ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EL SISTEMA DE CUENTAS NOCIONALES: ASPECTOS TEÓRICOS E IMPLEMENTACIONES PARA EL SISTEMA DE PENSIONES ECUATORIANO

TRABAJO DE TITULACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

EVELIN JASMIN CHILE TAIPE
evelin.chile@epn.edu.ec

CRISTIAN JAVIER VELASTEGUI PUCACHAQUI
xtian1608@outlook.com

Director: M.SC. DIEGO PAÚL HUARACA SHAGÑAY
diego.huaracas@epn.edu.ec

Codirector: M.SC. MÉNTHOR OSWALDO URVINA MAYORGA
menthor.urvina@epn.edu.ec

QUITO, OCTUBRE, 2021

CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado por EVELIN JASMIN CHILE TAIPE y CRISTIAN JAVIER VELASTEGUI PUCACHAQUI, bajo nuestra supervisión.

Firmado electrónicamente por:
DIEGO PAUL
HUARACA
SHAGÑAY

M.Sc. Diego Paúl Huaraca Shagñay
Director del Proyecto

MENTHOR
OSWALDO URVINA
MAYORGA

Firmado digitalmente por
MENTHOR OSWALDO
URVINA MAYORGA
Fecha: 2021.10.13 08:58:03
-05'00'

M.Sc. Ménthor Oswaldo Urvina Mayorga
Codirector del Proyecto

DECLARACIÓN

Nosotros, EVELIN JASMIN CHILE TAIPE y CRISTIAN JAVIER VELASTEGUI PUCACHAQUI declaramos bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedemos nuestros derechos de propiedad intelectual, correspondiente a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

Evelin Jasmin Chile Taipe
C.I. 1721935318

Cristian Javier Velastegui Pucachaqui
C.I. 1724595614

AGRADECIMIENTOS

De Evelin

Agradezco a mis padres, Walter y Francisca , por su guía en este camino inculcándome disciplina y valores. Todos mis logros son suyos.
A mis hermanos, Maricela y Erick, por el cariño, risas, apoyo incondicional y palabras de aliento cuando lo necesitaba. A mis sobrinos, Danna y Martin, quienes son el motivo de ser mejor cada día.
A mi familia y abuelos, Zoila, Antonio, Didima y en especial a la memoria de Enrique, quién donde quiera que esté mira este logro con orgullo.
A Daniel, a quién tuve la dicha de conocer en la carrera y se convirtió en mi compañero de esta gran aventuras llamada vida.
A Diego Huaraca, por la guía, supervisión, conocimientos y el tiempo empleado al desarrollo de esta investigación.
A Ménthor Urvina y a todos los profesores de la carrera, por sus conocimientos y enseñanzas útiles para desenvolverme en la vida laboral.
A Karen, Liz, Mabe, Tefa y al resto de mis compañeros con quienes fue posible superar cada uno de los obstáculos de la carrera.
A Cristian, por la confianza, paciencia y apoyo para realizar este proyecto de titulación.

AGRADECIMIENTOS

De Cristian

A Dios, por ser la guía y fuerza para lograr mis anhelos y sueños.

A mis padres José y Emma, por enseñarme el camino de la vida, gracias por su amor y apoyo incondicional durante todos estos años.

A mis abuelitos, quienes con su sabiduría y ejemplo me encaminaron por el buen sendero. En especial a July, por ser mi segunda madre.

A mis tíos y primos, por estar en los buenos y malos momentos. En particular a Yolanda, por ser un pilar en mi vida.

A Alexander, Alexa, Andrés, Daniel, Kathy, Rafa, Rafael, Roque, Sebastián, por los gratos momentos que hemos compartido.

A los Chacaritas, algún día nos reuniremos de nuevo.

A Diego Huaraca, por habernos guiado en el presente trabajo, en base a su experiencia y conocimiento.

A Ménthor Urvina, por aceptar ser parte de este proyecto.

A Evelin, por la invitación y confianza para realizar este trabajo de titulación.

DEDICATORIA

A mis padres, quienes lucharon para darme la mejor herencia que me pueden dejar, el estudio.

Evelin

DEDICATORIA

A mis padres pilares fundamentales en mi vida. Su tenacidad y lucha insaciable han hecho en mí, un gran ejemplo a seguir y destacar.

Cristian

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Resumen

Desde años atrás la sostenibilidad de las pensiones ha sido un tema de alta preocupación en la mayoría de los países latinoamericanos, debido fundamentalmente a las actuales tendencias demográficas como el aumento de la esperanza de vida y el descenso de la natalidad. La Seguridad Social es el sistema público encargado de garantizar una pensión por vejez que servirá para mantener el estándar de vida compatible con los niveles de bienestar que existen en la sociedad a cambio de aportaciones realizadas durante la vida laboral.

A mediados de la década de los noventa en Europa apareció un nuevo término conocido como Cuentas Nocionales, siendo una propuesta que consiste en una analogía entre el sistema de reparto y capitalización. Buscando que el jubilado perciba un monto equivalente al aporte que realizó en su vida laboral más los rendimientos de este, lo que se conoce como un sistema de pensiones actuarialmente justo.

En el presente trabajo se pretende desarrollar el aspecto teórico sobre el sistema de Cuentas Nocionales e implementar al caso ecuatoriano. Mediante una profunda investigación sobre las bases fundamentales del sistema vigente, que usa el IESS para el cálculo de pensiones, se realiza la simulación de datos y se evalúa el impacto que tiene la implementación del sistema propuesto. Para complementar el trabajo de investigación, se propone desarrollar un aplicativo en el software RStudio, con el objetivo de visualizar los resultados de manera dinámica y amigable con el usuario.

Palabras claves: Cuentas Nocionales, seguro social, IESS, pensión, sistema de reparto, jubilación, rentas actuariales.

Abstract

For years, the sustainability of pensions has been a matter of great concern in most Latin American countries, mainly due to current demographic trends such as the increase in life expectancy and the decrease in the birth rate. Social Security is the public system in charge of guaranteeing an old-age pension that will serve to maintain the standard of living compatible with the levels of well-being that exist in society in exchange for contributions made during working life.

In the mid-nineties, a new term known as Notional Accounts appeared in Europe, a proposal that consists of an analogy between distribution and capitalization system. It is intended that retiree receives an amount equivalent to the contribution this one made in his working life plus the interest generated from it, which is known as an actuarially fair pension system.

The purpose of the present study is to develop the Notional Accounts system theory and implement this one in Ecuadorian case. Through an exhaustive investigation on the fundamental bases of the actual system that IESS uses to calculate pensions. A part of the process is the data simulation to evaluate the impact of implementation of the proposed system. To complement the research work, it is proposed to develop an application in RStudio software, in order to visualize the results in a dynamic and user-friendly way.

Keywords: Notional Accounts, social security, IESS, pension, distribution system, retirement, life annuities.

Capítulo 1

Introducción

La Seguridad Social es un sistema público que busca proteger a sus miembros ante circunstancias previstas o imprevistas, permanentes o temporales que disminuyen su capacidad económica, las cuales se pueden prevenir, reparar o superar mediante medidas de protección; en su financiamiento pueden participar trabajadores, empleadores y el Estado. El objetivo de la Seguridad Social es velar por los afiliados que están en la imposibilidad (temporal o permanente) de obtener un ingreso, proporcionándoles recursos financieros o determinados bienes o servicios, con el propósito que estos puedan seguir satisfaciendo sus necesidades [22].

En Ecuador, el organismo encargado de la Seguridad Social es el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS) que tiene como misión proteger al asegurado en las contingencias de enfermedad, maternidad, riesgo de trabajo, discapacidad, desempleo, invalidez, vejez y muerte [18]. El presente proyecto de titulación se enfoca en el estudio y una posible solución para el problema de financiamiento y sostenibilidad que enfrenta el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte (IVM).

El Sistema de Pensiones de Ecuador es público, de prestaciones de beneficio definido, su sistema de financiamiento es de reparto con prima media nivelada, con régimen demográfico de grupo abierto [12]. Seguidamente se explica estas características.

- ***Público,*** porque además de las cotizaciones por parte de los trabajadores y empresarios, el Estado aporta con el 40 % para el pago de las pensiones por vejez.

- ***Beneficio definido o prestaciones definidas,*** puesto que, los niveles de las prestaciones dependen de un indicador promedio de los mejores salarios del afiliado, sobre el cual se establece la base de cálculo de las prestaciones y luego se aplica un coeficiente de acuerdo al tiempo de servicio.

- ***Sistema de reparto,*** pues, existe un acuerdo intergeneracional, el cual consiste en que, los trabajadores con sus cotizaciones al IESS ayudan a financiar el pago de las pensiones de los jubilados.

- ***Prima media nivelada,*** ya que, durante el periodo consecutivo de permanencia del asegurado en el IESS, la prima no va a cambiar, por el aumento de la edad ni del riesgo.

- ***Régimen demográfico de grupo abierto,*** pues, no existe restricciones para afiliarse, las personas pueden ingresar o salir del sistema sin ningún problema. Por lo tanto, el sistema está sujeto a las variaciones demográficas, incluyendo las tasas de natalidad, nupcialidad, mortalidad y rotación.

El sistema de reparto del Seguro IVM debe garantizar el equilibrio financiero con la finalidad que el mismo sea sostenible en el tiempo, en otras palabras, el dinero que ingrese al Seguro IVM debe ser mayor o igual al dinero que se desembolsa en el pago de las pensiones. Sin embargo, las actuales tendencias demográficas indican un incremento importante en la población de mayor edad para las próximas décadas.

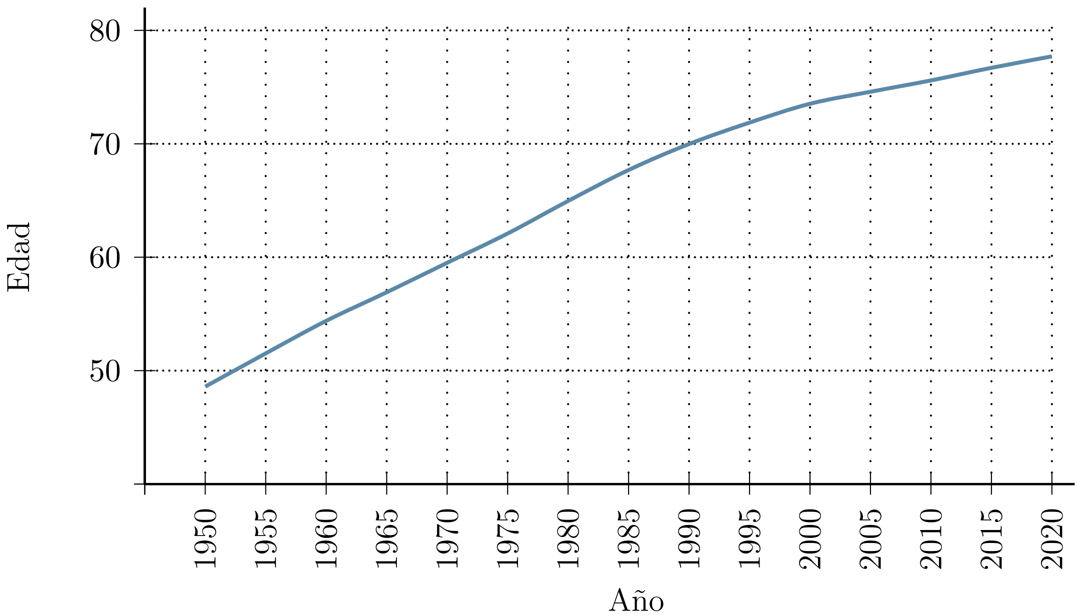

Figura 1.1: Evolución de la esperanza de vida en Ecuador.

El aumento en la esperanza de vida no solo conlleva a que más afiliados tengan derecho a prestaciones por vejez, sino que los pensionistas perciben estas prestaciones durante una mayor cantidad de años respecto a lo estimado, lo que acarrea la elevación de los gastos destinados a cubrirlas. En la figura 1.1, se observa que en Ecuador la esperanza de vida al nacer ha ido aumentando desde la década de 1950 [9].

Otro problema, es el descenso de la natalidad, provocando la disminución de la población joven y, con el tiempo, la reducción de la población en edad de trabajar, quienes son los encargados de financiar con sus cotizaciones los gastos de los jubilados en los sistemas de reparto [2]. En la figura 1.2, se observa que la tasa global de fecundidad [1] en Ecuador tiene un decrecimiento desde la década de 1950, en particular en los últimos diez años esta tasa ha disminuido en 9.38 % [9].

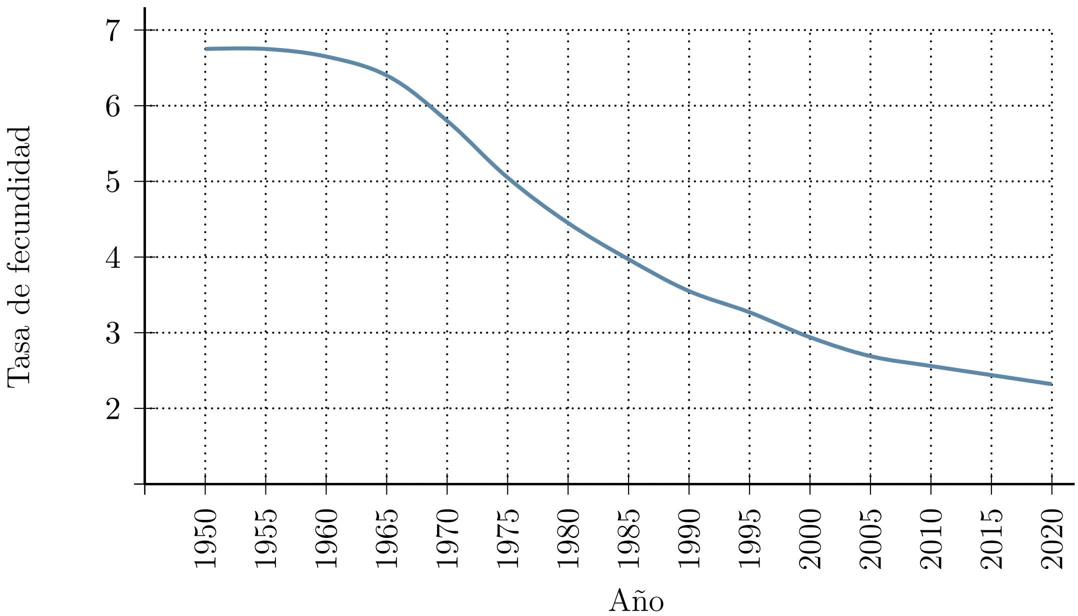

Figura 1.2: Evolución de la tasa de fecundidad en Ecuador.

1.1. Justificación

En 1942, se promulgó la Ley de Seguro Social Obligatorio, en el cual, se incorporó el deber del Estado de contribuir con el 40 % para el financiamiento de las pensiones jubilares de la población afiliada y el 60 % restante por el IESS. A pesar del mandato legal, esta obligación del Estado fue incumplida en repetidas ocasiones, hasta que, en el año 2015 con la entrada en vigor de la Ley Orgánica para la Justicia Laboral y Reconocimiento del Trabajo en el Hogar, se eliminó el aporte por parte del Estado de la subvención del 40 % de cada pensión jubilar por vejez [5]. Sin embargo, la Corte

[1] **Tasa global de fecundidad** es el número de hijos que en promedio tendría las mujeres al final de su vida reproductiva, si durante esta estuvieran expuestas a las tasas de fecundidad por edad del periodo de estudio.

Constitucional declaró la inconstitucionalidad del artículo 68.1 de la ley antes mencionada; y, sustituye el artículo 237 de la Ley de Seguridad Social; restableciendo la contribución del Estado del 40 % para el pago de las pensiones [12].

Adicionalmente, los cambios demográficos y económicos del Ecuador han generado un desequilibrio financiero del Seguro IVM como lo demuestra el estudio actuarial presentado en el año 2019 [12], en el cual, en un escenario pesimista[2] arrojó que en el año 2023 las reservas se agotarán y la temida crisis por falta de dinero para pagar las pensiones se concretará. Para evitar que esto suceda y garantizar la sostenibilidad del fondo, se requiere tener un equilibrio actuarial del sistema, es decir, una ecuanimidad entre ingresos y egresos, para lograr este objetivo se plantea la introducción del Sistema de Cuentas Nocionales, el mismo que utiliza técnicas financieras-actuariales para el cálculo de las pensiones [31].

El Sistema de Cuentas Nocionales calcula la cuantía de la pensión que le corresponde a cada afiliado, a partir, de las cotizaciones que este realiza a la Seguridad Social durante su permanencia en la vida laboral y la esperanza de vida en el momento de jubilarse. Contrario al sistema actual que toma en cuenta el promedio de los cinco años de mejores sueldos o salarios sobre los cuales se aportó [13], haciendo que este sistema sea injusto para el financiamiento de prestaciones que ofrece el Seguro IVM, puesto que, mayoritariamente los jubilados llegan a recibir más de lo que en realidad aportaron.

Además de describir bajo que circunstancias se podría implementar el Sistema de Cuentas Nocionales y sus efectos a mediano y largo plazo, se desarrolla un aplicativo mediante el software R y el paquete Shiny. Este aplicativo calcula la cuantía de la pensión por jubilación de cualquier afiliado o afiliada tanto con el sistema actual como con el sistema propuesto, adicionalmente muestra el impacto que podría tener la cuantía de la pensión, en el caso de adelantar o retrasar la edad de jubilación.

1.2. Objetivos

El objetivo general de este proyecto es evaluar el impacto del cálculo de pensiones bajo un Sistema de Cuentas Nocionales para el caso ecuatoriano.

Para alcanzarlo es necesario cumplir con los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar los lineamientos actuariales para la fijación del valor de las pensiones

[2]**Escenario pesimista** considera que el Estado no aporta con el 40 % para el pago de las pensiones por vejez.

por vejez.

2. Presentar los conceptos básicos de matemática financiera y cálculo actuarial, asociados a las rentas vitalicias.

3. Desarrollar un aplicativo mediante el software estadístico R para el cálculo de las pensiones bajo el Sistema de Cuentas Nocionales.

4. Describir las mejoras que se pueden obtener al implementar el modelo obtenido en la distribución de pensiones por vejez.

1.3. Software R

R es un lenguaje de programación y software libre desarrollado a principio del año de 1990 por Ross Ihaka y Robert Gentleman, miembros del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland - Nueva Zelanda. El lenguaje R se inspiró en el lenguaje "S" para computación estadística concebido por John Chambers, Rick Becker, Trevor Hastie y otros en Bell Labs a mediados de la década de 1970 [19].

R proporciona una amplia variedad de técnicas estadísticas (modelado lineal y no lineal, pruebas estadísticas clásicas, análisis de serie de tiempo, clasificación, agrupamiento, etc.) y técnicas gráficas. La facilidad con la que se pueden producir gráficos de gran calidad es uno de los puntos fuertes que tiene este software [23].

Este lenguaje cuenta con "paquetes", los cuales son colecciones de funciones, datos y código compilado de R. Si bien R cuenta con un conjunto de paquetes por defecto, hay una gran variedad de paquetes adicionales que se pueden agregar para extender las capacidades del software. Ya sea que se esté utilizando el programa para optimizar carteras, analizar secuencias genómicas o predecir tiempos de falla de componentes, los expertos en todos los dominios han hecho que los recursos, las aplicaciones y el código estén disponibles de forma gratuita en línea [19].

1.3.1. RStudio

RStudio es un entorno de desarrollo integrado (IDE) para R. Incluye una consola, un editor de sintaxis que admite la ejecución directa de código, así como herramientas para el trazado, el historial, la depuración y la gestión del espacio de trabajo. RStudio está disponible en ediciones comerciales y de código abierto y se ejecuta en el escritorio

(Windows, Mac y Linux) o en un navegador conectado a RStudio Server o RStudio Server Pro (Debian/Ubuntu, Red Hat/CentOS y SUSE Linux) [1].

Entre las principales ventajas que trae el entorno de RStudio se tiene que:

- Integra las herramientas que usa R en un solo entorno.
- Incluye potentes herramientas de codificación diseñadas para mejorar su productividad.
- Admite la creación de HTML, PDF, documentos de Word y presentaciones de diapositivas.
- Permite una navegación rápida entre archivos y funciones.
- Admite gráficos interactivos con Shiny y ggvis.

1.3.2. R Shiny

Shiny es un paquete de R que facilita la creación de aplicaciones web interactivas directamente desde R. Puede alojar aplicaciones independientes en una página web o incrustarlas en documentos de R Markdown [3] o crear paneles de control. También se pueden ampliar las aplicaciones Shiny con temas CSS, htmlwidgets y JavaScripts actions [25].

Las aplicaciones web creadas por este medio, tienen la ventaja de que R y el paquete Shiny son los encargados de generar todo el código necesario para facilitar la creación de esta aplicación, sin que sea necesario conocer en detalle el funcionamiento de las tecnologías web. Una aplicación Shiny está conformada por los siguientes archivos:

- *app.R* archivo donde se encuentran tanto los elementos de la interfaz como del servidor.
- *ui.R* archivo que contiene los elementos de la interfaz y la disposición de dichos elementos en la pantalla.
- *server.R* archivo donde se programa la lógica del servidor y se genera el contenido dinámico que depende de las interacciones con la pantalla.

[3] **R Markdown** interfaz que une texto narrativo y código para producir resultados con un formato elegante.

Capítulo 2

La Seguridad Social en Ecuador

La Constitución de Ecuador señala que la Seguridad Social es el derecho irrenunciable de todos sus habitantes, que se fundamenta en los principios de solidaridad, obligatoriedad, universalidad, equidad, eficiencia, subsidiaridad y suficiencia.

- **Solidaridad:** Este principio, corresponde por una parte a la solidaridad intergeneracional, lo que implica que aquellos afiliados activos tienen el deber de contribuir con sus aportes al financiamiento y sostenimiento de las prestaciones para la población asegurada cuya vida productiva ha terminado. Y, por otro lado, la solidaridad que consiste en que los afiliados activos según su capacidad económica colaboren para el financiamiento de las prestaciones de otros afiliados activos que, por su nivel de ingresos, no alcanzan a cubrir el monto real de las mismas.

- **Obligatoriedad:** Este principio indica que el ingreso al sistema de Seguridad Social es un derecho económico, social y cultural de todos los ciudadanos, protegido por el Estado, a través de la creación de facilidades para el aseguramiento de los afiliados sin relación de dependencia al Seguro Social y para velar que los empleados cumplan con su obligación de afiliar a sus trabajadores; dado que, el acceso al Seguro Social no depende de ningún tipo de convenio, pues lo único que se requiere es el cumplimiento de las disposiciones constitucionales y legales vigentes en el Estado.

- **Universalidad:** Este principio implica que el goce y ejercicio del derecho de Seguridad Social les corresponden a todos los miembros de la sociedad ecuatoriana que han cumplido con los requisitos previstos en la Ley de Seguridad Social; por lo que, el acceso a las prestaciones no debe depender de diferenciaciones de ninguna índole. El principio establece que el sistema debe ser capaz de cubrir todas las eventualidades que le pudieran suceder a todos los individuos ya que la Seguridad Social constituye un derecho humano elemental.

- **Equidad:** Acerca de este principio, se deduce que, las personas que presenten necesidades similares deben recibir prestaciones de igual calidad. Además, se debe asegurar que el porcentaje del aporte de cada individuo al Seguro Social sea proporcional o equivalente al monto utilizado para brindar la prestación; adicionalmente, garantizar que el aporte y las prestaciones sean las mismas para todos los individuos.

- **Eficiencia:** Este principio consiste en brindar el mayor bienestar social, mediante la maximización de los recursos económicos disponibles. Para el Fondo de Pensiones, este principio es transcendental, ya que los recursos que ingresan a este fondo deben ser administrados y optimizados de tal manera que permitan brindar un bienestar, al menos, mínimo a los pensionistas presentes y futuros.

- **Subsidiaridad:** Este principio implica que el Estado debe ser garantizar el derecho a la Seguridad Social a todos los ciudadanos, mediante medidas económicas y técnicas que sean necesarias.

  En la sostenibilidad del Fondo de Pensiones, el principio de subsidiaridad es fundamental, puesto que, los porcentajes destinados a este seguro, producto de la aportación de cada trabajador, son muy bajos y ya que se cuenta con un sistema de financiamiento de reparto, se requiere del auxilio del Estado para aumentar la reserva del Seguro de Pensiones, a través de la entrega de un porcentaje complementario para ciertas prestaciones que no puedan financiarse únicamente con el aporte personal y patronal; de manera que a largo plazo, este seguro pueda cubrir las pensiones de aquellos que actualmente son los pilares del sistema, los afiliados activos.

- **Suficiencia:** Este principio pretende que las prestaciones brindadas por el Seguro Social cubran en forma efectiva y eficaz la contingencia que le haya ocurrido a un determinado ciudadano; e incluso, sugiere que la prestación es una respuesta a las necesidades de las personas a quienes va dirigida.

  Este último principio se relaciona con la estructura del seguro de Pensiones, ya que las retribuciones brindadas por este seguro deberán ser entregadas de forma eficaz y oportuna, independientemente del monto, el cual variará, dependiendo de los ingresos percibidos por el pensionista cuando era afiliado activo.

2.1. Historia

El Sistema de Seguridad Social en el Ecuador se origina a partir de las leyes dictadas en los años 1905, 1915 y 1918 para proteger a los empleados públicos, educadores, telegrafistas y dependientes del poder judicial.

El doctor Isidro Ayora Cueva durante su periodo de gobierno, el 8 de marzo de 1928 creó la Caja de Jubilaciones y Montepío Civil, Retiro y Montepío Militares Ahorro y Cooperativa, institución de crédito con personería jurídica, organizada de conformidad con la Ley, la cual se denominó Caja de Pensiones; como resultado de las reivindicaciones obreras de la Revolución Juliana de 1925, que permitieron que lo social sea considerado como política de Estado.

La Caja de Pensiones fue consagrada como entidad aseguradora con patrimonio propio, diferenciada de los bienes del Estado, con aplicación en el sector laboral público y privado. Con el objetivo de conceder a los empleados públicos, civiles y militares, los beneficios de Jubilación, Montepío Civil y Fondo Mortuorio. En octubre de 1928, los empleados bancarios se integraron al grupo de beneficiarios.

En octubre de 1935, se crea el Instituto Nacional de Previsión, como órgano superior del Seguro Social, con el objetivo de establecer la práctica del Seguro Social Obligatorio, fomentar el Seguro Voluntario y ejercer el patronato del Indio y del Montubio. En la misma fecha inició su labor el Servicio Médico del Seguro Social como parte del Instituto.

En febrero de 1937, se incorporó el Seguro de Enfermedad entre los beneficios, para los afiliados. En julio de ese año, se creó el Departamento Médico. Y la Caja del Seguro Social nació, con funcionamiento administrativo de carácter autónomo desde el 10 de julio de 1937.

En diciembre de 1949, se dotó de autonomía al Departamento Médico, pero manteniéndose bajo la dirección del Consejo de Administración de la Caja del Seguro, con financiamiento, contabilidad, inversiones y gastos administrativos propios. En julio de 1958, se dio equilibrio financiero a la Caja y la ubicaron en nivel de igualdad con la de Pensiones, en lo referente a cuantías de prestaciones y beneficios.

En septiembre de 1963, se fusionó la Caja de Pensiones con la Caja del Seguro para formar la Caja Nacional del Seguro Social. En 1964 se establecieron el Seguro de Riesgos del Trabajo, el Seguro Artesanal, el Seguro de Profesionales, el Seguro de Trabajadores Domésticos y, en 1966, el Seguro del Clero Secular. En agosto de 1968, con el asesoramiento de la Organización Iberoamericana de Seguridad Social, se inició un plan piloto del Seguro Social Campesino. El 29 de junio de 1970 se suprimió el Instituto Nacional de Previsión. El 10 de julio de 1970 se transformó la Caja Nacional del Seguro Social en el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS).

El 20 de noviembre de 1981, por Decreto Legislativo se dictó la Ley de Extensión del Seguro Social Campesino. En l986 se estableció el Seguro Obligatorio del Trabajador Agrícola, el Seguro Voluntario y el Fondo de Seguridad Social Marginal a favor de la población con ingresos inferiores al salario mínimo vital.

El Congreso Nacional, en 1987, estableció la obligación de que consten en el Presupuesto General del Estado las partidas correspondientes al pago de las obligaciones del Estado. En 1998, la Asamblea Nacional se reúne para reformar la Constitución Política de la República y consagró la permanencia del IESS como única institución autónoma, responsable de la aplicación del Seguro General Obligatorio (SGO).

2.2. Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social

El Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social es la entidad pública encargada de proteger a sus afiliados en caso de eventualidades que afecten su capacidad de trabajo y la obtención de un ingreso. La Ley de Seguridad Social y el Código del Trabajo, establecen la afiliación a la Seguridad Social, de todas las personas que realizan un trabajo con relación de dependencia o sin ella, en particular:

- Trabajador en relación de dependencia.
- Trabajador autónomo.
- Profesional en libre ejercicio.
- Administrador o patrono de un negocio.
- Dueño de una empresa unipersonal.
- Menor trabajador independiente.
- Y las demás personas obligadas a la afiliación del régimen del Seguro General Obligatorio en virtud de leyes y decretos especiales.

Las prestaciones y servicios que ofrece el IESS, a los afiliados ecuatorianos o extranjeros residentes en el Ecuador, se entregan a través los siguientes seguros:

- Seguro de Salud.
- Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte.
- Seguro de Cesantía y Desempleo.
- Seguro de Riesgos de Trabajo.

2.2.1. Recursos y financiamiento del IESS

El Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social se financia por medio de una contribución por parte del Estado, los empleadores y los trabajadores contribuyen de manera periódica cierta cantidad de dinero.

El aporte mensual al IESS de los trabajadores del sector privado bajo relación de dependencia, así como de los miembros del sector secular es del 20.60 % del salario. El 9.45 % corresponde al aporte personal y el 11.15 % corresponde al aporte patronal.

Los empleados bancarios, municipales, autónomos, notarios, registradores de la propiedad y registradores mercantiles, tributan al IESS con el aporte personal del 11.45 % y patronal del 11.15 %, para un total del 22.60 %.

Los servidores públicos, incluido el magisterio y los funcionarios y empleados de la Función Judicial o de otras dependencias que prestan servicios públicos, mediante remuneración variable, en forma de aranceles o similares, contribuyen al IESS el 20.60 %, el cual se divide en 11.35 % y en 9.15 %, que corresponden a los aportes personales y patronales respectivamente.

Los funcionarios del servicio exterior residentes en el extranjero realizan un aporte personal del 9.15 % y patronal del 9.15 %, para un global del 18.60 %.

Finalmente, el aporte de los trabajadores temporales de la industria azucarera constituye el 41.10 % y se compone por el aporte personal del 18.80 % y patronal del 22.30 %.

Por otro lado, las personas pueden optar por la Afiliación Voluntaria, cuyo valor de aporte es del 17.60 % de un salario básico unificado.

Adicionalmente, todos los ingresos provenientes del pago de los dividendos de la deuda pública y privada, así como, de la deuda del Gobierno Nacional con el IESS; ingresos por renta o enajenar propiedades o activos fijos administrados por el IESS y entre otros recursos, financian las prestaciones del Seguro General Obligatorio [12].

2.2.2. Prestaciones a las que el afiliado tiene derecho

Las aportaciones al IESS financian las prestaciones económicas y de salud a las cuales tienen derecho todos afiliados, jubilados y sus dependientes en casos de:

- **Enfermedad y Maternidad:** Tienen derecho a este seguro los afiliados, sus hijos menores de 18 años, los jubilados y la viuda con derecho a montepío. Este seguro comprende atención médica, subsidio por enfermedad y compensación de gastos médicos.

