ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

TARIFICACIÓN DE UN SEGURO DE INVALIDEZ: UNA APLICACIÓN AL CASO ECUATORIANO

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

MATEO SEBASTIAN PAVÓN VALENCIA
mateo.pavon@epn.edu.ec

Director: MSC. DIEGO PAÚL HUARACA SHAGÑAY
diego.huaracas@epn.edu.ec

Codirector: MSC. MENTHOR OWALDO URVINA MAYORGA
menthor.urvina@epn.edu.ec

QUITO, NOVIEMBRE 2021

DECLARACIÓN

Yo MATEO SEBASTIAN PAVÓN VALENCIA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Mateo Sebastian Pavón Valencia

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por MATEO SEBASTIAN PAVÓN VALENCIA, bajo nuestra supervisión.

Firmado electrónicamente por:
DIEGO PAUL HUARACA SHAGÑAY

MSc. Diego Paúl Huaraca Shagñay
Director del Proyecto

MENTHOR OSWALDO URVINA MAYORGA

Firmado digitalmente por MENTHOR OSWALDO URVINA MAYORGA
Fecha: 2021.11.25 09:44:12 -05'00'

MSc. Menthor Owaldo Urvina Mayorga
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mi hermana, que con sus locuras supo sacarme una sonrisa durante la ardua elaboración de este trabajo.

A MSc. Diego Huaraca, quien estuvo presto a desarrollar el tema presentado y ha sido de gran influencia en mi formación profesional.

DEDICATORIA

A mis padres, que me han amparado económica y moralmente durante mi formación académica.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Resumen

En este trabajo presentamos las nociones básicas de la matemática actuarial, el álgebra lineal y los procesos estocásticos; además de un breve resumen del método numérico Runge Kutta de orden 4. Posteriormente, teniendo en cuenta la normativa de la seguridad social ecuatoriana, propondremos un seguro de invalidez congruente con las condiciones económicas y demográficas actuales de la Ecuador. Dicho seguro lo veremos como una cadena de Markov de tres estados, por lo que plantearemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias usando la ecuación diferencial de Kolmogorov. Este sistema lo resolveremos analíticamente mediante el uso del álgebra lineal, y numéricamente a través de la aplicación del método Runge Kutta de orden 4. Una vez resuelto el sistema, dispondremos de las probabilidades de transición del asegurado; necesarias para cuantificar la prima del producto formulado, como una renta actuarial temporal. Finalmente, comparamos las soluciones obtenidas con ambos métodos.

Abstract

In this work we present the basic notions of actuarial mathematics, linear algebra and stochastic processes; in addition to a brief summary of the Runge Kutta numerical method of order 4. Subsequently, considering the Ecuadorian social security regulations, we will propose a disability insurance congruent with the current economic and demographic conditions of Ecuador. We will see this insurance as a three-state Markov chain, so we will propose a system of ordinary differential equations using the Kolmogorov differential equation. We will solve this system analytically through the use of linear algebra, and numerically through the application of the Runge Kutta method of order 4. Once the system is solved, we will have the transition probabilities of the insured; necessary to quantify the premium of the formulated product, as a term immediate annuity. Finally, we compare the obtained solutions with both methods.

Notación Actuarial

Antes de proceder con los conceptos y la metodología, es necesario consolidar la notación que utilizaremos a lo largo del documento. Varios símbolos presentados, son parte de la notación actuarial aceptada a nivel internacional.

i	Tipo de interés
$i^{(m)}$	Tipo de interés subperiodal.
X, Z	Variable aleatoria a valores reales.
x	Edad de una persona.
w	Edad máxima que puede alcanzar cualquier persona.
$a_{\overline{n}\rvert i}$	Renta temporal constante inmediata pospagable.
$s_{\overline{n}\rvert i}$	Valor final de una renta temporal constante inmediata pospagable.
$\ddot{a}_{\overline{n}\rvert i}$	Renta temporal constante inmediata prepagable.
$\ddot{s}_{\overline{n}\rvert i}$	Valor final de una renta temporal constante inmediata prepagable.
${}_tp_x$	Probabilidad de que un individuo de x años permanezca vivo a la edad de $x + t$.
${}_tq_x$	Probabilidad de que un individuo de x edad fallezca dentro de t años.
l_x	Número de sobrevivientes a la edad x, tomando una cohorte inicial de l_0 recién nacidos.
d_x	Número de personas que fallecen entre las edades x y $x + 1$.
$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}$	Seguro de vida temporal (caso continuo).
$A^1_{x:\overline{n}\rvert}$	Seguro de vida temporal (caso discreto).
$\bar{A}_x$	Seguro de vida entera (caso continuo).
A_x	Seguro de vida entera (caso discreto).
$a_{x:\overline{n}\rvert}$	Renta actuarial temporal constante inmediata pospagable.
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	Renta actuarial temporal constante inmediata prepagable.

Cuadro 1: Notación actuarial

Capítulo 1

Introducción

1.1. Justificación

La seguridad social ecuatoriana es un sistema público que busca asegurar a la población una serie de prestaciones mínimas que sirvan de protección en caso de suscitarse una necesidad, producto de un accidente, una enfermedad, situación de desempleo o jubilación. El Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS), organismo perteneciente a dicho sistema, otorga prestaciones y beneficios como: pensión por vejez, invalidez y montepío, auxilios funerarios, riesgos de trabajo, asistencia por enfermedad y maternidad, cobertura de salud para hijos menores de 18 años, ampliación de cobertura de salud para cónyuge o conviviente de hecho [12].

Según el artículo 7 de la Ley Orgánica de Discapacidades: "Se entiende por persona con deficiencia o condición discapacitante a toda aquella que, presente disminución o supresión temporal de alguna de sus capacidades físicas, sensoriales o intelectuales (...)" [1]. Cuando la incapacidad de un individuo afiliado al IESS persiste por más de 26 semanas, el mismo puede solicitar a través de un trámite la calificación o negación de su incapacidad [3]. Es preciso aclarar que el tiempo que demora dicho trámite para confirmar la incapacidad del afiliado no es fijo, y puede durar un plazo máximo de hasta 2 años. La disponibilidad y eficiencia del médico calificador, médicos especialistas y la Sala del Comité Nacional Valuador son factores que influyen en la culminación de esta diligencia. Culminadas las 26 semanas posteriores a la incapacidad, el asegurado se halla imposibilitado de recibir un ingreso económico mínimo que lo ayude con sus gastos, pues para hacerlo es necesario obtener la resolución definitiva otorgada por la Sala del Comité Nacional Valuador.

Antedicho este contratiempo por el que tiene que pasar un afiliado al incapacitarse de realizar actividades laborales, propondremos un seguro de invalidez que salvaguarde la situación económica del afiliado durante los dos años que dure la calificación de su incapacidad (ocasionada por enfermedad o accidente no laboral), a través de un ingreso económico mínimo que le ayude con sus gastos hospitalarios y de hogar. En el caso de suscitarse el fallecimiento del individuo, también ofreceremos una ayuda económica a sus beneficiarios.

El cálculo de la prima de nuestro seguro de invalidez va a depender del estado en el que se encuentre la persona en el momento de contratación y finalización del mismo. El individuo, al inicio del contrato se puede encontrar en diferentes condiciones, y es por esta razón que es necesario apoyarse en fenómenos basados en la aleatoriedad, que cambian conforme el paso del tiempo.

La matemática actuarial hace uso de los procesos estocásticos, específicamente de las cadenas de Markov, a tiempo discreto o continuo para calcular la probabilidad de que un individuo se encuentre en algún estado de salud en cierto tiempo. A través del cálculo de estas probabilidades se logra establecer la equivalencia financiero-actuarial entre primas (aportaciones) y prestaciones (reembolsos) de un colectivo en un horizonte temporal determinado [10].

1.2. Objetivos

- Relacionar la ecuación diferencial de Kolmogorov con el cálculo de un modelo de tarificación basado en tres estados (Saludable, Incapacitado y Fallece).
- Emplear técnicas de la matemática actuarial y financiera para calcular la prima del seguro propuesto y garantizar el equilibrio entre las aportaciones y prestaciones que otorgará el mismo.
- Desarrollar un aplicativo web, empleando Shiny, que permita ejemplificar el cálculo de la prima del seguro de invalidez planteado.

1.3. Software R

R es un ambiente de programación gratuito y de código abierto formado por un conjunto de herramientas diseñadas para el análisis estadístico que pueden ampliarse fácilmente mediante paquetes, librerías o definiendo nuestras propias funciones. En la cúspide de este estudio, usaremos ciertos paquetes para dar lectura a nuestras bases de datos, modificarlas y depurarlas de ser el caso. Luego, una vez que tengamos planteado nuestro modelo, crearemos funciones que nos permitan simplificar y automatizar el cálculo de las probabilidades de transición por el método analítico y numérico; así como cuantificar la prima de nuestro seguro para ambos casos. Finalmente, usaremos el paquete *Shiny* para crear una aplicacion web que interactúe gráficamente con las variables y los datos.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este apartado expondremos fundamentos de la matemática actuarial y financiera, y conceptos básicos de procesos estocásticos; que nos impulsarán a configurar de manera adecuada nuestro seguro. Además, incluiremos formulaciones del álgebra lineal y del método Runge Kutta; que nos asistirán en la solución de nuestro sistema de ecuaciones.

2.1. Fundamentos Financieros y Actuariales

El dinero es el instrumento de las economías monetarias, que cumple la función de ser medio de cambio, depósito de valor y unidad de cuenta. También es un activo financiero líquido; activo porque permite mantener el valor de la riqueza y líquido porque su poder de compra se lo realiza en cualquier momento.

El concepto de interés surge del comportamiento de los sujetos económicos, al preferir \$100 el día de hoy a \$100 el año que viene. Este comportamiento sigue la Ley de subestimación de las necesidades futuras que nos dice que la apreciación de los bienes económicos disminuye a medida que el momento de su disponibilidad se aleja en el tiempo. Por ello, el dinero tiene una doble dimensión: su cuantía y el momento al que va referido, lo que lleva a hablar de *capital financiero*, es decir, de la medida de un bien económico situado en un determinado momento del tiempo.

2.1.1. Regímenes de capitalización

Vamos a suponer un ambiente de certidumbre, es decir, que los agentes económicos conocen con total certeza el valor que en el futuro van a tomar las variables económicas. Pues bien, en este contexto, entendemos por interés el precio o recompensa a pagar por la disposición de capitales ajenos durante un determinado período de tiempo. Evidentemente, este precio va a depender de la cuantía del capital dispuesto y la amplitud del intervalo de tiempo durante el cual se va a disponer de este capital .

En la práctica, nos encontramos fundamentalmente con dos procedimientos o regímenes para la determinación del interés. El más elemental consiste en aplicar el régimen de capitalización simple que, a su vez, conduce de forma natural al segundo procedimiento, el régimen de capitalización compuesta.

Régimen de capitalización simple

Bajo este régimen, el interés I a pagar por la disposición de un capital de cuantía C se determina de forma proporcional al capital dispuesto y al perído de disposición. De esta forma, el interés de la operación elemental se determina según la siguiente expresión:

$$I = C \cdot i \cdot n \tag{2.1}$$

donde,

C : la cuantía del capital dispuesto en unidades monetarias (u.m.).

n : el perído de tiempo de la operación expresado en unidades de tiempo (se supondrá que la unidad de tiempo es el año siempre y cuando no se diga lo contrario).

i : el tipo de interés pactado, es decir, el precio a pagar al final de la operación por unidad de capital prestado y por unidad de tiempo.

Ejemplo 2.1 *Un individuo toma prestado de una entidad financiera un capital de* \$4000 *durante un perído de 30 días. La operación ha sido pactada bajo el régimen de capitalización simple y con un tipo de interés del* 6 % *anual. La cuantía de los intereses a pagar por dicho individuo se la obtiene de la siguiente manera:*

$$I = C \cdot i \cdot n = 4000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{30}{365} = \$19{,}73$$

Por consiguiente, la cuantía final acumulada en dicha cuenta al cabo de 30 días si se realiza un depósito inicial de 4000 *dólares es:*

$$C_f = C_0 + I = C_0(1 + i \cdot n) = 4000\left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{30}{365}\right) = \$4019{,}73$$

Observemos que al estar expresado el tipo de interés en tanto por ciento anual, el período de tiempo que dura la operación ha de venir expresado en esa misma unidad de tiempo, es decir, en años.

En este sentido, es práctica habitual del mercado determinar n (la duración de la operación) mediante dos procedimientos: con el año natural o trabajar con el año comercial.

- Si se trabaja con el año natural (o base 5),

$$n = \frac{\text{número de días de la operación}}{365} \tag{2.2}$$

- Si se trabaja con el año comercial (o base 0),

$$n = \frac{\text{número de días de la operación}}{360} \tag{2.3}$$

Hay que poner en manifiesto que el tipo de interés bajo el régimen de capitalización simple es una magnitud que depende inversamente de la unidad de tiempo con la que se está trabajando. Así, si la unidad de tiempo escogida es equivalente a $1/m$ años, el tipo de interés $i^{(m)}$ expresado en la nueva unidad de tiempo equivalente a un tipo de interés anual i deberá verificar que:

$$I = C \cdot i^{(m)} \cdot n^* = C \cdot i \cdot n \tag{2.4}$$

siendo $n^* = n \cdot m$, el número de nuevas unidades de tiempo incluidas en n años. Por tanto,

$$i^{(m)} = \frac{i}{n} \tag{2.5}$$

siendo $i^{(m)}$ el tipo de interés subperiodal bajo el régimen de capitalización simple.

De esta forma, y continuando con el ejemplo anterior, tenemos el tipo de interés semestral, que bajo el régimen de capitalización simple es equivalente a un tipo de interés anual del 6 %, será:

$$i^{(2)} = \frac{i}{2} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$$

Régimen de capitalización compuesta

Supongamos una operación financiera por la cual un individuo deposita en una entidad financiera un capital de cuantía C_0 durante un período de dos años. Si dicha operación se liquida bajo el régimen de capitalización simple, el interés que se genera será:

$$I = C_0 \cdot i \cdot n \tag{2.6}$$

y la cuenta de depósito al cabo de dos años será:

$$C_2 = C_0(1 + i \cdot 2) \tag{2.7}$$

siendo i el tipo de interés pactado.

Ahora bien, una posible alternativa a esta inversión sería proceder a cancelar el depósito una vez transcurra un año, reinvirtiendo la cuantía resultando de la primera operación (C_0 más los intereses generado en la primera operación) en la misma o en otra entidad financiera. De esta forma, la cuantía resultante al cabo de un año sería:

$$C_1^* = C_0(1 + i \cdot 1) \tag{2.8}$$

Si este capital es de nuevo reinvertido durante un año adicional al mismo tiempo de interés anual i al cabo de dos años de iniciada la operación, la cuantía acumulada será:

$$C_2^* = C_1^*(1 + i \cdot 1) = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i \cdot 2) + C_0 \cdot i^2 = C_0(1 + i)^2 \tag{2.9}$$

En concreto, la diferencia con respecto al anterior régimen es igual al término $C_0 \cdot i^2$, correspondiente a los intereses que durante el segundo año han generado los intereses que se liquidan al final del primer año.

La idea fundamental de la capitalización compuesta es que los intereses generen, a su vez, intereses.

Sea C_n la cuantía que recibirá un inversor al cabo de n años tras la segunda operación descrita anteriormente. Esa cuantía sería igual a la que tuviese disponible un año antes, C_{n-1}, más los intereses que durante ese año hubiese generado dicha operación, es decir:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i \cdot 1 = C_{n-1}(1 + i) \tag{2.10}$$

Como C_1 (Cuantía que recibirá el inversor si al cabo de un año cierra la cuenta) es igual a:

$$C_1 = C_0(1 + i) \tag{2.11}$$

Lo que implica que en un período de n años, el capital final será igual a:

$$C_n = C_0(1 + i)^n \tag{2.12}$$

Esta última expresión es la que se utiliza para liquidar las operaciones financieras bajo el régimen de capitalización compuesta.

Ejemplo 2.2 *Supongamos que el tipo de interés al que una entidad financiera remunera una cuenta de depósito es del* $7\,\%$ *anual bajo el régimen de capitalización compuesta. La cuantía acumulada en dicha cuenta al cabo de* 5 *años si se realiza un depósito inicial de* 2500 *dólares es:*

$$C_5 = C_0(1+i)^5 = 2500(1+0{,}07)^5 = \$3506{,}38$$

Al igual que el tipo de interés bajo el régimen de capitalización simple, i es una magnitud que depende de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. De esta forma, si se escoge una unidad de tiempo equivalente a $1/m$ años, el tipo de interés $i^{(m)}$ expresado en la nueva unidad de tiempo equivalente a un tipo de interés anual i deberá verificar:

$$I = C\left[\left(1+i^{(m)}\right)^{n^*} - 1\right] = C[(1+i)^n - 1] \tag{2.13}$$

donde $n^* = n \cdot m$ es el número de nuevas unidades de tiempo incluidas en n años. Por tanto,

$$i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \tag{2.14}$$

siendo $i^{(m)}$ el tipo de interés subperiodal bajo el régimen de capitalización compuesta.

De esta forma, y continuando con el ejercicio anterior, un tipo de interés anual del $7\,\%$ bajo el régimen de capitalización compuesta es equivalente a un tipo de interés semestral $i^{(2)} = (1+0{,}07)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}034408$ o, equivalentemente, a un tipo de interés trimestral de $i^{(4)} = (1+0{,}07)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}017059$.

2.1.2. Rentas financieras

Una renta financiera es una serie de pagos realizados en intervalos de tiempo regulares, durante un tiempo determinado.

Recordemos que un capital financiero posee dos dimensiones, la medida de un bien económico (cuantía) y el tiempo; por ende, puede ser identificado como (C, t).

Según Navarro y Nave [15], las rentas podemos expresarlas como un conjunto de capitales financieros con vencimientos regulares, es decir, un conjunto de capitales,

$$A = \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)\} \tag{2.15}$$

con $t_{j+1} - t_j = t$ constante, para $j \in 1, 2, \ldots, n-1$.

donde,

$[C_j, t_j]$: Término de la renta.

$[t_j, t_{j+1}]$: Períodos de maduración de la renta.

t : Amplitud de los períodos de maduración (constante).

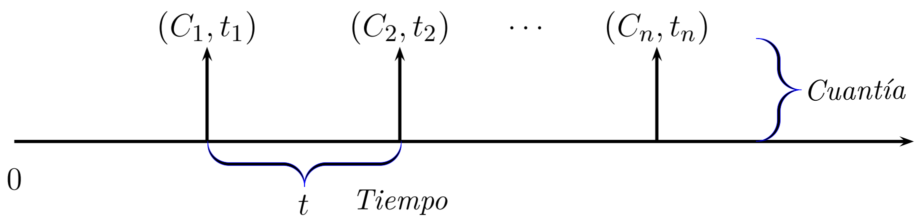

Figura 2.1: Conjunto de capitales financieros

Explicaremos a continuación las *rentas temporales, constantes e inmediatas*; las mismas que son una serie de pagos con cuantías constantes, en donde su vencimiento corre a partir del primer período y el número de períodos es finito. En función de este vencimiento, dicha renta se puede dividir, a su vez, en prepagable o pospagable. Si el origen de la renta se sitúa en t_1, hablamos de una renta prepagable; mientras que si se sitúa en $t_0 = t_1 - t$, hablamos de una renta pospagable.

Renta temporal constante inmediata pospagable

Una renta temporal constante inmediata pospagable puede describirse gráficamente como sigue:

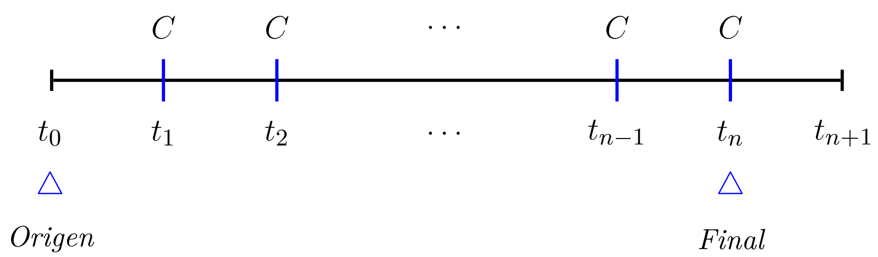

Figura 2.2: Renta temporal constante inmediata pospagable

Sin pérdida de generalidad, consideramos a la cuantía $C = 1$. El valor actual de la renta es el valor de las cuantías descontadas al momento t_0 con un tipo de interés efectivo i.

A este valor actual se lo denota como $a_{\overline{n}|i}$.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.16}$$

Se realiza un proceso similar para determinar el valor final de la renta, el cual es el valor de las cuantías capitalizadas al momento t_n con un tipo de interés efectivo i.

$$s_{\overline{n}|i} = 1 \cdot (1+i)^{n-1} + 1 \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 \cdot (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.17}$$

Renta temporal constante inmediata prepagable

Una renta temporal constante inmediata prepagable puede describirse gráficamente como sigue:

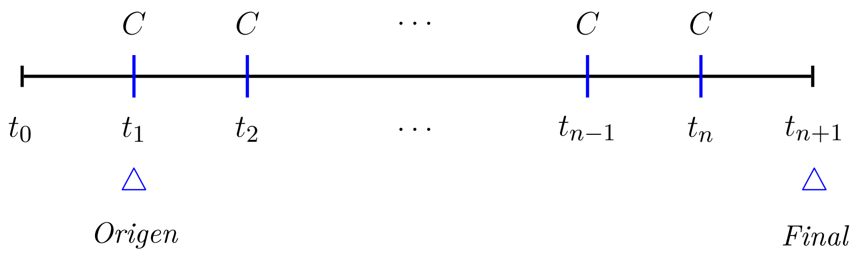

Figura 2.3: Renta temporal constante inmediata prepagable

Sin pérdida de generalidad, consideramos a la cuantía $C = 1$. El valor actual de la renta es el valor de las cuantías descontadas al momento t_1 con un tipo de interés efectivo i. A este valor actual se lo denota como $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.18}$$

Se realiza un proceso similar para determinar el valor final de la renta, el cual es el valor de las cuantías capitalizadas al momento t_{n+1} con un tipo de interés efectivo i.

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = 1 \cdot (1+i)^n + 1 \cdot (1+i)^{n-1} + \cdots + 1 \cdot (1+i)^2 + (1+i) = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.19}$$

2.1.3. Modelo biométrico

Según Dickson y Hardy, los modelos biométricos nos permiten representar el tiempo de vida futura de un individuo como una variable aleatoria y mostrar como las probabilidades de muerte o supervivencia pueden ser calculadas bajo esta estructura .

Función de fallecimiento

Sea X una variable aleatoria llamada edad de fallecimiento. La función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria se define de la siguiente manera:

$$F(x) = P(X < x), \text{ para } x \geq 0 \tag{2.20}$$

Esta función representa la probabilidad de que un individuo fallezca antes de cumplir la edad x y se la denomina función de fallecimiento.

Propiedades

- $F(x)$ es una función monótona no decreciente y continua por la derecha.
- $F(0) = 0$.
- $F(\infty) = 1$ o $F(w) = 1$.

Función de supervivencia

La función $S(x)$ se la denomina de supervivencia y representa la probabilidad de que un inviduo sobreviva hasta cumplir la edad x.

