirse como un problema variacional.*

En la teoría de minimización es bien conocido que bajos la hipótesis de: E un espacio de Banach reflexivo y $f \in C^1(E)$ un funcional débilmente semicontinuo inferior, esto es, $f(u) \leq \liminf f(u_k)$ para cada sucesión tal que $u_k \rightharpoonup u$; si f es además coercitiva, es decir, $f(u_k) \to \infty$ cuando $\|u_k\| \to \infty$, entonces f posee un punto de mínimo global, es decir, existe $u^* \in E$ tal que

$$f(u^*) = \min \{ f(u) \colon u \in E \}.$$

Una demostración de este resultado se encuentra en Badiale y Serra (2010, Teorema 1.5.6).

Un resultado más general que el anterior es el *primer teorema fundamental del cálculo de variaciones* o conocido también como el *teorema de Weierstrass*:

TEOREMA 1 (Teorema de Weierstrass). *Sean* E *un espacio de Banach reflexivo,* $K \subset E$ *un conjunto convexo y cerrado, y* $f\colon K \to \mathbb{R}$ *un funcional débilmente semicontinuo inferior. Más aún, supongamos que se verifica alguna de las siguientes proposiciones:*

(1) K *es un conjunto acotado, o*
(2) f *es coercitiva en* K.

Entonces f es acotado por abajo en K, es decir, existe $C > 0$ tal que $f(x) \geq -C$ para todo $x \in K$ y f admite su mínimo, en otras palabras, existe $u^* \in K$ tal que

$$f(u^*) = \inf_{u \in K} f(u) = \min_{u \in K} f(u).$$

Una demostración para este resultado se encuentra en Ostergaard y Schaub (2016, Teorema 2.29).

Además de los problemas variacionales cuyas soluciones corresponden a los mínimos (o máximos), hay una amplia variedad de casos en los que uno busca puntos críticos diferentes de los mínimos. Esto puede suceder porque el funcional f no está acotado por abajo (ni por arriba), o porque f no es coercitiva, o porque el mínimo (existe, pero) no es relevante para el problema (por ejemplo, corresponde a la "solución trivial"), o bien por combinación de las razones anteriores. Cuando los problemas son no lineales, en la literatura se encuentra que uno puede esperar la existencia de más de un punto crítico.

1. Espacios de Funciones Continuas

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio. Para cualquier entero no negativo m, denotaremos por $\mathcal{C}^m(\Omega)$ al conjunto de las funciones $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que todas sus derivadas parciales

$$\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

con $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ y $|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$, de orden $|\alpha| \leq m$ sean continuas sobre Ω. Y definiremos $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^m(\Omega)$.

Definamos

$$\mathcal{C}_c^m(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{C}^m(\Omega) \colon \operatorname{supp}(u) \subset \Omega \text{ y } \operatorname{supp}(u) \text{ es compacto} \right\},$$

donde

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\left\{ x \in \Omega \colon u(x) \neq 0 \right\}}.$$

Definamos el siguiente espacio

$$\mathcal{C}_b^m(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{C}^m(\Omega) \colon \sup_{x \in \Omega} |\mathcal{D}^\alpha u(x)| < \infty \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^N \text{ tal que } |\alpha| \leq m \right\}.$$

Si lo dotamos de la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}_b^m(\Omega)} := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha| \leq m}} \sup_{x \in \Omega} |\mathcal{D}^\alpha u(x)|,$$

resulta que $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Para Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, definamos

$$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) := \left\{ u \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon u \text{ es acotada y uniformemente continua sobre } \Omega \right\}.$$

Cada función de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ tiene una única extensión continua a $\overline{\Omega}$. Así, denotemos por $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ al espacio vectorial que consiste de todas las funciones $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ para las cuales $\mathcal{D}^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\alpha| \leq m$.

OBSERVACIÓN 1. El espacio vectorial $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |\mathcal{D}^\alpha u(x)| .$$

Si $\lambda \in (0,1]$, definimos el espacio de las funciones Hölder continuas $\mathcal{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ por

$$\left\{ u \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) \colon \frac{|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda} < +\infty \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^N \text{ tal que } |\alpha| \leq m \right\}.$$

El espacio de las funciones Hölder continuas $\mathcal{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

La dos resultados siguientes proveen criterios muy útiles de densidad y compacidad de subconjuntos de $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

TEOREMA 2 (Stone-Weierestrass). *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es denso en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ si verifica las siguientes propiedades:*

(1) Si $u, v \in \mathcal{F}$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces $u+v$, uv y cu pertenecen a $\mathcal{F}$.
(2) Si $x, y \in \overline{\Omega}$ y $x \neq y$, entonces existe $u \in \mathcal{F}$ tal que $u(x) \neq u(y)$.
(3) Si $x \in \overline{\Omega}$, entonces existe $u \in \mathcal{F}$ tal que $u(x) \neq 0$.

Este resultado implica que el conjunto de todos los polinomios de $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ a coeficientes racionales es denso en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. A su vez, esto implica que $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es separable.

Consideremos a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio y $K \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Diremos que K es ***equicontinua*** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ para todo $\varphi \in K$ y todo par de puntos $x, y \in \Omega$ que verifiquen $|x-y| < \delta$. Por otro lado, diremos que K es ***equiacotado*** si existe una constante $C > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq C$ para cada $\varphi \in K$ y todo $x \in \Omega$.

TEOREMA 3 (Ascoli-Arzelà). *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$. Un subconjunto K de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es precompacto en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ si las dos condiciones siguientes se verifican:*

(1) K es equiacotado, y
(2) K es equicontinuo.

El siguiente resultado muestra inyecciones continuas de los espacios de Hölder.

TEOREMA 4. *Sean Ω un dominio de $\mathbb{R}^N$, m un entero no negativo y $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Entonces se verifican las siguientes inyecciones continuas:*

$$\mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}), \tag{6}$$

$$\mathcal{C}^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m}(\overline{\Omega}), \tag{7}$$

$$\mathcal{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,\nu}(\overline{\Omega}). \tag{8}$$

Además, si Ω es acotado, entonces las siguientes inyecciones son compactas

$$\mathcal{C}^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m}(\overline{\Omega}), \tag{9}$$

$$\mathcal{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,\nu}(\overline{\Omega}). \tag{10}$$

Si Ω es convexo, tenemos las siguientes inyecciones continuas

$$\mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,1}(\overline{\Omega}), \tag{11}$$

$$\mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m,\lambda}(\overline{\Omega}). \tag{12}$$

La demostración de este resultado se encuentra en Adams R. A. (2003, Teorema 1.34).

2. Espacios Funcionales

En toda esta sección consideraremos a Ω como un dominio contenido en $\mathbb{R}^N$, con N un entero positivo. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, con m un entero no negativo y $1 \leq p \leq +\infty$, está definido por

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \colon \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \text{con } |\alpha| \leq m, \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

donde los $\mathcal{D}^\alpha u$ son derivadas en el sentido distribucional, es decir, existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u\, \mathcal{D}^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Fijaremos $\mathcal{D}^\alpha u = g_\alpha$.

Definamos las normas de los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por: si $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

y si $p = +\infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, con las normas definidas anteriormente, son espacios de Banach. Una demostración de este resultado se encuentra en Adams R. A. (2003).

El siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en Demengel y Demengel (2012, Teorema 2.80,Teorema 2.84), muestra qué hipótesis son suficientes para tener inyecciones compactas de los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ en espacios de Lebesgue $L^q(\Omega)$ o espacios de Hölder $\mathcal{C}^{n,\gamma}(\overline{\Omega})$.

TEOREMA 5. *Dados Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz.*

(1) Si $N > mp$, tenemos que la inyección

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

es compacta para $q < p^* := \dfrac{Np}{N - mp}$. Aquí, p^* representa el exponente crítico de p.

(2) Si $mp > N$, fijando $j = [N/p] + 1$, entonces para todo $\lambda < j - N/p$, las inmersiones

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{m-j,\lambda}(\overline{\Omega})$$

son compactas.

OBSERVACIÓN 2. Si $p = 2$ denotaremos a los $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Estos espacios son de Hilbert con el producto interno

$$(u \mid v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} (\mathcal{D}^\alpha u \mid \mathcal{D}^\alpha v)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Además, $H^m(\Omega)$ es separable. La demostración de este resultado se encuentra en Adams R. A. (2003).

Consideremos $m > 0$ un entero y $q \le p \le +\infty$.

El subespacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$. La demostración de este resultado se encuentra en Gilbarg y Trudinger (2015, Teorema 7.9).

Definamos al espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$.

Los espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ tienen las siguientes inyecciones:

TEOREMA 6.

(1) Si $p < N$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{Np/N-p}(\Omega).$$

(2) Si $p > N$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}).$$

Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se verifica:

(1) Si $p < N$

$$\|u\|_{L^{Np/N-p}(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

(2) Si $p > N$

$$\sup_{\Omega} |u| \le C\, |\Omega|^{1/N - 1/p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Además, Gilbarg y Trudinger (2015, Theorem 7.10) en su obra "Elliptic partial differential equations of second order" nos proporcionan los siguientes resultados:

COROLARIO 1.

(1) Si $mp < N$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

(2) *Para cualquier entero k tal que $0 \leq k < m - N/p$ se verifica*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

La seminorma

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

es en realidad una norma equivalente a la norma inducida por $W^{m,p}(\Omega)$ en $W_0^{m,p}(\Omega)$.

OBSERVACIÓN 3. Decimos que un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tiene frontera $\partial\Omega$ Lipschitz si para cada $x \in \partial\Omega$, existe un radio $r_x > 0$ y una aplicación $\psi_x \colon B_{r_x}(x) \to Q$, donde

$$Q := \{ (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \colon |y'| < 1, |y_N| < 1 \},$$

tal que

(1) ψ_x es una biyección,
(2) ψ_x y ψ_x^{-1} son funciones Lipschitz,
(3)
$$\psi_x\big(\partial\Omega \cap B_{r_x}(x)\big) = Q_0 := \{ y \in Q \colon y_N = 0 \}$$
(4)
$$\psi_x\big(\Omega \cap B_{r_x}(x)\big) = Q_+ := \{ y \in Q \colon y_N > 0 \}.$$

Capítulo 2

Teoría de Puntos Críticos

1. Teoría de Lusternik-Schnirelmann

La teoría de Lusternik-Schnirelmann, que trataremos en este capítulo, es una de las herramientas más clásicas y poderosas de la teoría de puntos críticos. Solo estudiaremos los resultados que necesitaremos en los siguientes capítulos e intentaremos destacar las ideas principales de esta teoría. Puesto que el objetivo es utilizar dichos resultados no realizaremos pruebas rigurosas de dichos resultados, también porque estos necesitan ciertos tecnicismos.

Consideremos un espacio topológico X y $A \subset X$ no vacío. Decimos que una aplicación $\varphi \in \mathcal{C}(A, X)$ es una ***deformación*** si existe una homotopía $h \in \mathcal{C}([0,1] \times A, X)$ tal que $h(0, \cdot) = \varphi$ y $h(1, \cdot) = \mathrm{Id}$.

Decimos que A es ***contractible*** a un punto u_0 en X si existe una deformación $\varphi \in \mathcal{C}(A, X)$ tal que $\varphi(u) = u_0$.

Definimos la ***categoría*** de A relativa a X, $\operatorname{cat}(A; X)$, como el cardinal del recubrimiento más pequeño de conjuntos contractibles de A, es decir, el entero más pequeño k, tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

donde cada A_i es contractible en X, para cada $i \in [\![1, k]\!]$. Si no existe tal entero fijaremos $\operatorname{cat}(A; X) = +\infty$, también fijaremos $\operatorname{cat}(\emptyset, X) = 0$, y $\operatorname{cat}(X)$ abreviará $\operatorname{cat}(X; X)$.

El siguiente resultado contiene las principales propiedades de la categoría:

LEMA 1. *Dados $A, B \subset X$, se verifican los siguientes resultados:*

(1) si $A \subset B$ entonces $\operatorname{cat}(A; X) \leq \operatorname{cat}(B; X)$;
(2) $\operatorname{cat}(A \cup B; X) \leq \operatorname{cat}(A; X) + \operatorname{cat}(B; X)$;
(3) si $\varphi \in \mathcal{C}(A, B)$ es una deformación y A es cerrado, entonces

$$\operatorname{cat}\left(\varphi(A); X\right) \geq \operatorname{cat}(A; X);$$

(4) dada X una vecindad contractible y $K \subset X$ un compacto, entonces $\operatorname{cat}(K; X) < +\infty$ y existe una vecindad U de K tal que $\operatorname{cat}(\bar{U}; X) = \operatorname{cat}(K; X)$.

EJEMPLO 2.

(1) *Sea* $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1 \}$. *Se tiene que* $\operatorname{cat}(S^{n-1}) = 2$. *En efecto, la esfera unitaria se puede escribir como la unión de los conjuntos*

$$U_1 := \{ x \in S^{n-1} \colon x_n = 1 \} \quad y \quad U_2 := \{ x \in S^{n-1} \colon x_n \neq 1 \},$$

los cuales son contractibles a un punto, por ejemplo U_1 *es contractible al polo norte de la esfera mientras que* U_2 *es contractible al polo sur de la esfera. Notemos también que*

$$S^{n-1} \subset U_1 \cup U_2.$$

Como S^{n-1} *puede ser recubierto por dos conjuntos abiertos deformables a puntos, por definición de categoría tenemos*

$$\operatorname{cat}\left(S^{n-1}\right) \leq 2.$$

Puesto que S^{n-1} *no es deformable en sí mismo, tenemos que*

$$\operatorname{cat}\left(S^{n-1}\right) > 1.$$

En conclusión, $\operatorname{cat}\left(S^{n-1}\right) = 2$.

(2) *Sea* $T^k = \bigotimes_{i=1}^{k} S^1$ *que denota el toro k dimensional. Resulta que* $\operatorname{cat}(T^k) = k + 1$. *Cornea O., Lupton G., Oprea J. y Tanré D. (2003) muestra, a través de resultados de topología algebraica, que* $k + 1 \leq \operatorname{cat}(T^k)$. *Además, Cornea O., Lupton G., Oprea J. y Tanré D. (2003, Teorema 1.7) también muestra que*

$$\operatorname{cat}(T^k) \leq \dim(T^k) = k + 1.$$

Por lo que

$$\operatorname{cat}(T^k) = k + 1.$$

(3) *Consideremos la representación de* $\mathbb{Z}_2$ *(los números enteros módulo 2) sobre* R^n, $T(0) = \mathrm{Id}$, $T(1) = -\mathrm{Id}$ *y* $P^n = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$ *el correspondiente espacio proyectivo. Como una consecuencia de Möbius y cols. (1991, capítulo 5) uno puede probar que* $\operatorname{cat}(P^n) = n$. *En adición, si H es un espacio de Hilbert separable, infinito dimensional y* $S^\infty = \{ u \in H \colon \|u\| = 1 \}$, *fijando* $P^\infty := S^\infty/\mathbb{Z}_2$, *resulta que* $\operatorname{cat}(P^\infty) = +\infty$.

OBSERVACIÓN 4. Las categorías pueden usarse para encontrar niveles críticos del tipo mín-máx.

Consideremos a X un espacio topológico. Para todo $k \leq \operatorname{cat}(X)$, consideremos la clase de todos los subconjuntos A de X tal que $\operatorname{cat}(A; X) \geq k$, es decir, definamos el conjunto

$$\mathcal{A}_k := \{ A \subset X \colon \operatorname{cat}(A; X) \geq k \};$$

de esto podemos observar que $\mathcal{A}_{k+1} \subset \mathcal{A}_k$, para todo entero no negativo k.

Sea $f \colon M \to \mathbb{R}$ una función, con $M \subset X$. Definamos

$$c_k := \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \{ f(u) \colon u \in A \},$$

y gracias a las inclusiones de los $\mathcal{A}_k$ tenemos que

$$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots .$$

Para mostrar que los c_k's son niveles críticos es necesario suponer lo siguiente:

$$X = H \text{ es un espacio de Hilbert, } M \text{ es un abierto de clase } \mathcal{C}^1 \text{ y } f \in \mathcal{C}^1(M). \tag{A0}$$

Sea (M, f) un par que verifica (A0). Diremos que (M, f) cumple con la condición de Palais y Smale o (PS) si para cualquier sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en M tal que

$$\text{existe } C > 0 \; |f(u_k)| \leq C \tag{13}$$

$$f'(u_k) \to 0 \text{ en } H, \tag{14}$$

tiene una subsucesión convergente. A cualquier sucesión que verifique (13) y (14), la llamaremos ***sucesión-PS***.

TEOREMA 7. *Sean M y f tales que satisfacen (A0) y (PS). Además, consideremos que f está acotada por debajo sobre M existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(u) \geq a_0, \quad \forall u \in M.$$

Entonces:

(1) cada $c_k < +\infty$ es un nivel crítico para f sobre M;
(2) si $c := c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m}$, para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{cat}(K_c; M) \geq m + 1$, donde

$$K_c := \{\, u \in M \colon f'(u) = 0, f(u) = c \,\};$$

(3) si $c_k = -\infty$ para algún entero k, entonces

$$\sup \{\, f(u) \colon f'(u) = 0, u \in M \,\} = +\infty.$$

En particular, f tiene al menos $\operatorname{cat}(M)$ puntos críticos sobre M.

OBSERVACIÓN 5. El Teorema 7 fue tratado por R. S. Palais (1966, Teorema 3.1) en el caso particular de variedades de Finsler[1] modelados sobre espacios de Banach y con funcionales $\mathcal{C}^2$. Posteriormente Szulkin (1988) debilitó la regularidad requerida a $\mathcal{C}^1$.

Este resultado es conocido como *Teorema de Lusternik-Schnirelmann*, una demostración fue propuesta por Cornea O., Lupton G., Oprea J. y Tanré D. (2003, Proposición 1.23) en "Lusternik-Schnirelmann category". Puesto que su demostración es bastante técnica, vamos a realizar una recopilación de los resultados previos que se necesitan y vamos a resaltar el rol que juega la condición (PS).

[1]Una variedad de Finsler es una variedad M y una función $F \colon TM \to [0, +\infty)$, con TM el espacio tangente a M, tal que:

(1) F es suave en $TM \setminus \{0\}$,
(2) $F|_{T_xM} \colon T_xM \to [0, +\infty)$ es un funcional de Minkowski para todo $x \in M$.

Aquí

$$TM \setminus \{0\} := \bigcup \{\, T_xM \setminus \{0\} \colon x \in M \,\}.$$

Los siguientes lemas serán utilizados:

LEMA 2. *Sea $c \in \mathbb{R}$ y supongamos que (M, f) verifica (PS). Entonces*

(1) K_c es compacto;
(2) para todo $\varepsilon > 0$ y cualquier vecindad U de K_c, existe $\alpha > 0$ tal que $\|f'(u)\| \geq \alpha > 0$ para todo $u \in f_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \setminus U$, donde

$$f_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} := \{ u \in M \colon c - \varepsilon \leq f(u) \leq c + \varepsilon \}.$$

El segundo ítem del lema anterior permite demostrar el siguiente resultado:

LEMA 3 (Lema de Deformación). *Sea f un funcional que satisface (A0), (PS) y que sea acotado por debajo. Entonces*

(1) si $K_c = \emptyset$ para cada $c \in [a, b]$, entonces f^b puede ser deformado en f^a, donde

$$f^a := \{ u \in M \colon f(u) \leq a \} \quad y \quad f^b := \{ u \in M \colon f(u) \leq b \}.$$

(2) Dados $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, 1/2]$ y una vecindad U de K_c, existen $\delta \in (0, \varepsilon)$ y $\sigma \in \mathcal{C}([0,1] \times M, M)$ tal que para todo $\delta < d < 1/2$ se verifica

$$\sigma(0, u) = u, \qquad \forall u \in M; \tag{15}$$

$$\sigma(t, u) = 0, \qquad \forall 0 \leq t \leq 1, \qquad \forall u \notin f_{c-d}^{c+d}; \tag{16}$$

$$f(\sigma(t, u)) \leq f(u), \qquad \forall 0 \leq t \leq 1, \qquad \forall u \in M; \tag{17}$$

$$f(\sigma(1, u)) < c - \delta, \qquad \forall u \in f^{c+\delta} \setminus U. \tag{18}$$

Si f es $\mathcal{C}^2$, σ puede ser encontrada usando el flujo generado por un problema de Cauchy del tipo

$$\begin{cases} \sigma' = X(\sigma) \\ \sigma(0) = u \end{cases}$$

donde $\sigma' = d\sigma/dt$ y X es un campo vectorial localmente Lipschitz tal que $X = -f'$ en la banda $f_{c-\delta}^{c+\delta}$ y $X = 0$ en el complemento de la banda f_{c-d}^{c+d}. Si f es simplemente $\mathcal{C}^1$, se usan los llamados *Campos Vectoriales de Pseudo-Gradiente* que fueron introducidos por R. S. Palais (1966).

Una vez tenemos estos resultados vamos a hacer un bosquejo de la demostración del Teorema 7:

El *lema de deformación* nos permite definir la deformación $\varphi := \varphi(1, \cdot)$ con la propiedad

$$\varphi(A \setminus U) \subset f^{c-\delta}$$

para todo $A \subset f^{c+\delta}$, donde $\delta > 0$ es suficientemente pequeño y U una vecindad de K_c.

Por absurdo, vamos a suponer que

$$\operatorname{cat}(K_c; M) \leq m.$$

Puesto que K_c es compacto, existe una vecindad U de K_c tal que

$$\mathrm{cat}(\bar{U}; M) = \mathrm{cat}(K_c; M) \leq m.$$

De la definición de c, existe $A \in \mathcal{A}_{k+m}$ tal que $A \subset f^{c+\delta}$. Definamos $A' := A \setminus U$. De las propiedades de categoría tenemos que

$$\mathrm{cat}(A'; M) \geq \mathrm{cat}(A; M) - \mathrm{cat}(\bar{U}; M) \geq k + m - m = k,$$

esto es $A' \in \mathcal{A}_k$. Entonces, para $\varphi(A')$ tenemos que $\varphi(A') \in \mathcal{A}_k$ y gracias a (15), $\varphi(A') \subset f^{c-\delta}$. Estas dos afirmaciones contradicen la definición de $c = c_{k+m}$. Esto concluye la prueba del Teorema 7.

OBSERVACIÓN 6. Rabinowitz (1978, sección 2) mostró la existencia de soluciones débiles utilizando métodos variacionales y en adición, bajo ciertas condiciones de paridad, muestra la existencia de múltiples soluciones débiles utilizando la categoría de *Lusternik-Schnirelmann*.

OBSERVACIÓN 7. Existe una condición más fuerte que (PS), a la que llamaremos $(\mathrm{PS})_c$, la cual es: cualquier sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en M tal que $f(u_k) \to c$ y $f'(u_k) \to 0$ tiene una subsucesión convergente.