  Subsidio por enfermedad: Se paga desde el cuarto día de incapacidad por un máximo de 185 días. Si cumple los siguientes requisitos:

  El afilado o la afiliada tienen derecho a estos beneficios una vez que hayan cumplido las siguientes condiciones:

  a. Seis imposiciones mensuales ininterrumpidas, anteriores al inicio de la enfermedad.

  b. Tener un certificado médico de reposo.

  Subsidio por maternidad: Las afiliadas tienen derecho al subsidio por maternidad por un total de 12 semanas: 2 semanas antes del parto y 10 semanas después del parto [17].

  Se debe cumplir los siguientes requisitos:

  a. Doce imposiciones mensuales ininterrumpidas, anteriores del reposo prenatal. Se debe entregar un certificado médico por motivo de reposo prenatal.

  El afiliado o la afiliada que deje de aportar conservará el derecho a las prestaciones de enfermedad y maternidad hasta dos meses después del cese de sus aportaciones.

- **Invalidez, vejez y muerte:** Se trata de la protección de los afiliados frente a los infortunios de invalidez, vejez y muerte. El IESS entrega las siguientes prestaciones correspondientes a este contingente:

  a. Pensión ordinaria de vejez

  b. Pensión de invalidez

  c. Pensión de viudez y orfandad

  d. Subsidio transitorio por incapacidad

  e. Auxilio de funerales

- **Riesgos del trabajo:** Este seguro cubre toda lesión física y todo estado delicado originado o consecuencia del trabajo que realiza el afiliado, incluidos los que se originen durante el traslado de su domicilio al lugar de trabajo.

  La protección del Seguro General de Riesgos del Trabajo otorga derecho a las siguientes prestaciones básicas: Servicios de Prevención de Riesgos Laborales, Prestaciones Asistenciales y Prestaciones Económicas, esta última comprende:

  a. Subsidio por incapacidad temporal.
  b. Pensión de incapacidad temporal.
  c. Indemnización por incapacidad permanente parcial.
  d. Pensión por incapacidad permanente total
  e. Pensión por incapacidad permanente absoluta.
  f. Pensión de montepío.

- **Cesantía:** Consiste en el pago de una suma de dinero al afiliado o afiliada que se encuentra cesante. Se financia con el 2 % del aporte mensual del trabajador. Tienen derecho a este beneficio los afiliados que hayan acumulado en la cuenta individual de cesantía 24 aportaciones no simultáneas y que prueben ante el IESS una cesantía de 60 días.

- **Desempleo:** A partir del día 61 de cesante, el afiliado tiene derecho a la prestación por el seguro de desempleo [16]. Esta prestación se da por terminada cuando el afiliado registre un aviso de entrada con relación de dependencia, por hechos fraudulentos, por muerte del afiliado o cuando cumpla con el máximo de cinco meses. Para acceder a este derecho se debe:

  a. Tener mínimo 24 aportaciones no simultáneas, las 6 últimas deben ser consecutivas.
  b. Haber cesado en relación de dependencia.

- **Fondos de reserva:** Constituyen un valor que el trabajador en relación de dependencia acumula durante sus años de trabajo, el asegurado puede optar por acumular o recibir de manera mensual este valor junto con su salario. Los empleados, obreros y servidores públicos que hayan prestado sus servicios por más de un año para un mismo empleador tienen derecho a este fondo.

- **Préstamos:** El afiliado tiene derecho a tres tipos de préstamos: quirografarios, hipotecarios y prendarios, los fondos de reserva y de cesantía son utilizados como garantía [12].

2.3. Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte

El Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte (IVM) representa una de las coberturas más importantes del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, de las cotizaciones realizadas por los empleadores y empleados, el 10.46 % le corresponde a este seguro. Además, el Gobierno está obligado a contribuir con el 40 % del gasto en pensiones. Sin embargo, esto no se ha cumplido en la última década.

Los fondos y reservas del Seguro IVM se administran y mantienen separados del patrimonio del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, y no pueden ser dispuestos para otros fines que no diga la ley.

Para acceder a las prestaciones que otorga el Seguro IVM se debe cumplir los requisitos determinados en la Ley de Seguridad Social, así como las Resoluciones del Consejo Directivo.

2.3.1. Prestaciones del Seguro IVM

A continuación, se detallan las condiciones y requisitos para acceder a los siguientes beneficios:

1. **Jubilación ordinaria por vejez:** El afiliado tiene derecho a pensiones mensuales vitalicias si cumple una de las siguientes condiciones:

    a) Sin límite de edad y acreditare 480 imposiciones mensuales o más, es decir, 40 años de aportación o más.

    b) 60 años o más de edad y acreditare por lo menos 360 imposiciones mensuales o más, es decir, 30 años o más de aportación.

    c) 65 años o más de edad, siempre que registre un mínimo de 180 imposiciones mensuales o más, es decir, 15 años o más.

    d) 70 años o más de edad, siempre que registre un mínimo de 120 imposiciones mensuales o más, lo que es equivalente a 10 años o más de aportaciones.

    e) Y con cualquier edad y acreditare 480 imposiciones mensuales o más, es decir, 40 años de aportación o más.

2. **Jubilación por invalidez:** Se considera inválido al asegurado que, por enfermedad o por alteración física o mental, esté incapacitado para ejercer un trabajo acorde a su capacidad, fuerzas y formación teórica o práctica, para ello como

beneficio se acredita una remuneración por lo menos equivalente a la mitad de la remuneración que reciba un trabajador sano en similares condiciones laborales.

Por otro lado, de la Ley de Seguridad Social, se establece que se acreditará derecho a pensión de jubilación por invalidez total y permanente en los siguientes casos:

a) La incapacidad absoluta y permanente para todo trabajo, generada en la actividad o en período de inactividad compensada, cualquiera sea la causa que la haya originado y siempre que se acredite un mínimo de 60 imposiciones mensuales, de las cuales mínimo 6 deberán ser consecutivas e inmediatamente previas a la incapacidad.

b) La incapacidad absoluta y permanente para todo trabajo, sobrevenida dentro de los 2 años siguientes al cese en la actividad o al vencimiento del período de inactividad compensada, cualquiera sea la causa que haya originado, siempre que el asegurado hubiere acumulado 120 imposiciones mensuales como mínimo y no fuere beneficiario de otra pensión jubilar.

3. **Subsidio transitorio por incapacidad:** El empleado tiene derecho a recibir el subsidio temporal por incapacidad, cuando la contingencia ha provocado el cese forzoso en la actividad principal del asegurado. Además, que cumpla las siguientes condiciones:

   a) Registrar mínimo 60 imposiciones mensuales, de las cuales las 6 últimas deberán ser inmediatamente anteriores a la incapacidad.

   b) La actividad laboral se haya afectado provocando que al asegurado se prive de obtener la mayor parte del ingreso necesario para el sustento.

   c) Se comprueba que el asegurado cesó en dicha actividad a causa de la contingencia, lo que implica la interrupción del desempeño de su labor o conclusión de la relación laboral.

   d) El periodo de subsidio temporal por incapacidad menor a 1 año, contado desde la fecha de la incapacidad o desde el vencimiento de la cobertura del subsidio transitorio por enfermedad.

4. **Montepío:** Tiene derecho a pensión de montepío el jubilado en goce de pensión de invalidez, vejez, discapacidad, o el asegurado activo que al momento de su fallecimiento tuviere abonadas al menos 60 imposiciones mensuales o se encuentre en el período de protección del seguro de muerte.

   El montepío otorga las siguientes pensiones:

- **Pensión por viudez:** Se establece que acreditará derecho a pensión por viudez a:

  a) Viudas y viudos.

  b) Conviviente del afiliado/a o jubilado/a fallecido. Convivencia por más de 2 años inmediatamente anteriores a la muerte de éste. Si no hubiere los dos 2 años de vida marital al menos, bastará la existencia de hijas o hijos en común.

- **Pensión por Orfandad:** Se establece que tendrán derecho a pensión por orfandad los hijos del afiliado o jubilado fallecido, los adoptados cuando la fecha de adopción es por lo menos 12 meses antes a la fecha del fallecimiento y los póstumos, hasta alcanzar 18 años de edad.

  También tendrán derecho a la pensión por orfandad los hijos de cualquier edad incapacitados para el trabajo, solteros, viudos o divorciados y que hayan vivido a cargo del afiliado o jubilado fallecido.

A falta de viuda o viudo conviviente con derecho o hijos, tendrán derecho a montepío la madre y/o padre del asegurado o jubilado fallecido siempre que haya vivido a cargo del causante [14].

De haber único o única beneficiaria de la pensión de viudedad, esta pensión será el 60 % de la renta que le corresponde al causante. Por otro lado, en caso de que exista grupo familiar beneficiario, la pensión se repartirá el 60 % a la viuda o viudo y el 40 % restante se dividirá para el número de hijos o hijas menores de edad.

5. **Auxilio de funerales:** Consiste en auxilio o reembolso en dinero que se entrega a los deudos del pensionista o afiliado que tuviere acreditadas 6 imposiciones mensuales, por lo menos, dentro de los últimos 12 meses anteriores a su fallecimiento o que genere derecho a pensiones de montepío.

2.3.2. Cálculo de la pensión de jubilación y beneficios

En el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte o el Fondo de pensiones es un sistema de reparto puro.

El sistema de reparto supone que los afiliados activos financian a los jubilados, los activos cotizan a un fondo común solidario que no tiene titularidad, por tanto, no es un fondo de ahorro sino de financiamiento. El sistema tiene la dificultad de que las primeras generaciones de jubilados son más beneficiadas que las últimas, además, por lo general las pensiones a recibir no son financieramente equivalentes a lo realmente aportado durante la vida laboral.

La base de cálculo de la pensión que la persona jubilada se haría acreedora será igual al promedio de los cinco (5) años de mejores sueldos o salarios sobre los cuales se aportó [13]. Se procede a realizar el siguiente cálculo:

1. Se obtiene el promedio anual de las remuneraciones de todos los años, para lo cual se suma 12 meses de imposiciones consecutivas y ese resultado lo dividimos para 12.

$$\text{Promedio anual remuneraciones año i} = \frac{\sum_{j=1}^{12} \text{Remuneración mensual}_j}{12}.$$

2. Obtenidos los promedios, se seleccionarán los cinco (5) años de mejores sueldos sobre los cuales se aportó.

3. Posteriormente se obtiene la media aritmética de las 60 aportaciones de los 5 años de mejores sueldos.

$$\text{Remuneraciones Totales} = \sum_{i=1}^{60} \text{Remuneración}_i$$

$$\text{Base de Cálculo} = \frac{\text{Remuneraciones Totales}}{60}$$

4. Luego, se multiplica la base de cálculo por el coeficiente, el cual se identifica de acuerdo con los años de aportaciones de la tabla propuesta por el IESS. Este coeficiente es menor o igual que uno (1), igual a 1 cuando los años de imposiciones es 40, y crece a medida que los años de imposiciones aumentan. Para años de aportes mayor o igual a 41, se incrementa 0.0125 por cada año de imposiciones adicionales.

$$\text{Pensión Calculada} = \text{Coeficiente x Base de Cálculo}.$$

5. Finalmente, para conocer la pensión a recibir se compara la pensión calculada con la pensión mínima y pensión máxima que entrega el IESS en el año en curso, de acuerdo con los años de aportaciones.

$$\text{Pensión a recibir} = \begin{cases} \text{Pmín} & si \quad \text{Pcal} < \text{Pmín} \\ \\ \text{Pcal} & si \quad \text{Pmín} \leq \text{Pcal} \leq \text{Pmáx}. \\ \\ \text{Pmáx} & si \quad \text{Pcal} > \text{Pmáx} \end{cases}$$

Donde,

Pmín: Pensión mínima.

Pmáx: Pensión máxima.

Pcal: Pensión calculada.

2.3.2.1. Pensión mínima y máxima de vejez

Según lo establecido por el IESS, la pensión mínima y máxima vigentes en el año 2020, dependen del tiempo de aportación, en proporción del salario básico unificado mínimo del trabajador en general [13], según las siguientes tablas:

TIEMPOS DE AÑOS APORTADOS	PENSIÓN MÍNIMA MENSUAL en porcentaje del SBU mínimo
Hasta 10 años	50 %
11-20	60 %
21-30	70 %
31-35	80 %
36-39	90 %
40 y más	100 %

Cuadro 2.1: Pensión mínima de vejez de acuerdo a los años de aportación en proporción del Salario Básico Unificado (SBU) mínimo.

TIEMPOS DE AÑOS APORTADOS	PENSIÓN MÁXIMA MENSUAL en porcentaje del SBU mínimo
Hasta 10 años	250 %
15-19	300 %
20-24	350 %
25-29	400 %
30-34	450 %
35-39	500 %
40 y más	550 %

Cuadro 2.2: Pensión máxima de vejez de acuerdo a los años de aportación en proporción del Salario Básico Unificado (SBU) mínimo.

Las pensiones máximas de invalidez, de incapacidad permanente total de riegos de trabajo y del grupo familiar de montepío serán equivalentes al 450 % del salario básico unificado mínimo [12].

2.3.2.2. Mejora de la pensión

El jubilado por vejez que reingresa a laborar bajo relación de dependencia, en una empresa distinta a la que certificó su salida para acceder a la jubilación, tiene derecho a una mejora en su pensión una vez que cese en su nuevo empleo y haya aportado como mínimo 12 meses. Se calcula el producto del sueldo promedio, número de imposiciones y el coeficiente de 0.001 [13].

2.3.2.3. Decimotercera y decimocuarta pensión

Además de la pensión mensual, los jubilados y pensionistas de viudez y orfandad tienen derecho a recibir la decimotercera y decimocuarta paga. En diciembre de cada año, se recibe la decimotercera paga que es igual a un salario. Por otro lado, la decimocuarta paga se recibe en el mes de septiembre de cada año, para los pensionistas de las regiones Sierra y Amazonía; y en el mes de abril, para los de la Costa y Región Insular. El monto es igual a un salario básico unificado, vigente en el año en el que se acredita [13].

2.3.3. Situación financiera del Fondo de IVM

Con la finalidad de conocer la situación financiera del Fondo de IVM en esta sección se presenta un análisis de sus respectivos activos, pasivos y patrimonio. Basándonos en el estudio actuarial del Seguro IVM, cuyos balances generales corresponden a los años 2010 al 2018 [12].

2.3.3.1. Activos

El activo del Fondo de IVM se compone de las siguientes cuentas:

- Inversiones.
- Propiedad planta y equipo.
- Fondos disponibles.
- Cuentas por cobrar.

A partir del año 2016, los activos han decrecido debido a la eliminación del 40 % de la contribución del Estado para el pago de pensiones y además por la disminución del porcentaje de aportación para este seguro, lo que obligó a acudir a las reservas para cubrir las necesidades del pago de pensiones. En la figura 2.1 se observa la evolución del activo del Fondo de IVM para el periodo 2010-2018.

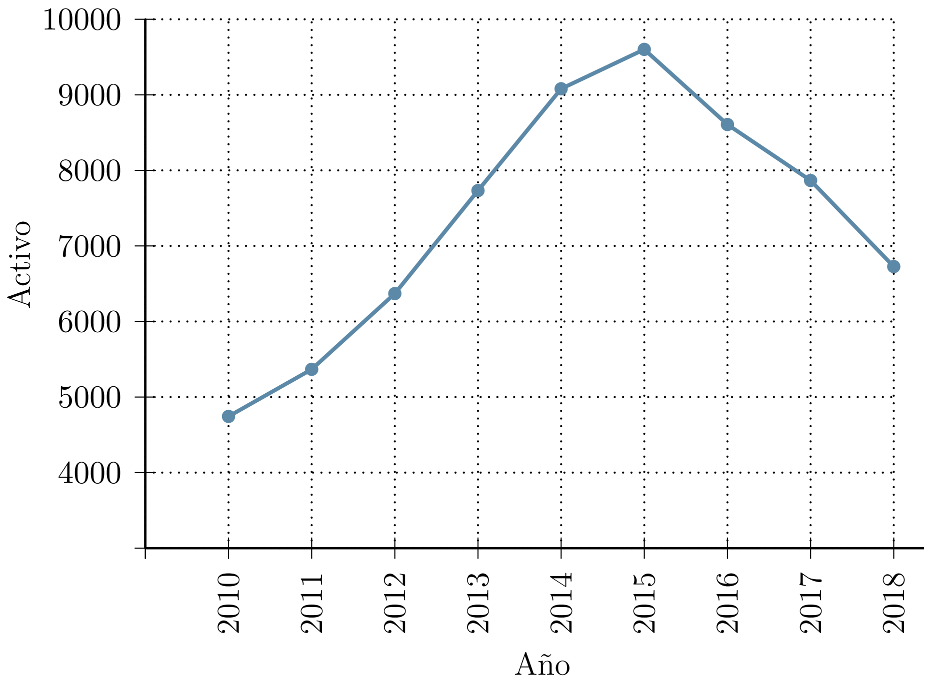

Figura 2.1: Activo del Fondo de IVM al 31 de diciembre de cada año (millones de dólares).

En promedio, entre los años 2010 y 2015 los activos del Fondo de IVM aumentaron en 15.28 %, mientras que entre los años 2016 y 2018 estos decrecieron 11.15 %.

2.3.3.2. Pasivos

El pasivo del Fondo de IVM hasta el año 2014 tenía tres componentes: Prestaciones y beneficios, cuentas por pagar y pasivos diferidos. Pero desde el año 2015 estas componentes son optimizadas en dos cuentas:

- Pasivos corrientes.
- Pasivos no corrientes.

En la figura 2.2 muestran la evolución del pasivo para el periodo 2010-2018.

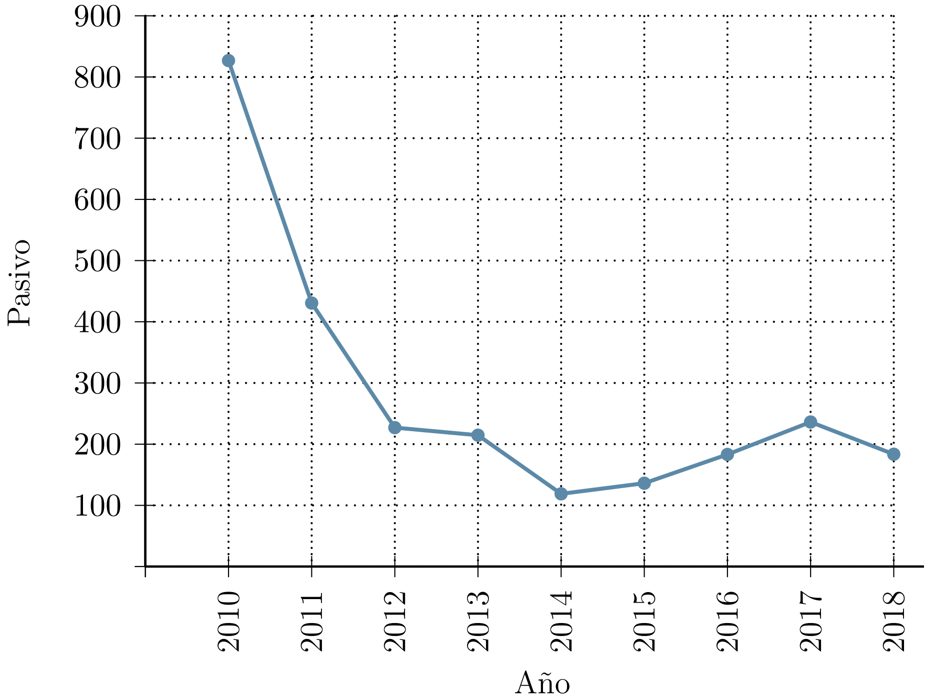

Figura 2.2: Pasivo del Fondo de IVM al 31 de diciembre de cada año (millones de dólares).

La disminución del pasivo entre los años 2010 y 2014 se debió al decrecimiento de las cuentas “Prestaciones y Beneficios” y “Cuentas por Pagar”.

2.3.3.3. Patrimonio

El patrimonio del Fondo de IVM se constituye de las siguientes cuentas:

- Fondos capitalizados.
- Resultados.
- Reservas.
- Aportes patrimoniales.

Debido a la eliminación de la contribución del 40 % por parte del Estado para el pago de las pensiones y además por la disminución del porcentaje de aportación para el Seguro de IVM, el patrimonio desde el 2016 ha decrecido año tras año.

En la figura 2.3 muestran la evolución del patrimonio del fondo IVM para el periodo 2010-2018.

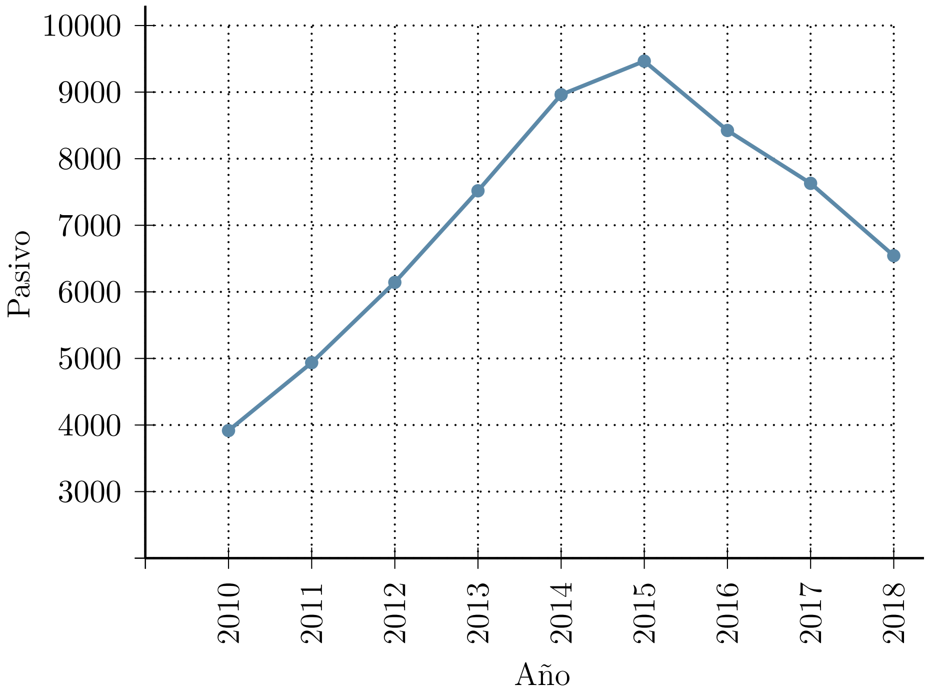

Figura 2.3: Patrimonio del Fondo de IVM al 31 de diciembre de cada año (millones de dólares).

En promedio, entre los años 2010 y 2015 el patrimonio del Fondo de IVM aumentó en 19.54 %, mientras que entre los años 2016 y 2018 este decreció 11.57 %.

2.3.3.4. Ingresos versus gastos por pensiones

En la figura 2.4 se observa la evolución de los ingresos y gastos por pensiones para el periodo 2010-2018.

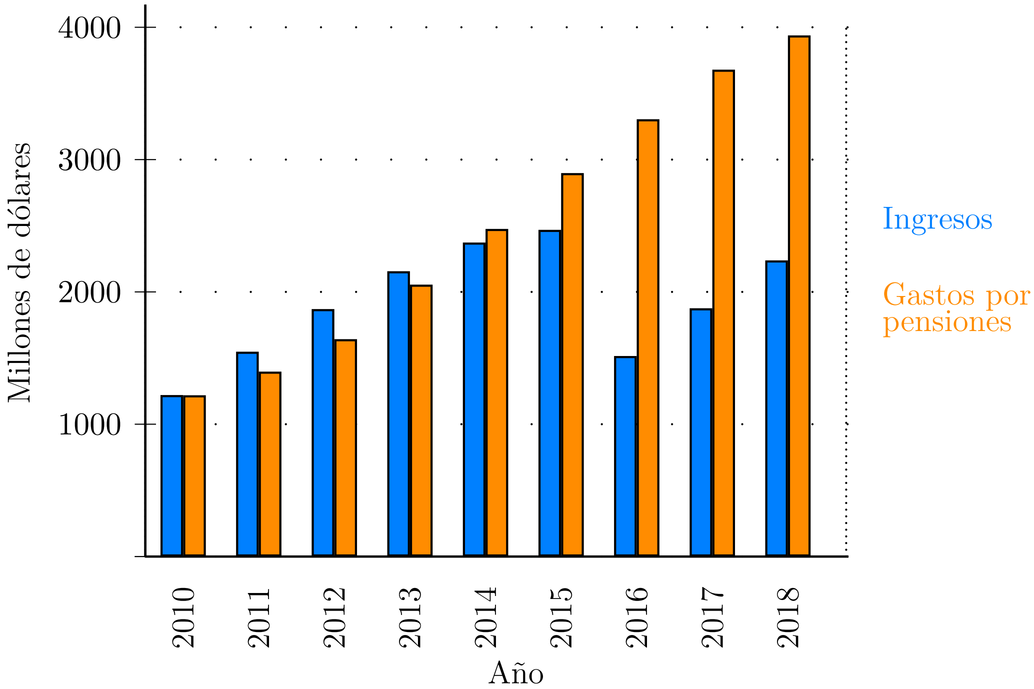

Figura 2.4: Ingresos vs gastos por pensiones al 31 de diciembre de cada año.

Desde el año 2014, los gastos superaron a los ingresos por pensiones, para cubrir este desbalance se optó por deshacer inversiones realizadas y así obtener ingresos adicionales. De continuar esta tendencia, el Fondo de IVM corre el riesgo de sufrir un desfinanciamiento financiero a corto o mediano plazo.

Capítulo 3

Aspectos Teóricos

3.1. Fundamentos de matemática financiera

La matemática financiera es la rama de la matemática aplicada encargada de estudiar las herramientas necesarias para calcular el valor del dinero en el tiempo. Este dinero conocido como capital puede ser una inversión, deuda o préstamo. En esta sección del capítulo se dará una breve introducción a esta área para su posterior uso en la matemática actuarial.

3.1.1. Interés y tasa de interés

El *interés* es la retribución económica que devuelve el capital inicial por período transcurrido, de forma tal que compense la desvalorización de la moneda, que cubra el riesgo y que pague el alquiler del dinero. La *tasa de interés* o *tipo de interés* es el porcentaje que se cobra por el alquiler del dinero, se lo representa por i, mientras no se dé ninguna especificación las tasas de interés se entenderán como anuales. Los tipos de interés son:

- **Interés Nominal:** La tasa de interés nominal se caracteriza por tener en cuenta solo el capital invertido en un periodo de tiempo determinado.
- **Interés Efectivo:** Es aquel que se paga al final del mismo período, pero tomando en cuenta el número de veces que se pagan los intereses generados, para expresar el rendimiento de una inversión. El interés nominal y efectivo cumplen la siguiente relación:

$$\left(1+\frac{j^m}{m}\right)^m = (1+i) \tag{3.1.1}$$

donde,

j: Interés efectivo del periodo

i: Interés nominal del periodo

m: Número de capitalizaciones del periodo o subperiodos

Tomando el límite de esta relación cuando $m \to \infty$ se puede definir la tasa de interés instantáneo.

- **Interés instantáneo** Esta tasa se caracteriza por el pago inmediato o continuo del interés generado. Del límite de la relación de 3.1.1, se tiene:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j^m}{m}\right)^m = e^{j^m}. \tag{3.1.2}$$

Luego, se denota la tasa de interés instantáneo como δ, donde $\delta = j^m$, por lo que se tiene la siguiente relación:

$$(1 + i) = e^{\delta}. \tag{3.1.3}$$

Finalmente, este tipo de interés se expresa como:

$$\delta = ln(1 + i). \tag{3.1.4}$$

3.1.2. Leyes de capitalización

Para determinar la cuantía a pagar por el alquiler de un capital, existen fundamentalmente dos procedimientos o leyes para la determinación del interés. El más elemental consiste en aplicar la ley de capitalización simple que, a su vez, se usa para llegar a la ley de capitalización compuesta.

3.1.2.1. Ley de capitalización simple

Con la aplicación de la ley de capitalización simple, los intereses a pagar (I) por la disposición de un capital de monto C, se determina de manera proporcional al capital, periodo de disposición n y tipo de interés i, es decir,

$$I = C \cdot i \cdot n. \tag{3.1.5}$$

De esto, el capital después de n periodos de tiempo está expresado por:

$$C_n = C + I$$

$$
\begin{aligned}
&= C + C \cdot i \cdot n \\
&= C(1 + i \cdot n). && (3.1.6)
\end{aligned}
$$

Se debe notar que, el tipo de interés (i) puede estar expresado en tanto por ciento "anual", "mensual", "semestral", etc., por lo que es necesario que el periodo de disposición esté expresado en la misma unidad de tiempo.

De manera particular, si el tipo de interés es anual, se emplean dos procedimientos para determinar la duración de la operación:

a. Año natural (365 días)

$$n = \frac{\text{número de días de la operación}}{365}.$$

b. Año comercial (360 días)

$$n = \frac{\text{número de días de la operación}}{360}.$$

El uso del año comercial genera un monto mayor de interés con respecto al año natural para un mismo tipo de interés y un mismo periodo de tiempo.

Por otro lado, el tipo de interés con la ley de capitalización simple depende inversamente de la unidad de tiempo con la que se trabaja. Es decir, si el tiempo está expresado en unidades equivalentes a 1/m años, el tipo de interés i^* expresado en la nueva unidad de tiempo debe verificar

$$I = C \cdot i^* \cdot n^* = C \cdot i \cdot n \tag{3.1.7}$$

donde, $n^* = n \cdot m$, es el número de nuevas unidades de tiempo en n años. De la ecuación 3.1.7 se obtiene lo siguiente,

$$i^* = \frac{i}{m}. \tag{3.1.8}$$

3.1.2.2. Ley de capitalización compuesta

La ley de capitalización compuesta se caracteriza por la generación de intereses sobre el capital inicial más los intereses obtenidos en una unidad de tiempo, de forma que el capital crece más rápido.

Definiremos C_0 como el capital inicial que una persona invierte durante un año con un tipo de interés anual i, de manera que, por la ley de capitalización simple la cuantía resultante al cabo de un año sería la suma de los intereses generados más el capital inicial, es decir,

$$C_1 = C_0[1 + i \cdot 1]. \qquad (3.1.9)$$

Luego, si el capital C_1 se reinvierte por un año más con el mismo tipo de interés anual i, al cabo de estos dos años la cuantía acumulada sería:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1[1 + i \cdot 1] \\ &= C_0[1 + i \cdot 1][1 + i \cdot 1] \\ &= C_0[1 + i \cdot 1]^2. \end{aligned} \qquad (3.1.10)$$

Ahora, sea C_n la cuantía que recibiría una persona al invertir un capital C_0 al cabo de n años con un tipo de interés anual i. Aplicando de manera iterativa la ecuación 3.1.10 se tiene:

$$C_n = C_0[1 + i]^n. \qquad (3.1.11)$$

El interés generado bajo la ley de capitalización compuesta es:

$$I = C_0[(1 + i)^n - 1], \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (3.1.12)$$

De manera similar que, en la ley de capitalización simple, se tiene el tipo de interés efectivo subperiodal. Para un capital C_0 durante un periodo de tiempo $1/m$ años, $m \in \mathbb{N}$, con un tipo de interés i^* expresado en la nueva unidad de tiempo que debe verificar:

$$I = C[(1 + i^*)^{n^*} - 1] = C[(1 + i)^n - 1], \qquad (3.1.13)$$

donde $n^* = n * m$, es el número de nuevas unidades de tiempo en n años. Relacionando con 3.1.13 se obtiene lo siguiente,

$$i^* = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1. \qquad (3.1.14)$$

Se debe notar que a mediano y largo plazo la capitalización compuesta genera intereses significativamente mayores que la capitalización simple [20].

