

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

### **IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE CONSENSO PARA UNA FORMACION DE CUADRICÓPTEROS (Tomo 1)**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN  
ELECTRÓNICA Y AUTOMATIZACIÓN**

**EVELIN MISHHELL CATUCUAMBA CABEZAS**

**DIRECTOR: Dr. PAULO CÉSAR LEICA ARTEAGA**

**Quito, marzo 2022**

## **CERTIFICACIONES**

Yo, Evelin Mishell Catucuamba Cabezas declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.



---

**Evelin Mishell Catucuamba Cabezas**

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Evelin Mishell Catucuamba Cabezas, bajo mi supervisión.

---

**Dr. Paulo Leica**  
**DIRECTOR**

## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el (los) producto(s) resultante(s) del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

EVELIN MISHHELL CATUCUAMBA CABEZAS

Dr. PAULO CESAR LEICA ARTEGA

## DEDICATORIA

“No temas que la gente te hiera, porque si le temes a la vida, jamás vivirás.”  
-Chester Bennigton

A mis padres y mi hermano.

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios y a la Virgen del Quiche por ser quienes guían mi camino día a día, por su amor y gracia infinita y que a lo largo de este tiempo me han permitido llevar a cabo con éxito este proyecto.

Agradezco a mis padres por el apoyo incondicional que me han brindado además de sus enseñanzas y valores que han hecho que sea una persona de bien y además sin ellos todo esto no hubiera sido posible.

A mi hermano Sebastian que ha estado conmigo en las buenas y en las malas y ha sido capaz de motivarme a su manera, pero cada una de esas anécdotas a su lado han sido las mejores ya que nunca me ha permitido rendirme.

A mi director de tesis, el Doc. Paulo Leica, por su guía, compromiso ayuda y dedicación a lo largo del desarrollo de este proyecto.

En general agradezco a todo el personal docente y administrativo de la Escuela Politécnica Nacional, a los profesores que me han impartido su conocimiento necesario para mi desarrollo profesional.

A mis amigos quienes vivieron junto a mí, momentos de inquietud, alegrías y tristezas. En especial agradezco a las personas que me ayudaron a sobrellevar mi último año en la Escuela Politécnica Nacional ya que fue el más duro en mi vida y esas personas que estuvieron alentándome muchas gracias.

Evelin Mishell C.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES .....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA .....	II
DEDICATORIA .....	III
AGRADECIMIENTO .....	IV
1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Objetivo general .....	2
1.2 Objetivos específicos.....	2
1.3 Alcance.....	2
1.4 Marco teórico.....	3
1.4.1 Aspectos generales de los cuadricópteros.....	3
1.4.2 Movimientos básicos del cuadricóptero .....	4
1.4.3 Sistemas de referencia .....	7
1.4.4 Características del controlador PID .....	8
1.4.5 Formación general de UAV's.....	9
1.4.6 Breve descripción de teoría de Grafos.....	10
1.4.7 Control distribuido.....	12
1.4.8 Índices de desempeño.....	15
2 METODOLOGÍA.....	17
2.1 Modelado matemático de los cuadricópteros .....	17
2.1.1 Rotaciones del cuadricóptero .....	17
2.1.2 Modelo cinemático de un cuadricóptero.....	19
2.1.3 Modelado dinámico del cuadricóptero .....	20
2.2 Diseño del controlador para la formación de cuadricópteros.....	27
2.2.1 Formación de cuadricópteros .....	28
2.2.2 Trayectoria de los líderes virtuales.....	29
2.2.3 Matrices representativas para los grafos de la formación .....	31
2.2.4 Algoritmos de consenso .....	32
2.3 Diseño del controlador PID para el modelo individual del cuadricóptero .....	35
2.3.1 Control vertical.....	37
2.3.2 Control de orientación.....	37
2.3.3 Control de movimiento horizontal.....	39
3 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	41
3.1 Conclusiones .....	41
3.2 Recomendaciones .....	42
4 Referencias bibliográficas .....	43

## RESUMEN

El presente trabajo de titulación corresponde al desarrollo del diseño de algoritmos de consenso para una formación de cuadricópteros. El esquema planteado basa su estructura en un sistema de control distribuido, conceptos básicos de teoría de grafos aplicados a la formación de UAV's, una estructura de control tipo PID para el control individual de un cuadricóptero.

El esquema de control se basa en algoritmos de consenso que permiten generar una coordinación descentralizada entre los cuadricópteros y que estos sean capaces de intercambiar y procesar la información sin necesidad de un nodo central, esto logra que el sistema se vuelva resiliente ante la pérdida o fallo de algún cuadricóptero, logrando que la forma de la formación no se vea afectada, mientras que para conseguir un mejor seguimiento de trayectoria de la formación se aplica un controlador PID individual para cada agente, que en conjunto con el controlador distribuido logran responder a cambios tanto en el sistema de referencia en tierra como en el sistema de referencia para los UAV's.

**PALABRAS CLAVE:** Control distribuido, algoritmos de consenso, control descentralizado, formación de UAV's, cuadricópteros, vehículo aéreo no tripulado.

## **ABSTRACT**

The present degree work corresponds to the development of the design of consensus algorithms for a formation of quadcopters. The proposed scheme bases its structure on a distributed control system, basic concepts of graph theory applied to the formation of UAVs, a PID-type control structure for the individual control of a quadcopter.

The control scheme is based on consensus algorithms that allow generating a decentralized coordination between the quadcopters and that they can exchange and processing information without the need for a central node, this makes the system become resilient to loss or failure. of some quadcopter, achieving that the form of the formation is not affected, while to achieve a better follow-up of the trajectory of the formation, an individual PID controller is applied for each agent, which together with the distributed controller manage to respond to changes both in the ground reference system as well as in the reference system for UAVs.

**KEYWORDS:** Distributed control, consensus algorithms, decentralized control, formation of UAVs, quadcopters, unmanned aerial vehicle.



# 1 INTRODUCCIÓN

El control de vehículos aéreos no tripulados (UAV's) es un campo de investigación y desarrollo de gran interés debido principalmente a la utilidad que tienen en aplicaciones que presentan algún tipo de peligro o dificultad para las personas, como lo serían misiones militares de inteligencia, vigilancia, reconocimiento y extinción de incendios, o de igual manera son útiles en campos civiles, entre las tareas existen algunas en las que se requiere más de un UAV para realizarlas, para lo cual se hace necesario el uso de una formación de los mismos que sean capaces de completar la labor, esta formación requiere de un control robusto que permita mantener la forma, ya sea mediante una coordinación centralizada o descentralizada [1].

Un vehículo aéreo no tripulado de cuatro hélices (cuadricóptero) es un sistema de tipo no lineal y generalmente inestable por tanto requiere de un controlador robusto para poder ejercer las tareas que se le designen [2]. En general los controladores que se han diseñado para el control de una formación de cuadricópteros se basan en técnicas centralizadas que se ven limitadas por el área de trabajo, o la disposición en la que se localicen como podría ser el caso en el que se encuentren colineales entre sí, en consecuencia, requieren el uso de sistemas de comunicación fiables incrementando por este motivo los costos de implementación.

Por tanto, el propósito del presente trabajo de titulación es abordar técnicas de coordinación descentralizada de manera que la información no se recepte en un único nodo central y que además se pueda evitar ciertos problemas que se presentan con las formaciones tradicionales, eliminando así la dependencia de formas geométricas y volviendo al sistema más resiliente ante el fallo de un cuadricóptero.

Mediante la implementación de algoritmos de consenso a la formación de cuadricópteros es posible dar solución a las desventajas mencionadas anteriormente y que se presentan con controladores centralizados, ya que la estructura de comunicación de estos algoritmos es descentralizada, por tanto, cada uno de los cuadricópteros conoce cuál es la formación que se debe alcanzar e implementa las leyes de control distribuidas individuales de modo que la acción deseada de un cuadricóptero depende mayoritariamente de las mediciones y estados disponibles del mismo agente y un número pequeño de cuadricópteros vecinos, alcanzando así el objetivo final.

Con tales antecedentes y teniendo el objetivo de lograr un entendimiento idóneo por parte del lector acerca del desempeño de los algoritmos de consenso aplicados a una formación de cuadricópteros, en el presente documento se expone previamente el marco teórico, el

cual contiene argumentos como, la teoría básica para entender el funcionamiento del cuadricóptero, una síntesis del controlador PID, bases para el desarrollo de la formación de cuadricópteros, descripción del controlador distribuido e índices de desempeño que ayuden a determinar la eficacia del controlador diseñado.

Posteriormente, en la metodología se describe de manera detallada el diseño del controlador, partiendo de la obtención del modelo matemático del cuadricóptero, seguido del desarrollo de controladores individuales, luego de lo cual se realiza el diseño del controlador para la formación con el uso de algoritmos de control cooperativo.

## **1.1 Objetivo general**

Diseñar y simular algoritmos de consenso para una formación de cuadricópteros.

## **1.2 Objetivos específicos**

1. Analizar y determinar el modelo dinámico de un vehículo aéreo no tripulado de cuatro hélices o cuadricóptero.
2. Estudiar y determinar un esquema de algoritmos de consenso aplicados a formaciones de cuadricópteros.

## **1.3 Alcance**

1. Se realizará una investigación y estudio bibliográfico sobre el modelo dinámico de un cuadricóptero para obtener sus modelos matemáticos respectivamente.
2. Se obtendrán el modelo dinámico de un cuadricóptero.
3. Se estudiará un esquema de control tipo PID para mejorar el desempeño de la dinámica individual de cada cuadricóptero.
4. Se diseñará un controlador PID como lanzo interno para mejorar el desempeño de la parte dinámica para cada cuadricóptero.
5. Se realizará una revisión bibliográfica de algoritmos de consenso para sistemas con dinámica de doble integrador como lo son los cuadricópteros.
6. Se analizará un algoritmo de consenso aplicados a formaciones de vehículos aéreos no tripulados específicamente cuadricópteros.

## 1.4 Marco teórico

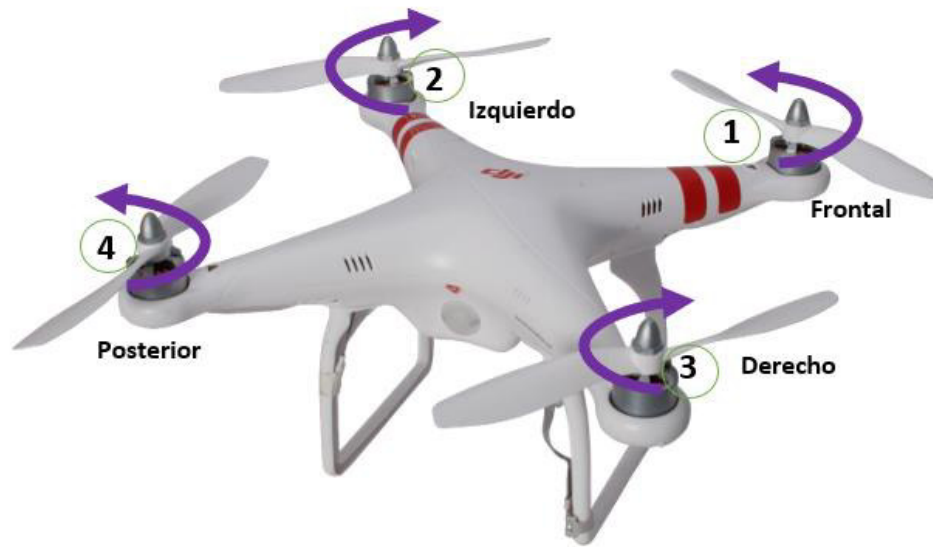
En esta sección se expone la teoría general que sirve como base para sustentar el trabajo de titulación, con los respectivos argumentos que permitan validar la resolución de la problemática planteada.

### 1.4.1 Aspectos generales de los cuadricópteros

Un cuadricóptero es un vehículo aéreo no tripulado (UAV) o dron, que consta de cuatro hélices, este tiene la posibilidad de ser manejado a distancia, ser preprogramado para realizar vuelos de forma autónoma o en ciertos casos para llevar cargas. Tiene una gran variedad de aplicaciones, pero sus áreas de aplicación generales son: para usos militares, monitoreo y gestión de tráfico, transporte de carga y en la industria se usan para aplicaciones donde existe cierto grado de riesgo para el operador encargado de la tarea[3].

Este sistema cuenta con 6 grados de libertad, tres posiciones lineales es decir que puede moverse alrededor de los ejes  $X, Y, Z$  y tres posiciones angulares, es decir que se puede girar el cuerpo de la aeronave produciendo movimientos conocidos como: roll ( $\phi$ ), pitch ( $\theta$ ) y yaw ( $\psi$ ).

Los cuatro hélices del cuadricóptero constan de rotores que están posicionados hacia arriba colocados a  $90^\circ$  uno del otro, manteniendo la misma distancia al centro de masa y de acuerdo como se identifiquen las posiciones de las hélices presentan diferentes configuraciones las más usuales son "X"(equis) y "+"(plus) [4]. Se define para el caso del presente trabajo la configuración "+" (plus) como se muestra en la Figura 1.1, aquí los rotores se identifican como frontal (1), izquierdo (2), derecho (3), y posterior (4).