En realidad, $(\mathrm{PS})_c$ es suficiente para probar el *lema de deformación*.

PROPOSICIÓN 1. *Sea f un funcional que satisface* (A0) *y verifica $(\mathrm{PS})_c$ para cualquier $c \in [a, b]$, con $a < b$. Si $K_b = \emptyset$ y $\mathrm{cat}(f^a; M) < +\infty$, entonces $\mathrm{cat}(f^b; M) < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos $K_a^b := K \cap f_a^b$. Puesto que para cada $c \in [a, b]$ se verifica $(\mathrm{PS})_c$, tenemos que K_a^b es compacto. Sea U una vecindad de K_a^b tal que $\mathrm{cat}(U; M) = \mathrm{cat}(K_a^b; M) < +\infty$ y sea $u \in K_a^b$. Tomando $c = f(u)$, aplicando el *lema de deformación* encontramos un $\delta = \delta(u) > 0$ tal que $f^{c+\delta} \setminus U$ puede ser deformado en $f^{c-\delta}$. Sea $[c_i - \delta_i, c_i + \delta_i]$, $i \in [\![1, m]\!]$, un recubrimiento finito de $[a, b]$ con $c_m + \delta_m \leq b$. Gracias a las propiedades de la categoría, para cada $i \in [\![1, m]\!]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{cat}(f^{c_i-\delta_i}; M) &\geq \mathrm{cat}(f^{c_i+\delta_i} \setminus U; M) \\
&\geq \mathrm{cat}(f^{c_i-\delta_i}; M) - \mathrm{cat}(U; M).
\end{aligned}$$

Lo anterior junto con el *lema de deformación* (el primer ítem) implica que

$$\begin{aligned}
\mathrm{cat}(f^b; M) &= \mathrm{cat}(f^{c_m+\delta_m}; M) \\
&\leq \mathrm{cat}(f^{c_1-\delta_1}; M) + m \cdot \mathrm{cat}(U; M) \\
&\leq \mathrm{cat}(f^a; M) + m \cdot \mathrm{cat}(U; M).
\end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado. □

Entre las posibles aplicaciones del Teorema 7, tomemos el caso en el que M es homeomorfo a la esfera unitaria S^∞ de un espacio de Hilbert separable H infinito dimensional, a través de un homeomorfismo par. Si $0 \notin M$ y si definimos $\tilde{M} := M \backslash \mathbb{Z}_2$, entonces $\tilde{M} \cong P^\infty$ y $\mathrm{cat}(\tilde{M}) = +\infty$. Dado $f \in \mathcal{C}^1(H)$ una función par. Entonces f

induce un funcional $\tilde{f}$ de clase $\mathcal{C}^1$ cuyos puntos críticos sobre $\tilde{M}$ corresponden a pares de puntos críticos $(u, -u)$ de f sobre M. Entonces, si tal funcional f es acotada por abajo sobre M tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 8. *Supongamos que (M, f) satisface las condiciones (A0), (PS) y que f sea acotada por abajo sobre M. Más aun, supongamos que $0 \notin M$, M es homeomorfo a S^∞ a través de un homeomorfismo par, y sea f una función par. Entonces f tiene infinitos pares de puntos críticos sobre M.*

DEMOSTRACIÓN. Tomando en cuenta la discusión anterior, observemos que (M, f) satisface (PS) siempre que $(\tilde{M}, \tilde{f})$ lo haga. Así, aplicando el Teorema 7 a $(\tilde{M}, \tilde{f})$ obtenemos que $\tilde{f}$ tiene $\operatorname{cat}(\tilde{M}) = \operatorname{cat}(P^\infty) = +\infty$ puntos críticos sobre $\tilde{M}$. $\square$

El siguiente ejemplo es tomado de Ambrosetti (1992), el cual muestra una aplicación del Teorema 7. Consideremos un funcional $f \colon H \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \phi(u),$$

donde H es un espacio de Hilbert separable e infinito dimensional, y $\phi \in \mathcal{C}^2(H)$.

Consideremos $\psi(u) := (\phi'(u) \mid u)$. Supongamos que ϕ satisface (A1):

$$\text{existe } 0 < \theta < \frac{1}{2} \text{ tal que } \phi(u) \le \theta\left(\phi'(u) \mid u\right), \text{ para todo } u \in H; \tag{A1.1}$$

$$\phi(0) = 0 \text{ y para todo } u \neq 0,\ \psi(su) = \mathbf{o}(s^2) \text{ cuando } s \to 0; \tag{A1.2}$$

$$\text{para todo } u \neq 0,\ s^{-2}\psi(su) \to +\infty \text{ cuando } s \to +\infty; \tag{A1.3}$$

$$\left(\phi'(u) \mid u\right) < \left(\phi''(u)u \mid u\right) \text{ para todo } u \neq 0; \tag{A1.4}$$

$$\phi \text{ es débilmente continua; } \phi' \text{ y } \phi'' \text{ son compactos.} \tag{A1.5}$$

TEOREMA 9. *Supongamos que $\phi \in \mathcal{C}^2(H)$, satisface (A1) y además es par. Entonces*

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \phi(u)$$

tiene un número infinito de pares de puntos críticos.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos definiendo

$$g(u) := \|u\|^2 - \left(\phi'(u) \mid u\right)$$

y

$$M := \left\{\, u \in H \colon u \neq 0, \|u\|^2 = \left(\phi'(u) \mid u\right) \,\right\}.$$

Gracias a (A1.4), para cada $u \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(g'(u) \mid u\right) &= 2\|u\|^2 - \left(\phi'(u) \mid u\right) - \left(\phi''(u)u \mid u\right) \\ &= \left(\phi'(u) \mid u\right) - \left(\phi''(u)u \mid u\right) < 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Es más, (A1.2) implica que existe $\rho > 0$ tal que

$$\|u\| \geq \rho, \quad \forall u \in M. \tag{20}$$

Para cada $u \in M$, usando (A1.1), tenemos que

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \theta\left(\phi'(u) \mid u\right) = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\|u\|^2. \tag{21}$$

En particular, puesto que $\theta < 1/2$, f es coerciva y por tanto acotada inferiormente sobre M. En efecto, para todo $u \in M$ tenemos, gracias a (20), que

$$f(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\rho > 0.$$

Afirmamos que (M, f) satisface (PS). En efecto, sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M tal que

$$f(u_k) \leq C, \tag{22}$$

$$\sigma_k := f'(u_k) \to 0, \tag{23}$$

donde $C > 0$ es una constante. Puesto que f es coerciva sobre M, la condición (22) implica que existe una subsucesión, a la cual llamaremos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $u_k \rightharpoonup \bar{u}$. Gracias a que cada u_k está en M, resulta que

$$f(u_k) = \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \phi(u_k) = \frac{1}{2}\left(\phi'(u_k) \mid u_k\right) - \phi(u_k).$$

Gracias a que ϕ es débilmente continua y ϕ' es compacta existe una sucesión, a la que nuevamente la llamaremos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que verifica $f(u_k) \to f(\bar{u})$. Esto junto con la acotación inferior de f y su coercividad implica que $f(\bar{u}) > 0$, y por tanto $u \neq 0$. Tenemos que

$$\sigma_k = f'(u_k) - \frac{(f'(u_k) \mid g'(u_k))}{\|g'(u_k)\|^2} \cdot g'(u_k),$$

tomando $\lambda_k = \dfrac{(f'(u_k) \mid g'(u_k))}{\|g'(u_k)\|^2}$, tenemos que

$$\sigma_k = f'(u_k) - \lambda_k g'(u_k).$$

Expresando de esta manera $f'_M(u_k)$, vemos que la expresión anterior es la proyección de $f'(u_k)$ sobre M. Haciendo el producto escalar con u_k y usando el hecho que $(f'(u_k) \mid u_k) = g(u_k) = 0$ obtenemos que

$$\lambda_k\left(g'(u_k) \mid u_k\right) = \left(-\sigma_k \mid u_k\right). \tag{24}$$

Como $u_k \rightharpoonup \bar{u}$, gracias a la compacidad de ϕ' y ψ' tenemos que

$$\left(g'(u_k) \mid u_k\right) = \left(\phi(u_k) \mid u_k\right) - \left(\phi''(u_k)u_k \mid u_k\right) \to \left(\phi'(\bar{u}) \mid \bar{u}\right) - \left(\phi''(\bar{u})\bar{u} \mid \bar{u}\right) \tag{25}$$

y puesto que $\bar{u} \neq 0$ tenemos que

$$\left(\phi'(\bar{u}) \mid \bar{u}\right) - \left(\phi''(\bar{u})\bar{u} \mid \bar{u}\right) < 0.$$

Puesto que $\sigma_k \to 0$, las relación (24) y la convergencia (25) implican que $\lambda_k \to 0$. Tomando en cuenta que

$$f'(u_k) = u_k - \phi'(u_k) \quad \text{y} \quad g'(u_k) = 2u_k - \psi'(u_k),$$

de la definición de σ_k obtenemos la siguiente relación

$$\sigma_k - \lambda_k \psi'(u_k) + \phi'(u_k) = (1 - 2\lambda_k) u_k.$$

Como $\sigma_k \to 0$ y $\lambda_k \to 0$, y del hecho que ϕ' y ψ' son compactos existe una subsucesión, a la que llamaremos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $u_k \to \bar{u}$. Esto prueba (PS).

Finalmente, mostremos que M es radialmente difeomorfo a

$$S^\infty := \{\, u \in H \colon \ \|u\| = 1 \,\}.$$

En efecto, para todo $u \in S^\infty$ y $s > 0$ definamos

$$\gamma(s) := \frac{1}{s^2} g(su) = 1 - \frac{1}{s^2}\left(\phi'(su) \mid su\right) = 1 - \frac{\psi(su)}{s^2}.$$

De las condiciones (A1.2) y (A1.3), tiene sentido hablar de solución de la ecuación $\gamma(s) = 0$, es más, tiene sentido para algún $s > 0$. Notemos que la derivada de γ en s está dada por

$$\gamma'(s) = \frac{1}{s^3}\left[\left(\phi'(su) \mid su\right) - \left(\phi''(su)su \mid su\right)\right],$$

de la condición (A1.4) tenemos que $\gamma'(s) < 0$ para todo $s > 0$. Esto implica que γ es estrictamente decreciente en $s > 0$, por lo que la solución de $\gamma(s) = 0$ es única. Y puesto que ϕ es par, M es simétrico con respecto a 0. Definamos $\tilde{M} := M \backslash \mathbb{Z}_2$. Por lo que $\operatorname{cat}(\tilde{M}) = \operatorname{cat}(P^\infty) = +\infty$, además se aplica el Teorema 8, por lo que f posee un número infinito de pares de puntos críticos. $\square$

EJEMPLO 3. *Siguiendo con las notaciones introducidas en el Ejemplo 1, fijamos*

$$\|u\|^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

y supongamos que $p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (por simplicidad vamos a suponer que p es independiente de $x \in \Omega$) y que satisface:

(1) $\tilde{p}(s) := \dfrac{p(s)}{s}$ es convexa;
(2) $\tilde{p}'(s) > 0$;
(3) $\tilde{p} \to 0$ (respectivamente $\to +\infty$) cuando $s \to 0$ (respectivamente $\to +\infty$);
(4) p es par;
(5) y p, $sp'(s)$ y $s^2 p''(s)$ satisfacen las condiciones de crecimiento (3).

Gracias a estas suposiciones sobre p, las condiciones (A1) se verifican y por tanto podemos aplicar el Teorema 9, lo cual muestra que existen infinitas soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta u = p(u) & \text{en} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Este ejemplo fue tomado de Ambrosetti (1992), sin embargo Ambrosetti y Rabinowitz (1973, sección 3) tienen resultados más generales.

Cuando trabajamos con funcionales pares sobre conjuntos simétricos (en el sentido de $\mathbb{Z}_2$), una forma alternativa de proceder es definir sobre la clase

$$\Sigma = \{\, A \subset H \setminus \{0\} \colon A \text{ es cerrado y simétrico } \}$$

una aplicación, a la cual llamaremos ***genus***,

$$\gamma\colon \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

por $\gamma(\emptyset) = 0$ y, si $A \neq \emptyset$ entonces $\gamma(A)$ denotará el entero positivo más pequeño k tal que existe $\psi \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^k)$ que verifica ψ es impar, y $\psi(u) \neq 0$ para todo $u \in A$. También fijaremos $\gamma(A) = +\infty$ si no existe ningún entero que verifique la propiedad anterior.

El genus verifica propiedades similares al de la categoría.

LEMA 4. *Sean $A, B \in \Sigma$.*

(1) Si A es finito y no vacío, entonces $\gamma(A) = 1$.
(2) Si $A \subset B$, $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;
(3) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;
(4) $\gamma(\varphi(A)) \geq \gamma(A)$ si φ es continua e impar;
(5) Si $K \in \Sigma$ es compacto, entonces $\gamma(K) < +\infty$ y existe una vecindad U de K tal que $\bar{U} \in \Sigma$ y $\gamma(\bar{U}) = \gamma(K)$;
(6) Si $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ es una vecindad de 0, acotada y simétrica, entonces $\gamma(\partial\mathcal{N}) = n$.

Una consecuencia de 6. es que $\gamma(S^{n-1}) = n$ como también $\gamma(S^\infty) = +\infty$.

Cuando f es par y $M \in \Sigma$ es de clase $\mathcal{C}^1$ de H, podemos hacer uso del genus para definir niveles críticos del tipo mín-max Resumamos el procedimiento, comenzamos con la contra parte de los dos primeros puntos del Teorema 7.

LEMA 5. *Sean $M \in \Sigma$ un abierto de clase $\mathcal{C}^1$ de H y $f \in \mathcal{C}^1(H)$ un funcional par. Supongamos que (M, f) satisfacen (PS) y definamos*

$$\tilde{c}_k := \inf_{\substack{A \in \Sigma \cap M \\ \gamma(A) \geq k}} \max \{\, f(u) \colon u \in A \,\}.$$

Si $\tilde{c}_k \in \mathbb{R}$, entonces $\tilde{c}_k$ es un valor crítico para f. Más aún, si $\tilde{c} = \tilde{c}_k = \cdots = \tilde{c}_{k+m}$, entonces $\gamma(K_{\tilde{c}}) \geq m + 1$. En particular, si $m > 1$ entonces $K_{\tilde{c}}$ contiene infinitos puntos críticos.

La demostración es similar a la del Teorema 7; tomando en cuenta que:

(1) puesto que f es par y $M = g^{-1}(0)$, con g par, entonces f'_M es impar y la deformación φ encontrada por el *lema de deformación* puede ser escogida impar;
(2) esto nos permite utilizar el ítem 4. del Lema 4;
(3) la propiedad $\gamma(K_{\tilde{c}}) > 1$ implica que $K_{\tilde{c}}$ contiene infinitos puntos críticos, en vista del ítem 1. del Lema 4.

Notemos que el Lema 5 permite obtener nuevamente el Teorema 7.

Como una aplicación de los argumentos anteriores, consideremos un funcional $f \in \mathcal{C}^1(H)$ de la forma

$$f(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(Au \mid u) + g(u) \tag{26}$$

donde

$$A \in \mathcal{L}(H) \text{ es positivo, autoadjunto y compacto} \tag{27}$$

$$g \in \mathcal{C}^1(H) \text{ tal que } g(u) := \mathbf{o}(\|u\|^2) \text{ en } u = 0. \tag{28}$$

Denotemos por $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$ a los valores propios de A con sus correspondientes funciones propias (las cuales, gracias al *teorema espectral*, forma una base ortonormal) v_i:

$$\mu_i A v_i = v_i.$$

TEOREMA 10. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(H)$ una función de la forma (26), con A y g que satisfacen (27) y (28), respectivamente. Más aún, supongamos que f es par, acotada por abajo sobre H y además, supongamos que se verifica (PS). Entonces f tiene al menos k (pares de) puntos críticos no triviales $(u_i, -u_i)$, $i \in [\![1,k]\!]$, cuando $\mu_k < 1 \leq \mu_{k+1}$. Más aún $f(u_i) < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los niveles mín-max $\tilde{c}_j$ definimos en el Lema 5, teniendo en cuenta que $M = H \setminus \{0\}$. Además, consideremos los conjuntos

$$B_{k,\varepsilon} := \left\{ u \in M \colon u = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = \varepsilon^2 \right\}.$$

Se puede demostrar que $B_{k,\varepsilon} \cong S^{k-1}$, por lo que $\gamma(B_{k,\varepsilon}) = k$. Para $u \in B_{k,\varepsilon}$, de la definición de $B_{k,\varepsilon}$ y de f, tenemos

$$f(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)\alpha_i^k + \mathbf{o}(\varepsilon^2).$$

Puesto que $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k < 1$, tenemos que

$$f(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mu_k}\right)\varepsilon^2 + \mathbf{o}(\varepsilon^2) \tag{29}$$

cuando $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño. Puesto que $\gamma(B_{k,\varepsilon}) = k$, la desigualdad anterior implica que

$$\tilde{c}_1 \leq \cdots \leq \tilde{c}_k < 0.$$

Puesto que f es acotada por abajo, tenemos que $\tilde{c}_1 > -\infty$. Finalmente, puesto que se verifica (PS), entonces por el Lema 5 tenemos que f tiene al menos k pares de puntos críticos; son no triviales pues $f(u_i) = \tilde{c}_i < 0$. □

OBSERVACIÓN 8. El procedimiento descrito anteriormente puede trasladarse a problemas que heredan una simetría.

2. Teorema del Paso de Montaña

El propósito de este capítulo es discutir procedimientos tipos mín-max para encontrar puntos críticos para una clase de funcionales que posiblemente no tengan límites, tanto desde arriba como desde abajo.

El primer caso que describiremos es el caso de un funcional f sobre un espacio de Hilbert H, el cual tiene un mínimo local estricto en 0, es negativo en cualquier otra parte y satisface (PS). En el Teorema 9, se considera este caso con f dado por:

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \phi(u)$$

donde ϕ es "supercuadrático", es decir, verifica (A1.1).

El mayor resultado de existencia es el llamado Teorema de Paso de Montaña que fue demostrado por Ambrosetti y Rabinowitz (1973) en su artículo "*Dual variational methods in critical point theory and applications*", el cual tiene una gran variedad de aplicaciones a problemas que surgen en la Física-Matemática.

Un segundo caso consideraremos funcionales de la forma

$$f(u) = \frac{1}{2}(Au \mid u) - \phi(u)$$

donde ϕ es "supercuadrático", pero A posiblemente no sea definido positivo. Este es un caso que surge frecuentemente en aplicaciones y lo trataremos en un capítulo posterior.

Sean H un espacio de Hilbert y $f \in \mathcal{C}^1(H)$. Supongamos que existen dos puntos u_0 y u_1 en H, y números $\rho > 0$ y α tales que las siguientes condiciones se verifican:

$$f(u) \geq \alpha \text{ para todo } u \in \partial B_\rho(u_0) = \{\, u \in H\colon \|u - u_0\| = \rho \,\}; \tag{A2.1}$$

$$\|u_0 - u_1\| > \rho; \tag{A2.2}$$

$$f(u_0) < \alpha \text{ y } f(u_1) < \alpha. \tag{A2.3}$$

A partir de u_0 y u_1 definimos

$$\Gamma := \{\, \gamma \in \mathcal{C}([0,1], E)\colon \gamma(0) = u_0 \text{ y } \gamma(1) = u_1 \,\}$$

y

$$c = c(\Gamma, f) := \inf_{\gamma\in\Gamma}\left[\max\{\, f(\gamma(t))\colon 0 \leq t \leq 1 \,\}\right]. \tag{30}$$

De acuerdo a su definición, $c < +\infty$.

TEOREMA 11 (Paso de Montaña). *Sea $f \in \mathcal{C}^1(H)$ que satisface* (A2) *y (PS)$_c$. Entonces f tiene un punto crítico $\bar{u}$ que verifica:*

(1) $\bar{u} \neq 0$,
(2) $\bar{u} \neq u_0$, $\bar{u} \neq u_1$ *y*
(3) $f(\bar{u}) = c \geq \alpha$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\alpha' = \text{máx}\,\{\, f(u_0), f(u_1)\,\}$. Puesto que $\|u_0 - u_1\| > \rho$, entonces cada $\gamma \in \Gamma$ interseca la esfera $\|u - u_0\| = \rho$. Luego, (A2.1) y (A2.3) implican

$$c \geq \text{ínf}\,\{\, f(u) \colon \ \|u - u_0\| = \rho \,\} \geq \alpha > \alpha'.$$

Para probar que c es un nivel crítico, supongamos, por contradicción, que $K_c = \emptyset$. Fijemos $\varepsilon = \text{mín}\,\{\, c - \alpha', 1/2 \,\}$ y el *lema de deformación* produce un $\delta \in (0, c - \alpha')$ y un $\varphi = \sigma(1, \cdot) \in \mathcal{C}(H, H)$ tales que

$$\varphi(u) = u, \text{ para todo } u \in f^{c-d}, \text{ para todo } d \in (\delta, c - \alpha') \tag{31}$$

$$f(\varphi(u)) < c - \delta \text{ para todo } u \in f^{c+\delta}. \tag{32}$$

Puesto que $f(u_0)$ y $f(u_1)$ son menores o iguales a α', que a su vez es menor que $c - d$, entonces (31) implica que $\varphi(0) = u_0$ y $\varphi(1) = u_1$. Así, para cada $\gamma \in \Gamma$ tenemos que $\varphi \circ \gamma \in \Gamma$. De la definición de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\text{máx}\,\{\, f(\varphi(t)) \colon 0 \leq t \leq 1 \,\} \leq c + \delta.$$

Usando (32) se sigue que

$$\text{máx}\,\{\, f(\varphi(t)) \colon 0 \leq t \leq 1 \,\} < c + \delta,$$

lo cual es una contradicción pues $\varphi \circ \gamma \in \Gamma$. □

OBSERVACIÓN 9. Bessi y Coti Zelati (1991) probaron que $(\text{PS})_c$ puede ser substituido con una condición más débil, la cual es la que enunciamos a continuación y la llamaremos $(\text{PS})^*_c$: cuando $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en M es una sucesión tal que $f(u_k) \to c$ y $f'_M(u_k) \to 0$, entonces c es un valor crítico de f.

Dados u_0 y u_1 en H, y C subconjunto cerrado de H, decimos que C ***separa*** u_0 de u_1 si pertenecen a distintas componentes conexas de $H \setminus C$.

El siguiente resultado es una mejora realizada por Ghoussoub y Preiss (1989) al Teorema 11.