3.1.3. Leyes financieras de descuento

Una ley financiera de descuento es una herramienta que se usa para realizar la operación contraria a la capitalización, es decir, permite convertir un capital a vencer en un momento futuro (t_n), a otro capital equivalente en un momento previo al establecido (t_0). Ejemplificando, esta ley nos permite saber el monto que se debería pagar hoy de forma adelantada un préstamo que vence dentro de dos años, si hoy la tasa de interés en el mercado es del 6 %; o, saber cuál sería el monto a recibir por una letra que vence en un año si el tipo de descuento que el banco aplica es del 7 %. Esta nueva cantidad definida se le llama *valor actual* o *valor de descuento.*

Existen los siguientes tipos de leyes financieras de descuento:

- **Ley de descuento simple comercial**
  La *ley de descuento simple comercial* viene definida desde la expresión 3.1.6 de la ley de capitalización simple,

$$C_n = C_0(1 + i * n),$$

  tomando como referencia la misma nomenclatura se tiene,

$$C_0 = C_n(1 - d * n) \tag{3.1.15}$$

  donde, d es el tipo de descuento. La ley de descuento simple se la emplea generalmente en operaciones a corto plazo, es decir para plazos inferiores al año.

- **Ley de descuento simple racional**
  Por otro lado, despejando de forma directa C_0 de la expresión 3.1.6, se tiene la denominada *ley de descuento simple racional*,

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + n \cdot i)} \tag{3.1.16}$$

  donde, i es el tipo de interés.

- **Ley de descuento compuesto**
  Finalmente, para operaciones de mediado y largo plazo, se tiene la *ley de descuento compuesto*, la misma que se obtiene al despejar C_0 de la ley de capitalización compuesta, expresión 3.1.11,

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n} = C_n v^n \tag{3.1.17}$$

  donde, $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$ se denomina el *factor de descuento financiero.*

3.1.4. Rentas financieras

Una *renta financiera* es un conjunto de capitales C_n que vence en períodos sucesivos. Para trabajar con las rentas financieras es necesario definir los siguientes términos:

términos de la renta son las cantidades o capitales C_n que vencen en el momento t_n, **período** es el intervalo constante de tiempo que transcurre entre dos pagos de capitales sucesivos, y **vida** es el número n de períodos que transcurre desde el inicio hasta su finalización. Así se obtiene el conjunto de capitales *Renta*,

$$Renta = \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_n, t_n)\}$$

.

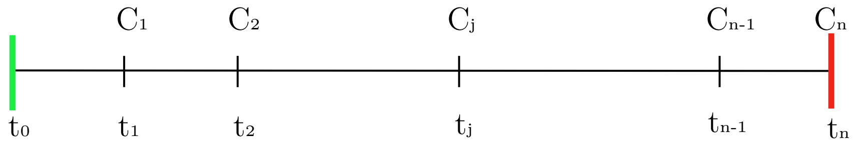

Figura 3.1: Esquema de rentas financieras.

Donde cada (C_j, t_j) representa el capital C_j que vence en el período t_j. Las rentas tienen dos propósitos fundamentales:

1. Constituir un capital que estará disponible en un futuro, para lo que tendrá sentido hablar del Valor Final de la Renta; y,
2. Devolver progresivamente una deuda adquirida, en este caso se habla de calcular el Valor Actual de la Renta.

3.1.4.1. Tipo de rentas financieras

Las rentas financieras se clasifican según los siguientes criterios:

a. **En función de sus términos**, es decir, la cuantía que vence en cada período. Si la cuantía es la misma en cada periodo la renta se denomina como **constante** y **variable** si la cuantía es diferente. Dentro de las **rentas variables** se considerará en este capítulo las que varían según una ley conocida.

b. **En función de la vida**, se definen rentas **temporales** cuando el número de periodos es finito y rentas **perpetuas** para un número suficientemente grande de periodos.

c. **En función de inicio y el fin**, pueden ser **anticipadas** cuando la última cuantía vence antes del momento de finalización de la renta; **diferidas** cuando el primer vencimiento es después del inicio de la renta o **inmediatas** cuando en el primer periodo vence la primera cuantía.

d. **En función del vencimiento** son las rentas que dependen del momento en que vencen dentro del periodo, se definen: **prepagable** cuando la renta vence al inicio del período y **pospagable** cuando la renta vence al final del período.

e. **En función del periodo**, esto es la unidad del periodo de la renta, pueden ser **anuales** si la unidad es año y **fraccionarias** si la unidad del periodo es menor que el año (mes, trimestre, semestre, etc.)

De forma simplificada se tiene el siguiente cuadro como resumen de la clasificación de las rentas financieras:

CRITERIO	**TIPOS**
a. Términos	Constantes Variables
b. Vida	Temporales Perpetuas
c. Inicio y fin	Inmediatas Diferidas
d. Vencimiento	Prepagables Pospagables
e. Periodo	Anuales Fraccionadas

Cuadro 3.1: Clasificación de las rentas financieras.

De estos tipos de rentas se realizará su valoración, para ello se emplea leyes financieras con el objetivo de determina el capital que sea financieramente equivalente al conjunto de capitales que forman la renta [2].

3.1.4.2. Rentas inmediatas

El valor de la renta es diferente dependiendo del momento en que se realiza la valoración, entre los más comunes se tiene el momento 0 o inicio del primer periodo de renta y el fin del último período de la renta. Para el inicio del primer período se calcula el **Valor Actual** de la renta y para el fin del último período se calcula el **Valor Final** de la renta.

a. **Renta Anual Constante Pospagable y Temporal**

Vamos a considerar una renta que se constituye con n capitales de 1 unidad monetaria (u. m.) en los periodos t_i, con $i \in [0, n]$, como se muestra en la siguiente figura:

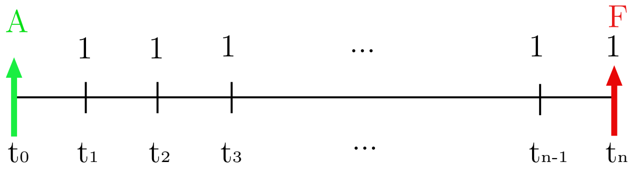

Figura 3.2: Representación renta anual constante pospagable y temporal.

La renta es anual pues se considera que entre los periodos t_i y t_{i+1} transcurre un año, constante ya que todos los capitales son de la misma cuantía C (1 u. m.), pospagable porque el primer capital vence al final del primer período t_1 y por último es temporal pues el número de periodos n es finito.

Primero, para el valor actual de la renta se empleará la ley financiera de descuento compuesto, este valor será la suma de los valores actuales de las cuantías que la contribuyen. Si se toma i como el tipo de interés efectivo anual constante, el valor actual de la renta se calcula:

$$A = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}. \tag{3.1.18}$$

Se observa que la ecuación anterior es una suma en progresión geométrica finita con razón $\frac{1}{(1+i)}$, esta suma S se expresa de la siguiente manera:

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \tag{3.1.19}$$

donde,

a_1 : Primer término de la sucesión.

a_n : Último término de la sucesión.

r : Razón de la progresión geométrica.

De esto, 3.1.18 se expresa de la siguiente forma:

$$A = \frac{\frac{1}{(1+i)^n}\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1}, \tag{3.1.20}$$

tras operaciones algebraicas de 3.1.20 se obtiene,

$$A = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.1.21}$$

Esta expresión se denota por $a_{\overline{n}|i}$ para así definir al valor actual de una renta anual, constante, inmediata, pospagable y temporal como:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.1.22}$$

De manera similar, el valor final de una renta anual, constante, inmediata, pospagable y temporal será la suma del valor final de las cuantías que constituyen la renta en el periodo t_n, para ello se emplea la ley financiera de capitalización compuesta, lo que nos lleva a obtener,

$$F = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1, \tag{3.1.23}$$

donde de igual manera se tiene una suma de una sucesión progresiva geométrica finita con 1 como el primer término, $(1+i)^{n-1}$ el último término y razón de $(1+i)$. De esto aplicando la ecuación 3.1.19 se sigue que,

$$F = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i)-1}{(1+i)-1}. \tag{3.1.24}$$

Se denota al valor final de una renta anual, constante, inmediata, pospagable y temporal como $s_{\overline{n}|i}$, así se tiene:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{3.1.25}$$

Adicionalmente, se cumple la siguiente relación,

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^{n}. \tag{3.1.26}$$

Finalmente, si la renta no es unitaria, el valor actual y final para este tipo de renta serían:

$$A = Ca_{\overline{n}|i} \tag{3.1.27}$$

$$F = Cs_{\overline{n}|i} \tag{3.1.28}$$

b. **Renta anual constante pospagable y perpetua**

La siguiente figura representa las características de este tipo de renta,

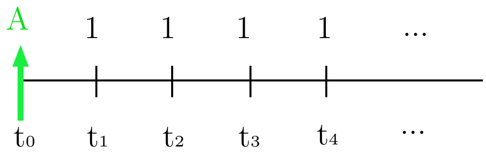

Figura 3.3: Representación renta anual constante pospagable y perpetua.

Este tipo de renta tiene un número de periodos no finitos por lo que se conoce el inicio, pero no su finalización. En este caso tiene sentido hablar del valor actual de la renta, pero no así de su valor final. De igual forma, para este tipo de renta se considera un capital C de 1 u. m. Además, el valor actual de la renta será la suma del valor actual de cada cuantía que la constituye en el periodo t_0,

$$A = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... \tag{3.1.29}$$

Si se toma el límite cuando n tiende al infinito en la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} A_\infty &= \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ &= \frac{1}{i}. \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Se denotará al valor actual de una renta anual, constante, inmediata, pospagable y perpetua como $a_{\overline{\infty}|i}$, por lo que,

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}. \tag{3.1.31}$$

Ahora, si la cuantía C es diferente de 1 u. m., el valor actual de la renta sería:

$$A_\infty = \frac{C}{i}. \tag{3.1.32}$$

c. **Renta anual constante prepagable y temporal**

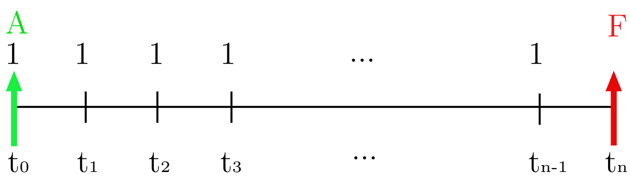

Figura 3.4: Representación renta anual constante prepagable y temporal.

Una renta prepagable tiene como particularidad el desplazamiento de un periodo al origen, por lo que tendrá más valor monetario que la renta pospagable. Para el cálculo del valor actual se tiene que considerar i como el tipo de interés constante para cada periodo en la siguiente expresión:

$$A = 1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \tag{3.1.33}$$

Aplicando la suma de una progresión geométrica, ecuación anterior con razón $\frac{1}{(1+i)}$, se tiene:

$$A = \frac{\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \cdot 1 - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{3.1.34}$$

Se denota a la renta anual constante prepagable y temporal como $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i). \tag{3.1.35}$$

Por otro lado, el valor final de la renta será la suma de los valores finales de cada capital que la constituyen, y se la denotará por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$.

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = 1 \cdot (1+i)^n + \cdots + 1 \cdot (1+i)^2 + 1 \cdot (1+i), \tag{3.1.36}$$

la cual es una progresión geométrica de razón $(1+i)^{-1}$ y aplicando 3.1.19 se tiene,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)(1+i)^{-1} - (1+i)^n}{(1+i)^{-1} - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i). \tag{3.1.37}$$

Finalmente, el valor final de una renta anual constante prepagable y temporal, se expresa de la siguiente manera:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i). \tag{3.1.38}$$

d. **Renta anual constante prepagable y perpetua**

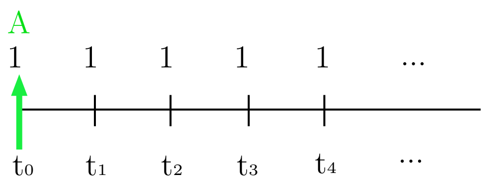

Figura 3.5: Representación renta anual constante prepagable y perpetua.

El valor actual de la renta será la suma de los valores actuales de los capitales que la constituyen, y se la denota como $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^j}. \tag{3.1.39}$$

La misma que puede ser expresada como el límite que tiende al infinito de una renta prepagable temporal, es decir, de la ecuación 3.1.35

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} &= \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}(1+i). \end{aligned} \tag{3.1.40}$$

Finalmente se expresa el valor actual de una renta constante prepagable y perpetua como:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{(1+i)}{i} \tag{3.1.41}$$

3.1.4.3. Rentas diferidas

Se entiende que una renta está diferida d periodos, cuando el pago o cobro del primer capital ocurre d periodos después del inicio de la renta.

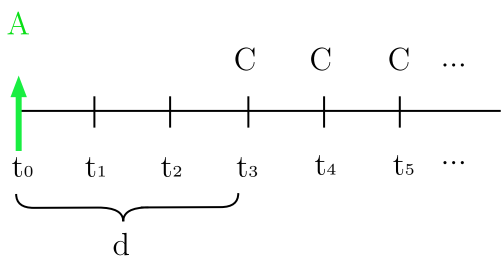

Figura 3.6: Representación de una renta diferida.

a. **Rentas diferidas temporales**

Se considera capitales constantes C de 1 u. m. que constituyen una renta. El valor actual de una renta diferida d periodos, temporal y pospagable se denota por ${}_{d|}a_{\overline{n-d}|i}$, la que estará definida por:

$${}_{d|}a_{\overline{n-d}|i} = (1+i)^{-d}\bar{a}_{\overline{n-d}|i}. \tag{3.1.42}$$

Por otro lado, el valor final de la renta denotada por ${}_{d|}s_{\overline{n-d}|i}$, de la ecuación 3.1.26 se obtiene la siguiente relación,

$${}_{d|}s_{\overline{n-d}|i} = (1+i)^n {}_{d|}a_{\overline{n-d}|i}. \tag{3.1.43}$$

Y el valor final de una renta diferida, temporal y pospagable está dado por:

$$ {}_{d|}s_{\overline{n-d|}i} = (1+i)^{n-d} a_{\overline{n-d|}i}. \tag{3.1.44} $$

De manera similar, para la valorización de una renta temporal prepagable diferida d periodos, se considera capitales de monto de 1 u. m. Entonces el valor actual y valor final están dados por:

$$ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{n-d|}i} = (1+i)^{-d} \ddot{a}_{\overline{n-d|}i} \qquad \text{y} \tag{3.1.45} $$

$$ {}_{d|}\ddot{s}_{\overline{n-d|}i} = (1+i)^{n-d} \ddot{s}_{\overline{n-d|}i} \tag{3.1.46} $$

respectivamente.

b. **Rentas diferidas perpetuas**

Como se ha definido anteriormente, una renta perpetua tiene la característica de tener el número de períodos ilimitado, por lo que tiene sentido definir solamente el valor actual de rentas perpetuas pospagables y prepagables diferidas d periodos, para lo que se tiene las siguientes expresiones:

$$ {}_{d|}a_{\overline{\infty|}i} = (1+i)^{-d} \bar{a}_{\overline{\infty|}i}, \tag{3.1.47} $$

$$ {}_{d|}\ddot{a}_{\overline{\infty|}i} = (1+i)^{-d} \ddot{a}_{\overline{\infty|}i}. \tag{3.1.48} $$

Si el monto del capital constante es diferente de la unidad monetaria, para el cálculo del valor actual bastaría multiplicar los valores calculados y el monto de los capitales que constituyen la renta.

3.1.4.4. Rentas anticipadas

En una renta anticipada el último momento de vencimiento no es el mismo momento de valoración final, estos distan h periodos. La anticipación genera un cambio en el valor final de la renta.

a. **Rentas Anticipadas Temporales**

La valoración de la renta consiste en calcular el valor final en el momento t_n y capitalizar h momentos para llevarlo al momento de valoración final.

Aplicando la ecuación 3.1.25, se obtiene el valor final de una **renta anticipada**

temporal pospagable de valor C,

$$S = Cs_{\overline{n}|i} = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{3.1.49}$$

Luego,

$$S_{|h} = C\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^h. \tag{3.1.50}$$

Ahora, el valor final de una renta anticipada se define de igual forma cuando se considera sus términos como pre o pospagables.

3.1.4.5. Rentas anuales variables

Son las rentas cuya variación sigue una progresión determinada, puede ser aritmética o geométrica.

a. **Rentas anuales variables en progresión aritmética**

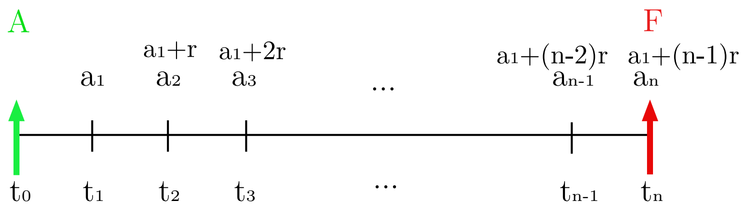

Figura 3.7: Representación de una renta variable en progresión aritmética.

Una renta cuya variación sigue una progresión aritmética se caracteriza por cumplir la siguiente relación entre dos términos consecutivos, con razón r.

$$a_j = a_{j-1} + r.$$

De esto, se deduce la siguiente relación entre el primer y j-ésimo término,

$$a_j = a_1 + (j-1) * r.$$

Para una **renta pospagable y temporal** se tiene el cálculo del valor actual como la suma de los valores actuales de las cuantías que la constituyen, es decir,

$$\begin{aligned} A &= a_1(1+i)^{-1} + (a_1 + r)(1+i)^{-2} + \cdots + (a_1 + (n-1)r)(1+i)^{-n} \\ &= a_1[(1+i)^{-1} + \cdots + (1+i)^{-n}] + r[(1+i)^{-2} + \cdots + (n-1)(1+i)^{-n}] \\ &= a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + r \cdot V \end{aligned} \tag{3.1.51}$$

donde,

$$V = (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \cdots + (n-2)(1+i)^{-(n-1)} + (n-1)(1+i)^{-n},$$

multiplicando por $(1+i)$ y restando se tiene,

$$(1+i)V - V = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} - (n-1)(1+i)^{-n},$$

luego se despeja V resultando:

$$V = \frac{a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.1.52}$$

Remplazando 3.1.52 en 3.1.51 y el valor actual de la renta se expresa como:

$$A = a_1 a_{\overline{n}|i} + \frac{r[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}]}{i}. \tag{3.1.53}$$

Ahora, para el cálculo del valor final se utiliza la relación que se tiene con el valor actual de la renta,

$$\begin{aligned} S &= A(1+i)^{-n} \\ &= \left[a_1 a_{\overline{n}|i} + \frac{r[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}]}{i}\right](1+i)^{n} \\ &= a_1 s_{\overline{n}|i} + \frac{r(s_{\overline{n}|i} - n)}{i}. \end{aligned} \tag{3.1.54}$$

Para una **renta pospagable y perpetua**, se aplica el límite cuando $n \to \infty$ de la expresión 3.1.53,

$$\begin{aligned} A_\infty &= \lim_{n\to\infty} \left[a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{r[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}]}{i}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot a_{\overline{n}|i} + \lim_{n\to\infty} \frac{r}{i}\left[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right] \\ &= \frac{a_1}{i} + \frac{r}{i} \cdot \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i}\left(a_1 + \frac{r}{i}\right). \end{aligned} \tag{3.1.55}$$

Para una **renta diferida d períodos**, se multiplica $(1+i)^{-d}$ por la renta pospagable temporal 3.1.53,

$$A_{d|} = \left[a_1 a_{\overline{n}|i} + \frac{r[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}]}{i}\right](1+i)^{-d}. \tag{3.1.56}$$

Por último, para una **renta anticipada h períodos** se multiplica el valor final de una renta pospagable temporal expresada en 3.1.54 por $(1+i)^h$,

$$S_{|h} = \left[a_1 s_{\overline{n}|i} + \frac{r(s_{\overline{n}|i} - n)}{i} \right] (1+i)^h. \tag{3.1.57}$$

b. **Rentas anuales variables en progresión geométrica**

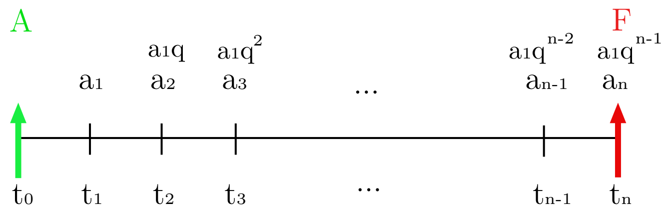

Figura 3.8: Representación de una renta variable en progresión geométrica.

En una renta con variación que sigue una progresión geométrica, la relación que cumplen dos términos consecutivos, con razón q, es la siguiente:

$$a_j = a_{j-1} q = a_1 q^{j-1}.$$

En particular, el valor actual de una **renta pospagable temporal** se obtiene mediante la suma de los valores actuales de las cuantías que la constituyen,

$$\begin{aligned} A &= a_1(1+i)^{-1} + a_1 q(1+i)^{-2} + \cdots + a_1 q^{-(n-1)}(1+i)^{-n} \\ &= a_1[(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + \cdots + q^{-(n-1)}(1+i)^{-n}]. \end{aligned}$$

Al reconocer una suma de términos de una progresión geométrica, la anterior ecuación se puede expresar,

$$\begin{aligned} A &= a_1 \frac{q^{n-1}(1+i)^{-n} q(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{q(1+i)^{-1} - 1} \\ &= a_1 (1+i)^{-1} \frac{q^n (1+i)^{-n} - 1}{q(1+i)^{-1} - 1} \\ &= a_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1 + iq}, \qquad q \neq (1+i). \end{aligned} \tag{3.1.58}$$

Ahora, si $q = (1+i)$, el valor actual de la renta se expresa mediante,

$$\begin{aligned} A &= a_1 (1+i)^{-1} n \\ &= \frac{a_1 n}{1+i}. \end{aligned} \tag{3.1.59}$$

Por otro lado, para el valor final se tiene:

- Para $q \neq (1+i)$,

$$S = a_1 \frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{1+iq} (1+i)^n. \tag{3.1.60}$$

- Para $q = (1+i)$,

$$S = a_1 (1+i)^{-1} n (1+i)^n. \tag{3.1.61}$$

Adicionalmente, se cumple que:

$$S = A(1+i)^n.$$

Por otra parte, para el valor actual de una **renta pospagable y perpetua** se tiene la suma infinita de los valores actuales de los capitales que la constituyen, en los siguientes casos:

- Si $q(1+i)^{-1} < 1$

$$\begin{aligned} A_\infty &= \frac{a_1(1+i)^{-1}}{1 - q(1+i)^{-1}} \\ &= \frac{a_1}{(1+i-q)}. \end{aligned} \tag{3.1.62}$$

- Si $q(1+i)^{-1} \geq 1$

$$A_\infty = \infty. \tag{3.1.63}$$

Para el caso de una **renta diferida d periodos**, se obtiene la expresión de su valor actual al multiplicar el factor $(1+i)^{-d}$ por el valor actual de una renta inmediata de características iguales. Finalmente, el valor final de una **renta anticipada h períodos** se define al multiplicar el factor $(1+i)^h$ con el valor final de una renta inmediata de características iguales.

3.1.4.6. Rentas Fraccionadas

Una renta fraccionada se define como una renta con vencimiento en períodos menores al año.

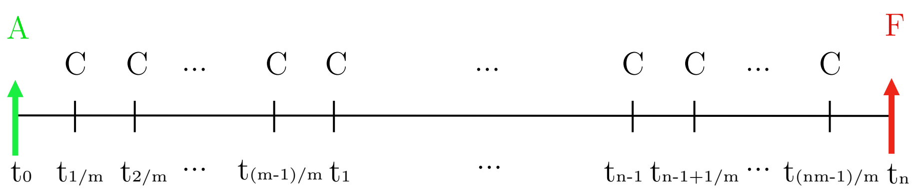

Figura 3.9: Representación de una renta fraccionada.

a. **Rentas Fraccionadas Constantes**

Primero, para una **renta fraccionada constante pospagable**,se supone una cuantía C que se hace efectivo en frecuencia m, su valor actual está expresado por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{m}(1+i)^{-\frac{1}{m}} + \frac{C}{m}(1+i)^{-\frac{2}{m}} + ... + \frac{C}{m}(1+i)^{-\frac{m}{m}} + \\ &\frac{C}{m}(1+i)^{-(1+\frac{1}{m})} + \frac{C}{m}(1+i)^{-(1+\frac{2}{m})} + \cdots + \frac{C}{m}(1+i)^{-(1+\frac{m}{m})} + \\ &\vdots \\ &\frac{C}{m}(1+i)^{-(n-1+\frac{1}{m})} + \cdots + \frac{C}{m}(1+i)^{-(n-1+\frac{m}{m})}. \end{aligned} \tag{3.1.64}$$

De esto, se observa que se trata de una renta anual constante prepagable, por lo que 3.1.64 se expresa como:

$$A = \frac{C}{m}\left[(1+i)^{-\frac{1}{m}} + (1+i)^{-\frac{2}{m}} + \cdot + (1+i)^{-\frac{m}{m}}\right] \ddot{a}_{\overline{n}|i}. \tag{3.1.65}$$

Además, se tiene la suma de una progresión geométrica con razón $(1+i)^{-\frac{1}{m}}$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{m} \cdot \frac{1-(1+i)^{-1}}{[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]}[1+i] \\ &= C \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot \frac{i}{m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]} \\ &= C \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot \frac{i}{j^m} \end{aligned} \tag{3.1.66}$$

donde, $\frac{i}{j^m}$ se lo conoce como **factor de corrección** de una renta anual, el mismo que permite tratar las rentas fraccionadas como si fueran anuales.

Luego, para el cálculo del valor futuro es sencillo obtener el producto entre el valor actual y el factor de capitalización $(1+i)^n$,

$$S = C s_{\overline{n}|i} \cdot \frac{i}{j^m}. \tag{3.1.67}$$

Por otro lado, para una **renta fraccionada constante prepagable** todos sus términos están una fracción de año m más cerca del origen. Por esto se define su valor actual como:

$$\ddot{A} = C \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot \frac{i}{j^m}(1+i)^{\frac{1}{m}}, \tag{3.1.68}$$

el valor final:

$$\ddot{S} = C \cdot s_{\overline{n}|i} \cdot \frac{i}{j^m}(1+i)^{\frac{1}{m}} \tag{3.1.69}$$

por último, si la renta es perpetua:

$$\ddot{A} = \frac{C}{i} \cdot \frac{i}{j^m}(1+i)^{\frac{1}{m}}. \tag{3.1.70}$$

3.2. Fundamentos de matemática actuarial

3.2.1. Modelo biométrico

La Biometría humana es parte de la Estadística Actuarial que se ocupa, principalmente, del estudio de la supervivencia humana y de otros conceptos relacionados con la misma. La modelización de estas características se conoce como *modelo biométrico.*

El modelo biométrico es un modelo estocástico que se construye alrededor de una variable aleatoria X, denominada “edad de fallecimiento”, que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante de nacimiento de un individuo hasta su fallecimiento. Esta variable aleatoria es continua y está definida en el intervalo $[0, w]$; w se denomina *infinito actuarial* y es la edad máxima que un individuo alcanza al momento de morir [3].

Las hipótesis básicas sobre las que descansa el modelo son las siguientes:

- **Homogeneidad.** El comportamiento estadístico de la edad de fallecimiento de los individuos, dentro de una población, es idéntico. Dicho de otra manera, la función de distribución de X es la misma para todos. Por ejemplo, si la población incluye hombres y mujeres, la homogeneidad implica que la probabilidad de que un hombre o una mujer superen los 47 años es la misma.

  Formalmente, si X_i y X_j son las edades de fallecimiento de dos individuos cualesquiera, i y j, de una determinada población, entonces,

  $$F(x) = F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x), \quad \text{para todo } x \in [0, w].$$

  Donde, F_{X_i} y F_{X_j} representan la función de fallecimiento para X_i y X_j respectivamente.

- **Independencia.** La probabilidad para la edad de fallecimiento de un individuo no depende de la edad de fallecimiento de otro individuo cualesquiera. De manera formal, si X_i y X_j son las edades de fallecimiento de los individuos i y j,

  $$F_{(X_i|X_j=y)}(x) = F(x), \quad \text{para todo } x,\, y \in [0, w].$$

- **Estacionariedad.** Las probabilidades biométricas sobre los individuos no dependen de su fecha de nacimiento, sino solo de su edad. Por ejemplo, la probabilidad de que un individuo nacido el 13/07/1973 fallezca antes del 13/07/2014, es la misma que tiene un individuo nacido el 17/11/1997 de fallecer antes del 17/11/2038, puesto que, estas probabilidades pueden describirse como la probabilidad de que el individuo fallezca antes de cumplir los 41 años.

3.2.1.1. Función de fallecimiento

La función de distribución de la edad de fallecimiento se expresa por $F(x)$ y se define como

$$F(x) = P[X < x], \quad \text{para } x \geq 0. \tag{3.2.71}$$

La expresión anterior representa la probabilidad de fallecer antes de la edad x y se la conoce como *función de fallecimiento*, y cumple con las siguientes propiedades:

- $F(0) = 0$.
- $F(\infty) = 1$ o $F(w) = 1$.
- F es una función no decreciente.
- F es una función continua por la derecha.

3.2.1.2. Función de supervivencia

La *función de supervivencia* representa la probabilidad que tiene un individuo en sobrevivir hasta la edad x, se denota por $S(x)$ y está dada por

$$S(x) = P[X > x] = 1 - F(x), \tag{3.2.72}$$

y cumple con las propiedades:

- $S(0) = 1$.
- $S(\infty) = 0$ o $S(w) = 0$.
- S es una función no decreciente.
- S es una función continua por la derecha

3.2.1.3. Vida residual

La *Vida Residual* es una variable aleatoria que recoge los años que restan por vivir a un individuo que ha alcanzado la edad x, se la representa por $T(x)$ y se define por

$$T(x) = X - x, \quad X > x \tag{3.2.73}$$

esta variable toma valores dentro del intervalo $[0, w - x]$.

3.2.1.4. Probabilidad temporal de fallecimiento ${}_hq_x$

Es la probabilidad, de que un individuo que ha superado la edad x, fallezca en el transcurso de h años. Por lo tanto, se trata de una probabilidad de fallecimiento condicionada, puesto que, el individuo llega a la edad x, se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} {}_hq_x &= P[x < X \leq x + h | X > x] \\ &= \frac{P[x < X \leq x + h]}{P[X > x]} \\ &= \frac{P[X < x + h] - P[X < x]}{1 - P[X \leq x]} \\ &= \frac{F(x + h) - F(x)}{1 - F(x)}, \quad h \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2.74}$$

En el caso $x = 0$, se calcula la probabilidad de que un recién nacido muera dentro de h años,

$${}_hq_0 = P[X \leq h] = F(h). \tag{3.2.75}$$

Si $h = 1$, se suele omitir este prefijo en la expresión 3.2.74 de la siguiente forma,

$$q_x = P[\text{Individuo de } x \text{ años fallezca dentro de 1 año}].$$

3.2.1.5. Probabilidad temporal de supervivencia ${}_hp_x$

Es la probabilidad de que un individuo que ha superado la edad x, sobrepase la edad $x + h$. Es el suceso contrario al que define la probabilidad temporal de fallecimiento anterior, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} {}_hp_x &= 1 - {}_hq_x \\ &= 1 - \frac{F(x + h) - F(x)}{1 - F(x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - F(x+h)}{1 - F(x)}$$
$$= \frac{S(x+h)}{S(x)} \quad h \geq 0. \tag{3.2.76}$$

En el caso de $x = 0$, se calcula la probabilidad de que un recién nacido supere la edad h,

$${}_hp_0 = P[X > h] = S(x). \tag{3.2.77}$$

Cuando $h = 1$, se omite el prefijo en la expresión 3.2.76 de la siguiente forma,

$$p_x = P[\text{Individuo de } x \text{ años alcance la edad } x+1].$$

3.2.1.6. Probabilidad diferida de fallecimiento ${}_{m|n}q_x$

Es la probabilidad de que un individuo de x años llegue a la edad $x + m$ y que fallezca dentro de n años. Se define como,

$$\begin{aligned} {}_{m|n}q_x &= P[x+m < X \leq x+m+n | X > x] \\ &= \frac{P[x+m < X \leq x+m+n]}{P[X > x]}, \end{aligned}$$

nótese que,

$$P[x < X \leq x+m+n] = P[x < X \leq x+m] + P[x+m \leq X < x+m+n]$$

por tanto,

$$\begin{aligned} {}_{m|n}q_x &= \frac{P[x < X \leq x+m+n]}{P[X > x]} - \frac{P[x < X \leq x+m}{P[X > x]} \\ &= {}_{m+n}q_x - {}_mq_x \\ &= {}_mp_x - {}_{m+n}p_x. \end{aligned} \tag{3.2.78}$$

Si $n = 1$, se puede omitir este prefijo de la expresión anterior.

