

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

## **FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR HÍBRIDO  
BASADO EN ALGEBRA LINEAL Y MODOS DESLIZANTES  
(SLABC) APLICADO A PROCESOS QUÍMICOS APROXIMABLES A  
MODELOS DE PRIMER ORDEN CON RETARDO (FOPDT)**

**TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO  
REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN  
ELECTRÓNICA Y AUTOMATIZACIÓN**

**JORGE ALEXANDER URIBE HERRERA**

**[jorge.uribe@epn.edu.ec](mailto:jorge.uribe@epn.edu.ec)**

**DIRECTOR: ING. OSCAR EDUARDO CAMACHO QUINTERO PhD**

**[oscar.camacho@epn.edu.ec](mailto:oscar.camacho@epn.edu.ec)**

**DMQ, abril 2022**

## **CERTIFICACIONES**

Yo, JORGE ALEXANDER URIBE HERRERA declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

---

**JORGE ALEXANDER URIBE HERRERA**

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por JORGE ALEXANDER URIBE HERRERA, bajo mi supervisión.

---

**ING. OSCAR EDUARDO CAMACHO QUINTERO**

**PhD**

**DIRECTOR**

## **DECLARACIÓN DE AUTORÍA**

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como los productos resultantes del mismo, son públicos y estarán a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

JORGE ALEXANDER URIBE HERRERA

ING. OSCAR EDUARDO CAMACHO QUINTERO PhD.

## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a mis padres Nelson y Olga, a mi esposa Belén y a mi hija Romina. Ustedes han sido mi apoyo incondicional, han inculcado valores para formar el hombre que soy hoy en día y son mi inspiración para seguir creciendo académica y personalmente

## **AGRADECIMIENTO**

A mis padres Nelson y Olga, que me han apoyado, aconsejado y me han enseñado el valor del trabajo y siempre han sido un ejemplo de superación, honestidad y humildad.

A mi esposa Belén, que no ha dejado que me dé por vencido y ha sido ese motor que empuja mi vida y me hace ser mejor persona.

A mi tutor de tesis Dr. Oscar Camacho, por todo el tiempo, desinteresada ayuda y guía continua para poder desarrollar el presente trabajo de titulación.

A mis compañeros de carrera, con los que he forjado una grata amistad y me han sabido ayudar y han estado presentes durante mi etapa universitaria.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

CERTIFICACIONES .....	I
DECLARACIÓN DE AUTORÍA .....	II
DEDICATORIA .....	III
AGRADECIMIENTO .....	IV
ÍNDICE DE CONTENIDO .....	V
RESUMEN.....	VII
ABSTRACT .....	VIII
1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Objetivo general.....	2
1.2 Objetivos específicos .....	2
1.3 Alcance .....	3
1.4 Marco teórico .....	3
1.4.1 Sistemas no lineales.....	4
1.4.2 Aproximación de sistemas de elevado orden a modelos de orden reducido.....	4
1.4.2.1 Método de dos puntos de Alfaro para modelos FOPDT.....	5
1.4.2.2 Método de tres puntos de Stark para modelos SOPDT .....	6
1.4.3 Fundamentos del control por modos deslizantes .....	8
1.4.4 Fundamentos del control basado en algebra lineal .....	9
1.4.5 Procesos de estudio .....	10
1.4.5.1 Reactor de Tanque Continuamente Agitado (CSTR).....	10
1.4.5.2 Tanque de Mezclado con Retardo Variable .....	13
2 METODOLOGÍA.....	17
2.1 Diseño de Controlador por Modos deslizantes (SMC) utilizando una superficie deslizante tipo PID aplicado a modelos FOPDT utilizando la aproximación de Taylor.....	17
2.1.1 Parámetros de sintonización .....	19
2.2 Diseño de controladores basados en algebra lineal (LABC y LABC+I) aplicado a modelos FOPDT utilizando la aproximación de Taylor .....	20
2.2.1 Controlador LABC.....	20
2.2.2 Controlador LABC+I .....	23

2.3	Diseño de controlador basado en algebra lineal aplicado a modelos SOPDT utilizando el esquema de modelo interno (IMC) tipo predictor de Smith para sistemas con relación de controlabilidad $\frac{t_0}{\tau} > 1$ .....	24
2.3.1	Parámetros de sintonización .....	26
2.4	Propuesta de controlador hibrido basado en algebra lineal y modos deslizantes (SLABC) .....	26
2.4.1	Parámetros de sintonización .....	30
3	RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	31
3.1	Reactor de Tanque Continuamente Agitado (CSTR) con relación de controlabilidad $\frac{t_0}{\tau} \leq 1$ .....	31
3.1.1	Aproximación a modelo de primer orden con retardo .....	31
3.1.2	Sintonización .....	34
3.1.3	Resultados.....	35
3.1.3.1	Variaciones positivas y negativas de la referencia .....	35
3.1.3.2	Perturbaciones en el caudal del flujo del reactivo A de entrada .	38
3.2	Tanque de mezclado con retardo variable y relación de controlabilidad $\frac{t_0}{\tau} > 1$ .....	41
3.2.1	Aproximación a modelo de segundo orden con retardo .....	41
3.2.2	Aproximación a modelo de primer orden con retardo .....	44
3.2.3	Sintonización .....	45
3.2.4	Resultados.....	46
3.2.4.1	Variaciones positivas y negativas de la referencia .....	46
3.2.4.2	Perturbaciones en el caudal del flujo de entrada .....	49
3.3	Conclusiones.....	52
3.4	Recomendaciones.....	53
4	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	54

## RESUMEN

En el presente trabajo de titulación se muestra el diseño de un esquema híbrido de control basado en álgebra lineal y modos deslizantes (SLABC), aplicado en dos procesos químicos no lineales: un reactor de tanque continuamente agitado (CSTR) y un tanque de mezclado con retardo variable. Para comprobar el desempeño del controlador propuesto se lo compara con los controladores de los cuales se deriva, esto es, con el controlador basado en álgebra lineal (LABC) y con el controlador por modos deslizantes (SMC), con el fin de verificar que el controlador propuesto presenta una mejor respuesta que los controladores LABC y SMC.

Los controladores desarrollados fueron sometidos a pruebas de cambios de referencia y pruebas de introducción de perturbaciones no modeladas, para así observar el comportamiento que cada uno de ellos presenta. A partir de estas pruebas se obtuvieron los índices de desempeño ISE, ISU, ITSE, tiempo de establecimiento y máximo sobre impulso de todos los controladores para realizar un análisis comparativo y determinar cuál esquema de control presenta los mejores resultados a nivel global.

**PALABRAS CLAVE:** Control por modos deslizantes, control híbrido, ISE, ISU, ITSE, perturbaciones, tiempo de establecimiento, máximo sobre impulso.



## **ABSTRACT**

The present work shows the design of a hybrid control scheme based on linear algebra and sliding modes (SLABC), applied to two non-linear chemical processes: a continuously stirred tank reactor (CSTR) and a mixing tank with variable delay. To check the performance of the proposed controller, it is compared with the controllers from which it is derived, that is, with the linear algebra-based controller (LABC) and with the sliding mode controller (SMC), in order to verify that the proposed controller presents a better response than LABC and SMC controllers.

The developed controllers were subjected to reference change tests and non-modeled disturbance introduction tests, in order to observe the behavior that each of them presents. From these tests, the performance indices ISE, ISU, ITSE, establishment time and maximum over impulse of all the controllers were obtained to carry out a comparative analysis and determine which control scheme presents the best results at a global level.

**KEYWORDS:** Sliding mode control, hybrid control, ISE, ISU, ITSE, disturbances, settling time, maximum over impulse.

# 1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad los controladores para procesos industriales buscan robustez frente a incertidumbres, buen desempeño en estado estable y transitorio, facilidad de implementación y que la acción de control sea suave para cuidar al elemento final de control (EFC). Estas características las tiene el controlador por modo deslizante (Sliding Mode Control, SMC), sin embargo, este controlador presenta un inconveniente que se debe a la existencia de rápidas conmutaciones en torno al punto de operación (chattering), que se presenta en la señal de control y durante el tiempo que se tarda el controlador en alcanzar la superficie deslizante [1]. Este efecto de chattering puede ser reducido mediante la utilización de funciones que permitan suavizar el acercamiento del estado hacia la superficie deslizante (tangente hiperbólica, saturación, sigmoide, etc.), con el inconveniente de reducir el desempeño del controlador [2].

Además del controlador SMC, actualmente se ha desarrollado una nueva técnica de control que se basa en Métodos numéricos y Algebra lineal (LABC), que ha tenido buenos resultados en aplicaciones para robots móviles, tales como el seguimiento de trayectorias, sin embargo, las aplicaciones de esta topología de control en procesos químicos aún son reducidas. Esta técnica permite obtener la ley de control a partir del modelo completo del proceso o a partir de modelos de orden reducido del mismo. Esta característica permite desarrollar controladores tanto para procesos que se requieran tener el modelo completo de la planta como para procesos que presenten respuestas aproximables a modelos de orden reducido. Sin embargo, el controlador LABC que se obtiene en base a un modelo de orden reducido presenta ciertos problemas al existir perturbaciones en el sistema, de igual forma presenta error en estado estable si no se le adiciona un integrador que haga al sistema alcanzar la referencia [3]. Una de las ventajas del controlador LABC es que alcanza la referencia de manera rápida y los sobre impulsos en la respuesta del sistema son bastante bajos en comparación con controladores como PIDs clásicos o el mismo SMC.

Para diseñar un controlador SMC se utiliza una superficie no variante en el tiempo la cual hace posible que los estados controlados del sistema se encuentren en modo de alcanzabilidad, pero debido a esto no se puede controlar directamente el error de seguimiento, haciendo así que el proceso pueda tener sensibilidad ante perturbaciones externas durante el tiempo que tardan los estados del sistema en alcanzar la superficie deslizante. Este efecto hace que el SMC pierda robustez durante el tiempo en el que se desliza la acción de control.

Para reducir este error se puede incrementar la ganancia de la componente encargada de la alcanzabilidad (parte discontinua) del controlador, pero esto ocasionalmente incrementa el chattering en la acción de control, además si se eleva demasiado la ganancia se puede llevar al sistema a la inestabilidad [2]. A diferencia del SMC el controlador LABC se diseña a partir de los estados del sistema atacando los errores de seguimiento en el transitorio de la acción de control, lo cual permite controlar de manera directa este error [4].

Con estos precedentes en el presente proyecto de titulación se propone el desarrollo de un esquema de control híbrido basado en algebra lineal y modos deslizantes (SLABC) que tenga los beneficios del LABC en el control de errores de seguimiento en el transitorio de la acción de control hasta que se alcance la superficie deslizante y pueda actuar el SMC, añadiendo las características del mismo en estado estable, teniendo como resultado un esquema de control robusto y eficiente. El controlador obtenido será utilizado en dos procesos químicos que cuenten con respuestas aproximables a modelos de orden reducido los cuales son: un tanque de mezclado de retardo variable y un reactor químico CSTR para luego realizar un análisis comparativo mediante la utilización de índices de desempeño entre en controlador propuesto y los controladores SMC y los basados en algebra lineal.

## **1.1 OBJETIVO GENERAL**

Diseñar y simular un controlador híbrido basado en Algebra Lineal y Modos Deslizantes (SLABC) aplicado a procesos químicos aproximables a modelos de primer orden con retardo (FOPDT).

## **1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Estudiar los modelos de los procesos seleccionados: Tanque de mezclado con retardo variable y reactor CSTR. Ambos aproximables a modelos de orden reducido con retardo, y realizar la aproximación de cada uno modelos de orden reducido.
2. Estudiar y diseñar los controladores SMC, LABC y LABC+I, así como el controlador SLABC con el cual se busca mejorar los índices de desempeño (ISE, ITSE e ISU) del sistema, y de igual forma la reducción del tiempo de establecimiento.
3. Implementar los cuatro controladores diseñados en Simulink de Matlab y simularlos dentro de los procesos seleccionados.
4. Realizar un análisis comparativo de los resultados obtenidos en la simulación mediante la comparación de los índices de rendimiento ISE, ITSE e ISU, así como

del tiempo de establecimiento al usar el controlador SLABC con respecto a los controladores SMC, LABC y LABC+I.

### **1.3 ALCANCE**

- Se estudiarán dos procesos: tanque de mezclado con retardo variable y un reactor CSTR, para obtener el modelo de orden reducido con retardo de cada proceso.[2]
- Se realizará un estudio y análisis bibliográfico del diseño de controladores SMC y LABC para identificar la metodología, aplicaciones, ventajas y desventajas de cada uno de ellos.
- Se obtendrán las leyes de control para los controladores SMC y LABC respectivamente, además se obtendrá la ley de control del LABC con un integrador (LABC+I).
- Se diseñará una topología de control que permita combinar las acciones de control del SMC y LABC, con lo cual se busca mejorar los índices de desempeño: ISE (Integral Square Error), ITSE (Integral of Time Squared Error) e ISU, así como reducir el tiempo de establecimiento y máximo sobre impulsó en comparación a los controladores SMC, LABC y LABC+I propuestos por Camacho-Smith y Scaglia, respectivamente [2], [4]; utilizando modelos de orden reducido de los procesos seleccionados.
- Se simularán los dos procesos seleccionados con los controladores SMC, LABC y LABC+I, así como el controlador propuesto SLABC en el software Simulink de Matlab y se los evaluará ante perturbaciones no modeladas y cambios de referencia tipo escalón.
- Se realizará un análisis comparativo entre los controladores SMC, LABC, LABC+I y SLABC, para lo cual se hará uso del tiempo de establecimiento, máximo sobre impulso y los índices de desempeño: ISE, ITSE e ISU.

### **1.4 MARCO TEÓRICO**

En esta área se presentan los principios teóricos utilizados en el proyecto, los cuales son base de sustentación del desarrollo de este trabajo. En esta área se recopila información sobre los sistemas no lineales y se presentan métodos heurísticos para la aproximación de sistemas de elevado orden a modelos de orden reducido. Seguido a esto se presentan los principios fundamentales del control basado en modo deslizante y del control basado en

álgebra lineal, para finalmente detallar los procesos con los cuales se pondrán a prueba los controladores que se desarrollarán en el capítulo 2.