TEOREMA 12. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(H)$ y supongamos que existen u_0, u_1 en H, y $C \subset H$ cerrado que separa a u_0 y u_1, y sean Γ y c definidos como en el teorema anterior; también asumiremos que f verifica la condición $(\text{PS})_c$ y $f(u) \geq c$ para todo $u \in C$, con*

$$c = \text{máx}\,\{\, f(u_0), f(u_1) \,\}.$$

Entonces existe $\bar{u} \in C$ tal que $f'(\bar{u}) = 0$ y $f(\bar{u}) = c$.

En algunas aplicaciones es útil ajustar el Teorema 11 diciendo algo más sobre la naturaleza del punto crítico encontrado a través del procedimiento mín-max. Si el funcional f fuese además $\mathcal{C}^2(H)$, y suponiendo que u es un punto crítico de f, fijemos los subespacios $H^0 := \ker f''(u)$ y H^- (respectivamente H^+) el cual denota el subespacio donde $f''(u)$ es definida negativa (respectivamente definida positiva). El ***índice de***

Morse (R. Palais y Smale, 1964; Smale, 2000) de u, notado por $m(u)$, es la dimensión de $H^{-} \oplus H^{0}$; decimos que u es ***no degenerado*** si $H^{0} = \{0\}$.

TEOREMA 13. *Sea $f \in \mathcal{C}^{2}(H)$ un funcional que verifica (A2) y (PS)$_c$, y supongamos que K_c es discreto. Entonces existe $u^{*} \in K_c$ tal que $m(u^{*}) \leq 1$. Más aún, si $K_c = \{u^{*}\}$ y u^{*} es no degenerado, entonces $m(u^{*}) = 1$.*

Una demostración de este resultado la realizó Hofer (1984).

Capítulo 3

Método de Acción Dual de Clarke-Ekeland

Consideremos a Ω un dominio acotado de R^N, $L\colon \operatorname{Dom}(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ un operador autoadjunto, y $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una función que satisface la siguiente propiedad

$$|\nabla F(s)| \leq a|s| + b \tag{33}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, con a y b constantes no negativas.

Observación 10. Entenderemos a ∇F en el sentido visto en Capítulo 1.

A partir de (33) podemos afirmar que el operador de Nemytskii $\nabla F\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, dado por

$$\nabla F(u)(x) := \nabla F(u(x)),$$

está bien definido y es continuo.

El problema a analizar es el siguiente:

$$Lu + \nabla F(u) = 0, \quad u \in \operatorname{Dom}(L), \tag{P}$$

el cual tiene la siguiente formulación variacional: encontrar los puntos críticos del funcional

$$\varphi(u) := \frac{1}{2}(Lu \mid u)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F(u)\, dx \tag{φ}$$

con $u \in \operatorname{Dom}(L)$.

Observación 11. Gracias al *teorema del grafo cerrado* podemos considerar al $\operatorname{Dom}(L)$ como un espacio de Hilbert dotado del producto interno

$$(u \mid v)_{\operatorname{Dom}(L)} := (u \mid v)_{L^2(\Omega)} + (Lu \mid Lv)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in \operatorname{Dom}(L)$.

Observación 12. Con las condiciones impuestas hasta el momento, el funcional $\varphi\colon \operatorname{Dom}(L) \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ con

$$\varphi'(u)v = (Lu + \nabla F(u) \mid v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in L^2(\Omega)$. En resumen, estamos trabajando con un funcional $\mathcal{C}^1$ sobre un Hilbert.

Podemos ver que $u \in \operatorname{Dom}(L)$ es solución de (P) si y solo si u es un punto crítico de φ. D. G. Costa (2007, Proposition 2.1) demostró este resultado.

Supongamos que

$$\text{el rango de } L,\ \operatorname{Img}(L), \text{ es cerrado;} \tag{L_1}$$

$$F \text{ es una función convexa tal que } \nabla F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es biyectiva.} \tag{F$_1$}$$

Como L es un operador autoadjunto y el rango de L es cerrado, entonces podemos descomponer a $L^2(\Omega)$ como

$$L^2(\Omega) = \ker(L) \oplus \operatorname{Img}(L).$$

Además, la restricción $L|_{\operatorname{Img}(L)}\colon \operatorname{Dom}(L) \cap \operatorname{Img}(L) \to \operatorname{Img}(L)$ es biyectiva y tiene inversa $K = L^{-1}\colon \operatorname{Img}(L) \to \operatorname{Img}(L) \cap \operatorname{Dom}(L)$ acotada.

Es necesario introducir el siguiente resultado y definición:

PROPOSICIÓN 2. *Dada $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ una función convexa tal que $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es biyectiva, entonces para cada $v \in \mathbb{R}^n$, la aplicación $u \mapsto u \cdot v - f(u)$ es acotada por arriba y*

$$f^*(v) := \sup_{u \in \mathbb{R}^n} [u \cdot v - f(u)]$$

define una función $f^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y $\nabla f^* = (\nabla f)^{-1}$. A f^* llamaremos la **transformada de Legendre-Fenchel** *de f.*

De la proposición anterior podemos observar que la transformada de Legendre-Fenchel de F, $F^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, está bien definida y $\nabla F^* = (\nabla F)^{-1}$. Haciendo el cambio de variable $v = \nabla F(u)$, el cual es equivalente a $u = \nabla F^*(v)$, en (P) obtenemos el problema equivalente

$$L(\nabla F^*(v)) + v = 0, \quad v \in \operatorname{Img}(L),$$

y si aplicamos la inversa del operador L, es decir K, a lo anterior obtenemos

$$Kv + \nabla F^*(v) = 0, \quad v \in \operatorname{Img}(L).$$

De la definición de K, tenemos que es equivalente a

$$Kv + \nabla F^*(v) \in \ker(L), \quad v \in \operatorname{Img}(L). \tag{P*}$$

El problema (P*) es conocido como problema dual de (P), y de manera similar al problema (P), tiene una formulación variacional: encontrar puntos críticos del funcional $\psi = \varphi^*$ dado por

$$\psi(v) = \frac{1}{2}(Kv \mid v)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F^*(v)\,dx, \quad v \in \operatorname{Img}(L). \tag{φ^*}$$

A esto es lo que llamamos ***Método de Acción Dual de Clarke-Ekeland***. Para mostrar que ψ está bien definida es necesario asumir hipótesis más fuertes sobre F. El siguiente resultado contiene dichas hipótesis:

PROPOSICIÓN 3. *Supongamos que se verifica (L$_1$). Consideremos a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una función estrictamente convexa, además existen constantes $0 < \alpha \leq \beta$ y $\delta \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\alpha\frac{|s|^2}{2} - \delta \leq F(s) \leq \beta\frac{|s|^2}{2} + \delta \tag{F$_2$}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. *Entonces el funcional* $\psi\colon \operatorname{Img}(L) \to \mathbb{R}$ *dado en* (φ^*) *está bien definido y es de clase* $\mathcal{C}^1$ *con*

$$\psi'(v)h = (Kv + \nabla F^*(v) \mid h)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $v, h \in \operatorname{Img}(L)$. *En particular,* $v \in \operatorname{Img}(L)$ *es una solución de* (P^*) *si y solo si* v *es un punto crítico de* ψ.

Una demostración de este resultado fue realizada por D. G. Costa (2007, Proposición 3.1) en "*An Invitation to Variational Methods in Differential Equations (Birkhuser Advanced Texts / Basler Lehrbcher)*".

Capítulo 4

Problema de Dirichlet lineal para el operador biarmónico

En este capítulo vamos a analizar la existencia de soluciones del problema:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + q)u &= h \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{PBL}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, es un abierto acotado, $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $q \geq 0$ c.t.p. en Ω y $h \in L^2(\Omega)$. También podemos considerar $h \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$, ver Observación 13.

Debemos dar sentido a lo que entenderemos por solución débil del problema (PBL). Para ello comencemos definiendo lo que entenderemos por solución clásica: un funcional u en $\mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ que verifica (PBL) lo llamaremos ***solución clásica*** de (PBL).

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (PBL) y consideremos v en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ arbitrario, pero fijo. Multiplicando v a la ecuación del problema (PBL) e integrando sobre Ω obtenemos

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v \, dx + \int_\Omega quv \, dx = \int_\Omega hv.$$

Para aplicar el *teorema de Green* dado en Evans (2010, pg. 715) a la ecuación anterior, debemos considerar además que la frontera de Ω es de clase de $\mathcal{C}^2$. Si suponemos esto, aplicando dicho resultado obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta^2 u) v \, dx &= \int_\Omega (\Delta(\Delta u)) v \, dx \\ &= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v) \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} (\Delta u) \frac{\partial v}{\partial n} \, ds \end{aligned}$$

donde n es el vector normal exterior a la frontera de Ω.

Puesto que $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} &= \nabla(\Delta u) \cdot n \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) n_i \\ &= \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} n_i \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i \right) \end{aligned}$$

$$= \Delta(\nabla u \cdot n)$$
$$= \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right).$$

Así, tenemos que

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v\, dx = \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_{\partial\Omega} v\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds - \int_{\partial\Omega} (\Delta u)\frac{\partial v}{\partial n}\, ds.$$

Puesto que $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tanto v como su derivada normal, $\partial v/\partial n$, son cero en el borde de Ω, esto implica que

$$\int_{\partial\Omega} (\Delta u)\frac{\partial v}{\partial n}\, ds = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\partial\Omega} v\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0.$$

En resumen, hemos obtenido lo siguiente

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_\Omega quv\, dx = \int_\Omega hv\, dx$$

para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$, que gracias a la densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H_0^2(\Omega)$ tenemos que

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_\Omega quv\, dx = \int_\Omega hv\, dx$$

para todo $v \in H_0^2(\Omega)$.

Diremos que $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es una ***solución débil*** para el problema (PBL) si:

(1) $u \in H_0^2(\Omega)$ y
(2) para cada $v \in H_0^2(\Omega)$ se verifica que

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_\Omega quv\, dx = \int_\Omega hv\, dx.$$

A la última igualdad la llamaremos ***formulación variacional*** del problema (PBL).

Vamos a mostrar la existencia de al menos una solución débil para el problema (PBL) por tres métodos, el primero utilizando el *teorema de Lax-Milgram*, el segundo será hecho por medio de la técnica denomina método directo del cálculo de variaciones y el tercero será usando la *Alternativa de Fredholm*.

1. Caso 1 (Teorema de Lax-Milgram)

Comencemos recordando el enunciado del *teorema de Lax-Milgram*:

TEOREMA 14 (Lax-Milgram). *Sean H un espacio de Hilbert y $\boldsymbol{a}\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal con las siguientes propiedades:*

(1) $\boldsymbol{a}$ es continua, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier par $(x, y) \in H \times H$ se verifica

$$|\boldsymbol{a}(x,y)| \le C \|x\|_H \|y\|_H;$$

(2) $\boldsymbol{a}$ es coerciva, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que para cualquier $x \in H$ se verifica

$$\boldsymbol{a}(x,x) \geq \alpha \|x\|_H^2 .$$

Entonces, para cualquier $f \in H^*$ existe un único $y_0 \in H$ tal que

$$\boldsymbol{a}(x,y_0) = f(x), \quad \forall x \in H,$$

y se tiene la estimación

$$\|y_0\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^*} .$$

Esto implica que la aplicación

$$\begin{aligned} A\colon H &\longrightarrow H^* \\ y &\longmapsto Ay := \boldsymbol{a}(\cdot,y) \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre H y H^*.

Además, si la forma bilineal $\boldsymbol{a}$ es simétrica, y_0 está caracterizado por

$$y_0 = \operatorname*{argmin}_{y \in H} \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(y,y) - f(y) \right].$$

Para utilizar el *teorema de Lax-Milgram*, a partir de la formulación variacional del problema, debemos encontrar una forma bilineal y una forma lineal.

Definamos la aplicación $\boldsymbol{a}\colon H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\boldsymbol{a}(u,v) := \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_\Omega quv\, dx$$

y el funcional $f_h\colon H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$f_h(v) := \int_\Omega hv\, dx.$$

La aplicación $\boldsymbol{a}$ es bilineal sobre $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$. En efecto, sean u, v y w en $H_0^2(\Omega)$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\int_\Omega \Delta(u+\alpha v)(\Delta w)\, dx + \int_\Omega q(u+\alpha v)w\, dx = \int_\Omega (\Delta u + \alpha \Delta v)(\Delta w)\, dx + \int_\Omega q(u+\alpha v)w\, dx$$

y gracias a la linealidad de la integral, tenemos que

$$\boldsymbol{a}(u+\alpha v, w) = \boldsymbol{a}(u,w) + \alpha \boldsymbol{a}(v,w);$$

de manera similar tenemos que

$$\boldsymbol{a}(u, v+\alpha w) = \boldsymbol{a}(u,v) + \alpha \boldsymbol{a}(u,w).$$

De la linealidad de la integral obtenemos la linealidad de la forma f_h sobre $H_0^2(\Omega)$. Además, para cualquier $u \in H_0^2(\Omega)$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f_h(u)| &\leq \int_\Omega |hu|\, dx \\ &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&= \|h\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

por lo que f_h es continua sobre $H_0^2(\Omega)$.

OBSERVACIÓN 13. Si consideramos como hipótesis que $h \in L^{2N/N+2}(\Omega)$ se verifica lo siguiente, para cada $u \in H_0^2(\Omega)$ de la inyección continua $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ $u \in H^1(\Omega)$. Gracias a Evans (2010, Teorema 5 del Capítulo 5), la inyección $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ para $N \geq 3$ es continua y por tanto

$$
\begin{aligned}
|f_h(u)| &\leq \int_\Omega |hu|\, dx \\
&\leq \|h\|_{L^{2N/N+2}(\Omega)} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq C\, \|h\|_{L^{2N/N+2}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq C\, \|h\|_{L^{2N/N+2}(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

por lo cual f_h es continua sobre $H_0^2(\Omega)$.

OBSERVACIÓN 14. Afirmamos que la norma $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual en $H_0^2(\Omega)$. Demostremos esto por densidad; consideremos u en $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, gracias al *teorema de Green*, tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (\Delta u)^2\, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\, dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i^2} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j\, ds \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i^2} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, ds \\
&= \int_\Omega |\mathcal{D}^2 u|^2\, dx \\
&= \left\|\mathcal{D}^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\left\|\mathcal{D}^2 u\right\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}
$$

.

Por densidad, para cada $u \in H_0^2(\Omega)$ tenemos que

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \left\|\mathcal{D}^2 u\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Gracias a la caracterización del primer valor propio del operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet homogéneas, el *Cociente de Rayleigh* nos dice que

$$\lambda_1 = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega |w|^2\, dx}.$$

De la definición de los espacios de Sobolev $H_0^m(\Omega)$ a través de teoría de trazas[1] tenemos que $\nabla u \in H_0^1(\Omega)^N$, por lo que para cada $i \in [\![1, N]\!]$ las derivadas parciales $\partial u/\partial x_i$ están en $H_0^1(\Omega)$ y por tanto

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx}.$$

Considerando las propiedades de derivadas débiles no haremos distinción entre $\partial/\partial x_i \nabla u$ de $\nabla \partial u/\partial x_i$, por lo que la desigualdad anterior la podemos escribir como

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\left\|\frac{\partial \nabla u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)^N}.$$

Notemos que λ_1 es el primer valor propio asociado al operador $-\Delta$ con condiciones de borde tipo Dirichlet homogéneas.

Usando todo lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial \nabla u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{\lambda_1}\sum_{i,j=1}^N \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{\lambda_1}\left\|\mathcal{D}^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{\lambda_1}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

[1]Suponiendo que Ω es de clase $\mathcal{C}^m$, para $1 \leq p < +\infty$, se puede definir equivalentemente los espacios de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ a través de teoría de trazas como

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \left\{\, u \in W^{m,p}(\Omega) \colon \gamma_0\, \mathcal{D}^\alpha\, u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \forall |\alpha| \leq m-1 \,\right\}.$$

Donde γ_0 es el operador traza $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Omega)$.
Este resultado está dado en Wloka (1987, Teorema 8.9).

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\mathcal{D}^2 u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Así, la constante que hace equivalente la norma de $H^2(\Omega)$ y la norma $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ en $H_0^2(\Omega)$ es

$$
\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_1} + 1} = \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}{\lambda_1^2}}.
$$

Probemos que la forma bilineal $\boldsymbol{a}$ es continua sobre $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$. Para ello tomemos u y v en $H_0^2(\Omega)$ arbitrarios y fijos, con lo cual

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}(u,v)| &= \left| \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_\Omega q(x) uv\, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |\Delta u|\ |\Delta v|\ dx + \int_\Omega q(x)|uv|\, dx \\
&\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{\sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}}\, \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \sqrt{\sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \sqrt{\sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \sqrt{\sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}} \\
&\leq \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \\
&\leq \left[1 + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\right] \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Finalmente, probemos que la forma bilineal a es coerciva. Consideremos u en $H_0^2(\Omega)$ arbitrario fijo, con lo cual

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(u,u) &= \int_\Omega (\Delta u)^2\, dx + \int_\Omega q u^2\, dx \\
&\geq \int_\Omega (\Delta u)^2\, dx \\
&= \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq C \|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Más aún, de la Observación 14, la constante C está dada por $\dfrac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{\lambda_1^2}$, por lo que

$$\boldsymbol{a}(u,u) \geq \frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{\lambda_1^2}\,\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)}\,.$$

Gracias al *teorema de Lax-Milgram*, existe un único $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{a}(u,v) = f_h(v) \text{ para todo } v \in H_0^2(\Omega)$$

y

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}}\,\|h\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Además, como la forma bilineal $\boldsymbol{a}$ es simétrica sobre $H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)$, u es caracterizado por

$$\begin{aligned} u &= \operatorname*{argmin}_{v\in H_0^2(\Omega)}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(v,v) - f_h(v)\right] \\ &= \operatorname*{argmin}_{v\in H_0^2(\Omega)}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta v)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega qv^2 - \int_\Omega hv\,dx\right]. \end{aligned}$$

En la siguiente sección vamos a mostrar esta caracterización.

OBSERVACIÓN 15. Recordemos que el *teorema de Lax-Milgram* genera un isomorfismo entre los espacios H y H^* a través de fijar la segunda componente de la forma bilineal. Así, aplicado a nuestro problema, para cada $v \in H_0^2(\Omega)$ definamos $\boldsymbol{a}_v := \boldsymbol{a}(\cdot, v)$. Luego, la aplicación $A\colon H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ definida por

$$\boldsymbol{a}(v) := \boldsymbol{a}_v,$$

es un un isomorfismo entre $H_0^2(\Omega)$ y $H^{-2}(\Omega)$.

2. Caso 2 (Método Directo del Cálculo de Variaciones)

El objetivo de esta sección es mostrar que podemos llegar a un resultado de existencia y unicidad del problema lineal a través de un método variacional, además de probar la equivalencia de este resultado con el *teorema de Lax-Milgram*.

La idea fundamental de los *Métodos Variacionales* es construir un funcional diferenciable cuyos puntos críticos sean soluciones del problema. Recordemos que la formulación variacional del problema (PBL) está dada por:

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx + \int_\Omega quv\,dx = \int_\Omega hv\,dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

la cual podemos reescribirla como

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx + \int_\Omega quv\,dx - \int_\Omega hv\,dx = 0, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Debemos encontrar un funcional $J\colon H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $u, v \in H_0^2(\Omega)$ tengamos

$$J'(u)v = \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx + \int_\Omega quv\,dx - \int_\Omega hv\,dx.$$

Para cada $u \in H_0^2(\Omega)$ definamos

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega qu^2\,dx - \int_\Omega hu\,dx.$$

Notemos que podemos reescribir $J(u)$ como

$$J(u) = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(u,u) - f_h(u).$$

Como $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal continua, la aplicación $u \mapsto \boldsymbol{a}(u,u)$ es una forma cuadrática continua. Veamos que $\boldsymbol{a}$ es diferenciable y calculemos su diferencial. Para ello consideremos u y v en $H_0^2(\Omega)$ y notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(u+v,u+v) - \boldsymbol{a}(u,u) &= \boldsymbol{a}(u,u+v) + \boldsymbol{a}(v,u+v) - \boldsymbol{a}(u,u)\\ &= \boldsymbol{a}(u,u) + \boldsymbol{a}(u,v) + \boldsymbol{a}(v,u) + \boldsymbol{a}(v,v) - \boldsymbol{a}(u,u)\\ &= 2\boldsymbol{a}(u,v) + \boldsymbol{a}(v,v).\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$0 \le \lim_{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}\to 0} \frac{|\boldsymbol{a}(v,v)|}{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}} \le \left[1 + \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\right] \lim_{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}\to 0} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} = 0,$$

por lo que la diferencial de la forma cuadrática a en $u \in H_0^2(\Omega)$ aplicado a $v \in H_0^2(\Omega)$ está dada por

$$2\boldsymbol{a}(u,v).$$

Ahora, la forma f_h es una aplicación lineal y continua sobre $H_0^2(\Omega)$, por lo que para todo u y v en $H_0^2(\Omega)$ tenemos que

$$f_h'(u)v = f_h(v).$$

El funcional J es de clase $\mathcal{C}^1$, pues resulta ser una combinación lineal de funcionales de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$, además

$$J'(u)v = \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx + \int_\Omega quv\,dx - \int_\Omega hv\,dx.$$

Es claro que los puntos críticos de J sobre $H_0^2(\Omega)$ son soluciones de (PBL).

Si el funcional J es estrictamente convexo, coercitivo y acotado por abajo, entonces existe un único mínimo global de J sobre $H_0^2(\Omega)$.

Veamos que el funcional J es coercitivo sobre $H_0^2(\Omega)$. Sea $u \in H_0^2(\Omega)$, con lo cual

$$\begin{aligned}J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega qu^2\,dx - \int_\Omega hu\,dx\\ &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx - \int_\Omega hu\,dx,\end{aligned}$$

anteriormente probamos que $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la de $H_0^2(\Omega)$, y en la Observación 14 mostramos que una de las constantes involucrada es $\dfrac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{\lambda_1^2}$, con esto tenemos que

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{\lambda_1^2}\,\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \int_\Omega hu\,dx \\
&\geq \frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{2\lambda_1^2}\,\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \int_\Omega |hu|\,dx \\
&\geq \frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{2\lambda_1^2}\,\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \|h\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{2\lambda_1^2}\,\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \|h\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2}\|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&= \frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{2\lambda_1^2}\,\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \|h\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{H_0^2(\Omega)}\,. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_0^2(\Omega)$ tal que $\|u_k\|_{H_0^2(\Omega)} \to +\infty$. Tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) \geq \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{2\lambda_1^2}\,\|u_k\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \|h\|_{L^2(\Omega)}\,\|u_k\|_{H_0^2(\Omega)}\right],$$

notemos que la parte cuadrática le gana en crecimiento a la parte lineal cuando $\|u_k\|_{H_0^2(\Omega)}$ es suficientemente grande, por lo que

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) = +\infty.$$

Así, J es coercitivo sobre $H_0^2(\Omega)$.