3.2.2. Tanto instantáneo de mortalidad

El *tanto o tasa instantánea de mortalidad,* μ_x, mide la fuerza o intensidad de la mortalidad a la edad x, para los individuos que han alcanzado dicha edad. Se define como

$$\mu(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}_{\Delta t}q_x}{\Delta t}, \tag{3.2.79}$$

se traduce como la probabilidad de que un individuo que ha llegado a la edad x, fallezca instantáneamente, es decir, fallezca a la edad $x + \Delta t$, donde $\Delta t \to 0$.

Nótese que,

$$\begin{aligned} {}_{\Delta t}q_x &= P[X \leq x + \Delta t | X > x] \\ &= \frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{1 - F(x)}, \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{{}_{\Delta t}q_x}{\Delta t} = \frac{1}{1 - F(x)} \cdot \frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{\Delta t},$$

y tomando límites

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \tag{3.2.80}$$

donde f es la función de densidad de X.

Por ende, el tanto instantáneo de mortalidad se puede calcular conociendo las funciones de distribución y de densidad de la edad de fallecimiento X.

Integrando la expresión 3.2.80, se puede obtener la función de distribución de X en función del tanto instantáneo de mortalidad,

$$\begin{aligned} \int_0^x \mu(y)dy &= \int_0^x \frac{f(y)}{1 - F(y)} dy \\ &= -\log[1 - F(y)]|_0^x \\ &= -\log[1 - F(x)], \end{aligned}$$

cambiando de signo y tomando exponenciales en ambos miembros la expresión anterior,

$$1 - F(x) = exp\left(-\int_0^x \mu(y)dy\right),$$

de donde,

$$F(x) = 1 - exp\left(-\int_0^x \mu(y)dy\right). \tag{3.2.81}$$

La probabilidad temporal de supervivencia, de igual madera puede obtenerse a partir de $\mu(x)$,

$$\begin{aligned}
{}_h p_x &= \frac{1-F(x+h)}{1-F(x)} \\
&= \frac{exp\left(-\int_0^{x+h}\mu(y)dy\right)}{exp\left(-\int_0^{x}\mu(y)dy\right)} \\
&= exp\left(-\int_0^{x+h}\mu(y)dy + \int_0^{x}\mu(y)dy\right) \\
&= exp\left(-\int_x^{x+h}\mu(y)dy\right). \qquad (3.2.82)
\end{aligned}$$

Para la probabilidad temporal de fallecimiento, se obtiene

$$\begin{aligned}
{}_h q_x &= 1 - {}_h p_x \\
&= 1 - exp\left(-\int_x^{x+h}\mu(y)dy\right). \qquad (3.2.83)
\end{aligned}$$

En ocasiones conviene relacionar el tanto instantáneo de mortalidad con la función de supervivencia. Recuérdese que

$$S(x) = P[X \geq x] = 1 - F(x), \quad \text{para } x > 0,$$

nótese entonces que

$$S'(x) = [1-F(x)]' = -f(x)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
&= -\frac{S'(x)}{S(x)} \\
&= -\frac{d}{dx}\log[S(x)] \qquad (3.2.84)
\end{aligned}$$

La relación recíproca se obtiene a partir de la expresión 3.2.81,

$$\begin{aligned}
S(x) &= 1 - F(x) \\
&= exp\left(-\int_0^{x}\mu(y)dy\right). \qquad (3.2.85)
\end{aligned}$$

3.2.3. Tablas de mortalidad

Una *tabla de mortalidad* es un modelo teórico que describe la extinción de una cohorte[1] hipotética o ficticia. Permite determinar las probabilidades de sobrevivir o de morir a una edad x o entre edades x y $x+h$. Se considera como la herramienta más completa para el análisis de la mortalidad de una población en un momento dado.

Las tablas de mortalidad se componen de funciones biométricas definidas sobre cohortes ficticias de individuos. A continuación, se definen dichas funciones.

3.2.3.1. Función l_x

Sea $\mathcal{L}(x)$, la variable aleatoria que representa el número de sobrevivientes de la cohorte a la edad x. Indexamos a los integrantes de la cohorte por $j = 1, 2, \ldots, l_0$, se tiene que

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j,$$

donde I_j es un indicador de la supervivencia de la vida j, es decir,

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si la vida } j \text{ sobrevive hasta la edad } x \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que

$$E[l_j] = S(x),$$

por consiguiente

$$E[\mathcal{L}(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[l_j] = l_0 S(x). \tag{3.2.86}$$

Denotemos l_x en lugar de $E[\mathcal{L}(x)]$, se tiene

$$l_x = l_0 S(x), \tag{3.2.87}$$

así, l_x representa el número esperado de supervivientes a la edad x de una cohorte de tamaño l_0. De las expresiones 3.2.76 y 3.2.87 se colige

$${}_h p_x = \frac{S(x+h)}{S(x)}$$

[1]**Cohorte** grupo de individuos que comparten una característica en común, como el año de nacimiento.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{l_{x+h}/l_0}{l_x/l_0} \\
&= \frac{l_{x+h}}{l_x}, \qquad (3.2.88)
\end{aligned}
$$

y de esta última expresión se tiene

$$
\begin{aligned}
{}_h q_x &= 1 - {}_h p_x \\
&= \frac{l_x - l_{x+h}}{l_x}. \qquad (3.2.89)
\end{aligned}
$$

3.2.3.2. Función d_x

Sea ${}_h\mathcal{D}_x$, variable aleatoria que representa el número de muertes en la cohorte entre la edad x y $x+h$. Luego,

$$
{}_h\mathcal{D}_x = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x+h), \qquad (3.2.90)
$$

entonces por la expresión 3.2.87 se tiene,

$$
\begin{aligned}
E[{}_h\mathcal{D}_x] &= E[\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x+h)] \\
&= l_x - l_{x+h} \\
&= {}_h d_x, \qquad (3.2.91)
\end{aligned}
$$

y por la expresión 3.2.89 se obtiene la igualdad

$$
{}_h d_x = l_x \cdot {}_h q_x. \qquad (3.2.92)
$$

3.2.4. Rentas actuariales

Las *rentas actuariales* son prestaciones que se otorgan de manera regular al asegurado, mientras este permanezca con vida. En esta sección se evaluará los distintos tipos de rentas considerando el caso discreto.

3.2.4.1. Renta actuarial vitalicia, anual y prepagable

Una *renta vitalicia prepagable* es una renta de supervivencia cuyas cuantías se pagan al inicio de cada año y dura mientras el asegurado siga con vida. La prima pura de esta operación considerando el pago de 1 unidad monetaria (u. m.), se denota por $\ddot{a}_x$

y se expresa como

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^k {}_kp_x, \tag{3.2.93}$$

donde v es el factor de descuento y es igual a $v = \frac{1}{1+i}$, con i la tasa de interés efectiva anual.

3.2.4.2. Renta actuarial vitalicia, anual y pospagable

Las cuantías de una *renta actuarial vitalicia pospagable* son pagadas al final de cada año y dura mientras el asegurado siga con vida. Considerando el pago de 1 u. m. la prima pura se denota por a_x y se expresa como

$$\begin{aligned} a_x &= \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{w-k} v^k \cdot {}_kp_x. \end{aligned} \tag{3.2.94}$$

3.2.4.3. Renta actuarial temporal, anual y prepagable

Una *renta actuarial temporal prepagable* consiste en una sucesión de pagos anuales de 1 u. m., los cuales se pagan al inicio de cada uno de los siguientes n años, mientras el asegurado permanezca con vida. La prima pura se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ y se expresa como

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x. \tag{3.2.95}$$

3.2.4.4. Renta actuarial temporal, anual y pospagable

Las cuantías de una *renta actuarial temporal pospagable* se trata de una sucesión de pagos anuales de 1 u. m. los cuales se pagan al final de cada uno de los siguientes n años, mientras el asegurado permanezca con vida. La prima pura se denota por $a_{x:\overline{n}|}$ y se expresa como

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_kp_x. \end{aligned} \tag{3.2.96}$$

3.2.4.5. Rentas actuariales diferidas, vitalicias y anuales

En una *renta actuarial diferida vitalicia* los pagos de la cuantía no comienzan de forma inmediata, sino después de m años y se mantienen hasta que el asegurado fallezca.

Así pues, en una ***renta actuarial diferida, vitalicia y prepagable*** el asegurado comienza a recibir los pagos de la cuantía al inicio de cada año, después de haber transcurrido m años. Considerando que el pago es de 1 u. m., la prima pura se la denota por $_{m|}\ddot{a}_x$, su expresión es

$$_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m}, \tag{3.2.97}$$

donde $_mE_x = v^m \cdot {}_mp_x$ y se denomina *factor de actualización*.

Por otro lado, una ***renta actuarial diferida, vitalicia y pospagable*** difiere de una prepagable, en los pagos de la cuantía, estas se las realiza al final de cada año. La prima pura se la denota por $_{m|}a_x$ y su expresión es

$$_{m|}a_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m}. \tag{3.2.98}$$

3.2.4.6. Rentas actuariales diferidas, temporales y anuales

Los pagos de la cuantía en una *renta actuarial diferida temporal* comienzan a efectuarse después de m años y terminan en $m+n$ años o cuando el asegurado fallezca.

Así, la serie de pagos en una ***renta actuarial diferida, temporal y prepagable*** se los realiza al inicio de cada año, a partir del año m. La prima pura, considerando el pago de 1 u. m. se denota por $_{m|n}\ddot{a}_x$ y se expresa como

$$_{m|n}\ddot{a}_x = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}. \tag{3.2.99}$$

Por otra parte, los pagos en una ***renta actuarial diferida, temporal y pospagable*** se los realiza al termino de cada año, a partir del año m. La prima pura se la denota por $_{m|n}a_x$ y se expresión es

$$_{m|n}a_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m:\overline{n}|}. \tag{3.2.100}$$

3.2.5. Rentas actuariales variables

En esta sección se muestra como hallar primas puras cuando la cuantía varía con el transcurso del tiempo, siguiendo una progresión geométrica o aritmética.

3.2.5.1. Renta variable en progresión geométrica

Las cuantías en este tipo de rentas varían de acuerdo con una progresión geométrica con tasa de crecimiento α. Estas rentas se clasifican tal como las rentas constantes estudiadas anteriormente. Sin pérdida de generalidad, se considera una renta actuarial temporal prepagable, la prima pura de esta operación se la denota por $^{\alpha}(V\ddot{a})_{\overline{x:n}|}$ y se expresa de la siguiente forma

$$^{\alpha}(V\ddot{a})_{\overline{x:n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^k \cdot {}_kp_x. \tag{3.2.101}$$

En cambio, considerando una renta actuarial temporal pospagable, la prima pura de esta operación se denota por $^{\alpha}(Va)_{\overline{x:n}|}$ y se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} ^{\alpha}(Va)_{\overline{x:n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{n}(1+\alpha)^{k-1} \cdot v^k \cdot {}_kp_x. \end{aligned} \tag{3.2.102}$$

3.2.5.2. Renta variable en progresión aritmética

La cuantía en este tipo de rentas varía mediante una progresión aritmética creciente o decreciente.

En una renta actuarial con ***variación aritmética creciente*** la cuantía incrementa en función del tiempo que el asegurado permanece con vida, es decir, se paga 1 u. m. adicional por cada periodo transcurrido. Sin pérdida de generalidad, se considera una renta actuarial temporal prepagable, cuya prima pura se denota por $(I\ddot{a})_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma

$$(I\ddot{a})_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) \cdot v^k \cdot {}_kp_x. \tag{3.2.103}$$

En cambio, considerando una renta actuarial temporal prepagable, la prima pura de esta operación se denota por $(Ia)_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (Ia)_{x:n} &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1) \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot v^k \cdot {}_kp_x. \end{aligned} \tag{3.2.104}$$

Mientras tanto, en una renta actuarial con ***variación aritmética decreciente*** la cuantía disminuye en función del tiempo que el asegurado permanece con vida, es decir, se paga 1 u. m. menos por cada periodo transcurrido. Sin pérdida de generalidad, se considera una renta actuarial temporal prepagable, cuya prima pura se denota por $(D\ddot{a})_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma

$$(D\ddot{a})_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot v^k \cdot {}_kp_x. \tag{3.2.105}$$

Por el contrario, considerando una renta actuarial temporal pospagable, la prima pura de esta operación se denota por $(Da)_{x:n}$ y se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned}(Da)_{x:n} &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\cdot v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cdot v^k \cdot {}_kp_x. \end{aligned} \tag{3.2.106}$$

3.2.6. Rentas actuariales fraccionadas

Además de las rentas anuales, también hay que considerar el caso en que estas se pagan de manera mensual, trimestral, semestral, etc. Una renta actuarial se denomina fraccionada cuando el periodo de los pagos es menor al año, en otras palabras, cuando se dividen los periodos anuales en subperiodos de amplitud $\dfrac{1}{m}$.

Las rentas fraccionadas pueden ser vitalicias, temporales, diferidas o variables. Sin pérdida de generalidad, se considera una renta actuarial vitalicia prepagable, la cual paga una cuantía igual a $\dfrac{1}{m}$ u. m., por lo que su prima pura se denota por $\ddot{a}_x^{(m)}$ y se expresa de la siguiente manera

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\cdot v^{k+\frac{j}{m}} \cdot {}_{k+\frac{j}{m}}p_x. \tag{3.2.107}$$

Para hallar esta prima en términos más sencillos, se asume la linealidad de la función $v^{k+\frac{j}{m}} \cdot {}_{k+\frac{j}{m}}p_x$, para $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\cdot v^{k+\frac{j}{m}} \cdot {}_{k+\frac{j}{m}}p_x &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot v^k\cdot {}_kp_x + \frac{j}{m}\cdot v^{k+1}\cdot {}_{k+1}p_x\right] \\ &= v^k\cdot {}_kp_x - (v^k\cdot {}_kp_x - v^{k+1}\cdot {}_{k+1}p_x)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m^2}\end{aligned}$$

$$= v^k \cdot {}_kp_x - \frac{m-1}{2m}(v^k \cdot {}_kp_x - v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x).$$

Y se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot v^{k+\frac{j}{m}} \cdot {}_{k+\frac{j}{m}}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x - \frac{m-1}{2m} \sum_{k=0}^{\infty} (v^k \cdot {}_kp_x - v^{k+1} \cdot {}_{k+1}p_x) \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}(\ddot{a}_x - a_x). \end{aligned} \tag{3.2.108}$$

3.2.7. Primas netas

El pago que el asegurado debe realizar para tener acceso a los beneficios que estipula el contrato de un seguro, se debe emplear el *principio de equilibrio financiero actuarial*, el cual establece que el valor esperado de la pérdida del asegurador es cero al inicio del contrato,

$$E[\tau] = 0,$$

donde τ es el valor actual de las pérdidas futuras, que es igual a la diferencia entre el valor actual de las prestaciones y el valor actual de las primas. Entonces, mediante el principio de equilibrio financiero actuarial se debe cumplir que el valor actuarial de las prestaciones y el valor actuarial de las primas sean iguales.

Si el asegurado realiza un solo pago para tener acceso a los beneficios, a este valor se lo denomina *prima pura* y se la denota por π. Pero las personas, en su gran mayoría, optan por pagos periódicos anuales, generalmente a partir del inicio del contrato, en otras palabras, eligen una renta actuarial temporal prepagable. A la cuantía de estos pagos se los denominan *primas puras* y se las denota por P.

Utilizando el principio de equilibrio financiero actuarial, se obtiene la siguiente relación

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \pi, \tag{3.2.109}$$

por lo que

$$P = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{3.2.110}$$

Si la frecuencia de los pagos es inferior a un año (mensual, trimestral, semestral, etc.) se las denomina *primas netas fraccionadas*, se las denota por $P^{(m)}$, siendo m el número de periodos en que se ha fraccionado el año y su expresión es

$$P^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}}. \tag{3.2.111}$$

3.2.8. Primas Recargadas

Este tipo de primas incluyen todos los gastos fijos y variables relacionados a la emisión y mantenimientos de las pólizas, entre las principales se tienen a las primas de inventario y primas comerciales.

3.2.8.1. Primas de inventario

Estas primas se calculan como la prima pura más los gastos de gestión interna como son los gastos de administración generados en la empresa aseguradora, estos se producen hasta que fallezca el asegurado o termine la vigencia de la póliza, se los puede representar por medio de una renta prepagable de cuantía igual a un porcentaje α de la prima a cobrar y se la representa por P'.

Considerando una póliza de vigencia vitalicia y pagos de primas temporales, la ecuación de equivalencia financiera actuarial es la siguiente

$$P' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \pi + \alpha \cdot P' \cdot \ddot{a}_x, \tag{3.2.112}$$

debido a lo cual, la prima de inventario está dada por

$$P' = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \alpha \cdot \ddot{a}_x}. \tag{3.2.113}$$

Y considerando una póliza con vigencia y pago de primas temporales, la ecuación de equivalencia financiera actuarial es

$$P' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \pi + \alpha \cdot P' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \tag{3.2.114}$$

debido a lo cual, la prima de inventario está dada por

$$P' = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\alpha)}. \tag{3.2.115}$$

3.2.8.2. Primas comerciales

Estas primas están compuestas por la prima pura más los gastos de gestión interna y externa. Entre los gastos de gestión externa se encuentran los gastos de gestión de cartera, cobro de recibos, recargos de seguridad, beneficios, etc.; estos se deben contabilizar hasta que haya pago de primas y se calcula como un porcentaje β de las mismas. A estas rentas se las representan por P''.

Considerando una póliza de vigencia vitalicia y pago de primas temporales, la ecuación de equivalencia financiera actuarial es la siguiente

$$P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \pi + \alpha \cdot P'' \cdot \ddot{a}_x + \beta \cdot P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \tag{3.2.116}$$

debido a lo cual, la prima comercial está dada por

$$P'' = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta) - \alpha \cdot \ddot{a}_x}. \tag{3.2.117}$$

Y considerando una póliza con vigencia y pago de primas temporales, la ecuación de equivalencia financiera actuarial es la siguiente

$$P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \pi + \alpha \cdot P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta \cdot P'' \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \tag{3.2.118}$$

debido a lo cual, la prima comercial está dada por

$$P'' = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\alpha-\beta)}. \tag{3.2.119}$$

Capítulo 4

Sistema de Cuentas Nocionales

Los sistemas de pensiones han sido de gran interés social, principalmente por buscar el bienestar de los cotizantes. En consecuencia, todos los países se preocupan por su futura sostenibilidad, prestando una especial atención a su problemática. Por lo que, a mediados de la década de los noventa en Suecia, cuando este país se replanteó un sistema de pensiones a raíz del incremento de la esperanza de vida, apareció un sistema de pensiones denominado “Cuentas Nocionales” [28].

Los sistemas de pensiones tradicionales se financian mediante el sistema de reparto y las prestaciones se calculan basándose en los años de servicio y las últimas remuneraciones. Los sistemas de pensiones basados en Cuentas Nocionales también se financian mediante el método de reparto, con la diferencia que se reemplaza la fórmula que depende de las remuneraciones por una fórmula actuarial. Además, se mantiene cuentas individuales en las que se registran las cotizaciones y se van sumando los intereses anualmente, estos saldos son imaginarios ya que no representan fondos o inversiones de la institución de pensiones. Sin embargo, los saldos de las cuentas nocionales son reales al determinar las prestaciones, porque el monto de la pensión que corresponde a cada persona se calcula a partir del saldo imaginario que ha acumulado en el momento de alcanzar la edad de jubilación.

En varios estudios realizados sobre el sistema de Cuentas Nocionales, expertos consideran que este sistema podría ser una de las soluciones al déficit del sistema público de pensiones, ya que se considera “más justo, transparente y sencillo” que el sistema actual [7]. Por un lado “justo” porque hay igualdad entre las aportaciones y lo que se recibe en el momento de la jubilación; y por otro lado “transparente y sencillo” ya que, el trabajador podrá mantenerse informado en cada momento sobre la cuantía de su futura pensión para que pueda decidir oportunamente a que edad jubilarse.

4.1. Conceptos generales

El término nocional no tiene una definición exacta, pero es sinónimo de teórico, por lo que según Vidal et al. (2002): "una cuenta nocional es una cuenta virtual donde se recogen las aportaciones individuales de cada cotizante y los rendimientos ficticios que dichas aportaciones generan a lo largo de la vida laboral".

Un sistema de Cuentas Nocionales es un sistema de financiamiento de reparto y de aportaciones definidas, donde las cotizaciones realizadas cada año por los cotizantes van destinadas al pago de las pensiones de los jubilados de ese mismo periodo. Además, este sistema utiliza herramientas financieras-actuariales, como la capitalización financiera de las aportaciones efectuadas, y las ecuaciones de equivalencia actuarial entre las aportaciones realizadas por el cotizante durante su vida laboral y las prestaciones que recibirá dicho cotizante desde el momento de su jubilación. Las cotizaciones y rendimientos no son depositadas realmente en una cuenta individual de cada cotizante, de ahí la denominación de cuenta nocional, virtual o teórica [11].

Las cotizaciones realizadas por cada individuo y sus rendimientos teóricos hasta el momento de su jubilación constituyen el fondo acumulado, el mismo que se transforma en la cuantía de la renta vitalicia que le corresponde a cada individuo, al utilizar un factor de conversión de carácter actuarial. En este proceso debemos tener en cuenta los siguiente elementos:

1. **El tipo de cotización:** es el porcentaje que se aplica a la base de cotización[1], obteniendo como resultado la aportación real efectuada en un mes cualquiera por el afiliado.

2. **El tanto nocional:** es el porcentaje que se utiliza para la capitalización, en el momento de la jubilación, de las aportaciones efectuadas durante toda la carrera laboral. Se sabe que el proceso de capitalización compuesta genera valores mucho mayores en plazos de tiempo elevados, ya que los rendimientos generan, a su vez, nuevos rendimientos. El tanto nocional se puede establecer como algún tipo de índice, por ejemplo, la tasa de crecimiento del PIB, de los salarios medios, de los ingresos por cotizaciones, etc.
   El tanto nocional debería tomar valores inferiores al crecimiento del PIB nominal, para que se cumpla el principio de sostenibilidad financiera de los sistemas de transferencias intergeneracionales, enunciado por Samuelson (1958).

[1] **Base de cotización** es la remuneración total que el trabajador tiene derecho a recibir de manera mensual incluyendo las pagas extraordinarias.

3. **El fondo nocional:** es la suma de todas las cotizaciones realizadas al sistema más los rendimientos ficticios calculados con el tanto nocional establecido. Este cálculo es virtual ya que solo existe una serie de anotaciones contables en una cuenta, pero no una masa monetaria que lo respalde, como consecuencia de que el sistema sigue siendo de reparto.

4. **El factor de conversión:** es el elemento que permite transformar el fondo nocional en la cuantía de una pensión. Este factor debe ser una herramienta actuarial; es decir, debe tener en cuenta las probabilidades de supervivencia de la cohorte del nuevo pensionista (asociadas a unas determinadas tablas de mortalidad-supervivencia), la posible revalorización de la pensión, el carácter vitalicio de la misma, el tipo de interés utilizado para la valoración e, incluso, si la pensión es o no reversible, en todo o en parte, al cónyuge superviviente o a algún otro beneficiario. En algunos casos, todo lo anterior se sustituye de forma simplificada por la esperanza de vida de la cohorte [11].

Adicionalmente, hay elementos no exclusivos que intervienen en el desarrollo del sistema de Cuentas Nocionales, como:

a) La existencia de pensiones mínimas y máximas.

b) La fijación de bases mínimas y máximas.

c) La activación de edades de jubilación mínimas y máximas

d) La revalorización de las pensiones en función de algún mecanismo de ajuste automático.

e) La delimitación del acceso a las prestaciones de incapacidad, viudedad, orfandad, favor familiar, etc.

4.2. Teoría tras las Cuentas Nocionales

Para el cálculo de la cuantía ficticia acumulada de cada pensionista y para la determinación de su pensión, no existe una única fórmula para hallarlos, ya que cada país diseña su expresión matemática según su realidad.

De manera general, sea $c \cdot BC_t$ las aportaciones realizadas por el asegurado a la edad t, estas se evalúan a la edad x_j (momento de jubilación) con un tanto determinado; la totalidad de estas cotizaciones da lugar a una renta vitalicia revalorizable que cobrará el asegurado durante su periodo pasivo.

En el momento x_j se calcula el valor de la renta actuarial, igualando las aportaciones que se realizó en la vida laboral con las prestaciones futuras. Así, la ecuación cumple los principios financiero-actuariales.

Lo descrito anteriormente se puede representar como:

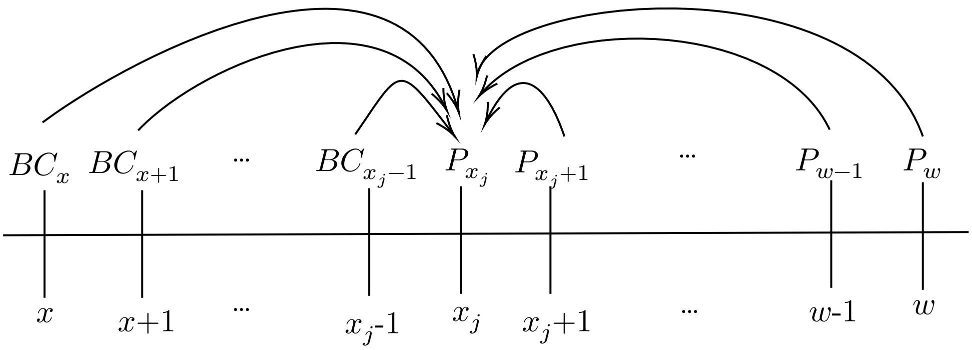

Figura 4.1: Esquema Sistema de Cuentas Nocionales.

Observando el esquema anterior, la fórmula general para el cálculo de la pensión se obtiene al igualar, en el momento x_j, el fondo virtual acumulado (K) con el factor de conversión (fc), este se relaciona por lo general con la esperanza de vida o con el valor actual de una renta vitalicia. La expresión queda,

$$\sum_{t=x_a}^{x_j-1} c \cdot BC_t \prod_{i=t}^{x_j-1} (1+n_i) = P_{x_j} \cdot fc. \qquad (4.2.1)$$

La incógnita de la ecuación 4.2.1 es la cuantía de la pensión que va a recibir el asegurado en el momento de su jubilación. Despejando este valor se obtiene,

$$P_{x_j} = \frac{\sum_{t=x_a}^{x_j-1} c \cdot BC_t \prod_{i=t}^{x_j-1} (1+n_i)}{f_c}, \qquad (4.2.2)$$

donde,

- P_{x_j} : Pensión en el momento x_j.
- x_a : Edad de entrada en el mercado laboral.

- x_j : Edad de jubilación.
- c : Tipo de cotización.
- BC_t : Base de cotización en el periodo t.
- n_i : Tanto nocional.
- fc : Factor de conversión.
- K : Capital nocional o fondo virtual acumulado en el momento de la jubilación, se obtiene mediante las cotizaciones efectuadas al sistema, más sus rendimientos generados.

4.3. Aspectos positivos y negativos

Todo nuevo sistema trae consigo aspectos positivos y negativos, el sistema de Cuentas Nocionales no es la excepción, dichos aspectos se mencionan a continuación.

4.3.1. Positivos

- Puesto que, para el cálculo de las pensiones, que cada pensionista recibirá, se utiliza una ecuación de equivalencia financiero-actuarial, esto genera un aumento en la equidad actuarial, donde a partir de las aportaciones realizadas, se determinan las prestaciones que recibirá cada afiliado. Esto permite disminuir el riesgo de que las pensiones sean más generosas de lo que puede soportar el sistema.
- El sistema de Cuentas Nocionales es muy útil para minimizar el riesgo político[2] asociado a los sistemas de reparto y aumentar la sostenibilidad financiera del sistema en el largo plazo.
- Un mayor esfuerzo en la estancia en el mercado laboral se ha de transformar en unas pensiones proporcionalmente más elevadas. Por lo que, la relación entre las aportaciones y prestaciones es más evidente como consecuencia de la equidad actuarial. Esto daría un mayor incentivo a retrasar la edad de jubilación para aquellos afiliados con un nivel bajo de cotizaciones.

[2]**Riesgo político** se puede definir como la competencia entre políticos, que consiste en ofrecer incrementos en las pensiones, ampliación de coberturas, creación de seguros basándose en el pilar de solidaridad, esto sin cuantificar previamente el gasto adicional que afrontará la Seguridad Social. El gasto generado por el riesgo político es financiado por los mismos electores a través de mayores impuestos, mayor inflación o menor crecimiento económico [4].

- Los sistemas de Cuentas Nocionales son *"forward looking"*, es decir, están en la línea de los principios de la justicia intergeneracional y la responsabilidad de las generaciones o cohortes. Mientras que, los sistemas de prestación definida tienen un carácter *"backward looking"*, en otras palabras, estos tipos de sistemas obligan a los cotizantes a hacerse cargo de los cambios en el tamaño de las cohortes de los cuales no son responsables. Por tal motivo se mejora la equidad intergeneracional.

- Aumento en la equidad intrageneracional, pues, el hecho de que la corrección por adelantar o retrasar la edad de jubilación de los afiliados de la misma generación, responde a un criterio actuarial y no a una regla.

- Existe mayor transparencia, si bien la Cuentas Nocionales no son cuentas reales, en cualquier instante se puede conocer la cuantía teórica acumulada por cada asegurado, debido a que el índice utilizado para obtener los rendimientos debe ser conocido previamente, al igual que el método para transformar el fondo virtual acumulado en la cuantía de la pensión inicial.

- La aplicación de una ecuación de equivalencia actuarial entre las aportaciones y las prestaciones proporciona un elevado grado de sostenibilidad actuarial. Sin embargo, no garantiza la sostenibilidad financiera, esto se comenta en los aspectos negativos.

4.3.2. Negativos

Al sistema de Cuentas Nocionales se las pueden relacionar algunos aspectos que no son muy satisfactorios, que, en la mayoría de los casos, son los mismos que tienen los sistemas de reparto y de capitalización.

- La sostenibilidad actuarial no garantiza la sostenibilidad financiera del sistema, puesto que, las prestaciones de cada año se pagan con las aportaciones de ese mismo periodo. Las Cuentas Nocionales de aportación definida siguen basándose en un sistema de reparto, por lo que pueden presentarse situaciones con déficit de caja. Esto puede solucionarse o atenuar de la misma forma que se puede hacer en un sistema de prestación definida, mediante la utilización de mecanismos de ajuste automático para cumplir la restricción presupuestaria entre ingresos y egresos.