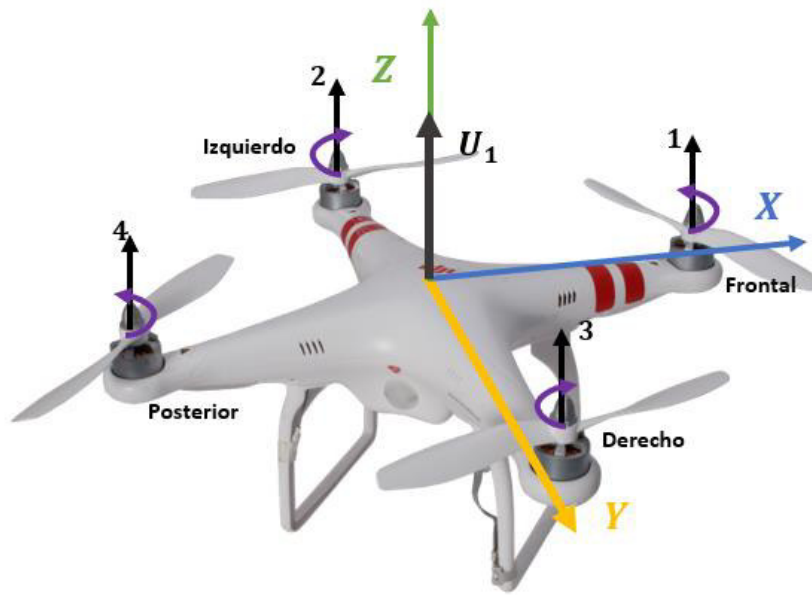
**Figura 1.1.** Configuración "plus" para el cuadricóptero

#### **1.4.2 Movimientos básicos del cuadricóptero**

Los movimientos del cuadricóptero se controlan mediante la modificación de las velocidades angulares de los rotores y se logra estabilizarlo haciendo que cada par de hélices giren en dirección contraria. A continuación, se presenta los movimientos a controlar en el UAV[4].

- Empuje Vertical

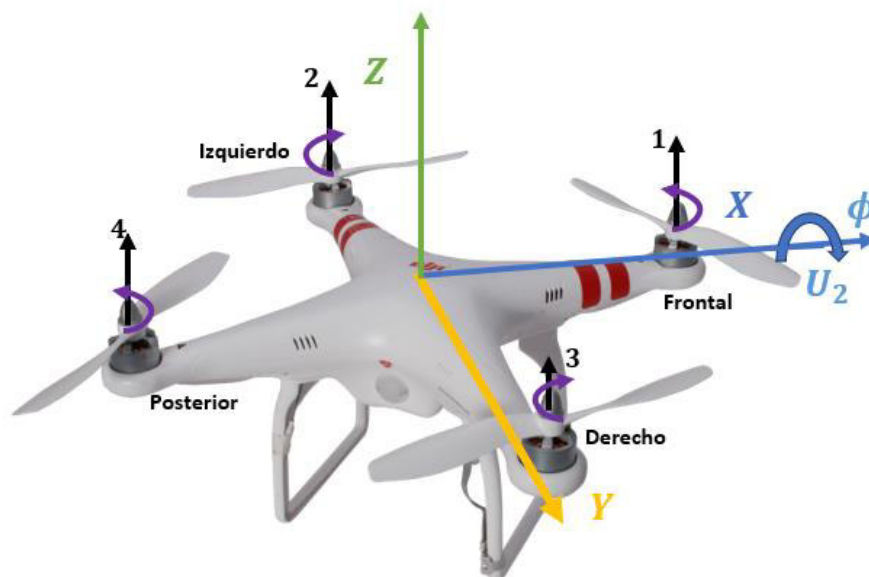
Este movimiento se puede observar en la Figura 1.2 y se denota como  $U_1$  cuando la velocidad de los cuatro rotores aumenta o disminuye en el mismo porcentaje, logrando así que el cuadricóptero se eleve o descienda dependiendo de la velocidad de los rotores.



**Figura 1.2** Empuje vertical

- Movimiento Roll

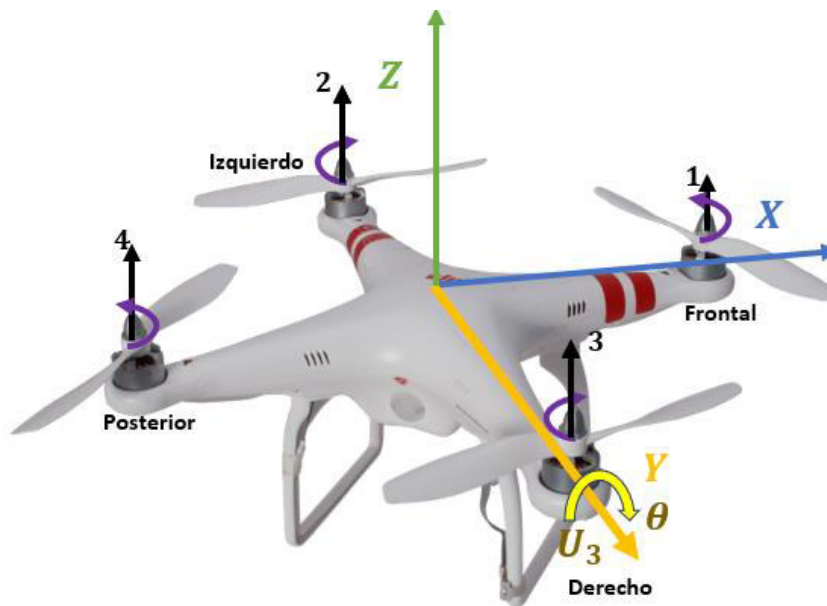
Este torque angular denominado  $U_2$  y se produce con la variación idéntica de la velocidad angular de los rotores izquierdo (3) y derecho (2), ya sea que uno aumente y el otro disminuya su velocidad o viceversa, siempre y cuando el torque global permanezca nulo y el empuje mantenga su valor. Por tanto, el movimiento del cuadricóptero se da alrededor del eje "X" como se observa en la Figura 1.3, en donde el brazo del rotor derecho (2) se eleva y el brazo del rotor izquierdo (3) desciende.



**Figura 1.3** Movimiento Roll

- Movimiento Pitch

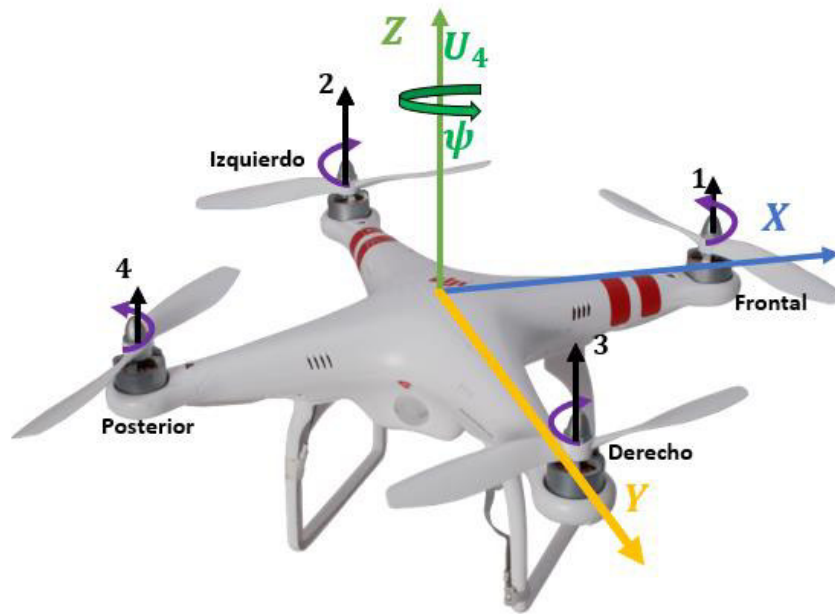
Este torque angular denominado  $U_3$ , este movimiento se produce con la variación idéntica de la velocidad angular de los rotores frontal (1) y posterior (4), ya sea que uno aumente y el otro disminuya su velocidad o viceversa, siempre y cuando el torque global permanezca nulo y el empuje mantenga su valor. Por tanto, el movimiento del cuadricóptero se da alrededor del eje "Y" como se observa en la Figura 1.4, en donde el brazo del rotor posterior (4) se eleva y el brazo del rotor frontal (1) desciende.



**Figura 1.4** Movimiento Pitch

- Movimiento Yaw

Este torque angular denominado  $U_4$  se puede observar en la Figura 1.5, este movimiento se produce con la variación idéntica de la velocidad angular del par de rotores frontal y posterior con los pares izquierdo y derecho, ya sea que unos aumenten y los otros disminuyan su velocidad o viceversa, pero manteniendo constante el valor del empuje. Por tanto, el movimiento del cuadricóptero se da alrededor del eje "Z" como se observa en la Figura 1.5, en donde el brazo izquierdo (3) y el brazo derecho (2) aumentan su velocidad y el brazo posterior (4) y el brazo frontal (1) disminuyen su velocidad, causando que el cuadricóptero gire en sentido antihorario.



**Figura 1.5** Movimiento Yaw

### 1.4.3 Sistemas de referencia

Para poder modelar el sistema matemático que rige al modelo dinámico del cuadricóptero se requiere definir los sistemas de referencia con los que se trabaja. Al considerar al cuadricóptero como un solo cuerpo rígido se establece las referencias como se muestra en la Figura 1.6, en donde se tiene un sistema inercial referenciando su origen a tierra dado por:

$$\xi = \{x, y, z\}, \quad (1.1)$$

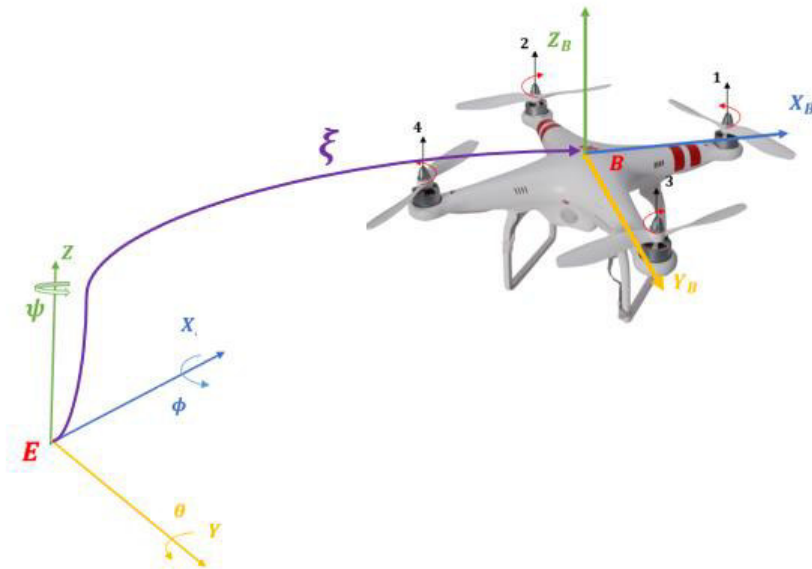
y su orientación se define al mismo sistema inercial por:

$$\eta = [\phi \ \theta \ \psi], \quad (1.2)$$

de la misma manera se cuenta con un sistema de coordenadas que referencian su origen al centro de masa del UAV denotado como

$$B = \{x_B, y_B, z_B\}. \quad (1.3)$$

Estas coordenadas se disponen de tal manera que  $x_B$  se direcciona hacia el norte,  $y_B$  es positiva hacia la derecha del plano horizontal y  $z_B$  es ortogonal al plano  $(x_B, y_B)$  [4].

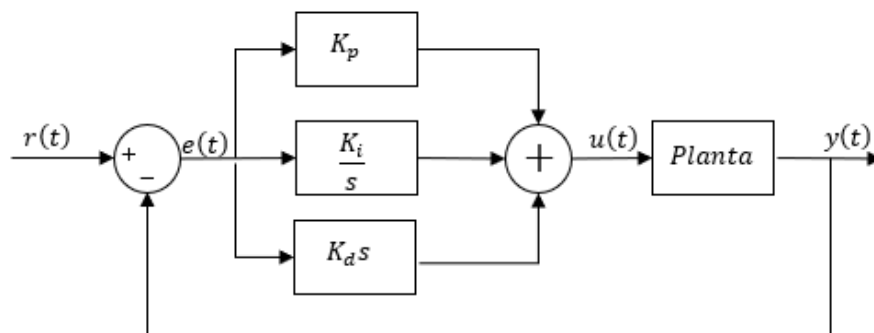


**Figura 1.6.** Sistemas de referencia

#### 1.4.4 Características del controlador PID

El controlador PID (Proporcional Integral Derivativo) es un mecanismo que nos permite generar una acción correctora, mediante el cálculo del error entre un valor medio y el valor que se quiere obtener o la referencia [5].

Este controlador se usa en un cuadricóptero con el fin de poder estabilizarse, mediante el aumento o reducción de la velocidad de los rotores. Para el diseño del controlador PID se hace uso de una estructura paralela como se muestra en la Figura 1.7.



**Figura 1.7.** Arquitectura paralela para el controlador PID

De la figura anterior se tiene que  $u(t)$  es la salida del controlador y el que actúa sobre la planta,  $e(t)$  es el error producto de la resta entre la referencia  $r(t)$  y la salida  $y(t)$ , las



constantes  $K_p, K_i, K_d$  son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente [5].

La ganancia proporcional es la que se encarga de determinar la solidez con la que trabajara el controlador para corregir el error y lograr la estabilidad del cuadricóptero, la ganancia integral se encarga de indicar la velocidad con la que la acción proporcional se repite, para lograr que el cuadricóptero sea capaz de mantener su estado frente a acciones externas, por último la ganancia derivativa se encarga de reducir los sobreimpulsos que se pueden presentar debido a la ganancia proporcional.

A continuación, se presenta la ecuación característica general de un controlador PID:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (1.4)$$

Donde  $u(t)$  es el controlador que actúa sobre el sistema que se desea controlar,  $e(t)$  se define como la diferencia entre la referencia y la salida del sistema así:  $e(t) = r(t) - y(t)$ .

#### 1.4.5 Formación general de UAV's

La formación de múltiples agentes autónomos móviles es un área que representa un gran interés debido a las extensas aplicaciones en las que estos se desarrollan, entre estas se encuentran, sistemas de transporte avanzado, redes de sensores distribuidos, operaciones de búsqueda y rescate, entre otros. Para el caso de nuestro interés la formación se compone de vehículos aéreos no tripulados que se mueven como un grupo de agentes en 2 o 3 espacios reales [6].