### **1.4.1 SISTEMAS NO LINEALES**

Los sistemas de control son una disposición de elementos físicos que están conectados de tal forma que constituyen un conjunto autorregulable que se controla asimismo o a su vez sirve como controlar otro sistema [5]. De igual forma estos sistemas se controlan de manera dinámica y se constituyen en forma general por controladores, actuadores, proceso a controlar y sensores. El proceso a controlar, también conocido como planta, es el lugar donde ocurren fenómenos tanto físicos como químicos y estos en su mayoría tienen características de no linealidad.

Se entiende por sistema no lineal a aquellos sistemas que no siguen las dos propiedades fundamentales de los sistemas lineales, esto es, su salida no varía de manera proporcional a las variaciones en la entrada y no cumplen con el principio de superposición [5]. De manera general un sistema no lineal es cualquier sistema gobernado por ecuaciones no lineales, como pueden ser: ecuaciones diferenciales donde los coeficientes dependan de la variable dependiente, ecuaciones de derivadas parciales, producto o división entre variables dependientes, funciones exponenciales, logarítmicas o trigonométricas que tengan por argumento a la variable dependiente, entre otras.

### **1.4.2 APROXIMACIÓN DE SISTEMAS DE ELEVADO ORDEN A MODELOS DE ORDEN REDUCIDO**

La mayoría de procesos industriales tienen modelos matemáticos muy complejos y de orden elevado lo cual hace muy difícil el diseño de controladores basándose en el modelo matemático completo del proceso por lo cual es necesario realizar ciertas aproximaciones con el objetivo de obtener un modelo alternativo sencillo y que sea lo más cercano posible al modelo real. Las aproximaciones a modelos de orden reducido se las desarrolla de acuerdo a los requerimientos de los diferentes esquemas de control en los que se las vayan a emplear. Los modelos de orden reducido que se utilizan con mayor frecuencia son: modelo de Primer Orden más Tiempo Muerto (First Order Plus Deadtime, FOPDT) y el modelo de Segundo Orden más Tiempo muerto (Second Order Plus Deadtime, SOPDT). Debido a esto necesario conocer cómo se obtienen estos modelos y los conceptos necesarios para ello.

Los métodos para calcular y obtener modelos de orden reducido se basan en la curva de respuesta del proceso, misma que se obtiene a través de una prueba con el controlador en

lazo abierto y con el sistema trabajando en el punto de operación [6]. Con las condiciones previamente descritas la prueba se desarrolla con la aplicación de una variación de tipo escalón a la salida del controlador y a partir de ese instante se la salida del proceso se registra junto a la salida del controlador hasta que el sistema se estabilice en un nuevo punto de operación.

#### 1.4.2.1 Método de dos puntos de Alfaro para modelos FOPDT

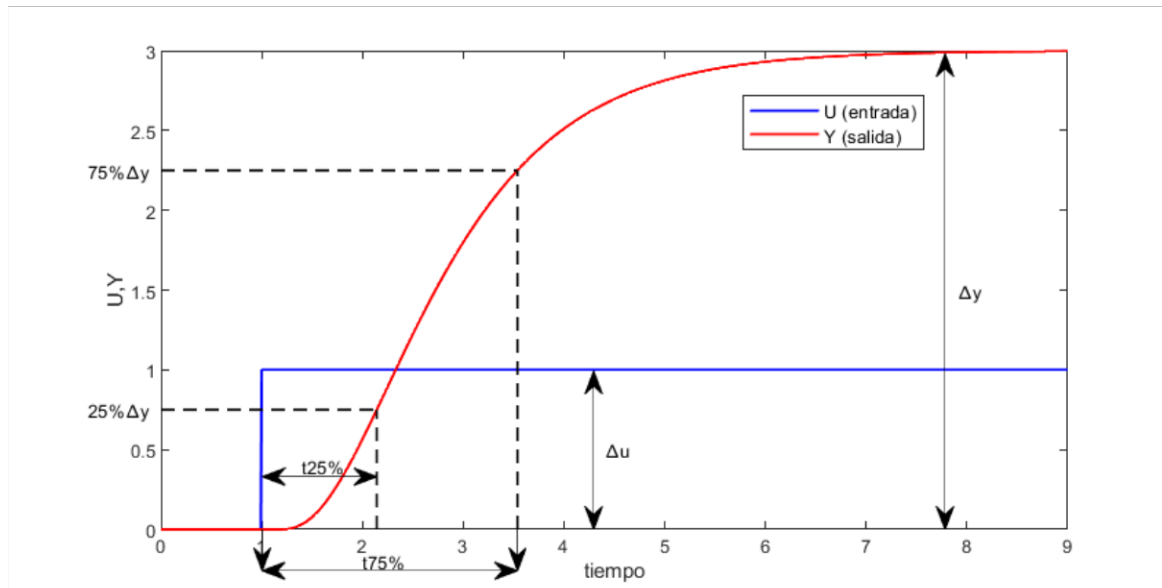
Para sintonizar controladores existen diversos métodos y a su vez una gran cantidad de ecuaciones de sintonización, mismas que se basan en modelos de orden reducido. De los métodos de sintonización que se basan en modelos de orden reducido mayoría de ellos tiene ecuaciones desarrolladas a partir del modelo FOPDT del sistema [6]. En la ecuación (1.1) se muestra la relación entrada salida (función de transferencia) de un sistema FOPDT

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{e^{-t_0 s}}{\tau s + 1} \quad (1.1)$$

Donde:

- $U(s)$ : Transformada de Laplace de la entrada del sistema
- $Y(s)$ : Transformada de Laplace de la salida del sistema
- $K$ : Ganancia del sistema en estado estacionario
- $\tau$ : Constante de tiempo
- $t_0$ : Retardo del sistema

El método de Alfaro permite calcular las constantes  $K$ ,  $t_0$  y  $\tau$  a partir de 2 puntos obtenidos de la respuesta del sistema. Estos puntos se obtienen a partir del tiempo que el sistema requiere para que su respuesta llegue a los valores del 25% ( $t_{25\%}$ ) y del 75% ( $t_{75\%}$ ) de su magnitud en estado estable [7]. La Figura 1.1 muestra la curva de reacción en lazo abierto un proceso sobreamortiguado junto a las características necesarias para la aplicación del método de Alfaro.



**Figura 1.1.** Curva de reacción en lazo abierto de un sistema Sobreamortiguado para la obtención de un modelo FOPDT mediante el método de Alfaro

La ganancia del sistema es la razón existente entre la variación de magnitud de su salida y la variación la de magnitud de su entrada, y queda descrita por la ecuación (1.2):

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta U} \quad (1.2)$$

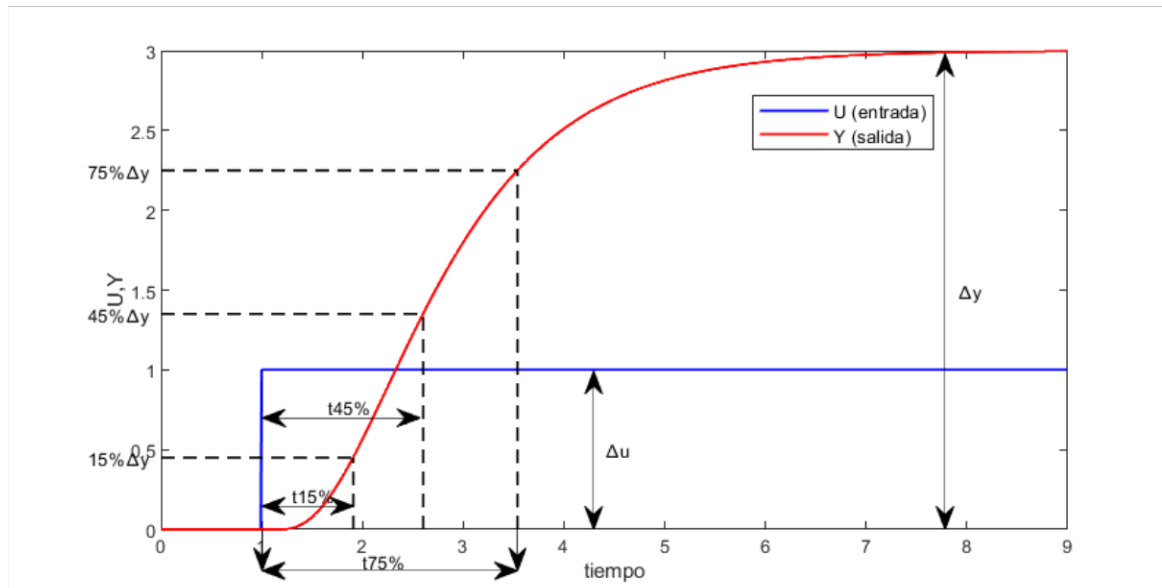
Los parámetros de constante de tiempo ( $\tau$ ) y tiempo muerto ( $t_0$ ) del sistema se estiman a partir de las ecuaciones (1.3) y (1.4), respectivamente.

$$\tau = 0.9102(t_{75\%} - t_{25\%}) \quad (1.3)$$

$$t_0 = 1.262t_{25\%} - 0.262t_{75\%} \quad (1.4)$$

#### 1.4.2.2 Método de tres puntos de Stark para modelos SOPDT

Para obtener un modelo SOPDT a partir de la curva de respuesta del sistema es necesario considerar tres puntos de la curva para identificarlo de manera correcta [6], [8]. La Figura 1.2 muestra la curva de respuesta de un sistema sobreamortiguado junto a las características necesarias para la aplicación del método de Stark.



**Figura 1.2** Curva de reacción en bucle abierto de un sistema Sobreamortiguado para la obtención del modelo SOPDT aplicando el método de Stark

La aplicación del método de Stark requiere conocer los tiempos que le toma al sistema alcanzar los valores del 15% ( $t_{15\%}$ ), 45% ( $t_{45\%}$ ) y del 75% ( $t_{75\%}$ ) de su variación en la salida ( $\Delta Y$ ) ante un cambio de referencia de tipo escalón en su entrada ( $\Delta U$ ), y de esta manera tener los parámetros necesarios para obtener el modelo SOPDT descrito por la ecuación (1.5). La Figura 1.2 muestra la curva de respuesta del sistema junto a los puntos necesarios para su correcta identificación mediante el método de Stark.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-t_0 s} \quad (1.5)$$

Las constantes  $\xi$ ,  $\omega_n$ , y  $t_0$  se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{t_{45\%} - t_{15\%}}{t_{75\%} - t_{15\%}} \quad (1.6)$$

Entonces

$$\xi = \frac{0.0805 - 5.547(0.475 - x)^2}{x - 0.356} \quad (1.7)$$

Luego

$$f_2(\xi) = \begin{cases} 0.708(2.811)^\xi & \text{si } \xi \leq 1 \\ 2.6\xi - 0.6 & \text{si } \xi > 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Después



$$\omega_n = \frac{f_2(\xi)}{t_{75\%} - t_{15\%}} \quad (1.9)$$

Seguido a esto se tiene

$$f_3(\xi) = 0.922(1.66)^\xi \quad (1.10)$$

$$t_0 = t_{45\%} - \frac{f_3(\xi)}{\omega_n} \quad (1.11)$$

Finalmente, la ganancia del modelo se la obtiene con la ecuación (1.2).

### 1.4.3 FUNDAMENTOS DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

El Control por Modos Deslizantes (Sliding Mode Control, SMC) es un tipo de control robusto basado en el modelo del proceso y que presenta una buena respuesta frente a no linealidades, retardos, incertidumbres, perturbaciones y errores de modelado [9].

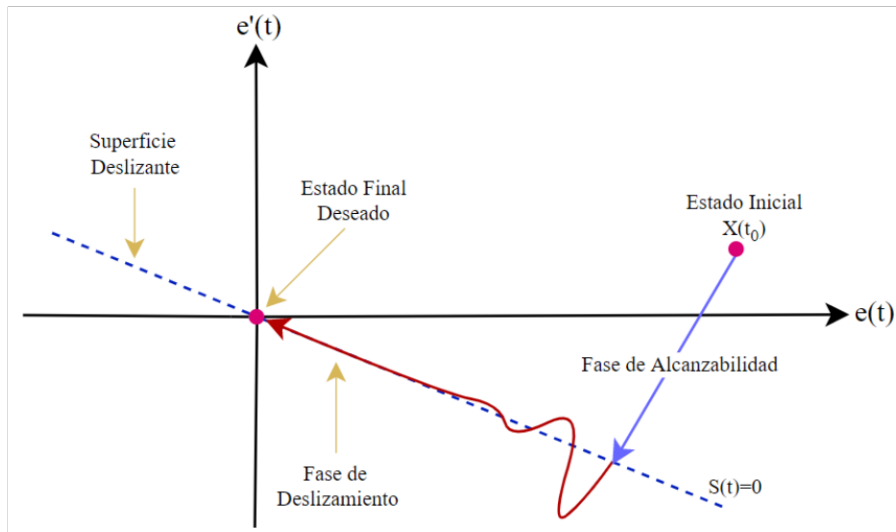
El control SMC se basa en establecer una superficie en la cual sea posible que el proceso se pueda deslizar con el fin de alcanzar un determinado valor establecido, la Figura 1.3 muestra la interpretación grafica del SMC. La estructura del controlador se modifica de acuerdo a la ley de control que lo rige al momento que su estado cruza por la superficie seleccionada. Para establecer un determinado comportamiento del sistema es necesario determinar una superficie deslizante  $S(t)$  que permita tener estabilidad y rendimiento de seguimiento, entre otros [2]. Existen dos modelos de superficies deslizantes propuestos en [10], mismos que se muestran en las ecuaciones (1.12) y (1.13).

$$S(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t) \quad (1.12)$$

$$S(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int e(t) \quad (1.13)$$

Donde:

- $n$ : Orden del sistema
- $\lambda$ : Parámetro de sintonización del controlador
- $e(t)$ : Error del sistema



**Figura 1.3.** Característica  $e(t)$  vs  $\frac{de(t)}{dt}$  del controlador SMC

La acción de control que rige sobre el controlador por modos deslizantes se compone por dos partes: la parte discontinua que se encarga de la alcanzabilidad y la parte equivalente o continua que se asocia con el deslizamiento, la ecuación (1.14) muestra la ley de control que rige al SMC.