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \tag{2.21}$$

Propiedades

- $S(x)$ es una función monótona decreciente y continua por la derecha.
- $S(0) = 1$.
- $S(\infty) = 0$ o $S(w) = 0$.

Vida residual

$T(x)$ es una variable aleatoria denominada vida residual y representa los años que le restan por vivir a una persona que alcanza la edad x. Esta variable se expresa de la siguiente forma:

$$T(x) = X - x, \text{ con } X > x \tag{2.22}$$

y toma valores en el intervalo $[0, w - x]$.

$F_x(t)$ es la función de distribución de la variable $T(x)$ y representa la probabilidad de que un indivuo fallezca dentro de t años, dado que sobrevivió a la edad x.

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P(T(x) \leq t) \\ &= P(X - x \leq t | X > x) \\ &= \frac{P(x < X \leq x + t)}{P(X > x)} \\ &= \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

En este sentido, $S(x)$ representa la probabilidad de que un individuo sobreviva t años, dado que sobrevivió a la edad x.

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 1 - F(x) \\ &= 1 - \frac{F_0(x + t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \\ &= \frac{1 - F_0(x + t)}{1 - F_0(x)} \\ &= \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Notación Actuarial

Para expresar las probabilidades sobre $T(x)$ a partir del *International Actuarial Congress* en 1898, usamos la siguiente notación:

- ${}_tq_x = P(T(x) \leq t) = F_x(t), \ t \geq 0.$
- ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T(x) > t) = S_x(t), \ t \geq 0.$

Si el individuo es recién nacido ($x = 0$), tenemos que:

- ${}_tq_0 = P(X - 0 \leq t) = P(X \leq t) = F_0(t), \ t \geq 0.$
- ${}_tp_0 = P(X - 0 > t) = P(X > t) = S_0(t), \ t \geq 0.$

Por facilidad, si $t = 1$ se omite el prefijo en las penúltimas expresiones: ${}_1p_x = p_x$ y ${}_1q_x = q_x$.

Además, podemos expresar la probabilidad de que un inviduo de x años fallezca dentro de las edades $x + t$ y $x + t + u$, denotada por ${}_{t|u}q_x$.

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} \tag{2.25} $$

Fuerza de mortalidad

Consideramos la probabilidad que una persona fallezca entre las edades x y $x + \Delta_x$, dado que sobrevive a la edad x:

$$ P(x < X \leq x + \Delta_x | X > x) = \frac{F(x + \Delta_x) - F(x)}{1 - F(x)} \tag{2.26} $$

Y si $\Delta_x \to 0$,

$$ P(x < X \leq x + \Delta_x | X > x) \approx \frac{F'(x)\Delta_x}{1 - F(x)} = \frac{f(x)\Delta_x}{1 - F(x)} \tag{2.27} $$

La fuerza de mortalidad, denotada por u_x, es en definitiva una medida de la intensidad de la mortalidad a la edad x y constituye un coeficiente de proporcionalidad entre la probabilidad que una persona fallezca entre las edades x y $x + \Delta_x$, y la duración de ese instante Δ_x.

$$ \begin{aligned} u_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} &= \frac{-S'(x)}{S(x)} \\ &= -\frac{d}{dx}(ln \;\, S(x)) \\ &= -\frac{d}{dx}(ln \;\, l(x)) \end{aligned} \tag{2.28} $$

Con l_x representando el número de personas sobrevivientes a la edad x.

Ahora, escribamos la función de densidad de la variable aleatoria $T(x)$ de la siguiente manera:

$$ \begin{aligned} f_x(t) &= F'_x(t) \\ &= \frac{d}{dt}[1 - S_x(t)] \\ &= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\right] \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{S'(x+t)}{S(x)} \quad (2.29)\\
&= -\frac{S'(x+t)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+t)}{S(x+t)}\\
&= \frac{S(x+t)}{S(x)}\left[-\frac{S'(x+t)}{S(x+t)}\right]\\
&= {}_tp_x u_{x+t}.
\end{aligned}
$$

Teorema 2.3 *La fuerza de mortalidad u_x satisface la propiedad:*

$$
{}_np_x = e^{-\int_x^{x+n} u_x dx} = e^{-\int_0^n u_{x+t} dt} \tag{2.30}
$$

Demostración. De (2.28) sabemos que,

$$
u_x = -\frac{d}{dx}(ln\ \ S(x)) \tag{2.31}
$$

Integrando esta expresión de x a $x+n$ obtenemos,

$$
\begin{aligned}
-\int_x^{x+n} u_x dx &= \int_x^{x+n} d(ln\ \ S(x))\\
&= ln\ \left(\frac{S(x+n)}{S(x)}\right) \quad (2.32)\\
&= ln\ \ {}_np_x
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
{}_np_x = e^{-\int_x^{x+n} u_x dx} \tag{2.33}
$$

□

Hipótesis para edades no enteras

Ahora, analizaremos las funciones de distribución de la mortalidad y la supervivencia asociadas a edades fraccionarias; es decir, analizaremos lo que sucede entre dos edades enteras consecutivas x y $x+1$.

Distribución uniforme de la mortalidad

En esta hipótesis se supone que las defunciones se distribuyen uniformemente a lo largo del año; es decir, l_{x+t} es una medida ponderada de l_x y l_{x+1}.

$$l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1} \tag{2.34}$$

De esta manera la hipótesis de distribución uniforme implica que l_{x+t} se calcula por medio de interpolación lineal entre los valores l_x y l_{x+1}.

Teorema 2.4 *Bajo la hipótesis de distribución uniforme de las defunciones se cumple que:*

i) ${}_tq_x = tq_x$

ii) $l_{x+t} = l_x - td_x$, *con* d_x *representando el número de personas que fallecen entre las edades* x *y* $x+1$.

iii) $u_{x+t} = \frac{q_x}{1-tq_x}$

Demostración. i) ${}_tq_x = tq_x$

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} \\ &= 1 - \frac{(1-t)l_x + tl_{x+1}}{l_x} \\ &= 1 - 1 + t - t\frac{l_{x+1}}{l_x} \\ &= t\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \\ &= tq_x \end{aligned} \tag{2.35}$$

ii) $l_{x+t} = l_x - td_x$, con d_x representando el número de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$.

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_x - t(l_x - l_{x+1}) \\ &= l_x - td_x \end{aligned} \tag{2.36}$$

iii) $u_{x+t} = \frac{q_x}{1-tq_x}$

$$\begin{aligned} u_{x+t} &= \frac{-\frac{d}{dt}l_{x+t}}{l_{x+t}} \\ &= \frac{-\frac{d}{dt}(l_x - td_x)}{l_x - td_x} \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{d}{dt}(l_x - tl_x q_x)}{l_x - tl_x q_x} \\
&= \frac{l_x q_x}{l_x(1 - tq_x)} \\
&= \frac{q_x}{1 - tq_x}
\end{aligned}
$$

Este último literal lo usaremos en la aplicación del seguro como proceso estocástico con el método Runge Kutta.

□

Fuerza de mortalidad constante

Bajo esta hipótesis se supone que la fuerza de mortalidad es constante a lo largo del año entre las edades enteras x y $x+1$; es decir que $u_{x+t} = u_x$ para todo $0 < t < 1$.

Teorema 2.5 *Bajo la hipótesis de fuerza de mortalidad constante se cumple que:*

$$
{}_t q_x = 1 - e^{-u_x t} \tag{2.38}
$$

Demostración. Del teorema 2.3 tenemos que:

$$
p_x = e^{-\int_0^1 u_{x+t} dt} \tag{2.39}
$$

Pero como $u_{x+t} = u_x$,

$$
\begin{aligned}
p_x &= e^{-\int_0^1 u_x dt} \qquad (2.40) \\
&= e^{-u_x} \quad \text{o} \quad u_x = -ln\,(p_x)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
q_x = 1 - e^{-u_x} \tag{2.41}
$$

Finalmente, para $t \in [0, 1]$,

$$
{}_t q_x = 1 - e^{-u_x t} \tag{2.42}
$$

□

2.1.4. Seguros de vida

Un seguro de vida es un contrato cuya función es proteger a los individuos frente al riesgo de fallecimiento.

Los modelos para la tarificación de los seguros dependen únicamente del momento del fallecimiento, es decir, el modelo considerado dependerá de la variable aleatotia *vida residual* $T(x) = T_x$.

Utilizaremos las siguientes notaciones, provenientes de las matemáticas financieras:

- i : tipo de interés efectivo anual.
- $\delta = ln(1+i) =$ tipo de interés instantáneo.
- $v = \frac{1}{1+i} =$ factor de descuento financiero. Es claro que, $v = e^{-\delta}$.

Seguro de vida temporal

En este caso, la asguradora garantiza el pago de un capital sólo si el asegurado fallece dentro de los n años de vigencia del contrato.

Primero, consideraremos el caso continuo, donde el pago de la indemnización se realiza inmediatamete luego del fallecimiento del asegurado. El capital asegurado será igual a una unidad monetaria para facilitar la formulación. Definamos la variable aleatoria "valor actual de la prestación", denotada por Z, como sigue:

$$Z = \begin{cases} v^{T_x} & T_x \leq n, \\ 0 & T_X > n \end{cases} \tag{2.43}$$

La prima pura de la operación, denotada por $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$, constituye la esperanza matemática de la variable aleatoria Z para el caso continuo.

$$\begin{aligned} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= E[Z] \\ &= \int_0^n v^{T_x} f_x \, dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta T_x} f_x \, dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} {}_tp_x \, u_{x+t} \, dt \end{aligned} \tag{2.44}$$

Por otro lado, consideramos el caso discreto, donde el pago de la indemnización no se realiza inmediatamete luego del fallecimiento del asegurado, sino luego del año de fallecimiento. Usaremos la variable aleatoria *vida residual entera*, $K(x) = K_x$, en lugar de T_x. La variable aleatoria Z se define ahora como sigue:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1} & K_x \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{2.45}$$

La prima pura de la operación, denotada por $A^1_{x:\overline{n}|}$, constituye la esperanza matemática de la variable aleatoria Z para el caso discreto.

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &= E[Z] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{K_x+1} P(K_x = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x \, q_{x+k} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Seguro de vida entera

En este caso, la aseguradora garantiza el pago de un capital con independencia del momento de fallecimiento del asegurado.

De igual manera que en el seguro de vida temporal, consideremos el caso continuo; donde el pago de la indemnización se lo realiza inmediatamente luego del fallecimiento del asegurado. El capital asegurado será igual a una unidad monetaria para facilitar la formulación. Así, definimos la variable aleatoria Z como sigue:

$$Z = v^{T_x}, \;\; T_x \geq 0 \tag{2.47}$$

La prima pura de la operación, denotada por $\bar{A}_x$, constituye la esperanza matemática de la variable aleatoria Z para el caso continuo.

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^{\infty} e^{\delta t} {}_tp_x \; u_{x+t} \; dt \tag{2.48}$$

Por otro lado, consideramos el caso discreto, donde el pago de la indemnización no se realiza inmediatamente luego del fallecimiento del asegurado, sino luego del año de fallecimiento. La variable aleatoria Z se define ahora como sigue:

$$Z = v^{K_x+1}, \;\; K_x \in \{0, 1, \cdots, w\} \tag{2.49}$$

La prima pura de la operación, denotada por A_x, constituye la esperanza matemática de la variable aleatoria Z para el caso discreto.

$$A_x = E[Z] = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1} {}_kp_x \; q_{x+k} \tag{2.50}$$

2.1.5. Rentas actuariales

Las rentas actuariales son un tipo de seguro que garantiza una serie de pagos periódicos al asegurado mientras permanezca vivo.

Explicaremos a continuación las *rentas actuariales temporales, constantes e inmediatas*; las mismas que son una serie de pagos con cuantías constantes C, en donde el vencimiento de las cuantías correrá a partir del primer período y cada período será de un año hasta la muerte del asegurado.

Renta actuarial temporal constante inmediata pospagable

El pago de la cuantía unitaria se lo realiza al final de cada uno de los siguientes n años, mientras viva el asegurado.

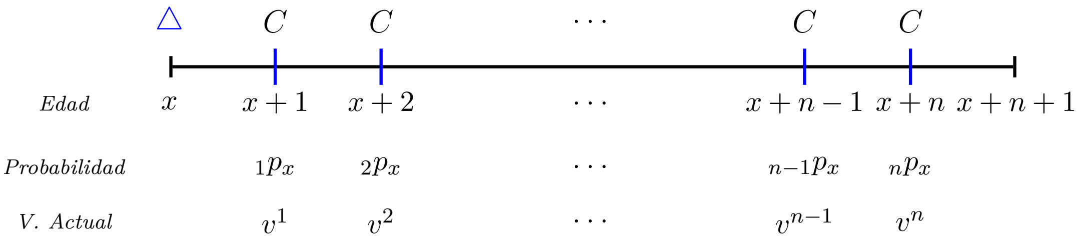

Figura 2.4: Renta actuarial temporal constante inmediata pospagable

La prima pura de esta operación se denota por $a_{x:\overline{n}|}$ y la expresamos como sigue:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} v^k \ {}_kp_x \tag{2.51}$$

Renta actuarial temporal constante inmediata prepagable

El pago de la cuantía unitaria se lo realiza al inicio de cada uno de los siguientes n años, mientras viva el asegurado.

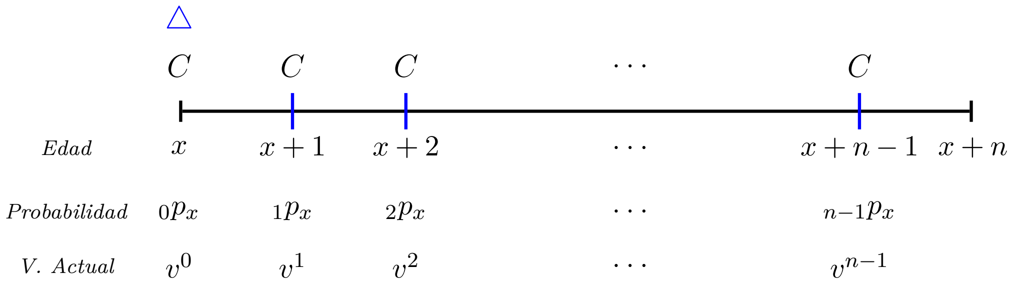

Figura 2.5: Renta actuarial temporal constante inmediata prepagable

La prima pura de esta operación se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y la expresamos como sigue:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x \tag{2.52}$$

2.2. Fundamentos de Álgebra Lineal

Valores y vectores propios

Los valores y vectores propios son usados en un sin número de aplicaciones relacionadas con: aerodinámica, física nuclear, reconocimiento facial, biología, ecuaciones diferenciales, etc. En esta sección explicaremos ciertos conceptos básicos relacionados a este tópico y la manera en cómo calcularlos.

Definición 2.6 *Sea A una matriz de $n \times n$. El número real λ es un valor propio (también conocidos como valores característicos, autovalores o incluso eigenvalores) de A si existe un vector distinto de cero en $\mathbb{R}^n$ tal que:*

$$Ax = \lambda x \tag{2.53}$$

Todo vector x distinto de cero que satisfaga la ecuación anterior es un vector propio de A, asociado con el valor propio λ.

Observación: Notemos que el problema consiste en encontrar vectores x, tales que x y Ax sean paralelos.

Ejemplo 2.7 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De modo que,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Por otro lado,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. La figura 2.6 muestra el hecho de que x es un vector propio de A y, por lo tanto, x y Ax son paralelos.

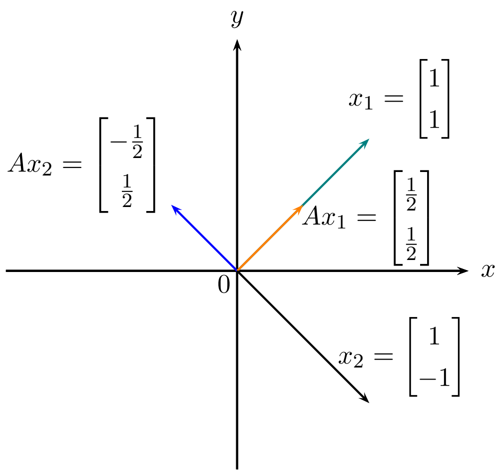

Figura 2.6: Vectores propios

Anteriormente encontramos los valores y los vectores propios asociados a una matriz por medio de simple inspección y maniobras algebraicas muy sencillas. Ahora, detallaremos el método sistemático que se usa para cuantificarlos; sin antes, especificar un corolario que nos ayudará en esta tarea.

Corolario 2.8 *Si A es una matriz de $n \times n$, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución no trivial si y sólo si $det(A) = 0$.*

Notemos que la ecuación $Ax = \lambda x$ puede verse como $(A - \lambda I)x = 0$. Por tanto, tomando en cuenta el corolario anterior, podemos afirmar que el sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$ tiene una solución no trivial si y sólo si $det(A - \lambda I) = 0$. Así, podemos encontrar las soluciones asociadas a este sistema, que en definitiva es lo que intentamos hallar.

Método sistemático para el cálculo de valores y vectores propios

1. Encontrar el polinomio característico $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$.
2. Se encuentran las raíces $\lambda_1, ..., \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$.
3. Para cada valor propio λ_i con $i = 1, .., m$ se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)v = 0$.

Ejemplo 2.9 *Sea*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Buscamos encontrar los valores propios de A y sus vectores propios asociados. Por consiguiente, vamos a determinar todos los números reales λ y todos los vectores no nulos x:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tales que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a encontrar el polinomio característico $p(\lambda)$ y sus raíces:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-4)+2 = 0 \end{aligned}$$

o,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

Por ende,

$$\lambda_1 = 2 \ \ y \ \ \lambda_2 = 3 \tag{2.54}$$

son los valores propios de A.

Finalmente, debemos encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio formando el sistema $(A - \lambda_i I)v = 0$ para $i = 1, 2$ y $v \in \mathbb{R}^2$, no nulo.

Con $\lambda_1 = 2$,

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Todas las soluciones de este sistema están dadas por:

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 \\ x_2 = r, \ con \ r \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Por tanto, todo los vectores asociados con $\lambda_1 = 2$ están dados por $\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$, con r es cualquier número real distinto de cero. En particular,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$.

Análogamente, con $\lambda_2 = 3$,

$$\begin{aligned}(A - \lambda_2 I)v &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

o,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Todas las soluciones de este sistema están dadas por:

$$\begin{gathered} x_1 = \tfrac{1}{2}x_2 \\ x_2 = r, \text{ con } r \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Por tanto, todo los vectores asociados con $\lambda_1 = 2$ están dados por $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix}$, con r es cualquier número real distinto de cero. En particular,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$.

2.3. Método de Runge Kutta

En nuestro estudio, nos será de mucha ayuda resolver una ecuación diferencial ordinaria que satisface una condición inicial dada. Las ecuaciones diferenciales ordinarias nos permiten modelar fenómenos que involucran el cambio de una variable respecto de otra.

En varias ocasiones, es muy complicado resolver estas ecuaciones de manera exacta. Los métodos analíticos están sujetos a particularidades y formas que deben adoptar las ecuaciones para ser resueltas. Es por ello que se recurre a los métodos numéricos, pues no presentan estas limitaciones.

Los métodos de Runge Kutta son un conjunto de métodos iterativos que se usan par aproximar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.3.1. Método de Euler

El más simple de los métodos Runge Kutta es el método de Euler; el cual es poco usado en la práctica, pero se lo usa para ejemplificar las técnicas que utilizan métodos más avanzados.

Dado un problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \quad , x_0 \leq x \leq x_f \end{cases} \tag{2.55}$$

se obtienen aproximaciones de la solución $y(x)$ en varios valores (no de manera continua) del intervalo $[x_0, x_f]$.

Procedimiento

1. Se divide el intervalo $[x_0, x_f]$ en N subintervalos de ancho h. A h se lo denomina tamaño de paso.

$$h = \frac{x_f - x_0}{N} \tag{2.56}$$

2. Se obtiene un conjunto discreto de $N+1$ puntos: $x_0, x_1, ..., x_N$.

$$x_i = x_0 + ih, \text{ para cada } i = 0, 1, ..., N \tag{2.57}$$

$$h = x_{i+1} - x_i \tag{2.58}$$

3. Mediante el polinomio de Taylor se aproxima polinómicamente la función $y(x)$, suponiendo que tiene una derivada continua en $[x_0, x_f]$, de modo que para cada $i = 0, ..., N-1$.

$$y(t_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i)y'(x_i) \tag{2.59}$$

4. Construir $u_i \approx y(x_i)$ para cada $i = 1, ..., N$. Así,

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 \\ u_{i+1} &= u_i + hf(x_i, u_i) \;\text{ para cada }\; i = 0, ..., N-1 \end{aligned} \tag{2.60}$$

2.3.2. Derivación del método Runge Kutta

Mostraremos la obtención del método de Runge Kutta de segundo orden simple. En este caso, el incremento en y es un promedio ponderado de las estimaciones k_1 y k_2 del incremento. Así, para el problema a valor incial (2.55).

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2, \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + c_2 h, y_n + c_2 k_1) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Notemos que el método de Runge Kutta siempre usa la estimación de Euler simple como la primera estimación de Δy, k_1.

El problema principal consiste en en establecer un esquema para elegir los parámetros b_1, b_2, c_2; y para ello haremos que la ecuación (2.61) coincida lo mejor posible con el desarrollo de Taylor.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + ... \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f(x_n, y_n) + ... \end{aligned} \tag{2.62}$$

Para los siguientes desarrollos tomemos en cuenta la siguiente notación:

$$f = f(x, y) \qquad f_x = \frac{df(x,y)}{dx} \qquad f_{xx} = \frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} \qquad f_{xy} = \frac{d^2 f(x,y)}{dxdy}$$

Como $df/dx = f_x + f_y\, dy/dx = f_x + f_y f$, la ecuación anterior puede expresarse como

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + h^2 \left(\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} f_y f \right)_n \tag{2.63}$$

Donde todas las derivadas de la ecuación (2.63) se calculan en el punto (x_n, y_n). Ahora, volvemos a escribir la ecuación (2.61) sustituyendo las estimaciones k_1 y k_2:

$$y_{n+1} = y_n + b_1 h f(x_n, y_n) + b_2 h f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h f(x_n, y_n)) \tag{2.64}$$

Para que el último término de la ecuación (2.64) sea comparable con el de la ecuación (2.63), se desarrolla en serie de Taylor en términos de x_n y y_n, reteniendo sólo los términos de la primera derivada:

$$\begin{aligned} f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h f(x_n, y_n)) &= f(x_n, y_n) + c_2 h \left(\frac{df(x_n, y_n)}{dx} + \frac{df(x_n, y_n)}{dy} f(x_n, y_n) \right) \\ &= (f + c_2 h f_x + c_2 h f_y f)_n \end{aligned} \tag{2.65}$$

Al sustituir la ecuación (2.65) en la ecuación (2.64), tenemos

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + b_1 h f(x_n, y_n) + b_2 h \left(f + c_2 h f_x + c_2 h f_y f\right)_n \\ &= y_n + (b_1 + b_2) h f_n + h^2 (c_2 b_2 f_x + c_2 b_2 f f_y)_n \end{aligned} \tag{2.66}$$

La ecuación anterior se asemeja a la ecuación (2.63) si

$$b_1 + b_2 = 1, \quad c_2 b_2 = \frac{1}{2} \tag{2.67}$$

Formando así un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que pueden elegirse de manera arbitraria. Por ejemplo, tomando $b_1 = \frac{2}{3}$, las otras variables son $b_2 = \frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{3}{2}$. Con otras opciones se tienen otros conjuntos de parámetros que coinciden con el desarrollo en serie de Taylor.