Esta formación de cuadricópteros se la denomina rígida ya que se mantiene la distancia entre los agentes, esto con la intención de poder manejar la formación como un solo cuerpo. Los principales objetivos de la formación son, poder mantener la forma predeterminada y poder crear ordenes que sean ejecutados individualmente por cada robot, para poder llegar a cumplir la meta global deseada.

Para poder controlar la formación existen distintas estrategias como lo son: el control del vuelo basado en el comportamiento, control de vuelo mediante la estructura líder-seguidor, y el control de vuelo basado en una estructura virtual. que se presenta es dirigida, es decir, existe una relación líder seguidor [7].

#### **1.4.5.1 Formación líder-seguidor**

Su estructura depende de una formación preestablecida en donde existe un solo agente denominado líder, mientras que el resto se denominan seguidores. Los seguidores deben rastrear la información que envía el líder, sin embargo, esta comunicación se afecta por las interferencias existentes en el entorno de desarrollo, por tanto, requiere de métodos de control robustos que sean capaces de evitar estas amenazas [4].

#### **1.4.5.2 Formación basada en el comportamiento**

Esta estructura se basa en el comportamiento colectivo de los animales, aquí se busca determinar varios comportamientos que se desean para cada agente, y además se determina que cada acción de control obtenga un peso promedio para cada comportamiento. Sin embargo, este método presenta falta de rigidez, provocando que la formación no sea la indicada [8].

#### **1.4.5.3 Formación basada en una estructura Virtual**

Esta estructura es similar a la formación líder-seguidor con la diferencia que el líder de esta estructura se reemplaza con uno virtual [8], logrando así, evitar las interferencias presentes en la estructura con un líder físico.

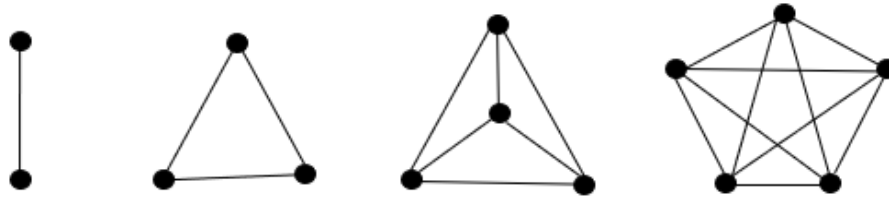
Esta estructura presenta dos variantes, una en la que se cuenta con una coordinación centralizada entre los seguidores y el líder, la cual requiere de una alta calidad de comunicación, además de complejos cálculos matemáticos, y una coordinación descentralizada en donde la comunicación puede ser necesidad entre los agentes sin la necesidad de un nodo central que recoja toda esta información, por tanto, se propone aplicar técnicas de control distribuido tal y como se muestra en este documento.

#### **1.4.6 Breve descripción de teoría de Grafos**

Es importante reconocer algunas definiciones de teoría de grafos para la estructura de control propuesta que sigue el modelo de formación basado en una estructura virtual descentralizada.

Un grafo denominado  $G$  es un par ordenado  $G = (V, E)$  que consta de vértices  $V$  y aristas  $E$ , los vértices son un conjunto finito de vértices  $V \neq \emptyset$  descritos como  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y las aristas  $E \subseteq V^2$  son un conjunto de subconjuntos de dos elementos de  $V$ , donde un elemento  $e = \{v_i, v_j\}$  de  $E$  tiene vértices  $v_i$  y  $v_j$  en sus extremos. La relación entre los vértices y las aristas se interpreta matemáticamente por  $e = v_i v_j$  [7].

En un grafo se definen algunos términos como orden del grafo  $|V|$  que es la cantidad de vértices que lo conforman, grado de un vértice que se refiere al número de aristas incidentes a él y la ponderación del grafo es asociar un valor numérico a cada arista para poder representar una característica específica. En la Figura 1.8 se puede observar distintos tipos de grafos, en donde los puntos representan los vértices y las líneas forman parte de las aristas.



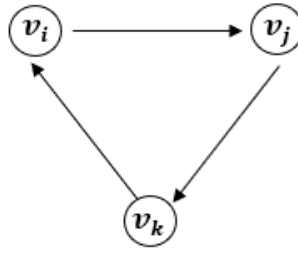
**Figura 1.8.** Ejemplos de Grafos

Existen grafos no dirigidos como se observa en la Figura 1.8 en donde las aristas no tienen dirección o sentido hacia los vértices que las unen, mientras que existen otros que son grafos dirigidos y se representan mediante flechas indicando la dirección en la que se relacionan. Para el presente trabajo se hace uso de grafos dirigidos y no dirigidos, además se usa matrices que nos ayudan a describir el comportamiento del grafo, estos se los describe a continuación.

### 1.4.6.1 Grafo Dirigido

Un grafo dirigido o dígrafo es un par  $G = (V, E)$  que consta de un conjunto infinito  $V$  y un conjunto  $E$  de pares ordenados  $e = \{v_i, v_j\}$ , donde  $v_i = v_j$  son elementos de  $V$ . En un dígrafo se aplica el término arco para referirse a las aristas en este caso dirigidas, esto lo distingue entre un grafo dirigido y uno no dirigido [7].

Asignada la arista  $(v_i, v_j)$ ,  $v_i$  simboliza el vértice inicial mientras que  $v_j$  es el vértice final, de esta manera se representa la relación que existe de un vértice a otro en ese sentido, sin embargo, no quiere decir que la relación sea recíproca [9], esta relación se puede apreciar en la Figura 1.9, mientras que para los grafos no dirigidos existe una relación recíproca entre vértices.



**Figura 1.9.** Ejemplo de un grafo dirigido

### 1.4.6.2 Matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia  $A$  es una representación común para un dígrafo dirigido  $G = (V, E)$ , sus dimensiones son  $n \times n$ , es decir es una matriz cuadrada, en la cual las entradas  $A[a_{ij}]$  cuentan el número de arcos que van del vértice  $i$  al vértice  $j$  donde [9]:

$$a_{ij} = \begin{cases} > 0 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Los valores en la matriz dependerán de la ponderación de las aristas o arcos, siendo 1 el valor de  $a_{ij}$  cuando el grafo este sin ponderación, caso contrario este valor dependerá del peso de la arista correspondiente. Una de las características de esta matriz es que si la arista o arco no conecta consigo mismo, los elementos de la diagonal principal serán cero, además la matriz en un grafo no dirigido será simétrica es decir  $A = A^T$ .

### 1.4.6.3 Matriz Laplaciana

Esta matriz es aplicada principalmente en la teoría espectral de grafos  $\mathcal{L}(G)$ , y es una representación matricial que procede de dos matrices básicas en esta teoría, como lo son la matriz de grado y la matriz de adyacencia. Por tanto, la matriz Laplaciana  $\mathcal{L}(G) = D(G) - A(G)$ , además de la matriz de adyacencia  $A(u, v)$  también se constituye de la matriz de grado  $D(G)$  cuyos componentes representan una matriz diagonal de dimensiones  $n \times n$  siendo  $D(i, i) = \sum_{j \in V} A(a_{ij})$  [10].

### 1.4.7 Control distribuido

El sistema de control distribuido se deriva de la necesidad creada por las desventajas que presentan los sistemas de control centralizados. Puesto que no es conveniente aplicar un

sistema de control de primera generación en situaciones donde existen, altas probabilidades de daño al sistema, la estructura de comunicación sea ruta larga o donde el sistema posea un tiempo de respuesta crítico producto del retraso de comunicación entre sensores, procesador central y los elementos de control finales, ya que, al presentarse un solo punto de falla en el sistema central puede ocasionar que todo el procedimiento no realice la función prevista [11].

Es así que el control distribuido es denominado como un sistema en donde existe una distribución de las capacidades de control, siendo factible aplicarlo en rutas extensas de comunicación, ya que, cuenta con un gran número de controladores locales, posicionados en varias secciones del área de control del sistema, garantizando de esta manera que el control se vuelva seguro, fiable y rentable [12].

#### **1.4.7.1 Control distribuido en formación de vehículos autónomos**

Aplicar el control distribuido a la formación de múltiples vehículos autónomos y que no se pueden realizar individualmente, se puede observar ciertas características que lo hacen mucho más eficiente y práctico. Algunas de estas características son: cada robot actúa de manera independiente y toma decisiones de acuerdo con sus propios estados, se disminuye los retardos en la comunicación, se puede escalar el número de componentes al agregar un nuevo agente ya que no es necesario modificar toda la estructura [12].

#### **1.4.7.2 Algoritmo de consenso en control cooperativo**

Para que un sistema de múltiples agentes pueda tener determinados comportamientos es necesario llegar a un consenso, es decir los agentes deben ser capaces de llegar a un acuerdo referente a sus estados. Para poder llegar a este consenso se hace uso de algoritmos.

Siendo así que, en un sistema cooperativo, los algoritmos de consenso son capaces de proveer leyes de control de manera que los estados de cada uno de los agentes converjan en un resultado común. En este método se asume que existe una interacción local entre los agentes con determinados vecinos, provocando que la información de cada agente individual dependa de la información de sus vecinos [12].

Los algoritmos de consenso pueden variar dependiendo del tipo de dinámica que presente el sistema, estos pueden ser, sistemas con dinámica de un solo integrador y sistemas con dinámica de doble integrador.

#### 1.4.7.2.1 Algoritmos de consenso para sistemas con dinámica de un solo integrador

Dependiendo de la dinámica de la formación, esta se puede ver afectada en el tiempo. El algoritmo de consenso de tiempo continuo se expresa como [13]:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)[x_i(t) - x_j(t)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

Donde  $a_{ij}(t)$  es la entrada  $(i, j)$  de la matriz de adyacencia  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  asociada con el grafo  $G_n$  en el tiempo  $t$ , mientras que  $x_i(t)$  y  $x_j(t)$  representan los estados de información proporcionados por los agentes vecinos de los agentes  $i$  y  $j$ . Si se presentara el caso donde  $a_{ij} = 0$ , quiere decir que el agente  $i$  no logra obtener información del agente  $j$ .

Si se conoce que existe una comunicación fija y debido a que la ecuación (1.5) no es capaz de trabajar con ganancias  $a_{ij} = 0$ , se dice que para poder obtener un valor asintótico común es necesaria la combinación lineal de los estados de información, garantizando que ese valor común es resultado de una combinación convexa de la información inicial de los estados [13]. Por lo que el algoritmo de consenso para dinámicas de un solo integrador se puede expresar de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = -\mathcal{L}(t)x(t) \quad (1.6)$$

De la ecuación anterior se tiene que  $x(t) = [x_1, \dots, x_n]^T$  representa el estado de información, mientras que  $\mathcal{L}(t) = [l_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz Laplaciana no simétrica que está asociada con el grafo  $G_n$ . Por tanto, el consenso se puede llevar a cabo por el grupo de agentes si, para todos  $x_i(0)$  y todos  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0$ , como  $t \rightarrow \infty$ .

#### 1.4.7.2.2 Algoritmos de consenso para sistemas con dinámica de doble integrador

Con la dinámica de doble integrador se pretende obtener más atributos del fenómeno físico, como podrían ser, que la convergencia de los estados de información sean un valor estable de velocidad o posición de la formación y no solamente una única información permanente [12]. Considerando un grupo de agentes  $n$ , la dinámica de doble integrador está dada por:

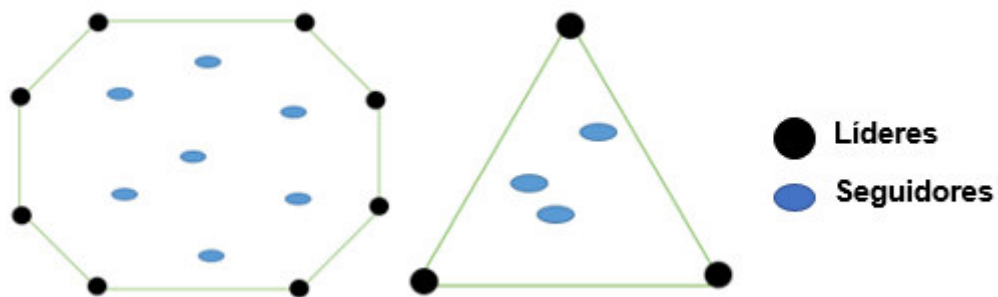
$$\dot{x}_i(t) = v_i(t), \quad \dot{v}_i(t) = u_i(t) \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

donde la posición, velocidad y entrada asociada con el agente  $i$  la representan  $x_i(t)$ ,  $v_i(t)$  y  $u_i(t)$  respectivamente, en consecuencia, algoritmo de consenso queda expresado por:

$$\ddot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)[(x_i - x_j) + \gamma(\dot{x}_i - \dot{x}_j)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

donde  $\gamma$  es una constante positiva que denota la fuerza de acoplamiento de las derivadas de los estados de información, mientras que  $x_i$  y  $\dot{x}_i$  es la información transmitida entre los agentes de la formación.

Dentro de la dinámica de doble integrador se tiene dos variantes: múltiples líderes estacionarios y múltiples líderes dinámicos, en cualquier caso, el objetivo es garantizar que todos los agentes se muevan dentro de la envoltura convexa que forman los líderes como se muestra en la Figura 1.10.



**Figura 1.10** Envoltura convexa formada por un conjunto de líderes

#### 1.4.8 Índices de desempeño

El análisis cuantitativo que se realice al desempeño del sistema nos permite medir el rendimiento que se tiene con la implementación del controlador aplicado. Es así como los valores que arrojan los determinados índices de desempeño que existen ayudan a evaluar la calidad de la respuesta del sistema que se está controlando, respecto a cambios en la referencia. Para determinar el rendimiento del controlador diseñado en el presente proyecto se aplican los índices de desempeño ISE e IAE.