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_d(t) \quad (1.14)$$

#### 1.4.4 FUNDAMENTOS DEL CONTROL BASADO EN ALGEBRA LINEAL

Los controladores basados en Algebra Lineal y métodos numéricos han sido estudiados y aplicados de manera amplia por investigadores de la Universidad Nacional de San Juan en Argentina en la Facultad de Ingeniería. Estos esquemas de control han tenido grandes aportes en el desarrollo de controladores orientados al seguimiento de trayectorias de robots móviles [4], [11]–[13], pero se basan en el modelo completo del proceso lo cual se limita obtener en una acción de control única que satisface específicamente a dicho proceso.

En [3] se propone una metodología para obtener leyes de control generalizadas basadas en algebra lineal a partir de modelo de orden reducido.

Los trabajos antes mencionados son aplicados a procesos con relación de controlabilidad menor a uno, para los casos en los que la relación de controlabilidad supera la unidad en [14] se propone una solución basándose en un esquema de modelo interno tipo Predictor de Smith y desarrollando el controlador en base a un modelo SOPDT.

### 1.4.5 PROCESOS DE ESTUDIO

Para el desarrollo del presente trabajo se seleccionaron 2 procesos con características no lineales, el primero con relación de controlabilidad menor a uno y el segundo con relación de controlabilidad mayor a uno. Dichos procesos se muestran a continuación.

#### 1.4.5.1 Reactor de Tanque Continamente Agitado (CSTR)

El sistema no lineal que se muestra a continuación es tomado de [2], este proceso trata de un reactor CSTR en que produce la reacción exotérmica  $A \rightarrow B$ . Esta reacción genera calor por lo que el reactor está rodeado por una chaqueta, misma en la que circula un fluido refrigerante. La Figura 1.4 muestra el reactor CSTR.

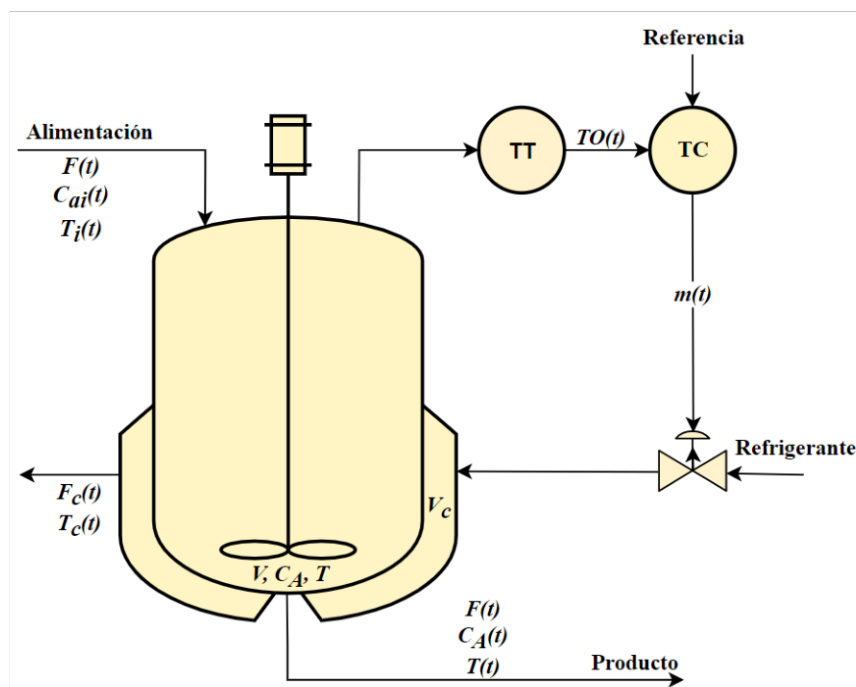


Figura 1.4. Reactor de Tanque Continamente Agitado [2]

Para efectos de estudio las siguientes características son asumidas:

- La chaqueta tiene una pérdida de calor insignificante
- Los reactivos y productos mantienen constantes sus capacidades caloríficas y densidades.
- La reacción genera un calor constante.
- El caudal de salida es igual al caudal de entrada, lo que implica que el líquido dentro del reactor tiene un nivel constante
- El acoplamiento entre la chaqueta y el reactor es perfecto
- La temperatura, presión y concentración de la mezcla es la misma en todos los puntos dentro del tanque

A partir de las consideraciones mencionadas se definirán las variables del proceso.

**Variables de entrada:**

- $F(t)$  = flujo del reactivo A
- $F_c(t)$  = flujo del refrigerante

**Variables de salida:**

- $C_A(t)$  = concentración del reactivo en el reactor.
- $T(t)$  = temperatura en el reactor
- $T_c(t)$  = temperatura del refrigerante

**Perturbaciones medibles:**

- $C_{ai}(t)$  = concentración del reactivo en la entrada.
- $T_i(t)$  = temperatura de ingreso del reactivo
- $T_{ci}(t)$  = temperatura de ingreso del refrigerante

Los parámetros de estado estable del proceso y otros valores de diseño son detallados en la tabla 1.1.

**Tabla 1.1.** Parámetros de diseño y valores en estado estable [2]

Variable	Valor	Variable	Valor
$C_A$	$1.16286 \left[ \frac{\text{Kgmol}}{\text{m}^3} \right]$	$V_c$	$1.82 \left[ \text{m}^3 \right]$
$C_{ai}$	$2.88 \left[ \frac{\text{Kgmol}}{\text{m}^3} \right]$	$F(t)$	$0.45 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \right]$
$T$	$88 \left[ ^\circ\text{C} \right]$	$F_{c\text{max}}$	$1.2 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$
$T_i$	$66 \left[ ^\circ\text{C} \right]$	$C_{pc}$	$4184 \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \right]$
$T_{ci}$	$27 \left[ ^\circ\text{C} \right]$	$\alpha$	50
Set Point	$88 \left[ ^\circ\text{C} \right]$	$\tau_T$	$0.33 \left[ \text{min} \right] \text{min}$
$\Delta H_R$	$-9.6e7 \left[ \frac{\text{J}}{\text{hKgmol}} \right]$	$K_o$	$0.0744 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{sKgmol}} \right]$

$C_p$	$1.815e^5 \left[ \frac{J}{hKgmol} \right]$	$E$	$1.182e^7 \left[ \frac{J}{Kgmol} \right]$
$U$	$3550 \left[ \frac{J}{sm^2°C} \right]$	$T_c$	$50.8216 [°C]$
$\rho_c$	$1000 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$	$\bar{m}$	0.2629 fracción CO
$A$	$5.4 [m^2]$	$V$	$7.08 [°C]$
$\rho$	$19.2 \left[ \frac{Kgmol}{m^3} \right]$	$\overline{TO}$	0.4

Donde:

- $TO(t)$  : transmisor de temperatura en escala de 0 a 1
- $V$  : volumen del reactor
- $k$  : coeficiente de la velocidad de la reacción
- $\Delta H_R$  : calor de la reacción, se asume que es constante
- $\rho$  : densidad del contenido del reactor
- $C_p$  : capacidad calorífica de los reactivos y productos
- $U$  : coeficiente global de transferencia de calor
- $A$  : Área de transferencia de calor
- $V_c$  : volumen de la chaqueta
- $\rho_c$  : densidad del refrigerante
- $C_{pc}$  : calor específica del refrigerante
- $\tau_T$  : constante de tiempo del sensor de temperatura
- $F_{max}$  : Máximo flujo a través de la válvula de control
- $\alpha$  : rangeabilidad de la válvula
- $k_0$  : parámetro de frecuencia de Arrhenius
- $E$  : energía de activación de la reacción
- $R$  : constante de la ley de gases ideales (8314.39)
- $m(t)$  : posición de la válvula en escala de 0 a 1

El sistema ilustrado en la Figura 1.4 desarrolla su dinámica en base al balance de moles, al balance energético del reactor y considerando que la temperatura de operación tiene un rango de 80°C a 100°C.

El balance de moles del reactivo A esta descrito por la ecuación (1.15)

$$\frac{dC_A(t)}{dt} = \frac{F(t)}{V} [C_{ai}(t) - C_A(t)] - kC_A^2(t) \quad (1.15)$$

El balance de energía en el reactor se describe mediante la ecuación (1.16)

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{F(t)}{V} [T_i(t) - T(t)] - kC_A^2 \frac{\Delta H_R}{\rho C_p} - \frac{UA}{V\rho C_p} \quad (1.16)$$

El balance de energía en la chaqueta esta descrito por la ecuación (1.17)

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{UA}{V_c \rho_c C_{pc}} [T(t) - T_c(t)] - \frac{F_c(t)}{V_c} [T_c(t) - T_{ci}(t)] \quad (1.17)$$

El coeficiente de velocidad de la reacción según Arrhenius es:

$$k = k_0 e^{\frac{-E}{R(T(t)+273)}} \quad (1.18)$$

La ecuación (1.19) describe el comportamiento del transmisor de temperatura

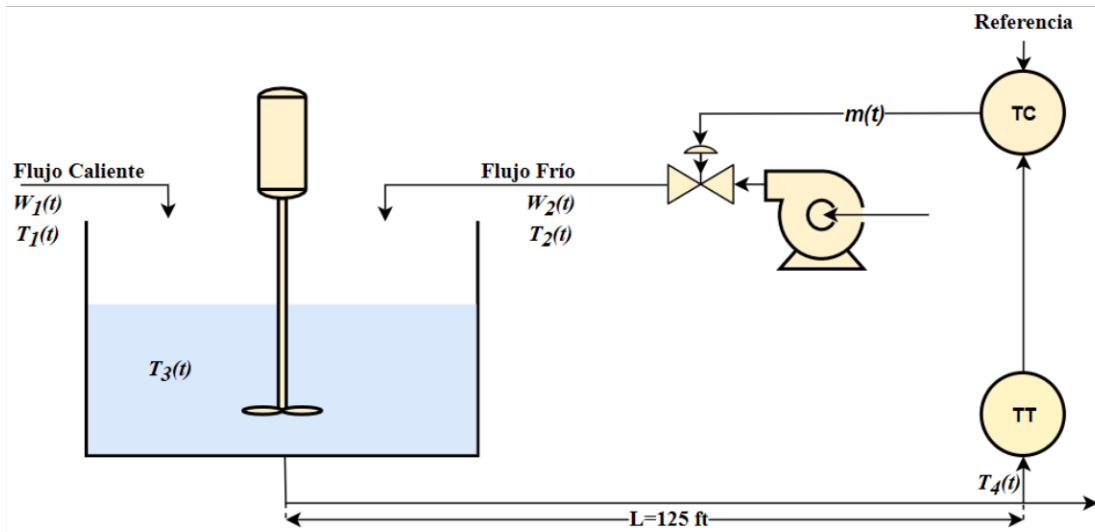
$$\frac{dTO(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_T} \left[ \frac{T(t) - 80}{20} - TO(t) \right] \quad (1.19)$$

Finalmente, la ecuación (1.20) describe a la válvula de control porcentual del sistema.

$$F_c(t) = F_{c\max} \alpha^{-m(t)} \quad (1.20)$$

#### 1.4.5.2 Tanque de Mezclado con Retardo Variable

La planta detallada a continuación ha sido tomado de [2], y describe el proceso de un tanque de mezclado que tiene como entrada a dos flujos: uno de ellos es el flujo de agua caliente  $W_1(t)$  y el otro es el flujo de agua fría  $W_2(t)$ . En este proceso el sensor para medir la temperatura de salida de la mezcla resultante se halla distanciado 125 ft del tanque, esto hace que existan errores de modelado debido a los retardos que genera la distancia existente entre el tanque y el transmisor. A su vez, el retardo del sistema varía en función al flujo caliente  $W_1(t)$  y tiene una relación inversamente proporcional, esto es, el retardo disminuye cuando el flujo caliente se incrementa, mientras que cuando el flujo caliente disminuye su caudal el retardo se incrementa. La Figura 1.5 muestra el tanque de mezclado con retardo variable.