Runge Kutta de cuarto orden

Los métodos de Runge Kutta de cuarto orden se deducen de una manera similar a la expuesta para el caso de segundo orden y está determinado por las fórmulas siguientes.

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
k_1 &= hf(x_n, y_n), \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3)
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Ejemplo 2.10 *[9] Resolver por un método de Runge Kutta de cuarto orden el problema de valor inicial:*

$$
\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 - 3y \\ \quad y(0) = 1 \qquad , \ 0 \le x \le 0{,}4 \ , \ h = 0{,}1. \end{cases}
$$

y comparar las aproximaciones con los valores exactos dados por

$$
y(x) = \frac{25}{27} \exp -3x + \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)
$$

Tenemos que $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $f(x, y) = x^2 - 3y$.

Para x_1, la ordenada correspondiente será:

$$
y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
$$

con,

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = 0^2 - 3 \times 1 = -3 \\
k_2 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = (0 + \frac{0{,}1}{2})^2 - 3(1 + \frac{0{,}1}{2}(-3)) = -2{,}5475 \\
k_3 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = (0 + \frac{0{,}1}{2})^2 - 3(1 + \frac{0{,}1}{2}(-2{,}5475)) = -2{,}6154 \\
k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3) = (0 + 0{,}1)^2 - 3(1 + 0{,}1(-2{,}61538)) = -2{,}2054
\end{aligned}
$$

Obteniendo $y_1 = 0{,}741148$.

De manera análoga se determinan los puntos:

$$
(x_2, y_2) = (0{,}2; 0{,}551151) \quad (x_3, y_3) = (0{,}3; 0{,}413894) \quad (x_4, y_4) = (0{,}4; 0{,}317435)
$$

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	1	1	0.000000
0.1	0.741148	0.741127	0.000021
0.2	0.551151	0.551121	0.00003
0.3	0.413894	0.413860	0.000034
0.4	0.317435	0.317402	0.000033

Cuadro 2.1: Método Runge Kutta de orden 4

Para nuestra investigación, usaremos el método de Runge Kutta de cuarto orden aplicado a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Runge Kutta de cuarto orden para un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x,y) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = g(t,x,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.69}$$

La solución del mismo está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y) \\ k_1 &= hf(t,x,y) \\ k_2 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{k_1}{2}, y + \frac{l_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{k_2}{2}, y + \frac{l_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t+h, x+k_3, y+l_3) \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y) \\ l_1 &= hg(t,x,y) \\ l_2 &= hg\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{k_1}{2}, y + \frac{l_1}{2}\right) \\ l_3 &= hg\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{k_2}{2}, y + \frac{l_2}{2}\right) \\ l_4 &= hg(t+h, x+k_3, y+l_3) \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.73}$$

Observación: A partir del valor de x en el instante t, se determina el valor de x en el instante $t+h$, y a partir del valor de y en el instante t se determina el valor de y en el instante $t+h$ mediante las fórmulas (2.71) y (2.73).

2.4. Procesos Estocásticos

Los procesos estocásticos son fenómenos aleatorios que no se pueden predecir; es decir, que se mueven a través del azar. En este sentido, nos será de mucha importancia para este trabajo conocer ciertos detalles de este tema para abordar, sin ningún inconveniente, su enfoque en las ciencias actuariales.

Definición 2.11 *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ indexadas por T, llamado espacio parametral, en donde las variables aleatorias toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Observación

- *Si $T = \mathbb{N}$, se dice que el proceso es discreto.*

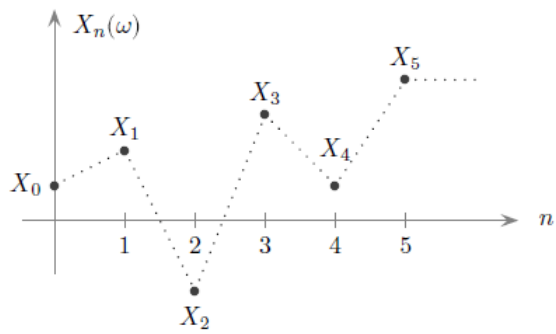

Figura 2.7: Proceso estocástico discreto [17]

- *Si $T = [0, \infty)$, se dice que el proceso es continuo.*

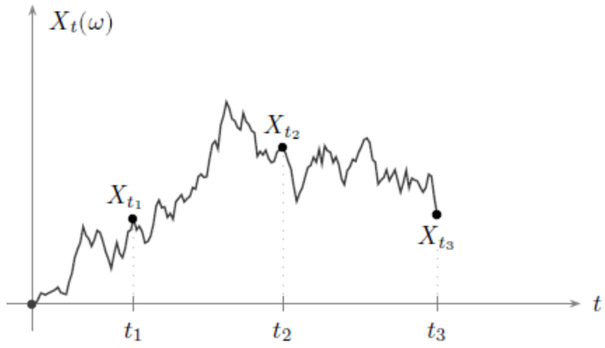

Figura 2.8: Proceso estocástico continuo [17]

- *Considerando que S es un subconjunto de $\mathbb{R}$, tomaremos la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ restringida a S ($S \cap \mathcal{B}$).*

Procesos de Markov

Son procesos donde suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta propiedad es conocida como propiedad de Markov y se expresa de la siguiente manera:

Para cualesquiera estados $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro):

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}/X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n) \tag{2.74}$$

Observación: De esta forma la probabilidad del evento futuro $(X_{n+1} = x_{n+1})$ sólo depende del evento $(X_n = x_n)$, mientras que la información correspondiente al evento pasado $(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1})$ es irrelevante.

2.4.1. Cadenas de Markov

La cadenas de Markov fueron introducidas por el matemático ruso Andrey Markov alrededor de 1905. El éxito del modelo propuesto por Markov radica en su complejidad y simplicidad. Complejidad debido a que es lo suficientemente complicado para describir ciertas características no triviales de ciertos sistemas; y simplicidad por su maniobrabilidad y sencillez en el análisis matemático. [17]

Cadena de Markov a tiempo discreto

Es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, ...\}$, con espacio de estados discreto y que cumple con la propiedad de Markov. Es decir que, para cualquier entero

$n \geq 0$, y que para cualesquiera estados $x_0, ..., x_{n+1}$ se cumple que:

$$p(x_{n+1}/x_0, ..., x_n) = p(x_{n+1}/x_n) \tag{2.75}$$

Dado que,

- $P(X_n = x_n)$ se lo escribe como $p(x_n)$.
- $P(X_{n+1} = x_{x+1}/X_n = x_n)$se lo escribe como $p(x_{x+1}/x_n)$, análogamente como en el literal anterior.

Si al tiempo $n+1$ se le considera como un tiempo futuro, al tiempo n como el presente y a los tiempos $0, 1, ..., n-1$ como el pasado, entonces la condición (2.75) establece que la distribución de probabilidad del estado del proceso al tiempo futuro $n+1$ depende únicamente del estado del proceso al tiempo n, y no depende de los estados en los tiempos pasados $0, 1, ..., n-1$.

Probabilidades de transición

Sean i y j dos estados de una Cadena de Markov. A la probabilidad:

$$P(X_{n+1} = j/X_n = i) \tag{2.76}$$

se la denota por $p_{ij}(n, n+1)$ y representa la probabilidad de transición del estado i en el tiempo n al estado j en el tiempo $n+1$. A estas probabilidades se las conoce como probabilidades de transición a un paso.

Observación: Cuando los números $p_{ij}(n, n+1)$ no dependen de n se dice que la cadena es estacionaria u homogénea en el tiempo. Por simplicidad se asume tal situación, de modo que las probabilidades de transición a un paso se escriben como p_{ij}.

Matriz de probabilidades de transición

Variando los índices i y j, por ejemplo, sobre el conjunto de estados $\{0, 1, 2, ...\}$ se obtiene la matriz de probabilidades de transición a 1 paso:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

La entrada (i, j) de la matriz P es la probabilidad de transición p_{ij}, es decir, la probabilidad de pasar del estado i al estado j en una unidad de tiempo.

La matriz $P = (p_{ij})$ cumple con las siguientes propiedades:

a) $p_{ij} \geq 0$.

b) $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Ejemplo 2.12 *(Cadena de racha de éxitos)*

Sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de ensayos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p, y probabilidad de fracaso $q = 1 - p$. Definamos,

X_n : el número de éxitos consecutivos anteriores al tiempo n, incluyendo el tiempo n.

Se dice que una racha de éxitos de longitud r ocurre al tiempo n si en el ensayo $n - r$ se obtiene un fracaso y los resultados de los ensayos $n - r + 1$ al n son todos éxitos. Gráficamente, esta situación se ilustra de la siguiente manera:

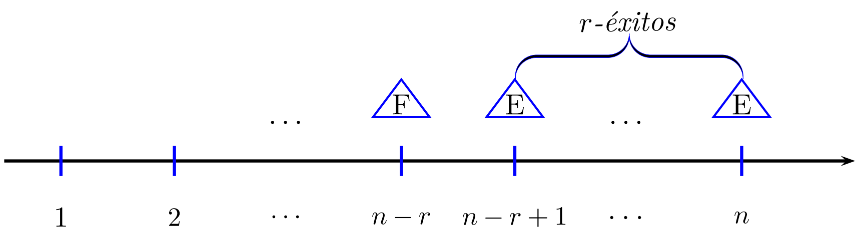

Figura 2.9: Ejemplo de una cadena de Markov a tiempo discreto

La colección de variables aleatorias $\{X_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto con espacio de estados $\{0, 1, \ldots\}$. Las probabilidades de transición y la matriz correspondiente se muestran a continuación:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1 \\ q, & \text{si } j = 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ahora bien, cuando los números $p_{ij}(n, n+1)$ dependen de n; es decir que, las probabilidades de transición no son las mismas sobre intervalos sucesivos, se define p_k^{ij}, para $k = 0, 1, \ldots$, como la probabilidad de que un proceso en el estado i al tiempo k, esté en el estado j al tiempo $k + 1$. En este caso de no homogeneidad del proceso, existirán diferentes matrices de transición P_k sobre el $(k + 1)$-ésimo intervalo de tiempo.

Por tanto, el siguiente paso es introducir la probabilidad a múltiples pasos; la cual es la probabilidad condicional que el proceso esté en el estado j al tiempo $n+r$, dado que estuvo en i al tiempo n.

$$ {}_{r}p_{n}^{ij} = P(Y_{n+r} = j / Y_n = i) \tag{2.78}$$

Cadena de Markov a tiempo continuo

Un proceso de Markov a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ cumple con los siguientes postulados:

a) El espacio de estados es el conjunto discreto $S = \{i_1, i_2, i_3, ...\}$.

b) El tiempo de estancia asociado al estado i es la variable aleatoria T_i.

c) Los momentos en donde el proceso tiene saltos son los tiempos $\omega_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$ para todo $n \geq 1$.

De esta manera, el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$X_t = \begin{cases} i_1 & t \in [0, \omega_1], \\ i_2 & t \in [\omega_1, \omega_2], \\ i_3 & t \in [\omega_2, \omega_3], \\ \vdots & \end{cases} \tag{2.79}$$

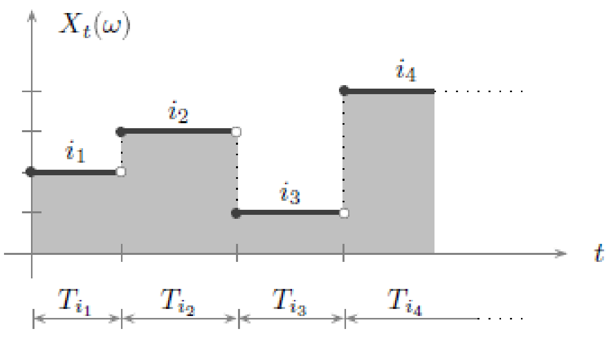

Figura 2.10: Cadena de Markov a tiempo continuo [17]

Probabilidad de salto

Se denota por p_{ij} a la probabilidad de que la cadena pase del estado i al estado j al efectuar un salto.

Las probabilidades de salto cumplen con las siguientes condiciones:

a) $p_{ij} \geq 0$.

b) $p_{ii} = 0$.

c) $\sum_j^{\infty} p_{ij} = 1$.

En forma de matriz, las probabilidades de salto constituyen una matriz estocástica de la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & 0 & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

Ejemplo 2.13 *Un ejemplo de una cadena de Markov a tiempo continuo es el proceso de Poisson $\{X_t, t \geq 0\}$ con parámetro λ, el cual cumple con las siguientes propiedades:*

- *Tiene incrementos independientes y estacionarios.*
- *Para todo $s, t \geq 0$ y $0 \leq i \leq j$, las probabilidades de transición son:*

$$P(X_{t+s} = j / X_s = i) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{(j-i)}}{(j-i)!}$$

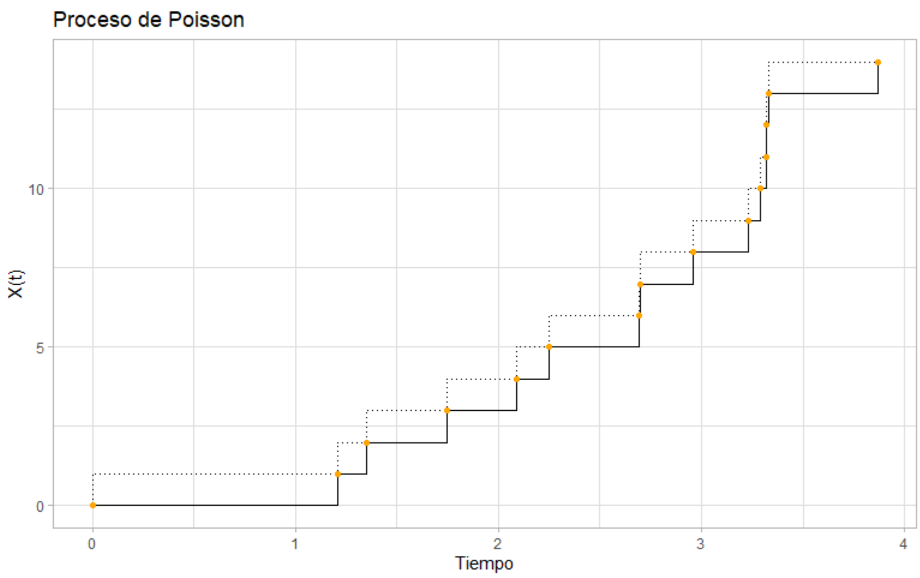

Figura 2.11: Ejemplo de una cadena de Markov a tiempo continuo

Análogamente como en el caso discreto, la probabilidad condicional de que el proceso no homogéneo esté en el estado j al tiempo $t+r$, dado que está en el estado i al tiempo t es

$$ {}_{r}p_t^{ij} = P(Y_{t+r} = j / Y_t = i) \tag{2.81} $$

2.4.2. La ecuación diferencial de Kolmogorov

La ecuación de Chapman-Kolmogorov para el caso discreto nos permite expresar la probabilidad de transición ${}_{n}p^{ij}$ como una suma de probabilidades de las trayectorias que van de i a j y que atraviesan por un estado k cualquiera.

Proposición 2.14 *Para cualquier entero r y n tales que $0 \leq r \leq n$ y para cualesquiera estados i y j se cumple:*

$$ {}_{n}p^{ij} = \sum_k {}_{r}p^{ik}\,{}_{n-r}p^{kj} \tag{2.82} $$

Demostración. Por el teorema de probabilidad total y la propiedad de Markov,

$$ \begin{aligned} {}_{n}p^{ij} &= P(X_n = j / X_0 = i) \\ &= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k \frac{P(X_n = j / X_r = k, X_0 = i) P(X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k P(X_n = j / X_r = k) \frac{P(X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k P(X_n = j / X_r = k) P(X_r = k / X_0 = i) \\ &= \sum_k {}_{n-r}p^{kj}\,{}_{r}p^{ik} \end{aligned} \tag{2.83} $$

□

Luego, para el cálculo de las probabilidades de transición, es necesario plantear la ecuación diferencial de Kolmogorov; pero antes de ello es necesario conocer ciertas definiciones y suposiciones.

Supuesto 2.1 *Asumimos que para cualquier estado i y j, y cualesquiera tiempos t y $t+s$ donde $s \geq 0$ la probabilidad condicional $P(X_{t+s} = j / X_t = i)$ está bien definida en el sentido de que su valor no depende de ninguna información antes del tiempo t.*

Intuitivamente, esto significa que las probabilidades de eventos futuros son completamente determinadas por los actuales estados del proceso. Recordamos que esta propiedad de que las probabilidades de eventos futuros dependen del presente pero no del pasado, es conocida como la propiedad de Markov.

Supuesto 2.2 *Asumimos que para cualquier intervalo positivo de tiempo h,*

$$P[\textit{Dos o más transiciones durante un período de tiempo de tamaño } h] = o(h). \tag{2.84}$$

Recordemos que para cualquier función de h, por ejemplo $f(h)$, se dice que es $o(h)$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \tag{2.85}$$

Intuitivamente, la función converge a cero más rápido que h.

Notación Para estados i y j en un modelo de estados múltiples y para $x, t \geq 0$, definimos

$$ {}_tp_x^{ij} = P(Y_{x+t} = j / Y_x = i) \tag{2.86}$$

$$ {}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}} = P(Y_{x+s} = i \quad \text{para toda} \quad s \in [0, t] / Y_x = i) \tag{2.87}$$

- ${}_tp_x^{ij}$ es la probabilidad de que una persona que está con vida a la edad x en el estado i este en el estado j a la edad $x + t$, donde j puede ser igual a i.
- ${}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}}$ es la probabilidad de que una persona de edad x que está en el estado i continue en el estado i durante todo el período de tiempo de las edades x a la $x + t$.

Definición 2.15 *Para $i \neq j$ definimos la fuerza de transición entre los estados i y j a la edad x.*

$$u_x^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h} \tag{2.88}$$

Supuesto 2.3 *Para todos los estados i y j, y para cualquier edad $x \geq 0$, nosotros asumimos que ${}_tp_x^{ij}$ es una función diferenciable de t.*

El supuesto 2.3 es una hipótesis necesaria que asegura que el proceso matemático posterior fluya.

Otra forma de expresar la fuerza de transición es

$$
{}_hp_x^{ij} = hu_x^{ij} + o(h) \tag{2.89}
$$

De esta, podemos decir que para pequeños valores positivos de h

$$
{}_hp_x^{ij} \approx hu_x^{ij}. \tag{2.90}
$$

Observación 2.16 *Podemos ver que ${}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}}$ es la probabilidad de que el individuo no deje el estado i entre las edades x y $x+t$, mientras que ${}_tp_x^{ii}$ es la probabilidad de que el individuo esté en el estado i a la edad $x+t$, en ambos casos dado que está en el estado i a la edad x. La importante diferencia entre las mismas es que ${}_tp_x^{ii}$ incluye la posibilidad de que el proceso deje el estado i entre las edades x y $x+t$, previsto que vuelva al estado i a la edad $x+t$.*

$$
{}_tp_x^{ii} = {}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}} + o(t) \tag{2.91}
$$

Lo que da origen a nuestra siguiente desigualdad,

$$
{}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}} \leq {}_tp_x^{ii} \tag{2.92}
$$

Observación 2.17 *Notemos también que $1 - {}_hp_x^{\bar{i}\bar{i}}$ es la probabilidad de que la persona deje el estado i en algún momento entre las edades x y $x+h$, con la posibilidad de regresar*

$$
\begin{aligned}
1 - {}_hp_x^{\bar{i}\bar{i}} &= \sum_{j=0, j\neq i}^{n} {}_hp_x^{ij} \\
&= h \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_x^{ij} + o(h) \\
{}_hp_x^{\bar{i}\bar{i}} &= 1 - h \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_x^{ij} + o(h)
\end{aligned} \tag{2.93}
$$

La probabilidad ${}_{t+h}p_x^{\bar{i}\bar{i}}$ la podemos expresar a través de una multiplicación como sigue:

$$
\begin{aligned}
{}_{t+h}p_x^{\bar{i}\bar{i}} &= {}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}} \cdot {}_hp_{x+t}^{\bar{i}\bar{i}} \\
&= {}_tp_x^{\bar{i}\bar{i}} \left(1 - h \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+t}^{ij} + o(h)\right)
\end{aligned} \tag{2.94}
$$

$$= {}_tp_x^{\overline{ii}} - h\,{}_tp_x^{\overline{ii}} \left(\sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+t}^{ij} + o(h) \right)$$

Reordenando la ecuación previa obtenemos,

$$\frac{{}_{t+h}p_x^{\overline{ii}} - {}_tp_x^{\overline{ii}}}{h} = -{}_tp_x^{\overline{ii}} \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+t}^{ij} + \frac{o(h)}{h}, \tag{2.95}$$

Y dejando que $h \to 0$ tenemos,

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{\overline{ii}} = -{}_tp_x^{\overline{ii}} \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+t}^{ij} \tag{2.96}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt} log({}_tp_x^{\overline{ii}}) = -\sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+t}^{ij} \tag{2.97}$$

Integrando la ecuación (2.97) sobre el intervalo $(0, t)$ nos da,

$$log({}_tp_x^{\overline{ii}}) - log({}_0p_x^{\overline{ii}}) = -\int_0^t \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+r}^{ij}\, dr \tag{2.98}$$

Entonces, al exponenciar ambos lados la ecuación (2.98), logramos la expresión deseada,

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{\overline{ii}} &= \cancelto{1}{{}_0p_x^{\overline{ii}}}\, exp \left(-\int_0^t \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+s}^{ij}\, ds \right) \\ {}_tp_x^{\overline{ii}} &= exp \left(-\int_0^t \sum_{j=0, j\neq i}^{n} u_{x+s}^{ij}\, ds \right). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Con lo que conseguimos una expresión para la probabilidad de no dejar el estado i en términos de las fuerzas de transición entre los estados i y j, con $i \neq j$.

Teorema 2.18 *Sean i y j dos estados no necesariamente distintos en un modelo multiestado con $n+1$ estados posibles. Para $x, t \geq 0$*

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{ij} = \sum_{k=0, k\neq j}^{n+1} ({}_tp_x^{ik}\, u_{x+t}^{kj}) - {}_tp_x^{ij} \sum_{k=0, k\neq j}^{n+1} u_{x+t}^{jk}\,. \tag{2.100}$$

Donde, $u_x^{ij} = \lim_{h\to 0^+} \frac{{}_hp_x^{ij}}{h}$ es la fuerza de transición de i a j en un pequeño instante de tiempo.