Sean u y v en $H_0^2(\Omega)$ diferentes. Se sigue que

$$\begin{aligned}
J'(u)(u-v) &= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta(u-v))\,dx + \int_\Omega qu(u-v)\,dx - \int_\Omega h(u-v), \\
J'(v)(u-v) &= \int_\Omega (\Delta v)(\Delta(u-v))\,dx + \int_\Omega qv(u-v)\,dx - \int_\Omega h(u-v).
\end{aligned}$$

De las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
\big(J'(u)-J'(v)\big)(u-v) &= J'(u)(u-v) - J'(v)(u-v) \\
&= \int_\Omega \big(\Delta(u-v)\big)^2\,dx + \int_\Omega q(u-v)^2\,dx \\
&\geq \int_\Omega \big(\Delta(u-v)\big)^2\,dx \\
&\geq \frac{\lambda_1^2+\lambda_1+1}{\lambda_1^2}\,\|u-v\|^2_{H_0^2(\Omega)} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que el funcional J es estrictamente convexo en $H_0^2(\Omega)$.

Fijemos

$$m = \inf_{u \in H_0^2(\Omega)} J(u),$$

y veamos que m es finito.

La desigualdad (34) implica que el funcional

$$\begin{aligned} F \colon H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto F(u) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}{2\lambda_1^2} \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - \|h\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \end{aligned}$$

está por debajo del funcional cuadrático J, y puesto que el coeficiente del término cuadrático es positivo entonces este está acotado por abajo y por tanto el funcional J está acotado por abajo. Luego, m es finito.

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizadora de J en $H_0^2(\Omega)$. Por absurdo supongamos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no es acotada, de la coercitividad de J tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) = +\infty,$$

esto contradice al hecho de que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión minimizante de J sobre $H_0^2(\Omega)$.

Ahora, veamos que m es alcanzado. Para ello consideremos de nuevo una sucesión minimizante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de J. Como J es coercitivo y $\{J(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un valor finito, tenemos que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_0^2(\Omega)$. El *teorema de Banach-Alaoglu* nos permite asegurar la existencia de una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a la que denotaremos por $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y $u \in H_0^2(\Omega)$ que verifican $u_k \rightharpoonup u$ en $H_0^2(\Omega)$. Como la inyección $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continua y compacta, tenemos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a u en $L^2(\Omega)$, y esto implica que $f_h(u_k) \to f_h(u)$.

De la simetría, coercitividad y continuidad de la forma bilineal $\boldsymbol{a}$, tenemos que $v \mapsto \sqrt{\boldsymbol{a}(v,v)}$ es una norma equivalente a la usual en $H_0^2(\Omega)$. Como la norma es un funcional semicontinuo inferior débil, tenemos que

$$\sqrt{\boldsymbol{a}(u,u)} \leq \liminf_{k\to+\infty} \sqrt{\boldsymbol{a}(u_k,u_k)},$$

y de esto obtenemos que

$$\boldsymbol{a}(u,u) \leq \liminf_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}(u_k,u_k).$$

Luego,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(u,u) - f_h(u) \\ &\leq \frac{1}{2} \liminf_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}(u_k,u_k) - \lim_{k\to+\infty} f_h(u_k) \\ &= \liminf_{k\to+\infty} J(u_k) \end{aligned}$$

$$= m,$$

esto muestra que

$$J(u) \leq m.$$

Como $u \in H_0^2(\Omega)$, tenemos que $J(u) \geq m$. Así, $m = J(u)$. Por lo que u es el mínimo global de J sobre $H_0^2(\Omega)$. Esto lo podemos reescribir como

$$J(u) = \min_{v \in H_0^2(\Omega)} J(v) = \min_{v \in H_0^2(\Omega)} \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(v,v) - f_h(v) \right].$$

3. Caso 3 (Alternativa de Fredholm)

OBSERVACIÓN 16. La *Alternativa de Fredholm* no es un método distinto al mostrado en Caso 1 (Teorema de Lax-Milgram), más bien es una generalización de este que usualmente es utilizado para mostrar existencia de problemas más generales.

Comencemos definiendo $Lu := \Delta^2 u + qu$ y $L_\sigma u := \Delta^2 u + (q - \sigma)u$, con $\sigma \in \mathbb{R}$. La forma bilineal asociada al operador L_σ está dada por la forma $\boldsymbol{a}_\sigma \colon H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boldsymbol{a}_\sigma(u,v) := \boldsymbol{a}(u,v) - \sigma \left(u \mid v \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Necesitamos encontrar $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tal que la forma bilineal $\boldsymbol{a}_{\sigma_0}$ sea continua y coercitiva. Para ello consideremos σ en $\mathbb{R}$, u y v en $H_0^2(\Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}_\sigma(u,v)| &\leq |\boldsymbol{a}(u,v)| + \left| \sigma \left(u \mid v \right)_{L^2(\Omega)} \right| \\
&\leq C \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + |\sigma| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + |\sigma| \|u\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2} \\
&\leq C \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + |\sigma| \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \\
&\leq \max\{C, |\sigma|\} \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Lo que muestra que la forma bilineal $\boldsymbol{a}_\sigma$ es continua; además esto se verifica para cualquier $\sigma \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, veamos que existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{a}_{\sigma_0}$ es coerciva. Para ello consideremos u en $H_0^2(\Omega)$ y calculemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_\sigma(u,u) &= \boldsymbol{a}(u,u) - \sigma \left(u \mid u \right)_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1} \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 - \sigma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left[\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1} - \sigma \right] \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

y para que la forma bilineal sea coerciva es necesario que

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}-\sigma>0.$$

Esto implica que debemos tomar σ tal que

$$\sigma\in\left(-\infty,\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}\right).$$

Consideremos a σ_0 un real que verifique la propiedad anterior. Así, la forma bilineal $\boldsymbol{a}_{\sigma_0}\colon H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)\to\mathbb{R}$ es continua y coerciva.

Para cada $u\in H_0^2(\Omega)$, definamos $\boldsymbol{a}_{\sigma_0,u}:=\boldsymbol{a}_{\sigma_0}(\cdot,u)$. Gracias al *Teorema de Lax-Milgram* la aplicación $L_{\sigma_0}\colon H_0^2(\Omega)\to H^{-2}(\Omega)$ definida por

$$L_{\sigma_0}(u):=\boldsymbol{a}_{\sigma_0,u}$$

es un isomorfismo entre $H_0^2(\Omega)$ y $H^{-2}(\Omega)$.

LEMA 6. *La inyección $I\colon H_0^2(\Omega)\to H^{-2}(\Omega)$ definida por*

$$I(u)v:=\int_\Omega uv\,dx\quad\forall v\in H_0^2(\Omega)$$

es compacta.

DEMOSTRACIÓN. Podemos expresar la inyección I como la composición de la aplicación $I_1\colon L^2(\Omega)\to H^{-2}(\Omega)$ definida por

$$I_1(u)v:=\int_\Omega uv\,dx\quad\forall v\in H_0^2(\Omega),$$

con la inyección $I_2\colon H_0^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$. La composición exacta que tenemos es $I=I_1\circ I_2$.

La inyección I_2 es continua y compacta. En efecto, I_2 resulta de la composición de la inyección $H_0^2(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, que es continua gracias a que para cada $u\in H_0^2(\Omega)$ tenemos que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\sqrt{\sum_{0\le|\alpha|\le1}\|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega}^2}\le\sqrt{\sum_{0\le|\alpha|\le2}\|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega}^2}=\|u\|_{H_0^2(\Omega)};$$

con la inyección $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ que, gracias al *teorema de Rellich-Kondrachov*, es compacta. Puesto que I_2 resulta de la composición de un operador lineal y continuo con un operador lineal continuo y compacto, I_2 es un operador continuo y compacto. Por un argumento similar, como I resulta de la composición de un operador lineal y continuo (I_1) con un operador lineal continuo y compacto (I_2), I es un operador lineal continuo y compacto; en particular, I es un operador lineal compacta de $H_0^2(\Omega)$ en $H^{-2}(\Omega)$. Consideremos u y v en $H_0^2(\Omega)$ y supongamos que $I(u)=I(v)$, lo cual es equivalente a $I_1(I_2(u))=I_1(I_2(v))$, del hecho que I_1 es una inyección se sigue que $I_2(u)=I_2(v)$ y puesto que I_2 también es una inyección concluimos que $u=v$. Luego, I es una inyección compacta de $H_0^2(\Omega)$ en $H^{-2}(\Omega)$. $\square$

Podemos reescribir la ecuación del problema (PBL) como

$$L_{\sigma_0} u + \sigma_0 I u = h.$$

Por lo mostrado anteriormente el operador L_{σ_0} es un isomorfismo de $H_0^2(\Omega)$ en $H^{-2}(\Omega)$; así, el operador $L_{\sigma_0}^{-1}$ es un isomorfismo de $H^{-2}(\Omega)$ en $H_0^2(\Omega)$. Si aplicamos el operador $L_{\sigma_0}^{-1}$ a la ecuación anterior obtenemos

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I u = L_{\sigma_0}^{-1} h. \tag{35}$$

El Lema 6 asegura que el operador $T := -\sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I$ es compacto sobre $H_0^2(\Omega)$. Notemos que la expresión $\ker(id - T) = \{ 0 \}$ es equivalente a $u - Tu = 0$ que a su vez es equivalente a $L_{\sigma_0} u + \sigma_0 I u = 0$, del hecho que L_{σ_0} es un isomorfismo entre $H_0^2(\Omega)$ y $H^{-2}(\Omega)$ se tiene que la única solución de la ecuación anterior es $u = 0$, por tanto $\ker(id - T) = \{ 0 \}$. Gracias a la *Alternativa de Fredholm*, para cada $h \in H^{-2}(\Omega)$, existe un único $u \in H_0^2(\Omega)$ que verifica (35). Lo hecho en esta sección muestra que para cada $h \in H^{-2}(\Omega)$, el problema (PBL) tiene una única solución $u \in H_0^2(\Omega)$.

4. Regularidad de la solución del problema (PBL)

Puesto que el objetivo de este trabajo es mostrar existencia de solución o soluciones, adaptaremos un resultado de regularidad para ecuaciones diferenciales elípticas más generales, el cual se encuentra en Wloka (1987, Teorema 20.4).

Wloka considera la siguiente ecuación diferencial parcial elíptica general

$$\begin{aligned} A(\mathcal{D})u &= f \quad \text{en} \quad \Omega, \\ b_j(\mathcal{D})u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad \forall j \in [\![1, m]\!], \end{aligned} \tag{EPG}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, de clase $\mathcal{C}^{m+k,1}$ ($k \in \mathbb{N}$ es la regularidad extra que queremos darle a la solución). Hagamos precisiones sobre los operadores involucrados en la ecuación anterior e hipótesis necesarias para que se verifique existencia, unicidad y regularidad de la solución de (EPG):

(1) A es un operador diferencial elíptico de orden $2m$, con $m \in \mathbb{N}$, dado por

$$A(\mathcal{D})u := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(x)\, \mathcal{D}^\beta u(x) \right)$$

con $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$.

(2) Los $\{ b_j \}_{j=1}^r$ son r () operadores a valores en la frontera; donde los b_j son operadores diferenciales lineales de orden $m_j \in [\![0, m-1]\!]$ de la forma

$$b_j(\mathcal{D})u := \sum_{|\kappa| \leq m_j} b_{j,\kappa} \gamma_0(\mathcal{D}^\kappa u)$$

[2]con $b_{j,\kappa} \in \mathcal{C}^{m+k-m_j}(\overline{\Omega})$.

[2]Aquí, γ_0 es el operador traza $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$.

(3) Los ordenes de los operadores a valores en la frontera deben ser diferentes, es decir, si $j \neq i$ se debe verificar que $m_j \neq m_i$.

(4) Para cada $j \in [\![1, m]\!]$,

$$\sum_{|\kappa|=m_j} b_{j,\kappa}(x) n_\kappa \neq 0$$

para todo $x \in \partial\Omega$, con n es el vector normal exterior a $\partial\Omega$.

Así, el espacio en donde se buscará soluciones es

$$V := \{\, v \in H^m(\Omega) \colon b_j(\mathcal{D})v = 0, \forall j \in [\![1, 2m-1]\!] \,\}.$$

(5) Aplicando la *fórmula de Green*, presentada por Wloka (1987, Teorema 14.2), a $\int_\Omega uv\,dx$ obtenemos

$$\int_\Omega uv\,dx = a(u,v) + c(u,v)$$

con

$$a(u,v) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}\, \mathcal{D}^\alpha u \cdot \mathcal{D}^\beta v\,dx$$

y

$$c(u,v) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ |\beta| \leq m}} c_{\alpha\beta}\, \mathcal{D}^\alpha u \cdot \mathcal{D}^\beta v\,d\sigma,$$

siempre que u y v estén en $H^m(\Omega)$.

(6) En la forma sesquilineal $c(\cdot,\cdot)$, el orden más alto que surja en las derivadas $\mathcal{D}^\alpha$ o $\mathcal{D}^\beta$ es a lo más $m-1$. Además,

$$c_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}), \quad \forall |\alpha| \leq m-1, |\beta| \leq m.$$

(7) La forma $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva en $H^m(\Omega)$.

(8) El dato f debe verificar:

$$f \in \left(H_0^{m-k}(\Omega)\right)' \text{ para } k < m, \quad \text{ó } f \in H^{k-m} \text{ para } k \geq m.$$

(9) Diremos que $u \in V$ es solución de (EPG) si verifica

$$a(u,v) + c(u,v) = \int_\Omega fv\,dx$$

para todo $v \in V$.

OBSERVACIÓN 17. En lo anterior k es un natural que denotará la regularidad extra que quisiéramos darle a la solución de (EPG).

Wloka (1987, Teorema 20.4) muestra el siguiente resultado:

TEOREMA 15. *Supongamos las hipótesis (1)-(9), y que u es solución de (EPG) en V. Entonces*

$$u \in V \cap H^{m+k}(\Omega).$$

Adaptando este resultado a nuestro problema, se tiene el siguiente resultado de regularidad:

TEOREMA 16 (Regularidad). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $\mathcal{C}^4$, $q \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $q \geq 0$ en Ω, y $h \in L^2(\Omega)$. Entonces la solución débil, u, del problema* (PBL) *está en $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$.*

5. Operador de Green

Para cualquier $\sigma \in \mathbb{R}$, el operador $L_\sigma \colon \operatorname{Dom}(L_\sigma) \to L^2(\Omega)$ con dominio $\operatorname{Dom}(L_\sigma) = H_0^2(\Omega)$ el cual es denso en $L^2(\Omega)$, es autoadjunto. En efecto, sean u y v en $H_0^2(\Omega)$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(L_\sigma u \mid v)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (L_\sigma u) v \, dx \\
&= \int_\Omega (\Delta^2 u) v \, dx + \int_\Omega (q-\sigma) uv \, dx \\
&= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v) \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} (\Delta u) \frac{\partial v}{\partial n} \, ds + \int_\Omega (q-\sigma) uv \, dx \\
&= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v) \, dx + \int_\Omega (q-\sigma) uv \, dx \\
&= \int_\Omega u(\Delta^2 v) \, dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial(\Delta v)}{\partial n} \, ds + \int_{\partial\Omega} \Delta v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds + \int_\Omega (q-\sigma) uv \, dx \\
&= \int_\Omega u(\Delta^2 v) \, dx + \int_\Omega (q-\sigma) uv \, dx \\
&= \int_\Omega u(L_\sigma v) \, dx \\
&= (u \mid L_\sigma v)_{L^2(\Omega)} \, .
\end{aligned}$$

En particular para $\sigma = \sigma_0$, tenemos que $L_{\sigma_0}^* = L_{\sigma_0}$. Del hecho que L_{σ_0} es un isomorfismo entre $H_0^2(\Omega)$ y $H^{-2}(\Omega)$, tenemos que $L_{\sigma_0}^{-1}$ existe y es continuo. Ahora, tenemos que

$$\left(L_{\sigma_0}^{-1}\right)^* = \left(L_{\sigma_0}^*\right)^{-1} = \left(L_{\sigma_0}\right)^{-1} = L_{\sigma_0}^{-1},$$

por lo que $L_{\sigma_0}^{-1}$ es autoadjunto.

Sean σ un real tal que

$$\sigma \in \left(-\infty, \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}\right)$$

y h un elemento de $H^{-2}(\Omega)$. Consideremos la ecuación

$$L_\sigma u = h.$$

Si sumamos el término $\sigma_0 I u - \sigma_0 I u$ al lado izquierdo de la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
h &= L_\sigma u \\
&= L_\sigma u + \sigma_0 I u - \sigma_0 I u \\
&= L_{\sigma_0} u + (\sigma_0 - \sigma) I u.
\end{aligned}$$

Aplicando el operador $L_{\sigma_0}^{-1}$ a la ecuación anterior tenemos

$$L_{\sigma_0}^{-1}h = u + (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}(Iu).$$

Para cualquier $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{\sigma_0\}$, definamos el operador $T_\sigma \colon H^{-2}(\Omega) \to H_0^2(\Omega)$ por

$$T_\sigma := (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}I,$$

y a su adjunto por

$$T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma)(L_{\sigma_0}^*)^{-1}I.$$

El operador T_σ es un operador de Green asociado al problema (PBL).

Capítulo 5

Problema de Dirichlet semilineal para el operador biarmónico (caso regular)

En el presente capítulo vamos a analizar la existencia de soluciones del problema

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + q)u &= f(u) && \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{PBN}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ de clase $\mathcal{C}^2$, $q \in L^\infty(\Omega)$, con $q \geq 0$ c.t.p. en Ω, y $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que verifica las siguientes condiciones:

$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ f \text{ es decreciente },\tag{f.1}$$

$$\begin{gathered} \text{existen constantes } \alpha \text{ y } \beta \text{ positivos, con } 0 < \alpha < \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}, \text{ tales que} \\ |f(s)| \leq \alpha|s| + \beta \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, \end{gathered}\tag{f.2}$$

donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ con condición de Dirichlet homogénea.

Diremos que u es ***solución débil*** de (PBN) si:

(1) $u \in H_0^2(\Omega)$, y

(2) se verifica la igualdad

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx + \int_\Omega quv\, dx = \int_\Omega f(u)v\, dx$$

para todo $v \in H_0^2(\Omega)$,

Fijando $F(t) := \int_0^t f(s)\, ds$, podemos definir el funcional $J \colon H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\Delta u)^2 + qu^2\right]\, dx - \int_\Omega F(u)\, dx.$$

La condición (f.2) implica que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$-\alpha|s| - \beta \leq f(s) \leq \alpha|s| + \beta.$$

Analicemos dos casos: comencemos suponiendo que $t \geq 0$. En este caso, si integramos sobre $(0, t)$ la desigualdad anterior queda planteada por

$$-\alpha\int_0^t s\, ds - \beta\int_0^t\, ds \leq F(t) \leq \alpha\int_0^t s\, ds + \beta\int_0^t\, ds,$$

de donde, realizando las integrales correspondientes, obtenemos

$$-\frac{\alpha}{2}t^2 - \beta t \leq F(t) \leq \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t.$$

Por otro lado, supongamos que $t < 0$. Tenemos que

$$-\alpha \int_t^0 |s|\, ds - \beta \int_t^0 ds \leq F(t) \leq \alpha \int_t^0 |s|\, ds + \beta \int_t^0 ds,$$

de donde

$$\alpha \int_t^0 s\, ds - \beta \int_t^0 ds \leq F(t) \leq -\alpha \int_t^0 s\, ds + \beta \int_t^0 ds,$$

haciendo las correspondientes integrales, obtenemos

$$-\frac{\alpha}{2}t^2 + \beta t \leq F(t) \leq \frac{\alpha}{2}t^2 - \beta t.$$

En resumen, para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$|F(t)| \leq \frac{\alpha}{2}t^2 + \beta|t|. \tag{36}$$

Para cada $u \in H_0^2(\Omega)$, la siguientes acotaciones se verifican:

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\Delta u)^2 + qu^2\right]\, dx - \int_\Omega F(u)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega qu^2\, dx - \int_\Omega F(u)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega F(u)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \int_\Omega F(u)\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega u^2 - \beta\int_\Omega |u|\, dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta\|u\|_{L^1(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2}\sum_{0\leq|\kappa|\leq 2}\|\mathcal{D}^\kappa u\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta\|u\|_{L^1(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta\|u\|_{L^1(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1} - \alpha\right)\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta\|u\|_{L^1(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1} - \alpha\right)\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1} - \alpha\right)\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|u\|_{H_0^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

de esto concluimos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}-\alpha\right)\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \tag{37}$$

Gracias a la desigualdad anterior, el funcional J se coercitivo en $H_0^2(\Omega)$. En efecto, sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_0^2(\Omega)$ tal que $\|u_k\|_{H_0^2(\Omega)} \to \infty$. Analicemos el crecimiento del funcional

$$u \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}-\alpha\right)\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|u\|_{H_0^2(\Omega)}.$$

Gracias a que $0<\alpha<\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}$ la constante que acompaña al término cuadrático es positiva, y puesto que el crecimiento cuadrático supera al crecimiento lineal, tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1}-\alpha\right)\|u_k\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|u_k\|_{H_0^2(\Omega)}\right] = +\infty.$$

Así, de esto y (37) concluimos que

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = +\infty.$$

Lo realizado anteriormente muestra el siguiente resultado:

LEMA 7. *Bajo las hipótesis (f.1) y (f.2), el funcional J es coercitivo en $H_0^2(\Omega)$.*

Descompongamos el funcional J como $J(u) = {}^1\!/_2 M(u) - N(u)$ donde

$$M(u) := \int_\Omega \left[(\Delta u)^2 + qu^2\right]\,dx$$

y

$$N(u) := \int_\Omega F(u)\,dx.$$

OBSERVACIÓN 18. Los funcionales M y N están bien definidos en $H_0^2(\Omega)$. En efecto, consideremos $u \in H_0^2(\Omega)$. Esto implica que $u \in L^2(\Omega)$ y $\partial^2 u/\partial x_i^2 \in L^2(\Omega)$ para todo $i \in [\![1, N]\!]$, por lo que M está bien definido. Por otro lado, del crecimiento de F, (36), tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
|N(u)| &= \left|\int_\Omega F(u)\,dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |F(u)|\,dx \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx + \beta\int_\Omega |u|\,dx \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\sum_{0\leq|\kappa|\leq 2}\|\mathcal{D}^\kappa u\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta|\Omega|^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{H_0^2(\Omega)} + \beta|\Omega|^{1/2}\sqrt{\sum_{0\leq|\kappa|\leq 2}\|\mathcal{D}^\kappa u\|^2_{L^2(\Omega)}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\alpha}{2}\|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \beta|\Omega|^{1/2}\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \\
&< +\infty,
\end{aligned}
$$

por lo que N está bien definido.