**Figura 1.5.** Tanque de Mezclado con Retardo Variable

Este sistema de control se centra en regular la temperatura resultante de la mezcla de los dos fluidos, esto se logra controlando el posicionador que abre y cierra la válvula encargada de suministrar el fluido frío al tanque. Para desarrollar adecuadamente el proceso se debe considerar:

- La mezcla tiene un volumen constante.
- Los flujos de entrada crean una mezcla perfecta dentro del tanque
- Las pérdidas de calor del tanque y tuberías son insignificantes

A continuación, se detalla el modelo matemático del proceso:

La ecuación (1.21) describe el balance de energía en el tanque.

$$W_1(t)C_{p1}(t)T_1(t) + W_2(t)C_{p2}(t)(W_1(t) - W_2(t))C_{p3}(t)T_3(t) = V\rho C_{v3} \frac{dT_3(t)}{dt} \quad (1.21)$$

El tiempo muerto provocado por la longitud del tubo y la ubicación de sensor con respecto al tanque se describe por la ecuación (1.22)

$$T_4(t) = T_3(t - t_0) \quad (1.22)$$

La variación del retardo se define mediante la ecuación (1.23)

$$t_0 = \frac{LA_p}{W_1(t) + W_2(t)} \quad (1.23)$$

El transmisor de temperatura obedece a la ecuación (1.24)

$$\frac{dT_O}{dt} = \frac{1}{\tau_T} \left[ \frac{T_4(t) - 100}{100} - T_O(t) \right] \quad (1.24)$$

La ecuación (1.25) muestra la dinámica del posicionador de la válvula de control

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_{V_p}} [m(t) - V_p(t)] \quad (1.25)$$

Finalmente, la ecuación (1.26) define el flujo de entrada frío.

$$W_2(t) = \frac{500}{60} C_{VL} V_p(t) \sqrt{G_f \Delta P_v} \quad (1.26)$$

Donde se tiene:

- $W_1(t)$  : flujo másico del fluido caliente, lb/min
- $W_2(t)$  : flujo másico del fluido frío, lb/min
- $C_p$  : capacidad calorífica del fluido a una presión constante, Btu/lb-°F
- $C_v$  : capacidad calorífica del fluido a un volumen constante, Btu/lb-°F
- $T_1(t)$  : temperatura del fluido caliente, °F
- $T_2(t)$  : temperatura del fluido frío, °F
- $T_3(t)$  : temperatura del fluido en el tanque, °F
- $t_0(t)$  : tiempo muerto o retraso por transportación, min
- $T_4(t)$  : Temperatura  $T_3(t)$  retardada por  $t_0(t)$ , °F
- $\rho$  : densidad de la mezcla resultante, lbm/ft<sup>3</sup>
- $V$  : volumen del fluido, ft<sup>3</sup>
- $TO(t)$  : señal del transmisor de temperatura, por unidad
- $V_p(t)$  : posición del obturador de la válvula, 0=100% cerrada, 1=100% abierta
- $C_{VL}$  : coeficiente de flujo de la válvula, gpm/psi<sup>1/2</sup>
- $G_f$  : gravedad específica, adimensional
- $\Delta P_v$  : pérdida de presión a través de la válvula, psi
- $\tau_T$  : constante de tiempo del sensor de temperatura, min
- $\tau_{V_p}$  : Constante de tiempo del elemento final de control, min
- $A$  : sección transversal del tubo, ft<sup>2</sup>



$L$  : Distancia entre el sensor y el tanque, ft

Los parametros en estado estable del proceso y otros valores de diseño se muestran en la tabla 1.2

**Tabla 1.2.** Valores de los coeficientes y valores de las variables en estado estable [2]

Variable	Valor	Variable	Valor
$W_1$	$250 \left[ \frac{lb}{min} \right]$	$V$	$15 \left[ ft^3 \right]$
$W_2$	$191.17 \left[ \frac{lb}{min} \right]$	$\overline{TO}$	0.5
$C_{p1}$	$0.8 \left[ \frac{Btu}{lb^\circ F} \right]$	$V_p$	0.478
$C_{p2}$	$1 \left[ \frac{Btu}{lb^\circ F} \right]$	$C_{VL}$	$12 \left[ \frac{gpm}{psi^{\frac{1}{2}}} \right]$
$C_{p3}, C_{V3}$	$0.9 \left[ \frac{Btu}{lb^\circ F} \right]$	$\Delta P_v$	$16 \left[ psi \right]$
Set Point	$150 \left[ ^\circ F \right]$	$\tau_T$	$0.5 \left[ min \right]$
$T_1$	$250 \left[ ^\circ F \right]$	$\tau_{vp}$	$0.4 \left[ min \right]$
$T_2$	$50 \left[ ^\circ F \right]$	$A$	$0.2006 \left[ ft^2 \right]$
$T_3$	$150 \left[ ^\circ F \right]$	$L$	$125 \left[ ft \right]$
$\rho$	$63.4 \left[ \frac{lb}{ft^3} \right]$	$m$	0.478 CO

## 2 METODOLOGÍA

El método utilizado para desarrollar el presente trabajo de titulación es deductivo y tiene un enfoque cuantitativo. Este proyecto tiene una metodología descriptiva debido a que se desarrollan controladores basados tanto en álgebra lineal como en modos deslizantes, y se los evalúan en los diferentes procesos seleccionados frente a diversas pruebas, con el objetivo de recopilar suficiente información con la cual analizar el funcionamiento de los controladores mediante una comparación basada en los índices de desempeño de cada uno y así determinar el controlador con mejores resultados frente a estos parámetros de evaluación. La recolección de información se la hizo a partir de artículos científicos, tesis y libros con contenido relacionado a la temática de este trabajo. Finalmente, a partir de los resultados determinados se verifica que se cumplen con los objetivos que se han planteado en el presente trabajo de titulación.

En esta área se expone el diseño de los controladores LABC, LABC+I, y SMC a partir del modelo FOPDT para procesos con relación de controlabilidad menor a uno, luego se muestra el desarrollo del controlador basado en álgebra lineal a partir de un modelo SOPDT aplicado a un esquema de tipo predictor de Smith para dar solución a procesos con relación de controlabilidad mayor a uno. Finalmente se desarrolla el esquema de control SLABC y se presentan sus variantes frente a procesos con relación de controlabilidad menor a uno y procesos con relación de controlabilidad mayor a uno.

### 2.1 DISEÑO DE CONTROLADOR POR MODOS DESLIZANTES (SMC) UTILIZANDO UNA SUPERFICIE DESLIZANTE TIPO PID APLICADO A MODELOS FOPDT UTILIZANDO LA APROXIMACIÓN DE TAYLOR

El diseño del controlador SMC tipo PID se obtiene partir de un modelo FOPDT del sistema donde el retardo es aproximando mediante Taylor.

Partiendo del modelo FOPDT descrito por la ecuación (1.1) y aproximando el retardo del modelo mediante la ecuación (2.1), se tiene:

$$e^{-t_0s} \cong \frac{1}{t_0s + 1} \quad (2.1)$$

Reemplazando la ecuación (2.1) en la ecuación (1.1), se tiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)(t_0s + 1)} \quad (2.2)$$

Llevando la ecuación (2.2) al dominio del tiempo se obtiene:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \tau_1 \frac{dy(t)}{dt} + \tau_2 y(t) = K_g u(t) \quad (2.3)$$

Donde

$$K_g = \frac{K}{\tau t_0}; \quad \tau_1 = \frac{\tau + t_0}{\tau t_0}; \quad \tau_2 = \frac{1}{\tau t_0} \quad (2.4)$$

La superficie deslizante tipo PID para el controlador SMS está definida por la ecuación (2.5)

$$S(t) = \frac{de(t)}{dt} + \lambda_1 e(t) + \lambda_0 \int_0^t e(t) dt \quad (2.5)$$

En donde el error está definido mediante la resta aritmética del valor deseado (referencia) y la señal medida en la salida del proceso y queda descrito por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.5) se tiene:

$$S(t) = \frac{d(r(t) - y(t))}{dt} + \lambda_1 (r(t) - y(t)) + \lambda_0 \int_0^t e(t) dt \quad (2.7)$$

El controlador tiene por objeto manipular la variable controlada y hacer que esta iguale su valor con el valor de la referencia en todo instante, esto implica que el error junto a todas sus derivas tiene que ser cero. Para asegurar esta condición se debe cumplir con:

$$\frac{dS(t)}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

Derivando la ecuación (2.7) se tiene:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dr(t)}{dt} - \lambda_1 \frac{dy(t)}{dt} + \lambda_0 e(t) = 0 \quad (2.9)$$

Sumando las ecuaciones (2.9) y (2.3), y despejando la acción de control se obtiene la parte continua o equivalente del controlado SMC:

$$u_{eq}(t) = \frac{1}{K_g} \left( \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dr(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} (\tau_1 - \lambda_1) + \lambda_0 e(t) + \tau_2 y(t) \right) \quad (2.10)$$

Para suavizar y simplificar la acción de control se eliminan las derivadas de la referencia, se hace  $\tau_1 = \lambda_1$  y se tiene:

$$u_{eq}(t) = \frac{1}{K_g} (\lambda_0 e(t) + \tau_2 y(t)) \quad (2.11)$$

La componente discontinua del controlador SMC se describe con la ecuación (2.12)

$$u_d(t) = k_d \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta} \quad (2.12)$$

El controlador SMC con superficie PID se define mediante la ecuación (2.13)

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_d(t) \quad (2.13)$$

Para introducir el controlador a un sistema que se encuentra estado estable se debe considerar la acción de control en estado estable descrita por:

$$m(t) - \bar{m} = u(t) \quad (2.14)$$

Donde  $\bar{m}$  representa el valor de la acción de control en estado estacionario. Sustituyendo la ecuación (2.11) y la ecuación (2.12) en la ecuación (2.14) se obtiene:

$$m(t) = \bar{m} + \left[ \frac{1}{K_g} (\lambda_0 e(t) + \tau_2 (y(t) - \bar{y})) \right] + k_d \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta} \quad (2.15)$$

Donde  $\bar{y}$  es el valor de salida de la variable controlada en estado estacionario.

Para tener una superficie deslizante más suave se elimina la derivada de la referencia en la ecuación (2.7) y se tiene:

$$S(t) = \text{sign}(K) \left[ -\frac{dy(t)}{dt} + \lambda_1 e(t) + \lambda_0 \int_0^t e(t) dt \right] \quad (2.16)$$

### 2.1.1 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN

La sintonización del controlador por modos deslizantes SMC se la hace a partir de la obtención de los valores que satisfacen la ecuación (2.17)

$$\tau_1 = \lambda_1; \lambda_0 = \frac{1}{4} (\lambda_1)^2; k_d = \frac{0.51}{|K|} \left( \frac{\tau}{t_0} \right)^{0.76}; \delta = 0.68 + 0.12 |K| k_d \lambda_1 \quad (2.17)$$

## 2.2 DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN ALGEBRA LINEAL (LABC Y LABC+I) APLICADO A MODELOS FOPDT UTILIZANDO LA APROXIMACIÓN DE TAYLOR

En esta área se muestra el diseño de los controladores basados en algebra lineal (LABC y LABC+I), aplicado a un modelo FOPDT genérico y así obtener una ley de control general para cualquier proceso que sea aproximable a modelos de este tipo.

Partiendo de la ecuación (2.3)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \tau_1 \frac{dy(t)}{dt} + \tau_2 y(t) = K_g u(t)$$

Donde

$$K_g = \frac{K}{\tau t_0}; \quad \tau_1 = \frac{\tau + t_0}{\tau t_0}; \quad \tau_2 = \frac{1}{\tau t_0}$$

Y con el siguiente cambio de variable para definir los estados del sistema

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= \dot{y}_1(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se tiene:

$$\dot{y}_2(t) = K_g u(t) - \tau_1 y_2(t) - \tau_2 y_1(t)$$

Con el fin de llevar el sistema a espacios de estado, donde queda descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tau_2 & -\tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_g \end{bmatrix} u(t) \quad (2.19)$$

### 2.2.1 CONTROLADOR LABC

El diseño del controlador LABC se lo desarrolla en tiempo discreto por lo cual se discretiza el modelo representado por la ecuación (2.19) usando la técnica de Euler y discretizando con un periodo de muestreo  $T$ . Para que los valores que debe tomar la variable manipulada ( $u(t)$ ) para obligar al sistema a seguir una determinada dinámica y que tenga un error ínfimo, se deben encontrar las condiciones necesarias para que la ecuación lineal del sistema tenga una solución exacta.

Los valores de  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  y  $u(t)$  para un tiempo discreto  $t = nT$ , con  $n \in \{0,1,2,\dots\}$ , serán denotados como  $y_{1,n}$ ,  $y_{2,n}$  y  $u_n$ , respectivamente.

La discretización de la ecuación (2.19) tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} + T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tau_2 & -\tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_g \end{bmatrix} u_n \right\} \quad (2.20)$$

Desarrollando la ecuación (2.20) para separar la acción de control se tiene:

$$\begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_2 \end{bmatrix} y_{1,n} + T \begin{bmatrix} 1 \\ -\tau_1 \end{bmatrix} y_{2,n} + T \begin{bmatrix} 0 \\ K_g \end{bmatrix} u_n \quad (2.21)$$

Pasando al lado izquierdo la acción de control

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ K_g \end{bmatrix} u_n = \begin{bmatrix} y_{1,n+1} - y_{1,n} - T y_{2,n} \\ y_{2,n+1} - y_{2,n} + \tau_2 T y_{1,n} + \tau_1 T y_{2,n} \end{bmatrix}$$

Despejando la acción de control se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ K_g \end{bmatrix} u_n = \begin{bmatrix} \frac{y_{1,n+1} - y_{1,n}}{T} - y_{2,n} \\ \frac{y_{2,n+1} - y_{2,n} + \tau_2 T y_{1,n} + \tau_1 T y_{2,n}}{T} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Es necesario que la diferencia existente entre el valor medido de la variable manipulada y el valor del perfil o referencia deseada tienda a cero. Se define entonces esta diferencia como error de seguimiento ( $e_1$ ), entonces la condición mencionada puede ser descrita mediante:

$$e_{1,n+1} = k_1 e_{1,n} \quad (2.23)$$

Donde el error a futuro es proporcional al error actual. Para que el error disminuya progresivamente en cada periodo de muestreo es necesario que:

$$0 < k_1 < 1 \quad (2.24)$$

Expandiendo la ecuación (2.23) en función de la referencia, la variable controlada y error se tiene:

$$\underbrace{y_{1ref,n+1} - y_{1,n+1}}_{e_{1,n+1}} = k_1 \underbrace{(y_{1ref,n} - y_{1,n})}_{e_{1,n}} \quad (2.25)$$

$$y_{1,n+1} = y_{1ref,n+1} - k_1 e_{1,n}$$

Para hacer que la ecuación (2.22) tenga una solución exacta se debe cumplir con:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A \ b]) \quad (2.26)$$

Lo que implica que:

$$y_{1,n+1} - y_{1,n} - Ty_{2,n} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{2,n} = \frac{y_{1,n+1} - y_{1,n}}{T} \quad (2.27)$$

Sustituyendo la ecuación (2.25) en la ecuación (2.27) se tiene:

$$y_{2,n} = \frac{y_{1ref,n+1} - k_1 e_{1,n} - y_{1,n}}{T} \quad (2.28)$$

El valor de  $y_{2,n}$  que satisface la ecuación (2.28) será denominado como  $y_{2ez,n}$  y es el valor que debe tomar la variable  $y_{2,n}$  para forzar el error de seguimiento a cero, por lo cual se la llamara variable sacrificada.

$$y_{2ez,n} = \frac{y_{1ref,n+1} - k_1 e_{1,n} - y_{1,n}}{T} \quad (2.29)$$

El error de seguimiento existente entre  $y_{2ez,n}$  y  $y_{2,n}$  se describe mediante:

$$\begin{aligned} e_{2,n} &= y_{2ez,n} - y_{2,n} \\ e_{2,n+1} &= k_2 e_{2,n} \\ \underbrace{y_{2ez,n+1} - y_{2,n+1}}_{e_{2,n+1}} &= k_2 \underbrace{(y_{2ez,n} - y_{2,n})}_{e_{2,n}} \Rightarrow y_{2,n+1} = y_{2ez,n+1} - k_2 e_{2,n} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Donde

$$0 < k_2 < 1 \quad (2.31)$$

Sustituyendo la ecuación (2.30) en la ecuación (2.22) se tiene:

$$u_n = \frac{1}{K_g} \left( \frac{y_{2ez,n+1} - k_2 e_{2,n} - y_{2,n}}{T} + \tau_2 y_{1,n} + \tau_1 y_{2,n} \right) \quad (2.32)$$

Para encontrar  $u_n$  se debe estimar el valor de  $y_{2ez,n+1}$ . Este valor es estimado mediante la aproximación de Taylor queda descrito de la siguiente forma:

$$y_{2ez,n+1} = y_{2ez,n} + \frac{dy_{2ez,n}}{dt} T + \frac{d^2 y_{2ez,n}}{dt^2} \frac{T^2}{2} + \dots + C \quad (2.33)$$

Donde C representa los términos complementarios.