Demostración.

$$\begin{aligned}
{}_{t+h}p_x^{ij} &= {}_tp_x^{ij}\,{}_hp_{x+t}^{jj} + \sum_{k=0,k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}\,{}_hp_{x+t}^{kj} \\
&= {}_tp_x^{ij}\left(1 - h\sum_{k=0,k\neq j}^{n} u_{x+t}^{jk} - O(h)\right) + h\sum_{k=0,k\neq j}^{n} {}_tp_x^{ik}u_{x+t}^{kj} + O(h) \qquad (2.101)\\
&= {}_tp_x^{ij} - h\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left({}_tp_x^{ij}u_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}u_{x+t}^{kj}\right) + O(h)
\end{aligned}$$

Luego, ordenemos los términos de la ecuación anterior,

$$\frac{1}{h}\left({}_{t+h}p_x^{ij} - {}_tp_x^{ij}\right) = -\sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left({}_tp_x^{ij}u_{x+t}^{jk} - {}_tp_x^{ik}u_{x+t}^{kj}\right) + \frac{O(h)}{h} \qquad (2.102)$$

Cuando $h \to 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{ij} &= \sum_{k=0,k\neq j}^{n}\left({}_tp_x^{ik}\ u_{x+t}^{kj} - {}_tp_x^{ij}\ u_{x+t}^{jk}\right) \\
&= \sum_{k=0,k\neq j}^{n+1}\left({}_tp_x^{ik}\ u_{x+t}^{kj}\right) - {}_tp_x^{ij}\sum_{k=0,k\neq j}^{n+1} u_{x+t}^{jk}\,. \qquad (2.103)
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Marco Metodológico

En esta sección introduciremos la normativa legal de la seguridad social ecuatoriana para establecer los lineamientos que poseerá nuestro seguro. Finalmente, usaremos la ecuación diferencial de Kolmogorov para plantear un sistema de ecuaciones que representará nuestro modelo de tarificación basado en tres estados (Saludable, Incapacitado y Fallece).

3.1. Lineamientos del seguro

"El sistema de salud de Ecuador está compuesto por dos sectores, público y privado. El sector público comprende al Ministerio de Salud Pública (MSP), el Ministerio de Inclusión Económica y Social (MIES), los servicios de salud de las municipalidades y las instituciones de seguridad social (IESS, ISSFA e ISSPOL). El MSP ofrece servicios de atención de salud a toda la población. El MIES y las municipalidades cuentan con programas y establecimientos de salud en los que también brindan atención a la población no asegurada. Las instituciones de seguridad social cubren a la población asalariada afiliada. El sector privado comprende entidades con fines de lucro (hospitales, clínicas, dispensarios, consultorios, farmacias y empresas de medicina prepagada) y organizaciones no lucrativas de la sociedad civil y de servicio social. Los seguros privados y empresas de medicina prepagada cubren aproximadamente a 3 % de la población perteneciente a estratos de ingresos medios y altos. Además, existen cerca de 10 000 consultorios médicos particulares, en general dotados de infraestructura y tecnología elementales, ubicados en las principales ciudades y en los que la población suele hacer pagos directos de bolsillo en el momento de recibir la atención." [19]

Las instituciones mencionadas en el párrafo anterior son las encargadas de ofrecer a los ciudadanos ecuatorianos coberturas en caso de darse alguna enfermedad o accidente que los imposibilite física o mentalmente; o en el caso más extremo, la muerte.

La razón fundamental por la cual queremos proponer un seguro accesible y complementario al ofrecido por el IESS es debido a que, como exhibió Ruth Lucio en su artículo, sólo una pequeña parte de la población tiene acceso a una cobertura otorgada por instituciones privadas.

Recordemos que según el artículo 7 de la Ley Orgánica de Discapacidades: "Se entiende por persona con deficiencia o condición discapacitante a toda aquella que, presente disminución o supresión temporal de alguna de sus capacidades físicas, sensoriales o intelectuales (...) limitando el desempeño de sus capacidades; (...)" [1]. Esta Ley ampara a las personas con discapacidad ecuatorianas o extranjeras que se encuentren en el territorio ecuatoriano; así como, a las y los ecuatorianos en el exterior; sus parientes dentro del cuarto grado de consanguinidad y segundo de afinidad, su cónyuge, pareja en unión de hecho y/o representante legal y las personas jurídicas públicas, semipúblicas y privadas sin fines de lucro, dedicadas a la atención, protección y cuidado de las personas con discapacidad. La misma busca la prevención, detección oportuna, habilitación y rehabilitación de la discapacidad [1].

El artículo 17 de la Ley de Seguridad Social del 2018 dice que "El IESS tiene la misión de proteger a la población urbana y rural con relación de dependencia laboral o sin ella, contra las contingencias de enfermedad, maternidad, riesgos del trabajo, discapacidad, cesantía, invalidez, vejez y muerte (...)" [5].

De esta manera, si una persona se incapacita laboralmente; significa que, según la normativa C.D. IESS 553 del 2017, está en una situación de enfermedad común o general que le impide de manera transitoria o definitiva, realizar actividades profesionales u ocupacionales. Cuando una persona se incapacita por una enfermedad pasajera; puede solicitar un subsidio transitorio por enfermedad, cuya cobertura es de hasta 6 meses [3].

Subsidio transitorio por enfermedad (según la Ley de Seguridad Social del 2018)

Requisitos

1. Tener un certificado médico de reposo, (registrarlo en la Unidad Médica el IESS donde realice el trámite).

2. Tener 6 meses de aportación continua, anteriores al inicio de la enfermedad.

Beneficios

1. Asistencia médica, quirúrgica, farmacéutica y de rehabilitación, con sujeción a los protocolos de diagnóstico y terapéutica elaborados por los especialistas médicos del IESS y aprobados por la administradora de este Seguro; y

2. Un subsidio monetario de duración transitoria (75 % promedio de tres últimos sueldos), cuando la enfermedad produzca incapacidad en el trabajo. Los familiares del afiliado no tendrán derecho al subsidio.

Además, se pagará desde el cuarto día de incapacidad producida por enfermedad no profesional hasta un máximo de 185 días (6 meses).

Nota: En el caso de que la enfermedad o incapacidad persista por más de 6 meses, el asegurado puede solicitar: el subsidio transitorio por incapacidad o la jubilación por invalidez.

En este sentido, la normativa C.D. IESS 553 del 2017 establece los requisitos y dictamina el subsidio transitorio por incapacidad y la jubilación por invalidez. El médico calificador de la incapacidad (MCI) y la Sala del Comité Nacional Valuador, a través de la historia clínica del solicitante, son los encargados de determinar una de las tres resoluciones, siempre y cuando el afiliado reúna los requisitos contemplados en la Ley de Seguridad Social, siguiendo el orden de prelación:

a. Readaptación el puesto de trabajo.

b. Concesión de subsidio transitorio por incapacidad.

c. Determinación de la jubilación por invalidez.

Caso a (Readaptación): Se notifica al empleador para que realice su adaptación al puesto de trabajo.

Caso b (Subsidio transitorio por incapacidad)

Requisitos (según la Ley de Seguridad Social del 2018)

1. El asegurado registre no menos de 60 imposiciones mensuales, de las cuales no menos de 6 deberán ser inmediatamente anteriores a la incapacidad.

2. La contingencia haya afectado a la actividad principal que priva al asegurado de la obtención de la mayor parte del ingreso necesario para el sustento.

3. Se haya verificado que el asegurado interrumpió el desempeño de su labor o debió concluir la relación laboral que cumplía.

4. La incapacidad no esté amparada por el Seguro General de Riesgos del Trabajo.

Beneficios (según la Ley de Seguridad Social del 2018 y la normativa C.D. 553 del 2017)

La cuantía del subsidio dependerá del grado de incapacidad laboral remanente, de la remuneración imponible y de la edad del afiliado. De exceder por 6 meses el período de incapacidad, El IESS cancelará al beneficiario el subsidio transitorio por incapacidad sobre el 100 % del valor de la pensión que reciba y el empleador cancelará el aporte correspondiente sobre el 100 % del último sueldo percibido durante el tiempo que se otorgue la prestación, el cual puede ser máximo de un año (contado desde la fecha de la incapacidad o desde el vencimiento de la cobertura del subsidio transitorio por enfermedad que otorgue el Seguro General de Salud del IESS). La duración y cuantía de la prestación la resuelve la Sala del Comité Valuador.

Nota: Si dentro del período de otorgación del subsidio por incapacidad, ésta deviniere en absoluta y permanente, se acreditará derecho a la pensión de jubilación por invalidez.

Caso c (Jubilación por invalidez)

Requisitos (según la Ley de Seguridad Social del 2018)

1. La incapacidad absoluta y permanente del asegurado para todo trabajo, sobrevenida en la actividad o en período de inactividad compensada, cualquiera sea la causa que la haya originado.

2. El asegurado registre no menos de 60 imposiciones mensuales, de las cuales no menos de 6 deberán ser inmediatamente anteriores a la incapacidad.

3. Si el asegurado se encuentra cesante, su incapacidad debe estar sobrevenida dentro de los 2 años siguientes al cese, y siempre que cuente con un mínimo de 120 imposiciones mensuales; y no fuere beneficiario de otra pensión jubilar, salvo la de invalidez que proviene de la misma contingencia.

Beneficios (según la Ley de Seguridad Social del 2018 y la normativa C.D. IESS 554 y C.D.100 del 2017)

Para obtener la pensión que la persona jubilada se haría acreedora se debe proceder con el siguiente cálculo:

1. Calculamos el promedio anual de las remuneraciones de todos los años.

2. Una vez obtenidos los promedios anuales de las remuneraciones históricas, tomamos los cinco (5) años con promedios más altos.

3. Calculamos el promedio de las 60 remuneraciones de los cinco (5) años con promedios más altos seleccionados en el paso 2. Este valor constituye la base de cálculo.

$$\text{Base de cálculo} = \frac{\text{Remuneración 1} + \cdots + \text{Remuneración 60}}{60}$$

4. A continuación procedemos a identificar el coeficiente de acuerdo a los años de aportaciones en la siguiente tabla:

Años de imposiciones	Coeficiente	Años de imposiciones	Coeficiente
5	0.4375	23	0.6625
6	0.4500	24	0.6750
7	0.4625	25	0.6875
8	0.4750	26	0.7000
9	0.4875	27	0.7125
10	0.5000	28	0.7250
11	0.5125	29	0.7375
12	0.5250	30	0.7500
13	0.5375	31	0.7625
14	0.5500	32	0.7750
15	0.5625	33	0.7875
16	0.5750	34	0.8000
17	0.5875	35	0.8125
18	0.6000	36	0.8325
19	0.6125	37	0.8605
20	0.6250	38	0.8970
21	0.6375	39	0.9430
22	0.6500	40	1.0000

Cuadro 3.1: Coeficientes de acuerdo a los años de aportación [4]

5. Luego, multiplicamos el coeficiente obtenido por la base de cálculo:

$$\text{Pensión calculada} = \text{Coeficiente} \times \text{Base de cálculo} \tag{3.1}$$

Nota: Desde los 41 años de aportes en adelante, se incrementa 0.0125 por cada año de imposiciones adicionales.

6. Finalmente, comparamos este resultado con la pensión mínima y pensión máxima que entregó el IESS en el 2019 de acuerdo a los años de aportaciones de la siguiente manera:

Años de imposiciones	Pensión mínima
Hasta 10	\$197.00
11-20	\$236.40
21-30	\$275.80
31-35	\$315.20
36-39	\$354.60
40 y más	\$394.00

Cuadro 3.2: Pensión mínima 2019 [4]

Años de imposiciones	Pensión máxima
10-14	\$985.00
15-19	\$1,182.00
20-24	\$1,379.00
25-29	\$1,576.00
30-34	\$1,773.00
35-39	\$1,970.00
40 y más	\$2,167.00

Cuadro 3.3: Pensión máxima 2019 [4]

$$\text{Pensión 1} = \text{Máximo}(\text{Pensión mínima}, \text{Pensión calculada}) \tag{3.2}$$

$$\text{Pensión a recibir} = \text{Mínimo}(\text{Pensión máxima}, \text{Pensión 1}) \tag{3.3}$$

Es preciso aclarar que el tiempo que demora el trámite para confirmar la incapacidad del afiliado no es fijo, y puede durar hasta aproximadamente 2 años. El procesamiento de la solicitud de calificación; y la disponibilidad y eficiencia del médico calificador, médicos especialistas y la Sala del Comité Nacional Valuador son factores que influyen en la culminación del trámite mencionado.

En este sentido, propondremos una cobertura para los afiliados del IESS que se encuentren saludables para que en caso de sufrir una enfermedad o accidente no profesional, reciban el 80 % del promedio del último año de remuneración durante el tiempo de duración el contrato (2 años). Así, intentaremos proporcionar ingresos al asegurado para que no pierda su poder adquisitivo durante el período que demore la calificación de la incapacidad, que como ya expusimos, es extenso y puede durar hasta aproximadamente 2 años.

En caso de fallecimiento, la seguridad social ecuatoriana ofrece el seguro de muerte montepío.

Seguro de muerte montepío (según el Reglamento interno del régimen de transición del seguro de Vejez y Muerte del 2017)

Requisitos

El afiliado activo fallecido tenía, al momento de su muerte, abonadas por lo menos 60 imposiciones mensuales (5 años de aportes) o si se hallaba en el período de protección del seguro de muerte.

Beneficiarios

Tienen derecho a este monto en este orden (a falta del primer beneficiario, el segundo tiene derecho):

1. Viudas o viudos (Cónyuges o parejas que demuestren convivencia). Si la convivencia es menor a dos años, la existencia de un hijo es suficiente prueba. Los hijos menores de 18 años o con discapacidad también tienen un derecho a un porcentaje de este monto.

2. Padres que hayan estado a cargo de la persona fallecida.

Beneficios

El viudo o la viuda o el o la sobreviviente de la unión de hecho, legalmente declarada, cuando sea único o única beneficiaria de la pensión de viudedad, percibirá el 60 % de la renta que le corresponde al causante. En caso de que exista grupo familiar se entregará a la viuda el 60 % y 40 % restante se dividirá de manera proporcional para el número de hijos o hijas menores de edad habientes que tuvieren derecho, igual porcentaje recibirán los padres con derecho a pensión de montepío.

La duración de esta renta es de un período igual a la décima parte del tiempo cubierto por imposiciones a la fecha de su cesantía.

Nota: El monto de esta renta no puede ser menor a USD 200 ni mayor a USD 1800 para este 2020.

Se entrega también auxilios por funerales, el cual es un reembolso en dinero que se entrega al fallecimiento del pensionista de jubilación, pensionista de montepío y del afiliado que tuviere registrados seis aportes mensuales, dentro de los últimos doce meses anteriores a su fallecimiento. El valor para el año 2020 es de USD 1 357,73.

Por esta razón, en caso de producirse la muerte del afiliado del IESS ocasionada por una enfermedad o accidente no profesional, plantearemos que sus beneficiarios reciban el promedio de su último año de remuneración mensualmente durante el tiempo de duración el contrato (2 años).

En resumen, detallamos a continuación los lineamientos del seguro propuesto.

Lineamientos

Un trabajador de edad x afiliado al IESS que se encuentra saludable contrata un seguro de invalidez con las siguientes condiciones:

- Si el individuo se encuentra saludable y muere por una enfermedad o accidente no profesional, sus beneficiarios reciben mensualmente el promedio de su último año de remuneración durante el tiempo de duración del contrato.
- Si el individuo se incapacita por una enfermedad o accidente no profesional, recibe menusalmente el 80 % del promedio de su último año de remuneración durante el tiempo de duración del contrato.
- La cobertura es únicamente por un período de 2 años.
- El tipo de interés efectivo anual del 5 %.

3.2. Planteamiento de estados y ecuaciones diferenciales mediante la ecuación diferencial de Kolmogorov

Emplearemos la ecuación diferencial de Kolmogorov para el cáclulo de las probabilidades de transición. De esta manera en el capítulo 4 presentaremos dos casos, el primero soluciona el sistema de ecuaciones planteado de manera analítica, y el segundo lo aproxima a través del método Runge Kutta de orden 4. Para ambos casos, dicho sistema está basado en las ideas subsiguientes.

El problema se presenta en el siguiente esquema:

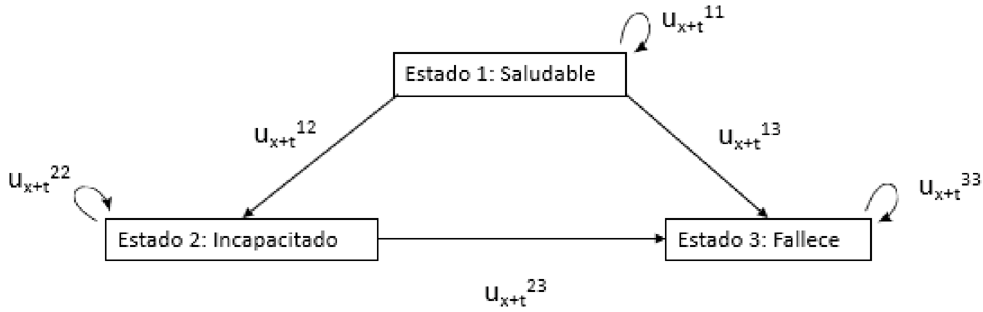

Figura 3.1: Representación gráfica del seguro con tres estados

La ecuación diferencial de Kolmogorov para el caso de tres estados 1(Saludable), 2(Incapacitado) y 3(Fallece), se usa para plantear dos ecuaciones diferenciales. Notemos que por la forma en que calcularemos la prima, nos será de ayuda las probabilidades de transición del estado 1 al estado 1 (${}_tp_x^{11}$) y las probabilidades de transición del estado 1 al estado 2 (${}_tp_x^{12}$). De la ecuación diferencial de Kolmogorov tenemos:

Para $i = j = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} &= \sum_{k=1,k\neq 1}^{3} ({}_tp_x^{1k}\ u_{x+t}^{k1}) - {}_tp_x^{11} \sum_{k=1,k\neq 1}^{3} u_{x+t}^{1k} \\ &= ({}_tp_x^{12}u_{x+t}^{21} + {}_tp_x^{13}u_{x+t}^{31}) - {}_tp_x^{11}(u_{x+t}^{12} + u_{x+t}^{13}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para $i = 1$ y $j = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} &= \sum_{k=1,k\neq 2}^{3} ({}_tp_x^{1k}\ u_{x+t}^{k2}) - {}_tp_x^{12} \sum_{k=1,k\neq 2}^{3} u_{x+t}^{2k} \\ &= ({}_tp_x^{11}u_{x+t}^{12} + {}_tp_x^{13}u_{x+t}^{32}) - {}_tp_x^{12}(u_{x+t}^{21} + u_{x+t}^{23}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Además, debemos considerar los siguientes supuestos:

1. La persona se encuentra saludable al inicio del proceso.

2. Si el individuo sufre un accidente o se enferma, no puede mejorar ($u_{x+t}^{21} = 0$).

3. El estado 3(Fallece) es un estado absorbente ($u_{x+t}^{31} = 0$ y $u_{x+t}^{32} = 0$).

Sabemos que una vez que se llega al estado 3(Fallece) no se puede volver a ningún otro estado. Además, según nuestro modelo, no es posible regresar del estado 2(Incapacitado) al estado 1(Saludable), bajo el supuesto de que el individuo estará tramitando su calificación de incapacidad en el IESS hasta el final de los 2 años.

En este sentido, el modelo propuesto está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} &= -{}_tp_x^{11}(u_{x+t}^{12} + u_{x+t}^{13}) \\ \frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} &= {}_tp_x^{11}u_{x+t}^{12} - {}_tp_x^{12}u_{x+t}^{23} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo explicaremos detalladamente el proceso analítico y numérico para encontrar las probabilidades de transición. Además, con ellas calcularemos la prima del seguro. Finalmente, realizaremos una comparación entre las dos soluciones obtenidas por los procesos antes mencionados.

4.1. Solución analítica

Como suponemos que las fuerzas de transición son constantes en al menos un intervalo de tiempo; las ecuaciones de Kolmogorov, con su respectiva condición incial, quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} &= -{}_tp_x^{11}(u_x^{12}+u_x^{13}) \\ \frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} &= {}_tp_x^{11}u_x^{12} - {}_tp_x^{12}u_x^{23} \end{cases}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} {}_0p_x^{11} \\ {}_0p_x^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Matricialmente tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -(u_x^{12}+u_x^{13}) & 0 \\ u_x^{12} & -u_x^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix} \text{ , con } p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

La solución es de la forma $P(t) = C_1V_1e^{\lambda_1 t} + C_2V_2e^{\lambda_2 t}$; con C_1, C_2 constantes; V_1, V_2 vectores propios y λ_1, λ_2 valores propios de la matriz.

Primero, encontremos los valores propios de la matriz usando el polinomio característico.

$$\begin{vmatrix} -(u_x^{12}+u_x^{13})-\lambda & 0 \\ u_x^{12} & -u_x^{23}-\lambda \end{vmatrix} = (-(u_x^{12}+u_x^{13})-\lambda)(-u_x^{23}-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -(u_x^{12}+u_x^{13}) \tag{4.3}$$

$$\lambda_2 = -u_x^{23}$$

Ahora, procedemos a calcular los valores propios para λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_x^{12} & -u_x^{23}+u_x^{12}+u_x^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Por ende,

$$u_x^{12}v_1 + (-u_x^{23}+u_x^{12}+u_x^{13})v_2 = 0 \tag{4.5}$$

Despejando v_1,

$$v_1 = \left(\frac{u_x^{23}-u_x^{12}-u_x^{13}}{u_x^{12}}\right) v_2 \tag{4.6}$$

Con $v_2 = u_x^{12}$, obtenemos el vector propio:

$$V_1 = \begin{pmatrix} u_x^{23}-u_x^{12}-u_x^{13} \\ u_x^{12} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

De la misma manera, procedemos a calcular los valores propios para λ_2:

$$\begin{pmatrix} u_x^{23}-u_x^{12}-u_x^{13} & 0 \\ u_x^{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Por consiguiente,

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Al sustituir λ_1, λ_2, V_1 y V_2 en la solución tenemos:

$$\begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} u_x^{23}-u_x^{12}-u_x^{13} \\ u_x^{12} \end{pmatrix} e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-u_x^{23}t} \tag{4.10}$$

Finalmente, usemos la condición inicial para encontrar las constantes C_1 y C_2. Es claro que esta condición, así como las fuerzas de transición, se modifican año tras año.