##### 1.4.8.1 Integral del Error Cuadrático (ISE) [14]

El índice de la integral del error cuadrático determina el desempeño del controlador en función del error que se genera de la diferencia entre la variable controlada y el valor designado como referencia. El ISE tiene el criterio de tener mayor énfasis en los errores de mayor magnitud que se presenten en el transitorio de la respuesta, mientras que se encarga de discriminar aquellos valores cuya magnitud sea de menor importancia, al momento de alcanzar el valor final en la respuesta. El índice representa la sumatoria de los errores que se generan a través del tiempo y se lo puede representar mediante la ecuación siguiente:

$$ISE = \sum_{t=0}^{\infty} (e)^2 \quad (1.9)$$

Donde  $e$  es el error de posición y se representa por:

$$e = x_r - x_a \quad (1.10)$$

Siendo  $x_r$  la referencia de posición para cada dron individual y  $x_a$  la posición actual del cuadricóptero.

#### **1.4.8.2 Integral del Error Absoluto (IAE) [15]**

El índice de la integral del error absoluto se maneja bajo el criterio de ser más sensible a los errores que se presentan al final de la respuesta, es decir los errores más pequeños. Este índice está definido por la siguiente ecuación:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e| dt , \quad (1.11)$$

donde  $e$  se define como la ecuación (1.10).



## 2 METODOLOGÍA

Para el presente trabajo de titulación se hace uso de la metodología de investigación cuantitativa de tipo descriptiva. Se usa un método deductivo ya que en base a la observación de las respuestas que se obtiene de diferentes esquemas de control para la formación de UAV's, es posible plantear para la formación de cuadricópteros una metodología de control basada en algoritmos de consenso, cuyo fundamento se basa en el análisis del desempeño del controlador mediante una serie de pruebas simuladas.

La información recopilada para el desarrollo de este trabajo es producto de fuentes de información basadas en libros, revistas técnicas, artículos académicos, trabajos de titulación previos y resúmenes científicos.

Es así como en el presente capítulo se detalla las herramientas utilizadas para poder dar solución a la problemática expuesta, cuyo proceso es sistemático y fundamenta sus bases en el marco teórico que se presentó en el capítulo anterior.

### 2.1 Modelado matemático de los cuadricópteros

Para poder determinar el modelo matemático del cuadricóptero se requiere conocer de algunos parámetros que permitan describir los movimientos que se espera obtener mediante el controlador aplicado al cuadricóptero, para posteriormente poder obtener el modelo dinámico, el cual es útil para el diseño de los controladores.

#### 2.1.1 Rotaciones del cuadricóptero

Se requiere de la posición y orientación del cuadricóptero con respecto a un sistema de coordenadas de referencia inercial para poder obtener el modelo dinámico respectivo. Por tanto, se designa a la posición del cuadricóptero ( $\xi$ ) en el sistema inercial definida en la ecuación (1.1) y a su orientación ( $\eta$ ) definida por la ecuación (1.2) tomando como referencia la Figura 1.6 del capítulo 1 [4].

El desarrollo de la orientación del cuerpo rígido se asume mediante la definición de los ángulos de Euler para la rotación del cuerpo y los ángulos de navegación de Tait-Bryan que nos sirve para indicar el posicionamiento del cuadricóptero, el cual cuenta de tres ejes diferentes para su referencia, por tanto, se presentan tres ángulos que realizan rotaciones sucesivas conocidos como guiñada ( $\phi$ ), cabeceo ( $\theta$ ) y balanceo ( $\psi$ ).

- Rotación de balanceo: es el primer giro y se realiza alrededor del eje X, dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = R_b(x, \phi) \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

cuya matriz de rotación es:

$$R_b(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

- Rotación de cabeceo: es el segundo giro y realiza alrededor del eje Y, dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = R_c(y, \theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

cuya matriz de rotación es:

$$R_c(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- Rotación de guiñada: es el tercer giro y realiza alrededor del eje Z, cuyo movimiento lo describe la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_g(z, \psi) \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

cuya matriz de rotación está dada por:

$$R_g(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Finalmente, para poder rotar el vector  $\xi = [x, y, z]$  al sistema de referencia fijo al cuadricóptero o viceversa, se tiene la matriz de rotación completa  $R$ , la cual, al ser una matriz ortogonal, su inversa es la matriz transpuesta  $R^{-1} = R^T$  [4].

$$R = R_b(x, \phi)R_c(y, \theta)R_g(z, \psi) \quad (2.7)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\phi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\psi\sin\theta\cos\phi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Modelo cinemático de un cuadricóptero

Una vez definidas las rotaciones que puede presentar el cuadricóptero se obtiene las referencias del modelo cinemático del cuadricóptero ya que existen características del modelo cinemático útiles para llegar al modelamiento dinámico final del cuadricóptero.

Se parte definiendo al movimiento de traslación del cuadricóptero como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde  $V_T = [V_x, V_y, V_z]$  son las velocidades tomando en cuenta el sistema de referencia del cuadricóptero tal y como se define en la ecuación (1.3), y por tanto, estas representan a las respectivas acciones de control; y  $\dot{\xi} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$  representa a las velocidades del cuadricóptero en los ejes  $x, y, z$  correspondientemente [4]. Para lograr obtener las velocidades que corresponden al sistema de referencia inercial se hace uso de la matriz de rotación  $R$ , obteniendo lo siguiente:

$$\dot{\xi} = RV_T \quad (2.10)$$

El movimiento rotacional del cuadricóptero presenta componentes de velocidades angulares correspondientes a los tres ejes como:

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

donde  $p, q, r$  son velocidades angulares de guiñada ( $\phi$ ), cabeceo ( $\theta$ ) y balaceo ( $\psi$ ) sobre el eje de referencia del cuadricóptero.

Es necesario tener la capacidad de relacionar las velocidades angulares del cuadricóptero  $\omega$  y el cambio que sufren en el tiempo los ángulos  $\dot{\eta} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$  con relación al sistema de

referencia en tierra, se debe considerar las rotaciones de balanceo ( $\phi$ ), cabeceo ( $\theta$ ) y guiñada ( $\psi$ ) sujetas a diferentes transformaciones, dando como resultado lo siguiente:

$$\omega = W_{\eta} \dot{\eta} \quad (2.12)$$

De la ecuación (2.12) se define  $W_{\eta}$  como [4]:

$$W_{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{sen}\phi \text{ cos}\theta \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi \text{ cos}\theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

El modelo cinemático para un cuadricóptero se presenta de la siguiente forma [4]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = W_{\eta}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}\phi \tan\theta & \text{cos}\phi \tan\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & \frac{\text{sen}\phi}{\text{cos}\theta} & \frac{\text{cos}\phi}{\text{cos}\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Modelado dinámico del cuadricóptero

Para el modelado dinámico se asumen las siguientes consideraciones [16]:

- La inercia de los rotores se considera despreciables respecto a sus ejes principales
- La trayectoria de un dron es muy pequeña comparada con la de la tierra, por lo tanto, se desprecian las fuerzas de Coriolis y centrifuga.
- Las variaciones de altura que va a experimentar el dron son despreciables comparadas con el radio de la tierra, por lo tanto, la aceleración de la gravedad es constante.
- Se identifica al cuadricóptero como un cuerpo solido en el espacio, por tanto, tendrá 6 grados de libertad.
- Se desprecia el efecto de las hélices.

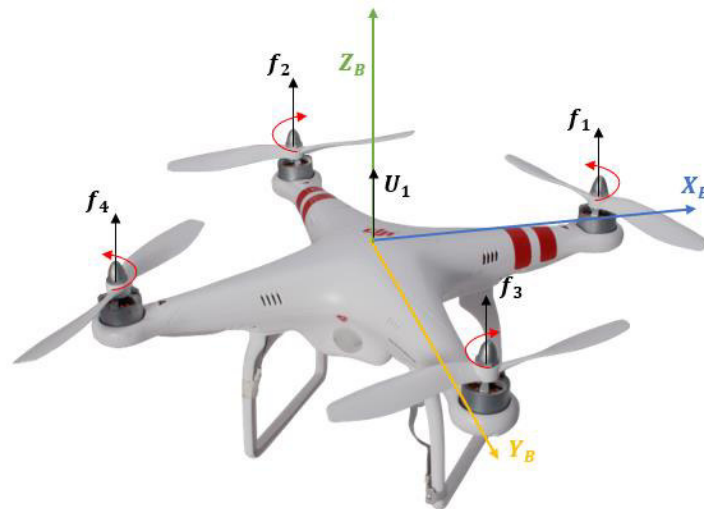
Al tener 6 grados de libertad se puede aplicar la formulación matemática Newton-Euler. Esta formulación se fundamenta con la física de Newton en el equilibrio del sumatorio de fuerzas y momentos, y mediante los ángulos de Euler relacionamos los sistemas inerciales.

Aplicando la segunda ley de Newton relativa a la cantidad de movimiento la fuerza que actúa sobre el cuadricóptero es [16]:

$$F = m \frac{d}{dt} V_B \quad (2.15)$$

Donde  $F$  es la fuerza que actúa sobre el dron,  $m$  la masa del cuadricóptero,  $V_B$  la velocidad de traslación en el punto de referencia propio del dron.

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores en la Figura 2.1 se muestran las fuerzas  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  producidas por cada uno de los rotores que constituyen el cuadricóptero, las cuales producen los movimientos de: “balanceo  $(\phi)$ ”, “cabeceo  $(\theta)$ ” y “guiñada  $(\psi)$ ”. El cuadricóptero considerado en el espacio está sujeto a una fuerza principal producida por el empuje y tres momentos angulares producidos por el empuje de cada uno de los rotores. El par del movimiento “balanceo  $(\phi)$ ” es producto del desequilibrio entre las fuerzas  $f_2$  y  $f_3$ , para el movimiento “cabeceo  $(\theta)$ ”, el desequilibrio se da entre las fuerzas  $f_1$  y  $f_4$ . Mientras que el movimiento “guiñada  $(\psi)$ ” se produce por desequilibrio entre pares horarios contra pares antihorarios, siendo estos proporcionales a las fuerzas de empuje [17].



**Figura 2.1** Fuerzas que actúan sobre el cuadricóptero

Debido al tamaño de la aeronave, las únicas fuerzas externas a tomarse en cuenta se componen del empuje de las hélices y la fuerza gravitacional, mientras que la fuerza centrífuga y los efectos o pares aerodinámicos se estiman como despreciables. En el empuje de las hélices se toma en cuenta a cada rotor  $i$ , con su respectiva velocidad angular  $\Omega_i$  que generan una fuerza relacionada al marco inercial del cuadricóptero  $f_i = [0 \ 0 \ \Omega_i^2]$ .

Finalmente, el empuje total  $T_B$ , para el desplazamiento perpendicular al plano de los rotores es igual a:

$$T_B = [0 \ 0 \ U_1] , \quad (2.16)$$

siendo  $U_1$  la suma de las cuatro fuerzas que ejercen en los rotores de las hélices, así [18]:

$$U_1 = \sum_{i=0}^4 f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \quad f_i = b\Omega_i^2 \quad (2.17)$$

$$U_1 = b \sum_{i=0}^4 \Omega_i^2 \quad (2.18)$$

Donde  $b$  es el coeficiente medido en  $[Ns^2]$  que representa el empuje que ejercen las hélices. Por tanto, la fuerza total  $F_T$  que se ejerce sobre el cuadricóptero está dada por:

$$F_T = -R^T F_g + T_B , \quad (2.19)$$

donde  $T_B$  esta dada por la ecuación (2.16) y la fuerza gravitacional  $F_g$  se define por:

$$F_g = mg[0 \ 0 \ 1]^T \quad (2.20)$$

Reemplazando la ecuación (2.19) en la ecuación (2.15) se obtiene el factor de traslación referido al sistema de referencia del cuerpo como:

$$m \dot{V}_B = -R^T F_g + T_B \quad (2.21)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.10), se obtiene la fuerza con referencia al sistema inercial así [4]:

$$R(m \dot{V}_B) = R(-R^T F_g + T_B) \quad (2.22)$$

$$m \ddot{\xi} = -F_g + RT_B \quad (2.23)$$

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + R(\psi, \theta, \phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Finalmente se obtiene el modelo dinámico de traslación:

$$\ddot{\xi} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{U_1}{m} \begin{bmatrix} \cos\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \cos\phi - \cos\psi \operatorname{sen}\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Para el componente de movimiento rotacional, se desprecia los efectos giroscópicos, se asume que la masa central del cuadricóptero corresponde al origen del sistema coordenadas, además se considera una estructura simétrica del cuadricóptero con respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , por tanto, su matriz inercial es diagonal [4]:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

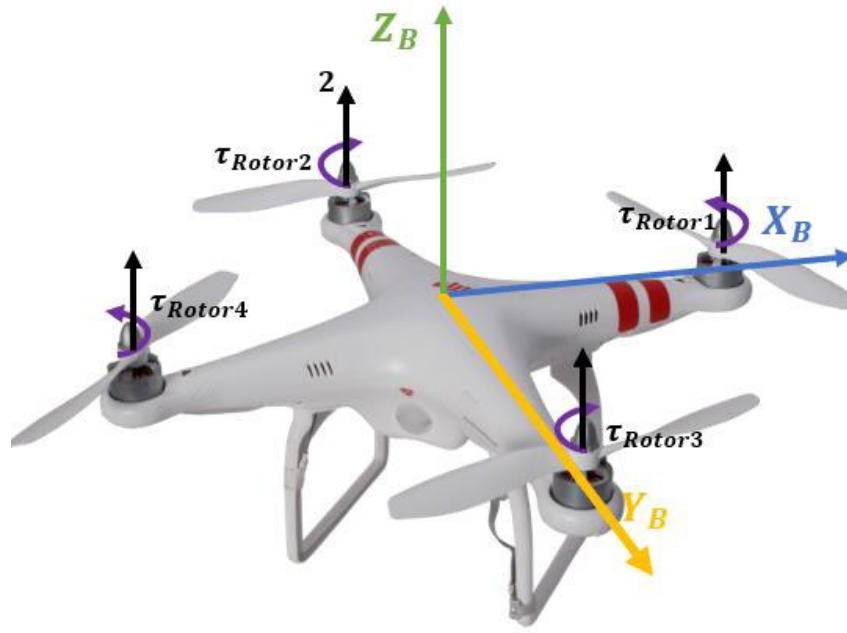
De acuerdo con la segunda ley de Newton, el momento dinámico angular corresponde a [19]:

$$M = \frac{d}{dt}(I\omega) , \quad (2.27)$$

donde  $I$  es la inercia de un cuerpo y  $\omega$  se define como la velocidad angular del mismo.