Escogiendo pequeñas muestras de tiempo  $y_{2ez,n+1}$  se puede aproximar truncando la ecuación (2.33) a partir de la primera derivada, y se tiene que:

$$y_{2ez,n+1} \approx y_{2ez,n} + \frac{dy_{2ez,n}}{dt} T \approx 2y_{2ez,n} - y_{2ez,n-1} \quad (2.34)$$

De igual forma se puede estimar el próximo valor de  $y_{1,n+1}$ .

Modificando la ecuación (2.32) para tener una respuesta dinámica más suave la acción de control queda descrita por:

$$u_n = \frac{1}{K_g} \left( \frac{y_{2ez,n+1} - k_2 e_{2,n} - y_{2,n}}{T} + \tau_2 y_{1,n} + \tau_1 y_{2ez,n} \right) \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) describe la acción de control del controlador LABC aplicado a sistemas aproximables a modelos de orden reducido tipo FOPDT, donde:

$$y_{2,n} = \frac{y_{1,n} - y_{1,n-1}}{T}$$

Se redefine  $y_{2,n}$  por valor de por la expresión anterior debido a que  $y_{2,n}$  es la se obtiene de derivar la variable controlada, ver ecuación (2.18). El parámetro para estimar el tiempo de muestreo se toma [3] y se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\tau}{10} < T < \frac{\tau}{4} \quad (2.36)$$

## 2.2.2 CONTROLADOR LABC+I

Para que el controlador LABC logre llevar el sistema hacia la referencia (error cero en estado estable) y que esté presente un desempeño adecuado frente a perturbaciones, es necesario añadir un término integral en el diseño del controlador y al controlador resultante se lo denominara LABC+I. Añadiendo un término integral a la ecuación (2.29) se tiene:

$$y_{2ez,n} = \frac{y_{1ref,n+1} - k_1 e_{1,n} - y_{1,n}}{T} + T_i \quad (2.37)$$

El termino integral actúa sobre la variable sacrificada por lo cual se define mediante:

$$T_i = TK_i \sum_{i=0}^n (y_{2ez,n} - y_{2,n}) \quad (2.38)$$

Simplificando la ecuación (2.38) se tiene:

$$T_i = TK_i e_{T,n}$$



Donde  $e_{T,n}$  es el error acumulado con respecto a la variable sacrificada y se define por:

$$e_{T,n} = e_{2,n} + e_{T,n-1} \quad (2.39)$$

Y la constante  $K_i$  se define mediante la siguiente ecuación:

$$K_i = \frac{0.2k_2}{\tau} \quad (2.40)$$

De esta manera la ecuación (2.37) puede escribirse de la siguiente forma

$$y_{2ez,n} = \frac{y_{1ref,n+1} - k_1 e_{1,n} - y_{1,n}}{T} + K_i T e_{T,n}$$

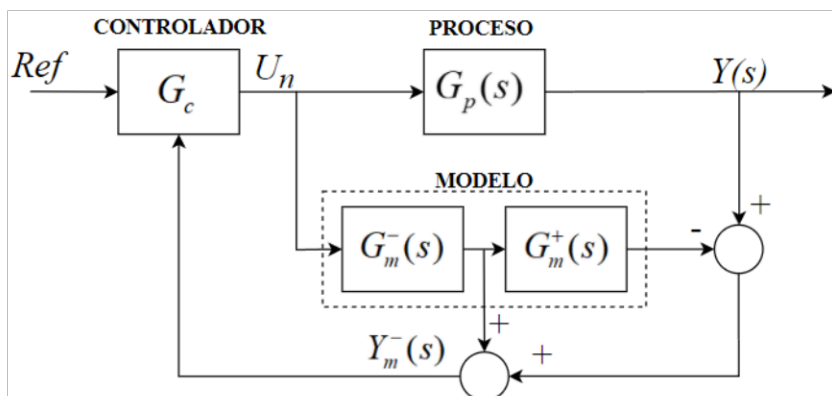
Y a partir de la expresión anterior se estima el valor futuro de  $y_{2ez,n}$  al igual que se hizo anteriormente mediante la ecuación (2.34) y la acción de control es igual que la descrita por la ecuación (2.35) con la consideración que tanto  $y_{2ez,n}$  como  $y_{2ez,n+1}$  albergan dentro de sí al termino integral y el error  $e_{2,n}$  se calcula restando  $y_{2ez,n}$  y  $y_{2,n}$  sin considerar el termino integral. Por consiguiente, la acción de control es:

$$u_n = \frac{1}{K_g} \left( \frac{y_{2ez,n+1} - k_2 e_{2,n} - y_{2,n}}{T} + \tau_2 y_{1,n} + \tau_1 y_{2ez,n} \right)$$

### 2.3 DISEÑO DE CONTROLADOR BASADO EN ALGEBRA LINEAL APLICADO A MODELOS SOPDT UTILIZANDO EL ESQUEMA DE MODELO INTERNO (IMC) TIPO PREDICTOR DE SMITH PARA SISTEMAS CON RELACIÓN DE CONTROLABILIDAD

$$\frac{t_0}{\tau} > 1$$

El diseño del controlador parte del esquema de modelo interno tipo predictor de Smith y basa su desarrollo en el modelo SOPDT mostrada en la ecuación (1.5) [3], [14]. En la Figura 2.1 se muestra la topología del esquema de control.



**Figura 2.1** Esquema de modelo interno tipo predictor de Smith

Donde:

- $Ref$  : Referencia del sistema
- $G_c$  : Controlador basado en algebra lineal
- $G_p(s)$  : Planta o proceso
- $G_m^-(s)$  : Parte invertible del modelo del proceso
- $G_m^+(s)$  : Parte no invertible del modelo del proceso
- $Y(s)$  : Salida del proceso
- $Y_m^-(s)$  : Respuesta de la parte no invertible

En la Figura 2.1 se observa que la realimentación que recibe el controlador es la respuesta del modelo sin su parte no invertible, lo que significa que se puede diseñar el controlador a partir del modelo de la función de transferencia de la parte invertible del modelo de la planta. A partir del modelo SOPDT de la ecuación (1.5) se establen las partes invertible y no invertible del sistema y se tiene:

$$G(s) = G_m^-(s) G_m^+(s) \quad (2.41)$$

$$G_m^-(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad ; \quad G_m^+(s) = e^{-t_0 s}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$\tau_2 = \omega_n^{-2} \quad \tau_1 = 2\xi \omega_n \quad K_g = K \tau_2 \quad (2.42)$$

$$G_m^-(s) = \frac{K_g}{s^2 + \tau_1 s + \tau_2}$$

El diseño del controlador se desarrolla a partir de la ecuación (2.42), que tiene la misma forma que la ecuación (2.2) de la cual se parte para el diseño del controlador LABC

previamente descrito, esto significa que el desarrollo del controlador para el esquema tipo predictor de Smith es el mismo que para el controlado LABC, por lo que no se presentara el diseño de este.

### 2.3.1 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN

A pesar de que el diseño de este controlador es idéntico al diseño del controlador LABC, ciertos parámetros de sintonización difieren entre sí, esto se debe a que en el controlador LABC se sintoniza a partir de la constante de tiempo, tiempo muerto y ganancia del modelo FOPDT, y el controlador con el esquema de predictor de Smith al basarse en un modelo SOPDT sus parámetros deben ajustarse para tener los equivalentes a la constante de tiempo y al retardo del sistema.

A partir de la ecuación (2.42) se tiene:

$$G_m^-(s) = \frac{K_g}{s^2 + \tau_1 s + \tau_2} = \frac{K_g}{(\tau_{m1}s + 1)(\tau_{m2}s + 1)} \quad (2.43)$$

Donde:

$$\tau_{m1} = -0.5 \frac{(-\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_2})}{\tau_2^2} \quad \tau_{m2} = 0.5 \frac{(\tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_2})}{\tau_2} \quad (2.44)$$

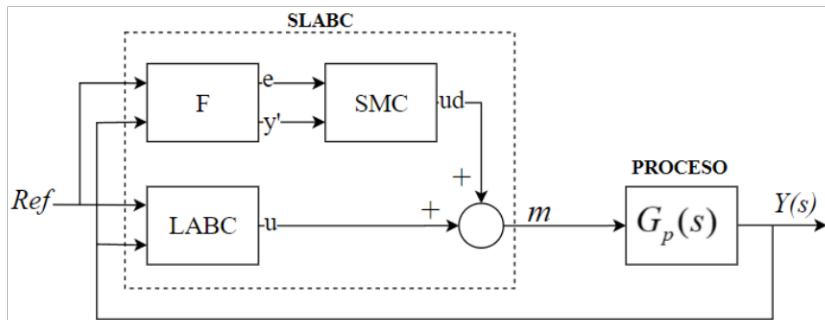
Entonces los parámetros de sintonización son:

$$0 < k_x < 1; \quad \frac{\min(\tau_{m1}, \tau_{m2})}{15} < T < \frac{\min(\tau_{m1}, \tau_{m2})}{4}; \quad K_i = \frac{0.2k_x}{t_0} \quad (2.45)$$

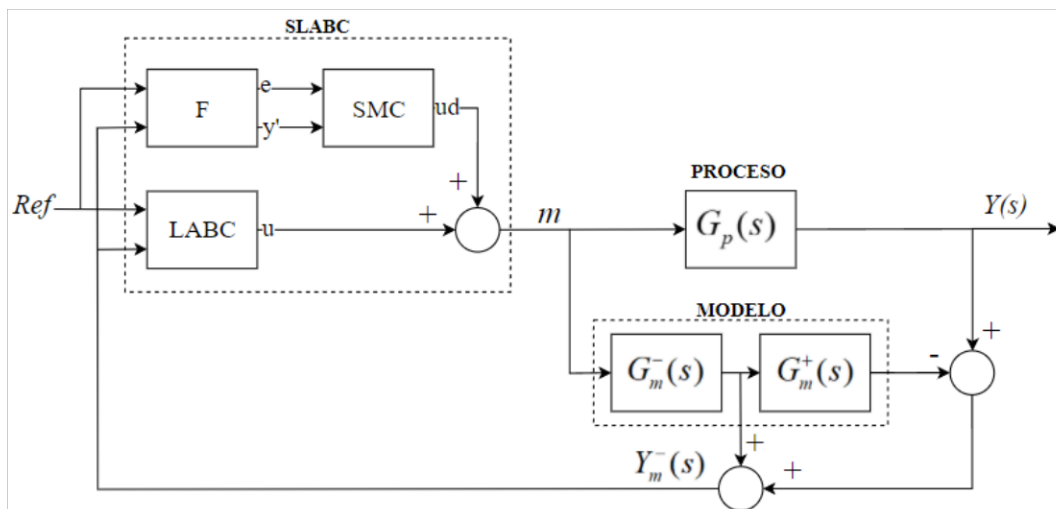
Y  $t_0$  es tomado de la ecuación (1.11)

## 2.4 PROPUESTA DE CONTROLADOR HIBRIDO BASADO EN ALGEBRA LINEAL Y MODOS DESLIZANTES (SLABC)

El controlador SLABC que se propone es una topología de control híbrido que hace posible tener las ventajas del controlador LABC y a su vez mejore la respuesta de este en estado estable, para ello se lo combina con la parte discontinua (ud) del controlador SMC, la cual se encarga de la alcanzabilidad y añade robustez al controlador. En la Figura 2.2 se observa el esquema del controlador SLABC para procesos con relación de controlabilidad menor a uno, en tanto que la Figura 2.3 muestra el esquema del controlador SLABC para procesos con relación de controlabilidad mayor a uno.