Gracias a la sección del Problema de Dirichlet lineal para el operador biarmónico, sabemos que M es la forma cuadrática de la forma bilineal $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$. Además, en dicha sección mostramos que dicha forma bilineal es continua y simétrica en $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$; gracias a esto tenemos que M es diferenciable sobre $H_0^2(\Omega)$ y verifica

$$
M'(u)v = 2\boldsymbol{a}(u,v) = 2\int_\Omega [(\Delta u)(\Delta v) + quv]\, dx
$$

para todo u y v en $H_0^2(\Omega)$.

Sean u y v en $H_0^2(\Omega)$. Para c.t.p. $x \in \Omega$, definamos la función

$$
g(t) := F(u(x) + tv(x)).
$$

De (f.1) tenemos que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Como $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, por composición de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(u(x) + (t+h)v(x)) - F(u(x) + tv(x))}{h} \\
&= f(u(x))v(x).
\end{aligned}
$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$
g'(t) = f(u(x) + tv(x))v(x) \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega,
$$

en particular para $t = 0$ tenemos

$$
g'(0) = f(u(x))v(x) \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.
$$

Antes de afirmar que N es Gâteaux diferenciable sobre $H_0^2(\Omega)$ y que

$$
N'_G(u)v = \int_\Omega f(u)v\, dx
$$

es la derivada de Gâteaux de N en u en la dirección v, debemos probar que $f(u)v \in L^1(\Omega)$. Notemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f(u)v\, dx\right| &\leq \int_\Omega |f(u)v|\, dx \\
&\leq \alpha\int_\Omega |uv|\, dx + \beta\int_\Omega |v|\, dx \\
&\leq \alpha\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \beta|\Omega|^{1/2}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \alpha\sqrt{\sum_{0\leq|\kappa|\leq 2}\|\mathcal{D}^\kappa u\|_{L^2(\Omega)}^2}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} + \beta|\Omega|^{1/2}\|v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \alpha \, \|u\|_{H_0^2(\Omega)} \, \|v\|_{H_0^2(\Omega)} + \beta |\Omega|^{1/2} \, \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

Sean u, v en $H_0^2(\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$ no nulo, tenemos

$$
\lim_{t \to 0} \frac{N(u+tv) - N(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \int_\Omega \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \, dx.
$$

Luego, el *teorema de Leibniz* nos asegura que

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{N(u+tv) - N(u)}{t} &= \int_\Omega \lim_{t \to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} \, dx \\
&= \int_\Omega f(u(x)) v(x) \, dx.
\end{aligned}
$$

Por tanto N es Gâteaux diferenciable sobre $H_0^2(\Omega)$ y

$$
N'_G(u)v = \int_\Omega f(u) v \, dx
$$

para todo u y v en $H_0^2(\Omega)$.

Por otro lado, para mostrar que N es diferenciable sobre $H_0^2(\Omega)$, basta probar que la derivada de Gâteaux de N es continua sobre $H_0^2(\Omega)$, y como $H_0^2(\Omega)$ es un espacio métrico basta probar que la derivada de Gâteaux de N es secuencialmente continua sobre $H_0^2(\Omega)$. Para ello, consideremos $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $H_0^2(\Omega)$ que converge a u en $H_0^2(\Omega)$. Gracias a que la inyección $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continua, tenemos que la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a u en $L^2(\Omega)$, y del *recíproco del teorema de convergencia dominada* existe una subsucesión, a la que notaremos por $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, y $h \in L^2(\Omega)$ que verifican:

- $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$ y
- $|u_k(x)| \leq h(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Fijemos $v \in H_0^2(\Omega)$, arbitrario. Hagamos el siguiente cálculo

$$
\begin{aligned}
|N'_G(u_k)v - N'_G(u)v| &= \left| \int_\Omega f(u_k) v \, dx - \int_\Omega f(u) v \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(u_k) - f(u)| \, |v| \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^2 \, dx \right)^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^2 \, dx \right)^{1/2} \sqrt{\sum_{0 \leq |\kappa| \leq 2} \|\mathcal{D}^\kappa v\|_{L^2(\Omega)}^2} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^2 \, dx \right)^{1/2} \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \, .
\end{aligned}
$$

Notemos que, c.t.p en Ω, se verifica

$$\begin{aligned}|f(u_k)-f(u)|^2 &\leq (|f(u_k)|+|f(u)|)^2\\ &\leq |f(u_k)|^2+2|f(u_k)|\,|f(u)|+|f(u)|^2\\ &\leq 2\left(|f(u_k)|^2+|f(u)|^2\right)\\ &\leq 2\left[(\alpha|u_k|+\beta)^2+(\alpha|u|+\beta)^2\right]\\ &\leq 2\left[2\alpha^2|u_k|^2+2\beta^2+2\alpha^2|u|^2+2\beta^2\right]\\ &\leq 4\left[\alpha^2h^2+\alpha^2|u|^2+2\beta^2\right].\end{aligned}$$

Puesto que $u \in H_0^2(\Omega)$, $u \in L^2(\Omega)$, como Ω es acotado, $\beta^2 \in L^1(\Omega)$. Concluimos $\alpha^2h^2+\alpha^2|u|^2+2\beta^2$ está en $L^1(\Omega)$.

Gracias a que f es continua y de la convergencia c.t.p de u_k en Ω, tenemos

$$|f(u_k)-f(u)|^2 \to 0 \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Del *teorema de convergencia dominada*, obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |f(u_k)-f(u)|^2\,dx = 0.$$

Ahora, calculemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\left\|N_G'(u_k)-N_G'(u)\right\|_{H^{-2}(\Omega)} &= \sup\left\{\,\left|N_G'(u_k)v-N_G'(u)v\right| : v\in H_0^2(\Omega), \|v\|_{H_0^2(\Omega)}=1\right\}\\ &\leq \left(\int_\Omega |f(u_k)-f(u)|^2\,dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

y gracias a la convergencia probada anteriormente concluimos

$$\lim_{k\to\infty}\left\|N_G'(u_k)-N_G'(u)\right\|_{H^{-2}(\Omega)} = 0.$$

Esto prueba el siguiente resultado:

LEMA 8. *Suponiendo (f.1) y (f.2), los funcionales $M\colon H_0^2(\Omega)\to\mathbb{R}$ y $N\colon H_0^2(\Omega)\to\mathbb{R}$, dados por*

$$N(u)=\int_\Omega F(u)\,dx \quad y \quad M(u)=\int_\Omega\left[(\Delta u)^2+qu^2\right]\,dx$$

son diferenciables sobre $H_0^2(\Omega)$. Además, se verifica

$$N'(u)v=\int_\Omega f(u)v\,dx \qquad y \qquad M'(u)v = 2\int_\Omega[(\Delta u)(\Delta v)+quv]\,dx$$

para todo u y v en $H_0^2(\Omega)$.

En consecuencia de este resultado, al ser J una combinación lineal de funcionales diferenciables, J es diferenciable sobre $H_0^2(\Omega)$ y

$$J'(u)v=\int_\Omega(\Delta u)(\Delta v)\,dx+\int_\Omega quv\,dx-\int_\Omega f(u)v\,dx.$$

Además, los puntos críticos de J sobre $H_0^2(\Omega)$ son soluciones débiles de (PBN).

LEMA 9. *Bajo las hipótesis* (f.1) *y* (f.2)*, el funcional J es convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean u y v tal que $u \neq v$ en $H_0^2(\Omega)$. Como $1/2M$ es diferenciable y $u - v \in H_0^2(\Omega)$, podemos calcular lo siguiente:

$$\frac{1}{2}M'(u)(u-v) = \int_\Omega \left[(\Delta u)\big(\Delta(u-v)\big) + qu(u-v)\right]\, dx,$$
$$\frac{1}{2}M'(v)(u-v) = \int_\Omega \left[(\Delta v)\big(\Delta(u-v)\big) + qv(u-v)\right]\, dx,$$

de donde

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}M'(u) - \frac{1}{2}M'(v)\right)(u-v) &= \frac{1}{2}M'(u)(u-v) - \frac{1}{2}M'(v)(u-v)\\ &= \int_\Omega \left[\big(\Delta(u-v)\big)^2 + q(u-v)^2\right]\, dx\\ &\geq \int_\Omega \big(\Delta(u-v)\big)^2\, dx\\ &\geq \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1}{\lambda_1^2}\, \|u-v\|^2_{H_0^2(\Omega)}\\ &> 0.\end{aligned}$$

Esto muestra que el funcional $1/2M$ es estrictamente convexo en $H_0^2(\Omega)$.

Por otro lado, notemos que si la función $-F$ es convexa, entonces el funcional $-N$ es convexo en $H_0^2(\Omega)$. Como $-F$ es una función real y derivable, entonces mostrar que $-F$ es convexa es equivalente a probar que su derivada, $-f$, sea creciente; pero la condición (f.1) nos dice que f es decreciente por lo que $-f$ es creciente. Así, tenemos que $-F$ es convexa.

Finalmente, como el funcional J resulta ser la suma de dos funcionales convexos, este es convexo. □

El siguiente resultado muestra la existencia de al menos una solución débil de (PBN).

TEOREMA 17. *Supongamos que Ω es un dominio de clase $\mathcal{C}^2$ y acotado de $\mathbb{R}^N$, $q \in L^\infty(\Omega)$ con $q \geq 0$ c.t.p. en Ω, y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que verifica* (f.1) *y* (f.2)*. Entonces existe al menos un mínimo global u de J en $H_0^2(\Omega)$.*

Más aún, u es una solución débil de (PBN)*.*

DEMOSTRACIÓN. Bajo las hipótesis (f.1) y (f.2), el Lema 7 afirma que el funcional J es coercitivo sobre $H_0^2(\Omega)$.

Fijemos

$$m = \inf_{u \in H_0^2(\Omega)} J(u)$$

y veamos que $m > -\infty$. La desigualdad (37) afirma que para cualquier $v \in H_0^2(\Omega)$ se verifica

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1} - \alpha\right)\|v\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|v\|_{H_0^2(\Omega)}$$

y el mapeo

$$v \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_1+1} - \alpha\right)\|v\|^2_{H_0^2(\Omega)} - \beta|\Omega|^{1/2}\|v\|_{H_0^2(\Omega)}$$

es un funcional cuadrático cuyo término de segundo orden tiene un coeficiente positivo, por lo que este es acotado inferiormente. Luego, $m > -\infty$.

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizadora de J en $H_0^2(\Omega)$. Por absurdo supongamos que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no es acotada, es decir,

$$\|u_k\|_{H_0^2(\Omega)} \to +\infty.$$

De la coercividad de J tenemos

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) = +\infty,$$

lo cual contradice al hecho que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es minimizante de J.

Probemos que m es alcanzado. Para ello, consideremos una sucesión minimizante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de J. Puesto que J es coercitivo, la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_0^2(\Omega)$. Como $H_0^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, entonces es un espacio de Banach separable, y por tanto, el *teorema de Banach-Alaoglu* nos asegura la existencia de una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a la cual denominaremos por $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y un elemento u de $H_0^2(\Omega)$ que verifican

$$u_k \rightharpoonup u$$

en $H_0^2(\Omega)$.

Del *teorema de Rellich-Kondrachov*, la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\rho(\Omega)$ es compacta para $\rho \in \left[1, \dfrac{2N}{N-2}\right)$; además la inyección $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ es continua, por lo que la inyección $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^\rho(\Omega)$ es compacta para $\rho \in \left[1, \dfrac{2N}{N-2}\right)$.

Así, la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u en $L^\rho(\Omega)$, con $\rho \in \left[1, \dfrac{2N}{N-2}\right)$, en particular

(1) $u_k \to u$ en $L^2(\Omega)$ y
(2) $u_k \to u$ en $L^1(\Omega)$.

El recíproco del *teorema de convergencia dominada* para la convergencia $u_k \to u$ en $L^2(\Omega)$ implica que existen una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a la cual notaremos por $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y h_2 en $L^2(\Omega)$ que verifican:

- $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$ y
- $|u_k| \leq h_2$ c.t.p. $x \in \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dicha subsucesión verifica $u_k \to u$ en $L^1(\Omega)$. Por un argumento similar, existen una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a la que notaremos por $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y $h_1 \in L^1(\Omega)$ que verifican

- $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$ y
- $|u_k| \le h_1$ c.t.p. $x \in \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Gracias a que F es continua y $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$, concluimos que

$$F(u_k) \to F(u)$$

c.t.p. en Ω. La desigualdad (36) implica que se verifica

$$\begin{aligned} |F(u_k)| &\le \frac{\alpha}{2}|u_k|^2 + \beta|u_k| \\ &\le \frac{\alpha}{2}h_2^2 + \beta h_1 \end{aligned}$$

c.t.p. en Ω, donde $\frac{\alpha}{2}h_2^2 + \beta h_1$ pertenece a $L^1(\Omega)$. El *teorema de convergencia dominada* implica que $F(u_k) \to F(u)$ en $L^1(\Omega)$, en particular

$$\int_\Omega F(u_k)\,dx \to \int_\Omega F(u)\,dx,$$

esto es lo mismo que decir $N(u_k) \to N(u)$.

Gracias a al demostración del Lema 9, la forma cuadrática M es convexa. Como además M es continua, M es semicontinua inferior y por tanto

$$M(u) \le \liminf_{k\to\infty} M(u_k).$$

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}M(u) - N(u) \\ &= \frac{1}{2}M(u) - \lim_{k\to\infty} N(u_k) \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}M(u_k) - \lim_{k\to\infty} N(u_k) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \left[\frac{1}{2}M(u_k) - N(u_k)\right] \\ &= \liminf_{k\to\infty} J(u_k) \\ &= m, \end{aligned}$$

de donde $J(u) \le m$. Por otro lado, como $u \in H_0^2(\Omega)$ y m es el ínfimo de J sobre $H_0^2(\Omega)$, concluimos $J(u) \ge m$. Así, $J(u) = m$, es decir, el ínfimo de J es alcanzado en u y por tanto

$$u = \underset{v\in H_0^2(\Omega)}{\operatorname{argmin}}\, J(v).$$

Esto gracias al Teorema de Weierstrass. $\square$

Capítulo 6

Principio Variacional Dual de Ambrosetti-Badiale

Consideremos a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ regular y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que posiblemente tenga discontinuidades de salto, por ejemplo, la función de Heaviside

$$H(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0, \\ 1 & \text{si } s > 0, \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto en $s = 0$.

El objetivo de este capítulo es aplicar el Principio Variacional Dual de Ambrosetti y Badiale (1989), para probar existencia de soluciones del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = f(u) + p \quad & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{PDNL}$$

con $p \in L^2(\Omega)$.

Siguiendo el principio de los métodos variacionales construyamos un funcional cuyos puntos críticos sean soluciones (en cierto sentido) del problema (PDNL).

Definamos el funcional $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)\, dx - \int_\Omega pu\, dx,$$

con

$$F(t) := \int_0^t f(s)\, ds.$$

Como $p \in L^2(\Omega)$, el funcional J parece ser que es de clase $\mathcal{C}^1$. Esto no es cierto, pues las discontinuidades de salto de f hacen que F también tenga discontinuidades y esto implica que no sea diferenciable. Así, J no puede ser diferenciable.

Puesto que de la forma tradicional no podemos construir un funcional que sea $\mathcal{C}^1$, surge la pregunta ¿Y ahora?

La idea es utilizar un método que de alguna manera construya un funcional de clase $\mathcal{C}^1$ y cuyos puntos críticos sean "soluciones"(en cierto sentido). El método que utilizaremos es el ya visto Método de Acción Dual de Clarke-Ekeland. Este enfoque tiene un efecto de suavizado, en el sentido que nos permite ver a las soluciones de (PDNL) como puntos críticos de un funcional de clase $\mathcal{C}^1$, a pesar de las discontinuidades de f.

Supongamos que f es medible y satisface:

$$\text{existe un conjunto } A \subset \mathbb{R} \text{ con } \operatorname{Card}(A) < \infty \text{ tal que } f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus A), \tag{f.1}$$

donde $A := \{ a \in \mathbb{R} \colon a \text{ es un punto de discontinuidad de salto de } f \}$;

$$\text{existe } m \geq 0 \text{ tal que } h(s) := ms + f(s) \text{ es estrictamente creciente.} \tag{f.2}$$

La condición (f.2) implica

$$f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+) \quad \forall a \in A,$$

donde

$$f(a^\pm) = \lim_{s \to a^\pm} f(s).$$

En efecto, sea $a \in A$. Puesto que h es estrictamente creciente tenemos que

$$h(s) < h(a) < h(t)$$

para $s < a < t$ y $s, t \in \mathbb{R} \setminus A$. Gracias a que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus A)$, $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus A)$, y por tanto los límites laterales de h en a existen y

$$\lim_{s \to a^-} h(s) \leq h(a) \leq \lim_{t \to a^+} h(s),$$

de donde

$$f(a^-) + ma \leq f(a) + ma \leq f(a^+) + ma,$$

y por tanto,

$$f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+).$$

Para cada $a \in A$, fijemos $T_a := [f(a^-), f(a^+)]$, y adicionalmente fijaremos[1]

$$\hat{f}(s) := \begin{cases} f(s) & \text{si } s \notin A, \\ T_s & \text{si } s \in A. \end{cases}$$

Diremos que u es una ***solución débil*** del problema (PDNL) si:

(1) $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$,
(2) y

$$-\Delta u(x) - p(x) \in \hat{f}(u(x)) \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

OBSERVACIÓN 19.

(1) En la condición (f.2) también podemos añadir que

$$\lim_{s \to \pm\infty} h(s) = \pm\infty. \tag{38}$$

(2) Puesto que los argumentos en el caso general son similares, y para simplificar notaciones, consideraremos el caso $A = \{a\}$.

[1] $\hat{f}(s)$ representa una función multivaluada.

Del hecho que h es estrictamente creciente, de (f.2) y (38), es posible definir una función univaluada $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fijando

$$g(t) := \begin{cases} a & \text{si } t - ma \in T_a, \\ s & \text{con } h(s) = t, \text{ si } t - ma \notin T_a. \end{cases}$$

En particular, g representa la función inversa de la función multivaluada $\hat{f}$ en el siguiente sentido

$$g(t) = s \quad \Longleftrightarrow \quad t - ma \in \hat{f}(s). \tag{39}$$

A partir de lo anterior se puede probar que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Si fijamos $G(t) := \int_0^t g(s)\, ds$, podemos ver que $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Para todo $m \geq 0$, podemos definir el operador lineal autoadjunto, que en realidad es el operador de Green asociado al problema lineal[2], $K\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ por

$$u = Kv \quad \Longleftrightarrow \quad -\Delta u + mu = v,\ u \in H_0^1(\Omega)$$

y el funcional $J\colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(v) := \int_\Omega \left[G(v) - \frac{1}{2} vKv - vKp \right] dx.$$

El resultado principal obtenido por Ambrosetti y Badiale (1989) es:

TEOREMA 18. *Suponiendo que* (f.1) *y* (f.2) *se verifican, se tiene que*

(1) $J \in \mathcal{C}^1(L^2(\Omega))$, *y si* $J'(v) = 0$, *entonces* $u := K(v + p)$ *es una solución débil de* (PDNL).

(2) Si

(a) $-p(x) \notin T_a$ *para c.t.p.* $x \in \Omega$ *o*

(b) v *es un minimizador local de* J, *entonces el conjunto de nivel*

$$\Omega_a = \{\, x \in \Omega \colon u(x) = a \,\},$$

con $u = K(v + p)$, *tiene medida de Lebesgue cero y por tanto* u *satisface*

$$-\Delta u(x) = f(u(x)) + p(x) \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

La demostración de este resultado fue realizada por Ambrosetti y Badiale (1989) en "*The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*". Estas herramientas las vamos a utilizar y adaptar en el siguiente capítulo.

2

$$\begin{aligned} (-\Delta + I)u = v \quad & \text{en } \ \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

con $v \in L^2(\Omega)$

Capítulo 7

Problema Biarmónico con Discontinuidades No lineales (aplicación)

En este capítulo abordaremos el objetivo principal del presente trabajo, el cual es mostrar existencia de solución o soluciones[1] de la ecuación biarmónica con discontinuidades no lineales, considerando condiciones sobre la frontera tipo Dirichlet homogéneas. De manera más precisa, consideraremos el problema:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= H(u-a)q(u) && \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{PBDN}$$

donde Δ es el operador de Laplace, $a > 0$, H denota la función de Heaviside y $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

La idea es buscar soluciones del problema anterior adaptando el método introducido por Ambrosetti y Badiale (1989), que es una modificación al *Principio de Acción Dual de Clarke* mostrado por Clarke y Ekeland (1980). Lo más notable de este método es el suavizado que genera, en el sentido que este permitirá buscar soluciones del problema (PBDN) como puntos críticos de un funcional que, a pesar de la discontinuidad de $H(s-a)q(s)$ en $s = a$, es $\mathcal{C}^1$.

A partir de este punto consideraremos las siguientes hipótesis sobre q:

$$q \geq 0,\ q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ q \text{ es creciente;} \tag{q1}$$

$$q(s) \leq \alpha|s| + c_0, \text{ con } 0 < \alpha \leq \mu_1 \text{ y } c_0 \geq 0, \tag{q2}$$

donde μ_1 es el primer valor propio del operador Δ^2 con condiciones de Dirichlet homogéneas.

Al conjunto

$$\Omega_a := \{\, x \in \Omega \colon u(x) = a \,\},$$

lo llamaremos ***frontera libre***[2].

Como lo mencionamos anteriormente, el objetivo principal es mostrar existencia de "soluciones" para el problema (PBDN), pero nunca explicamos a qué vamos a considerar como tal, en la siguiente definición lo precisamos:

DEFINICIÓN 1. Diremos que una función $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ es solución del problema (PBDN) si:

[1] en algún sentido

[2] es justamente por esta terminología que usualmente a problemas del tipo (PBDN) se los denomina ***problemas de frontera libre***.

(1) $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ y
(2) u verifica
$$\Delta^2 u = H(u-a)q(u)$$
c.t.p. en Ω.

OBSERVACIÓN 20. Notemos que hasta ahora no hemos dicho nada acerca de la medida de Ω_a, los posibles casos son: $|\Omega_a| = 0$ ó $|\Omega_a| > 0$. Más adelante, veremos cuál es la medida de la frontera libre.

Si fijamos $p(s) = H(s-a)q(s)$, podemos reescribir el problema (PBDN) como
$$\begin{aligned} \Delta^2 u = p(u) &\quad \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 &\quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 &\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{PBDN-2}$$

Vamos a suponer que existe $m > 0$ tal que la aplicación $p_m(s) := ms + p(s)$ es estrictamente creciente sobre $\mathbb{R}$. Si sumamos el término mu a ambos lados del problema (PBDN-2), obtenemos el problema equivalente
$$\begin{aligned} \Delta^2 u + mu = p_m(u) &\quad \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 &\quad \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 &\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$
en el cual la no linealidad $p_m(u)$ es estrictamente creciente, sin embargo sigue teniendo la discontinuidad de salto.