Al expresar la ecuación (2.27) en el sistema de referencia del cuadricóptero es necesario agregar el efecto Coriolis, ya que se trata de un sistema de referencia no inercial, así [19]:

$$M = \frac{d}{dt}(I\omega) + \omega \times (I\omega) \quad (2.28)$$



**Figura 2.2** Esquema de los momentos del cuadricóptero

El momento que se aplica al cuadricóptero a lo largo de un eje se representa como la diferencia entre el momento generado por cada rotor en el otro eje, siendo así que obtener el movimiento de guiñada ( $\psi$ ) se debe aumentar el momento de los rotores frontal  $\tau_{Rotor1}$  y posterior  $\tau_{Rotor4}$ , mientras que se debe disminuir el torque de los rotores izquierdo  $\tau_{Rotor2}$  y derecho  $\tau_{Rotor3}$ , por tanto, la velocidad total para el movimiento de guiñada  $\Omega_g$  se define como  $\Omega_g = \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$ , para obtener el movimiento de balanceo ( $\phi$ ) se obtiene de la diferencia entre el  $\tau_{Rotor2} - \tau_{Rotor3}$  y para el movimiento de cabeceo ( $\theta$ ) se obtiene de la diferencia entre el  $\tau_{Rotor4} - \tau_{Rotor1}$ . Dichos torques se pueden observar en la Figura 2.2 y los movimientos descritos anteriormente se los puede representar matemáticamente como, el momento total del sistema  $M$  que se define por los torques rotacionales producidos por las hélices, así [8]:

$$M = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lb(\Omega_2^2 - \Omega_3^2) \\ lb(\Omega_4^2 - \Omega_1^2) \\ h(\Omega_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Donde  $l$  es la longitud del brazo en metros del cuadricóptero hasta el centro de masa,  $b$  es el coeficiente de empuje para las hélices del cuadricóptero,  $h$  es el coeficiente de arrastre asociado a las hélices medido en  $[Ns^2]$  y  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  son las velocidades angulares correspondientes a los cuatro rotores del cuadricóptero.



Se desarrolla la ecuación (2.28) para obtener lo siguiente:

$$\dot{\omega} = I^{-1}(M - (\omega \times I\omega)) \quad (2.30)$$

y se reemplaza las ecuaciones (2.11) y (2.26) en la ecuación (2.30) así:

$$\dot{\omega} = I^{-1} \left( M - \left( \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x p \\ I_y q \\ I_z r \end{bmatrix} \right) \right) \quad (2.31)$$

por último, se reemplaza la ecuación (2.29) en la ecuación (2.31) para obtener las velocidades angulares de “balanceo”, “cabeceo” y “guiñada”:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_\phi}{I_x} \\ \frac{\tau_\theta}{I_y} \\ \frac{\tau_\psi}{I_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(I_y - I_z)qr}{I_x} \\ \frac{(I_z - I_x)pr}{I_y} \\ \frac{(I_x - I_y)pq}{I_z} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

de la ecuación anterior se tiene que  $\tau_\phi$ ,  $\tau_\theta$ ,  $\tau_\psi$  representan los torques de “balanceo”, “cabeceo” y “guiñada” respectivamente, mientras que,  $I_x, I_y, I_z$  son las inercias del cuadricóptero para los diferentes ejes.

De la ecuación (2.12) se obtiene  $\dot{n} = W_n^{-1}\dot{\omega}$ , la cual se deriva en el tiempo:

$$\ddot{n} = \frac{d}{dt}[W_n^{-1}\dot{\omega}] = \frac{d}{dt}[W_n^{-1}]\dot{\omega} + W_n^{-1}\ddot{\omega} \quad (2.33)$$

La ecuación (2.14) se deriva para obtener  $\frac{d}{dt}[W_n^{-1}]$  así:

$$\begin{aligned} \ddot{n} = & \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}\cos\phi\tan\theta + \frac{\dot{\theta}\text{sen}\phi}{\cos^2\theta} & \dot{\phi}\text{sen}\phi\tan\theta + \frac{\dot{\theta}\cos\phi}{\cos^2\theta} \\ 0 & -\dot{\phi}\text{sen}\phi & -\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 & \dot{\phi}\frac{\cos\phi}{\cos\theta} + \dot{\theta}\frac{\text{sen}\phi\tan\theta}{\cos\theta} & -\dot{\phi}\frac{\text{sen}\phi}{\cos\theta} + \dot{\theta}\frac{\cos\phi\tan\theta}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & \frac{\text{sen}\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para simplificar la ecuación (2.34), se emplea la aproximación del ángulo pequeño, la cual se define por [4]:

$$\begin{aligned}\phi \approx 0 &\rightarrow \cos\phi = 1, \text{sen}\phi = 0 \\ \theta \approx 0 &\rightarrow \cos\theta = 1, \text{sen}\theta = 0\end{aligned}\quad (2.35)$$

Esta aproximación se puede usar cuando se trabaja alrededor de un punto de equilibrio y si las perturbaciones de vuelo estacionario son pequeñas, obteniéndose lo siguiente para la ecuación (2.14):

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}\quad (2.36)$$

De donde se obtiene que:  $\omega = \dot{\eta}$ ,  $(p, q, r) \simeq (\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ , reduciendo la ecuación (2.33) a:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\dot{\theta}) \\ -r\dot{\phi} \\ q(\dot{\phi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}\quad (2.37)$$

Reemplazando la ecuación (2.32) en la ecuación (2.37) se obtiene:

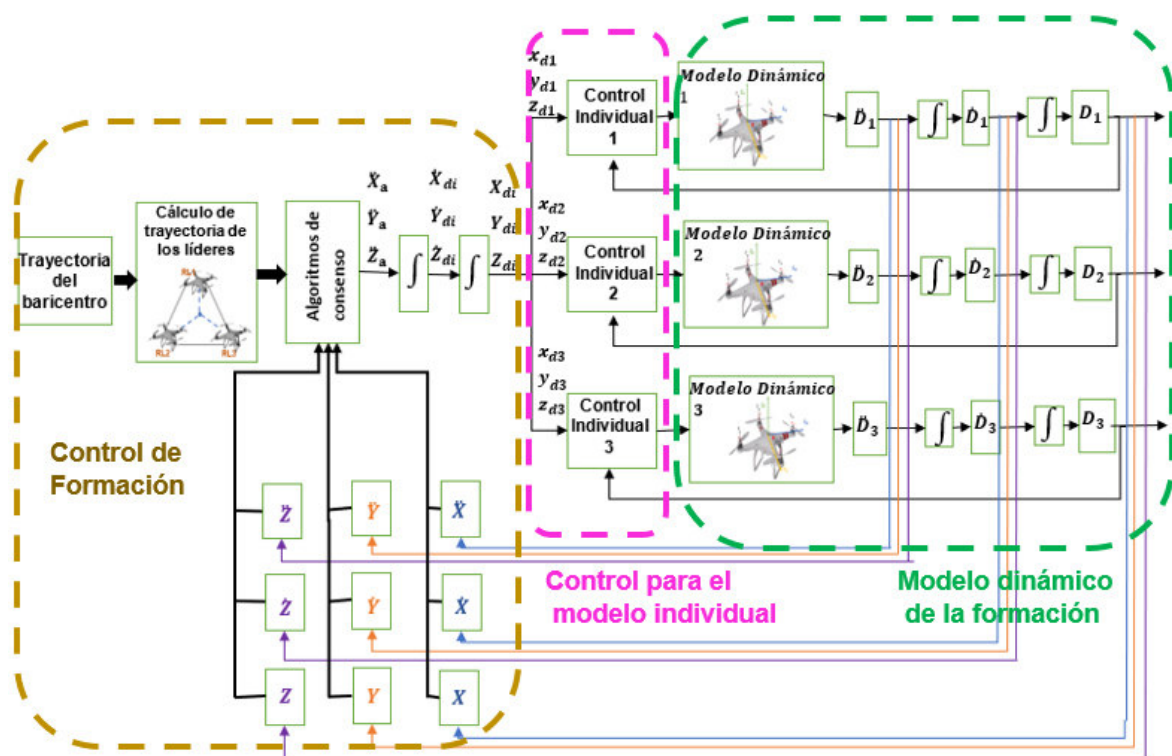
$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\dot{\theta}) \\ -r\dot{\phi} \\ q(\dot{\phi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(I_y - I_z)qr}{I_x} + \frac{\tau_\phi}{I_x} \\ \frac{(I_z - I_x)pr}{I_y} + \frac{\tau_\theta}{I_y} \\ \frac{(I_x - I_y)pq}{I_z} + \frac{\tau_\psi}{I_z} \end{bmatrix}\quad (2.38)$$

Finalmente se obtiene el modelo dinámico de rotación:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{I_x} + \frac{U_2}{I_x} + \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \frac{(I_z - I_x)\dot{\psi}\dot{\phi}}{I_y} + \frac{U_3}{I_y} - \dot{\psi}\dot{\phi} \\ \frac{(I_x - I_y)\dot{\theta}\dot{\phi}}{I_z} + \frac{U_4}{I_z} + \dot{\theta}\dot{\phi} \end{bmatrix}\quad (2.39)$$

## 2.2 Diseño del controlador para la formación de cuadricópteros

Para el diseño del controlador que se aplica a la formación se toma en cuenta el objetivo de este controlador, el cual, es lograr una coordinación descentralizada entre los cuadricópteros y llegar a disponer de una capacidad de intercambio de información distribuida en la formación, por lo cual, se usa un control distribuido, basado en algoritmos de consenso, en el cual cada cuadricóptero debe conocer únicamente cual es la formación que debe alcanzar.



**Figura 2.3** Esquema de control general para la formación de cuadricópteros

En la Figura 2.3 se muestra el diagrama de bloques general implementado para el control de la formación de cuadricópteros, primero se obtiene la trayectoria del centroide de la formación, a partir de esto se obtiene las trayectorias de los líderes y con esta información se aplica la ley de control mediante algoritmos de consenso, la cual nos entrega las variables de aceleración  $\ddot{x}_a, \ddot{y}_a, \ddot{z}_a$ , estas variables se integran dos veces para obtener las posiciones deseadas para cada uno de los cuadricópteros, las cuales serán alcanzadas gracias al control tipo PID implementado en cada modelo individual del cuadricóptero, finalmente el conjunto de los modelos dinámicos de los tres cuadricópteros comprenden el modelo dinámico de la formación, cuyas salidas son aceleración y por tanto se integra dos

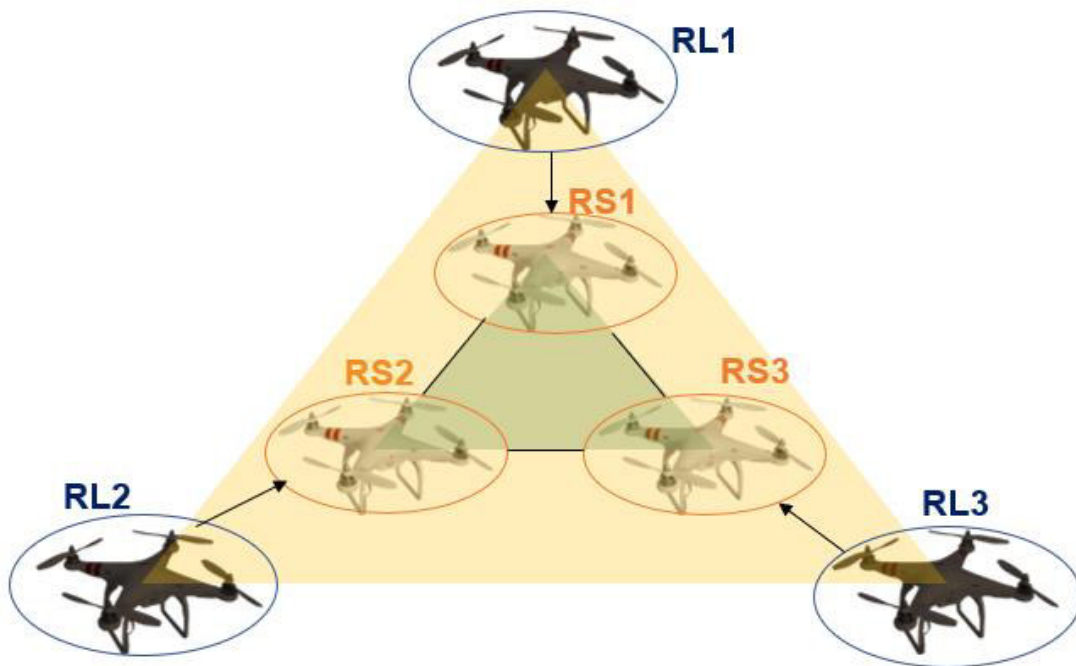
veces para obtener los valores de posición del mismo, en este modelo se observa  $\ddot{D}_1$  que representa la aceleración que se obtiene a la salida del modelo dinámico 1 del cuadricóptero así  $\ddot{D}_1 = [\ddot{x}_1 \ \ddot{y}_1 \ \ddot{z}_1 \ \ddot{\phi}_1 \ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\psi}_1]^T$ , de igual manera,  $\ddot{D}_2$  que representa la aceleración que se obtiene a la salida del modelo dinámico 2 del cuadricóptero así  $\ddot{D}_2 = [\ddot{x}_2 \ \ddot{y}_2 \ \ddot{z}_2 \ \ddot{\phi}_2 \ \ddot{\theta}_2 \ \ddot{\psi}_2]^T$  y  $\ddot{D}_3$  que representa la aceleración que se obtiene a la salida del modelo dinámico 3 del cuadricóptero así  $\ddot{D}_3 = [\ddot{x}_3 \ \ddot{y}_3 \ \ddot{z}_3 \ \ddot{\phi}_3 \ \ddot{\theta}_3 \ \ddot{\psi}_3]^T$ , estos valores tal como sus respectivas integrales son valores que se utilizan como realimentación para el algoritmo de consenso tal y como se observa en la Figura 2.3.