- No hace frente a los cambios demográficos de una manera completa. Aunque tiene en cuenta la evolución de la mortalidad, lo hace con cierto retraso, puesto que las pensiones generalmente se calculan una única vez (en el momento de la jubilación), y no se consideran las mejoras en la esperanza de vida para recalcular las cuantías de las pensiones previamente obtenidas.

- Dado que, la cuantía de la pensión se obtiene mediante una ecuación que posee equivalencia actuarial, es probable que dicha cuantía sea menor a la proporcionada por el sistema actual. A priori, esta característica puede ser uno de los elementos negativos más importantes. Por otro lado, esto es un signo visible de los problemas que puede tener el sistema actual. Para poder atenuar esta cuestión se podría aplicar una adecuada política de pensiones mínimas, no contributivas o asistenciales, que serán financiados con impuestos.

- En el escenario de que la longevidad siga en aumento y la tasa de cotización permanezca fija, la cuantía de la pensión tiende a descender, por tal motivo, se considera necesario incrementar la edad mínima de jubilación de acuerdo con la esperanza de vida.

- El proceso de transición desde el actual sistema de reparto de prestaciones definidas al de Cuentas Nocionales, puede conllevar a posibles desequilibrios entre distintos grupos de edad, según se decida de qué manera se llevará a cabo esta transición.

4.4. Países con sistema de Cuentas Nocionales

En la actualidad, países dentro y fuera de la Unión Europea tienen implementado un sistema de pensiones de jubilación basado en Cuentas Nocionales. En particular, para Suecia, Polonia, Italia y Letonia, se realizará un breve análisis sobre la parte del sistema de pensiones reformado.

Así mismo, existe otro grupo de países dentro de la Unión Europea, como son Alemania, Eslovaquia, Rumania y Francia que han adoptado una variante del sistema de Cuentas Nocionales, basado en el número de puntos que los trabajadores acumulan durante su vida laboral, estos puntos dependen de la relación que exista entre sus ingresos anuales y la media de los ingresos de todos los contribuyentes [11].

4.4.1. Suecia

a) **La situación antes de la reforma**

Antes de la reforma, el sistema público de pensiones en Suecia era un sistema de reparto y de prestación definida. En 1999 entró en vigor el nuevo sistema de pensiones, lo que implicaba la introducción de un sistema de pensiones de jubilación sustentado en tres pilares. El primer pilar sigue siendo de reparto y gestión pública, pero se articula a través de Cuentas Nocionales de aportación definida (Notional Defined Contribution, NDC). El segundo pilar también es obligatorio, pero está compuesto por cuentas individuales de capitalización (Financial Defined Contribution, FDC) que invierten sus fondos en el mercado financiero a través del sector privado, aunque administrado por la Agencia de Pensiones de Suecia. Por último, el tercer pilar es voluntario de capitalización. Es importante destacar que la casi totalidad de los trabajadores suecos, aproximadamente el 90 %, están cubiertos por Planes de Pensiones de tipo ocupacional[3] [11].

Con el objetivo de analizar la viabilidad del sistema se elaboró un informe previo a la reforma. De este informe se concluyó que el antiguo sistema de pensiones presentaba problemas como: la mínima relación entre contribuciones y prestaciones, pues se había convertido en un sistema que proporcionaba una prestación uniforme; el rápido crecimiento de la proporción de mayores a 65 años; y, la insostenibilidad en el largo plazo debido al lento crecimiento económico, lo que causó la pérdida de confianza de los suecos en el sistema de pensiones. La reforma del sistema tenía como objetivo dar soluciones a los problemas que el antiguo sistema presentaba, principalmente evitar la generación de gastos en pensiones imposibles de asumir en el futuro.

b) **El componente NDC de la reforma**

El sistema de Cuentas Nocionales sueco establece que, cada año, las cotizaciones del trabajador se ingresan en su cuenta nocional, las mismas que van generando rendimientos hasta el momento de su jubilación, este fondo se denomina el capital nocional. Cuando el trabajador se jubila se calcula la cuantía de su pensión dividiendo el capital nocional entre un factor de conversión, basada en la esperanza de vida, que es un valor actual de una renta vitalicia actualizada a un tipo

[3]En Suecia, los planes de pensiones ocupacionales están incluidos en la negociación colectiva y están especialmente diseñados para complementar las pensiones del sistema de reparto de los trabajadores cuyos salarios superan el tope de los derechos pensionables [11].

de interés del 1,6 % que es la tasa de crecimiento esperada de la economía sueca [11]. Este cálculo se describe por la siguiente ecuación:

$$P_{x_j} = \frac{\displaystyle\sum_{t=x_a}^{x_j-1} c \cdot BC_t \prod_{i=t}^{x_j-1} (1+n_i)}{\ddot{a}_{x_j}} = \frac{K}{\ddot{a}_{x_j}} \tag{4.4.3}$$

donde,

- P_{x_j} : Pensión en el momento x_j.
- x_a : Edad de entrada en el mercado laboral.
- x_j : Edad de jubilación.
- c : Tipo de cotización.
- BC_t : Base de cotización en el periodo t.
- n_i : Tanto nocional.
- $\ddot{a}_{x_j}$: Factor de conversión que es el valor actual-actuarial a la edad de jubilación de una renta unitaria, vitalicia y prepagable valorada con un tipo de interés del $1,6\,\%$.
- K : Capital nocional o fondo virtual acumulado en el momento de la jubilación, se obtiene mediante las cotizaciones efectuadas al sistema, más sus rendimientos generados.

Los parámetros que intervienen en el pilar NDC para determinar la cuantía de la pensión son:

- **Edad de jubilación** (x_j)
  En el nuevo sistema, los trabajadores tiene la libertad de elegir cuando jubilarse a partir de los 61 años, sin límite máximo, aunque a partir de los 67 años no se perciben beneficios adicionales [11]. El sistema está diseñado para incentivar la permanencia en el mercado laboral por el mayor tiempo posible, ya que la edad de jubilación tiene una gran influencia en la cuantía de la pensión del trabajador, pues el saldo acumulado en la cuenta nocional será mayor y la esperanza de vida menor.
- **Cotizaciones** ($c \cdot BC_t$)
  En Suecia, el 7 % del salario bruto corresponde a las cotizaciones que el trabajador debe realizar y el 93 % restante se denomina la base de cotización.

El 18.5 % de esta base es el tipo de cotización para la jubilación, lo que es equivalente al 17.21 % del salario bruto. De las cotizaciones, el 16 % de la base de cotización se destina a la cuenta nocional del trabajador y el restante 2.5 % a su cuenta individual de capitalización administrada por la Agencia de Pensiones Sueca[4].

Las cotizaciones correspondientes a algunos periodos sin trabajo como son los periodos de desempleo, enfermedad, incapacidad transitoria y cuidado de hijos, se financian con los impuestos del estado. Si la base de cotización sobre la que se pagan las cotizaciones supera 7.5 veces la renta base, la misma que depende del crecimiento del salario medio, no se acumulan en la cuenta nocional del trabajador, sino que es un ingreso más para el estado y no genera derechos pensionables para el trabajador [11].

- **Tanto nocional** (n_i)

  En el sistema de pensión sueco, el tanto nocional es la variación del salario nominal medio, por lo que depende de la evolución económica del país, es por esto, que este tanto nocional en épocas de crisis puede ser negativo.

- **Capital nocional (K)**

  Cuando el trabajador se jubila, el capital de su cuenta nocional es la suma de sus cotizaciones a lo largo de toda su vida laboral, los rendimientos generados por estas y el dividendo por supervivencia, esto es, la distribución del total acumulado en las Cuentas Nocionales de los trabajadores fallecidos en un año entre el resto de las Cuentas Nocionales de los trabajadores del mismo grupo de edad que han sobrevivido.

- **Factor de conversión** ($\ddot{a}_{x_j}$)

  Para que los pensionistas tenga un poder adquisitivo en el tiempo similar al de la población activa, el sistema de cuentas nocionales sueco revaloriza la pensión anualmente a un tasa igual a la variación anual del salario medio, es decir, la inflación más el crecimiento del salario real medio; la misma que se utiliza como el tipo de interés al que se actualiza la renta vitalicia de las futuras pensiones, esto hace que el factor de conversión sea la esperanza de vida a la edad de jubilación más uno [11].

$$\ddot{a}^{\alpha}_{x_j} = \sum_{t=x_j}^{\omega} \frac{[(1+r)(1+\pi)]^{t-x_j}}{[(1+r)(1+\pi)]^{t-x_j}} {}_{t-x_j}p_{x_j} = \sum_{t=x_j}^{\omega} {}_{t-x_j}p_{x_j} = 1 + e_{x_j} \qquad (4.4.4)$$

[4]Cada cotizante decide la composición de su cartera, eligiendo hasta un máximo de cinco planes entre un universo de más de 800. La gestión de las carteras corre a cargo del sector privado [11].

Con el objetivo de obtener el factor de conversión menor a la esperanza de vida promedio, se acordó introducir un factor de ajuste que consiste en actualizar la renta vitalicia a un tipo de interés igual al crecimiento esperado de la económica sueca (1.6 %). Por lo tanto, la expresión del factor de conversión es la siguiente:

$$\ddot{a}_{x_j} = \sum_{t=x_j}^{\omega} \frac{1}{[(1+0.016)]^{t-x_j}} \cdot {}_{t-x_j}p_{x_j} \tag{4.4.5}$$

donde,

- x_j : Edad de jubilación.
- ω : Edad límite de la tabla de mortalidad.
- r : Tasa de crecimiento futura del salario real medio.
- π : Tasa de inflación anual futura.
- α : Tasa de revalorización anual de las pensiones: $\alpha = (1+r)(1+\pi)-1$
- ${}_{t-x_j}p_{x_j}$: Probabilidad de que un individuo de edad "x_j" alcance la edad "t" o viva "$t-xj$" años más, según tablas de mortalidad unisex.

- **Pensión inicial** (p_{x_j})

La reforma establece que, se deben revalorizar anualmente las pensiones a una tasa que vendrá dada por la expresión:

$$\text{Revalorización Anual} = \frac{1 + \text{crecimiento salario medio}}{1.016} \tag{4.4.6}$$

Para asegurar una vida mínima estándar durante la jubilación el sistema garantiza el cobro de una pensión mínima. Pero si el importe de su pensión del pilar NDC es inferior a la pensión de jubilación mínima definida por ley se añade un complemento financiado por el presupuesto del Estado. De igual forma, los trabajadores tienen derecho a una pensión mínima si tienen 65 años o más y residen 40 años en Suecia contado desde los 25, de lo contrario, la pensión mínima se reduce 1/40 por cada año que falte hasta completar los 40.

c) **Mecanismo Automático de Estabilidad Financiera**

La reforma en el sistema de pensiones sueco tenía como principal objetivo alcanzar una estabilidad financiera. Para un sistema de reparto como lo es el sistema de Cuentas Nocionales, la estabilidad financiera consiste en garantizar el pago de las pensiones correspondiente a los pensionistas de cada año con los los ingresos recaudados por el sistema de ese mismo año como concepto de cotizaciones. Y justamente para evitar una inestabilidad financiera en el sistema sueco, se ha introducido un mecanismo automático de estabilidad financiera, el mismo estará en vigor mientras el ratio de solvencia[5] sea inferior a 1. Este mecanismo suspende momentáneamente la remuneración de las Cuentas Nocionales y la revalorización de las pensiones en función del salario medio. Además, el mecanismo entra en funcionamiento automáticamente, es decir, sin necesidad de ninguna decisión política [11].

d) **La transición hacia un modelo de cuentas nocionales**
En la transición del antiguo sistema al actual en 1999, para el cálculo de la primera pensión se optó por un criterio de cohortes, que consiste en:

- Nacidos antes de 1938, se utiliza al sistema antiguo.
- Nacidos entre 1938 y 1953, se establecieron unas normas transitorias, el cálculo de una parte de su pensión está en función de las reglas del sistema anterior y otra según las reglas del nuevo sistema.
- Nacidos a partir de 1954, se implementa el nuevo sistema.

Por tanto, esta transición depende de la edad en 1998 y no de los años cotizados o del año de la jubilación.

4.4.2. Polonia

a) **La situación antes de la reforma**
Antes de la reforma el sistema polaco sufría complicaciones demográficas similares a otros países Europeos, a esto se sumaban problemas como la posibilidad de acceder a la jubilación anticipada a edades muy tempranas y sin ningún tipo de penalización, ya que la pensión inicial tenía en cuenta solo los años de cotización, incluso una nueva ley permitió la jubilación anticipada de aquellos despedidos de sus empresas haciendo que la edad permitida de jubilación sea muy inferior a la edad legal.

El gasto por pensiones se elevó rápidamente como causa de la crisis económica y políticas tomadas que beneficiaban de manera significativa a los trabajadores. Una solución rápida fue incrementar la tasa de cotización, sin embargo, esto no fue suficientes para cubrir el gasto, por lo que el sistema de pensiones tuvo que ser

[5] **Ratio de solvencia** es el cociente entre los activos (financieros y por cotizaciones) y pasivos (por pensiones) del sistema.

subsidiado constantemente por el Estado. Es así como surge la necesidad de crear un sistema más justo, el cual tuviera mayor relación entre las cotizaciones realizadas durante la vida laboral y las prestaciones recibidas una vez el trabajador se jubile.

Se impuso la creación de un sistema de tres pilares que implicaba la privatización parcial de la Seguridad Social mediante la transferencia de una parte de las cotizaciones sociales a planes de pensiones privados [11]. Por tanto, el sistema actual de pensiones polaco está diseñado de la siguiente manera:

- El primer pilar sigue siendo un sistema de reparto, pero funciona de acuerdo con un sistema de Cuentas Nocionales de aportación definida (NDC), la afiliación a este pilar es obligatorio.
- El segundo pilar es de capitalización y consiste en cuentas de ahorro individuales de gestión privada. Los trabajadores pueden optar por no participar en este pilar, pues su afiliación es voluntaria, y pueden destinar todas sus cotizaciones obligatorias al esquema NDC; por otro lado, los que decidan no participar en este pilar tendrán dos Cuentas Nocionales individuales (NDC1 y NDC2[6]) y los trabajadores que elijan hacer aportaciones al segundo pilar tendrán además de sus Cuentas Nocionales una cuenta financiera (FDC). En el caso de los trabajadores que decidan tener una cuenta FDC, 10 años antes de llegar a la edad de jubilación los fondos acumulados en esta cuenta se irán trasladando gradualmente a su cuenta nocional NDC2 [11].
- El tercer pilar es voluntario, de capitalización y comprende los planes de pensiones individuales y de empresa. Su creación tiene como objetivo otorgar pensiones más elevadas para aquellos trabajadores que decidan ahorrar más durante sus años laborales.

b) **El componente NDC de la reforma**

En el sistema NDC polaco, define el cálculo de la cuantía de la pensión inicial de jubilación mediante la siguiente fórmula:

$$P_{x_j} = \frac{\sum_{t=x_a}^{x_j-1} c \cdot BC_t \prod_{i=t}^{x_j-1} (1+n_i)}{1+e_{x_j}} = \frac{K}{1+e_{x_j}} \tag{4.4.7}$$

donde,

[6]Si el trabajador fallece antes de alcanzar la edad de jubilación, el capital acumulado en la cuenta NDC2 es heredado [11].

- P_{x_j} : Pensión en el momento x_j.
- x_a : Edad de entrada en el mercado laboral.
- x_j : Edad de jubilación.
- c : Tipo de cotización.
- BC_t : Base de cotización en el periodo t.
- n_i : Tanto nocional.
- e_{x_j} : Esperanza de vida a la edad de jubilación según las tablas de mortalidad unisex.
- K : Capital nocional o fondo virtual acumulado en el momento de la jubilación, se obtiene mediante las cotizaciones efectuadas al sistema, más sus rendimientos generados.

A continuación, se detalla estos parámetros:

- **Edad de jubilación** (x_j)

  En el nuevo sistema de pensiones polaco, se estableció la edad de jubilación para hombre 65 años y para las mujeres 60 años. La jubilación anticipada ya no es una opción, incluso la fórmula jubilatoria incentiva la permanencia en el mercado laboral hasta edades tardías.
- **Tipo de cotización (c)**

  El tipo de cotización en el sistema de pensiones es del 12.22 % de la base de cotización en el pilar del NDC, en el caso de los trabajadores de edades entre 30 y 50 años que hayan decidido no participar en el segundo pilar, el tipo de cotización es de 19,52 %.
- **Base de cotización** (BC_t)

  La base de cotización tiene como tope máximo el valor correspondiente a treinta veces el salario medio, en particular para los trabajadores por cuenta propia, la base de cotización se basa en los ingresos declarados, pero estos no puede ser inferior al 60 % del salario medio. Para los periodos de desempleo, maternidad y licencia parental, servicio militar obligatorio y cuidado de un miembro de familia con discapacidad las cotizaciones son financiadas por el Estado y la base de cotización es el salario mínimo o la cuantía real de la prestación percibida.
- **Tanto nocional** (n_i)

  La suma de las cotizaciones efectuadas durante la vida laboral en las cuentas individuales nocionales se capitalizan anualmente de la siguiente manera:

1. Para NDC1 el tanto nocional es el 75 % del crecimiento nominal de la masa salarial; y,
2. NDC2 el tanto nocional es el 75 % del crecimiento medio quinquenal del PIB.

- **Capital nocional (K)**

  En la transición al nuevo sistema de pensiones, se presentó una preocupación por los derechos acumulados de los trabajadores que habían cotizado antes de la reforma en el anterior sistema. Es así como a su cuenta NDC se incorporó un capital nocional inicial que corresponde a las cotizaciones acumuladas. Este saldo inicial se capitaliza al mismo tanto nocional que las cotizaciones hasta la fecha de jubilación.

  $$K_0 = P_0 \cdot \rho \cdot e_{62} \tag{4.4.8}$$

  donde,

  - K_0 : Capital nocional inicial a 31 de diciembre de 1998.
  - e_{62} : Esperanza de vida a la edad de 62 años en 1998 según las tablas de mortalidad unisex.
  - P_0 : Pensión con la fórmula del sistema anterior a la reforma, calculada a 31 de diciembre de 1998.
  - ρ : Elemento de ajuste, que depende de las cotizaciones realizadas y de la edad.

- **Esperanza de vida (e_{x_j})** En el cálculo de la pensión inicial se ha considerado la esperanza de vida a la edad de jubilación de forma conjunta para hombres y mujeres, sin embargo, es conocido que generalmente las mujeres viven más tiempo. Esto hace que el sistema no sea actuarialmente justo.

- **Pensión inicial** (p_{x_j})

  El sistema garantiza una pensión mínima de jubilación, si la edad es igual o mayor a 60 años con 21 años de cotización para el caso de las mujeres; y, 65 años y haber cotizado durante 25 años para los hombres.

c) **La transición hacia un modelo de Cuentas Nocionales**

A inicios de 1999, entró en vigor el sistema de Cuentas Nocionales y se determinó el siguiente sistema de cohortes para la transición:

- Nacidos en 1948 o antes, se rigen al antiguo sistema de prestación definida.

- Nacidos entre 1949 y 1968, pasan de forma obligatoria al nuevo sistema de Cuentas Nocionales, pero era voluntario integrarse en el segundo de los pilares.
- Nacidos a partir de 1969, se incorporan obligatoriamente al nuevo sistema de dos pilares, una parte de la cotización va al sistema público de Cuentas Nocionales y otra al sistema privado de capitalización.

4.4.3. Letonia

a) **La situación antes de la reforma**

Antes de la reforma, la estabilidad financiera del sistema de pensiones letón estaba amenazada por problemas como la baja tasa de participación femenina, las bajas edades de jubilación; 55 años para las mujeres y 60 para los hombres, entre otros problemas comunes para la Unión Europea. Por esto, el sistema de pensiones fue reformado complemente, pues pasó del sistema de reparto y prestación definida a otro de reparto, pero con Cuentas Nocionales de aportación definida, el que se complementa con cuentas de capitalización obligatorias. La reforma tenía con objetivo fundamental asegurar, a medio y largo plazo, la viabilidad del sistema, elevando la relación entre las cotizaciones efectuadas por el trabajador y las pensiones, penalizando la jubilación anticipada e incentivando la permanencia en el mercado laboral más allá de la edad legal [11].

Se estableció un sistema de tres pilares, donde los dos primeros son obligatorios y el último voluntario. El primer pilar consiste en un sistema de reparto basado en Cuentas Nocionales de aportación definida. La transición del sistema antiguo al nuevo fue total, pues independientemente de la edad que el trabajador tuviera en el momento de la reforma, se le aplicó las reglas del nuevo esquema NDC en el cálculo de la cuantía de su pensión. El segundo pilar es de capitalización y de gestión totalmente privada. Los trabajadores deciden libremente en que plan de pensiones invertir sus cotizaciones según su riesgo o rentabilidad. Por último, el tercer pilar es de capitalización, en este los planes de pensiones pueden ser contratados de manera directa por los trabajadores o por la empresa. Las pensiones de jubilación del primer y segundo pilar se financian con cotizaciones obligatorias a un tipo del 20 %, destinando el 14 % al pilar NDC y el 6 % al segundo pilar [11].

b) **El componente NDC de la reforma**

El cálculo de la pensión inicial de jubilación dentro del sistema NDC se calcula de la siguiente forma:

$$P_{x_j} = \frac{\sum_{t=x_a}^{x_j-1} c \cdot BC_t \prod_{i=t}^{x_j-1} (1+n_i)}{1+e_{x_j}} = \frac{K}{1+e_{x_j}} \tag{4.4.9}$$

donde,

- P_{x_j} : Pensión en el momento x_j.
- x_a : Edad de entrada en el mercado laboral.
- x_j : Edad de jubilación.
- c : Tipo de cotización.
- BC_t : Base de cotización en el periodo t.
- n_i : Tanto nocional.
- e_{x_j} : Esperanza de vida a la edad de jubilación según las tablas de mortalidad unisex.
- K : Capital nocional o fondo virtual acumulado en el momento de la jubilación, se obtiene mediante las cotizaciones efectuadas al sistema, más sus rendimientos generados.

A continuación, el detalle de los parámetros fundamentales del pilar NDC:

- **Edad de jubilación** (x_j)
  En el nuevo sistema de pensión letón se estableció que la edad mínima de jubilación es de 62 años tanto para hombres como para mujeres, esta edad mínima crece a razón de tres meses por cada año hasta alcanzar los 65 años. Por otro lado, para acceder a la jubilación anticipada hasta 2 años antes de la edad legal, el trabajador debe tener acumulado al menos 30 años de cotización, con una pensión reducida al 50 %.
- **Tipo de cotización (c)**
  En la reforma se modificó el tipo de cotización para el pilar del NDC, que en la actualidad es del 14 % sobre la base de cotización.
- **Base de cotización** (BC_t)
  Las bases de cotización tienen tope mínimo y máximo; en particular para los trabajadores independientes, la base de cotización no puede ser inferior al salario mínimo. Para los periodos de inactividad como maternidad,

servicio militar, desempleo, etc. el Estado es el encargado de financiar las contribuciones tomando como base de cotización el salario mínimo.

- **Tanto nocional** (n_i)
  En la reforma se fijó límites para el tanto nocional de las cotizaciones, este tanto no puede ser menor al 1 %, ni mayor al 1.15 %. Para un determinado año, si el tanto nocional fuera inferior al 1 %, se aplicaría el 1 %, y el equilibrio se daría al siguiente año, si el tanto nocional fuera superior al 1 % se compensaría teniendo en cuenta el exceso de capitalización del año anterior, si no se volvería a aplicar el mínimo y el próximo año se incluirá en el proceso de equilibrio, y así sucesivamente, hasta que se alcance la compensación completa.

- **Capital nocional (K)**
  Los derechos adquiridos por los trabajadores que habían cotizado al sistema antiguo se incorporaron al sistema NDC como un capital nocional inicial. El valor de este capital nocional inicial se determinó aplicando una fórmula que tiene en cuenta la base de cotización promedio del periodo 1996-1999 y los años cotizados antes de 1996 [11].

  $$K_0 = N \cdot BM \cdot 0.2 \tag{4.4.10}$$

  donde,

  - K_0 : Capital nocional inicial a 31 de diciembre de 1995.
  - N : Número total de años cotizados al sistema anterior hasta el año 1995 (inclusive).
  - BM : Base de cotización promedio correspondientes al período 1996-1999 (ambos inclusive) actualizadas al año 1996.
  - 0.2 : Tipo de cotización.

- **Esperanza de vida** (e_{x_j})
  Para calcular la cuantía de la pensión inicial NDC se considera la esperanza de vida unisex, es decir, la misma para hombres y mujeres. Sin embargo, como las mujeres viven, generalmente, más tiempo que los hombres, esta consideración hace que el sistema no sea actuarialmente justo.

- **Pensión inicial** (p_{x_j})
  Para que un trabajador tenga derecho a una pensión de jubilación es necesario que haya efectuado cotizaciones por un periodo mínimo de 15 años. El sistema garantiza el cobro de una pensión mínima que depende del número

de años cotizados, el complemento para alcanzar el mínimo es financiado por el Estado.

c) **La transición hacia un modelo de Cuentas Nocionales**
El sistema de Cuentas Nocionales entró en vigor a inicios de 1996 y para la transición del sistema de pensiones antiguo al nuevo, con el propósito de salvaguardar las cotizaciones efectuadas al antiguo sistema, se incorporó un capital nocional inicial a la cuenta NDC. Además, esta transición estaba basada en cohortes: con menos de 30 años el 1 de julio del 2001 era obligatorio incorporarse, entre 30 y 49 años era voluntario incorporarse en cualquier momento y por encima de 50 años no era posible.

4.4.4. Italia

a) **La situación antes de la reforma**
El sistema de pensiones italiano fue reformado a comienzos de la década de los noventa, debido a las dificultades para garantizar su sostenibilidad. Las dudas sobre el pago de las obligaciones futuras se debían, básicamente, a que las tasas de sustitución[7] eran de las más altas del mundo. Además, las condiciones para acceder a la jubilación anticipada tenían sus ventajas, como consecuencia de esto, las tasas de empleo de las personas mayores eran muy bajas. Por lo que, el gasto de pensiones pasó del 5 % del PIB en 1960 al 14.9 % del PIB en 1992. El Banco de Italia (1991) proyectaba que, el gasto en pensiones aumentaría al 25 % del PIB en 2030 [11].

En 1992, llega la primera reforma, que consistió en aumentar el número de años que se consideraban para el cálculo de la base reguladora[8], en incrementar la edad de jubilación, en ampliar el periodo mínimo de las cotizaciones necesarias para tener derecho a una pensión por jubilación y en cambiar las reglas de revalorización de las pensiones. Esta era una reforma del tipo paramétrico, pues mantenía el sistema de reparto y prestación definida. Estas medidas fueron insuficientes para detener el gasto en pensiones, lo que llevó a una nueva modificación tres años más tarde.

La reforma conocida como Dini de 1995, modificó de manera drástica el sistema

[7] **Tasa de sustitución** es el porcentaje de ingresos en la jubilación respecto a los ingresos previos como trabajadores activos. Por ejemplo, si un empleado cobraba 1000 dólares y su pensión al jubilarse es de 850 dólares, entonces su tasa de sustitución será del 85 %.

[8] **Base reguladora** es el nivel de referencia a partir del cual la Seguridad Social calcula las prestaciones de los asegurados.

de pensiones italiano, ya que no supuso un simple cambio de los parámetros del sistema, sino que introdujo como esquema básico de referencia las Cuentas Nocionales de aportación definida. Esta reforma tenía dos objetivos esenciales: frenar el crecimiento en el gasto en pensiones respecto al PIB y alcanzar una mayor relación entre las pensiones y cotizaciones, en otras palabras, una mayor justicia actuarial [31].

Gracias a la reforma de 1995, el sistema de pensiones pasó de un modelo con un solo pilar de reparto y prestación definida, a un modelo multipilar compuesto por un primer pilar obligatorio y de gestión pública que mantenía el sistema de reparto, pero se enlaza mediante de Cuentas Nocionales de aportación definida y un segundo pilar de carácter voluntario basado en la capitalización e instituida primordialmente a través de la negociación colectiva.

En el año 2011, la reforma Monti aceleró la transición al sistema de Cuenta Nocionales, por lo que, desde el año 2012 todos los trabajadores quedaron incluidos en este. Por lo tanto, los obreros que con la reforma de 1995 no ingresaron al nuevo sistema, con el nuevo reajuste se incorporaron al sistema nocional, por consiguiente, su pensión se calcula con las reglas del sistema anterior para las cotizaciones pagadas hasta el 31 de diciembre de 2011 y con las reglas nocionales para las cotizaciones pagadas posteriores a esa fecha.

b) **El componente NDC de la reforma**

La cuantía de la pensión inicial de cada trabajador bajo el sistema de Cuentas Nocionales, se la obtiene mediante el producto del capital nocional acumulado por un factor de conversión, que transforma este capital en una renta vitalicia cuyo valor depende de la esperanza de vida. La fórmula que se emplea es la siguiente:

$$\begin{aligned} P_{xj} &= f \cdot \sum_{t=xa}^{xj-1} c \cdot BC_t (1+n_t)^{xj-1-t} \\ &= f \cdot K, \end{aligned}$$

donde,

- P_{xj} : Pensión inicial a la edad de jubilación.
- x_a : Edad de entrada en el sistema de Seguridad Social.
- x_j : Edad de jubilación.

- c : Tipo de cotización.
- BC_t : Base de cotización en el año t.
- n_t : Tanto nocional del año t.
- f : Factor de conversión.
- K : Capital nocional acumulado.

Ahora, se detalla los parámetros del componente NDC:

- **Edad de jubilación** (x_j)

  Para trabajadores totalmente incluidos en el sistema NDC, la reforma de 2011 introdujo una edad de jubilación flexible entre 63 y 70 años y fijó una edad usual de jubilación los 66 años. Para acceder a la jubilación entre los 63 y 66 años, el trabajador debe cotizar al menos 20 años y que la cuantía de la pensión a la que tiene derecho sea superior a 2.8 veces la pensión no contributiva de vejez. Para acceder a la jubilación entre los 66 y 70 años se necesitan 20 años cotizados y que la cuantía de la pensión sea superior a 1.5 veces la pensión no contributiva de vejez. Y para acceder a la jubilación a partir de los 70 años se necesitan solo 5 años cotizados y sin ninguna restricción sobre la cuantía de la pensión percibida. Los requisitos de edad y periodos cotizados mínimos se revisan periódicamente en función de los cambios en la esperanza de vida.

- **Tipo de cotización** (c)

  El tipo de cotización para financiar las pensiones del pilar NDC es del 33 %, el 9.19 % lo paga el trabajador y el 28.81 % restante el empresario. Para trabajadores por cuenta propia, la reforma de 2011 estableció un incremento gradual del tipo de cotización hasta el 24 % en 2018.

- **Base de cotización** (BC_t)

  La base de cotización es el salario bruto con unos límites mínimos y máximos. En 2016, la base de cotización mínima diaria era de 47.68 €y la base de cotización anual máxima era de 100324€.

  Al igual que en Suecia, Polonia y Letonia, el sistema italiano previene que para determinados periodos de inactividad del trabajador (maternidad, desempleo, enfermedad, etc.) sea el Estado el que pague sus contribuciones con cargo a los impuestos generales.

- **Tanto nocional** (n_t)

  El tanto nocional que se utiliza es una media móvil de cinco años de la tasa de crecimiento del PIB nominal. El equilibrio financiero del sistema dependerá del grado de correlación que exista entre el crecimiento del PIB y el crecimiento de la masa laboral. Lo normal es que, a largo plazo el PIB y la masa salarial crezca a un ritmo similar. Sin embargo, existe el riesgo de que el PIB crezca más rápido y se genere un déficit que ponga en peligro el equilibrio financiero del sistema de pensiones.