Hasta el momento hemos generado un problema equivalente a (PBDN), construido de acuerdo al *Principio Dual Variacional*. Ahora, debemos seguir los siguientes pasos para, en cierto sentido, "despreciar" la discontinuidad en $s = a$ (esto va a quedar claro más adelante). Para ello, definamos la función multivaluada $\hat{p}$ por:
$$\hat{p}(s) = \begin{cases} p_m(s) & \text{si } s \neq a, \\ T = [ma, b + ma] & \text{si } s = a, \end{cases}$$
la cual obtenemos llenando el salto de p en $s = a$, donde $b = q(a)$.

OBSERVACIÓN 21. La función $\hat{p}$ describe una curva sobre $\mathbb{R}^2$. De manera específica, esta curva la podemos expresar como la función multivaluada $\gamma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$\gamma(s,t) = \begin{cases} (s, p_m(s)) & \text{si } s \neq a, \\ (s,t) & \text{si } s = a \text{ y } ma \leq t \leq ma + b. \end{cases}$$

Comprobemos que $\hat{p}$ (vista como una curva) es continua en $s = a$, para ello basta tomar límites laterales y observar que tenemos
$$\lim_{s \to a^+} \hat{p}(s) = \lim_{s \to a^+} p_m(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to a^+} \big[ms + H(s-a)q(s)\big] \\
&= \lim_{s\to a^+} \big[ms + q(s)\big] \\
&= ma + q(a) \\
&= ma + b
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to a^-} \hat{p}(s) &= \lim_{s\to a^-} p_m(s) \\
&= \lim_{s\to a^-} \big[ms + H(s-a)q(s)\big] \\
&= \lim_{s\to a^-} ms = ma.
\end{aligned}
$$

Por lo que $\hat{p}$ es continua[3] en $s = a$.

Definamos la función p^* que verifica

$$p^*(w) = s \quad \Longleftrightarrow \quad w \in \hat{p}(s), \tag{41}$$

puesto de esta manera p^* es la inversa generalizada de $\hat{p}$. La función p^* está bien definida. Para ello, consideremos dos casos:

(1) Si $s \neq a$, tenemos que $\hat{p}(w) = p_m(s)$. Gracias a que $p_m(s)$ es una función estrictamente creciente en $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, ésta es inyectiva. Luego, si consideramos, vista como una función unidimensional, que $\hat{p}\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \setminus [ma, ma+b]$ es una función biyectiva. Por lo que se verifica (41).

(2) Si $s = a$, por definición de $\hat{p}$ tenemos que $\hat{p}(a) = T$. Así, se verifica que

$$p^*(w) = a \quad \Longleftrightarrow \quad w \in \hat{p}(s) = T.$$

La siguiente relación nos muestra el comportamiento de p^* cuando $p^*(w) = a$. De la definición de $\hat{p}$ y la caracterización anterior, tenemos que

$$p^*(w) = a \quad \Longleftrightarrow \quad ma \leq w \leq p_m(a) = ma + b = ma + q(a).$$

Definamos la aplicación $P^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$P^*(w) := \int_0^w p^*(s)\, ds.$$

Notemos que de acuerdo a su definición, P^* es una primitiva de p^* y por tanto, considerando que p^* es continua sobre $\mathbb{R}$ (viendo a $\hat{p}$ como una curva), $P^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Gracias a (q2), tenemos que

$$g_1(s) := ms \leq \hat{p}(s) \leq g_2(s) := ms + \alpha|s| + c_0 + b \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

[3] vista como una curva

De aquí en adelante, vamos a suponer que $m > \alpha$. Es muy importante notar que g_1 y g_2 son funciones continuas e invertibles. Y por tanto, tenemos que

$$g_2^{-1}(w) \leq p^*(w) \leq g_1^{-1} \quad \forall w \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

donde

$$g_1^{-1}(w) = \frac{w}{m} \quad \text{y} \quad g_2^{-1}(w) = \frac{w}{m + \operatorname{sign}(w)\alpha} - \frac{c_0 + b}{m + \operatorname{sign}(w)\alpha}.$$

Gracias a las desigualdades anteriores obtenemos que:

$$\begin{aligned} P^*(w) = \int_0^w p^*(s)\, ds &\geq \int_0^w \frac{s}{m + \operatorname{sign}(s)\alpha}\, ds - \int_0^w \frac{c_0 + b}{m + \operatorname{sign}(s)\alpha}\, ds \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{w^2}{m + \alpha} - \frac{(c_0 + b)w}{m - \alpha} \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{w^2}{m + \alpha} - \frac{(c_0 + b)|w|}{m - \alpha} \end{aligned} \tag{43}$$

y

$$P^*(w) = \int_0^w p^*(s)\, ds \leq \int_0^w \frac{s}{m}\, ds = \frac{w^2}{2m}. \tag{44}$$

Gracias al Capítulo 4, para cada $w \in L^2(\Omega)$, el problema lineal

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + m\,\mathrm{Id})u = w \quad & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad & \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{45}$$

tiene una única solución $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ (suponiendo que Ω es de clase $\mathcal{C}^4$, según el Teorema 16 del Capítulo 4). A partir de esto, podemos definir el operador $G \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega), L^2(\Omega)\big)$ como

$$G(w) = u \quad \Longleftrightarrow \quad (\Delta^2 + m\,\mathrm{Id})u = w, \quad u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega).$$

Podemos ver que G es el operador inverso de $\Delta^2 + m\,\mathrm{Id}$, que por lo estudiado en el Teorema 16 del Capítulo 4, es un isomorfismo de $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Definamos el funcional $f\colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$f(w) := \int_\Omega \left[P^*(w) - \frac{1}{2}wG(w)\right]\, dx.$$

Probemos que el funcional $M\colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$M(w) := \int_\Omega P^*(w)\, dx$$

es $\mathcal{C}^1\big(L^2(\Omega)\big)$. Para calcular su diferencial comenzaremos encontrando la diferencial de Gâteaux y probando que la derivada de Gâteaux es continua sobre $L^2(\Omega)$. Consideremos u y v en $L^2(\Omega)$, y $t \in \mathbb{R}$.

Para c.t.p. $x \in \Omega$, definamos la función

$$g(t) := P^*(u(x) + tv(x)).$$

Puesto que $P^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tenemos que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y además, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = p^*(u(x) + tv(x))v(x).$$

De acuerdo a esto, tenemos que

$$g'(0) = p^*(u(x))v(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega.$$

Antes de asegurar que M es Gâteaux diferenciable y que

$$M'_G(u)v = \int_\Omega p^*(u)v\,dx$$

es la diferencial de Gâteaux en u evaluada en la dirección v, debemos probar que $p^*(u)v \in L^1(\Omega)$. Recordemos que $p^*(w) \leq {}^w/_m$ para todo $w \in \mathbb{R}$, y por tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega p^*(u)v\,dx \right| &\leq \int_\Omega |p^*(u)v|\;dx \\ &\leq \frac{1}{m}\int_\Omega |uv|\,dx \\ &\leq \frac{1}{m}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{46}$$

lo cual es finito gracias a que tanto u como v pertenecen a $L^2(\Omega)$, por lo que $p^*(u)v \in L^1(\Omega)$.

Sean u, v en $L^2(\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$ no nulo, tenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[M(u+tv) - M(u)\right] = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{t}\left[P^*(u(x)+tv(x)) - P^*(u(x))\right]dx.$$

Gracias al *teorema de Leibniz*, obtenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{M(u+tv) - M(u)}{t} = \int_\Omega p^*(u)v\,dx,$$

esto y (46) prueba que M es Gâteaux diferenciable y la diferencial de Gâteaux de M en u, aplicada al punto v, está dada por

$$M'_G(u)v = \int_\Omega p^*(u)v\,dx.$$

Para mostrar que M es diferenciable sobre $L^2(\Omega)$, basta mostrar que la derivada de Gâteaux de M es continua sobre $L^2(\Omega)$, y como $L^2(\Omega)$ es un espacio métrico basta mostrar que la derivada de Gâteaux es secuencialemnte continua sobre $L^2(\Omega)$. Para ello, consideremos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^2(\Omega)$ tal que converge a u en $L^2(\Omega)$. Gracias al recíproco del *teorema de convergencia dominada*, existe una subsucesión de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, a la que notaremos por $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y $h \in L^2(\Omega)$ que verifican:

- $u_k(x) \to u(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$ y
- $|u_k(x)| \leq h(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Fijemos un $v \in L^2(\Omega)$ arbitrario. Tenemos lo siguiente

$$|M'_G(u_k)v - M'_G(u)v| = \left|\int_\Omega p^*(u_k)v\,dx - \int_\Omega p^*(u)v\,dx\right|$$

$$\begin{aligned}&\leq \int_\Omega |p^*(u_k) - p^*(u)|\,|v|\,dx\\ &\leq \left(\int_\Omega |p^*(u_k) - p^*(u)|^2\,dx\right)^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Antes de continuar, necesitamos probar la siguiente desigualdad:

$$|p^*(s)| \leq \frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha} \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{47}$$

Recordemos la desigualdad (42), para todo $s \in \mathbb{R}$, sabemos

$$\frac{s}{m+\operatorname{sign}(s)\alpha} - \frac{c_0+b}{m+\operatorname{sign}(s)\alpha} \leq p^*(s) \leq \frac{s}{m} \leq \frac{s}{m} + \frac{c_0+b}{m+\operatorname{sign}(s)\alpha}.$$

Notemos lo siguiente:

$$\frac{1}{m+\alpha} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m-\alpha},$$

con esto obtenemos

$$\frac{-|s|}{m-\alpha} - \frac{c_0+b}{m-\alpha} \leq p^*(s) \leq \frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}.$$

Luego,

$$|p^*(s)| \leq \frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha} \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Gracias a la desigualdad probada anteriormente, c.t.p. en Ω tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}|p^*(u_k) - p^*(u)|^2 &\leq \big(|p^*(u_k)| + |p^*(u)|\big)^2\\ &\leq 2\big(|p^*(u_k)|^2 + |p^*(u)|^2\big)\\ &\leq 2\left(\frac{|u_k|^2}{(m-\alpha)^2} + \frac{|u|^2}{(m-\alpha)^2} + 2\frac{(c_0+b)^2}{(m-\alpha)^2}\right)\\ &\leq \frac{2}{(m-\alpha)^2}\left(|h|^2 + |u|^2 + 2(c_0+b)^2\right);\end{aligned}$$

y precisamente, como Ω es acotado $c_0 + b \in L^\infty(\Omega)$, $|h|^2 + |u|^2 + 2(c_0+b)^2$ pertenece a $L^1(\Omega)$. Ahora, como p^* es continua y como $u_k \to u$ c.t.p. en Ω, tenemos que

$$\big|p^*(u_k) - p^*(u)\big|^2 \to 0 \text{ c.t.p en } \Omega.$$

Gracias al *teorema de convergencia dominada de Lebesgue*, tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \big|p^*(u_k) - p^*(u)\big|^2\,dx = 0.$$

Por lo cual, tenemos que

$$\begin{aligned}\big\|M'_G(u_k) - M'_G(u)\big\|_{L^2(\Omega)^*} &= \sup\left\{\, \big|M'_G(u_k)v - M'_G(u)v\big| : v \in L^2(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}\\ &\leq \left(\int_\Omega \big|p^*(u_k) - p^*(u)\big|^2\,dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

y gracias a lo anterior tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| M'_G(u_k) - M'_G(u) \right\|_{L^2(\Omega)^*} = 0.$$

Así, M es diferenciable sobre $L^2(\Omega)$ y además

$$M'(u)v = M'_G(u)v = \int_\Omega p^*(u)v\,dx.$$

Queda mostrar que el funcional $N\colon L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$N(w) := \frac{1}{2}\int_\Omega wG(w)\,dx$$

es diferenciable sobre $L^2(\Omega)$. Para ello tomemos u y v en $L^2(\Omega)$, y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\left[N(u+tv) - N(u)\right] &= \frac{1}{2t}\int_\Omega \big[(u+tv)G(u+tv) - uG(u)\big]\,dx \\
&= \frac{1}{2t}\int_\Omega \big[tuG(v) + tvG(u) + t^2 vG(v)\big]\,dx \\
&= \frac{1}{2t}\int_\Omega t\big(uG(v) + vG(u) + tvG(v)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \big(uG(v) + vG(u) + tvG(v)\big)\,dx
\end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[N(u+tv) - N(u)\right] = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(uG(v) + vG(u)\big)\,dx.$$

Queda por mostrar que el funcional

$$v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \big(uG(v) + vG(u)\big)\,dx$$

es lineal y continuo. Gracias a que G es lineal, dicho funcional es lineal. Además, gracias a que G es continuo tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \big(uG(v) + vG(u)\big)\,dx\right| &\le \int_\Omega \big|uG(v)\big|\,dx + \int_\Omega \big|vG(u)\big|\,dx \\
&\le \|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|G(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\,\|G(u)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

esto muestra que el funcional es continuo. Luego, la derivada de Gâteaux de N en u aplicado a v es

$$N'_G(u)v = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(uG(v) + vG(u)\big)\,dx.$$

Probemos que N es diferenciable en $L^2(\Omega)$. Para ello consideremos u, v y una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $L^2(\Omega)$. Tenemos lo siguiente

$$\big|N'_G(u_k)v - N'_G(u)v\big| \le \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \big|(u_k - u)G(v) + vG(u_k - u)\big|\,dx\right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |u_k - u|\big|G(v)\big|\,dx + \int_\Omega |v|\big|G(u_k - u)\big|\,dx\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}\,\|G(v)\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\,\|G(u_k - u)\|_{L^2(\Omega)}\right] \\
&\leq C\,\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}
\big\|N_G'(u_k) - N_G'(u)\big\|_{L^2(\Omega)^*} &= \sup\left\{\,\big|N_G'(u_k)v - N_G'(u)v\big| : v \in L^2(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\,\right\} \\
&\leq C\,\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

y esto converge a cero cuando $k \to +\infty$, lo cual muestra que N_G' es secuencialmente continua y por tanto continua. Así, N es diferenciable sobre $L^2(\Omega)$ y además

$$N'(u)v = N_G'(u)v = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(uG(v) + vG(u)\big)\,dx.$$

Como el funcional f es diferenciable sobre $L^2(\Omega)$, pues es la resta de funcionales diferenciables sobre $L^2(\Omega)$, tenemos que la diferencial de f en $u \in L^2(\Omega)$ aplicado en $v \in L^2(\Omega)$ está dado por

$$f'(u)v = \int_\Omega \left[p^*(u)v - \frac{1}{2}\big(uG(v) + vG(u)\big)\right]\,dx.$$

Mostremos que G es un operador autoadjunto, para ello basta probar que el operador inverso $\Delta^2 + m\,\mathrm{Id}\colon H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es autoadjunto en $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Sean $u, v \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Gracias al *teorema de Green* tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big((\Delta^2 + m)u \mid v\Big)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega v(\Delta^2 + m)u\,dx \\
&= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx + \int_{\partial\Omega} v\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,ds - \int_{\partial\Omega}(\Delta u)\frac{\partial v}{\partial n}\,ds + \int_\Omega muv\,dx \\
&= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx + \int_\Omega muv\,dx \\
&= \int_\Omega u(\Delta^2 v)\,dx + \int_{\partial\Omega} u\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)\,ds - \int_{\partial\Omega}(\Delta v)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds + \int_\Omega muv\,dx \\
&= \int_\Omega u(\Delta^2 v)\,dx + \int_\Omega muv\,dx \\
&= \Big(u \mid (\Delta^2 + m)v\Big)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

esto muestra que el operador $\Delta^2 + m\,\mathrm{Id}$ es un operador autoadjunto, por lo que el operador G es autoadjunto.

Esta propiedad nos permite reescribir la diferencial de Frèchet de f en $u \in L^2(\Omega)$ aplicada en $v \in L^2(\Omega)$, como

$$f'(u)v = \int_\Omega [p^*(u) - G(u)]v\,dx.$$

El siguiente resultado nos dice que todo punto crítico de f es una solución de (PBDN-2).

LEMA 10. *Dados $m > \alpha$ y $w \in L^2(\Omega)$ tal que $f'(w) = 0$. Entonces $u = G(w)$ es una solución de* (PBDN-2)*, en el sentido de que $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ y $\Delta^2 u = p(u)$ c.t.p. en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $w \in L^2(\Omega)$ arbitrario y fijo tal que $f'(w) = 0$, esto es,

$$\int_\Omega [p^*(w) - G(w)]v\,dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega);$$

en particular, para $v \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, con lo cual $p^*(w) = G(w)$ c.t.p. en Ω. De la definición de G, existe un único $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ tal que $(\Delta^2 + m\,\mathrm{Id})u = w$. Esto implica, c.t.p. en Ω, que $p^*(w) = u$, y de la definición de p^* tenemos que $w \in \hat{p}(u)$, y por tanto

$$\Delta^2 u + mu \in \hat{p}(u) \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Para c.t.p. $x \in \Omega \setminus \Omega_a$, es decir cuando $u(x) \neq a$ tenemos que

$$\hat{p}\big(u(x)\big) = mu(x) + p\big(u(x)\big)$$

y esto implica que

$$\Delta^2 u(x) = p\big(u(x)\big) \text{ c.t.p. } x \in \Omega \setminus \Omega_a.$$

El operador $\Delta^2 \colon H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es un isomorfismo, por tanto $\Delta^2 u = 0$ c.t.p. en Ω_a. De acuerdo al hecho que $H(0) = 0$, para c.t.p. $x \in \Omega_a$ tenemos que.

$$p_m\big(u(x)\big) = mu(x) + H(0)q(a) = ma$$

y por tanto

$$\Delta^2 u = p(u) \text{ c.t.p. en } \Omega_a.$$

Esto junto a lo demostrado anteriormente implica que u es una solución de (PBDN-2) en el sentido anteriormente mencionado. □

OBSERVACIÓN 22. Notemos que un punto crítico de f en $L^2(\Omega)$ es $w = 0$. En efecto, gracias a que el operador G es un isomorfismo tenemos que $G(0) = 0$, ahora $p^*(0) = 0$ por lo que $p^*(w) = 0$ c.t.p en Ω. Esto implica que el funcional 0 de $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ es una solución de (PBDN), y por tanto también es una solución de (PBDN-2).

LEMA 11. *Existe $w_0 \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$f(w_0) = \min_{w \in L^2(\Omega)} f(w).$$

Para $u_0 := G(w_0)$, u_0 es solución de (PBDN) *y resulta que la frontera libre Ω_a es de medida nula.*

DEMOSTRACIÓN. En el Capítulo 4 mostramos que

$$i \circ (\Delta^2 + mI)^{-1} \circ i^* = G \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

donde $i\colon H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es la inyección compacta dada gracias a la contenencia $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ y al *teorema de Rellich-Kondrachov*.

Para $\mu \neq 0$, las ecuaciones

$$(\Delta^2 + mI)w - \mu w = 0 \qquad \text{y} \qquad Gw - \frac{1}{\mu}w = 0 \tag{48}$$

son equivalentes. En efecto, apliquemos a la primera ecuación el operador G, obtenemos

$$\big(G \circ (\Delta^2 + mI)\big)(w) - \mu G(w) = 0$$

y aplicando la definición de G obtenemos

$$I(w) - \mu G(w) = 0,$$

lo cual podemos reescribir por

$$\frac{1}{\mu}w - G(w) = 0.$$

Podemos realizar un proceso similar para la ecuación de la derecha aplicando el operador $\Delta^2 + mI$.

La equivalencia de las ecuaciones de (48) implica que los operadores G y $\Delta^2 + mI$ tengan las mismas funciones propias para $\mu \neq 0$, o lo que es lo mismo, para los espacios propios

$$\begin{aligned} E(\mu_n, \Delta^2 + mI) &= \ker\big((\Delta^2 + mI) - \mu_n I\big) \\ &= \{\, v \in L^2(\Omega) \colon (\Delta^2 + mI)v - \mu_n v = 0 \,\}, \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(1/\mu_n, G) &= \ker(G - 1/\mu_n I) \\ &= \{\, v \in L^2(\Omega) \colon G(v) - 1/\mu_n v = 0 \,\}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$E(\mu_n, \Delta^2 + mI) = E(1/\mu_n, G), \tag{49}$$

donde μ_n es el n-ésimo valor propio del operador $\Delta^2 + mI$ con condiciones de borde tipo Dirichlet homogéneas.

Ahora, con respecto al operador $\Delta^2 + mI$. Puesto que

$$\Delta^2 + mI \colon H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$$

es un isomorfismo (esto lo vimos en el Capítulo 4), la inyección

$$\hat{\imath} \colon H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$$

es compacta, gracias a la siguiente cadena de inyecciones

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega),$$

con lo cual
$$(\Delta^2 + mI) - \mu = (\Delta^2 + mI) - \mu\hat{\imath}.$$
Con respecto al espectro, puesto que el operador $\Delta^2 + mI$ es autoadjunto, obtenemos que
$$\sigma(\Delta^2 + mI) = \sigma_p(\Delta^2 + mI),$$
donde claramente $0 \notin \sigma_p(\Delta^2 + mI)$, esto es gracias a que $\Delta^2 + mI \colon H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ es un isomorfismo.

Lo realizado anteriormente junto con las ecuaciones equivalentes (48) muestran que
$$\sigma(\Delta^2 + mI) = \left\{ \mu \in \mathcal{C} \colon \mu = \frac{1}{\lambda}, 0 \neq \lambda \in \sigma(G) \right\}.$$

Es decir, los valores propios de G son los valores propios del operador $\Delta^2 + mI$ elevados a la potencia -1. Gracias a que los valores propios de $\Delta^2 + mI$ tienen la forma $\mu_n + m$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con μ_n el n-ésimo valor propio de Δ^2 con condiciones de borde tipo Dirichlet homogéneas, los valores propios de G tienen la forma:
$$\frac{1}{\mu_n + m} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Los valores propios del operador Δ^2 forman una sucesión creciente tal que
$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots$$
y $\mu_n \to +\infty$. Además, gracias a Grunau y Sweers (1997, Teorema 5.2) el primer valor propio es positivo y con esto tenemos que
$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots,$$
de donde
$$\cdots \leq \frac{1}{\mu_n + m} \leq \cdots \leq \frac{1}{\mu_2 + m} \leq \frac{1}{\mu_1 + m}.$$

Por otro lado, el operador G es autoadjunto, pues el operador $\Delta^2 + mI$ lo es, eso implica que
$$\|G\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = \sup_{z \in \sigma(G)} |z| = \max_{z \in \sigma(G)} |z| = \frac{1}{\mu_1 + m}.$$
Así, tenemos que
$$\|G(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|G\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \|w\|_{L^2(\Omega)}$$
para todo $w \in L^2(\Omega)$.