Para el primer año, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13} \\ u_x^{12} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

En este sentido, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$1 = C_1(u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}) \tag{4.12}$$

$$0 = C_1 u_x^{12} + C_2 \tag{4.13}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$C_1 = \frac{1}{u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}} \,, \qquad C_2 = -\frac{u_x^{12}}{u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}} \tag{4.14}$$

Reemplazando C_1 y C_2 en la solución final (4.10),

$$\begin{pmatrix} {}_tp_x^{11} \\ {}_tp_x^{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}} \begin{pmatrix} u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13} \\ u_x^{12} \end{pmatrix} e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})t} - \frac{u_x^{12}}{u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-u_x^{23}t} \tag{4.15}$$

Por ende, la solución para cualquier tiempo t tal que $0 \leq t \leq 1$ es:

$${}_tp_x^{11} = e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})t} \tag{4.16}$$

$${}_tp_x^{12} = \frac{u_x^{12}}{u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}} (e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})t} - e^{-u_x^{23}t}). \tag{4.17}$$

Realizamos el mismo procedimiento para encontrar las probabilidades para el segundo año ($1 \leq t < 2$); pero tomando como condición incial el sistema evaluado en $t = 1$, es decir $p_1 = \begin{pmatrix} {}_1p_x^{11} \\ {}_1p_x^{12} \end{pmatrix}$. Así, obtenemos como solución lo siguiente:

$${}_tp_x^{11} = e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})} e^{-(u_{x+1}^{12}+u_{x+1}^{13})(t-1)} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{12} = {} & \frac{e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})} u_{x+1}^{12} e^{-(u_{x+1}^{12}+u_{x+1}^{13})(t-1)}}{u_{x+1}^{23} - u_{x+1}^{12} - u_{x+1}^{13}} \\ & + \left[\frac{u_x^{12}}{u_x^{23} - u_x^{12} - u_x^{13}} (e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})} - e^{-u_x^{23}}) - \frac{e^{-(u_x^{12}+u_x^{13})} u_{x+1}^{12}}{u_{x+1}^{23} - u_{x+1}^{12} - u_{x+1}^{13}} \right] e^{-u_{x+1}^{23}(t-1)}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Recordemos que el sistema de ecuaciones generalmente tiene una solución analítica cuando las fuerzas de transición son constantes en un intervalo de tiempo. De esta manera, para el siguiente ejemplo usaremos las probabilidades obtenidas por "La valoración actuarial del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social al 31 de diciembre de 2018". Aplicando el supuesto exponencial a las mismas ($u_x = -ln(p_x)$) obtendremos las fuerzas de transición, necesarias para el cálculo deseado.

Entonces, consideremos a una persona de género femenino de 45 años. Las fuerzas de transición para la misma, para el primer y segundo año, son las siguientes:

Primer año	Segundo año
$u_{45}^{12} = 0{,}0006376872$	$u_{46}^{12} = 0{,}000781475$
$u_{45}^{13} = 0{,}001037538$	$u_{46}^{13} = 0{,}001105611$
$u_{45}^{23} = 0{,}033914660$	$u_{46}^{23} = 0{,}033271410$

Cuadro 4.1: Fuerzas de transición para una mujer de 45 años para el método analítico

Usando las las fuerzas de transición encontradas en las ecuaciones anteriormente descritas, encontramos las probabilidades de transición para el primer y segundo año. Nos ayudamos de ciertas funciones implementadas en RStudio para dicha tarea.

t	${}_tp_x^{11}$	${}_tp_x^{12}$
0	1	0
1/12	0.999860407636615	0.000053061874134534
2/12	0.999720834759257	0.000105966588356549
3/12	0.999581281365207	0.000158714587241626
4/12	0.999441747451746	0.000211306314110509
5/12	0.999302233016153	0.000263742211032647
6/12	0.999162738055710	0.000316022718829719
7/12	0.999023262567698	0.000368148277079157
8/12	0.998883806549400	0.000420119324117665
9/12	0.998744369998096	0.000471936297044712
10/12	0.998604952911070	0.000523599631726030
11/12	0.998465555285605	0.000575109762797083
12/12	0.998326177118984	0.000626467123666565
13/12	0.998169195518384	0.000689651336546641
14/12	0.998012238602325	0.000752650398295893
15/12	0.997855306366924	0.000815464823161673
16/12	0.997698398808302	0.000878095123967266
17/12	0.997541515922577	0.000940541812115794
18/12	0.997384657705871	0.001002805397594180
19/12	0.997227824154303	0.001064886388977040
20/12	0.997071015263996	0.001126785293430610
21/12	0.996914231031072	0.001188502616716660
22/12	0.996757471451653	0.001250038863196350
23/12	0.996600736521863	0.001311394535834130
24/12	0.996444026237826	0.001372570136201600

Cuadro 4.2: Probabilidades de transición para una mujer de 45 años obtenidas por el método analítico

Así, calculamos el costo de la cobertura planteada. Primero, procedemos a determinar el costo para cubrir la invalidez:

$$\text{Costo Invalidez} = \sum_{t=1}^{24} (0{,}80)(\text{Promedio remuneración})\left({}_{\frac{t}{12}}p_{45}^{12}\right)(1{,}05)^{-\frac{t}{12}} \tag{4.20}$$

Tomando una remuneración promedio del último año de \$1500 y usando los datos de las tablas anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\text{Costo Invalidez} &= (0{,}80)(1500)\left(({}_{\frac{1}{12}}p_{45}^{12})(1{,}05)^{-\frac{1}{12}} + \cdots + ({}_{\frac{24}{12}}p_{45}^{12})(1{,}05)^{-\frac{24}{12}}\right)\\ &= (0{,}80)(1500)\left((0{,}000053)(1{,}05)^{-\frac{1}{12}} + \cdots + (0{,}001373)(1{,}05)^{-\frac{24}{12}}\right)\\ &= \$18{,}51\end{aligned}$$

Así también,

$$\begin{aligned}\text{Variabilidad del Costo Invalidez} &= \sum_{t=1}^{24}(0{,}8\times 1500)^2({}_{\frac{t}{12}}p_{45}^{12})(1{,}05)^{-2\frac{t}{12}} - (18{,}51)^2 \qquad (4.21)\\ &= (0{,}8\times 1500)^2\Big((0{,}000053)(1{,}05)^{-2\frac{1}{12}} + \cdots\\ &+(0{,}001373)(1{,}05)^{-2\frac{24}{12}}\Big) - (18{,}51)^2\\ &= \$^2 20439{,}54\end{aligned}$$

Ahora, calculamos el costo del seguro en caso de fallecimiento.

Las fuerzas de transición del estado 1(Saludable) al estado 3(Fallecimiento) son $u_{45}^{13} = 0{,}001037538$ y $u_{46}^{13} = 0{,}001105611$ para el primer año y segundo año de cobertura, respectivamente. Así, la probabilidad de que un individuo fallezca si se encuentra en buen estado de salud es:

$${}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}} = \begin{cases} 1 - e^{-\int_0^{\frac{1}{12}} u_{45}^{13}dt} & \text{si } 0 \le t \le 11\\ 1 - e^{-\int_0^{\frac{1}{12}} u_{46}^{13}dt} & \text{si } 11 < t \le 23\end{cases} \qquad (4.22)$$

Por tanto, el costo del seguro en caso de fallecimiento es:

$$\begin{aligned}\text{Costo Fallecimiento} &= \sum_{t=0}^{23}(\text{Promedio remuneración})(1{,}05)^{-\frac{t}{12}}({}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}}) \qquad (4.23)\\ &= (1500)\sum_{t=0}^{11}(1{,}05)^{-\frac{t}{12}}(1 - e^{-\int_0^{\frac{1}{12}} 0{,}001037538dt})\\ &+ (1500)\sum_{t=12}^{23}(1{,}05)^{-\frac{t}{12}}(1 - e^{-\int_0^{\frac{1}{12}} 0{,}001105611dt})\\ &= \$3{,}07\end{aligned}$$

Así también,

$$\text{Variabilidad del Costo Fallecimiento} = \sum_{t=0}^{23}(1500)^2(1{,}05)^{-2\frac{t}{12}}({}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}}) - (3{,}07)^2 \tag{4.24}$$

$$= (1500)^2\sum_{t=0}^{11}(1{,}05)^{-2\frac{t}{12}}(1-e^{-\int_0^{\frac{1}{12}}0{,}001037538dt})$$
$$+ (1500)^2\sum_{t=12}^{23}(1{,}05)^{-2\frac{t}{12}}(1-e^{-\int_0^{\frac{1}{12}}0{,}001105611dt})$$
$$- (3{,}07)^2$$
$$= \$^2 4382{,}14 \tag{4.25}$$

De esta forma, el costo total de la cobertura es:

$$\text{Costo Total} = \text{Costo Invalidez} + \text{Costo Fallecimiento} \tag{4.26}$$
$$= \$18{,}51 + \$3{,}07 = \$21{,}57$$

Y la variabilidad total de la cobertura es la suma de la variabilidad del Costo de Invalidez y la variabilidad del Costo de Fallecimiento.

$$\text{Variabilidad del Costo Total} = \$^2 24821{,}68$$

El valor total de la cobertura debe coincidir con el valor presente de los pagos mensuales anticipados realizados por el asegurado.

$$\text{Valor Presente Pagos} = P\left[\sum_{t=0}^{23}(1{,}05)^{-\frac{t}{12}}({}_{\frac{t}{12}}p_{45}^{11})\right] \tag{4.27}$$
$$= P[1 + (1{,}05)^{-\frac{1}{12}}(0{,}999860) + \cdots + (1{,}05)^{-\frac{23}{12}}(0{,}996601)]$$
$$= 22{,}88P.$$

Debido al principio de equivalencia actuarial, el cual consistente en igualar los flujos de caja a lo largo de la vida del seguro, ponderados por la probabilidad de ocurrencia; tenemos,

$$\text{Valor Presente Pagos} = \text{Costo Total} \tag{4.28}$$
$$22{,}88P = \$21{,}57$$

$$P = \$0{,}94$$

En definitiva, una mujer de 45 años que esté saludable pagaría \$0,94 mensuales por el seguro propuesto. En el caso de invalidez recibe \$1200 mensualmente y en el caso de fallecer sus beneficiarios reciben \$1500 mensualmente, durante los 2 años de cobertura.

Usando nuestra *Shiny App*, obtenemos precisamente el mismo resultado al ingresar los datos de nuestro ejemplo propuesto y seleccionando el método analítico.

Figura 4.1: Resultados programa Shiny app mediante el método analítico

4.2. Solución numérica

Aquí consideramos el caso en el que las fuerzas de transición son conocidas pero dependen del tiempo. Por ende, para el siguiente ejemplo práctico cosideramos el supuesto de distribución uniforme de las muertes para las fuerzas de transición. Así, usando las probabilidades obtenidas de "La valoración actuarial del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social al 31 de diciembre de 2018", como en el caso anterior, y el supuesto antes mencionado; las fuerzas de transición se calculan de la siguiente de la siguiente manera:

$$u_{x+t} = \frac{q_x}{1 - tq_x}, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{4.29}$$

Escojamos, de igual forma que en el método anterior, una persona del género femenino de 45 años. Las fuerzas de transición para la misma, para el primer y segundo año, son las siguientes:

Primer año	Segundo año
$u_{45}^{12} = \frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484\,t}$	$u_{46}^{12} = \frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697\,t}$
$u_{45}^{13} = \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037\,t}$	$u_{46}^{13} = \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105\,t}$
$u_{45}^{23} = \frac{0{,}033346}{1-0{,}033346\,t}$	$u_{46}^{23} = \frac{0{,}032724}{1-0{,}032724\,t}$

Cuadro 4.3: Fuerzas de transición para una mujer de 45 años para el método Runge Kutta

Usamos la ecuación de Kolmogorov y las fuerzas de transición anteriores y planteamos el sistema para el primer año,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484t} + \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037t}\right){}_tp_x^{11} \\
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484t}\right){}_tp_x^{11} - \left(\frac{0{,}033346}{1-0{,}033346t}\right){}_tp_x^{12}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Y para el segundo año de cobertura,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697t} + \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105t}\right){}_tp_x^{11} \\
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697t}\right){}_tp_x^{11} - \left(\frac{0{,}032724}{1-0{,}032724t}\right){}_tp_x^{12}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Como lo habíamos mencionado antes, usaremos el método Runge Kutta de orden 4 para solucionar las ecuaciones diferenciales previas, con tamaño de paso $h = \frac{1}{12}$, y tomando en cuenta la condición incial de que el individuo se halla saludable al momento de la adquisición del seguro.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} &= -\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484t} + \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037t}\right){}_tp_x^{11} \\
k_1 &= \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484t} + \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037t}\right){}_tp_x^{11}\right] \\
k_2 &= \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484(t+\frac{1}{24})} + \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11} + \frac{k_1}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$k_3 = \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484(t+\frac{1}{24})} + \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11} + \frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$k_4 = \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484(t+\frac{1}{12})} + \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037(t+\frac{1}{12})}\right)\left({}_tp_x^{11} + k_3\right)\right]$$

$$_{t+\frac{1}{12}}p_x^{11} = {}_tp_x^{11} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.32}$$

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} = \left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484t}\right){}_tp_x^{11} - \left(\frac{0{,}033346}{1-0{,}033346t}\right){}_tp_x^{12}$$

$$l_1 = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484t}\right){}_tp_x^{11} - \left(\frac{0{,}033346}{1-0{,}033346t}\right){}_tp_x^{12}\right]$$

$$l_2 = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11} + \frac{k_1}{2}\right) - \left(\frac{0{,}033346}{1-0{,}033346(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{12} + \frac{l_1}{2}\right)\right]$$

$$l_3 = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11} + \frac{k_2}{2}\right) - \left(\frac{0{,}033346}{1-0{,}033346(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{12} + \frac{l_2}{2}\right)\right]$$

$$l_4 = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}000637484}{1-0{,}000637484(t+\frac{1}{12})}\right)\left({}_tp_x^{11} + k_3\right) - \left(\frac{0{,}033346}{1-0{,}033346(t+\frac{1}{12})}\right)\left({}_tp_x^{12} + l_3\right)\right]$$

$$_{t+\frac{1}{12}}p_x^{12} = {}_tp_x^{12} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \tag{4.33}$$

Y para el segundo año de cobertura,

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x^{11} = -\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697t} + \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105t}\right){}_tp_x^{11}$$

$$k_1 = \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697t} + \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105t}\right){}_tp_x^{11}\right]$$

$$k_2 = \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697(t+\frac{1}{24})} + \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11} + \frac{k_1}{2}\right)\right]$$

$$k_3 = \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697(t+\frac{1}{24})} + \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11} + \frac{k_2}{2}\right)\right]$$

$$k_4 = \frac{1}{12}\left[-\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697(t+\frac{1}{12})} + \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105(t+\frac{1}{12})}\right)\left({}_tp_x^{11} + k_3\right)\right]$$

$$_{t+\frac{1}{12}}p_x^{11} = {}_tp_x^{11} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.34}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}{}_tp_x^{12} &= \left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697t}\right){}_tp_x^{11} - \left(\frac{0{,}032724}{1-0{,}032724t}\right){}_tp_x^{12} \\
l_1 &= \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697t}\right){}_tp_x^{11} - \left(\frac{0{,}032724}{1-0{,}032724t}\right){}_tp_x^{12}\right] \\
l_2 &= \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{0{,}032724}{1-0{,}032724(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{12}+\frac{l_1}{2}\right)\right] \\
l_3 &= \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{11}+\frac{k_2}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{0{,}032724}{1-0{,}032724(t+\frac{1}{24})}\right)\left({}_tp_x^{12}+\frac{l_2}{2}\right)\right] \\
l_4 &= \frac{1}{12}\left[\left(\frac{0{,}0007811697}{1-0{,}0007811697(t+\frac{1}{12})}\right)\left({}_tp_x^{11}+k_3\right)\right. \\
&\quad \left. -\left(\frac{0{,}032724}{1-0{,}032724(t+\frac{1}{12})}\right)\left({}_tp_x^{12}+l_3\right)\right] \\
{}_{t+\frac{1}{12}}p_x^{12} &= {}_tp_x^{12} + \frac{1}{6}(l_1+2l_2+2l_3+l_4) \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

Así, con la ayuda de ciertas funciones implementadas en RStudio, encontramos las probabilidades de transición para el primer y segundo año de cobertura,

t	${}_tp_x^{11}$	${}_tp_x^{12}$
0	1	0
1/12	0.999860453971328	0.000053050101994811
2/12	0.999720917125478	0.000105947170512974
3/12	0.999581389462449	0.000158690802456019
4/12	0.999441870982240	0.000211280592459995
5/12	0.999302361684853	0.000263716132876323
6/12	0.999162861570287	0.000315997013752426
7/12	0.999023370638541	0.000368122822812140
8/12	0.998883888889617	0.000420093145435901
9/12	0.998744416323514	0.000471907564640713
10/12	0.998604952940232	0.000523565661059876
11/12	0.998465498739770	0.000575067012922493
12/12	0.998326053722130	0.000626411196032733
13/12	0.998168976796035	0.000689588713119879
14/12	0.998011911863150	0.000752575836024180
15/12	0.997854858923477	0.000815372057495823
16/12	0.997697817977016	0.000877976867392227
17/12	0.997540789023765	0.000940389752653225
18/12	0.997383772063726	0.001002610197275960
19/12	0.997226767096898	0.001064637682289510
20/12	0.997069774123281	0.001126471685729190
21/12	0.996912793142875	0.001188111682610560
22/12	0.996755824155681	0.001249557144903190
23/12	0.996598867161698	0.001310807541504010
24/12	0.996441922160926	0.001371862338210470

Cuadro 4.4: Probabilidades de transición para una mujer de 45 años obtenidas por el método Runge Kutta

Así, calculamos el costo de la cobertura planteada tomando una remuneración promedio del último año de \$1500. Primero, procedemos a determinar el costo para cubrir la invalidez:

$$\begin{aligned}\text{Costo Invalidez} &= \sum_{t=1}^{24}(0{,}80)(\text{Promedio remuneración})({}_{\frac{t}{12}}p_x^{12})(1{,}05)^{-\frac{t}{12}} \qquad (4.36)\\ &= (0{,}80)(1500)\left(({}_{\frac{1}{12}}p_{45}^{12})(1{,}05)^{-\frac{1}{12}} + \cdots + ({}_{\frac{24}{12}}p_{45}^{12})(1{,}05)^{-\frac{24}{12}}\right)\end{aligned}$$

$$= (0{,}80)(1500)\left((0{,}000053)(1{,}05)^{-\frac{1}{12}} + \cdots + (0{,}001372)(1{,}05)^{-\frac{24}{12}}\right)$$
$$= \$18{,}50$$

Así también,

$$\text{Variabilidad del Costo Invalidez} = \sum_{t=1}^{24}(0{,}8\times 1500)^2({}_{\frac{t}{12}}p_{45}^{12})(1{,}05)^{-2\frac{t}{12}} - (18{,}51)^2 \tag{4.37}$$
$$= (0{,}8\times 1500)^2\left((0{,}000053)(1{,}05)^{-2\frac{1}{12}} + \cdots\right.$$
$$\left.+(0{,}001372)(1{,}05)^{-2\frac{24}{12}}\right) - (18{,}50)^2$$
$$= \$^2 20435{,}06$$

Ahora, calculamos el costo del seguro en caso de fallecimiento.

Las fuerzas de transición del estado 1(Saludable) al estado 3(Fallecimiento) son $u_{45}^{13} = \frac{0{,}001037}{1-0{,}001037\,t}$ y $u_{46}^{13} = \frac{0{,}001105}{1-0{,}001105\,t}$ para el primer y segundo año de cobertura, respectivamente. Así, la probabilidad de que un individuo fallezca si se encuentra en buen estado de salud es:

$${}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}} \tag{4.38}$$

Pero, por el supuesto de distribución uniforme de las muertes,

$${}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}}\,{}_{\frac{t}{12}}p_{45} = {}_{\frac{t}{12}|\frac{1}{12}}q_{45} = \frac{1}{12}q_{45} \tag{4.39}$$

Lo que implica que,

$${}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}} = \frac{\frac{1}{12}q_{45}}{1-\frac{t}{12}q_{45}} \tag{4.40}$$

Por ende, tenemos que:

$${}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}} = \begin{cases} \dfrac{\frac{0{,}001037}{12}}{1-\frac{0{,}001037\,t}{12}} & \text{si } 0 \le t \le 11 \\[2ex] \dfrac{\frac{0{,}001105}{12}}{1-\frac{0{,}001105\,t}{12}} & \text{si } 11 < t \le 23 \end{cases} \tag{4.41}$$

Por tanto, el costo del seguro en caso de fallecimiento es:

$$\begin{aligned}
\text{Costo Fallecimiento} &= \sum_{t=0}^{23} (\text{Promedio remuneración})(1{,}05)^{-\frac{t}{12}} ({}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}}) \qquad (4.42)\\
&= (1500) \sum_{t=0}^{11} (1{,}05)^{-\frac{t}{12}} \left(\frac{\frac{0{,}001037}{12}}{1 - \frac{0{,}001037t}{12}} \right)\\
&+ (1500) \sum_{t=12}^{23} (1{,}05)^{-\frac{t}{12}} \left(\frac{\frac{0{,}001105}{12}}{1 - \frac{0{,}001105t}{12}} \right)\\
&= \$3{,}07
\end{aligned}$$

Así también,

$$\begin{aligned}
\text{Variabilidad del Costo Fallecimiento} &= \sum_{t=0}^{23} (1500)^2 (1{,}05)^{-2\frac{t}{12}} ({}_{\frac{1}{12}}q_{45+\frac{t}{12}}) - (3{,}07)^2 \qquad (4.43)\\
&= (1500)^2 \sum_{t=0}^{11} (1{,}05)^{-2\frac{t}{12}} \left(\frac{\frac{0{,}001037}{12}}{1 - \frac{0{,}001037t}{12}} \right)\\
&+ (1500)^2 \sum_{t=12}^{23} (1{,}05)^{-2\frac{t}{12}} \left(\frac{\frac{0{,}001105}{12}}{1 - \frac{0{,}001105t}{12}} \right)\\
&- (3{,}07)^2\\
&= \$^2 4384{,}87 \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

De esta forma, el costo total de la cobertura es:

$$\begin{aligned}
\text{Costo Total} &= \text{Costo Invalidez} + \text{Costo Fallecimiento} \qquad (4.45)\\
&= \$18{,}50 + \$3{,}07 = \$21{,}57
\end{aligned}$$

Y la variabilidad total de la cobertura es la suma de la variabilidad del Costo de Invalidez y la variabilidad del Costo de Fallecimiento.

$$\text{Variabilidad del Costo Total} = \$^2 24819{,}93$$

El valor total de la cobertura debe coincidir con el valor presente de los pagos mensuales anticipados realizados por el asegurado.

$$\text{Valor Presente Pagos} = P \left[\sum_{t=0}^{23} (1{,}05)^{-\frac{t}{12}} ({}_{\frac{t}{12}}p_{45}^{11}) \right] \qquad (4.46)$$

$$
\begin{aligned}
&= P[1 + (1{,}05)^{-\frac{1}{12}}(0{,}999860) + \cdots + (1{,}05)^{-\frac{23}{12}}(0{,}996599)] \\
&= 22{,}88P.
\end{aligned}
$$

Debido al principio de equivalencia actuarial,

$$
\begin{aligned}
\text{Valor Presente Pagos} &= \text{Costo Total} \qquad (4.47)\\
22{,}88P &= \$21{,}57 \\
P &= \$0{,}94
\end{aligned}
$$

En definitiva, una mujer de 45 años que esté saludable pagaría $0,94 mensuales por el seguro propuesto. En el caso de invalidez recibe $1200 mensualmente y en el caso de fallecer sus beneficiarios reciben $1500 mensualmente, durante los 2 años de cobertura.

Usando nuestra *Shiny App*, obtenemos precisamente el mismo resultado al ingresar los datos de nuestro ejemplo propuesto y seleccionando el método numérico.

Figura 4.2: Resultados programa Shiny app mediante el método Runge Kutta

Es claro que obtuvimos los mismos resultados a través del método analítico y numérico.

4.3. Comparación

Para verificar la exactitud de la aproximación del método Runge Kutta prodecemos a visualizar las probabilidades de transición obtenidas con ambos métodos.