Por tanto, el diseño del controlador para el trabajo final del tomo 1 se divide en dos partes, en la primera parte se aplica el control a la formación de los cuadricópteros, mientras que en la segunda parte se diseña un controlador individual tipo PID que permita mejorar el desempeño dinámico individual de cada cuadricóptero

### **2.2.1 Formación de cuadricópteros**

En sistemas donde se incluye el control de múltiples agentes se presentan problemas como lo son el de lograr mantener un patrón geométrico que se asigna por la referencia existente. Esta referencia realiza el trabajo de líder en la formación, lo que le da la tarea de guiar y asignar diferentes estados a los agentes seguidores. Lograr el control de esta formación es de importancia ya que estos se pueden ver afectados principalmente por el área de operación en el que se desenvuelva, es así como para el presente trabajo se propuso una técnica de control descentralizada que no se vea afectada por las interferencias existentes y se logre sostener la comunicación.

Ya que la información de la formación no es centralizada, esta no se define desde un punto de vista común para todos los cuadricópteros, es decir que es relativa la posición de cada cuadricóptero en la formación, por tanto, no requiere de una representación matemática de la misma. Sin embargo, si se requiere de una estructura general de la formación como se muestra en la Figura 2.4.



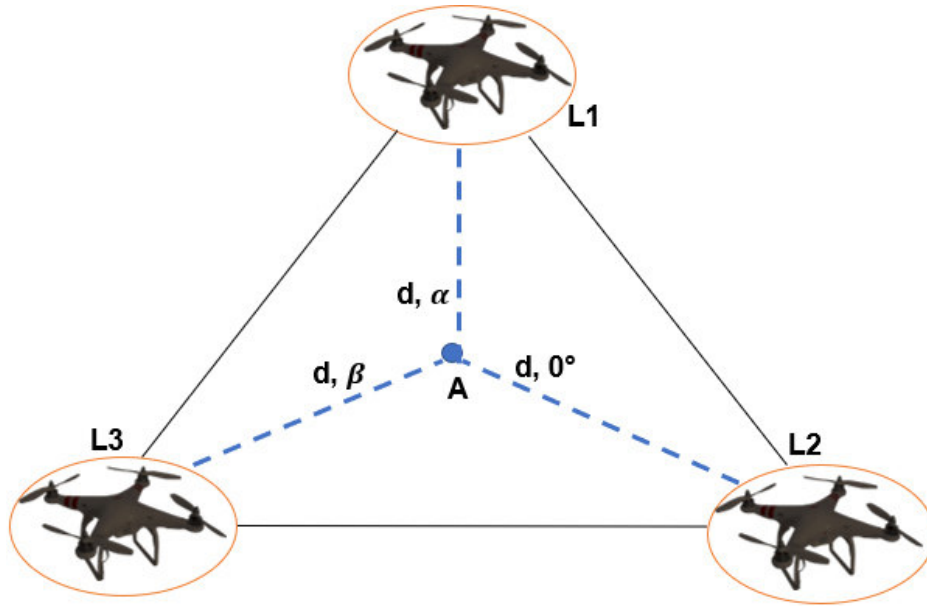
**Figura 2.4** Estructura para la formación

En la figura anterior se puede observar que la figura geométrica de la formación es triangular, esta estructura consta de tres líderes virtuales (RL1, RL2, RL3) y tres seguidores (RS1, RS2, RS3). Estos líderes son capaces de generar un conjunto convexo no trivial equivalente a un polígono convexo en el plano, lo que permite a los seguidores moverse en la envolvente convexa formada por los líderes hasta poder alcanzar la forma establecida por el controlador.

En este tipo de sistemas en donde existen líderes virtuales, primero se define la dinámica deseada de la estructura virtual, posteriormente, en base a la estructura virtual, se determina los movimientos deseados para los seguidores y finalmente se procede a calcular las acciones de control para cada seguidor [9].

### 2.2.2 Trayectoria de los líderes virtuales

La trayectoria y la geometría deseada para la formación definen la posición de los líderes virtuales, los cuales representan el consenso al que deben llegar los seguidores [9].



**Figura 2.5** Posición para los líderes virtuales

En la Figura 2.5 se observa que se dispone de una formación tipo triangular para los líderes virtuales (L1, L2, L3), cuya posición se define respecto al centroide  $A$ , en donde se define una distancia ( $d$ ) que va desde el centroide hacia los seguidores, y una posición ( $\alpha, \beta$ ) la cual depende de la arista que se tome como referencia, por tanto, para cada uno de los líderes es posible expresar su posición como coordenadas cartesianas  $x_{l_i}, y_{l_i}, z_{l_i}$ .

Para el seguimiento de trayectoria se considera como el origen del sistema de referencia de la formación, a la posición deseada de la trayectoria, y se asigna la posición del líder virtual  $i$  por las siguientes ecuaciones:

$$x_{l_i} = x_T + d_i \cos(\tau_i) \quad (2.40)$$

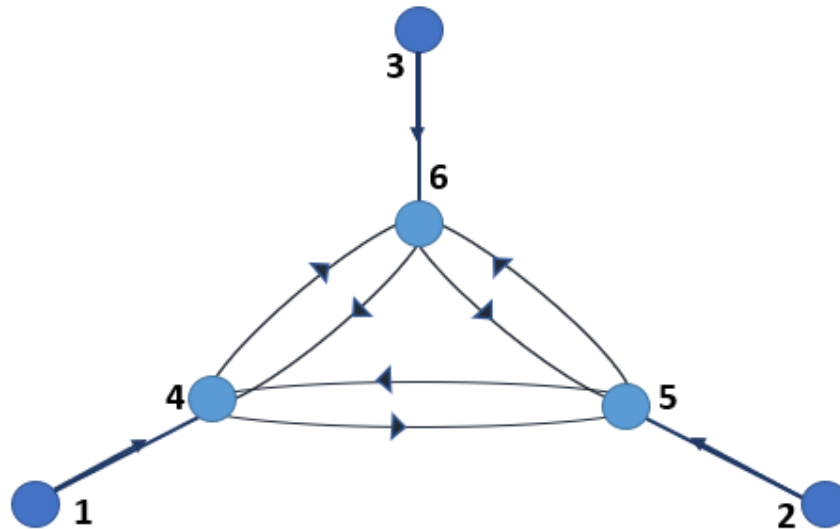
$$y_{l_i} = y_T + d_i \sen(\tau_i) \quad (2.41)$$

$$z_{l_i} = z_T \quad (2.42)$$

Donde  $x_T, y_T$  y  $z_T$  son la posición de la trayectoria en  $x, y, z$ ;  $x_{l_i}, y_{l_i}$  y  $z_{l_i}$  son las posiciones en  $x, y,$  y  $z$  del líder virtual  $i$ ;  $d_i$  y  $\tau_i$  representan la distancia y el ángulo de la orientación del líder virtual  $i$  respectivamente, respecto al sistema de referencia. Estos parámetros se consideran constantes a lo largo del tiempo, debido a que se mantiene constante la forma geométrica de la formación.

### 2.2.3 Matrices representativas para los grafos de la formación

Para el presente trabajo se ha propuesto la estructura de un grafo como el que se puede observar en la Figura 2.6, el cual consta tanto de grafos dirigidos como no dirigidos y que además tanto los arcos como las aristas no presentan ponderación por lo que se les asigna el valor de 1, sin embargo, esta ponderación puede variar, ya que si este aumenta los agentes tienden a acercarse más entre sí.



**Figura 2.6** Estructura del grafo dispuesto para la formación

A partir del grafo propuesto se procede a determinar la matriz de adyacencia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

La matriz anterior tiene una dimensión de 6x6 ya que existen 6 agentes en la formación, además, esta matriz muestra la interacción que tienen tanto los líderes como los seguidores, en esta se tienen dígrafos como lo son la relación que se da entre los líderes hacia los seguidores, y además se tienen grafos no dirigidos como lo son las relaciones entre seguidores.

La matriz de grado diagonal se obtiene a partir de la matriz de adyacencia dando como resultado:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Por último, obtenemos la matriz Laplaciana  $\mathcal{L} = D - A$ :

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

## 2.2.4 Algoritmos de consenso

El algoritmo de consenso requiere la referencia de uno o más líderes u otros seguidores, para poder llegar a un consenso con respecto a la información que brinden los cuadricópteros asociados. Para el presente trabajo el estado de referencia para el consenso de los seguidores es el seguimiento de trayectoria que debe seguir la formación, en este caso los líderes determinan las acciones de control para los cuadricópteros. Para esto se propone usar algoritmos de consenso de doble integrador, los cuales pueden variar dependiendo del tipo de líderes que tenga la formación.

### 2.2.4.1 Múltiples líderes estacionarios

Este algoritmo presenta un contexto más sencillo ya que se cuenta con líderes estacionarios que no presentan movimiento, por tanto, la velocidad  $v_i(t)$  de cada líder estacionario  $i \in R$  es  $v_i(t) = 0$  [12]. El algoritmo para este tipo de líderes presenta la estructura de control siguiente:

$$u_i(t) = -\beta v_i(t) - \sum_{j \in C \cup R} a_{ij}(t) \{ \beta [x_i(t) - x_j(t)] + [v_i(t) - v_j(t)] \}, \quad i \in R, \quad (2.46)$$

de la ecuación anterior  $R$  representa al conjunto de cuadricópteros líderes;  $C$  representa al conjunto de cuadricópteros seguidores;  $a_{ij}(t)$  representa la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $A$  en un tiempo  $t$ , donde  $j$  es parte del conjunto formado de la unión de los líderes  $R$  y los seguidores  $C$ , mientras que,  $\beta$  es una constante de calibración positiva.



En esta descripción se obtiene la acción de control  $u_i(t)$  del cuadricóptero  $i$  en base a su velocidad y a la influencia de los otros cuadricópteros denotados por  $j$  sobre el cuadricóptero en cuestión.

### 2.2.4.2 Múltiples líderes dinámicos

Para el caso del presente trabajo se considera que los líderes son dinámicos ya que guían a los seguidores a través de una trayectoria deseada, sin embargo, estos también pueden variar dependiendo de la velocidad que tengan los líderes ya sea esta igual o distinta entre los líderes.

#### 2.2.4.2.1 Líderes con una velocidad idénticas

Asumiendo las mismas velocidades para todos los líderes, es decir,  $v_i(t) = v_j$  para  $i, j \in R$ , el algoritmo de control se expresa como [20]:

$$\begin{aligned} v_i(t) &= v^\circ(t), & i \in R, \\ u_i(t) &= -\gamma \operatorname{sgn} \left( \sum_{j \in C \cup R} a_{ij}(t) \{ \beta [x_i(t) - x_j(t)] + [v_i(t) - v_j(t)] \} \right) & (2.47) \\ & - \beta v_i(t), & i \in F, \end{aligned}$$

Donde  $v^\circ(t)$  representa la velocidad común entre los líderes,  $\gamma$  y  $\beta$  son constantes de calibración positiva;  $R$  representa al conjunto de cuadricópteros líderes;  $C$  representa el conjunto de los seguidores y  $\operatorname{sgn}$  es la función que se define por la entrada.

#### 2.2.4.2.2 Líderes con velocidades distintas

Considerando que se trabaja con el caso general, en donde las velocidades de los líderes  $v_i(t)$  son distintas, es decir,  $v_i(t) = a_i(t)$  donde  $a_i(t)$  es la entrada de aceleración dispuesta para el líder  $i$ , se asume que se cuenta con  $n$  agentes totales,  $m$  agentes seguidores y  $n - m$  serían los agentes líderes, el algoritmo de control sería el siguiente [12]:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= - \sum_{j \in C \cup R} a_{ij}(t) \{ [x_i(t) - x_j(t)] + \alpha [v_i(t) - v_j(t)] \} \\ & - \beta \operatorname{sgn} \left( \sum_{j \in C \cup R} a_{ij}(t) \{ \gamma [x_i(t) - x_j(t)] + [v_i(t) - v_j(t)] \} \right), & (2.48) \\ i &= n - m + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

Donde  $a_{ij}(t)$  representa la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $A$  en un tiempo  $t$ ,  $R$  representa al

conjunto de cuadricópteros líderes,  $C$  representa el conjunto de los seguidores;  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son constantes positivas de calibración, y  $sgn(x)$  es la función signo dada por:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación (2.48) se puede expresar de manera matricial como en la siguiente ecuación [9]:

$$\ddot{X} = -\mathcal{L}X - \alpha\mathcal{L}\dot{X} - \beta sgn(\gamma\mathcal{L}X + \mathcal{L}\dot{X}) + \Psi \quad (2.49)$$

Donde  $\mathcal{L}$  es la matriz Laplaciana definida en la ecuación (2.45),  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  es el vector que representa los estados en  $X$  para todos los cuadricópteros,  $\Psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]^T$  es un vector que representa la aceleración de los líderes con  $\psi_i(t) = a_i(t)$  para  $i = 1, \dots, n - m$  y  $\psi_i(t) = 0$  para  $i = n - m + 1, \dots, n$ .

De la ecuación (2.49) se modifica la función signo para poder suavizar la respuesta de los controladores, así:

$$sigm(x) = \frac{x}{|x| + \varepsilon}, \quad (2.50)$$

donde  $\varepsilon$  es una constante de calibración.