**Figura 2.2** Esquema SLABC para procesos con relación de controlabilidad menor a uno



**Figura 2.3** Esquema SLABC para procesos con relación de controlabilidad mayor a uno

Donde

- Ref* : Referencia del sistema
- LABC : Controlador basado en algebra lineal
- F : Algoritmo que habilita el ingreso la acción de control del SMC
- SMC : Parte discontinua del controlador por modos deslizantes
- e* : Diferencia algebraica entre la referencia y la realimentación que llega a F, puede tomar el valor de la operación o el valor de cero según la condición de operación y la lógica de F
- y'* : Derivada de la realimentación que llega a F, puede tomar el valor de la operación o el valor de cero según la condición de operación y la lógica de F
- u* : Acción de control del controlador LABC
- ud* : Acción de control discontinua
- m* : Acción de control del controlador SLABC

- $G_p(s)$  : Sistema a controlar
- $G_m^-(s)$  : Parte invertible del modelo del proceso
- $G_m^+(s)$  : Parte no invertible del modelo del proceso
- $Y(s)$  : Salida del proceso
- $Y_m^-(s)$  : Respuesta de la parte no invertible del modelo

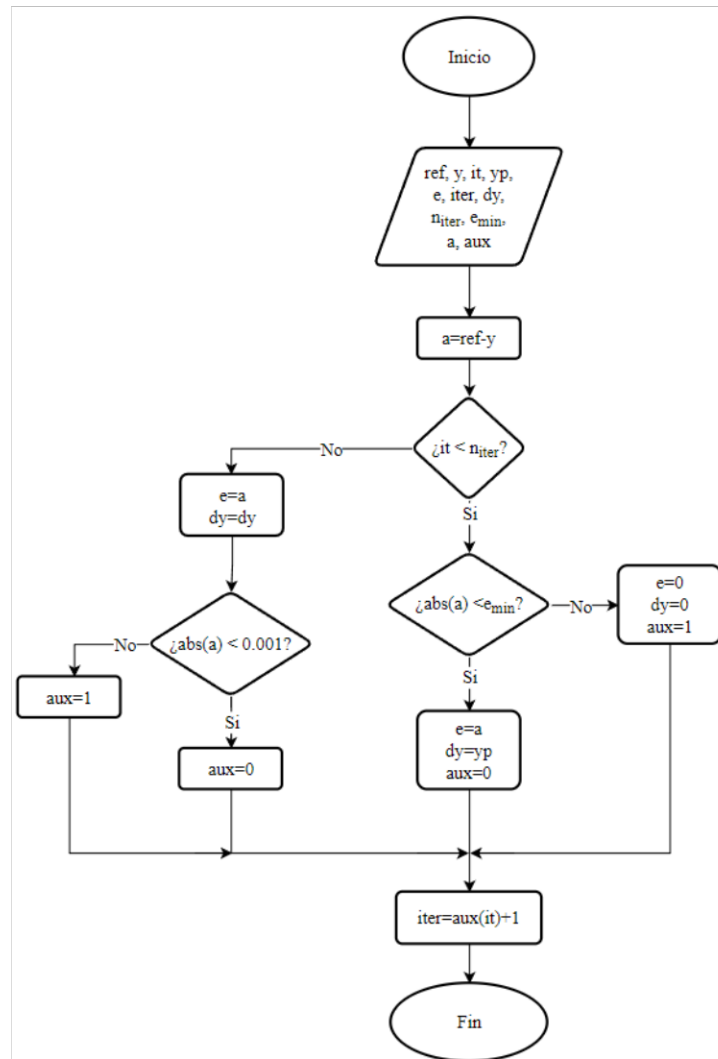
En las figuras 2.2 y 2.3 se puede observar que la acción de control que llega al proceso es la suma resultante entre las salidas de los controladores LABC y SMC. También se observa que existe un bloque F del cual se obtienen las entradas para que el controlador SMC genere su acción de control. El bloque F es un algoritmo que se encarga de controlar el ingreso de la acción de control del SMC hacia la acción de control que llega al proceso.

El algoritmo del bloque F permite que la acción de control del SMC haga un aporte sobre la acción de control que llega al proceso cuando el controlador LABC haya sido capaz de llevar al sistema a un error menor al 5%, o a su vez que hayan pasado cierto número de iteraciones ( $n_{iter}$ ) y el controlador LABC no haya sido capaz de acercar el sistema a la referencia. La ecuación (2.46) muestra cómo se estima el número de iteraciones del algoritmo cuando se utiliza el esquema SLABC para procesos con relación de controlabilidad menor a uno, en tanto que la ecuación (2.47) muestra cómo se estima este valor para el esquema SLABC con relación de controlabilidad mayor a uno.

$$n_{iter} \leq \text{round}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (2.46)$$

$$n_{iter} \leq \text{round}\left(\frac{\max(\tau_{m1}, \tau_{m2})}{T}\right) \quad (2.47)$$

Donde  $T$  es el tiempo de muestreo seleccionado para el controlador LABC,  $\tau$  es la constante de tiempo del modelo FOPDT del proceso a controlar y  $(\tau_{m1}, \tau_{m2})$  son tomado de la ecuación (2.44). En la Figura 2.4 se muestra la lógica del algoritmo del bloque F.



**Figura 2.4.** Algoritmo del bloque F

Donde:

- ref : Referencia del sistema (entrada)
- y : Señal de realimentación del sistema (entrada)
- it : Cuenta de iteraciones (entrada)
- yp : Derivada de y (entrada)
- e : Error o cero (salida)
- iter : Conteo de iteraciones (salida)
- dy : Derivada de Y o cero (salida),  $y'$  de los esquemas de las figuras 2.2 y 2.3
- $n_{iter}$  : Número máximo de iteraciones
- $e_{min}$  : Mínimo error para que entre en acción el SMC (menor al 5%)
- a : Diferencia algebraica entre la referencia y el valor medido
- aux : Variable para reiniciar el conteo de las iteraciones

### 2.4.1 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN

Los parámetros con los cuales se sintoniza el controlador SLABC aplicado a procesos con relación de controlabilidad menor a uno, ver Figura 2.2, se toman de los controladores SMC y LABC desarrollados en base al modelo FOPDT del sistema. El error mínimo con el cual la acción de control del SMC puede hacer un aporte en el esquema SLACB mostrado en las figuras 2.2 y 2.3 esta descrito por la ecuación (2.48).

$$0 < e_{\min} < 0.05 \quad (2.48)$$

Para el controlador SLABC aplicado a procesos con relación de controlabilidad mayor a uno mostrado en la Figura 2.3, la sintonización se realiza con los parámetros de sintonización del controlador basado en Algebra Lineal aplicado a un esquema de tipo predictor de Smith desarrollado en la sección 2.3, en tanto que los parámetros de la parte discontinua del SMC son desarrollados a partir de [8], y se muestran en la ecuación

$$k_d = \frac{0.61}{|K|} \left( \frac{\tau_{m2}}{\tau_{m1}} \right)^{0.76} ; \quad \lambda_1 = \tau_1 ; \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_1^2}{4} ; \quad \delta = 0.61 + 0.12(|K|k_d\lambda_1) \quad (2.49)$$

Donde  $K$  y  $\tau_1$  son tomados de la ecuación (2.41), y  $\tau_{m1}$  junto a  $\tau_{m2}$  son tomados de la ecuación (2.44).

### 3 RESULTADOS, RECOMENDACIONES

### CONCLUSIONES

### Y

En esta área se muestran los resultados obtenidos a partir de la simulación de los diferentes controladores, aplicados a los 2 sistemas seleccionados, con la ayuda del software de simulación Simulink de Matlab.

Para ambos procesos los resultados son mostrados de la siguiente manera:

- Aproximación de los procesos a modelos de orden reducido con retardo.
- Obtención de los parámetros de sintonización los controladores.
- Evaluación del desempeño de los controladores frente a pruebas de cambio de referencia.
- Evaluación del desempeño de los controladores frente a pruebas de rechazo de perturbaciones.

Las pruebas a las que son sometidos los controladores son:

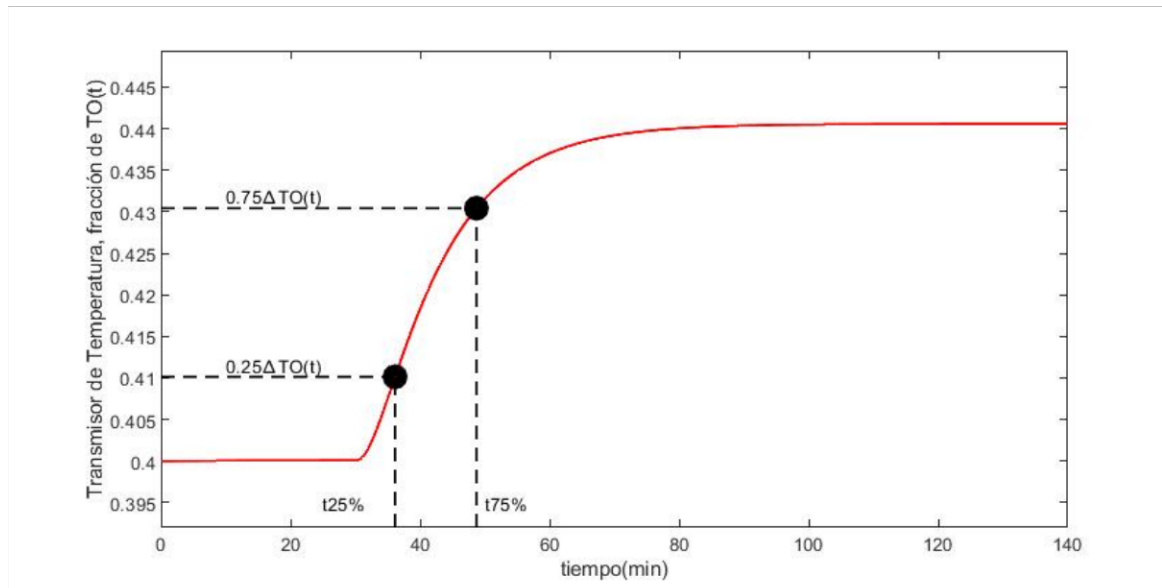
1. Realización de varios cambios de referencia, tanto positivos como negativos, con el objetivo de evaluar los índices de desempeño ITSE, ISE, ISU, tiempo de asentamiento ( $t_s$ ) y máximo sobre impulso ( $M_p$ ).
2. Introducción de perturbaciones a los sistemas para evaluar el desempeño de rechazo a perturbaciones de los diferentes esquemas de control, de igual forma se evalúan los índices ISE, ITSE e ISU.

#### 3.1 REACTOR DE TANQUE CONTINUAMENTE AGITADO (CSTR) CON RELACIÓN DE CONTROLABILIDAD $\frac{t_0}{\tau} \leq 1$

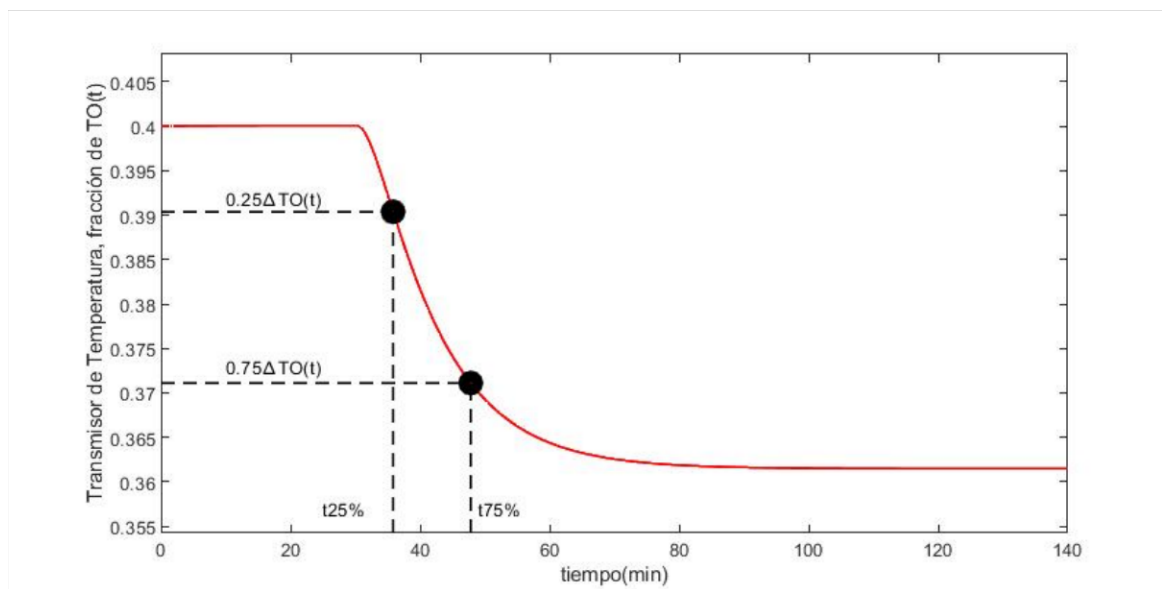
##### 3.1.1 APROXIMACIÓN A MODELO DE PRIMER ORDEN CON RETARDO

El modelo FOPDT del reactor se obtiene a partir de aplicar una variación de referencia, tanto positiva como negativa, del 10% en la señal de control que actúa sobre la apertura de la válvula en el instante  $t = 20$  [min], es decir de 0.2629 a 0.28919 y de 0.2629 a 0.23661. Estas variaciones de referencia sirven para encontrar una función de transferencia promediada y que se acerque lo mejor posible a la respuesta del sistema no lineal. En la Figura 3.1 se observa la respuesta del proceso para un cambio de referencia positivo, en tanto que en la Figura 3.2 se puede apreciar la respuesta del proceso cuando la variación de la referencia es negativa.