- ${}_tp_x^{11}$

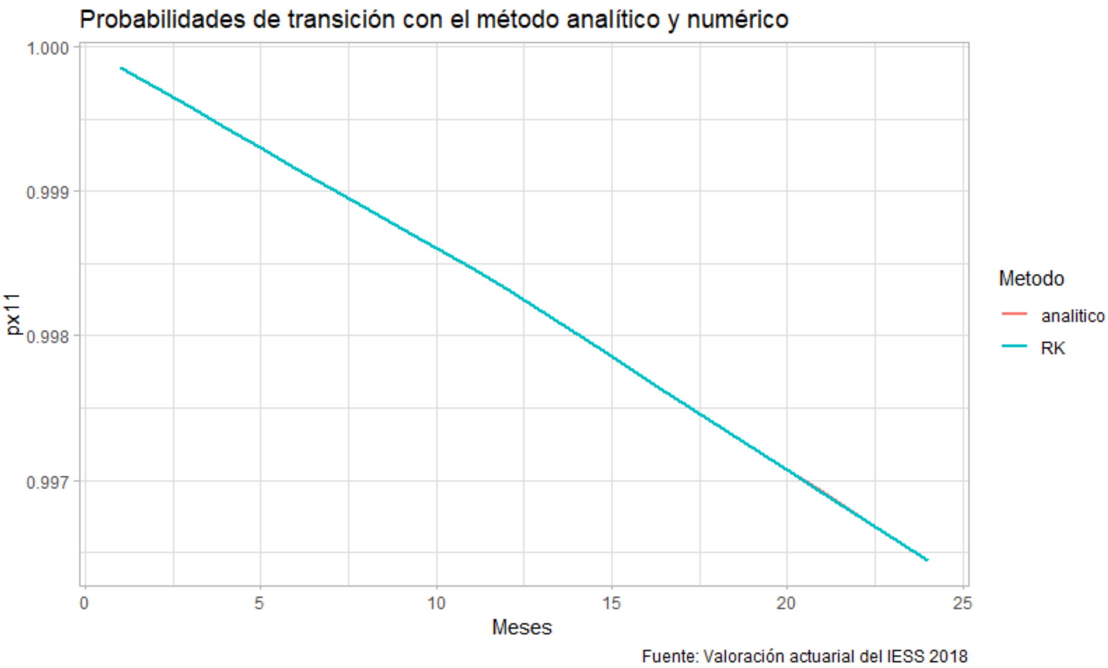

Figura 4.3: Probabilidad de transición de Saludable a Saludable de una mujer de 45 años

- ${}_tp_x^{12}$

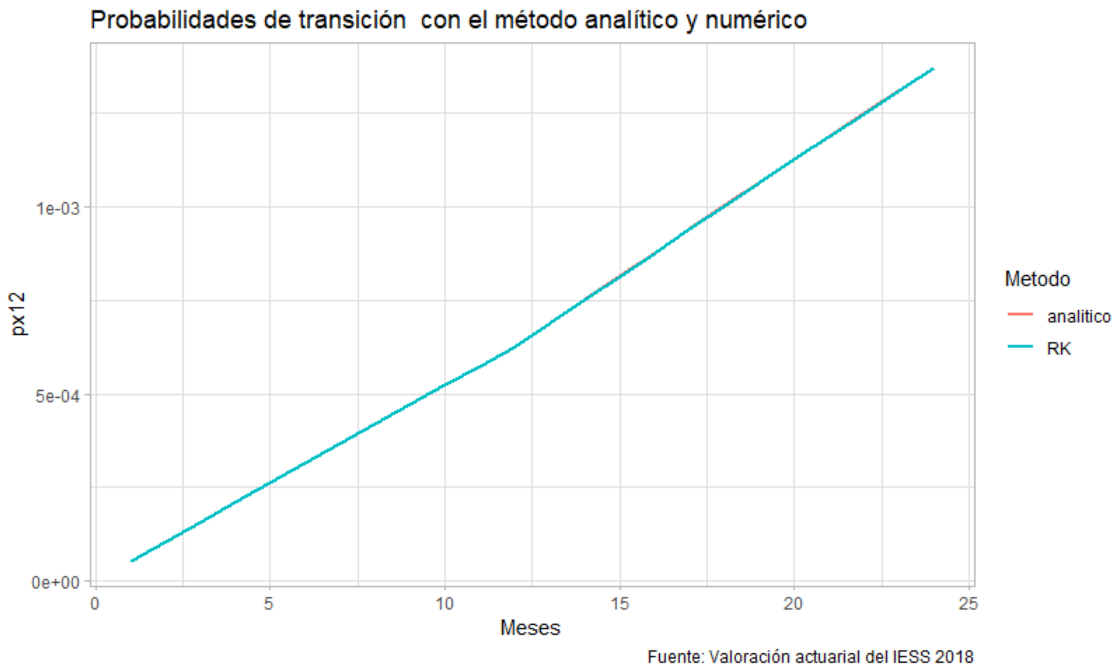

Figura 4.4: Probabilidad de transición de Saludable a Incapacitada de una mujer de 45 años

Observamos que existe una ligera variación a partir del mes 22, pero es insignificante y no genera grandes cambios en los costos del seguro.

Por otro lado, consideremos un individuo del género masculino de 50 años. Vamos a utilizar 10 salarios mensuales, obtenidos del Boletín Estadístico Nro. 25 del IESS del año 2020, y comparar las primas obtenidas con cada uno de los métodos.

Ingreso mensual	Prima Runge Kutta	Prima Analítico
461.13	0.5988102	0.5986723
495.35	0.6432473	0.6430992
541.59	0.7032932	0.7031313
571.11	0.7416271	0.7414563
582.28	0.7561321	0.7559580
614.74	0.7982837	0.7981000
683.99	0.8882098	0.8880052
695.35	0.9029616	0.9027536
709.96	0.9219337	0.9217214
1127.79	1.4645158	1.4641785

Cuadro 4.5: Comparación de primas mensuales para un hombre de 50 años con distintos salarios

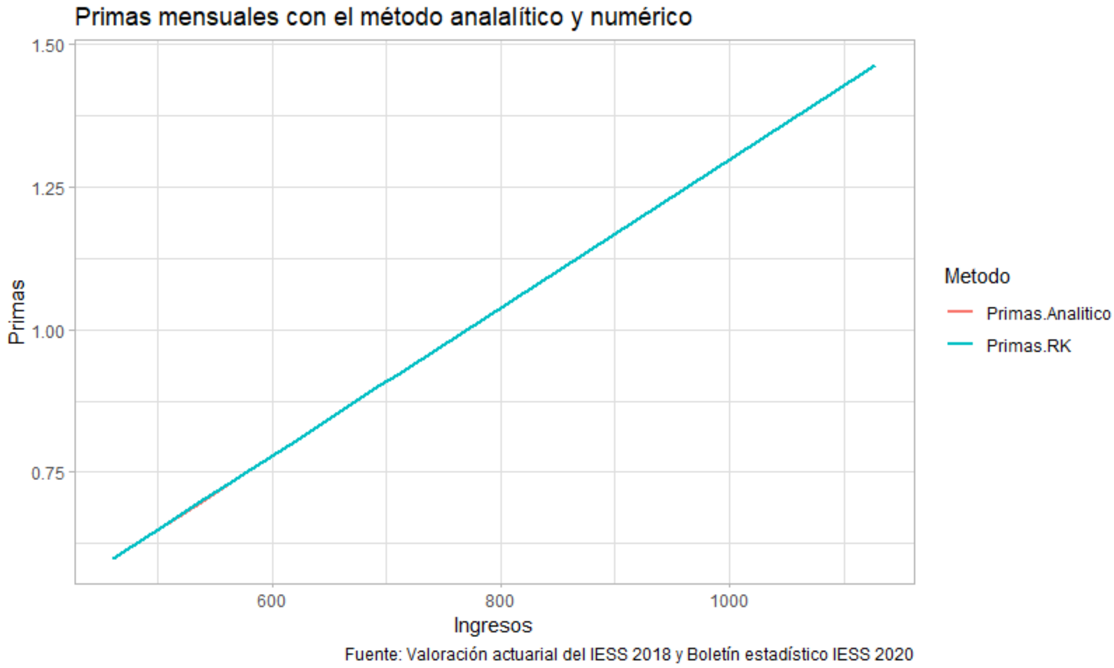

Figura 4.5: Comparación de primas mensuales para un hombre de 50 años con distintos salarios

Finalmente, también podemos tomar como referencia el salario básico unificado de un ecuatoriano según el Ministerio del Trabajo en el año 2020 ($400) y comparar las primas obtenidas con ambos métodos según diferentes edades (de 40 a 70 años).

Edad	Prima Runge Kutta	Prima Analtíco
40	0.1505043	0.1504988
41	0.1634688	0.1634588
42	0.1791756	0.1791610
43	0.1984992	0.1984795
44	0.2225024	0.2224770
45	0.2522946	0.2522624
46	0.2888242	0.2887846
47	0.3330463	0.3329963
48	0.3858789	0.3858134
49	0.4479504	0.4478625
50	0.5194285	0.5193089
51	0.5997552	0.5995923
52	0.6873189	0.6871003
53	0.7791670	0.7788815
54	0.8708931	0.8705335
55	0.9566652	0.9562317
56	1.0297803	1.0292817
57	1.0849173	1.0843655
58	1.1206154	1.1200210
59	1.1373750	1.1367446
60	1.1371352	1.1364662
61	1.1241552	1.1234312
62	1.1051088	1.1043012
63	1.0866740	1.0857446
64	1.0736320	1.0725359
65	1.0686674	1.0673513
66	1.0730996	1.0715009
67	1.0878088	1.0858517
68	1.1139037	1.1114955
69	1.1526332	1.1496611
70	1.2045224	1.2008498

Cuadro 4.6: Comparación de primas mensuales para un hombre con un ingreso mensual de $400 con distintas edades

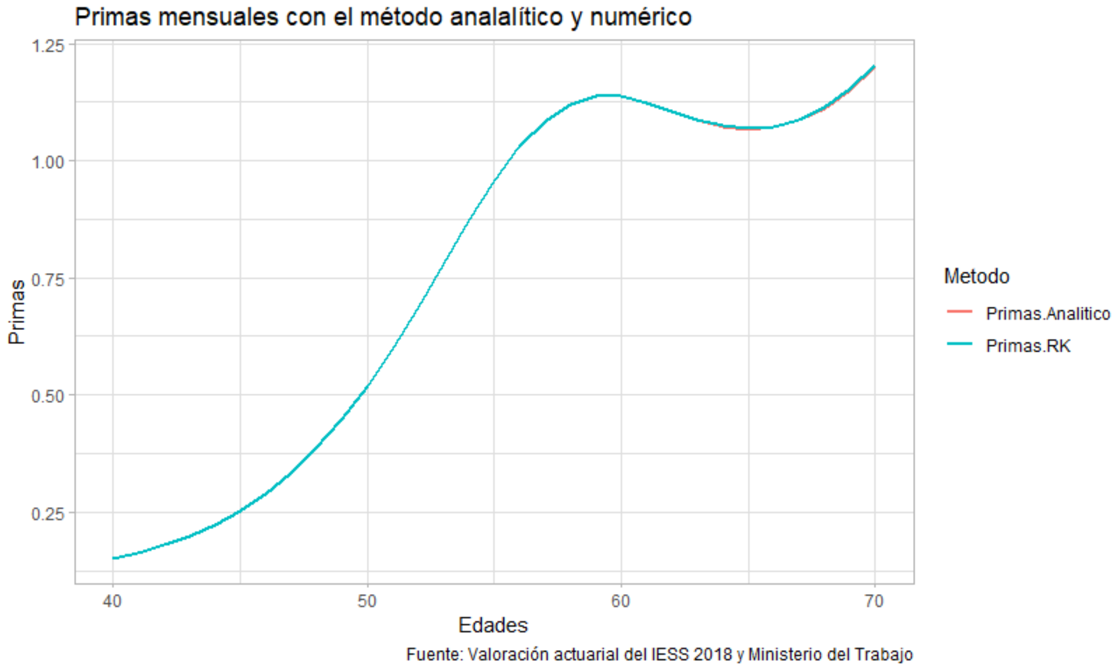

Figura 4.6: Comparación de primas mensuales para un hombre con un ingreso mensual de $400 con distintas edades

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

A través del estudio de los procesos estocásticos y los conceptos básicos de la matemática actuarial y financiera, pudimos formular una cadena de Markov de tres estados que contribuyó a la fidelidad de nuestro producto actuarial y permitió establecer una equivalencia financiero-actuarial entre primas y prestaciones de un colectivo de individuos en un horizonte temporal determinado.

Además, mediante el análisis de las resoluciones y normativas dictadas por la Ley de Seguridad Social, el Consejo Directivo del IESS y la Ley Orgánica de Discapacidades; planteamos una serie de lineamientos que encajan con las necesidades de los afiliados que posiblemente requerirán adquirir nuestro seguro de invalidez, con el objetivo de no mermar la capacidad económica de su núcleo familiar durante 2 años.

Enfocándonos en nuestro ejemplo, con ambos métodos obtuvimos que una persona del género femenino de 45 años cuya remuneración promedio del último año es de \$1500 tendría que pagar \$0,94 mensuales, cantidad no significativa en relación a su ingreso, para recibir \$1200 mensualmente en el caso de invalidez y en el caso de fallecer sus beneficiarios reciben \$1500 mensualmente, durante los 2 años de cobertura. En el caso de invalidez, la cantidad recibida por el asegurado le permitiría no mermar su poder adquisitivo durante el trámite para la calificación o la negación de la incapacidad.

Matemáticamente hablando, el uso de los métodos, analítico y numérico en nuestro ejemplo, nos permitió observar que las fuerzas de transición no son constantes en un intervalo de tiempo; y por tanto dependen de este factor. Es así que, en el ejemplo presentado resuelto por Runge Kutta se usó el supuesto de la distribución uniforme de las muertes y se llegó a una aproximación adecuada al resultado.

Por los puntos expuestos anteriormente, demostramos claramente nuestra hipótesis principal: un seguro de invalidez planteado como un proceso estocástico y apoyado de técnicas actuariales, constituye un seguro accesible para todos los trabajadores afiliados al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social.

Además, hemos establecido un punto de partida para estructurar en un futuro formulaciones actuariales y financieras más complejas, que empleen metodologías de procesos estocásticos; y por ello contribuyan a mejorar la seguridad social del Ecuador.

Como recomendación, para mejorar el seguro propuesto, podríamos incluir a los integrantes del núcleo familiar del afiliado añadiéndoles cierto beneficio, lo que a su vez generaría un modelo con más estados a considerar.

Apéndice A

Tablas de mortalidad

Fuente: Valoración actuarial del IESS al 31 de diciembre de 2018.

Tabla de mortalidad de afiliados

Mujeres					Hombres				
x	l_x	q_x	p_x	e_x	x	l_x	q_x	p_x	e_x
15	100000.00	0.000398	0.999602	70.83	15	100000.00	0.000795	0.999205	67.19
16	99960.23	0.000398	0.999602	69.86	16	99920.49	0.000928	0.999072	66.24
17	99920.41	0.000400	0.999600	68.89	17	99827.78	0.001059	0.998941	65.30
18	99880.46	0.000402	0.999598	67.91	18	99722.06	0.001184	0.998816	64.37
19	99840.28	0.000406	0.999594	66.94	19	99604.03	0.001298	0.998702	63.45
20	99799.79	0.000410	0.999590	65.97	20	99474.75	0.001398	0.998602	62.53
21	99758.91	0.000415	0.999585	64.99	21	99335.64	0.001483	0.998517	61.62
22	99717.53	0.000421	0.999579	64.02	22	99188.35	0.001550	0.998450	60.71
23	99675.57	0.000428	0.999572	63.05	23	99034.64	0.001599	0.998401	59.80
24	99632.92	0.000436	0.999564	62.07	24	98876.28	0.001631	0.998369	58.89
25	99589.48	0.000445	0.999555	61.10	25	98714.97	0.001649	0.998351	57.99
26	99545.15	0.000455	0.999545	60.13	26	98552.23	0.001653	0.998347	57.09
27	99499.82	0.000467	0.999533	59.16	27	98389.37	0.001646	0.998354	56.18
28	99453.35	0.000480	0.999520	58.18	28	98227.43	0.001631	0.998369	55.27
29	99405.64	0.000494	0.999506	57.21	29	98067.21	0.001611	0.998389	54.36
30	99356.54	0.000510	0.999490	56.24	30	97909.18	0.001589	0.998411	53.45
31	99305.91	0.000527	0.999473	55.27	31	97753.60	0.001567	0.998433	52.53
32	99253.59	0.000546	0.999454	54.30	32	97600.42	0.001547	0.998453	51.61
33	99199.42	0.000567	0.999433	53.33	33	97449.40	0.001533	0.998467	50.69
34	99143.22	0.000589	0.999411	52.36	34	97300.03	0.001525	0.998475	49.77
35	99084.79	0.000614	0.999386	51.39	35	97151.61	0.001527	0.998473	48.84
36	99023.93	0.000641	0.999359	50.42	36	97003.28	0.001537	0.998463	47.92
37	98960.41	0.000671	0.999329	49.45	37	96854.23	0.001555	0.998445	46.99
38	98893.97	0.000704	0.999296	48.48	38	96703.64	0.001581	0.998419	46.06
39	98824.36	0.000740	0.999260	47.52	39	96550.76	0.001615	0.998385	45.14
40	98751.26	0.000779	0.999221	46.55	40	96394.81	0.001657	0.998343	44.21

Cuadro 5.1: Tabla de mortalidad de afiliados para ambos sexos

Mujeres					Hombres				
x	l_x	q_x	p_x	e_x	x	l_x	q_x	p_x	e_x
41	98674.36	0.000821	0.999179	45.59	41	96235.05	0.001708	0.998292	43.28
42	98593.31	0.000868	0.999132	44.62	42	96070.71	0.001766	0.998234	42.35
43	98507.71	0.000920	0.999080	43.66	43	95901.03	0.001833	0.998167	41.43
44	98417.13	0.000976	0.999024	42.70	44	95725.23	0.001909	0.998091	40.50
45	98321.10	0.001037	0.998963	41.74	45	95542.51	0.001993	0.998007	39.58
46	98219.10	0.001105	0.998895	40.79	46	95352.07	0.002087	0.997913	38.66
47	98110.55	0.001180	0.998820	39.83	47	95153.06	0.002190	0.997810	37.74
48	97994.82	0.001262	0.998738	38.88	48	94944.65	0.002303	0.997697	36.82
49	97871.20	0.001352	0.998648	37.93	49	94725.97	0.002427	0.997573	35.90
50	97738.91	0.001451	0.998549	36.98	50	94496.09	0.002562	0.997438	34.99
51	97597.08	0.001561	0.998439	36.03	51	94254.01	0.002710	0.997290	34.08
52	97444.75	0.001682	0.998318	35.08	52	93998.57	0.002873	0.997127	33.17
53	97280.85	0.001816	0.998184	34.14	53	93728.49	0.003053	0.996947	32.26
54	97104.19	0.001964	0.998036	33.20	54	93442.35	0.003251	0.996749	31.36
55	96913.43	0.002129	0.997871	32.27	55	93138.53	0.003471	0.996529	30.46
56	96707.11	0.002312	0.997688	31.34	56	92815.23	0.003715	0.996285	29.57
57	96483.56	0.002515	0.997485	30.41	57	92470.40	0.003987	0.996013	28.67
58	96240.94	0.002741	0.997259	29.48	58	92101.73	0.004290	0.995710	27.79
59	95977.19	0.002992	0.997008	28.56	59	91706.64	0.004629	0.995371	26.90
60	95690.01	0.003273	0.996727	27.65	60	91282.16	0.005009	0.994991	26.03
61	95376.81	0.003587	0.996413	26.74	61	90824.97	0.005436	0.994564	25.16
62	95034.72	0.003938	0.996062	25.83	62	90331.26	0.005917	0.994083	24.29
63	94660.50	0.004331	0.995669	24.93	63	89796.74	0.006460	0.993540	23.43
64	94250.55	0.004772	0.995228	24.04	64	89216.64	0.007072	0.992928	22.58
65	93800.81	0.005267	0.994733	23.15	65	88585.73	0.007759	0.992241	21.74
66	93306.76	0.005824	0.994176	22.27	66	87898.41	0.008531	0.991469	20.90
67	92763.35	0.006451	0.993549	21.40	67	87148.58	0.009396	0.990604	20.08
68	92164.92	0.007158	0.992842	20.53	68	86329.75	0.010364	0.989636	19.27
69	91505.16	0.007957	0.992043	19.68	69	85435.02	0.011446	0.988554	18.46
70	90777.03	0.008860	0.991140	18.83	70	84457.12	0.012653	0.987347	17.67
71	89972.72	0.009883	0.990117	18.00	71	83388.50	0.013996	0.986004	16.89
72	89083.53	0.011042	0.988958	17.17	72	82221.43	0.015486	0.984514	16.12
73	88099.86	0.012358	0.987642	16.36	73	80948.11	0.017137	0.982863	15.37
74	87011.12	0.013854	0.986146	15.55	74	79560.87	0.018960	0.981040	14.63
75	85805.69	0.015556	0.984444	14.77	75	78052.38	0.020966	0.979034	13.90
76	84470.91	0.017496	0.982504	13.99	76	76415.91	0.023168	0.976832	13.19
77	82993.04	0.019708	0.980292	13.23	77	74645.51	0.025590	0.974410	12.49
78	81357.39	0.022235	0.977765	12.49	78	72735.36	0.028265	0.971735	11.80
79	79548.37	0.025125	0.974875	11.76	79	70679.48	0.031237	0.968763	11.13
80	77549.71	0.028433	0.971567	11.05	80	68471.68	0.034555	0.965445	10.48
81	75344.77	0.032222	0.967778	10.36	81	66105.62	0.038283	0.961717	9.83
82	72917.01	0.036568	0.963432	9.69	82	63574.91	0.042494	0.957506	9.20
83	70250.59	0.041556	0.958444	9.04	83	60873.34	0.047282	0.952718	8.59
84	67331.28	0.047284	0.952716	8.41	84	57995.12	0.052759	0.947241	7.99
85	64147.57	0.053868	0.946132	7.80	85	54935.38	0.059062	0.940938	7.41
86	60692.09	0.061437	0.938563	7.21	86	51690.80	0.066361	0.933639	6.84
87	56963.35	0.070142	0.929858	6.65	87	48260.55	0.074865	0.925135	6.29
88	52967.83	0.080153	0.919847	6.12	88	44647.53	0.084832	0.915168	5.76
89	48722.27	0.091666	0.908334	5.61	89	40860.01	0.096579	0.903421	5.25