Por tanto, la ley de control que se aplicará para cada uno de los estados será la siguiente:

$$\ddot{X}_a = -\mathcal{L}X - \alpha\mathcal{L}\dot{X} - \beta sigm(\gamma\mathcal{L}X + \mathcal{L}\dot{X}) + \Psi_x \quad (2.51)$$

$$\ddot{Y}_a = -\mathcal{L}Y - \alpha\mathcal{L}\dot{Y} - \beta sigm(\gamma\mathcal{L}Y + \mathcal{L}\dot{Y}) + \Psi_y \quad (2.52)$$

$$\ddot{Z}_a = -\mathcal{L}Z - \alpha\mathcal{L}\dot{Z} - \beta sigm(\gamma\mathcal{L}Z + \mathcal{L}\dot{Z}) + \Psi_z \quad (2.53)$$

Donde  $X, Y, Z$  son vectores que contienen la información de la trayectoria de los líderes  $(x_{li} \ y_{li} \ z_{li})$  y la posición deseada de los seguidores  $(x_{di} \ y_{di} \ z_{di})$ , así:  $X = [x_{l1} \ x_{l2} \ x_{l3} \ x_{d1} \ x_{d2} \ x_{d3}]^T$ ,  $Y = [y_{l1} \ y_{l2} \ y_{l3} \ y_{d1} \ y_{d2} \ y_{d3}]^T$  y  $Z = [z_{l1} \ z_{l2} \ z_{l3} \ z_{d1} \ z_{d2} \ z_{d3}]^T$ .

La implementación de esta ley de control se indica en la Figura 2.7, esta figura se deriva de la Figura 2.3 como control de la formación, en la presente figura se indica que la ley de control requiere del cálculo de la matriz Laplaciana y de la trayectoria de los líderes para poder implementarla y posteriormente realizar los cálculos para obtener los valores deseados para cada uno de los cuadricópteros seguidores, teniendo  $i$ -ésimos cuadricópteros, donde  $i = 1, 2, 3$ , en esta figura se observa que se tiene como entrada a los vectores  $X, Y, Z$  así como sus derivadas, las cuales como se observa en la

Figura 2.3 provienen de la implementación del control para el modelo individual del cuadricóptero.

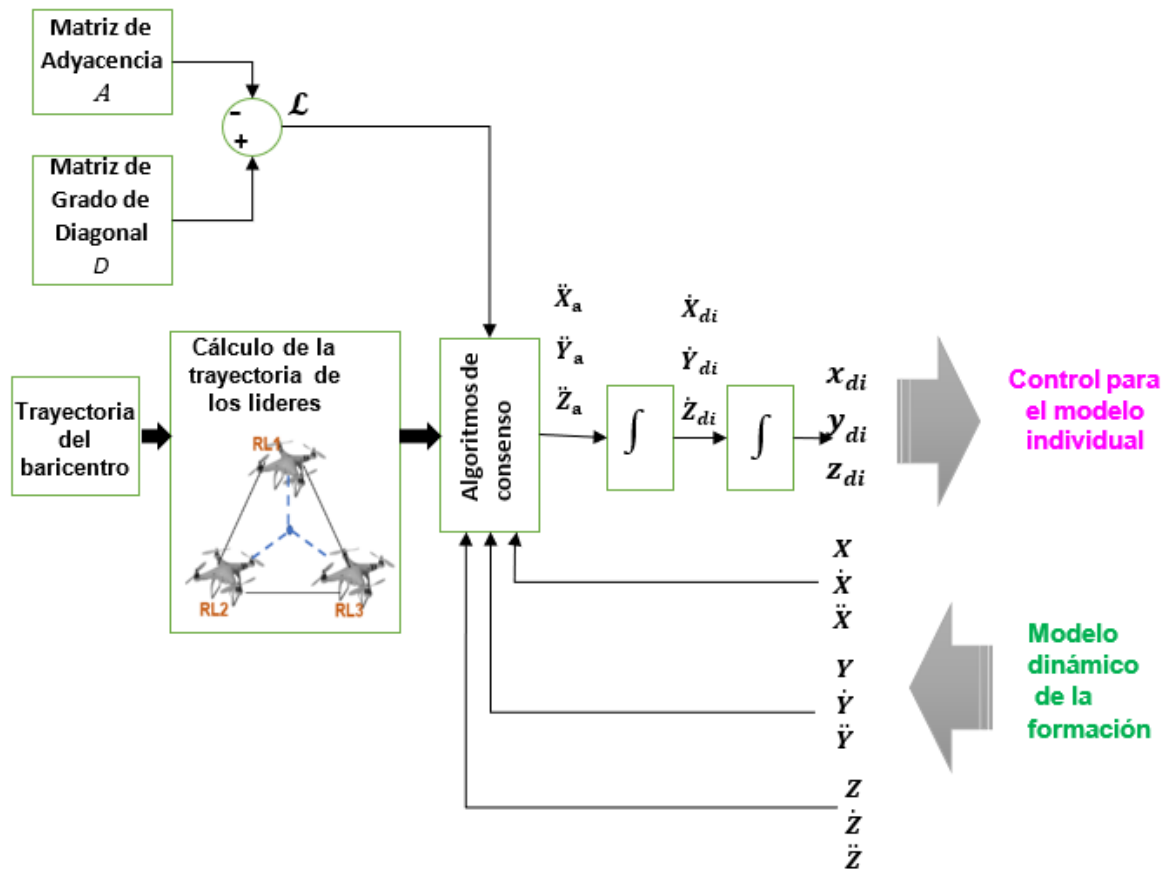


Figura 2.7 Esquema de control para la formación

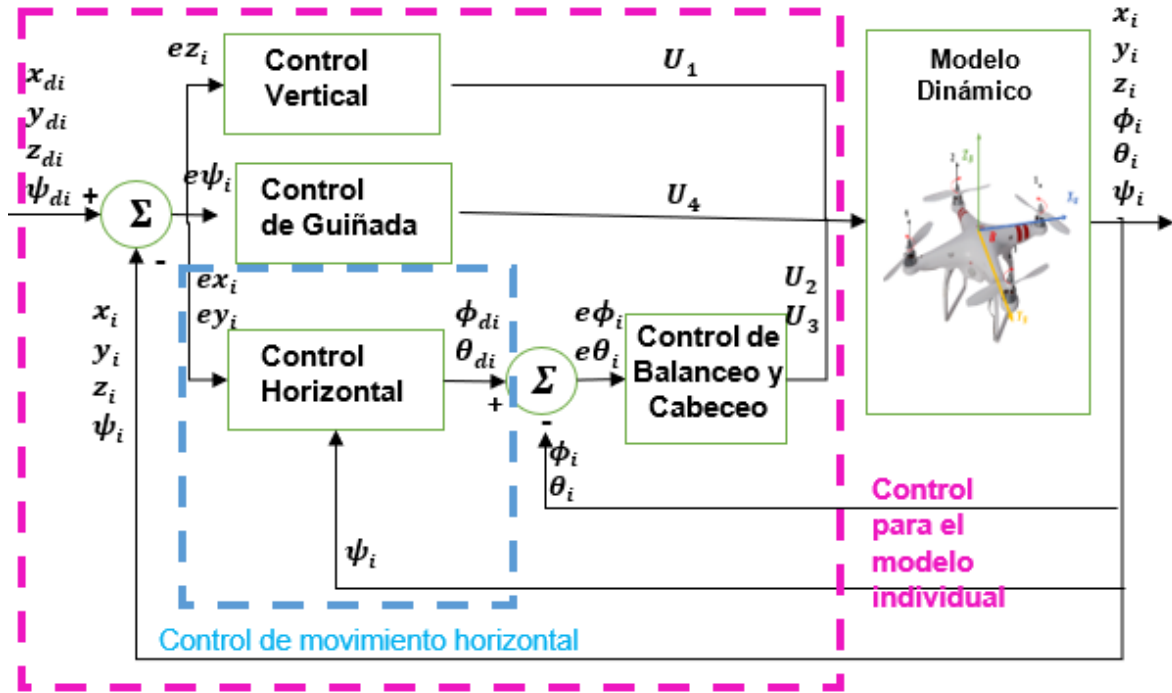
### 2.3 Diseño del controlador PID para el modelo individual del cuadricóptero

El esquema general de control individual tipo PID consta de una estructura tipo cascada que permite obtener el control de orientación, así como de los movimientos vertical y horizontal.

El cuadricóptero al ser un sistema que posee 6 grados de libertad, este posee cuatro entradas  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , las cuales se obtienen a partir del controlador PID.

Tomando en cuenta a  $U_1$  como la única entrada que controla el movimiento de traslación, y  $U_4$  como la entrada que controla el movimiento de guiñada, para el control de balanceo y cabeceo se aplica un control en cascada, teniendo como lazo externo al control de

movimiento horizontal, como se muestra en la Figura 2.8, la cual es parte del diagrama general que se muestra en la Figura 2.3 como control individual.



**Figura 2.8** Esquema general del control Individual del Cuadricóptero

Así al tener  $i$  – ésimos cuadricópteros, donde  $i = 1,2,3$ , de la figura anterior se observa que se tiene un controlador en cascada para el control de orientación de balanceo y cabeceo en el cual se observa que requiere de las  $(\phi_i, \theta_i)$ , que se obtiene del lazo externo de control horizontal. En la figura anterior, también se puede observar que el sistema de control consta de  $[x_{di} \ y_{di} \ z_{di} \ \psi_{di}]$  como valores deseados. El esquema de control de la Figura 2.8 se aplica para los tres cuadricópteros seguidores.

Partiendo de las ecuaciones (2.25) y (2.39) del modelado dinámico se tiene que:

$$\ddot{x} = \frac{U_1}{m} (\cos\psi \sen\theta \cos\phi + \sen\psi \sen\phi) \quad (2.54)$$

$$\ddot{y} = \frac{U_1}{m} (\sen\psi \sen\theta \cos\phi - \cos\psi \sen\phi) \quad (2.55)$$

$$\ddot{z} = \left( \frac{U_1}{m} (\cos\theta \cos\phi) - g \right) \quad (2.56)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{I_x} + \frac{U_2}{I_x} + \dot{\theta}\dot{\psi} \quad (2.57)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(I_z - I_x)\dot{\phi}\dot{\psi}}{I_y} + \frac{U_3}{I_y} - \dot{\phi}\dot{\psi} \quad (2.58)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{(I_x - I_y)\dot{\theta}\dot{\phi}}{I_z} + \frac{U_4}{I_z} + \dot{\theta}\dot{\phi} \quad (2.59)$$

### 2.3.1 Control vertical

Tomando en cuenta que el empuje total para el control de altura actúa sobre el eje "Z", la aceleración en dicho eje se ve afectada por  $U_1$ , la cual es la que permite que el cuadricóptero alce vuelo en el aire, por tanto, se presenta el siguiente controlador tomando en cuenta la ecuación (1.4) para el controlador PID y la ecuación (2.56) del modelo dinámico del cuadricóptero [4]:

$$U_1 = \frac{m}{\cos\phi \cos\theta} \left[ \left( K_{p_z} e z_i(t) + K_{i_z} \int e z_i(t) dt - K_{d_z} \frac{d}{dt} Z \right) + g \right] \quad (2.60)$$

De la ecuación anterior el término  $m/(\cos\phi \cos\theta)$  ayuda a eliminar la parte no lineal del modelo y permite que el empuje total sea suficiente para realizar los cambios de elevación del cuadricóptero, además se requiere del componente  $g$  que es el valor de la gravedad que debe superar  $U_1$  para poderse elevar,  $e z_i(t) = z_{di} - z_i$  es el error para el movimiento en "Z", mientras que  $(K_{p_z}, K_{i_z}, K_{d_z})$  representan las constantes proporcional, integral y derivativa del controlador PID respectivamente.

### 2.3.2 Control de orientación

- Control de Balanceo [4]

Ya que  $U_2$  se encarga del movimiento roll que se controla mediante el ángulo  $\phi$ , se propone el siguiente controlador:

$$U_2 = I_x \left[ \left( K_{p_\phi} e \phi_i(t) + K_{i_\phi} \int e \phi_i(t) dt - K_{d_\phi} \frac{d}{dt} \phi \right) - \frac{(I_y - I_z)\dot{\theta}\dot{\psi}}{I_x} - \dot{\theta}\dot{\psi} \right] \quad (2.61)$$

De la ecuación anterior el componente  $I_x$  es el valor de la inercia en "X",  $I_y$  es el valor de la inercia en "Y",  $I_z$  es el valor de la inercia en "Z",  $e \phi_i(t) = \phi_{di} - \phi_i$  es el error para el movimiento de "balanceo", mientras que  $(K_{p_\phi}, K_{i_\phi}, K_{d_\phi})$  representan las constantes

proporcional, integral y derivativa del controlador PID respectivamente, siendo  $i$  – ésimos cuadricópteros, donde  $i = 1,2,3$ .

- Control de Cabeceo [4]

El control del ángulo  $\theta$  se ve afectado por  $U_3$  y se propone el siguiente controlador:

$$U_3 = I_y \left[ \left( K_{p_\theta} e\theta_i(t) + K_{i_\theta} \int e\theta_i(t) dt - K_{d_\theta} \frac{d}{dt} \theta \right) - \frac{(I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi}}{I_y} + \dot{\phi} \dot{\psi} \right] \quad (2.62)$$

De la ecuación anterior el componente  $I_x$  es el valor de la inercia en “X”,  $I_y$  es el valor de la inercia en “Y”,  $I_z$  es el valor de la inercia en “Z”,  $e\theta_i(t) = \theta_{di} - \theta_i$  es el error para el movimiento de “cabeceo”, mientras que  $(K_{p_\theta}, K_{i_\theta}, K_{d_\theta})$  representan las constantes proporcional, integral y derivativa del controlador PID respectivamente.