- **Capital nocional (K)**
  El capital nocional acumulado en la cuenta nocional del trabajador a lo largo de toda su vida laboral está compuesto por las cotizaciones aportadas y los rendimientos ficticios generados por estas al tanto nocional.

- **Factor de conversión (f)**
  El factor de conversión que utiliza el sistema de pensiones italiano, depende de la esperanza de vida del trabajador y de su cónyuge, ya que el sistema contempla la posibilidad de pagar pensiones de supervivencia. El factor de conversión italiano supone que el afiliado tiene cónyuge y, por consiguiente, implica una transferencia general de derechos de solteros a parejas casadas [11]. La ecuación que se utiliza para hallar este factor es la siguiente:

$$f = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{e_{xj}} \frac{1}{(1+r)^i} + 0.6 \cdot \sum_{i=1+e_{xj}}^{e_{yxj}} \frac{1}{(1+r)^i}},$$

  donde,

  - e_{xj} : Esperanza de vida del trabajador en el momento de la jubilación.
  - r : Tipo de interés real fijado para la actualización.
  - e_{yxj} : Esperanza de vida del cónyuge en el momento de la jubilación del asegurado.

- **Pensión inicial (P_{xj})**
  La pensión inicial es una anualidad que depende del número de años que se cobrará la pensión, es decir, obedece a la esperanza de vida del trabajador en el momento de acceder a la jubilación. Las pensiones se revalorizan anualmente en función de los precios. No existen garantías de percepción de una pensión mínima y tampoco existe pensiones máximas.

c) **La transición hacia un modelo de Cuentas Nocionales**
El nuevo sistema entró en vigor en 1996. Se mantuvo el sistema antiguo en cuanto a la edad de acceso a la jubilación (60 años para mujeres y 65 años para hombres)

y coexistió con el nuevo (edad flexible entre 57 y 65 años). Pero, en el 2012 se unificaron ambos sistemas, tanto para la edad de jubilación ordinaria como anticipada. En el sistema de Cuentas Nocionales se mantiene la edad de jubilación anticipada mínima con 20 años cotizados y se requiere una cuantía mínima de la pensión.

Capítulo 5

Implementación de Cuentas Nocionales en el sistema de pensiones ecuatoriano

El presente capítulo tiene como objetivo calcular la pensión de jubilación mediante el sistema de Cuentas Nocionales para el caso ecuatoriano y realizar una comparación con el sistema vigente. Para esto, se desarrolla un aplicativo en el software RStudio, el mismo que se basa en diversos supuestos y parámetros que se explican en este capítulo.

5.1. Cálculo de la pensión de jubilación

Para la simulación del cálculo de la pensión inicial de jubilación para los dos casos se tomó, del estudio actuarial realizado y publicado por el IESS en el año 2018, las siguiente consideraciones.

- **Tasa de variación salarial:**
  Utilizando los salarios promedios de los afiliados del periodo comprendido entre 2010 y 2018 se construye un modelo de series temporales SARIMA con errores de modelo EGARCH. Bajo este modelo se predice que el salario promedio de los afiliados crecerá de \$ 759.15 en el año 2019 a \$ 1721.82 en el año 2058. Lo que conlleva a una tasa de crecimiento de 2.154 % anual [12].

- **Tasa de variación del SBU:**
  Por otra parte, el SBU se relaciona directamente con el comportamiento de la inflación, la cual se obtiene calculando las tasas de crecimiento del índice de

Precios al Consumidor (IPC). Se realiza una regresión para determinar el SBU en función del IPC, mediante datos históricos en el periodo 2002 a 2018. Así, el SBU aumentará de \$ 394 en el año 2018 a \$ 1048.88 en el año 2058. Lo que implica un crecimiento del 2.534 % anual [12].

Además, es necesario mencionar que la simulación de pensiones iniciales por jubilación considera solamente a las personas que permanecen en el mercado laboral durante un periodo futuro.

5.1.1. Sistema actual

El sistema vigente para el cálculo de las pensiones de jubilación es un sistema de reparto de prestaciones definidas, el proceso se explica en la sección 2.3.2 del presente documento, donde se necesitan las siguientes variables:

- Remuneración mensual, de acuerdo con las consideraciones antes mencionadas sobre la tasa de variación salarial, la remuneración mensual aumenta anualmente el 2.154 %.
- Imposiciones, el afiliado debe cumplir con un número mínimo de cotizaciones al IESS, para tener derecho a una pensión por jubilación.
- Coeficiente por tiempo de servicio, este parámetro se identifica de acuerdo con los años de aportaciones en la tabla propuesta por el IESS (ver Anexo B).

5.1.2. Sistemas con Cuentas Nocionales

Para determinar la cuantía inicial mediante el sistema de Cuentas Nocionales se utiliza la siguiente ecuación:

$$P_{x_j} = \frac{\displaystyle\sum_{t=x_a}^{x_j-1} c \cdot BC_t \prod_{i=t}^{x_j-1} (1+n_i)}{f_c},$$

donde,

- P_{x_j} : Pensión en el momento x_j.
- x_a : Edad de entrada en el mercado laboral.
- x_j : Edad de jubilación.

- c : Tipo de cotización, para el caso ecuatoriano este parámetro tiene como valor el 10.46 %.
- BC_t : Base de cotización en el periodo t, este se refiere a la remuneración mensual, la cual aumenta anualmente el 2.154 %.
- n_i : Tanto nocional, este factor tiene un aumento de acuerdo con la tasa del crecimiento del PIB, igual a 1.675 %. En la “Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio” del 2018 se utilizó las tasas de crecimiento real del PIB del Ecuador entre los años 1961 y 2018 del Banco mundial para construir un modelo de series temporales ARIMA con errores de modelo EGARCH. Bajo este modelo se predice que el promedio de las tasas de crecimiento real del PIB del periodo comprendido entre los años 2019 y 2058 será de 1.675 % anual.
- K : Capital nocional, es la suma de las cotizaciones del afiliado hasta el momento de su jubilación al fondo de pensiones.
- P_{x_j} : Pensión en el momento x_j, para hallar este criterio se debe tener en cuenta que en el Ecuador, además de las pensiones mensuales se paga una decimotercera pensión que tiene el mismo valor que una ordinaria, este se abona en diciembre, asimismo una decimocuarta pensión, la cual es igual a un salario básico unificado, el que se desembolsa en el mes de marzo para las regiones de la Costa e Insular y en el mes de agosto en las regiones de la Sierra y Amazonía. De esto, el capital nocional se va a repartir de la siguiente manera:

  $$K = P_{x_j} \cdot \ddot{a}_{x_j}^{(12)} + P_{x_j} \cdot \ddot{a}_{x_j} + SBU_{x_j} \cdot \ddot{a}_{x_j}.$$

  Luego,

  $$P_{x_j} = \frac{K - SBU_{x_j} \cdot \ddot{a}_{x_j}}{\ddot{a}_{x_j}^{(12)} + \ddot{a}_{x_j}}, \tag{5.1.1}$$

  donde,

  - SBU_{x_j} : Salario Básico Unificado en el momento de la jubilación.
  - $\ddot{a}_{x_j}$: Renta Vitalicia Anual Prepagable.
  - $\ddot{a}_{x_j}^{(12)}$: Renta Vitalicia Prepagable Fraccionada en 12 pagos.
- fc : Factor de conversión, observando la ecuación 5.1.1 este parámetro es igual a:

  $$fc = \ddot{a}_{x_j}^{(12)} + \ddot{a}_{x_j} \tag{5.1.2}$$

Una de las características del sistema de Cuentas Nocionales es el uso de herramientas actuariales, para lo cual es necesario emplear **tablas de mortalidad** en el cálculo de las rentas. En el desarrollo del aplicativo propuesto para el cálculo y comparación de la pensión de jubilación inicial, se utilizan las tablas de mortalidad del estudio actuarial del IESS realizado en el 2018 (ver Anexo A).

5.2. Aplicativo

Se desarrolla un aplicativo que tiene como principal objetivo el cálculo y la comparación de la pensión inicial de jubilación para el sistema vigente y el sistema propuesto. Con el fin de facilitar los cálculos actuariales se utilizaron funciones del paquete *lifecontingecies* en el software RStudio.

5.2.1. Paquete *lifecontingecies*

Este paquete realiza cálculos matemáticos financieros, demográficos y actuariales estándar. Su principal objetivo es proporcionar un conjunto completo de herramientas para evaluar el riesgo que pueden tener los seguros de vida [24].

5.2.1.1. Función *probs2lifetable*

La función probs2lifetable devuelve una tabla de mortalidad, dadas las probabilidades de supervivencia o muerte.

```
probs2lifetable(probs, radix = 10000, type = "px", name = "ungiven")
```

Argumentos

probs	Un vector de valores reales que representan las probabilidades de supervivencia o muerte cada año.
radix	Cantidad individuos a la edad inicial.
type	Tipo de probabilidad, el cual puede ser igual a “px” cuando se trata de probabilidad de supervivencia o “qx” cuando se trata de probabilidad de muerte.
name	Nombre asignado a la tabla de mortalidad resultante.

Con la ayuda del software R, se obtienen las tablas de mortalidad:

```r
library(lifecontingencies)
library(readxl)

# Datos para las probabilidades de muerte según el género
femenino <- read_xlsx("Datos/Tabla_Mortalidad_Estudio.xlsx",
                      sheet = "Tabla_mujer_afiliados")
masculino <- read_xlsx("Datos/Tabla_Mortalidad_Estudio.xlsx",
                       sheet = "Tabla_hombre_afiliados")

# Se transforman las probabilidades q_x a formato lifecontingencies
# Tabla de probabilidad de muerte para mujer
tabla_femenino <- probs2lifetable(femenino$qx, radix = 100000,
                  type = "qx",  name = "Probabilidad Femenino")

# Tabla de probabilidad de muerte para hombre
tabla_masculino <- probs2lifetable(masculino$qx, radix = 100000,
                  type = "qx", name = "Probabilidad Masculino")
```

5.2.1.2. Función *axn*

Esta función calcula el valor actuarial de las rentas prepagables o pospagables, dada una tabla de mortalidad. Se pueden evaluar tanto rentas diferidas y fraccionarias. Además, se puede utilizar para simular la distribución estocástica del valor de la renta [24].

```
axn(actuarialtable, x, n, i, m, k, type, power, payment)
```

Argumentos

actuarialtable	Tabla de mortalidad
x	Edad del beneficiario[1]. (escalar o vector)
n	Número de términos de la renta, si este valor se omite la renta es vitalicia. (escalar o vector).
i	Tasa de interés. (escalar).
m	Periodo de aplazamiento diferido, si este valor se omite toma el valor de 1. (escalar o vector).
k	Número de pagos fraccionados por periodo, si este valor se omite toma el valor de 1. (escalar)
payment	Tipo de pago, ya sea "due" para renta vencida (predeterminado) o "immediate" para una renta inmediata.

Ejemplo 1. *Una mujer ahorró 4000 u. m. desde los 40 años, hallar la renta actuarial anual temporal de 10 años pospagable que tiene derecho a percibir a partir de los 65 años, tomar en cuenta un interés anual de* 4 %.

Para el cálculo de la renta actuarial anual temporal pospagable se utiliza la fórmula de cálculo de la prima única,

$$4000 = \mathrm{R} \cdot {}_{25}E_{40} \cdot a_{65:\overline{10}|}.$$

Donde, calculando R y con la ayuda del software se obtiene:

```
> 4000/axn(tabla_femenino, x = 40 - 15, i = 0.04, m = 25, n = 10,
           payment = "immediate")
[1] 1437.522
```

[1]Si la edad inicial en la tabla de mortalidad es distinta a cero, x debería ser igual a la resta de la edad del beneficiario y la edad inicial de la tabla de mortalidad.

Ejemplo 2. *Un hombre planifica su jubilación a los 63 años, calcular el valor presente actuarial para una renta prepagable vitalicia de* 1000 *u. m. por mes, con una tasa anual efectiva del* 6 %.

Se tiene la siguiente expresión para cálculo del valor presente actuarial:

$$\begin{aligned} \Pi &= 1000 \cdot 12 \cdot \ddot{a}_{63}^{(12)} \\ &= 12000 \cdot \left[\ddot{a}_{63} - \frac{11}{24} \cdot (\ddot{a}_{63} - a_{63}) \right] \end{aligned}$$

Luego, con ayuda del software tenemos:

```
> 12000*axn(tabla_masculino , x = 63 - 15, i = 0.06, k = 12,
            payment = "due")
[1] 145477.3
```

5.2.2. Interfaz

El aplicativo es una calculadora en línea que tiene como principal funcionalidad la estimación de la pensión inicial de jubilación, mediante Cuentas Nocionales y el sistema vigente.

Esta herramienta solicita el ingreso de datos básicos de una persona como:

- Género, esta variable puede ser “Femenino” o “Masculino”.
- Fecha de nacimiento.
- Fecha de entrada al mercado laboral, esta variable toma fechas desde el día actual en adelante.
- Edad de jubilación, edad a la que el usuario pretende jubilarse.
- Salario, sueldo del usuario a la fecha de entrada al mercado laboral.

Mediante estos datos facilitados por el usuario y los sistemas de cálculo de pensión inicial (sistema de Cuentas Nocionales y sistema vigente), el aplicativo genera la siguiente información:

- Edad y salario mínimo de jubilación [2] mediante Cuentas Nocionales.
- Un gráfico que compara la cuantía de la pensión inicial de jubilación, calculada por ambos sistemas.
- Un gráfico que compara la evolución de las tasas de sustitución para ambos sistemas.
- Una tabla que informa del efecto sobre la cuantía al momento de retrasar o adelantar la edad de jubilación.

Es así, que el aplicativo desarrollado tiene la siguiente estructura:

[2] Edad en la que el individuo recibirá una pensión ligeramente superior a la de un salario básico unificado en el año de jubilación.

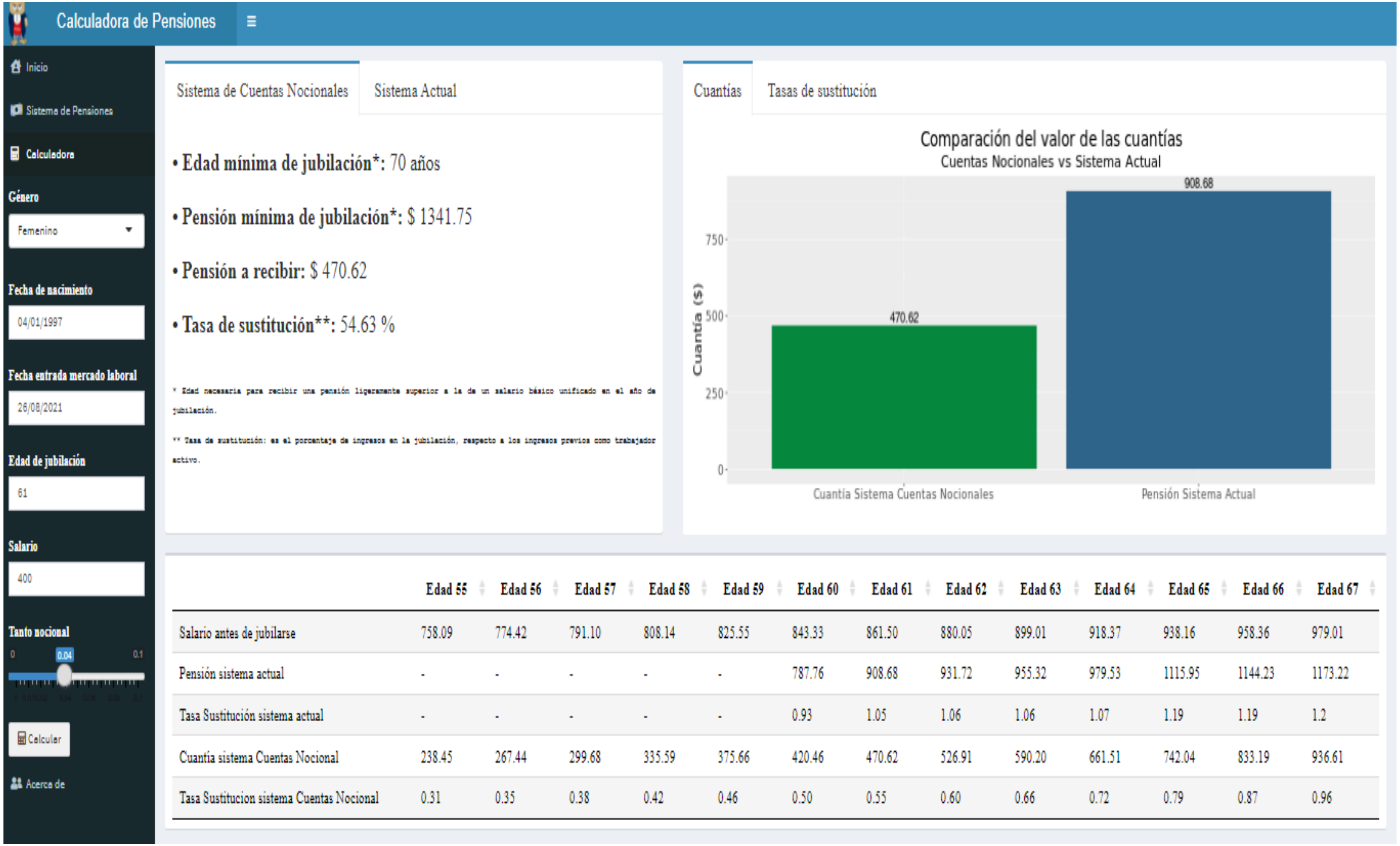

Figura 5.1: Estructura del aplicativo.

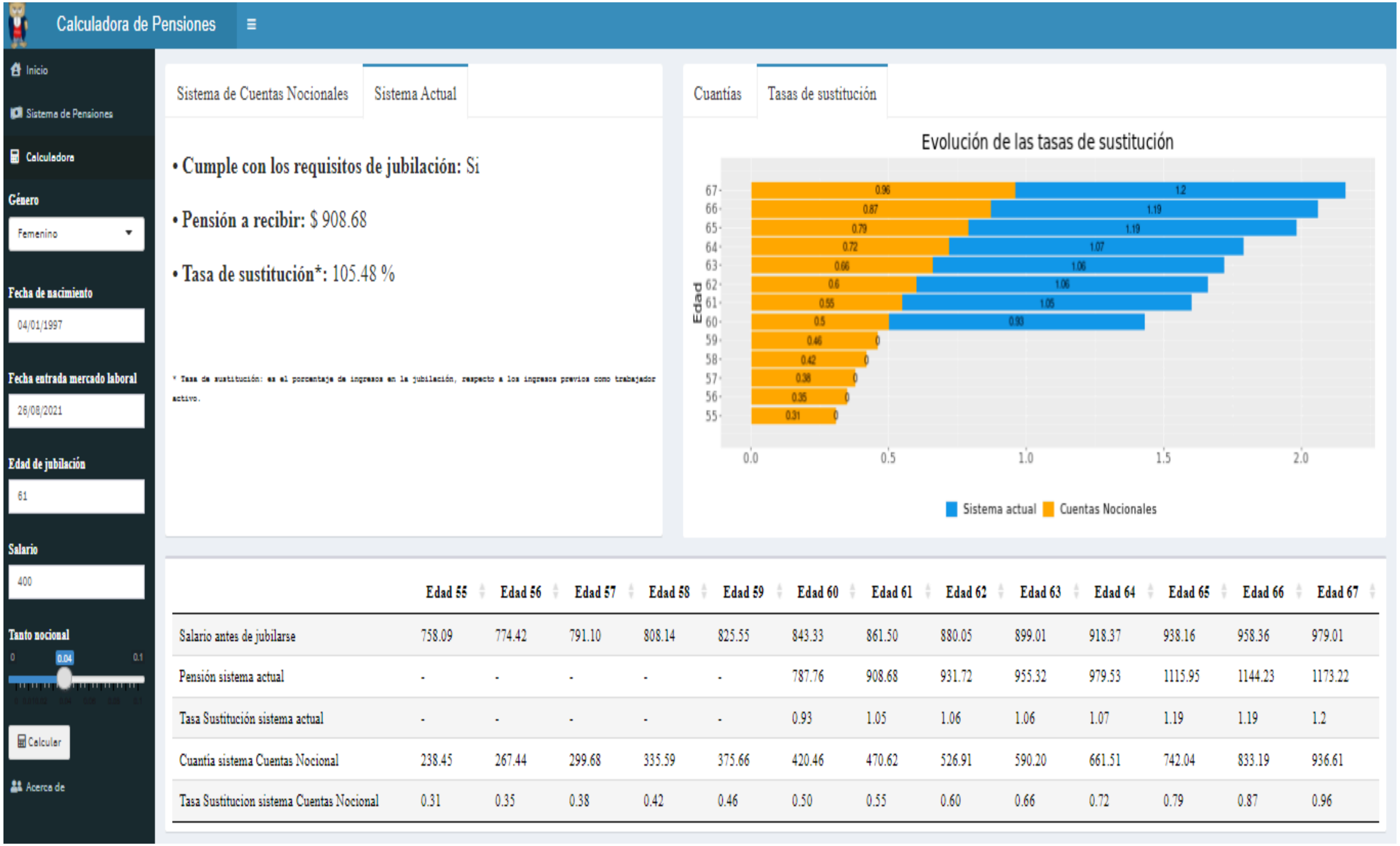

Figura 5.2: Estructura del aplicativo.

5.2.3. Cálculo de pensiones

Mediante el uso del aplicativo desarrollado se analizará los resultados para los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3. Un hombre que nació el 1 de julio de 1995, planea jubilarse al cumplir 65 años. Si se sabe que la fecha de entrada al mercado laboral es el 27 de septiembre 2021 y su salario es 550 dólares, hallar y comparar la pensión inicial obtenida mediante Cuentas Nocionales y el sistema actual. Tomar en cuenta un tanto nocional de 3.5 %.

El hombre al jubilarse a los 65 años recibiría mediante Cuentas nocionales 757.71 dólares y mediante el sistema actual 1057.43 dólares como se puede ver en el siguiente gráfico.

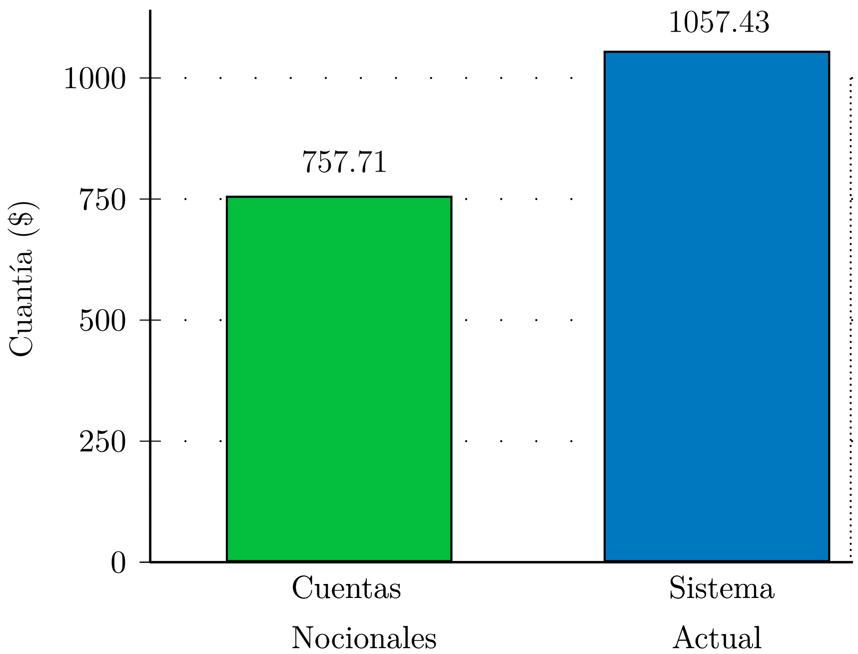

Figura 5.3: Comparación del valor de las cuantías mediante Cuentas Nocionales y el sistema actual.

Adicionalmente, el aplicativo sugiere una edad de jubilación de 70 años en la que el hombre recibiría una pensión de 1307.70 dólares, es decir, una pensión ligeramente superior a la de un salario básico unificado en el año de jubilación.

Por otro lado, es importante analizar el efecto que tiene retrasar o adelantar la edad de jubilación.

Edad	Salario antes de jubilarse	Pensión sistema actual	Tasa Sustitución sistema actual	Cuantía sistema Cuentas Nocionales	Tasa Sustitución sistema Cuentas Nocionales
59	1111.19	-	-	403.57	0.36
60	1135.13	834.51	0.74	447.95	0.39
61	1159.58	866.02	0.75	497.23	0.43
62	1184.56	898.49	0.76	552.05	0.47
63	1210.07	940.44	0.78	613.15	0.51
64	1236.14	993.01	0.80	681.38	0.55
65	1262.76	1057.43	0.84	757.71	0.60
66	1289.96	1135.60	0.88	843.27	0.65
67	1317.75	1230.18	0.93	939.39	0.71
68	1346.13	1272.39	0.95	1047.60	0.78
69	1375.13	1315.84	0.96	1169.67	0.85
70	1404.75	1360.58	0.97	1307.70	0.93
71	1435.01	1406.63	0.98	1464.14	1.02

Cuadro 5.1: Efecto sobre la cuantía al retrasar o adelantar la edad de jubilación.

Como se puede ver en el cuadro anterior, la pensión inicial calculada por Cuentas Nocionales es mayor a la del sistema actual, después de los 71 años. Lo mismo se puede apreciar en el gráfico de evolución de la tasa de sustitución.

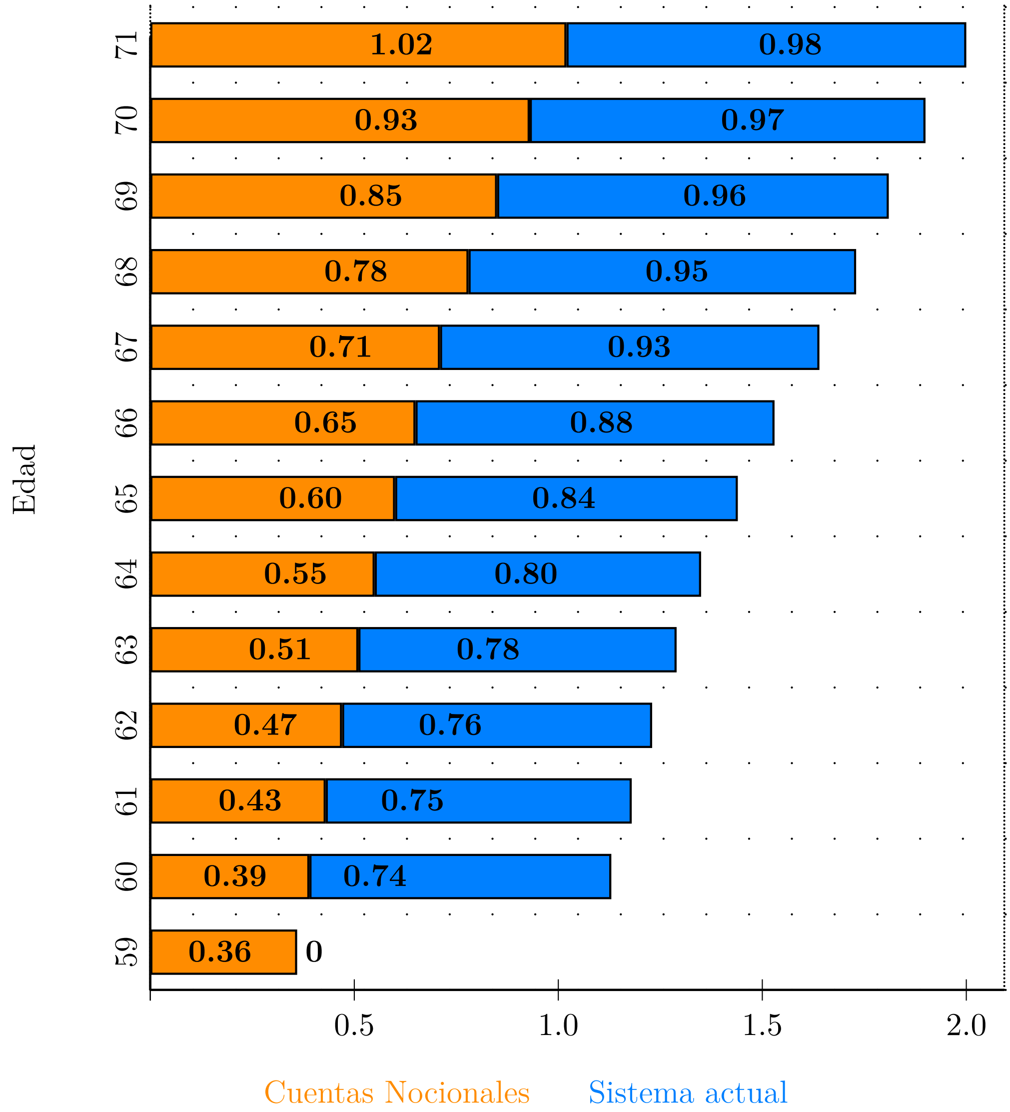

Figura 5.4: Evolución de las tasas de sustitución de Cuentas Nocionales y del sistema actual.

Ejemplo 4. Una mujer que nace el 26 de agosto 1999 entra al mercado laboral el 17 de octubre del 2022 con un salario de 1000 dólares y planifica jubilarse al llegar a la edad de 69 años. Hallar y comparar la pensión inicial obtenida mediante Cuentas Nocionales y el sistema actual. Tomar en cuenta un tanto nocional de 3.5 %.

La pensión inicial que la mujer recibiría al jubilarse mediante el sistema de Cuentas Nocionales es 2701.64 dólares, mientras que por el sistema actual esta pensión tiene el valor de 2648.37 dólares. A continuación, se evidencia la diferencia de la pensión inicial por cada uno de los sistemas de pensiones.

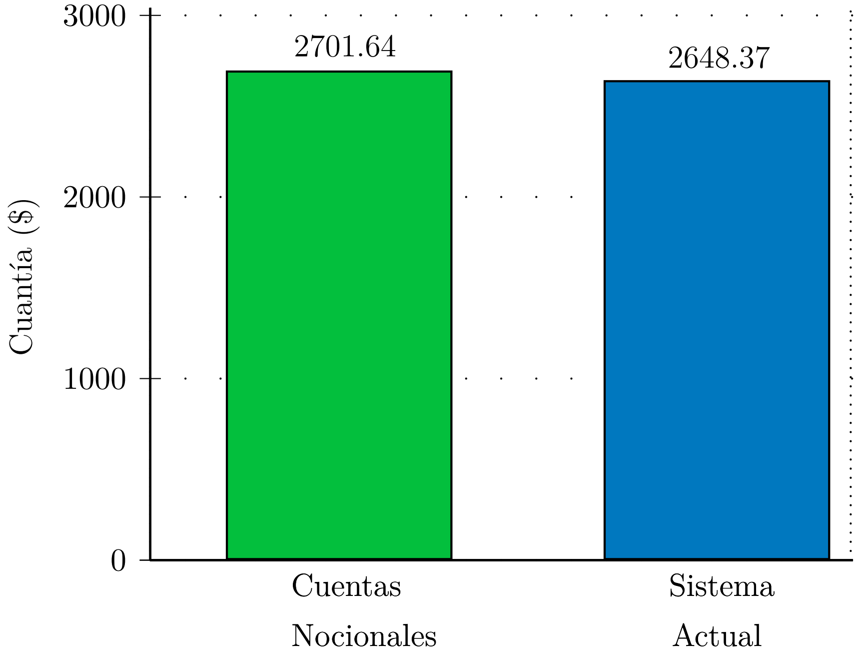

Figura 5.5: Comparación del valor de las cuantías mediante Cuentas Nocionales y el sistema actual.