Cuadro 5.2: Tabla de mortalidad de afiliados para ambos sexos

Mujeres					Hombres				
x	l_x	q_x	p_x	e_x	x	l_x	q_x	p_x	e_x
90	44256.11	0.104897	0.895103	5.12	90	36913.78	0.110502	0.889498	4.76
91	39613.76	0.120093	0.879907	4.66	91	32834.74	0.127085	0.872915	4.29
92	34856.42	0.137523	0.862477	4.23	92	28661.93	0.146926	0.853074	3.84
93	30062.88	0.157481	0.842519	3.83	93	24450.76	0.170751	0.829249	3.41
94	25328.55	0.180283	0.819717	3.45	94	20275.76	0.199438	0.800562	3.01
95	20762.25	0.206257	0.793743	3.10	95	16232.00	0.234016	0.765984	2.64
96	16479.90	0.235733	0.764267	2.77	96	12433.46	0.275654	0.724346	2.29
97	12595.05	0.269026	0.730974	2.47	97	9006.13	0.325598	0.674402	1.97
98	9206.65	0.306409	0.693591	2.20	98	6073.76	0.385024	0.614976	1.69
99	6385.66	0.348080	0.651920	1.95	99	3735.22	0.454756	0.545244	1.43
100	4162.94	0.394118	0.605882	1.73	100	2036.60	0.534786	0.465214	1.20
101	2522.25	0.444430	0.555570	1.53	101	947.46	0.623561	0.376439	1.01
102	1401.29	0.498683	0.501317	1.35	102	356.66	0.717131	0.282869	0.84
103	702.49	0.556249	0.443751	1.19	103	100.89	0.808558	0.191442	0.71
104	311.73	0.616142	0.383858	1.05	104	19.31	0.888450	0.111550	0.62
105	119.66	0.676990	0.323010	0.93	105	2.15	0.947678	0.052322	0.55
106	38.65	0.737054	0.262946	0.83	106	0.11	0.982154	0.017846	0.52
107	10.16	0.794310	0.205690	0.74	107	0.00	0.996212	0.003788	0.50
108	2.09	0.846635	0.153365	0.67	108	0.00	0.999607	0.000393	0.50
109	0.32	0.892075	0.107925	0.61	109	0.00	0.999986	0.000014	0.50
110	0.03	0.929172	0.070828	0.50	110	0.00	1.000000	0.000000	0.50

Cuadro 5.3: Tabla de mortalidad de afiliados para ambos sexos

Tabla de mortalidad pensionistas de invalidez

Mujeres					Hombres				
x	l_x	q_x	p_x	e_x	x	l_x	q_x	p_x	e_x
20	100000.00	0.007903	0.992097	27.46	20	100000.00	0.007903	0.992097	26.55
21	99209.65	0.010739	0.989261	26.68	21	99209.65	0.010739	0.989261	25.75
22	98144.28	0.014085	0.985915	25.96	22	98144.28	0.014085	0.985915	25.03
23	96761.96	0.017866	0.982134	25.32	23	96761.96	0.017866	0.982134	24.38
24	95033.23	0.021960	0.978040	24.78	24	95033.23	0.021960	0.978040	23.81
25	92946.33	0.026205	0.973795	24.32	25	92946.33	0.026205	0.973795	23.34
26	90510.66	0.030420	0.969580	23.96	26	90510.66	0.030420	0.969580	22.95
27	87757.36	0.034417	0.965583	23.70	27	87757.36	0.034417	0.965583	22.66
28	84736.98	0.038028	0.961972	23.52	28	84736.98	0.038028	0.961972	22.45
29	81514.64	0.041111	0.958889	23.43	29	81514.64	0.041111	0.958889	22.31
30	78163.48	0.043570	0.956430	23.42	30	78163.48	0.043570	0.956430	22.25
31	74757.92	0.045352	0.954648	23.46	31	74757.92	0.045352	0.954648	22.24
32	71367.49	0.046452	0.953548	23.55	32	71367.49	0.046452	0.953548	22.27
33	68052.34	0.046903	0.953097	23.68	33	68052.34	0.046903	0.953097	22.33
34	64860.47	0.046772	0.953228	23.82	34	64860.47	0.046772	0.953228	22.41
35	61826.83	0.046146	0.953854	23.96	35	61826.83	0.046146	0.953854	22.48
36	58973.75	0.045128	0.954872	24.10	36	58973.75	0.045128	0.954872	22.54
37	56312.40	0.043821	0.956179	24.21	37	56312.40	0.043821	0.956179	22.59
38	53844.72	0.042330	0.957670	24.30	38	53844.72	0.042330	0.957670	22.60
39	51565.49	0.040748	0.959252	24.35	39	51565.49	0.040748	0.959252	22.58
40	49464.29	0.039162	0.960838	24.36	40	49464.29	0.039162	0.960838	22.51
41	47527.19	0.037644	0.962356	24.33	41	47527.19	0.037644	0.962356	22.41
42	45738.09	0.036257	0.963743	24.27	42	45738.09	0.036257	0.963743	22.27
43	44079.74	0.035056	0.964944	24.16	43	44079.74	0.035056	0.964944	22.09
44	42534.47	0.034084	0.965916	24.02	44	42534.47	0.034084	0.965916	21.87
45	41084.71	0.033346	0.966654	23.85	45	41084.71	0.033346	0.966654	21.62
46	39714.69	0.032724	0.967276	23.66	46	39714.69	0.032909	0.967091	21.35
47	38415.07	0.032035	0.967965	23.44	47	38407.70	0.032907	0.967093	21.06
48	37184.45	0.031567	0.968433	23.20	48	37143.82	0.033005	0.966995	20.76
49	36010.64	0.031288	0.968712	22.94	49	35917.87	0.033196	0.966804	20.45
50	34883.92	0.031171	0.968829	22.66	50	34725.56	0.033468	0.966532	20.14
51	33796.57	0.031189	0.968811	22.38	51	33563.35	0.033814	0.966186	19.82
52	32742.48	0.031322	0.968678	22.08	52	32428.43	0.034225	0.965775	19.50
53	31716.93	0.031546	0.968454	21.78	53	31318.55	0.034692	0.965308	19.17
54	30716.39	0.031841	0.968159	21.47	54	30232.05	0.035206	0.964794	18.84
55	29738.35	0.032184	0.967816	21.16	55	29167.70	0.035757	0.964243	18.51
56	28781.25	0.032554	0.967446	20.85	56	28124.76	0.036334	0.963666	18.18
57	27844.30	0.032927	0.967073	20.53	57	27102.86	0.036929	0.963071	17.84
58	26927.47	0.033278	0.966722	20.21	58	26101.99	0.037528	0.962472	17.51
59	26031.37	0.033583	0.966417	19.89	59	25122.45	0.038119	0.961881	17.17
60	25157.16	0.033815	0.966185	19.57	60	24164.81	0.038690	0.961310	16.83
61	24306.48	0.033948	0.966052	19.23	61	23229.87	0.039227	0.960773	16.49
62	23481.33	0.033980	0.966020	18.89	62	22318.64	0.039720	0.960280	16.14
63	22683.43	0.033934	0.966066	18.54	63	21432.13	0.040182	0.959818	15.79
64	21913.69	0.033831	0.966169	18.17	64	20570.95	0.040628	0.959372	15.43
65	21172.32	0.033696	0.966304	17.79	65	19735.21	0.041076	0.958924	15.06

Cuadro 5.4: Tabla de mortalidad pensionistas de invalidez para ambos sexos

Mujeres					Hombres				
x	l_x	q_x	p_x	e_x	x	l_x	q_x	p_x	e_x
66	20458.90	0.033551	0.966449	17.40	66	18924.56	0.041546	0.958454	14.69
67	19772.48	0.033419	0.966581	16.98	67	18138.32	0.042056	0.957944	14.30
68	19111.71	0.033321	0.966679	16.55	68	17375.49	0.042628	0.957372	13.91
69	18474.89	0.033281	0.966719	16.11	69	16634.81	0.043282	0.956718	13.50
70	17860.03	0.033320	0.966680	15.64	70	15914.83	0.044042	0.955958	13.09
71	17264.94	0.033461	0.966539	15.16	71	15213.91	0.044933	0.955067	12.67
72	16687.25	0.033727	0.966273	14.67	72	14530.30	0.045983	0.954017	12.24
73	16124.43	0.034146	0.965854	14.17	73	13862.16	0.047223	0.952777	11.81
74	15573.84	0.034746	0.965254	13.65	74	13207.55	0.048688	0.951312	11.37
75	15032.72	0.035559	0.964441	13.12	75	12564.50	0.050419	0.949581	10.93
76	14498.17	0.036625	0.963375	12.59	76	11931.01	0.052464	0.947536	10.48
77	13967.17	0.037990	0.962010	12.05	77	11305.06	0.054879	0.945121	10.03
78	13436.56	0.039710	0.960290	11.50	78	10684.66	0.057731	0.942269	9.59
79	12902.99	0.041841	0.958159	10.96	79	10067.82	0.061090	0.938910	9.14
80	12363.12	0.044418	0.955582	10.42	80	9452.77	0.064995	0.935005	8.71
81	11813.97	0.047481	0.952519	9.88	81	8838.39	0.069475	0.930525	8.28
82	11253.03	0.051079	0.948921	9.34	82	8224.34	0.074562	0.925438	7.86
83	10678.24	0.055268	0.944732	8.82	83	7611.12	0.080288	0.919712	7.45
84	10088.08	0.060111	0.939889	8.31	84	7000.04	0.086680	0.913320	7.06
85	9481.67	0.065682	0.934318	7.81	85	6393.27	0.093762	0.906238	6.68
86	8858.90	0.072057	0.927943	7.32	86	5793.83	0.101550	0.898450	6.32
87	8220.56	0.079321	0.920679	6.85	87	5205.47	0.110046	0.889954	5.97
88	7568.50	0.087564	0.912436	6.40	88	4632.63	0.119239	0.880761	5.65
89	6905.77	0.096877	0.903123	5.96	89	4080.24	0.129101	0.870899	5.35
90	6236.76	0.107352	0.892648	5.55	90	3553.47	0.139578	0.860422	5.07
91	5567.23	0.119076	0.880924	5.16	91	3057.49	0.150594	0.849406	4.81
92	4904.30	0.132130	0.867870	4.79	92	2597.05	0.162042	0.837958	4.57
93	4256.30	0.146579	0.853421	4.44	93	2176.22	0.173788	0.826212	4.36
94	3632.41	0.162470	0.837530	4.11	94	1798.02	0.185664	0.814336	4.17
95	3042.26	0.179822	0.820178	3.82	95	1464.19	0.197474	0.802526	4.01
96	2495.19	0.198622	0.801378	3.54	96	1175.05	0.208995	0.791005	3.87
97	1999.59	0.218815	0.781185	3.30	97	929.47	0.219978	0.780022	3.76
98	1562.05	0.240301	0.759699	3.08	98	725.01	0.230157	0.769843	3.68
99	1186.69	0.262929	0.737071	2.90	99	558.14	0.239257	0.760743	3.64
100	874.67	0.286494	0.713506	2.75	100	424.60	0.246996	0.753004	3.62
101	624.09	0.310737	0.689263	2.66	101	319.73	0.253101	0.746899	3.65
102	430.16	0.335351	0.664649	2.63	102	238.80	0.257316	0.742684	3.71
103	285.91	0.359985	0.640015	2.70	103	177.36	0.259410	0.740590	3.83
104	182.98	0.384255	0.615745	2.94	104	131.35	0.259191	0.740809	3.99
105	112.67	0.407753	0.592247	3.46	105	97.30	0.256516	0.743484	4.22
106	66.73	0.000000	1.000000	4.50	106	72.34	0.000000	1.000000	4.50
107	66.73	0.000000	1.000000	3.50	107	72.34	0.000000	1.000000	3.50
108	66.73	0.000000	1.000000	2.50	108	72.34	0.000000	1.000000	2.50
109	66.73	0.000000	1.000000	1.50	109	72.34	0.000000	1.000000	1.50
110	66.73	0.000000	1.000000	0.50	110	72.34	0.000000	1.000000	0.50

Cuadro 5.5: Tabla de mortalidad pensionistas de invalidez para ambos sexos

Tabla de decrementos múltiples para afiliados

Mujeres					Hombres				
x	l_x	d_x^3	d_x^4	d_x^5	x	l_x	d_x^3	d_x^4	d_x^5
15	100000.00	0.0000	0.2625	39.7689	15	100000.00	0.0000	2.3500	79.5059
16	99959.97	0.0000	0.2852	39.8183	16	99918.14	0.0000	2.4671	92.7124
17	99919.87	0.0000	0.3187	39.9539	17	99822.96	0.0000	2.6256	105.7066
18	99879.59	0.0000	0.3652	40.1762	18	99714.63	0.0000	2.8288	118.0281
19	99839.05	0.0000	0.4280	40.4863	19	99593.78	0.0000	3.0811	129.2650
20	99798.14	0.0000	0.5115	40.8858	20	99461.43	0.0000	3.3878	139.0864
21	99756.74	0.0000	0.6218	41.3772	21	99318.96	0.0000	3.7554	147.2628
22	99714.74	0.0000	0.7665	41.9631	22	99167.94	0.0000	4.1909	153.6754
23	99672.01	0.0000	0.9557	42.6471	23	99010.07	0.0000	4.7021	158.3128
24	99628.41	0.0000	1.2017	43.4333	24	98847.06	0.0000	5.2965	161.2597
25	99583.77	0.0000	1.5197	44.3265	25	98680.50	0.0000	5.9816	162.6788
26	99537.93	0.0000	1.9274	45.3323	26	98511.84	0.0000	6.7634	162.7901
27	99490.67	0.0000	2.4447	46.4570	27	98342.29	0.0000	7.6459	161.8498
28	99441.77	0.0000	3.0925	47.7080	28	98172.79	0.0000	8.6300	160.1318
29	99390.97	0.0000	3.8906	49.0932	29	98004.03	0.0000	9.7120	157.9128
30	99337.98	0.0000	4.8542	50.6219	30	97836.40	0.0000	10.8822	155.4617
31	99282.51	0.0000	5.9897	52.3043	31	97670.06	0.0000	12.1234	153.0334
32	99224.21	0.0000	7.2907	54.1519	32	97504.90	0.0000	13.4121	150.8675
33	99162.77	0.0000	8.7569	56.1777	33	97340.62	0.0000	14.7426	149.1902
34	99097.83	0.0000	10.4018	58.3958	34	97176.69	0.0000	16.1293	148.2201
35	99029.04	0.0000	12.2464	60.8223	35	97012.34	0.0000	17.5946	148.0983
36	98955.97	0.0000	14.3221	63.4750	36	96846.65	0.0000	19.1700	148.8013
37	98878.17	0.0000	16.6754	66.3736	37	96678.68	0.0000	20.8981	150.2949
38	98795.12	0.0000	19.3722	69.5402	38	96507.48	0.0000	22.8346	152.5563
39	98706.21	0.0000	22.5049	72.9991	39	96332.09	0.0000	25.0518	155.5721
40	98610.71	0.0000	26.2022	76.7774	40	96151.47	0.0000	27.6442	159.3364
41	98507.73	0.0000	30.6422	80.9052	41	95964.49	0.0000	30.7360	163.8501
42	98396.18	0.0000	36.0735	85.4157	42	95769.90	0.0000	34.4926	169.1189
43	98274.69	0.0000	42.8450	90.3457	43	95566.29	0.0000	39.1377	175.1522
44	98141.50	0.0000	51.4516	95.7354	44	95352.00	0.0000	44.9780	181.9619
45	97994.31	0.0000	62.4698	101.6293	45	95125.06	0.0000	52.3446	189.5606
46	97830.21	0.0000	76.4220	108.0759	46	94883.16	0.0000	61.5022	197.9605
47	97645.71	0.0000	93.8469	115.1281	47	94623.69	0.0000	72.7154	207.1716
48	97436.74	0.0000	115.2515	122.8439	48	94343.81	0.0000	86.2280	217.2011
49	97198.64	0.5348	141.0156	131.2861	49	94040.38	1.1503	102.2166	228.0861
50	96925.81	0.5663	171.2576	140.5235	50	93708.92	1.2519	120.7293	239.9143
51	96613.46	0.8073	205.6661	150.6321	51	93347.03	1.7298	141.6085	252.7887
52	96256.35	1.4743	243.3180	161.6950	52	92950.90	2.9190	164.4051	266.8230
53	95849.87	3.2826	282.5240	173.8047	53	92516.75	5.7867	188.3015	282.1442
54	95390.26	8.4804	320.7588	187.0636	54	92040.52	12.9648	212.0617	298.8925
55	94873.95	24.1915	354.7375	201.5801	55	91516.60	31.5764	234.0352	317.2128
56	94293.44	72.5082	380.6721	217.4457	56	90933.78	80.4102	252.2288	337.2240
57	93622.82	217.1865	395.1905	234.6533	57	90263.92	205.8447	264.7314	358.9270
58	92775.79	617.6109	397.3144	252.8575	58	89434.41	508.8798	270.7901	381.9776
59	91508.01	1579.7421	386.7271	270.8547	59	88272.76	1165.1609	269.9897	405.2459
60	89270.68	3429.3311	362.8255	285.9273	60	86432.37	2363.9797	261.7962	426.2826

Cuadro 5.6: Tabla de decrementos múltiples para afiliados para ambos sexos

Mujeres					Hombres				
x	l_x	d_x^3	d_x^4	d_x^5	x	l_x	d_x^3	d_x^4	d_x^5
61	85192.60	5946.7257	325.8320	294.1582	61	83380.31	4058.8286	245.8758	441.4116
62	78625.88	7981.1224	279.4520	293.0181	62	78634.19	5708.3608	223.1520	447.4887
63	70072.29	8617.7852	230.8670	283.8489	63	72255.19	6707.3256	196.3402	444.0643
64	60939.79	7921.8651	186.9476	270.9496	64	64907.46	6833.8023	168.9762	433.7057
65	52560.03	6571.5448	151.2505	258.6912	65	57470.98	6284.7102	143.9531	420.4120
66	45578.54	5190.9829	124.0608	249.6178	66	50621.90	5427.4077	122.7740	407.6344
67	40013.88	4092.4896	103.9811	244.3199	67	44664.09	4564.9845	105.6997	397.2356
68	35573.09	3354.9204	89.2525	242.0825	68	39596.17	3864.1465	92.2757	389.4442
69	31886.83	2907.3168	78.3756	241.6242	69	35250.30	3368.8420	81.7841	383.3145
70	28659.52	2619.1406	70.0961	241.7871	70	31416.36	3012.5361	73.4048	377.5606
71	25728.49	2409.1041	63.5153	241.8054	71	27952.86	2735.3327	66.4748	371.1719
72	23014.07	2225.1563	58.0819	241.2501	72	24779.88	2498.2364	60.5586	363.4744
73	20489.58	2032.6382	53.4681	240.0350	73	21857.61	2275.2725	55.3733	354.1177
74	18163.44	1811.3802	49.5022	238.4476	74	19172.85	2050.1412	50.7451	343.0873
75	16064.11	1556.5502	46.1203	237.1417	75	16728.87	1814.8648	46.5808	330.7031
76	14224.29	1290.7558	43.2988	236.9298	76	14536.72	1571.6822	42.8403	317.5675
77	12653.31	1044.9180	40.9833	238.4414	77	12604.63	1336.3164	39.4964	304.4479
78	11328.97	834.5896	39.0717	241.9876	78	10924.37	1121.2359	36.5070	291.9511
79	10213.32	663.8127	37.4327	247.6207	79	9474.68	932.6160	33.8161	280.4300
80	9264.45	530.1710	35.9229	255.2014	80	8227.82	772.0744	31.3593	270.0291
81	8443.16	428.4855	34.4003	264.4461	81	7154.35	638.3696	29.0704	260.7337
82	7715.83	352.7261	32.7588	274.9542	82	6226.18	528.7458	26.8926	252.4128
83	7055.39	294.7130	30.9505	286.2741	83	5418.13	439.3355	24.7848	244.8635
84	6443.45	247.5368	28.9591	297.9823	84	4709.15	364.8868	22.7175	237.8882
85	5868.97	207.0539	26.7938	309.6897	85	4083.65	301.5090	20.6767	231.3457
86	5325.43	170.9003	24.4827	321.0114	86	3530.12	246.7411	18.6603	225.1356
87	4809.04	137.9301	22.0664	331.5352	87	3039.58	199.0702	16.6743	219.1699
88	4317.51	107.8560	19.5926	340.7868	88	2604.67	157.6051	14.7297	213.3454
89	3849.27	81.1447	17.1110	348.1785	89	2218.99	121.8408	12.8403	207.5134
90	3402.84	59.2452	14.6684	352.9141	90	1876.80	91.5478	11.0202	201.4451
91	2976.01	42.5905	12.3078	353.9500	91	1572.78	66.6898	9.2834	194.7884
92	2567.16	30.5670	10.0729	350.1025	92	1302.02	46.9683	7.6440	187.0449
93	2176.42	22.1946	8.0087	340.2243	93	1060.36	31.8496	6.1189	177.5933
94	1805.99	16.5133	6.1575	323.4055	94	844.80	20.6778	4.7285	165.7501
95	1459.92	12.7426	4.5542	299.1924	95	653.65	12.7561	3.4963	150.8839
96	1143.43	10.3133	3.2206	267.8017	96	486.51	7.4027	2.4456	132.5998
97	862.09	8.8436	2.1618	230.2863	97	344.06	3.9881	1.5949	110.9947
98	620.80	8.1018	1.3651	188.5872	98	227.48	1.9599	0.9515	86.9342
99	422.74	7.9747	0.8015	145.3985	99	137.64	0.8581	0.5066	62.2184
100	268.57	0.0000	0.4384	105.7476	100	74.05	0.0000	0.2336	39.5250
101	162.38	0.0000	0.2219	72.1093	101	34.30	0.0000	0.0892	21.3487
102	90.05	0.0000	0.1012	44.8768	102	12.86	0.0000	0.0265	9.2072
103	45.07	0.0000	0.0409	25.0584	103	3.62	0.0000	0.0056	2.9266
104	19.98	0.0000	0.0143	12.3019	104	0.69	0.0000	0.0008	0.6138
105	7.66	0.0000	0.0042	5.1833	105	0.08	0.0000	0.0001	0.0729

Cuadro 5.7: Tabla de decrementos múltiples para afiliados para ambos sexos

Apéndice B

Código de aplicativo web Shiny

Como bien sabemos, una aplicación Shiny posee dos clases de archivos: uno llamado *ui* que contiene la interfaz gráfica de la aplicación y otro denominado *server* que incluye la parte funcional de la aplicación. En nuestro caso, incluímos también un archivo denominado *global* que envuelve todas las funciones y algoritmos para la lectura de datos, manejo de objetos y resolución de ecuaciones.