**Figura 3.1.** Respuesta del proceso ante una variación de referencia positiva del 10% sobre el posicionador de la válvula



**Figura 3.2.** Respuesta del proceso ante una variación de referencia negativa del 10% sobre el posicionador de la válvula

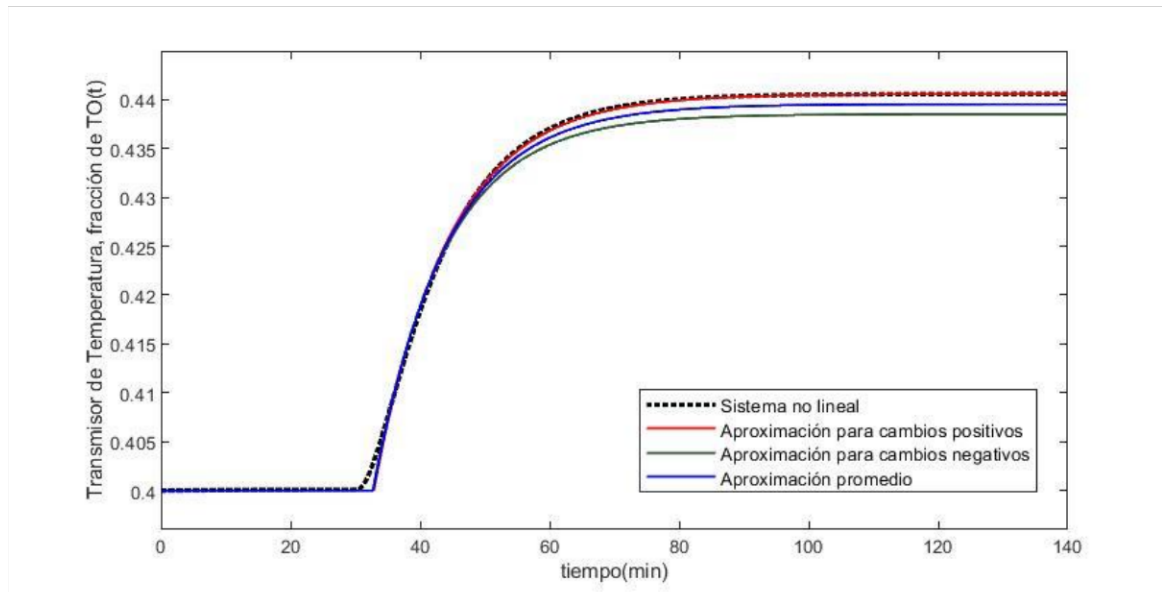
A partir de las Figuras 3.1 y 3.2, y considerando el método de Alfaro descrito en el capítulo 1 se obtienen los modelos FOPDT para cambios de referencia tanto positivo como negativo y a su vez el modelo promediado de los mismos. Las ecuaciones (3.1), (3.2), y (3.3) muestran las funciones de transferencia para un cambio positivo, para un cambio negativo y para el promedio de ambas, respectivamente.

$$G^+(s) = 1.5436 \frac{e^{-2.8528s}}{11.4339s + 1} \quad (3.1)$$

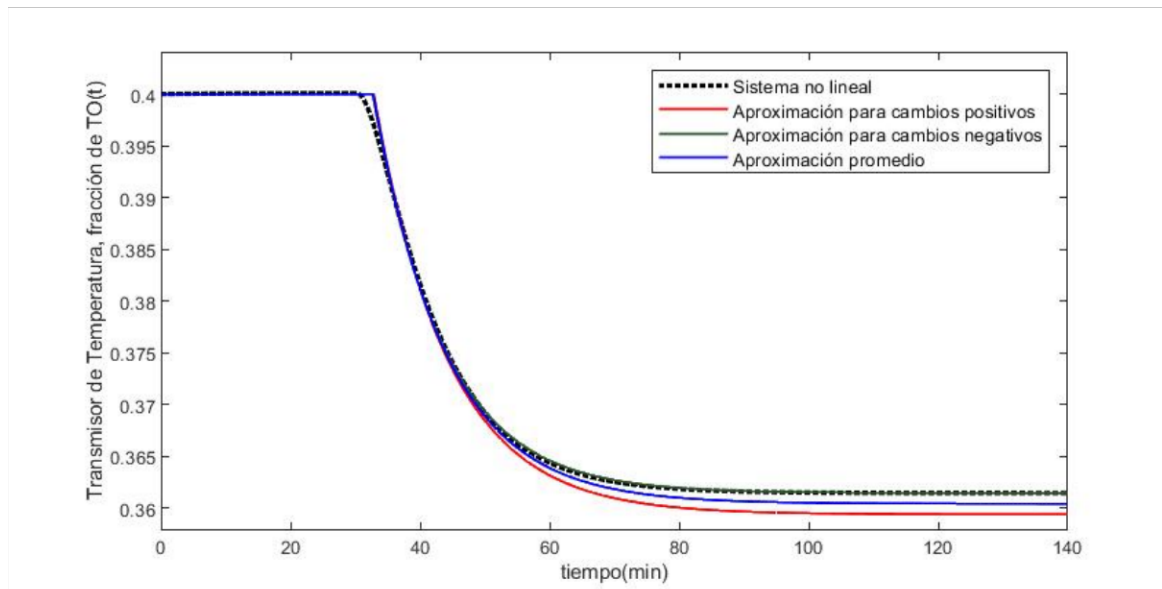
$$G^-(s) = 1.4652 \frac{e^{-2.6974s}}{10.9106s + 1} \quad (3.2)$$

$$G(s) = 1.5044 \frac{e^{-2.7751s}}{11.1722s + 1} \quad (3.3)$$

La validación de los modelos calculados ante variaciones positivas y negativas de la acción de control que actúa sobre la apertura de la válvula se muestran a continuación:



**Figura 3.3.** Validación de modelos FOPDT para variaciones positivas de referencia



**Figura 3.4.** Validación de modelos FOPDT para variaciones negativas de referencia

En las Figuras 3.3 y 3.4 se puede observar la validación de los modelos FOPDT para variaciones de referencia tanto positivas como negativas, respectivamente. Se observa que el modelo calculado para variaciones positivas se ajusta adecuadamente a cambios

positivos en la referencia, pero no se ajusta muy bien cuando existen variaciones negativas, lo mismo ocurre con el modelo obtenido para cambios negativos debido a que este se ajusta adecuadamente a variaciones negativas en la referencia, pero no se ajusta de manera correcta cuando existen variaciones positivas. Se puede observar que el modelo promediado descrito por la Ecuación (3.3) se ajusta de mejor manera a las variaciones positivas y negativas de la referencia.

### 3.1.2 SINTONIZACIÓN

Para la sintonización de los controladores basado en algebra lineal se utilizan las ecuaciones (2.23), (2.31), (2.36) y (2.40) que sirven para definir los valores de  $K_x$ ,  $T$  y  $K_i$ . En tanto que los parámetros  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $k_d$  y  $\delta$  para la sintonización del controlador SMC son obtenidos a partir de la ecuación (2.17). De la misma manera los parámetros  $n_{iter}$  y  $e_{min}$  se obtienen a partir de las ecuaciones (2.46) y (2.48), respectivamente. Los parámetros con los cuales se sintonizan los controladores son mostrados en la tabla 3.1.

**Tabla 3.1.** Rangos y valores de sintonización para los controladores aplicados al reactor CSTR

Controlador	Parámetro	Rango	Valor de sintonización
LABC	$K_x$	0 - 1	0.5
	$T$ [min]	1.117 - 5.5861	5
LABC+I	$K_x$	0 - 1	0.5
	$T$ [min]	1.117 - 5.5861	5
	$K_i$	No aplica	0.0089508
SMC	$\lambda_0$	No aplica	0.050592
	$\lambda_1$	No aplica	0.4499
	$k_d$	No aplica	0.977013
	$\delta$	No aplica	0.759345
SLABC	$K_x$	0 - 1	0.5
	$T$ [min]	1.117 - 5.5861	5
	$\lambda_0$	No aplica	0.050592
	$\lambda_1$	No aplica	0.4499
	$k_d$	No aplica	0.977013
	$\delta$	No aplica	0.5695
	$n_{iter}$	1	1
	$e_{min}$	0 - 0.05	0.05

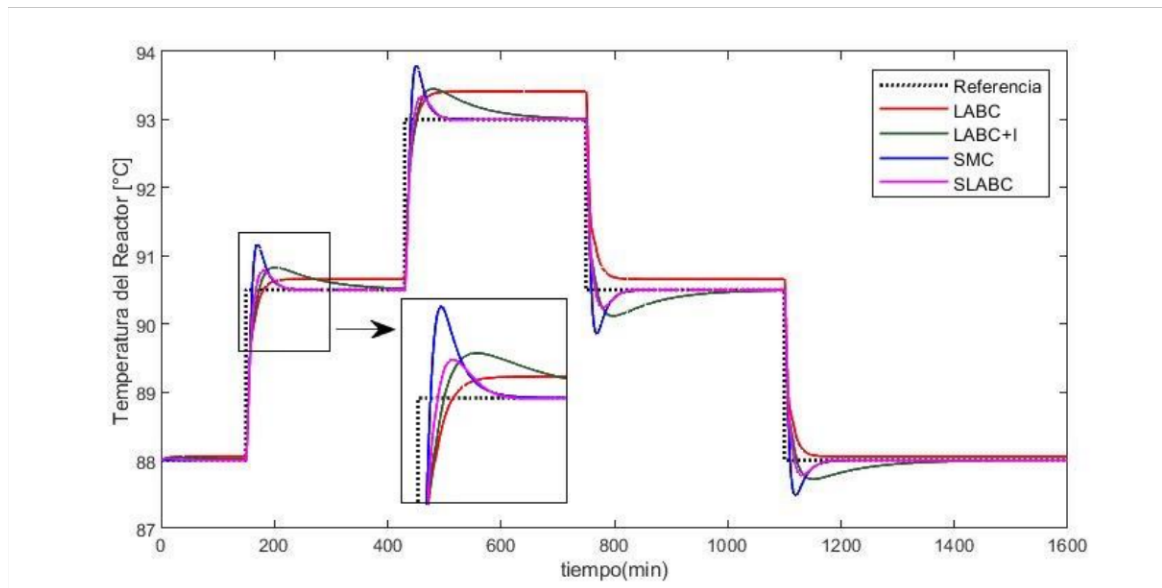
### 3.1.3 RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados del sistema no lineal (reactor CSTR) con los diferentes esquemas de control para examinar el desempeño de los controladores frente a pruebas de cambios de referencia y perturbaciones

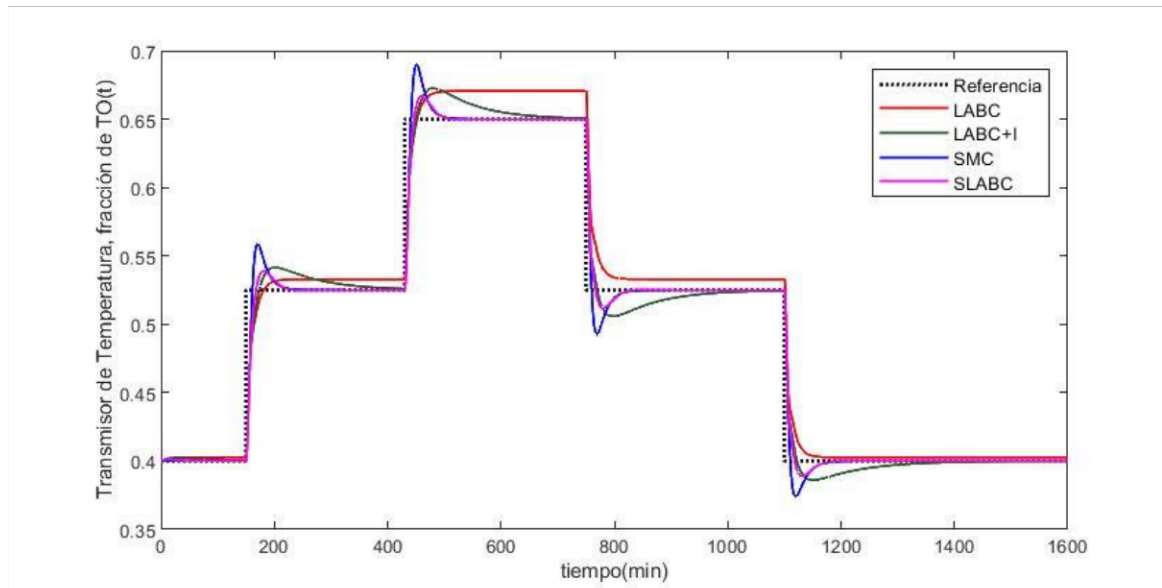
#### 3.1.3.1 Variaciones positivas y negativas de la referencia

En esta evaluación se realizan cambios de referencia en la temperatura del reactor, estos cambios de referencia son de tipo escalón y son aplicados de la siguiente manera: primero se hace un cambio de 88 °C a 90.5 °C en el instante 150 [min]. Seguido a esto se aplica un cambio de 90.5 °C a 93 °C en el instante 430 [min]. Posterior a estos cambios se realizan dos variaciones una de 93 °C a 90.5 °C y otra de 90.5 °C a 88 °C en los instantes 750 [min] y 1100 [min], respectivamente.

En las figuras 3.5 y 3.6 se observa la salida del proceso, en unidades físicas (°C) así como en por unidad (transmisor de temperatura), frente a los cambios de referencia descritos con anterioridad, respectivamente.



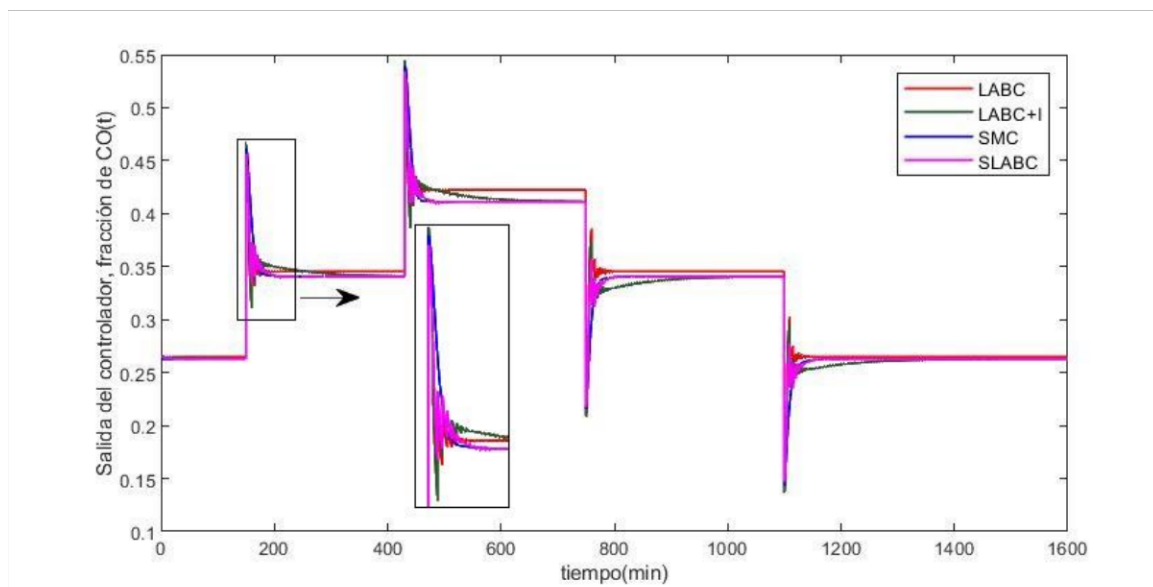
**Figura 3.5.** Respuesta del sistema (unidades físicas) frente a cambios de referencia de temperatura



**Figura 3.6.** Respuesta del sistema (salida del transmisor, fracción de  $TO(t)$ ) frente a cambios de referencia de temperatura para los diferentes esquemas de control

Al obtener los resultados de la prueba de variaciones de la temperatura de referencia del reactor, tanto cambios positivos como negativos, se puede observar que el sistema que presenta la mejor respuesta es el que tiene implementado en esquema de control SLABC, tanto en tiempo de establecimiento como en máximo sobre impulso y error cero en estado estacionario, en comparación con los controladores LABC, LABC+I y SMC. Además, se observa que el controlador con el peor sobre impulso es el SMC, en tanto que el que controlador LABC+I es el que más se demora en alcanzar la referencia, y el controlador LABC presenta error en estado estacionario. La tabla 3.2 muestra la comparación de los índices de desempeño ISE, ITSE, ISU, máximo sobre impulso y tiempo de establecimiento de cada esquema de control frente a las condiciones descritas.