Para cualquier $w \in L^2(\Omega)$, de lo anterior y (43), tenemos lo siguiente:
$$\begin{aligned} f(w) &= \int_\Omega \left[P^*(w) - \frac{1}{2} w G(w) \right] dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{1}{m + \alpha} |w|^2 \, dx - \frac{c_0 + b}{m - \alpha} \int_\Omega |w| \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega w G(w) \, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2}\frac{1}{m+\alpha}\left\|w\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{c_0+b}{m-\alpha}|\Omega|^{1/2}\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|G(w)\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+m}\left\|w\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{c_0+b}{m-\alpha}|\Omega|^{1/2}\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_1+m}\left\|w\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{\mu_1+m}\right]\left\|w\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{c_0+b}{m-\alpha}|\Omega|^{1/2}\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Como $\alpha \in (0, \mu_1)$ y $m > 0$, tenemos que

$$
\frac{1}{m+\mu_1} < \frac{1}{m+\alpha}
$$

y esto implica que

$$
\frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{\mu_1+m} > 0.
$$

Tomemos una sucesión $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\Omega)$ tal que $\left\|w_k\right\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$
f(w_k) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{\mu_1+m}\right]\left\|w_k\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{c_0+b}{m-\alpha}|\Omega|^{1/2}\left\|w_k\right\|_{L^2(\Omega)}
$$

y por tanto

$$
\lim_{k\to\infty} f(w_k) \geq \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{\mu_1+m}\right]\left\|w_k\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{c_0+b}{m-\alpha}|\Omega|^{1/2}\left\|w_k\right\|_{L^2(\Omega)}\right)
$$

y puesto que

$$
\frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{\mu_1+m} > 0,
$$

$$
\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+m} - \frac{1}{\mu_1+m}\right]\left\|w_k\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{c_0+b}{m-\alpha}|\Omega|^{1/2}\left\|w_k\right\|_{L^2(\Omega)}\right) = +\infty,
$$

y por tanto

$$
\lim_{k\to\infty} f(w_k) = +\infty.
$$

Esto es, f es coerciva sobre $L^2(\Omega)$.

Ahora, fijemos

$$
m = \inf_{w\in E} f(w).
$$

La coercividad implica que $m > -\infty$.

Sea $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión minimizante para f en $L^2(\Omega)$. Del hecho que f es coerciva la sucesión $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$es un Hilbert, este es reflexivo y gracias al *teorema de Banach-Alaoglu* existe una subsucesión, a la cual llamaremos $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y $w \in L^2(\Omega)$ tal que $w_k \rightharpoonup w$ en $L^2(\Omega)$. Esto a su vez implica que la sucesión $\left\{\left\|w_k\right\|_{L^2(\Omega)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada de $\mathbb{R}$ y por tanto existe una subsucesión, a la que nuevamente llamaremos $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $\left\{\left\|w_k\right\|_{L^2(\Omega)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$, es más, la sucesión converge a $\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)}$. En efecto, como $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a w en

$L^2(\Omega)$ entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(w_k \mid w_m)_{L^2(\Omega)} \to (w \mid w_m)_{L^2(\Omega)} \quad k \to +\infty,$$

y a su vez

$$(w \mid w_m)_{L^2(\Omega)} \to \|w\|^2_{L^2(\Omega)} \quad m \to= \infty.$$

Gracias a la unicidad del límite, tenemos que $\|w_k\|_{L^2(\Omega)} \to \|w\|_{L^2(\Omega)}$.

Así, hemos obtenido una sucesión minimizante para f en $L^2(\Omega)$ tal que converge débilmente a un $w \in L^2(\Omega)$ y sus normas convergen a la norma de w. Como estamos trabajando sobre $L^2(\Omega)$, estas condiciones son suficientes para afirmar que $w_k \to w$ en $L^2(\Omega)$. La convergencia fuerte en $L^2(\Omega)$ implica la existencia de una subsucesión, a la que nuevamente llamaremos $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que verifica

(1) $w_k(x) \to w(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$,
(2) existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que $|w_k(x)| \leq v(x)$ c.t.p. $x \in \Omega$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, de (44), se sigue

$$P^*(w_k) \leq \frac{w_k^2}{2m} \leq \frac{v^2}{2m} \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

De la continuidad de P^* y de la convergencia c.t.p de $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tenemos que

$$P^*(w_k) \to P^*(w) \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Gracias al *teorema de convergencia dominada* obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega P^*(w_k)\,dx = \int_\Omega P^*(w)\,dx.$$

Por otro lado, la aplicación

$$(v,z) \mapsto \int_\Omega vG(z)\,dx$$

es una forma bilineal y continua sobre $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, por lo que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega w_k G(w_k)\,dx = \int_\Omega wG(w)\,dx.$$

Con esto, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
f(w) &= \int_\Omega \left[P^*(w) - \frac{1}{2}wG(w)\right] dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega P^*(w_k)\,dx - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega w_k G(w_k)\,dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[\int_\Omega P^*(w_k)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w_k G(w_k)\,dx\right] \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[\int_\Omega P^*(w_k)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w_k G(w_k)\,dx\right] \\
&= m.
\end{aligned}$$

Esto implica que existe $w_0 \in L^2(\Omega)$ tal que $m = f(w_0)$. De la definición de G existe $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ que verifica $G(w_0) = u_0$, es decir, u_0 es una solución de (PBDN).

Afirmamos que la medida de Lebesgue de $\Omega_a = \{ x \in \Omega \colon u_0(x) = a \}$ es nula. Para ver esto, comencemos definiendo la función característica χ de Ω_a. Gracias a que

$$\int_\Omega \chi^2 \, dx \leq \int_\Omega 1 \, dx = |\Omega| < \infty,$$

entonces $\chi \in L^2(\Omega)$.

Por otra parte, la aplicación $t \mapsto w_0 + t\chi$ es diferenciable sobre $\mathbb{R}$ y su diferencial en $t \in \mathbb{R}$ está dada por χ. Gracias a la regla de la cadena, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} f(w_0 + \varepsilon\chi) &= \left(f'(w_0 + \varepsilon\chi) \mid \chi\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega [p^*(w_0 + \varepsilon\chi) - \varepsilon G(\chi) - G(w_0)] \, \chi \, dx \\
&= \int_\Omega p^*(w_0 + \varepsilon\chi)\chi \, dx - \varepsilon \int_\Omega G(\chi)\chi \, dx - \int_\Omega G(w_0)\chi \, dx \\
&= \int_{\Omega_a} p^*(w_0 + \varepsilon\chi) \, dx - \varepsilon \int_\Omega G(\chi)\chi \, dx - \int_{\Omega_a} u_0 \, dx. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Como $G(w_0) = u_0$, entonces $\Delta^2 u_0 + m u_0 = w_0$ y $\Delta^2 u_0 = 0$ c.t.p. en Ω_a, de donde podemos observar que $w_0 = ma$ c.t.p. en Ω_a. Así, si tomamos $\varepsilon \in (0, q(a))$ tenemos que $0 < \varepsilon\chi < b = q(a)$ c.t.p. en Ω_a por lo que

$$ma \leq w_0 + \varepsilon\chi \leq ma + b = ma + q(a)$$

c.t.p. en Ω_a. Dicha desigualdad es precisamente la caracterización de $p^*(w) = a$, esto es, $p^*(w_0 + \varepsilon\chi) = a$ c.t.p. en Ω_a. Además, tenemos que

$$\int_{\Omega_a} p^*(w_0 + \varepsilon\chi) \, dx = \int_{\Omega_a} a \, dx = a|\Omega_a| = \int_{\Omega_a} u_0 \, dx.$$

Más aún, como $\chi \in L^2(\Omega)$, entonces existe $z \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ tal que $z = G(\chi)$, por lo tanto

$$(G(\chi) \mid \chi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \chi G(\chi) \, dx = \int_\Omega (\Delta^2 z + mz) z \, dx = \int_\Omega \left(z\Delta^2 z + mz^2\right) dx$$

Reemplazando estas igualdades en (50) obtenemos que

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(w_0 + \varepsilon\chi) = -\varepsilon \left(\int_\Omega (\Delta z)^2 \, dx + m \, \|z\|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Por absurdo, supongamos que $|\Omega_a| > 0$, entonces $\chi = 1$ en un conjunto de medida no nula y por ende $z \neq 0$ en $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Además, se verifica que

$$\int_\Omega (\Delta z)^2 \, dx \geq \mu_0 \, \|z\|^2_{H_0^2(\Omega)} > 0$$

y $m\,\|z\|^2_{L^2(\Omega)} > 0$; así, tenemos que

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(w_0 + \varepsilon\chi) < 0$$

pues $\varepsilon \in (0, b)$. Y esto contradice al hecho que w_0 es un mínimo de f, por lo que $|\Omega_a| = 0$. $\square$

Notemos que todos los argumentos que hemos utilizado en la demostración anterior se verifican para cualquier mínimo local w_0 de f.

La idea ahora es utilizar otras herramientas de los métodos variacionales[4] para mostrar existencia de puntos críticos de f.

Los siguientes lemas mostrarán que bajo relaciones apropiadas de a y b, el funcional f posee un par de puntos críticos no triviales: uno que será un mínimo global y otro un punto crítico obtenido a través del Teorema de Paso de Montaña.

Dado φ_1 la primera función propia del operador Δ^2, éste satisface que

$$\begin{aligned} \Delta^2\varphi_1 &= \mu_1\varphi_1 && \text{en} \quad \Omega \\ \varphi_1 &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

y además $\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

OBSERVACIÓN 23. Todo lo que hemos probado anteriormente se verifica para cualquier dominio acotado Ω suave. En lo que viene a continuación necesitamos que al menos la primera función propia φ_1 del operador bilaplaciano bajo condiciones tipo Dirichlet sea de un signo. Hasta el día de hoy existe la siguiente conjetura: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 3$, dominio acotado, si $\partial\Omega$ es de clase $\mathcal{C}^{4,\gamma}$ con $\gamma \in (0,1)$, entonces la primera función propia del operador bilaplaciano con condiciones tipo Dirichlet es de un signo (resultado que todavía no conocemos).

Antes de presentar el resultado mostrado por Grunau y Sweers (1997, Teorema 5.2), es necesario definir lo siguiente:

DEFINICIÓN 2. Dados $U \subset \mathbb{R}^N$ un dominio, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0,1)$ y $\varepsilon > 0$, decimos que U es ε-cerrado en el sentido $\mathcal{C}^{k,\gamma}$ a la bola $B(0,1)$ si existe una aplicación sobreyectiva g en $\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{B}, \overline{U})$ tal que

$$\|g - Id\|_{\mathcal{C}^{k,\gamma}(\overline{B},\overline{U})} \leq \varepsilon.$$

TEOREMA 19. *Existe $\varepsilon_N > 0$ tal que si Ω es ε-cerrado en el sentido $\mathcal{C}^{4,\gamma}$ a $B(0,1)$ con $\varepsilon < \varepsilon_N$, entonces la función propia φ_1 para el primer valor propio de*

$$\begin{aligned} \Delta^2\varphi_1 &= \mu_1\varphi_1 && \textit{en} \quad \Omega \\ \varphi_1 &= 0 && \textit{sobre } \partial\Omega \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= 0 && \textit{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \tag{51}$$

[4]la que usaremos es el Teorema de Paso de Montaña

es única (bajo normalización) y existe $c > 0$ tal que

$$\varphi_1(x) \geq cd(x)^2 \text{ para todo } x \in \Omega,$$

con $d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$.

Porque es necesario este resultado, de aquí en adelante vamos a considerar que Ω es ε-cerrado en el sentido $\mathcal{C}^{4,\gamma}$ a la bola $B(0,1)$ con $\varepsilon < \varepsilon_N$, lo que implica que

$$\varphi_{1,\Omega}(x) \geq cd(x)^2 \text{ para todo } x \in \Omega.$$

LEMA 12. *Sea $m > 0$ suficientemente pequeño tal que*

$$\frac{q(a)}{a} = \frac{b}{a} > 2(\mu_1 + m)\frac{\|\varphi_1\|_{L^1(\Omega)}}{\|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{52}$$

Entonces $f(b\varphi_1) < 0$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición de G, tenemos que $\dfrac{1}{\mu_1 + m}$ es su primer valor propio y φ_1 es la función propia asociada. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(b\varphi_1) &= \int_\Omega \left[P^*(b\varphi_1) - \frac{1}{2} b\varphi_1 G(b\varphi_1) \right] dx \\
&= \int_\Omega P^*(b\varphi_1)\, dx - \frac{b^2}{2} \int_\Omega \varphi_1 G(\varphi_1)\, dx \\
&= \int_\Omega P^*(b\varphi_1)\, dx - \frac{b^2}{2} \frac{1}{\mu_1 + m} \int_\Omega \varphi_1^2\, dx \\
&= \int_\Omega P^*(b\varphi_1)\, dx - \frac{b^2}{2} \frac{1}{\mu_1 + m} \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\varphi_1 > 0$, tenemos que $0 < b\varphi_1(x) \leq b$ c.t.p. $x \in \Omega$. De la caracterización de p^* sabemos que si $w \in [0, b]$ entonces $p^*(w) \leq a$, y esto implica que

$$P^*(w) = \int_0^w p^*(s)\, ds \leq \int_0^w a\, ds = aw.$$

Por lo que

$$P^*(b\varphi_1(x)) \leq ba\varphi_1(x)$$

c.t.p. $x \in \Omega$. De donde obtenemos

$$\begin{aligned}
f(b\varphi_1) &\leq \int_\Omega ba\varphi_1(x)\, dx - \frac{1}{2} \frac{b^2}{\mu_1 + m} \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= ba \|\varphi_1\|_{L^1(\Omega)} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{\mu_1 + m} \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Y de la hipótesis tenemos que

$$f(b\varphi_1) < 0.$$

□

El siguiente resultado generará la geometría necesaria sobre f para aplicar el *teorema de Paso de Montaña*.

LEMA 13. *Existen constantes m^*, ρ y α_0 estrictamente mayores que cero, tales que*

$$f(s) \geq \alpha_0 \text{ para todo } w \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \|w\|_{L^q(\Omega)} = \rho,$$

con $q = \dfrac{2N}{N+2}$.

OBSERVACIÓN 24. En el lema anterior las constantes ρ y α_0 son dependientes de m^*, es decir, $\rho = \rho(m^*)$ y $\alpha_0 = \alpha_0(m^*)$.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos notando que q es el exponente conjugado de 2^*(el exponente crítico de Sobolev de 2), es decir,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2^*} = 1.$$

Además, se verifica

$$q = \frac{2N}{N+2} < 2 < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Puesto que $\partial\Omega$ es de clase $\mathcal{C}^{4,\gamma}$, los mapas locales en la frontera $\partial\Omega$ son $\mathcal{C}^{4,\gamma}$ y por tanto son $\mathcal{C}^4$, esto implica que Ω es de clase $\mathcal{C}^4$. Como $w \in L^2(\Omega)$ y el dominio Ω es acotado, tenemos que $w \in L^q(\Omega)$. Gazzola y cols. (2010, Corollary 2.21) nos asegura que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\|G(w)\|_{W^{4,q}(\Omega)} \leq c_1 \|w\|_{L^q(\Omega)}. \tag{53}$$

Por otro lado, que Ω sea de clase $\mathcal{C}^{4,\gamma}$ implica que sus mapas locales en la frontera $\partial\Omega$ tengan esta regularidad, por lo que en particular dichos mapas locales son de clase $\mathcal{C}^1$. Así, Ω es de clase $\mathcal{C}^1$. Ahora, puesto que Ω es acotado y de clase $\mathcal{C}^1$, de los *teoremas de inmersión de Sobolev* existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W^{4,q}(\Omega)} \tag{54}$$

para todo u en $W^{4,q}(\Omega)$.

En particular, puesto que $G(w)$ pertenece a $W^{4,q}(\Omega)$, por (54)tenemos

$$\|G(w)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c_2 \|G(w)\|_{W^{4,q}(\Omega)}. \tag{55}$$

De (53) obtenemos

$$\|G(w)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c_2 \|G(w)\|_{W^{4,q}(\Omega)} \leq c_3 \|w\|_{L^q(\Omega)}, \tag{56}$$

donde $c_3 = c_1 c_2 > 0$.

Para cualquier $w \in L^2(\Omega)$, de la *desigualdad de Hölder* se verifica la siguiente desigualdad:

$$\int_\Omega wG(w)\,dx \leq \|w\|_{L^q(\Omega)} \|G(w)\|_{L^{2^*}(\Omega)},$$

y de la estimación (56) obtenemos

$$\|w\|_{L^q(\Omega)}\,\|G(w)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c_3\,\|w\|^2_{L^q(\Omega)},$$

de donde

$$\int_\Omega wG(w)\,dx \leq c_3\,\|w\|^2_{L^q(\Omega)}. \tag{57}$$

Recordemos que p^* es una función no decreciente y además por definición de p^* tenemos que

$$p^*(s) = \begin{cases} \dfrac{s}{m} & \text{si } s \leq ma \\ a & \text{si } ma \leq s \leq ma+b. \end{cases}$$

Notemos que $0 < q-1 = \dfrac{N-2}{N+2} < 1$, por lo que la aplicación $t \mapsto t^{q-1}$ es estrictamente creciente. Queremos que la aplicación $t \mapsto \beta q t^{q-1}$ esté por debajo de p^* para algún $\varepsilon_m > 0$, es decir, para $t \geq \varepsilon_m$ exista $\beta > 0$ tal que $p^*(t) \geq \beta q t^{q-1}$.

Puesto que la aplicación $t \mapsto t^{q-1}$ es estrictamente creciente basta analizar en dos puntos, $t = \varepsilon_m$ y $t = ma+b$. Tomemos $\varepsilon_m > 0$ en el intervalo $(0, ma)$. Si suponemos que

$$p^*(\varepsilon_m) = \beta q \varepsilon_m^{q-1},$$

obtenemos que

$$\frac{\varepsilon_m}{m} = \beta q \varepsilon_m^{q-1}$$

de donde β se puede escribir como

$$\beta = \frac{\varepsilon_m^{2-q}}{mq} > 0. \tag{58}$$

Considerando que $-1 < 2-q < 0$, si escogemos $\varepsilon_m > 0$ pequeño, entonces β será grande.

Ahora, analicemos en el punto $t = ma+b$. Requerimos que

$$p^*(ma+b) > \beta q (ma+b)^{q-1},$$

de donde

$$\frac{a}{q(ma+b)^{q-1}} > \beta. \tag{59}$$

Tomando $\varepsilon_m > 0$ de tal manera que se verifiquen (58) y (59), entonces $p^*(t) \geq \beta q t^{q-1}$ para todo $t \geq \varepsilon_m$.

Para cada $t \geq \varepsilon_m$ tenemos lo siguiente

$$P^*(t) = \int_0^t p^*(s)\,ds \geq \int_0^t \beta q s^{q-1}\,ds = \beta t^q = \beta |t|^q,$$

por lo que

$$\int_\Omega P^*(w)\,dx \geq \int_{|w|\geq\varepsilon_m} \beta |w|^q\,dx = \beta \int_{|w|\geq\varepsilon_m} |w|^q\,dx.$$

Definamos
$$\beta_m := \beta \int_{|w|\leq \varepsilon_m} |w|^q \, dx.$$
Notemos que
$$\|w\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_{|w|\geq \varepsilon_m} |w|^q \, dx + \int_{|w|\leq \varepsilon_m} |w|^q \, dx = \int_{|w|\geq \varepsilon_m} |w|^q \, dx + \frac{\beta_m}{\beta},$$
con lo cual obtenemos la siguiente estimación:
$$\int_\Omega P^*(w) \, dx \geq \beta \, \|w\|^q_{L^q(\Omega)} - \beta_m. \tag{60}$$

De (57) y (60) obtenemos que
$$\begin{aligned} f(w) &\geq \beta \, \|w\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{1}{2} c_3 \, \|w\|^2_{L^q(\Omega)} - \beta_m \\ &= \beta \, \|w\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{1}{2} c_3 \, \|w\|^2_{L^q(\Omega)} - \beta \int_{|w|\leq \varepsilon_m} |w|^q \, dx \\ &\geq \beta \, \|w\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{1}{2} c_3 \, \|w\|^2_{L^q(\Omega)} - \beta \varepsilon_m^q |\Omega|. \end{aligned}$$
Ahora, debemos mostrar que existen constantes ρ y α_0 mayores que cero tales que para todo $w \in L^q(\Omega)$ que verifica $\|w\|_{L^q(\Omega)} = \rho$, cumple lo siguiente:
$$\beta \, \|w\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{1}{2} c_3 \, \|w\|^2_{L^q(\Omega)} - \beta \varepsilon_m^q |\Omega| \geq 2\alpha_0.$$

La derivada de la aplicación
$$r(t) := \beta t^q - \frac{1}{2} c_3 t^2 - \beta \varepsilon_m^q |\Omega|$$
está dada por
$$r'(t) = \beta q t^{q-1} - c_3 t,$$
por lo que un punto crítico de esta está dado por $t_c = \left(\frac{\beta q}{c_3}\right)^{1/(2-q)}$. Ahora, su segunda derivada es
$$r''(t) = \beta q (q-1) t^{q-2} - c_3$$
que evaluada en $t = t_c$ tenemos
$$r''(t_c) = (q-1)c_3 - c_3 < 0.$$
Esto implica que t_c es un punto de máximo. Además, existe $\delta_1 > 0$ tal que la aplicación $r(t)$ es cóncava en $(t_c - \delta_1, t_c + \delta_1)$.