Adicionalmente, el aplicativo sugiere una edad de jubilación de 60 años en la que la mujer recibiría una pensión de 1078.11 dólares, es decir, una pensión ligeramente superior a la de un salario básico unificado en ese año.

Edad	Salario antes de jubilarse	Pensión sistema actual	Tasa Sustitución sistema actual	Cuantía sistema Cuentas Nocionales	Tasa Sustitución sistema Cuentas Nocionales
63	2345.39	2068.37	0.88	1448.69	0.62
64	2395.91	2240.64	0.94	1601.79	0.67
65	2447.52	2317.52	0.95	1773.18	0.72
66	2500.24	2396.66	0.96	1965.52	0.79
67	2554.09	2478.15	0.97	2181.86	0.85
68	2609.11	2562.03	0.98	2425.82	0.93
69	2665.31	2648.37	0.99	2701.64	1.01
70	2722.72	2737.24	1.01	3014.33	1.11
71	2781.37	2828.72	1.02	3369.79	1.21
72	2841.28	2922.86	1.03	3775.06	1.33
73	2902.48	3019.75	1.04	4238.51	1.46
74	2965.00	3119.46	1.05	4770.16	1.61
75	3028.86	3222.06	1.06	5382.00	1.78

Cuadro 5.2: Efecto sobre la cuantía al retrasar o adelantar la edad de jubilación.

Por otro lado, como podemos ver en el cuadro anterior, hasta los 68 años la pensión inicial calculada por el sistema actual es mayor que la de Cuentas Nocionales. Lo mismo se puede apreciar en el gráfico de evolución de la tasa de sustitución.

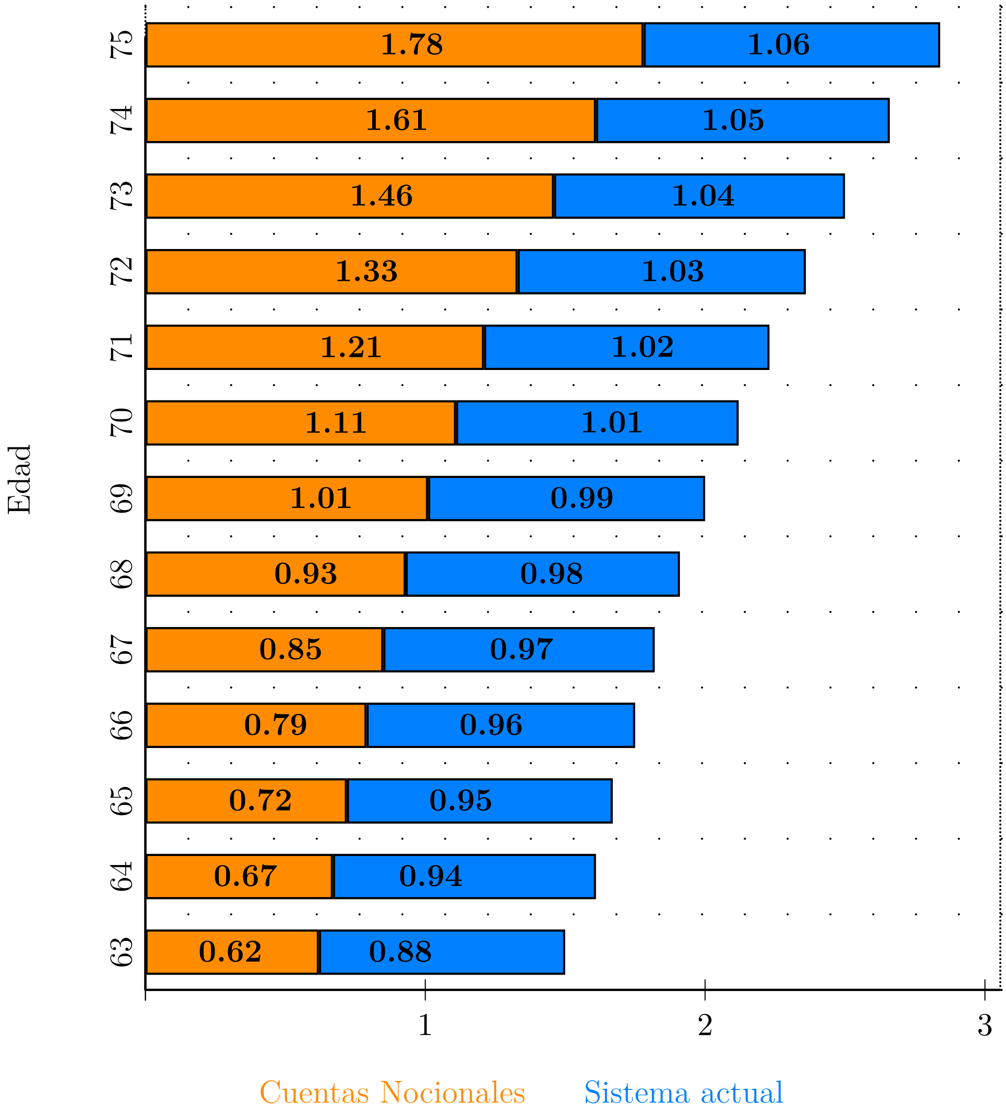

Figura 5.6: Evolución de las tasas de sustitución de Cuentas Nocionales y del sistema actual.

Capítulo 6

Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se exponen las conclusiones del presente trabajo de investigación y las recomendaciones obtenidas de la información, datos y resultados alcanzados.

6.1. Conclusiones

1. Por medio de los ejemplos comparativos se concluye que, por lo general, la cuantía de la pensión inicial calculada por el sistema vigente es mayor que la de Cuentas Nocionales. Sin embargo, no se asegura el pago de esta pensión hasta la muerte del jubilado, ya que, el sistema actual carece de fundamentos actuariales y además por el incumplimiento del 40 % por parte del Estado para el financiamiento de las pensiones. En particular, para casos con salarios elevados, que no son comunes en el mercado laboral de Ecuador, y un tanto nocional generoso se puede evidenciar que sucede lo contrario, es decir, la cuantía de la pensión inicial calculada mediante Cuentas Nocionales es mayor que la del sistema actual.

2. Por otro lado, se puede concluir que la pensión inicial del sistema de Cuentas Nocionales tiene una mayor penalización que el sistema actual al momento de adelantar la edad de jubilación. En el caso de retrasar la edad se tiene que el sistema actual no premia de igual magnitud que el sistema de Cuentas Nocionales.

3. Tomando en cuenta que el jubilado tiene derecho a percibir anualmente la decimotercera y decimocuarta pensión además de su pensión mensual, se diseñó el factor de conversión para el sistema de Cuentas Nocionales como la suma de una renta actuarial vitalicia anual, prepagada, fraccionada 12 meses y una renta actuarial vitalicia, anual, prepagada.

4. Una de las características que tiene el sistema de Cuentas Nocionales es que no existe una edad mínima de jubilación, en el presente trabajo se propone que esa edad sea cuando el individuo alcance una pensión superior a la de un salario básico unificado en el año del posible retiro, y así asegurar un nivel de vida digna para el asegurado.

5. Los resultados y datos obtenidos en el presente trabajo se pudieron analizar y comparar de forma dinámica, gracias al desarrollo de un aplicativo elaborado en R Shiny, denominada *Calculadora de Pensiones*, es posible interactuar con dicho aplicativo ingresando a: `https://CristianEvelin.shinyapps.io/CalculadoraDePensiones/`.

6.2. Recomendaciones

1. Con el objetivo de diseñar un sistema de pensiones beneficioso tanto para la institución encargada como para el pensionista, se recomienda la reestructuración completa al sistema que actualmente se usa en el IESS para el cálculo de pensiones, ya que no está basada en fundamentos matemáticos actuariales. En particular, se aconseja que el coeficiente anual de años aportados o cotizados establecido por el IESS tenga una base actuarial.

2. En el desarrollo del aplicativo y proyecto de investigación uno de los factores que retrasó el proceso fue la falta de accesibilidad a fuentes confiables de bases de datos ecuatorianas, por lo que se optó por la simulación con el fin de obtener las estimaciones de los datos faltantes. Por esta razón se sugiere la digitalización y publicación de datos para facilitar el desarrollo de estudios e investigaciones que aporten en las problemáticas sociales.

3. Se aconseja socializar sobre el sistema de pensiones y las problemáticas que este pueda enfrentar, ya que es un tema de interés global. En particular, a las generaciones más jóvenes, puesto que hay una incertidumbre de que estas puedan percibir una pensión por jubilación cuando llegue el momento de su retiro.

Bibliografía

[1] *RStudio*. Online. Disponible: https://rstudio.com/products/rstudio/.

[2] A. Apraiz, *Fundamentos de Matemáticas Financieras.*, Editorial Desclee de Brouw, Bilbao, 2003.

[3] M. Ayuso, H. Corrales, A. M. Pérez-Marín, and J. L. Rojo, *Estadística Actuarial Vida*, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, España, 2007.

[4] M. C. Boado-Penas, I. Domínguez-Fabián, S. Valdés-Prieto, and C. Vidal-Meliá, *Mejora de la equidad y sostenibilidad financiera del sistema público español de pensiones de jubilación mediante el empleo de cuentas nocionales de aportación definida (NDCs)*, Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, España, enero 2007.

[5] P. Borja, *El Financiamiento del Seguro de Pensiones del IESS y El Derecho Constitucional a la Seguridad Social*, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Ecuador, 2018.

[6] N. L. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*, Soc. of Actuaries, Schaumburg, Ill., 1997.

[7] S. Cisneros, *Sistemas de pensiones/ ¿En qué consiste un sistema de pensiones de cuentas nocionales?*, Futuro a fondo, 2020. Online. Disponible: https://www.futuroafondo.com/es/noticia/en-que-consiste-un-sistema-de-pensiones-de-cuentas-nocionales.

[8] DCOMM, *De Bismarck a Beveridge: seguridad social para todos*, in Trabajo, la revista de la OIT, no. 67, diciembre 2009, p. 2. Online. Disponible: https://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/---dgreports/---dcomm/documents/publication/wcms_122248.pdf.

[9] Departamento de Protección Social - OIT, *Valuación actuarial del régimen de invalidez, vejez y muerte del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social - 2018*, Ecuador, primera ed., abril 2020. Online. Disponible: https://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/---americas/---ro-lima/documents/publication/wcms_742001.pdf.

[10] J. E. Devesa, M. Devesa, I. Domínguez-Fabián, R. Meneu, and A. Nagore, *El factor de sostenibilidad en los sistemas de pensiones de reparto: alternativas para su regulación en España*, no. 31, Revista Actuarios, España, 2012, pp. 48–58.

[11] J. E. Devesa Carpio, M. Devesa Carpio, I. Domínguez-Fabián, B. Encinas Goenechea, and R. Meneu Gaya, *La implantación de un Sistema de Cuentas Nocionales en España*, Instituto Santalucía, España.

[12] Dirección Actuarial, de Investigación y Estadística del IESS, *Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio*, Quito, Ecuador, 2019. Online. Disponible: https://www.iess.gob.ec/documents/10162/14444609/IESS_IVM_estudio_actuarial_011.pdf.

[13] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, *Jubilación ordinaria vejez*, Ecuador. Online. Disponible: https://www.iess.gob.ec/es/web/guest/jubilacion-ordinaria-vejez.

[14] ——, *Montepío (seguro de muerte)*, Ecuador. Online. Disponible: https://www.iess.gob.ec/es/web/guest/montepio1.

[15] ——, *Prestaciones y Beneficios - Ecuatorianos y Extranjeros residentes en el Ecuador*, Ecuador. Online. Disponible: https://www.iess.gob.ec/es/web/afiliacion-voluntaria/prestaciones-y-beneficios4.

[16] ——, *Seguro de Desempleo*, Ecuador. Online. Disponible: https://www.iess.gob.ec/es/seguro-de-desempleo.

[17] ——, *Subsidios por enfermedad o maternidad*, Ecuador. Online. Disponible: https://n9.cl/efqyd.

[18] ——, *¿Quiénes somos?*, Ecuador. Online. Disponible: https://www.iess.gob.ec/es/inst-quienes-somos.

[19] Microsoft R Application Network, *What is R?* Online. Disponible: https://mran.microsoft.com/documents/what-is-r.

[20] E. Navarro and J. Nave, *Fundamentos de Matemáticas Financieras.*, Antoni Bosch, Barcelona, 2001.

[21] R. Nugent, *Instituciones de derecho del trabajo y de la seguridad social*, México D.F., 1997, ch. 33. Online. Disponible: https://archivos.juridicas.unam.mx/www/bjv/libros/1/139/36.pdf.

[22] Organización Internacional del Trabajo, *Seguridad social para la justicia social y una globalización equitativa*, Ginebra, primera ed., 2011. Online. Disponible: https://www.ilo.org/wcmsp5/groups/public/---ed_norm/---relconf/documents/meetingdocument/wcms_154235.pdf.

[23] The R Foundation, *What is R?* Online. Disponible: https://www.r-project.org/about.html.

[24] R-project, *Package 'lifecontingencies'*, 2021. Online. Disponible: https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf.

[25] RStudio, *Shiny from RStudio.* Online. Disponible: https://shiny.rstudio.com/.

[26] F. Sandoya, *Matemáticas Actuariales y Operaciones de Seguros*, ESPOL, Guayaquil, Ecuador, segunda ed., 2007.

[27] J. Sasso, *La seguridad social en el ecuador, historia y cifras*, Actuar en mundos plurales. Boletín de análisis de políticas públicas. FLACSO sede Ecuador. Programa de Políticas Públicas y Gestión, (2011), pp. 19–21.

[28] O. Settergren, *Balance de la reforma de la seguridad social sueca*, Revista del Ministerio de trabajo y asuntos sociales, (2007), pp. 161–206.

[29] L. T. Soria, *Historia del seguro en la antigua roma. los collegia*, Noticias LBS, (2016). Online. Disponible: https://lbssegurosnoticias.wordpress.com/2016/03/08/historia-del-seguro-en-la-antigua-roma-los-collegia/.

[30] Superintendencia de Bancos, *Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS)*, Ecuador. Online. Disponible: https://www.superbancos.gob.ec/bancos/instituto-ecuatoriano-de-seguridad-social-iess/.

[31] C. Vidal-Meliá, J. E. Devesa Carpio, and A. Lejárraga García, *Cuentas Nocionales de aportación definida: Fundamento actuarial y aspectos aplicados*,

no. 8 in Anales del Instituto de Actuarios de España, Valencia, España, 2002, pp. 137–188.

[32] H. VILLASMIL, *Pasado y presente del derecho laboral latinoamericano y las vicisitudes de la relación de trabajo (primera parte)*, Revista Latinoamericana de Derecho Social, (2015), pp. 203–228.

Anexos

Anexo A

Tablas de mortalidad

A.1. Femenino

x	*lx*	*qx*	*px*	*ex*
15	100000.00	0.00	1.00	70.83
16	99960.23	0.00	1.00	69.86
17	99920.41	0.00	1.00	68.89
18	99880.46	0.00	1.00	67.91
19	99840.28	0.00	1.00	66.94
20	99799.79	0.00041	0.99959	65.97
21	99758.91	0.00042	0.99959	64.99
22	99717.53	0.00042	0.99958	64.02
23	99675.57	0.00043	0.99957	63.05
24	99632.92	0.00044	0.99956	62.07
25	99589.48	0.00045	0.99956	61.10
26	99545.15	0.00046	0.99955	60.13
27	99499.82	0.00047	0.99953	59.16
28	99453.35	0.00048	0.99952	58.18
29	99405.64	0.00049	0.99951	57.21
30	99356.54	0.00051	0.99949	56.24
31	99305.91	0.00053	0.99947	55.27
32	99253.59	0.00055	0.99945	54.30
33	99199.42	0.00057	0.99943	53.33
34	99143.22	0.00059	0.99941	52.36

Sigue en la página siguiente.

x	lx	qx	px	ex
35	99084.79	0.00061	0.99939	51.39
36	99023.93	0.00064	0.99936	50.42
37	98960.41	0.00067	0.99933	49.45
38	98893.97	0.00070	0.99930	48.48
39	98824.36	0.00074	0.99926	47.52
40	98751.26	0.00078	0.99922	46.55
41	98674.36	0.00082	0.99918	45.59
42	98593.31	0.00087	0.99913	44.62
43	98507.71	0.00092	0.99908	43.66
44	98417.13	0.00098	0.99902	42.70
45	98321.10	0.00104	0.99896	41.74
46	98219.10	0.00111	0.99890	40.79
47	98110.55	0.00118	0.99882	39.83
48	97994.82	0.00126	0.99874	38.88
49	97871.20	0.00135	0.99865	37.93
50	97738.91	0.00145	0.99855	36.98
51	97597.08	0.00156	0.99844	36.03
52	97444.75	0.00168	0.99832	35.08
53	97280.85	0.00182	0.99818	34.14
54	97104.19	0.00196	0.99804	33.20
55	96913.43	0.00213	0.99787	32.27
56	96707.11	0.00231	0.99769	31.34
57	96483.56	0.00252	0.99749	30.41
58	96240.94	0.00274	0.99726	29.48
59	95977.19	0.00299	0.99701	28.56
60	95690.01	0.00327	0.99673	27.65
61	95376.81	0.00359	0.99641	26.74
62	95034.72	0.00394	0.99606	25.83
63	94660.50	0.00433	0.99567	24.93
64	94250.55	0.00477	0.99523	24.04
65	93800.81	0.00527	0.99473	23.15
66	93306.76	0.00582	0.99418	22.27
67	92763.35	0.00645	0.99355	21.40

Sigue en la página siguiente.

x	lx	qx	px	ex
68	92164.92	0.00716	0.99284	20.53
69	91505.16	0.00796	0.99204	19.68
70	90777.03	0.00886	0.99114	18.83
71	89972.72	0.00988	0.99012	18.00
72	89083.53	0.01104	0.98896	17.17
73	88099.86	0.01236	0.98764	16.36
74	87011.12	0.01385	0.98615	15.55
75	85805.69	0.01556	0.98444	14.77
76	84470.91	0.01750	0.98250	13.99
77	82993.04	0.01971	0.98029	13.23
78	81357.39	0.02224	0.97777	12.49
79	79548.37	0.02513	0.97488	11.76
80	77549.71	0.02843	0.97157	11.05
81	75344.77	0.03222	0.96778	10.36
82	72917.01	0.03657	0.96343	9.69
83	70250.59	0.04156	0.95844	9.04
84	67331.28	0.04728	0.95272	8.41
85	64147.57	0.05387	0.94613	7.80
86	60692.09	0.06144	0.93856	7.21
87	56963.35	0.07014	0.92986	6.65
88	52967.83	0.08015	0.91985	6.12
89	48722.27	0.09167	0.90833	5.61
90	44256.11	0.10490	0.89510	5.12
91	39613.76	0.12009	0.87991	4.66
92	34856.42	0.13752	0.86248	4.23
93	30062.88	0.15748	0.84252	3.83
94	25328.55	0.18028	0.81972	3.45
95	20762.25	0.20626	0.79374	3.10
96	16479.9	0.23573	0.76427	2.77
97	12595.05	0.26903	0.73097	2.47
98	9206.65	0.30641	0.69359	2.20
99	6385.66	0.34808	0.65192	1.95
100	4162.94	0.39412	0.60588	1.73

Sigue en la página siguiente.

x	*lx*	*qx*	*px*	*ex*
101	2522.25	0.44443	0.55557	1.53
102	1401.29	0.49868	0.50132	1.35
103	702.49	0.55625	0.44375	1.19
104	311.73	0.61614	0.38386	1.05
105	119.66	0.67699	0.32301	0.93
106	38.65	0.73705	0.26295	0.83
107	10.16	0.79431	0.20569	0.74
108	2.09	0.84664	0.15337	0.67
109	0.32	0.89208	0.10793	0.61
110	0.03	0.92917	0.07083	0.50

Cuadro A.1: Tabla de mortalidad - Femenino.

A.2. Masculino

x	*lx*	*qx*	*px*	*ex*
15	100000	0.000795	0.999205	67.19
16	99920.49	0.000928	0.999072	66.24
17	99827.78	0.001059	0.998941	65.30
18	99722.06	0.001184	0.998816	64.37
19	99604.03	0.001298	0.998702	63.45
20	99474.75	0.001398	0.998602	62.53
21	99335.64	0.001483	0.998517	61.62
22	99188.35	0.00155	0.99845	60.71
23	99034.64	0.001599	0.998401	59.80
24	98876.28	0.001631	0.998369	58.89
25	98714.97	0.001649	0.998351	57.99
26	98552.23	0.001653	0.998347	57.09
27	98389.37	0.001646	0.998354	56.18
28	98227.43	0.001631	0.998369	55.27
29	98067.21	0.001611	0.998389	54.36
30	97909.18	0.001589	0.998411	53.45
31	97753.6	0.001567	0.998433	52.53
32	97600.42	0.001547	0.998453	51.61

Sigue en la página siguiente.

x	lx	qx	px	ex
33	97449.4	0.001533	0.998467	50.69
34	97300.03	0.001525	0.998475	49.77
35	97151.61	0.001527	0.998473	48.84
36	97003.28	0.001537	0.998463	47.92
37	96854.23	0.001555	0.998445	46.99
38	96703.64	0.001581	0.998419	46.06
39	96550.76	0.001615	0.998385	45.14
40	96394.81	0.001657	0.998343	44.21
41	96235.05	0.001708	0.998292	43.28
42	96070.71	0.001766	0.998234	42.35
43	95901.03	0.001833	0.998167	41.43
44	95725.23	0.001909	0.998091	40.50
45	95542.51	0.001993	0.998007	39.58
46	95352.07	0.002087	0.997913	38.66
47	95153.06	0.00219	0.99781	37.74
48	94944.65	0.002303	0.997697	36.82
49	94725.97	0.002427	0.997573	35.90
50	94496.09	0.002562	0.997438	34.99
51	94254.01	0.00271	0.99729	34.08
52	93998.57	0.002873	0.997127	33.17
53	93728.49	0.003053	0.996947	32.26
54	93442.35	0.003251	0.996749	31.36
55	93138.53	0.003471	0.996529	30.46
56	92815.23	0.003715	0.996285	29.57
57	92470.4	0.003987	0.996013	28.67
58	92101.73	0.00429	0.99571	27.79
59	91706.64	0.004629	0.995371	26.90
60	91282.16	0.005009	0.994991	26.03
61	90824.97	0.005436	0.994564	25.16
62	90331.26	0.005917	0.994083	24.29
63	89796.74	0.00646	0.99354	23.43
64	89216.64	0.007072	0.992928	22.58
65	88585.73	0.007759	0.992241	21.74

Sigue en la página siguiente.

x	lx	qx	px	ex
66	87898.41	0.008531	0.991469	20.90
67	87148.58	0.009396	0.990604	20.08
68	86329.75	0.010364	0.989636	19.27
69	85435.02	0.011446	0.988554	18.46
70	84457.12	0.012653	0.987347	17.67
71	83388.5	0.013996	0.986004	16.89
72	82221.43	0.015486	0.984514	16.12
73	80948.11	0.017137	0.982863	15.37
74	79560.87	0.01896	0.98104	14.63
75	78052.38	0.020966	0.979034	13.90
76	76415.91	0.023168	0.976832	13.19
77	74645.51	0.02559	0.97441	12.49
78	72735.36	0.028265	0.971735	11.80
79	70679.48	0.031237	0.968763	11.13
80	68471.68	0.034555	0.965445	10.48
81	66105.62	0.038283	0.961717	9.83
82	63574.91	0.042494	0.957506	9.20
83	60873.34	0.047282	0.952718	8.59
84	57995.12	0.052759	0.947241	7.99
85	54935.38	0.059062	0.940938	7.41
86	51690.8	0.066361	0.933639	6.84
87	48260.55	0.074865	0.925135	6.29
88	44647.53	0.084832	0.915168	5.76
89	40860.01	0.096579	0.903421	5.25
90	36913.78	0.110502	0.889498	4.76
91	32834.74	0.127085	0.872915	4.29
92	28661.93	0.146926	0.853074	3.84
93	24450.76	0.170751	0.829249	3.41
94	20275.76	0.199438	0.800562	3.01
95	16232	0.234016	0.765984	2.64
96	12433.46	0.275654	0.724346	2.29
97	9006.13	0.325598	0.674402	1.97
98	6073.76	0.385024	0.614976	1.69

Sigue en la página siguiente.

x	lx	qx	px	ex
99	3735.22	0.454756	0.545244	1.43
100	2036.6	0.534786	0.465214	1.20
101	947.46	0.623561	0.376439	1.01
102	356.66	0.717131	0.282869	0.84
103	100.89	0.808558	0.191442	0.71
104	19.31	0.88845	0.11155	0.62
105	2.15	0.947678	0.052322	0.55
106	0.11	0.982154	0.017846	0.52
107	0	0.996212	0.003788	0.50
108	0	0.999607	0.000393	0.50
109	0	0.999986	0.000014	0.50
110	0	1	0	0.50

Cuadro A.2: Tabla de mortalidad - Masculino.

Anexo B

Coeficientes anual de años aportados

Años de imposiciones	**Coeficiente**	**Años de imposiciones**	**Coeficiente**
5	0.4375	23	0.6625
6	0.4500	24	0.6750
7	0.4625	25	0.6875
8	0.4750	26	0.7000
9	0.4875	27	0.7125
10	0.5000	28	0.7250
11	0.5125	29	0.7375
12	0.5250	30	0.7500
13	0.5375	31	0.7625
14	0.5500	32	0.7750
15	0.5625	33	0.7875
16	0.5750	34	0.8000
17	0.5875	35	0.8125
18	0.6000	36	0.8325
19	0.6125	37	0.8605
20	0.6250	38	0.8970
21	0.6375	39	0.9430
22	0.6500	40	1.0000

Cuadro B.1: Tabla de coeficiente multiplicador para el cálculo de pensión por vejez.