- Control de Guiñada

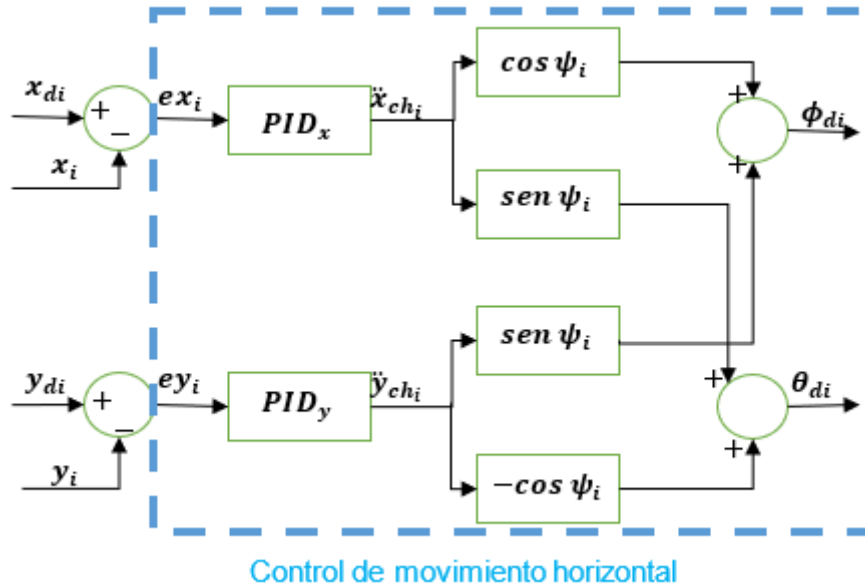
El control del ángulo  $\psi$  se ve afectado por  $U_4$ , por tanto, el controlador propuesto es [4]:

$$U_4 = I_z \left[ \left( K_{p_\psi} e\psi_i(t) + K_{i_\psi} \int e\psi_i(t) dt - K_{d_\psi} \frac{d}{dt} \psi \right) - \frac{(I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta}}{I_z} - \dot{\phi} \dot{\theta} \right] \quad (2.63)$$

De la ecuación anterior el componente  $I_x$  es el valor de la inercia en “X”,  $I_y$  es el valor de la inercia en “Y”,  $I_z$  es el valor de la inercia en “Z”,  $e\psi_i(t) = \psi_{di} - \psi_i$  es el error para el movimiento de “guiñada”, mientras que  $(K_{p_\psi}, K_{i_\psi}, K_{d_\psi})$  representan las constantes proporcional, integral y derivativa del controlador PID respectivamente.

En estos controladores se puede observar que para la parte derivativa del controlador no se deriva la señal de error, ya que de esta manera se puede evitar que la salida presente un efecto impulsivo, cuando sufre cambios excesivamente bruscos en la referencia.

### 2.3.3 Control de movimiento horizontal



**Figura 2.9** Esquema de control del movimiento horizontal

La figura anterior es parte del esquema de control que se muestra en la Figura 2.8, por tanto, en la Figura 2.9 se observa el control de posición en el plano  $XY$ , donde se tiene  $i$  –ésimos cuadricópteros seguidores, siendo  $i = 1,2,3$ , para este control se toma en cuenta los ángulos roll y pitch ( $\phi, \theta$ ), las posiciones de referencia deseadas  $x_{di}$  y  $y_{di}$ , mientras que se tiene como salida los valores deseados  $\phi_{di}$  y  $\theta_{di}$ , los cuales son parte de las referencias para el control de orientación.

Por tanto, considerando las ecuaciones (2.54) y (2.55) se realiza una simplificación aplicando la aproximación del ángulo pequeño:  $\cos \phi \approx 1, \cos \theta \approx 1, \text{sen } \phi \approx \phi, \text{sen } \theta \approx \theta$  y se obtiene lo siguiente [4]:

$$\ddot{x} = \frac{U_1}{m} (\theta \cos \psi + \phi \text{sen } \psi) \quad (2.64)$$

$$\ddot{y} = \frac{U_1}{m} (\theta \text{sen } \psi - \phi \cos \psi) \quad (2.65)$$

Para poder despejar de las dos ecuaciones anteriores  $\phi$  y  $\theta$  en función de  $\ddot{x}$  y  $\ddot{y}$ , se reescriben como una matriz así:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{U_1}{m} \begin{bmatrix} \text{sen } \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \text{sen } \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

De la ecuación (2.66) despejamos  $\phi$  y  $\theta$  dando como resultado lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{m}{U_1} \begin{bmatrix} \text{sen } \psi & -\cos \psi \\ \cos \psi & \text{sen } \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Reescribiendo la ecuación (2.67) como dos ecuaciones independientes, en donde  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\ddot{x}$  y  $\ddot{y}$  cambian por  $\phi_{di}$ ,  $\theta_{di}$ ,  $\psi_i$ ,  $\ddot{x}_{ch_i}$  y  $\ddot{y}_{ch_i}$  respectivamente, se obtiene lo siguiente:

$$\phi_{di} = \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_{ch_i} \text{sen } \psi_i - \ddot{y}_{ch_i} \text{cos } \psi_i) \quad (2.68)$$

$$\theta_{di} = \frac{m}{U_1} (\ddot{x}_{ch_i} \text{cos } \psi_i + \ddot{y}_{ch_i} \text{sen } \psi_i) \quad (2.69)$$

Donde se tiene a  $i$  – *ésimos* cuadricópteros seguidores, siendo  $i = 1,2,3$ .

Por lo tanto, las variables a controlar son  $\ddot{x}_{ch_i}$  y  $\ddot{y}_{ch_i}$ , para las cuales se presentan los siguientes controladores:

- Control en X definido por  $\ddot{x}_{ch}$  esta dado por la siguiente ecuación, tomando en cuenta la ecuación (1.4) como la estructura para el controlador PID:

$$\ddot{x}_{ch_i} = K_{p_x} ex_i(t) + K_{i_x} \int ex_i(t) dt - K_{d_x} \frac{d}{dt} x_i \quad (2.70)$$

De la ecuación anterior  $K_{p_x}$ ,  $K_{i_x}$ ,  $K_{d_x}$  representan las constantes proporcional, integral y derivativa del controlador PID respectivamente, mientras que,  $ex_i(t)$  es el error en “X” que se define por  $ex_i(t) = x_{di} - x_i$ , donde se tiene a  $i$  – *ésimos* cuadricópteros seguidores, siendo  $i = 1,2,3$ .

- Control en Y definido por  $\ddot{y}_{ch}$  esta dado por la siguiente ecuación, tomando en cuenta la ecuación (1.4) como la estructura para el controlador PID:

$$\ddot{y}_{ch_i} = K_{p_y} ey_i(t) + K_{i_y} \int ey_i(t) dt - K_{d_y} \frac{d}{dt} y_i \quad (2.71)$$

De la ecuación anterior  $K_{p_y}$ ,  $K_{i_y}$ ,  $K_{d_y}$  representan las constantes proporcional, integral y derivativa del controlador PID respectivamente, mientras que,  $ey_i(t)$  es el error en “Y” que se define por  $ey_i(t) = y_{di} - y_i$ , donde se tiene a  $i$  – *ésimos* cuadricópteros seguidores, siendo  $i = 1,2,3$ .



### 3 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las conclusiones y recomendaciones que se presentan en este documento se basan en lo desarrollado en los capítulos anteriores y además corresponden a los objetivos del tomo 1.

En el tomo 2 se aplica la teoría desarrollada en este tomo mediante simulación en el software Matlab a través de una interfaz de usuario desarrollada en App Designer, siendo así que mediante los dos tomos, se complementa el desarrollo total del presente trabajo de integración curricular.

#### 3.1 Conclusiones

- Se estudió y se desarrolló el modelado dinámico asociado al comportamiento de un cuadricóptero, utilizando la aproximación de ángulo pequeño para facilitar la implementación del sistema, así como los ángulos de Tait-Bryan para poder representar la orientación del cuadricóptero en el espacio mediante los ángulos de cabeceo, balanceo y guiñada.
- Se implementó los algoritmos de consenso de doble integrador debido a que nos permite trabajar con una descripción más completa del comportamiento de los cuadricópteros, lo que fue especialmente útil al trabajar con múltiples líderes dinámicos con velocidades distintas.
- La descripción de la formación mediante el algoritmo de consenso es mucho más sencilla que la descripción de la formación basada en geometría analítica, ya que para incorporar nuevos agentes a la formación o para variar las características de esta, basta con alterar la matriz de adyacencia que describe a la misma, no requiriendo recalcular las distancias y ángulos que describen a la formación como lo sería en el caso de una descripción geométrica.
- Se desarrolló un control individual tipo PID que se aplicó a cada una de las seis variables  $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$  que describen el comportamiento dinámico de un cuadricóptero, con el fin de mejorar el desempeño del seguimiento de trayectoria de la formación.

- Se utilizó el centroide de la formación para calcular las trayectorias de los seguidores, lo cual permitió que la formación cuente con una estructura geoméricamente regular y simétrica respecto a este.
- En el control individual se implementó un controlador PID tipo PI-D para evitar el fenómeno llamado “derivative kick” o “patada derivativa”, lo que es importante, ya que se trabajara con trayectorias que cambian constantemente en el tiempo, y los cambios bruscos de referencia producirán valores infinitos en la derivada del error, por lo tanto, en la parte derivativa del PID solo se obtiene la derivada de la variable y no la de la referencia, esto evito que se presente un pico indeseable en la salida de los controladores individuales.

### **3.2 Recomendaciones**

- Dependiendo del desempeño deseado para el sistema se recomienda utilizar un control individual independiente que compense las características dinámicas de los cuadricópteros esto es importante para trayectorias que presenten cambios bruscos de dirección o velocidad.
- Si no se desea que la formación tenga una estructura simétrica respecto al centroide, se puede calcular las trayectorias de cada líder de manera independiente, esto permitiría a la formación adquirir una figura que se adapte al entorno y gracias a la envoltura convexa los cuadricópteros seguidores se ajustarán a estos cambios.
- Además de variar la trayectoria de los seguidores se podría cambiar la estructura de la formación, modificando la ponderación en la matriz de adyacencia.

## 4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] L. E. Romero, D. F. Pozo, y J. A. Rosales, "Quadcopter stabilization by using PID controllers", *Maskana*, vol. 5, pp. 175-186, 2014.
- [2] J. G. Jaramillo Bucheli y F. A. Vaca De La Torre, "Implementación de un sistema de Control Robusto para seguimiento de trayectoria de tres cuadricópteros en formación", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2018.
- [3] C. Sánchez, "Vehículos Aéreos No Tripulados: Descripciones Generales Y Aplicaciones", vol. 1, p. 2017, jun. 2017.
- [4] P. E. Samaniego Villacrés y E. A. Vaca Cerda, "Diseño y simulación de dos estrategias de control basado en espacio nulo y tipo PID para una formación de cuadricópteros", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2017.
- [5] V. R. Díaz Cajas, "Diseño y simulación de esquemas PID lineales y no lineales con acción de reset aplicados a dos procesos químicos no lineales", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2020.
- [6] T. Eren, "Leader-Follower Formations Of Unmanned Aerial Vehicles", vol. 3, p. 7, ene. 2007.
- [7] D. Jungnickel, "Graphs, networks, and algorithms", 3rd ed. Berlin; New York: Springer, 2008.
- [8] V. I. Espinosa Acosta y V. I. Moya González, "Diseño y simulación de un algoritmo de control robusto para formación cuadricópteros", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2016.
- [9] R. S. Vizuet Haro, "Diseño y Simulación de Algoritmos de Control Distribuido para la Formación y Seguimiento de Trayectoria de Robots Móviles Tipo Uniciclo y para Manipuladores Móviles de 3 Grados de Libertad", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2017.
- [10] P. . A. P. Riquelme, "Invariantes Espectrales Asociados A Grafos Y Grafos Mixtos", Departamento de Matemáticas, Universidad Católica del norte, Antofagasta, Chile, 2020.
- [11] R. Downs, "Development and Deployment of Automated Distributed Control Systems on Active Navy Surface Combatants", presentado en de Automation and Controls Symposium 2007 of American Society of Naval Engineers, EEUU, 2007.
- [12] S. R. Muela Guaicha y K. V. Rivera Guerrero, "Teleoperación con realimentación de fuerza para una formación de robots manipuladores aéreos basados en algoritmos de

- control distribuido", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2020.
- [13] W. Ren y R. W. Beard, Eds., "Consensus Algorithms for Single-integrator Dynamics", en *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*, London: Springer, 2008, pp. 25-53. doi: 10.1007/978-1-84800-015-5\_2.
- [14] J. E. Espín Sambache, "Diseño y simulación de un controlador por modos deslizantes dinámicos para sistemas no lineales integrantes con retardo elevado aplicado a un sistema de tanques en cascada", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2021.
- [15] A. C. Guayasamín Cajamarca, "Diseño y simulación de algoritmos de control tipo PID y SMC para seguimiento de trayectoria de un manipulador aéreo", Departamento de Automatización y Control Industrial, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, 2018.
- [16] E. D. N. Guerrero y F. A. V. D. L. Torre, "Desarrollo de un modelo matemático, cinemático y dinámico con la aplicación de software, para modificar el funcionamiento de un dron, para que este realice monitoreo automático", *Recimundo*, vol. 4, n.º 1(Esp), Art. n.º 1(Esp), abr. 2020, doi: 10.26820/recimundo/4.(1).esp.marzo.2020.332-343.
- [17] E. A. Paiva Peredo, "Modelado y Control de un Cuadricóptero", Facultad de Ingeniería, Universidad de Pirua, Pirua, 2016.
- [18] G. V. Raffo, "Modelado y Control de un Helicóptero Quad-Rotor", Facultad de Ingeniería, Universidad de Pirua, Pirua, 2007.
- [19] Jornadas de Automática, Ed., "Identificación experimental de los parámetros de un cuatrirrotor", Bilbao, 2015.
- [20] Y. Cao, D. Stuart, W. Ren, y Z. Meng, "Distributed containment control for double-integrator dynamics: Algorithms and experiments", en *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, jun. 2010, pp. 3830-3835. doi: 10.1109/ACC.2010.5531204.