Encontremos $m^* > 0$ tal que
$$\beta t_c^q - \frac{1}{2} c_3 t_c^2 - \beta \varepsilon_m^q |\Omega| > 0.$$

Reescribiendo $r(t_c)$, tenemos lo siguiente:
$$r(t_c) = \beta \left(\frac{\beta q}{c_3}\right)^{2/(2-q)-1} - \frac{c_3}{2} \left(\frac{\beta q}{c_3}\right)^{2/(2-q)} - \beta \varepsilon_m^q |\Omega|$$

$$
\begin{aligned}
&= c_3 \left(\frac{\beta q}{c_3}\right)^{2/(2-q)} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right] - \beta \varepsilon_m^q |\Omega| \\
&= \frac{c_3}{N} \left(\frac{\beta q}{c_3}\right)^{2/(2-q)} - \beta \varepsilon_m^q |\Omega|
\end{aligned}
$$

considerando (58) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
r(t_c) &= c_3 \left(\frac{\beta q}{c_3}\right)^{2/(2-q)} \left[\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right] - \beta(\beta m q)^{2/(2-q)-1} |\Omega| \\
&= (\beta q)^{2/(2-q)} \left[\frac{c_3^{-N/2}}{N} - m^{2/(2-q)-2} |\Omega|\right] \\
&= (\beta q)^{2/(2-q)} \left[\frac{c_3^{-N/2}}{N} - m^{(N-2)/2} |\Omega|\right].
\end{aligned}
$$

Para que $r(t_c) > 0$ requerimos que

$$
\frac{c_3^{-N/2}}{N} - m^{(N-2)/2} |\Omega| > 0,
$$

lo cual podemos reescribir como

$$
\left(\frac{1}{c_3^{N/2} N |\Omega|}\right)^{2/(N-2)} > m. \tag{61}
$$

Tomando $m^* > 0$ que verifique (61) tenemos que $r(t_c) > 0$. Como $r(t)$ es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $r(t) > 0$ para todo t en $(t_c - \delta_2, t_c + \delta_2)$.

La función $r(t)$ es positiva y cóncava en $(t_c - \delta, t_c + \delta)$, con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Definamos

$$
\alpha_0 := \frac{1}{2} r(t_c + \delta/2)
$$

y $\rho := t_c + \delta/2 > 0$.

Bajo estas consideraciones, hemos encontrado m^*, ρ y α_0 tal que para cualquier $w \in L^2(\Omega)$ con $\|w\|_{L^q(\Omega)} = \rho$ se verifica

$$
f(w) \geq r\left(\|w\|_{L^q(\Omega)}\right) = r(\rho) = 2\alpha_0. \qquad \square
$$

Finalmente, probemos que se verifica la condición $(\mathrm{PS})_c$.

LEMA 14. *Dada $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\Omega)$ una sucesión $(PS)_c$, con $c \in \mathbb{R}$. Entonces existen una subsucesión $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $w \in L^2(\Omega)$ tal que $f(w) = c$ y $f'(w) = 0$, y verifican que $w_{n_k} \rightharpoonup w$.*

DEMOSTRACIÓN. En la demostración del Lema 11 deducimos que para cualquier $w \in L^2(\Omega)$ tenemos lo siguiente:

$$
f(w) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha + m} - \frac{1}{\mu_1 + m}\right] \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 - c_0 |\Omega|^{1/2} \|w\|_{L^2(\Omega)}.
$$

En esa misma demostración habíamos mostrado, gracias a la desigualdad anterior, que el funcional f es coercivo sobre $L^2(\Omega)$.

De la coercividad de f y gracias a que $f(w_n) \to c$, la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$. En efecto, supongamos que la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada en $L^2(\Omega)$, entonces $\|w_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$, lo cual implica que $f(w_n) \to +\infty$ y esto es absurdo pues por hipótesis sabemos que $f(w_n) \to c$. Gracias al *teorema de Banach-Alaoglu*[5], existe una subsucesión, a la cual llamaremos $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, y algún $w \in L^2(\Omega)$ tales que $w_{n_k} \rightharpoonup w$ en $L^2(\Omega)$.

Gracias a que el operador G es compacto y a la convergencia débil de la sucesión $\{w_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que $G(w_{n_k}) \to G(w)$.

La convergencia de $f'(w_{n_k}) \to 0$ es en $L^2(\Omega)^*$, esto es lo mismo que

$$p^*(w_{n_k}) - G(w_{n_k}) \rightharpoonup 0 \text{ en } L^2(\Omega).$$

Notemos que para todo $v \in L^2(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (p^*(w_{n_k}) - G(w))v\,dx\right| &= \left|\int_\Omega \big(p^*(w_{n_k}) - G(w_{n_k}) + G(w_{n_k}) - G(w)\big)v\,dx\right| \\
&= \left|\int_\Omega \big(p^*(w_{n_k}) - G(w_{n_k})\big)v\,dx + \int_\Omega \big(G(w_{n_k}) - G(w)\big)v\,dx\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega \big(p^*(w_{n_k}) - G(w_{n_k})\big)v\,dx\right| + \left|\int_\Omega \big(G(w_{n_k}) - G(w)\big)v\,dx\right|
\end{aligned}$$

Puesto que $G(w_{n_k}) \to G(w)$ en $L^2(\Omega)$, entonces $G(w_{n_k}) \rightharpoonup G(w)$ en $L^2(\Omega)$. De esto y gracias a que $p^*(w_{n_k}) - G(w_{n_k}) \rightharpoonup 0$ en $L^2(\Omega)$, el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a cero cuando $k \to +\infty$, y por tanto

$$\int_\Omega \big[p^*(w_{n_k}) - G(w)\big]v\,dx \to 0$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$ y, en particular, para todo $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Esto implica que $p^*(w_{n_k}) \to G(w)$ c.t.p. en Ω.

Como $w \in L^2(\Omega)$, existe $v \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ tal que $G(w) = v$. Definamos los siguientes conjuntos

$$\Gamma := \left\{ x \in \Omega \colon v(x) = a \right\}$$

y $\Omega' := \Omega \setminus \Gamma$.

Estudiemos la convergencia en Ω'. Sabemos que

$$p^*(w_{n_k}) \to G(w) = v$$

c.t.p. en Ω', y como $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ tenemos que $w_{n_k} \to p(v)$ c.t.p. en Ω'. Por tanto, existe $M > 0$ tal que $|w_{n_k} - p(v)| \leq M$ c.t.p. en Ω'. Gracias a la acotación de p, la

[5]Dado X un espacio de Banach reflexivo. Si $B \subset X$ es acotado, entonces B es relativamente compacto en la topología débil de X.

siguiente cadena de desigualdades se verifica c.t.p. en Ω':

$$\begin{aligned}|w_{n_k}| &\leq |w_{n_k} - p(v)| + |p(v)| \\ &\leq |w_{n_k} - p(v)| + (m+\alpha)|v| + |c_0| \\ &\leq (m+\alpha)|v| + |c_0| + M\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $v \in H^2(\Omega)$, entonces $v \in L^2(\Omega)$ y por tanto, $(m+\alpha)|v| + |c_0| + M \in L^2(\Omega')$. Gracias al *teorema de convergencia dominada de Lebesgue*, tenemos que $w_{n_k} \to p(v)$ en $L^2(\Omega')$, esto implica que $w_{n_k} \rightharpoonup p(v)$ en $L^2(\Omega')$. Y como $w_{n_k} \rightharpoonup w$ en $L^2(\Omega')$, de la unicidad de límite débil podemos inferir que $w = p(v)$ en $L^2(\Omega')$.

Vamos a utilizar el siguiente resultado: dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge débilmente a x en un espacio de Hilbert H, si $\|x_n\| \to \|x\|$, entonces $x_n \to x$ en H.

Demostremos este pequeño, pero útil, resultado. Tenemos lo siguiente

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - (x_n \mid x) - (x \mid x_n) - \|x\|^2.$$

De la convergencia débil tenemos que

$$(x_n \mid x) + (x \mid x_n) \to 2\|x\|^2,$$

y de la hipótesis tenemos que

$$\|x_n - x\|^2 \to 0.,$$

por lo que $x_n \to x$ en H.

Como $w_{n_k} \to p(v)$ en $L^2(\Omega')$, por el recíproco del resultado anterior, tenemos que

$$\|w_{n_k}\|_{L^2(\Omega')} \to \|p(v)\|_{L^2(\Omega')},$$

pero como $p(v) = w$ en $L^2(\Omega')$ tenemos que

$$\|w_{n_k}\|_{L^2(\Omega')} \to \|w\|_{L^2(\Omega')}.$$

Y gracias al resultado mostrado anteriormente obtenemos que

$$w_{n_k} \to w \text{ en } L^2(\Omega').$$

Gracias al recíproco del *teorema de convergencia dominada de Lebesgue*, $w_{n_k} \to w$ c.t.p. en Ω' y existe $\hat{h} \in L^2(\Omega')$ tal que $|w_{n_k}| \leq \hat{h}$ c.t.p en Ω', de donde $p^*(w_{n_k}) \to p^*(w)$ c.t.p. en Ω', gracias a que p^* es continua. Además, sabemos que $|p^*(w_{n_k})| \leq h\chi_{\Omega'}$ c.t.p.. Por el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* tenemos que

$$p^*(w_{n_k}) \to p^*(w) \text{ en } L^2(\Omega'). \tag{62}$$

Recordemos que la desigualdad (47) nos dice que

$$-\left[\frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}\right] \leq p^*(s) \leq \frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Considerando un $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, pero fijo, e integrando la desigualdad anterior en $[0,t]$, tenemos que

$$-\int_0^t \left[\frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}\right] ds \leq P^*(t) \leq \int_0^t \left[\frac{|s|}{m-\alpha} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}\right] ds,$$

de donde

$$|P^*(t)| \leq \left|\frac{|t|t}{2(m-\alpha)} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}t\right| \leq \frac{t^2}{2(m-\alpha)} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}|t|.$$

Gracias a la continuidad de la integral y a la convergencia c.t.p. de $p^*(w_{n_k})$ en Ω' tenemos que

$$P^*(w_{n_k}) \to P^*(w) \text{ c.t.p. en } \Omega',$$

y de la desigualdad anterior tenemos que

$$|P^*(w_{n_k})| \leq \frac{w_{n_k}^2}{2(m-\alpha)} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}|w_{n_k}| \leq \frac{\hat{h}^2}{2(m-\alpha)} + \frac{c_0+b}{m-\alpha}\hat{h}m,$$

donde el término de la derecha pertenece a $L^1(\Omega')$. Por el *teorema de convergencia dominada de Lebesgue* tenemos que

$$\int_{\Omega'} P^*(w_{n_k})\,dx \to \int_{\Omega'} P^*(w)\,dx. \tag{63}$$

Por otro lado, para c.t.p. $x \in \Gamma$, tenemos que

$$w(x) = mv(x) = ma,$$

y por tanto

$$p^*(w(x)) = p^*(ma) = a = v(x).$$

Lo anterior, junto a (62), implica que $p^*(w) = v$, que a su vez, para cada $z \in L^2(\Omega)$, implica que

$$\begin{aligned} f'(w)z &= \int_\Omega [p^*(w) - G(w)]z\,dx \\ &= \int_\Omega [v - G(w)]z\,dx \\ &= \int_\Omega [v - v]z\,dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $f'(w) = 0$. De manera similar, encontremos la forma específica de $P^*(t)$ cuando $t \in T$:

$$\begin{aligned} P^*(t) &= \int_0^t p^*(s)\,ds \\ &= \int_0^{ma} \frac{s}{m}\,ds + \int_{ma}^t a\,ds \\ &= -\frac{m}{2}a^2 + ta. \end{aligned}$$

Gracias a (63) tiene sentido hablar de la integral de $P^*(w)$ sobre Ω, pues

$$\begin{aligned}\int_\Omega P^*(w)\,dx &= \int_{\Omega'} P^*(w)\,dx + \int_\Gamma P^*(w)\,dx \\ &= \int_{\Omega'} P^*(w)\,dx + \int_\Gamma \left[-\frac{m}{2}a^2 + wa\right]\,dx \\ &= \int_{\Omega'} P^*(w)\,dx - \frac{m}{2}a^2\,|\Gamma| + a\int_\Gamma w\,dx,\end{aligned}$$

y además, como la medida de Ω es finita la medida de Γ también lo es y w pertenece a $L^1(\Omega)$. Por otro lado, como $w \in L^2(\Omega)$ tenemos que $G(w) \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ y puesto que $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\left|\int_\Omega wG(w)\,dx\right| \leq \int_\Omega |wG(w)|\,dx \leq \|w\|_{L^2(\Omega)}\,\|G(w)\|_{L^2(\Omega)},$$

con lo cual el valor de la integral de $wG(w)$ sobre Ω es un valor finito. Así, tenemos que

$$f(w) = \int_\Omega \left[P^*(w) - \frac{1}{2}wG(w)\right]\,dx$$

es finito, y fijando

$$c = \int_\Omega \left[P^*(w) - \frac{1}{2}wG(w)\right]\,dx$$

tenemos que $f(w) = c$. □

TEOREMA 20. *Supongamos que se verifican* (q1) *y* (52). *Entonces el problema* (PBDN-2) *tiene dos soluciones (no triviales) distintas $u_0 \neq u_1$. Más aún, la medida de Lebesgue del conjunto*

$$\Omega_a(u_0) = \{\, x \in \Omega \colon u_0(x) = a \,\}$$

es cero.

DEMOSTRACIÓN. Gracias al Lema 11, el mínimo global de f se alcanza en algún $v_0 \in L^2(\Omega)$. Como se verifica (52), el Lema 12 nos dice que $f(b\varphi_1) < 0$, y del hecho de que v_0 es un mínimo global para f tenemos que

$$f(v_0) \leq f(b\varphi_1) < 0,$$

por lo que $f(v_0) < 0$. Esto también implica que $v_0 \neq 0$, y del operador G podemos definir $u_0 := G(v_0)$ con lo cual v_0 es una solución de (PBDN-2).

Los lemas 12, 13 y 14 nos permiten aplicar el Teorema de Paso de Montaña (Teorema 11), esto genera un $v_1 \in L^2(\Omega)$ tal que $f(v_1) > 0$, y del operador G, podemos definir $u_1 := G(v_1)$. Ahora, como $f(v_0) < 0$ y $f(v_1) > 0$, inferimos que $v_1 \neq v_2$. Gracias a que el operador G es un isomorfismo tenemos que $G(v_0) \neq G(v_1)$, es decir, $u_0 \neq u_1$. □

Capítulo 8

Conclusiones y Recomendaciones

1. Conclusiones

Una manera alternativa de analizar existencia de soluciones de una ecuación diferencial parcial es a través del estudio de algún funcional asociado a dicha ecuación, las herramientas que facilitan dicho estudio son las que aparecen en la teoría de puntos críticos. Una herramienta en particular, que saca provecho de la estructura del funcional, es el conocido teorema de paso de montaña.

A lo largo de los años han habido muchos problemas con frontera libre tratados con Métodos Directos del Cálculo de Variaciones. Sin embargo, es usual que estos métodos no sean los mejores para tratarlos (este es el caso de nuestro problema (PBDN)) ya sea por la dificultad de los funcionales asociados como por la no diferenciabilidad de estos.

En problemas derivados de ecuaciones diferenciales parciales con discontinuidades del tipo salto (un caso particular es nuestro problema (PBDN)), el Método de Acción Dual de Clarke-Ekeland y la variante de Ambrosetti Badiale nos permite construir funcionales de clase $\mathcal{C}^1$, cuyos puntos críticos implican soluciones débiles del problema original. La construcción de dicho funcional se basa en la creación de una función continua y a su vez la utilización de una cierta dualidad, explicada en capítulos anteriores. El tipo de ecuación estudiada permite usar esta técnica. En los casos, por ejemplo, del p-Laplaciano no funciona y se pueden utilizar otras técnicas como aquellas desarrolladas por Chang para funcionales Lipschitz continuos, mirar Arcoya y Calahorrano (1994, Some discontinuous problems with a quasilinear operator), J. Math. Analysis and Applic.

En el problema del bi armónico con discontinuidades no lineales, bajo el supuesto que Ω es de clase $\mathcal{C}^4$, la teoría clásica de puntos críticos muestran que existe un mínimo global del funcional y por tanto una solución al problema (PBDN).

Si dotamos de condiciones más restrictivas sobre el dominio, es decir, si le pedimos que sea más regular y cercano a la bola unidad (esto es justamente en el sentido de ser $\varepsilon-$cerrado a $B(0,1)$ en el sentido de $\mathcal{C}^{4,\gamma}$), el teorema de Paso de Montaña implica que existe al menos una solución diferente del mínimo global y, además, es no nula.

Bajo la última hipótesis y de las propiedades del funcional, las soluciones anteriores son diferentes, no nulas y los conjuntos de frontera libre son de medida nula.

2. Recomendaciones

El estudio que hemos realizado en el presente trabajo está basado en hipótesis muy regulares y solo con un tipo de condición de frontera. A partir de eso puedo recomendar estudiar este problema con distintas condiciones de frontera y tratar de disminuir la regularidad del dominio requerida, además buscar métodos que requieran menos regularidad.

El problema (PBDN) puede generalizarse considerando operadores poliarmónicos, y el tratamiento del problema es similar al realizado en este trabajo. Sin embargo, se necesita un aumento de regularidad en el dominio. Recomiendo buscar hipótesis idóneas sobre el dominio para tratar la existencia de soluciones.

Existen problemas con frontera libre para los cuales el Principio Variacional Dual es bastante complicado de aplicar, ya sea por la estructura de la ecuación o del operador diferencial. Sin embargo existen otras formas de tratar este tipo de problemas, como por ejemplo Arcoya y Calahorrano (1994) (estudian un problema con frontera libre que involucra al operador p-laplaciano), y dos Santos y Tavares (2020) sugieren utilizar las técnicas Chang Chang (1981) (estudian un problema con frontera libre que involucra a un operador no local) para funcionales Lipschitz continuos.

Bibliografía

Adams R. A., F. J. J. (2003). *Sobolev spaces* (2nd edition ed.).
15, 16

Ambrosetti, A. (1992). *Critical points and nonlinear variational problems*. Société mathématique de France.
23, 26

Ambrosetti, A. y Badiale, M. (1989). The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities. *Journal of mathematical analysis and applications*, *140*(2), 363–373.
6, 8, 59, 61, 62

Ambrosetti, A. y Malchiodi, A. (2007). *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems* (Vol. 104). Cambridge University Press.

Ambrosetti, A. y Prodi, G. (1995). *A primer of nonlinear analysis* (n.º 34). Cambridge University Press.
10

Ambrosetti, A. y Rabinowitz, P. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, *14*(4), 349–381.
8, 26, 28

Amrouche, C. y Fontes, M. (2005). Biharmonic problem in exterior domains of rn: an approach with weighted sobolev spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, *304*(2), 552–571.

Arcoya, D. y Calahorrano, M. (1994). Some discontinuous problems with a quasilinear operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *187*(3), 1059–1072.
86, 87

Badiale, M. y Serra, E. (2010). *Semilinear elliptic equations for beginners: Existence results via the variational approach*. Springer Science & Business Media.
11, 12

Bensid, S. (2018). Existence and multiplicity of solutions for fractional elliptic problems with discontinuous nonlinearities. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *15*(3), 135.

Bensid, S. y Bouguima, S. (2008). On a free boundary problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *68*(8), 2328–2348.
7

Berchio E., Gazzola F., Buoso D. y Zucco D. (2018). A minimaxmax problem for improving the torsional stability of rectangular plates. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *177*(1), 64–92.
7

Bessi, U. y Coti Zelati, V. (1991). Symmetries and noncollision closed orbits for planar n-body-type problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *16*(6), 587–598.
29

Bonheure D., Gazzola F. y Dos Santos, E. (2019). Periodic solutions and torsional instability in a nonlinear nonlocal plate equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, *51*(4), 3052–3091.
7

Cartan, H. (1967). Calcul différentiel: I-calcul différentiel dans les espaces de banach; ii-équations différentielles (cours de mathématiques ii). *Hermann & Cie, Éditeurs*.
10

Chang, K.-C. (1981). Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *80*(1), 102–129.
87

Clarke, F. H. y Ekeland, I. (1980). Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, *33*(2), 103–116.
6, 8, 62

Cornea O., Lupton G., Oprea J. y Tanré D. (2003). *Lusternik-Schnirelmann category* (n.º 103). American Mathematical Soc.
19, 20

Costa, D. y Gonçalves, J. (1990). Critical point theory for nondifferentiable functionals and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *153*(2), 470–485.

Costa, D. G. (2007). *An invitation to variational methods in differential equations (birkhuser advanced texts / basler lehrbcher)* (1.ª ed.). Birkhäuser Boston.
31, 33

Demengel, F. y Demengel, G. (2012). *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations* (1.ª ed.). Springer-Verlag London.
15

dos Santos, G. C. y Tavares, L. S. (2020). Existence results for an anisotropic nonlocal problem involving critical and discontinuous nonlinearities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 1–25.
87

Evans, L. C. (2010). Partial differential equations. second. vol. 19. *Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI*.
34, 37

Gazzola, F., Grunau, H.-C. y Sweers, G. (2010). *Polyharmonic boundary value problems: positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Springer Science & Business Media.
78

Ghoussoub, N. y Preiss, D. (1989). A general mountain pass principle for locating and classifying critical points. En *Annales de l'ihp analyse non linéaire* (Vol. 6, pp. 321–330).
29

Gilbarg, D. y Trudinger, N. S. (2015). *Elliptic partial differential equations of second order*. springer.
16

Grunau, H.-C. y Sweers, G. (1997). The maximum principle and positive principal eigenfunctions for polyharmonic equations. 72, 76

Hofer, H. (1984). A note on the topological degree at a critical point of mountainpass-type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *90*(2), 309–315.
30

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 1). wiley New York.

Lusternik, L. y Schnirelmann, L. (1934). *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, hermann, paris, 1934* (Vol. 2803).

Möbius, P., Mawhin, J. y Willem, M. (1991). Critical point theory and hamilatonian systems. new york etc., springer-verlag 1989. xiv, 277 pp., dm 108,—. isbn 3-540-96908-x (applied mathematical sciences 74). *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, *71*(1), 36–36.
19

Ostergaard, T. y Schaub, M. (2016). *Semilinear elliptic pde*. Mathematisches Institut der Universität München. Descargado 3 de octubre de 2019, de http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~schaub/Semilinear_Elliptic_PDE.pdf
13

Palais, R. y Smale, S. (1964). A generalized morse theory. En *Bulletin of the american mathematical society* (pp. 165–171).
30

Palais, R. y Smale, S. (2000). A generalized morse theory. En *The collected papers of stephen smale: Volume 2* (pp. 503–510).

Palais, R. S. (1966). Lusternik-Schnirelman theory on banach manifolds. *Topology*, *5*(2), 115–132.
20, 21

Rabinowitz, P. (1978). Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations. En *Nonlinear analysis* (pp. 161–177). Elsevier.

22

Schwartz, J. T. (1964). Generalizing the lusternik-schnirelman theory of critical points. *Communications on pure and applied mathematics*, *17*(3), 307–315.

Smale, S. (2000). On the morse index. theorem. *Collected Papers Of Stephen Smale, The (In 3 Volumes)-*, *2*(6), 535.
30

Stampacchia, G. (1965). Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. En *Annales de l'institut fourier* (Vol. 15, pp. 189–257).

Szulkin, A. (1988). Ljusternik-schnirelmann theory on c1-manifolds. En *Annales de l'institut henri poincare (c) non linear analysis* (Vol. 5, pp. 119–139).
20

Wloka, J. (1987). Partial differential equations. *Cambridge University*.
38, 46, 47