Anexo C

Código del aplicativo para el cálculo de pensiones

C.1. global.R

```
library(shiny)
library(shinydashboard)
library(readxl)
library(lifecontingencies)
library(data.table)
library(eeptools)
library(DT)
library(tidyverse)
library(graphics)
library(reshape2)

data_coeficiente <- read_xlsx("Datos/Coeficientes_Sis_Actual.xlsx")
data_coeficiente_min_max <- read_xlsx("Datos/Coeficientes_PensionMinMax.
    xlsx")
data_afiliados <- read_xlsx("Datos/Distribucion_Afiliados.xlsx",
                            sheet = "2018")

# Data para las probabilidades de muerte según el género
femenino <- read_xlsx("Datos/Tabla_Mortalidad_Estudio.xlsx",
                      sheet = "Tabla_mujer_afiliados")
masculino <- read_xlsx("Datos/Tabla_Mortalidad_Estudio.xlsx",
                       sheet = "Tabla_hombre_afiliados")

# Se transforman las probabilidades q_x a formato lifecontingencies
tabla_femenino <- probs2lifetable(femenino$qx, radix=100000, type="qx",
```

```
                                              name = "Probabilidad Femenino")
tabla_masculino <- probs2lifetable(masculino$qx, radix=100000, type="qx",
                                              name = "Probabilidad Masculino")

tipo_cotizacion <- 0.1046
crecimiento_salario <- 0.02154
crecimiento_pib <- 0.01675

#### FUNCIONES ####

#### Cuantía Sistema Actual ####
## Para extraer el valor del coeficiente
coeficiente <- function(imposiciones){
  coefi <- data_coeficiente %>%
    dplyr::filter(Numero_Impo == imposiciones) %>%
    select(Coeficiente)
  as.numeric(coefi)
}

## Para extraer el valor mínimo, según los años de aportación
minimo <- function(imposiciones){
  coefi <- data_coeficiente_min_max %>%
    dplyr::filter(Tiempo_Aportacion == imposiciones) %>%
    select(Coef_Minimo)
  as.numeric(coefi)
}

## Para extraer el coeficiente para el valor máximo de la pensión
maximo <- function(imposiciones){
  coefi <- data_coeficiente_min_max %>%
    dplyr::filter(Tiempo_Aportacion == imposiciones) %>%
    select(Coef_Maximo)
  as.numeric(coefi)
}

## Simulación de los salarios
salarios <- function(salario, fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad_
    jubilacion){
  meses_faltantes_anio_1 <- 12 - month(fecha_inicio)
  salarios <- data.table()
  salarios <- data.table(salarios_anuales=salario*meses_faltantes_anio_1)
  anio_inicio <- year(fecha_inicio)
  anio_nacimiento <- year(fecha_nacimiento)
  anio_jubilacion <- anio_nacimiento + edad_jubilacion
```

```
  dif_anios <- anio_jubilacion - anio_inicio

  for (i in 1:(dif_anios - 1)) {
    salarios <- rbind(salarios, data.table(salarios_anuales=12*salario*(1
        + crecimiento_salario)^i))
  }
  meses_antes_de_la_jubilacion <- month(fecha_nacimiento) - 1
  salarios <- rbind(salarios, data.table(salarios_anuales =
                      meses_antes_de_la_jubilacion*salario*(1 + crecimiento
                         _salario)^dif_anios))
  return(salarios)
}

salarios_2 <- function(salario, fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad_
    jubilacion){
  meses_faltantes_anio1 <- 12 - month(fecha_inicio)
  anio_inicio <- year(fecha_inicio)
  salarios <- data.table()
  salarios <- data.table(anio = rep(anio_inicio, meses_faltantes_anio1),
                         salario_mensual = salario)
  anio_nacimiento <- year(fecha_nacimiento)
  anio_jubilacion <- anio_nacimiento + edad_jubilacion
  dif_anios <- anio_jubilacion - anio_inicio
  for (i in 1:(dif_anios - 1)) {
    salarios <- rbind(salarios, data.table(anio=rep(anio_inicio + i, 12),
                                         salario_mensual = salario*(1 +
                                              crecimiento_salario)^i))
  }
  meses_faltantes_final <- month(fecha_nacimiento) - 1
  salarios <- rbind(salarios, data.table(anio = rep(anio_jubilacion,
                                          meses_faltantes_final),
                            salario_mensual = salario*(1 + crecimiento_
                               salario)^dif_anios))
  return(salarios)
}

salario_al_jubilarse <- function(salarios2, fecha_nacimiento, edad_
    jubilacion){
  anio_nacimiento <- year(fecha_nacimiento)
  anio_jubilacion <- anio_nacimiento + edad_jubilacion

  if(month(fecha_nacimiento) == 1){
    aux <- salarios2 %>%
      dplyr::filter(anio == (anio_jubilacion - 1)) %>%
```

```
      select(salario_mensual)
    salario_antes_de_jubilarse <- aux[1.1]
  }
  else{
    aux <- salarios2 %>%
      dplyr::filter(anio == anio_jubilacion) %>%
      select(salario_mensual)
    salario_antes_de_jubilarse <- aux[1.1]
  }
  return(round(as.numeric(salario_antes_de_jubilarse). 2))
}

## Cálculo de las cuantías para cada sistema
cuantia_sistema_actual <- function(salario, fecha_nacimiento, fecha_
    inicio, edad_jubilacion){
  salarios_sis_act <- salarios_2(salario, fecha_nacimiento, fecha_inicio,
      edad_jubilacion)
  mejores_salarios <- data.table()
  aux <- floor(salarios_sis_act[ , .N]/12)
  for (i in 1 : aux) {
    mejores_salarios <- rbind(mejores_salarios,
                        data.table( salario = sum(salarios_sis_act[c((12
                            *(i-1)+1):(12*i)), salario_mensual])/12))
                      }
  aux_2 <- salarios_sis_act[ , .N]%% 12
  mejores_salarios <- rbind(mejores_salarios,
                              data.table(
                                salario = sum(salarios_sis_act[ c((salarios
                                    _sis_act[,.N]-aux_2+1):salarios_sis_act
                                    [,.N]), salario_mensual])/12))
  mejores_salarios <- mejores_salarios[with(mejores_salarios, order(
      mejores_salarios$salario, decreasing = T)), ]
  mejores_salarios <-  mejores_salarios[1:5]
  salario_afiliado <- sum(mejores_salarios$salario)/5
  imposiciones <- floor(salarios_sis_act[,.N]/12)
  indice <- which(data_coeficiente$Numero_Impo == imposiciones)
  coeficiente <- data_coeficiente$Coeficiente[indice]
  salario_afiliado <- salario_afiliado*coeficiente
  return(round(as.numeric(salario_afiliado), 2))
}

salario_basico <- function(fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad_
    jubilacion){
  salario_basico_unificado <- 400
```

```r
  anio_nacimiento <- year(fecha_nacimiento)
  anio_inicio <- year(fecha_inicio)
  anio_jubilacion <- anio_nacimiento + edad_jubilacion
  anios_laboral <- anio_jubilacion - anio_inicio

  if(month(fecha_nacimiento) == 12)
    salario_basico_unificado_futuro <- salario_basico_unificado*(1 + 0.02
      534)^(anios_laboral + 1)
  else
    salario_basico_unificado_futuro <- salario_basico_unificado*(1 + 0.02
      534)^(anios_laboral)
  return(round(salario_basico_unificado_futuro, 2))
}

capital_nocional <- function(genero, fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad
   _jubilacion, salario, tanto_nocional){
  edad_inicio <- floor(age_calc(fecha_nacimiento, fecha_inicio. units = "
     years"))
  sueldos <- salarios(salario, fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad_
     jubilacion)
  sueldos[ , (c("incr_anual", "incr_historico")) := 0]
  aux <- edad_jubilacion - edad_inicio + 1
  for (i in 1:aux) {
    sueldos[i, "incr_anual"] = 1 + tanto_nocional*(1 + crecimiento_pib)^(
      i - 1)
  }
  for (i in 1:aux) {
    sueldos[i, "incr_historico"] = prod(sueldos[c(i:sueldos[,.N]), "incr_
      anual"])
  }
  sueldos <- sueldos %>%
    mutate(
      sueldo_historico = salarios_anuales*tipo_cotizacion*incr_historico)
  K <- 0
  K <- sueldos[, (k = sum(sueldo_historico))]
  cuantia <- 0
  salario_basico <- salario_basico(fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad_
     jubilacion)
  if(genero == "Femenino"){
    renta_vitalicia <- 12*axn(tabla_femenino, x = edad_jubilacion - 15, i
       = 0.0625, m = 0, k = 12, payment = "due") + axn(tabla_femenino, x
       = edad_jubilacion - 15,  i = 0.0625, m = 0, payment = "due")
    cuantia <- (K - salario_basico*axn(tabla_femenino, x = edad_
      jubilacion - 15, i = 0.0625, m = 0,
```

```r
    payment = "due"))/renta_vitalicia
  }
  else{
    renta_vitalicia <- 12*axn(tabla_masculino, x = edad_jubilacion - 15,
        i = 0.0625, m = 0, k = 12, payment = "due") + axn(tabla_masculino,
         x = edad_jubilacion - 15, i = 0.0625, m = 0, payment = "due")
    cuantia <- (K-salario_basico*axn(tabla_masculino, x=edad_jubilacion -
         15, i = 0.0625, m = 0,payment = "due"))/renta_vitalicia
  }
  return(round(as.numeric(cuantia), 2))
}

#### Función para hallar la edad y pensión mínima ####
pension_edad_minima <- function(genero, fecha_nacimiento, fecha_inicio,
                                  salario, tanto_nocional){
  edad <- floor(age_calc(fecha_nacimiento, fecha_inicio, units="years"))
  sbu <- salario_basico(fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad)
  salario_minimo <- 0
  while (salario_minimo < sbu) {
    edad <- edad + 1
    salario_minimo <- capital_nocional(genero, fecha_nacimiento,
    fecha_inicio, edad, salario, tanto_nocional)
    sbu <- salario_basico(fecha_nacimiento, fecha_inicio, edad)
  }
  return(c(edad, salario_minimo))
}

### Funcion para el gráfico sis. actual vs nocional
grafico_actual_nocional <- function(y){
  grafico <- ggplot() +
    aes(x = c("Cuantía Sistema Cuentas Nocionales". "Pensión Sistema
        Actual"), y, fill = c("Cuantía Sistema Cuentas Nocionales", "
        Pensión Sistema Actual")) +
    geom_bar(position = "dodge", stat = "identity", show.legend = F) +
    geom_text(aes(label = y), vjust = -0.3, color = "black", size = 5,
               position = position_dodge(0.9)) +
    ggtitle("Comparación del valor de las cuantías") +
    labs(subtitle = "Cuentas Nocionales vs Sistema Actual".
         x = "", y = "Cuantía ($)") +
    scale_fill_manual("Legend", values = c("springgreen4", "steelblue4"))
       +
    theme(text = element_text(family = "Arial Rounded MT Bold", size=17),
          plot.title = element_text(hjust = 0.5),
          plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5))
```

```r
  return(grafico)
}

#### Función para el gráfico de las tasas de sustitución
grafico_tasas_sustitucion <- function(genero, fecha_nacimiento, fecha_
    inicio, edad_jubilacion, salario,  tanto_nocional){
  aux1 <- edad_jubilacion - 6
  aux2 <- edad_jubilacion + 6
  tabla <- data.table()
  for (i in aux1:aux2) {
    a <- salarios_2(salario, fecha_nacimiento, fecha_inicio, i)
    salario_antes_jubilarse <- salario_al_jubilarse(a,fecha_nacimiento,i)
    imposiciones <- as.numeric(a[,.N])
    pension_calculada <-cuantia_sistema_actual(salario, fecha_nacimiento,
    fecha_inicio, i)
    coef_minimo <- minimo(floor(imposiciones/12))
    coef_maximo <- maximo(floor(imposiciones/12))
    fondo_nocional <- 0
    fondo_nocional <- capital_nocional(genero, fecha_nacimiento, fecha_
        inicio, i, salario, tanto_nocional)
    if ((imposiciones >= 480)|
        (i >= 60 & imposiciones >= 360) |
        (i >= 65 & imposiciones >= 180) |
        (i >= 70 & imposiciones >= 120))
    {
      SBU <- salario_basico(fecha_nacimiento, fecha_inicio, i)
       if(pension_calculada < SBU*coef_minimo){
        tabla <- rbind(tabla,
                   data.table(
                   Edad = i.},
                   TasaSustitucionSis.Actual = round(SBU*coef_minimo /
                       salario_antes_jubilarse, 2),
                   TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_nocional/
                       salario_antes_jubilarse, 2)))
      }
      else{
        if(pension_calculada > SBU*coef_maximo){
          tabla <- rbind(tabla,
                   data.table(
                    Edad = i, TasaSustitucionSis.Actual = round(SBU*coef_
                        maximo/salario_antes_jubilarse, 2),
                    TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_nocional/
                                          salario_antes_jubilarse, 2)))
        }
```

```
        else{
          tabla <- rbind(tabla,
                         data.table(
                           Edad = i,
                           TasaSustitucionSis.Actual = round(pension_
                              calculada/salario_antes_jubilarse,2),
                          TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_
                             nocional/salario_antes_jubilarse, 2)))
        }}}
    else{
      tabla <- rbind(tabla,
                     data.table(
                       Edad = i,
                       TasaSustitucionSis.Actual = 0,
                       TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_
                          nocional/salario_antes_jubilarse, 2)))
    }
  }
  tabla <- melt(data = tabla, id.vars = "Edad")
  grafico <- ggplot(tabla, aes(x = Edad, y = value, fill = variable)) +
    geom_bar(stat = "identity", show.legend = T) +
    geom_text(aes(y = value, label = value), position = position_stack(
        vjust = 0.5), size = 4) +
    coord_flip() +
    labs(title = "Evolución de las tasas de sustitución",
         x = "Edad", y = " ") +
    scale_x_continuous(limits = c(aux1 - 1, aux2 + 1), breaks = seq(aux1,
        aux2, 1)) +
    scale_fill_discrete(name = "", labels = c("Sistema actual", "Cuentas
        Nocionales"), type = c(68, "orange")) +
    theme(text = element_text(family = "Arial Rounded MT Bold", size=17),
          legend.position="bottom", plot.title = element_text(hjust=0.5))
  return(grafico)
}
```

C.2. ui.R

```
library(shinydashboard)
library(lubridate)
library(extrafont)
library(shiny)
library(shinythemes)
library(tableHTML)

sidebar <- dashboardSidebar(
            sidebarMenu(id = "sidebar", style = "position: relative;
               overflow: visible;",  menuItem("Inicio", icon = icon("
               house-user"), tabName = "inicio", badgeColor = "green"),
               menuItem("Sistema de Pensiones", icon = icon("money-bill-
               wave"), tabName = "pensiones" ),
              menuItem("Calculadora", tabName = "calcu", icon = icon("
                 calculator")), conditionalPanel("input.sidebar === '
                 calcu' ", selectInput("genero_1", label = "Género",
              choices=c("Femenino". "Masculino")), dateInput("fecha_
                 nacimiento_1", label = "Fecha de nacimiento",
              value = today() - 360*25, language = "es",
              format = "dd/mm/yyyy"),  dateInput("fecha_inicio_1", label
                 = "Fecha entrada mercado laboral ", value = today(), min
                  = today(), language = "es", format = "dd/mm/yyyy"),
                 numericInput("edad_jubilacion_1", label = "Edad de
                 jubilación", value = 61, min = 50, max = 100),
                 numericInput("salario", label = "Salario", value = 400,
                 min = 0, max = 100000), sliderInput("tanto_nocional_1",
                 label = "Tanto nocional", value = 0.04, min = 0, max = 0
                 .1, step = 0.005) ,actionButton("action", label = "
                 Calcular", icon = icon("calculator"))), menuItem("Acerca
                  de", tabName = "acerca_de", icon = icon("user-friends")
                 )))

body <- dashboardBody( tags$head( tags$style(HTML("h1 {font-size: 50px;
    font-family: 'Arial Rounded MT Bold';} "))), tags$head(tags$style(HTML
    ("h2 {font-size: 22px;font-family: 'Arial Rounded MT Bold';}"))),
        tags$head( tags$style(HTML(" h3{font-size: 22px; font-family: '
            Arial Rounded MT Bold';} "))),
  fluidRow(tabItems(tabItem(tabName = "calcu",tags$head(tags$style ("#
      primer{color: black;font-size: 20px; font-family: Arial Rounded MT
      Bold;}")), tabBox(height = 472, width = 5, id = "primer", tabPanel("
      Sistema de Cuentas Nocionales", htmlOutput("edad_cuantia_minima")),
```

```
            tabPanel("Sistema Actual", htmlOutput("info_sis_actual"
               ))),
        tags$head(tags$style("#graficos{color: black;
                              font-size: 20px;
                              font-family: Arial Rounded MT Bold;}")),
        tabBox( width = 7, height = 430,
                id = "graficos",
                tabPanel("Cuantías", plotOutput("plot_cuantias")),
                tabPanel("Tasas de sustitución", plotOutput("plot_
                   tasas"))),
       box(dataTableOutput("table_comparacion_nocional"), width = 12,
       tags$head(tags$style("#table_comparacion_nocional{color: black
          ; font-size: 17px; font-family: Arial Rounded MT Bold;}" ))
          )),
tabItem(tabName = "inicio",
        tags$head( tags$style("label{font-family: Arial Rounded MT
           Bold;}")), h1("Introducción", align = "center"),
        br(), column(width = 7, h3("Este aplicativo es una
           calculadora en línea capaz de estimar la pensión inicial
           de jubilación. mediante Cuentas Nocionales y el sistema
           vigente. que se percibirá llegado el momento del retiro.",
            align = "justify"),
              h3("Esta herramienta es de uso sencillo. ya que para
                 obtener los resultados deseados se solicitan datos
                 básicos de una persona como: género. fecha de
                 nacimiento. fecha entrada al mercado laboral. edad
                 que desea jubilarse y salario.",align = "justify")),
       column(width = 5, img(src = "monedas.jpeg", width = 500)),
          column(width = 5, img(src = "calcu_graf.jpeg", width = 510)
          , align = "left"),  column(width = 7,
              h3("Con los datos ingresados por el usuario. la
                 calculadora
                 genera la siguiente información:", align = "justify"
                    ),
              h3("•  Edad y salario mínimo de jubilación mediante
                 Cuentas Nocionales."),
              h3("•  Un gráfico que compara la cuantía de la pensión
                 inicial de jubilación. calculada por ambos sistemas.
                 "),
              h3("• Un gráfico que compara la evolución de las tasas
                 de sustitución para ambos sistemas."),
              h3("•  Una tabla que informa del efecto sobre la
                 cuantía al momento de retrasar o adelantar la edad
                 de jubilación."))),
```

```
tabItem(tabName = "pensiones",
        column(width = 6,
               box(
                 title = h1("Cuentas Nocionales", align = "left") ,
                    width = NULL, solidHeader = T, status = "info",
                 column(width = 7,
                        h3("Un sistema de cuentas nocionales es una
                           forma de calcular la pensión de jubilación
                            que una persona percibe al momento de
                           retirarse del mercado laboral. Este
                           sistema es de reparto. ya que las
                           cotizaciones realizadas cada año son
                           destinadas al pago de las pensiones de los
                            jubilados en ese mismo periodo. por lo
                           que el aportante no tiene un fondo
                           acumulado real", align = "justify")),
                 br(), br(),
                 column(width = 5, img(src = "imagen_nocional.jpeg",
                    width = 230, height = 260), align = "left"),
                 column(width = 12,
                 h3("Su funcionamiento se basa en cuentas
                    individuales en las que se van acumulando de
                    forma virtual las aportaciones y rendimientos
                    teóricos generados por estas aportaciones. es
                    decir. quien más aporta. más recibe.
                    Posteriormente. el fondo acumulado se transforma
                    en la cuantía de la renta vitalicia mediante el
                    uso de un factor de conversión de carácter
                    actuarial.", align = "justify"), br())),)),
        column(width = 6,
               box(
                 title = h1("Sistema de Reparto", align = "left"),
                    width = NULL, solidHeader = T, status = "warning"
                    ,
                 column(width = 7,
                    h3("En Ecuador. el sistema vigente para el
                       cálculo de pensiones de jubilación se basa en
                        un sistema de reparto de prestaciones
                       definidas."),
                    h3("Un sistema de reparto consiste en que las
                       aportaciones de los trabajadores son
                       destinadas  al pago de las pensiones de los
                       jubilados. y la pensión a percibir se
                       establece por parámetros y cálculos
```

```
                              predeterminados.", align = "justify")), br(),
                               br(),
                       column(width = 5, img(src = "imagen_actual.jpeg",
                           width = 230, height = 300, align = "left")),
                       column(width = 12,
                              h3("El sistema vigente calcula la pensión
                                 jubilar de un afiliado. obteniendo el
                                 producto de los salarios mensuales de los
                                 cinco años con mejores sueldos. Para luego
                                 . aplicar la raíz sesentava y multiplicar
                                 por un coeficiente que depende del número
                                 de imposiciones del afiliado. Y finalmente
                                  comparar la cuantía con la pensión mínima
                                  y máxima que entrega el IESS.", align = "
                                 justify"))))),
      tabItem(tabName = "acerca_de",
              h2("Aplicativo realizado previo a la obtención del título de
                  Ingeniería Matemática.", align = "justify"),
              h2("Título del trabajo de titulación:", align = "justify"),
              h2("“EL SISTEMA DE CUENTAS NOCIONALES: ASPECTOS TEÓRICOS E
                 IMPLEMENTACIONES PARA EL SISTEMA DE PENSIONES "ECUATORIANO
                  ", align = "center"),
              br(),
              box(title = "Autores", width = 4, solidHeader = T, status = "
                  success",
                   h2("•  Cristian Javier Velastegui Pucachaqui"), h3("xtian
                       1608@outlook.com". align = "center")  ,
                   h2("•  Evelin Jasmin Chile Taipe"), h3("evelinchile95
                       @hotmail.com", align = "center")),
              br(),
              box(title = "Auspiciado por:", width = 4, solidHeader = T,
                  status = "warning",
                   h2("• MSc. Diego Huaraca (Director)"), br(),
                   h2("• MSc. Menthor Urvina (Codirector)"))))))

dashboardPage(skin = "blue",
  dashboardHeader(title = div(img(src = "buho.png", height = 50, style =
      "float:left; padding-right:25px"), "Calculadora de Pensiones"),
      titleWidth  = 350), sidebar, body)
```

C.3. server.R

```
source("../CalculadoraDePensiones/global.R")
shinyServer(function(input, output, session) {
  output$edad_cuantia_minima <- renderText({
    input$action
    parametros_minimos <-isolate(pension_edad_minima(input$genero_1,
       input$fecha_nacimiento_1,input$fecha_inicio_1, input$salario,
       input$tanto_nocional_1))
    pension_nocional <- isolate(capital_nocional(input$genero_1, input$
       fecha_nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_1,
        input$salario, input$tanto_nocional_1))
    a <- isolate(salarios_2(input$salario, input$fecha_nacimiento_1,
       input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_1))
    salario_antes <- isolate(salario_al_jubilarse(a, input$fecha_
       nacimiento_1, input$edad_jubilacion_1))
    tasa_sustitucion <- round((pension_nocional/salario_antes)*100, 2)

    HTML(paste("". "", sep = "<br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <b•>
         Edad mínima de jubilación*: </b></FONT> </font>"),
           paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>" ,
              parametros_minimos[1],"</FONT> </font>"),
           paste(" <FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>años
              </FONT> </font> ", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded
               MT Bold'><b•>   Pensión mínima de jubilación*: </b></FONT>
              </font>", sep = "<br><br>"),
           paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> $ ",
              parametros_minimos[2], "</FONT> </font>"),
           paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <
              b•> Pensión a recibir: </b></FONT> </font>", sep="<br><br>")
              ,
           paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> $ ",
              pension_nocional, "</FONT> </font>"),
           paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <
              b•> Tasa de sustitución**: </b></FONT> </font>", sep = "<br
              ><br>"),
           paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>  ",
              tasa_sustitucion , " %</FONT> </font>"),
           paste("","<p align=justify><FONT SIZE=1> <FONT FACE = 'courier'>
               <b>* Edad necesaria para recibir una pensión ligeramente
              superior a la de un salario básico unificado en el año de
              jubilación. </b></FONT> </font></p>", sep ="<br><br><br>"),
```

```
        paste("","<p align=justify><FONT SIZE=1> <FONT FACE = 'courier'>
            <b>** Tasa de sustitución: es el porcentaje de ingresos en
            la jubilación. respecto a los ingresos previos como
            trabajador activo.</b></FONT> </font></p>")
        )
})

  output$info_sis_actual <- renderText({
    input$action
    a <- isolate(salarios_2(input$salario, input$fecha_nacimiento_1,
        input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_1))
    imposiciones <- isolate(as.numeric(a[,.N]))
    SBU <- isolate(salario_basico(input$fecha_nacimiento_1, input$fecha_
        inicio_1, input$edad_jubilacion_1))
    salario_antes_jubilarse <- isolate(salario_al_jubilarse(a, input$
        fecha_nacimiento_1, input$edad_jubilacion_1))
    if ((imposiciones >= 480)|
        (isolate(input$edad_jubilacion_1)>= 60 & imposiciones >= 360) |
        (isolate(input$edad_jubilacion_1) >= 65 & imposiciones >= 180) |
        (isolate(input$edad_jubilacion_1) >= 70 & imposiciones >= 120))
    {
      pension_calculada <- 0
      anios_jubilacion <- 0
      pension_calculada <- isolate(cuantia_sistema_actual(input$salario,
          input$fecha_nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, input$edad_
          jubilacion_1))
      coef_minimo <- minimo(floor(imposiciones/12))
      coef_maximo <- maximo(floor(imposiciones/12))
      if(pension_calculada < SBU*coef_minimo){
        actual <- round(SBU*coef_minimo, 2)
        tasa <- round((actual/salario_antes_jubilarse)*100, 2)
        HTML(paste("", "", sep = "<br>"),
          paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <b•>
              Cumple con los requisitos de jubilación: </b></FONT></font>".
          "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> Si </FONT>
              </font>" ),
          paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <
              b•>  Pensión a recibir: </b></FONT> </font>", sep = "<br><br
              >"),
              paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> $
                  ", actual, "</FONT> </font>"),
              paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold
                  '> <b•>  Tasa de sustitución*: </b></FONT> </font>",
              sep = "<br><br>"),
```

```
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>  ",
         tasa, " %</FONT> </font>"),
      paste("","<p align=justify><FONT SIZE=1> <FONT FACE = 'courier'>
          <b>* Tasa de sustitución: es el porcentaje de ingresos en la
          jubilación. respecto a los ingresos previos como trabajador
         activo.</b></FONT></font></p>", sep="<br><br><br><br><br>"))
   }
   else{
     if(pension_calculada > SBU*coef_maximo){
       actual <- round(SBU*coef_maximo, 2)
       tasa <- round((actual/salario_antes_jubilarse)*100, 2)
      HTML(paste("", "", sep = "<br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <b•>
         Cumple con los requisitos de jubilación: </b></FONT></font>",
          "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> Si </
         FONT> </font>" ),
      paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <
         b•> Pensión a recibir: </b></FONT></font>", sep="<br><br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> $ ",
         actual, "</FONT> </font>"),
      paste("","<FONT SIZE=5><FONT FACE='Arial Rounded MT Bold'> <b•>
         Tasa de sustitución*: </b></FONT> </font>",sep = "<br><br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>  ",
         tasa, " %</FONT> </font>"),
      paste("","<p align=justify><FONT SIZE=1> <FONT FACE = 'courier'>
          <b>* Tasa de sustitución: es el porcentaje de ingresos en la
          jubilación. respecto a los ingresos previos como trabajador
         activo.</b></FONT></font></p>", sep="<br><br><br><br><br>")
       )
     }
     else{
       actual <- round(pension_calculada,2)
       tasa <- round((actual/salario_antes_jubilarse)*100, 2)
       HTML(paste("", "", sep = "<br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <b•>
         Cumple con los requisitos de jubilación: </b></FONT> </font>"
         , "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> Si </
         FONT> </font>" ),
      paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <
         b•> Pensión a recibir: </b></FONT></font>", sep="<br><br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> $ ",
         actual, "</FONT> </font>"),
      paste("", "<FONT SIZE=5><FONT FACE='Arial Rounded MT Bold'> <b•>
           Tasa de sustitución*: </b></FONT> </font>".sep="<br><br>"),
```

```
        paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>  ",
            tasa, " %</FONT> </font>"),
        paste("","<p align=justify><FONT SIZE=1> <FONT FACE = 'courier'>
              <b>* Tasa de sustitución: es el porcentaje de ingresos en la
              jubilación, respecto a los ingresos previos como trabajador
             activo.</b></FONT></font></p>", sep="<br><br><br><br><br>")
      )
    }
  }
}
else
{
  HTML(paste("", "", sep = "<br>"),
      paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> <b•>
          Cumple con los requisitos de jubilación:</b></FONT></font>",
          "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'> No </
          FONT> </font>" ),
       paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>
            <b•>  Pensión a recibir: </b></FONT> </font>", sep = "<br><
            br>"),
       paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>  ",
            " - ", "</FONT> </font>"),
       paste("", "<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>
            <b•>  Tasa de sustitución*: </b></FONT> </font>", sep = "<
            br><br>"),
       paste("<FONT SIZE=5> <FONT FACE = 'Arial Rounded MT Bold'>  ",
            " - ", " </FONT> </font>"),
       paste("","<p align=justify><FONT SIZE=1> <FONT FACE = 'courier
            '> <b>* Tasa de sustitución: es el porcentaje de ingresos en
             la jubilación, respecto a los ingresos previos como
            trabajador activo.</b></FONT> </font></p>", sep="<br><br><br
            ><br><br>")
    )
  }
})
output$plot_cuantias <- renderPlot({
  input$action
  a <- isolate(salarios_2(input$salario, input$fecha_nacimiento_1,
      input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_1))
  imposiciones <- isolate(as.numeric(a[,.N]))
  SBU <- isolate(salario_basico(input$fecha_nacimiento_1, input$fecha_
      inicio_1, input$edad_jubilacion_1))
  if ((imposiciones >= 480)|
       (isolate(input$edad_jubilacion_1)>= 60 & imposiciones >= 360) |
```

```
    (isolate(input$edad_jubilacion_1) >= 65 & imposiciones >= 180) |
    (isolate(input$edad_jubilacion_1) >= 70 & imposiciones >= 120))
{
  pension_calculada <- 0
  anios_jubilacion <- 0
  pension_calculada <- isolate(cuantia_sistema_actual(input$salario,
      input$fecha_nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, input$edad_
      jubilacion_1))
  coef_minimo <- minimo(floor(imposiciones/12))
  coef_maximo <- maximo(floor(imposiciones/12))
  fondo_nocional <- isolate(capital_nocional(input$genero_1, input$
      fecha_nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_
      1, input$salario, input$tanto_nocional_1))
  if(pension_calculada < SBU*coef_minimo){
    actual <- round(SBU*coef_minimo, 2)
    nocional <- fondo_nocional
    y <- c(nocional, actual)
    grafico_actual_nocional(y)
  }
  else{
    if(pension_calculada > SBU*coef_maximo){
      actual <- round(SBU*coef_maximo, 2)
      nocional <- fondo_nocional
      y <- c(nocional, actual)
      grafico_actual_nocional(y)
    }
    else{
      actual <- round(pension_calculada, 2)
      nocional <- fondo_nocional
      y <- c(nocional, actual)
      grafico_actual_nocional(y)
    }
  }
}
else
{
  actual <- 0
  nocional <- isolate(capital_nocional(input$genero_1, input$fecha_
      nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_1,
      input$salario, input$tanto_nocional_1))
  y <- c(nocional, actual)
  grafico <- ggplot() +
    aes(x = c("Cuantia Sistema Cuentas Nocionales", "Pensión Sistema
        Actual"), y, fill = c("Cuantía Sistema Cuentas Nocionales", "
```

```
        Pensión Sistema Actual")) +
      geom_bar(position = "dodge", stat = "identity", show.legend=F) +
      geom_text(aes(label = y) , vjust = -0.3, color = "black", size =
         5, alpha = 3, position = position_dodge(0.9)) +
      labs(title = "Comparación del valor de las cuantías",
           subtitle = "Cuentas Nocionales vs Sistema Actual",
           x = "", y = "Cuantía ($)") +
      scale_fill_manual("Legend",values=c("springgreen4","steelblue4"))
         +
      theme(text = element_text(family = "Arial Rounded MT Bold",
      size = 17), plot.title = element_text(hjust = 0.5),
      plot.subtitle = element_text(hjust = 0.5))
    grafico
  }
})

output$plot_tasas <- renderPlot({
  input$action
  isolate(grafico_tasas_sustitucion(input$genero_1, input$fecha_
     nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, input$edad_jubilacion_1, input
     $salario, input$tanto_nocional_1))
})

output$table_comparacion_nocional <- renderDataTable({
  input$action
  aux1 <- isolate(input$edad_jubilacion_1 - 6)
  aux2 <- isolate(input$edad_jubilacion_1 + 6)
  tabla <- data.table()
  for (i in aux1:aux2) {
    a <- isolate(salarios_2(input$salario, input$fecha_nacimiento_1,
       input$fecha_inicio_1, i))
    salario_antes_jubilarse <- isolate(salario_al_jubilarse(a, input$
       fecha_nacimiento_1, i))
    imposiciones <- isolate(as.numeric(a[,.N]))
    pension_calculada <- isolate(cuantia_sistema_actual(input$salario,
       input$fecha_nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, i))
    coef_minimo <- minimo(floor(imposiciones/12))
    coef_maximo <- maximo(floor(imposiciones/12))
    fondo_nocional <- 0
    fondo_nocional <- isolate(capital_nocional(input$genero_1, input$
       fecha_nacimiento_1, input$fecha_inicio_1, i, input$salario,
       input$tanto_nocional_1))
    if ((imposiciones >= 480)|
        (i >= 60 & imposiciones >= 360) |
```

```
    (i >= 65 & imposiciones >= 180) |
    (i >= 70 & imposiciones >= 120))
{
SBU <- isolate(salario_basico(input$fecha_nacimiento_1, input$fecha
   _inicio_1, i))
if(pension_calculada < SBU*coef_minimo){
  tabla <- rbind(tabla,
                 data.table(
                   SalarioAntesDeJubilarse = salario_antes_
                      jubilarse,
                   CuantiaSis.Actual = round(SBU*coef_minimo, 2),
                   TasaSustitucionSis.Actual = round(SBU*coef_
                      minimo/salario_antes_jubilarse, 2),
                   Cuantia.Sis.Cta.Nocional = fondo_nocional,
                   TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_
                      nocional/salario_antes_jubilarse, 2)
                 ))
}
else{
  if(pension_calculada > SBU*coef_maximo){
    tabla <- rbind(tabla,
                   data.table(
                     SalarioAntesDeJubilarse = salario_antes_
                        jubilarse,
                     CuantiaSis.Actual = round(SBU*coef_maximo, 2),
                     TasaSustitucionSis.Actual = round(SBU*coef_
                        maximo/salario_antes_jubilarse, 2),
                     Cuantia.Sis.Cta.Nocional = fondo_nocional,
                     TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_
                        nocional/salario_antes_jubilarse, 2)
                   ))
  }
  else{
    tabla <- rbind(tabla,
                   data.table(
                     SalarioAntesDeJubilarse = salario_antes_
                        jubilarse,
                     CuantiaSis.Actual = round(pension_calculada, 2
                        ),
                     TasaSustitucionSis.Actual = round(pension_
                        calculada/salario_antes_jubilarse, 2),
                     Cuantia.Sis.Cta.Nocional = fondo_nocional,
                     TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_
                        nocional/salario_antes_jubilarse, 2)
```

```
                        ))
        }
      }
      }
      else{
        tabla <- rbind(tabla,
                       data.table(
                         SalarioAntesDeJubilarse = salario_antes_
                            jubilarse,
                         CuantiaSis.Actual = "-",
                         TasaSustitucionSis.Actual = "-",
                         Cuantia.Sis.Cta.Nocional = fondo_nocional,
                         TasaSustitucionSis.Cta.Nocional = round(fondo_
                            nocional/salario_antes_jubilarse, 2)
                       ))
      }
    }
    tab1 <- t(tabla)
    colnames(tab1) <- c(paste("Edad ", aux1), paste("Edad ", aux1 + 1),
       paste("Edad ", aux1 + 2), paste("Edad ", aux1 + 3), paste("Edad ",
        aux1 + 4), paste("Edad ", aux1 + 5), paste("Edad ", aux1 + 6),
       paste("Edad ", aux1 + 7), paste("Edad ", aux1 + 8), paste("Edad ",
        aux1 + 9), paste("Edad ", aux1 + 10), paste("Edad ", aux1 + 11),
       paste("Edad ", aux1 + 12))
    tab_final <- tab1 %>% datatable(
      selection = list(
        mode = "single",
        target = "column"
      ),
      options = list(
        dom = "t"
      ),
      rownames = c("SalarioAntesDeJubilarse" = "Salario antes de
         jubilarse", "CuantiaSis.Actual" = "Pensión sistema actual",
      "TasaSustitucionSis.Actual" = "Tasa Sustitución sistema actual",
      "Cuantia.Sis.Cta.Nocional" = "Cuantía sistema Cuentas Nocional",
      "TasaSustitucionSis.Cta.Nocional" = "Tasa Sustitución sistema
         Cuentas Nocional")
    )
    tab_final
    })
})
```