Ui

```
library(shiny)
shinyUI(fluidPage(
    titlePanel("Proyecto␣de␣Titulacion"),
    h3("Seguro␣de␣invalidez:␣Una␣aplicacion␣al␣caso␣ecuatoriano"),
    #Autor
    p("Proponente:␣Mateo␣Sebastian␣Pavon␣Valencia"),
    hr(),
    HTML("<style>␣body␣{background-image:␣url('https://
␣␣␣␣static3.depositphotos.com/1000635/120/i/950
␣␣␣␣/depositphotos_1208368-stock-photo-white-paper
␣␣␣␣-seamless-background.jpg');
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣background-size:␣cover;}</style>"),
    #Ingreso de datos
    textInput(inputId="nomb",label = "Nombre:",value="␣"),
    fluidRow(
        column(width=3,
               numericInput(inputId = "edad",
                            label = "Edad:",value =20,
                            min = 20, max = 105)
        ),
        column(width=3,
```

```
        selectInput(inputId = "genero",
                    label = "Genero:",
                    choices = c("Hombre","Mujer"))
    ),
    column(width=3,
        selectInput(inputId = "metodo",
                    label = "Metodo:",
                    choices = c("Analitico","Numerico"))

    ),
    column(width=3,
        numericInput(inputId = "interes",
                     label = "Interes(%):",
                     value = 0,min = 0, max = 100),
                     span(textOutput("ind1"),
                     style="color:#89200A"),
        span(textOutput("warning1"),
        style="color:#14890A␣␣")

    )

),
strong("Último␣ano␣de␣remuneracion:"),
fluidRow(
    column(width=2,
        numericInput(inputId = "rem1",
                     label =
                     "Remuneracion␣1($):",value = 0,min = 0),
        span(textOutput("warning2"),
        style="color:#14890A␣␣"),
        numericInput(inputId = "rem2",
                     label =
                     "Remuneracion␣2($):",value = 0,min = 0),
        span(textOutput("warning3"), style="color:#14890A")
        ),
    column(width=2,
        numericInput(inputId = "rem3",
                     label =
                     "Remuneracion␣3($):",value = 0,min = 0),
```

```
            span(textOutput("warning4"), style="color:#14890A"),
            numericInput(inputId = "rem4",
                         label =
                         "Remuneracion␣4($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning5"), style="color:#14890A")
     ),
     column(width=2,
            numericInput(inputId = "rem5",
                         label =
                         "Remuneracion␣5($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning6"), style="color:#14890A"),
            numericInput(inputId = "rem6",
                         label =
                         "Remuneracion␣6($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning7"), style="color:#14890A")
     ),
     column(width=2,
            numericInput(inputId = "rem7",
                         label =
                         "Remuneracion␣7($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning8"), style="color:#14890A"),
            numericInput(inputId = "rem8",
                         label =
                         "Remuneracion␣8($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning9"), style="color:#14890A")
     ),
     column(width=2,
            numericInput(inputId = "rem9",
                         label =
                         "Remuneracion␣9($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning10"), style="color:#14890A"),
            numericInput(inputId = "rem10",
                         label =
                         "Remuneracion␣10($):",value = 0,min = 0),
            span(textOutput("warning11"), style="color:#14890A")
     ),
     column(width=2,
            numericInput(inputId = "rem11",
                         label =
```

```
                                "Remuneracion␣11($):",value = 0,min = 0),
                  span(textOutput("warning12"), style="color:#14890A"),
                  numericInput(inputId = "rem12",
                                label =
                                "Remuneracion␣12($):",value = 0,min = 0),
                  span(textOutput("warning13"), style="color:#14890A")
           )
     ),
     #Boton de calculo
     actionButton(inputId="boton1",
     label="Calcular", style=
     "color:#07167F;␣background-color:#84E2DC"),
     HTML("<Center>"),
     p(strong("Resultados")),
     # display text output
     textOutput("mensual")
))
```

Server

```r
source("global.R")
library(shiny)
shinyServer(function(input, output) {
    #Advertencia Interes
    output$warning1<-renderText({
        if(input$interes<0){
            "Error: El interes tiene que ser positivo."
        }}
    )
    #Advertencia Salarios
    output$warning2<-renderText({
        if(input$rem1<0){
            "Error: La remuneracion tiene que ser positiva."
        }}
    )
    output$warning3<-renderText({
        if(input$rem2<0){
            "Error: La remuneracion tiene que ser positiva."
        }}
    )
    output$warning4<-renderText({
        if(input$rem3<0){
            "Error: La remuneracion tiene que ser positiva."
        }}
    )
    output$warning5<-renderText({
        if(input$rem4<0){
            "Error: La remuneracion tiene que ser positiva."
        }}
    )
    output$warning6<-renderText({
        if(input$rem5<0){
            "Error: La remuneracion tiene que ser positiva."
        }}
    )
    output$warning7<-renderText({
        if(input$rem6<0){
            "Error: La remuneracion tiene que ser positiva."
```

```
    }}
)
output$warning8<-renderText({
    if(input$rem7<0){
        "Error:␣La␣remuneracion␣tiene␣que␣ser␣positiva."
    }}
)
output$warning9<-renderText({
    if(input$rem8<0){
        "Error:␣La␣remuneracion␣tiene␣que␣ser␣positiva."
    }}
)
output$warning10<-renderText({
    if(input$rem9<0){
        "Error:␣La␣remuneracion␣tiene␣que␣ser␣positiva."
    }}
)
output$warning11<-renderText({
    if(input$rem10<0){
        "Error:␣La␣remuneracion␣tiene␣que␣ser␣positiva."
    }}
)
output$warning12<-renderText({
    if(input$rem11<0){
        "Error:␣La␣remuneracion␣tiene␣que␣ser␣positiva."
    }}
)
output$warning13<-renderText({
    if(input$rem12<0){
        "Error:␣La␣remuneracion␣tiene␣que␣ser␣positiva."
    }}
)

#Guardo los input del action button
vals <- eventReactive(input$boton1, {
    i<-input$interes
    age<-input$edad
    salary1<-input$rem1
    salary2<-input$rem2
```

```
    salary3<-input$rem3
    salary4<-input$rem4
    salary5<-input$rem5
    salary6<-input$rem6
    salary7<-input$rem7
    salary8<-input$rem8
    salary9<-input$rem9
    salary10<-input$rem10
    salary11<-input$rem11
    salary12<-input$rem12
    #Cambiar el valor del genero
    if(input$genero=="Hombre"){
        gender<-1
    }
    else{
        gender<-0
    }
    #Cambiar el metodo
    if(input$metodo=="Analitico"){
        method<-1
    }
    if(input$metodo=="Numerico"){
        method<-2
    }
    #Asigno los inputs a vals
    vals<-c(i,age,
            salary1,salary2,salary3,salary4,salary5,salary6
            ,salary7,salary8,salary9,salary10,salary11,salary12
            ,gender,method)
})

vals1 <- eventReactive(input$boton1, {
   if(input$genero=="Hombre"){
       aux="incapacitado"
   }
   else{
       aux="incapacitada"
   }
   vals1=c(input$nomb,aux)
```

```
})

#Pago mensual
output$mensual<-renderText({
    #Action button 1
    interes=vals()[1]/100
    edad=vals()[2]
    salario1=vals()[3]
    salario2=vals()[4]
    salario3=vals()[5]
    salario4=vals()[6]
    salario5=vals()[7]
    salario6=vals()[8]
    salario7=vals()[9]
    salario8=vals()[10]
    salario9=vals()[11]
    salario10=vals()[12]
    salario11=vals()[13]
    salario12=vals()[14]
    genero=vals()[15]
    metodo=vals()[16]
    #Action button 2
    nombre=vals1()[1]
    auxiliar=vals1()[2]
    #El salario es el promedio del ultimo ano de remuneracion
    salario=mean(c(salario1,salario2,salario3,
    salario4,salario5,salario6,salario7,salario8,
    salario9,salario10,salario11,salario12))
    #nombre=vals()[6]
    if(metodo==1){#Metodo Analitico
        paste(nombre, ", de ",edad,"anos, debe
            realizar pagos mensuales de ",
              "$",round(pago_an(genero,edad,interes,salario),2),
              "para recibir:
                    $",round(salario,2),
                 "mensuales en caso de fallecimiento o $",

                 round(0.80*salario,2),
                 "mensuales
```

```
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣mientras␣se␣encuentre␣",
                     auxiliar,
                     "(durante␣los␣2␣anos
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣de␣plazo␣del␣contrato).")
        }else{
            paste(nombre, ",␣de␣",edad,"anos,␣debe
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣realizar␣pagos␣mensuales␣de␣",
                  "$",round(pago_pr(genero,edad,interes,salario),2)
                  ,"para␣recibir:
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣$", round(salario,2),
                     "mensuales␣en␣caso␣de␣fallecimiento␣o␣$",

                     round(0.80*salario,2),
                     "mensuales
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣mientras␣se␣encuentre␣",
                     auxiliar, "(durante␣los␣2␣anos
␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣de␣plazo␣del␣contrato).")
        }
    })
})
```

Global

```r
#Librerias
library(shiny)
library(dplyr)
library(tidyverse)
library(ggplot2)
library(plotly)
library(rio)
library(rstanarm)
library(datos)
library(see)
library(pls)
library(tidyr)

### Lectura de tablas ###

#Afiliados
afiliados <- read.csv("afiliados.txt", sep="")
#Pensionistas invalidez
invalidez <- read.csv("pensionistas_invalidez.txt", sep="")
#Decrementos
decremento<- read.csv("decrementos.txt", sep="")
#px y qx para el decremento de invalidez
decremento=decremento %>%mutate(qxm=dx4m/lxm,
pxm=1-qxm,qxh=dx4h/lxh,pxh=1-qxh)

#### CASO ANALITICO ####

## Fuerzas de transicion (0:mujer,1:hombre)

#Vivo-invalidez
ux12_an=function(binario,edad){
  if(binario==0){
    ux12_an=-log(decremento[decremento$xm ==edad,"pxm"])
  }
  else{
    ux12_an=-log(decremento[decremento$xh ==edad,"pxh"])
  }
  return(ux12_an)
```

```
}
#Vivo-muerto
ux13_an=function(binario,edad){
  if(binario==0){
    ux13_an=-log(afiliados[afiliados$xm ==edad,"pxm"])
  }
  else{
    ux13_an=-log(afiliados[afiliados$xh ==edad,"pxh"])
  }
  return(ux13_an)
}

#invalidez-muerto
ux23_an=function(binario,edad){
  if(binario==0){
    ux23_an=-log(invalidez[invalidez$xm ==edad,"pxm"])
  }
  else{
    ux23_an=-log(invalidez[invalidez$xh ==edad,"pxh"])
  }
  return(ux23_an)
}

# Para el primer y segundo ano
tpx11_an=function(binario,edad){
  x=vector(length = 25)
  x[1:13]=exp(-(ux12_an(binario,edad)+ux13_an(binario,edad))*
  seq(0,12/12,by=1/12))
  x[14:25]=exp(-(ux12_an(binario,edad)+ux13_an(binario,edad)))*
    exp(-(ux12_an(binario,edad+1)+ux13_an(binario,edad+1))*
    (seq(13/12,24/12,by=1/12)-1))
  return(x)
}


tpx12_an=function(binario,edad){
  x=vector(length = 25)
  x[1:13]=(ux12_an(binario,edad)/
             (ux23_an(binario,edad)-ux12_an(binario,edad)-
```

```
                  ux13_an(binario,edad)))*
      (exp(-(ux12_an(binario,edad)+ux13_an(binario,edad))*
      seq(0,12/12,by=1/12))-
         exp(-ux23_an(binario,edad)*seq(0,12/12,by=1/12) ) )
  x[14:25]=( (  exp(-(ux12_an(binario,edad)
  +ux13_an(binario,edad)))*ux12_an(binario,edad+1)*
                    exp(-(ux12_an(binario,edad+1)+
                    ux13_an(binario,edad+1))*
                          (seq(13/12,24/12,by=1/12)-1) )      )
               /(ux23_an(binario,edad+1)-
               ux12_an(binario,edad+1)-
                    ux13_an(binario,edad+1)) )    +
                    #suma
      (  (ux12_an(binario,edad)/
            (ux23_an(binario,edad)-ux12_an(binario,edad)-
               ux13_an(binario,edad)))*
           (exp(-(ux12_an(binario,edad)+ux13_an(binario,edad)))-
              exp(-ux23_an(binario,edad) ) )-
           ( exp(-(ux12_an(binario,edad)+
           ux13_an(binario,edad)))*ux12_an(binario,edad+1)  )/
           ( ux23_an(binario,edad+1)-ux12_an(binario,edad+1)-
               ux13_an(binario,edad+1)  ) )*
               exp(-ux23_an(binario,edad+1)*
               (seq(13/12,24/12,by=1/12)-1))
  return(x)
}

# Tabla con prob. transicion en los dos anos
tpx_an=function(binario,edad){
  analitico=data.frame("tiempo"=seq(0,24/12,by = 1/12),
  "tpx11"=tpx11_an(binario,edad)
                     ,"tpx12"=tpx12_an(binario,edad))
  return(analitico)
}

#El salario es el promedio del ultimo ano de remuneracion

#Costo invalidez: renta actuarial temporal pospagable
costoi_an=function(binario,edad,interes,salario){
```

```
  x=0.80*salario*tpx12_an(binario,edad)[2:25]*
  (1+interes)^(-seq(1/12,24/12,1/12))
  x=sum(x)
  return(x)
}


# Costo fallecimiento: renta actuarial temporal prepagable
tq_xmast=function(binario,edad){
  x=vector(length = 24)
  x[1:12]=1-exp(-ux13_an(binario,edad)/12)
  x[13:24]=1-exp(-ux13_an(binario,edad+1)/12)
  return(x)
}
costos_an=function(binario,edad,interes,salario){
  x=salario*tq_xmast(binario,edad)*(1+interes)^(-seq(0,23/12,1/12))
  x=sum(x)
  return(x)
}


#Costo total
costo_total_an=function(binario,edad,interes,salario){
  x=costoi_an(binario,edad,interes,salario)+
  costos_an(binario,edad,interes,salario)
  return(x)
}


#Pago Mensual
pago_an=function(binario,edad,interes,salario){
  x=costo_total_an(binario,edad,interes,salario)/
    sum( (1+interes)^(-seq(0,23/12,1/12))*

    tpx11_an(binario,edad)[1:24])
  return(x)
}
```

```
#### CASO NUMERICO ####

## Fuerzas de transicion(0:mujer,1:hombre)
#t en[0,1]

#Vivo-invalidez
ux12_pr=function(binario,edad,t){
  if(binario==0){
    ux12_pr=decremento[decremento$xm ==edad,"qxm"]/
    (1-t*decremento[decremento$xm ==edad,"qxm"])
  }
  else{
    ux12_pr=decremento[decremento$xm ==edad,"qxh"]/
    (1-t*decremento[decremento$xm ==edad,"qxh"])
  }
  return(ux12_pr)
}
#Vivo-muerto
ux13_pr=function(binario,edad,t){
  if(binario==0){
    ux13_pr=afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxm"]/
    (1-t*afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxm"])
  }
  else{
    ux13_pr=afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxh"]/
    (1-t*afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxh"])
  }
  return(ux13_pr)
}

#invalidez-muerto
ux23_pr=function(binario,edad,t){
  if(binario==0){
    ux23_pr=invalidez[invalidez$xm ==edad,"qxm"]/
    (1-t*invalidez[invalidez$xm ==edad,"qxm"])
  }
  else{
    ux23_pr=invalidez[invalidez$xm ==edad,"qxh"]/
    (1-t*invalidez[invalidez$xm ==edad,"qxh"])
```

```
  }
  return(ux23_pr)
}

#Para el primer ano
tpx_ano1_pr=function(binario,edad){
  x=vector(length = 13)
  y=vector(length = 13)
  #Inicializando
  tpx11=1
  tpx12=0
  i=2
  #Vectores donde se guardan las probabilidades
  x[1]=tpx11
  y[1]=tpx12
  #Runge Kutta
  for (t in seq(1/12,12/12,1/12)) {
    #1
    k1=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad,t)+
    ux13_pr(binario,edad,t))*tpx11)
    l1=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad,t)*
    tpx11-ux23_pr(binario,edad,t)*tpx12)
    #2
    k2=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad,t+1/24)+
    ux13_pr(binario,edad,t+1/24))*(tpx11+k1/2))
    l2=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad,t+1/24)*
    (tpx11+k1/2)-ux23_pr(binario,edad,t+1/24)*(tpx12+l1/2))
    #3
    k3=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad,t+1/24)+
    ux13_pr(binario,edad,t+1/24))*(tpx11+k2/2))
    l3=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad,t+1/24)*
    (tpx11+k2/2)-ux23_pr(binario,edad,t+1/24)*(tpx12+l2/2))
    #4
    k4=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad,t+1/12)+
    ux13_pr(binario,edad,t+1/12))*(tpx11+k3))
    l4=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad,t+1/12)*
    (tpx11+k3)-ux23_pr(binario,edad,t+1/12)*(tpx12+l3))
    #Resultado
    tpx11=tpx11+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
```

```
    tpx12=tpx12+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6
    x[i]=tpx11
    y[i]=tpx12
    i=i+1
  }
  resultado=data.frame("tiempo"=seq(0,12/12,1/12),
  "tpx11"=x,"tpx12"=y)
  return(resultado)
}


#Para el segundo ano
tpx_ano2_pr=function(binario,edad){
  x=vector(length = 13)
  y=vector(length = 13)
  #Inicializando
  tpx11=tpx_ano1_pr(binario,edad)[13,2]
  tpx12=tpx_ano1_pr(binario,edad)[13,3]
  i=2
  #Vectores donde se guardan las probabilidades
  x[1]=tpx11
  y[1]=tpx12
  #Runge Kutta
  for (t in seq(13/12,24/12,1/12)) {
    #1
    k1=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad+1,t)+
    ux13_pr(binario,edad+1,t))*tpx11)
    l1=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad+1,t)*
    tpx11-ux23_pr(binario,edad+1,t)*tpx12)
    #2
    k2=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad+1,t+1/24)+
    ux13_pr(binario,edad+1,t+1/24))*(tpx11+k1/2))
    l2=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad+1,t+1/24)*
    (tpx11+k1/2)-ux23_pr(binario,edad+1,t+1/24)*(tpx12+l1/2))
    #3
    k3=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad+1,t+1/24)+
    ux13_pr(binario,edad+1,t+1/24))*(tpx11+k2/2))
    l3=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad+1,t+1/24)*
    (tpx11+k2/2)-ux23_pr(binario,edad+1,t+1/24)*(tpx12+l2/2))
```

```
    #4
    k4=(1/12)*(-(ux12_pr(binario,edad+1,t+1/12)+
    ux13_pr(binario,edad+1,t+1/12))*(tpx11+k3))
    l4=(1/12)*(ux12_pr(binario,edad+1,t+1/12)*
    (tpx11+k3)-ux23_pr(binario,edad+1,t+1/12)*(tpx12+l3))
    #Resultado
    tpx11=tpx11+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
    tpx12=tpx12+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6
    x[i]=tpx11
    y[i]=tpx12
    i=i+1
  }
  resultado=data.frame("tiempo"=seq(12/12,24/12,1/12),
  "tpx11"=x,"tpx12"=y)
  return(resultado)
}

# Tabla con prob. transicion en los dos anos
tpx_pr=function(binario,edad){
  duplicado=tpx_ano2_pr(binario,edad)[-1,]
  row.names(duplicado)=c(1:12)
  tpx_pr=rbind(tpx_ano1_pr(binario,edad),duplicado)
  return(tpx_pr)
}


#Costo invalidez: renta actuarial temporal pospagable
costoi_pr=function(binario,edad,interes,salario){
  x=0.80*salario*tpx_pr(binario,edad)[-1,3]*
  (1+interes)^(-seq(1/12,24/12,1/12))
  x=sum(x)
  return(x)
}


# Costo fallecimiento: renta actuarial temporal prepagable
tq_xmast_1=function(binario,edad){
  x=vector(length = 24)
  if(binario==0){
```

```
    for (t in 1:12) {
      x[t]=(afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxm"]/12)/(1-(t/12)*
      afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxm"])
    }
    for (t in 13:24) {
      x[t]=(afiliados[afiliados$xm ==edad+1,"qxm"]/12)/
      (1-(t/12)*afiliados[afiliados$xm ==edad+1,"qxm"])
    }

  }
  else{
    for (t in 1:12) {
      x[t]=(afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxh"]/12)/(1-(t/12)*
      afiliados[afiliados$xm ==edad,"qxh"])
    }
    for (t in 13:24) {
      x[t]=(afiliados[afiliados$xm ==edad+1,"qxh"]/12)/(1-(t/12)*
      afiliados[afiliados$xm ==edad+1,"qxh"])
    }
  }
  return(x)
}

costos_pr=function(binario,edad,interes,salario){
  x=salario*tq_xmast_1(binario,edad)*
  (1+interes)^(-seq(0,23/12,1/12))
  x=sum(x)
  return(x)
}


#Costo total
costo_total_pr=function(binario,edad,interes,salario){
  x=costoi_pr(binario,edad,interes,salario)+
  costos_pr(binario,edad,interes,salario)
  return(x)
}
```

```
#Pago Mensual
pago_pr=function(binario,edad,interes,salario){
  x=costo_total_pr(binario,edad,interes,salario)/
    sum( (1+interes)^(-seq(0,23/12,1/12))*
    tpx_pr(binario,edad)[-25,2])
  return(x)
}
```

Bibliografía

[1] Ley Orgánica de Discapacidades. Technical report, Asamblea Nacional, República del Ecuador, 2012.

[2] Resolución C.D. 100: Reglamento régimen de trancisión seguro vejez y muerte. Technical report, Consejo Directivo del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, 2017.

[3] Resolución C.D. 553: Reglamento jubilación por invalidez y del subsidio por incapacidad. Technical report, Consejo Directivo del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, 2017.

[4] Resolución C.D. 554. Technical report, Consejo Directivo del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, 2017.

[5] Ley de Seguridad Social. Technical report, Asamblea Nacional, República del Ecuador, 2018.

[6] Acuerdo Mnisterial Nro. MDT-2020-249. Technical report, Ministerio del Trabajo, 2020.

[7] Boletín Estadístico Nro. 25 del IESS del año 2020. Technical report, Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, 2020.

[8] J. Arrieta, R. Ferreira, R. Pardo, y A. Rodríguez-Bernal. *Análisis numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Editorial Paraninfo, Madrid, Mayo 2020.

[9] Oscar Cuasapaz. Métodos numéricos en ecuaciones diferenciales ordinarias, págs. 59-65, 2019.

[10] José Devesa y Carlos Vidal. Apuntes de técnicas de la seguridad social. *Universidad de Valencia, Departamento de Economía Financiera y Actuarial*, 2005.

[11] D.C.M. Dickson, M.R. Hardy, y H.R. Waters. *Actuarial mathematics for life contingent risks*. International Series on Actuarial Science, Londres, Reino Unido, segunda edición, 2009.

[12] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social. *Prestaciones y Beneficios IESS*. Recuperado de: https://www.iess.gob.ec/en/web/afiliacion-voluntaria/prestaciones-y-beneficios3.

[13] Bernard Kolman y David R. Hill. *Álgebra lineal*. PEARSON Prentice Hall, México, octava edición, 2006.

[14] Demidowitsch. I. A. Maron y E. S. Schuwalowa. *Métodos numéricos de análisis*. Editorial Paraninfo, Madrid, 1980.

[15] Eliseo Navarro y Juan M. Nave. *Fundamentos de matemáticas financieras*. Antoni Bosch, Ciudad Real, CastillaLa Mancha, España, primera edición, 2001.

[16] Luis Ramírez. Cálculo del beneficio y costo de un seguro de vida, visto como un proceso estocástico mediante el método de aproximación numérica Runge Kutta., agosto 2017.

[17] Luis Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. Facultad de Ciencias - UNAM, Coyoacán, México, Enero 2012.

[18] Sheldon M. Ross. *Introduction to probability models*. Academic Press, Los Angeles, California, Estados Unidos, décima edición, 2010.

[19] MSc. Ruth Lucio, Econ, MSc. Nilhda Villacrés, MD, y MD Rodrigo Henríquez. Sistema de salud de Ecuador. págs. 177–187, 2011.

[20] Fernando Sandoya. *Matemáticas actuariales y operaciones de seguros*. ESPOL, Guayaquil, Ecuador, segunda edición edición, 2007.