La Figura 3.7 muestra las acciones de control de los controladores SMC, LABC, LABC+I y SLABC ante a las variaciones en la referencia.



**Figura 3.7.** Señales de control ante variaciones de referencia de temperatura

En la figura anterior se observa que todas las acciones de control presentan picos en el transitorio, de igual forma se observa que todas las señales presentan oscilaciones menos la acción de control del SMC.

**Tabla 3.2.** Tabla comparativa de índices de desempeño de los diferentes controladores frente a variaciones de referencia de la temperatura del reactor

Controlador	ISE	ITSE	ISU	$M_p$ [%]	$t_s$ [min]
<b>LABC</b>	0.5075	256500	0.2459	0	43
<b>LABC+I</b>	0.3763	176100	0.2591	13.2	208
<b>SMC</b>	0.3366	151900	0.3661	27	63
<b>SLABC</b>	0.2992	136900	0.2196	11.2	63

La tabla 3.2 presenta los índices de desempeño de los diferentes controladores para la prueba de variación de la temperatura de referencia donde se puede observar que el controlador LABC a pesar de no tener sobre impulso y presentar el menor tiempo de establecimiento, tiene el mayor ISE e ITSE, esto se debe a que este controlador presenta error en estado estable y estos índices dependen del error del sistema. El controlador LABC+I presenta unos ISE e ITSE menores a los del controlador LABC ya que al agregar un integrador al esquema de control este hace que el error en estado estable sea cero. El controlador SMC tiene unos índices ISE e ITSE menores a los índices de los controladores LABC y LABC+I, esto se debe a que el controlador alcanza la referencia en estado estable en un tiempo adecuado. Finalmente, el controlador SLABC propuesto, al ser un híbrido

entre el controlador LABC y SMC presenta los mejores índices ISE, ITSE e ISU, con respecto a los demás controladores, de igual forma el máximo sobre impulso menor a que los presentados por los controladores LABC+I y SMC. Finalmente, el controlador SLABC tiene un tiempo de establecimiento igual al del controlador SMC.

### 3.1.3.2 Perturbaciones en el caudal del flujo del reactivo A de entrada

Para realizar esta evaluación se aplican perturbaciones externas sobre el flujo de ingreso del reactivo A, estas perturbaciones son de tipo escalón, en donde el flujo del reactivo toma los valores de (0.485, 0.41, 0.335, 0.26, 0.185, 0.11, 0.06)  $\left[ \frac{m^3}{min} \right]$  en los instantes (0, 150, 350, 550, 750, 950, 1200) [min], respectivamente. La Figura 3.8 muestra las perturbaciones en el flujo de entrada del reactivo A. Las figuras 3.9 y 3.10 presentan la respuesta del proceso, tanto en unidades físicas como en por unidad, para los diferentes controladores cuando al sistema se introducen las perturbaciones previamente indicadas, respectivamente.

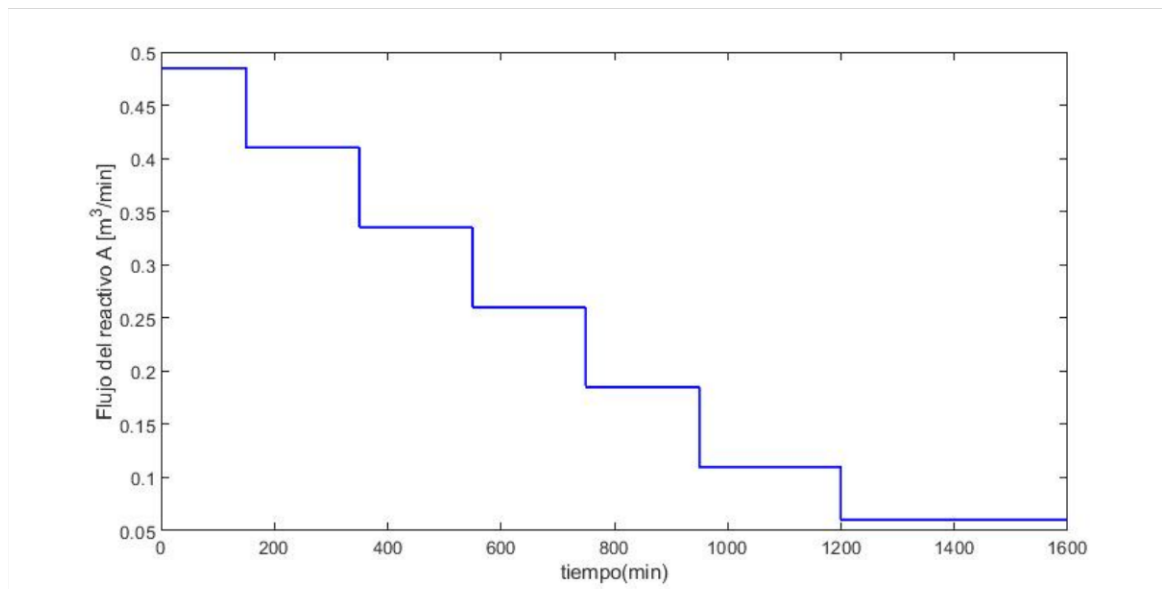
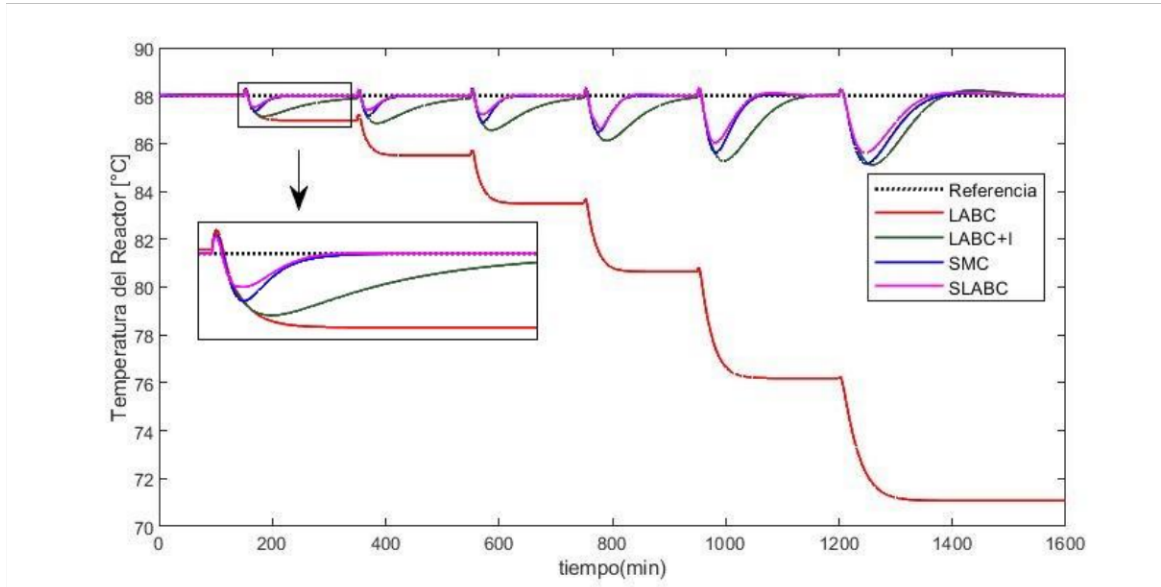
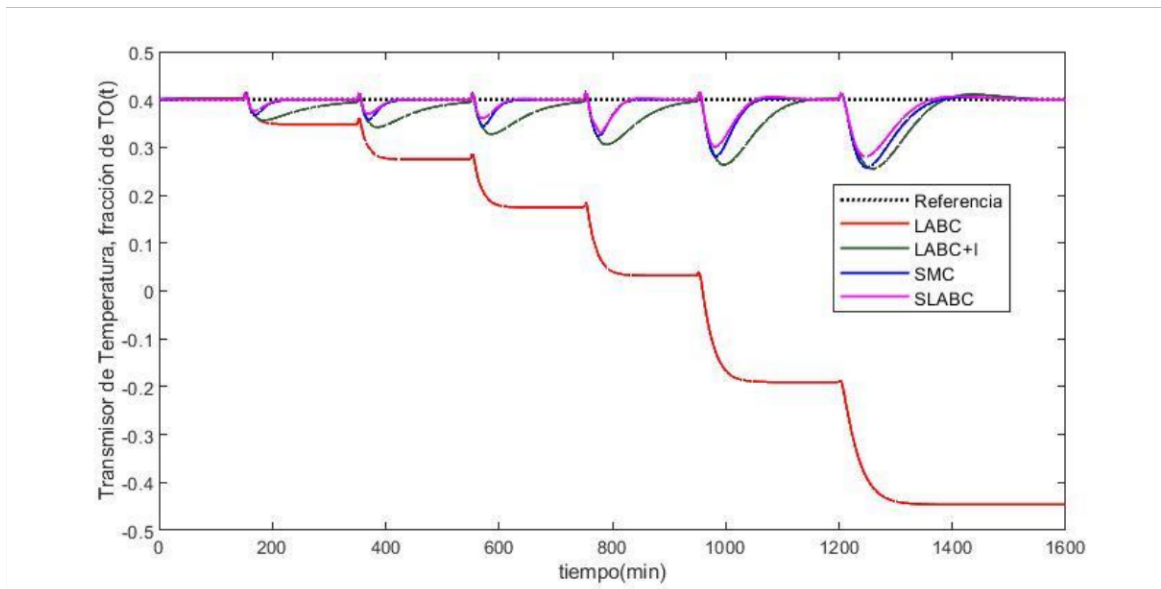


Figura 3.8. Perturbaciones en el flujo de entrada del reactivo A



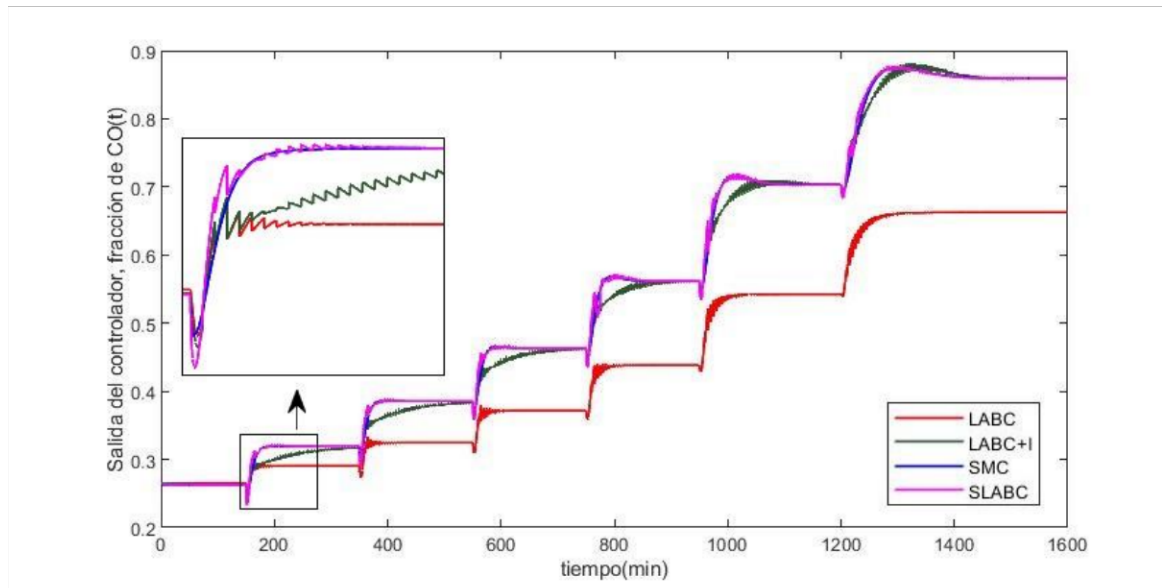
**Figura 3.9.** Respuesta del Proceso (unidades físicas) ante perturbaciones



**Figura 3.10.** Respuesta del Proceso (salida del transmisor, fracción de  $TO(t)$ ) frente a perturbaciones

En las figuras 3.9 y 3.10 se puede observar que el controlador LABC no es capaz de rechazar las perturbaciones, mientras que el resto de controladores si logran hacer que el sistema alcance nuevamente la referencia. De igual forma se observa que el controlador que presenta mejor respuesta tanto en tiempo de establecimiento como en máximo sobre impulso es el controlador SLABC propuesto. La figura 3.11 muestra las acciones de control de los diferentes controladores frente a las perturbaciones previamente definidas.





**Figura 3.11.** Señales de control ante perturbaciones en el flujo de entrada

Para hacer el análisis comparativo de los controladores se utilizan los índices de desempeño ISE, ITSE e ISU. Los valores estos de muestran en la tabla 3.3.

**Tabla 3.3.** Tabla comparativa de índices de desempeño de los controladores frente a perturbaciones en el flujo de entrada del reactivo A

Controlador	ISE	ITSE $[ \times 10^8 ]$	ISU
<b>LABC</b>	392	6.64	30.31
<b>LABC+I</b>	3.936	0.04202	1.421
<b>SMC</b>	1.998	0.02541	1.247
<b>SLABC</b>	1.389	0.01757	1.108

En la tabla anterior se observa que el controlador SLABC propuesto tiene los mejores índices de rendimiento.

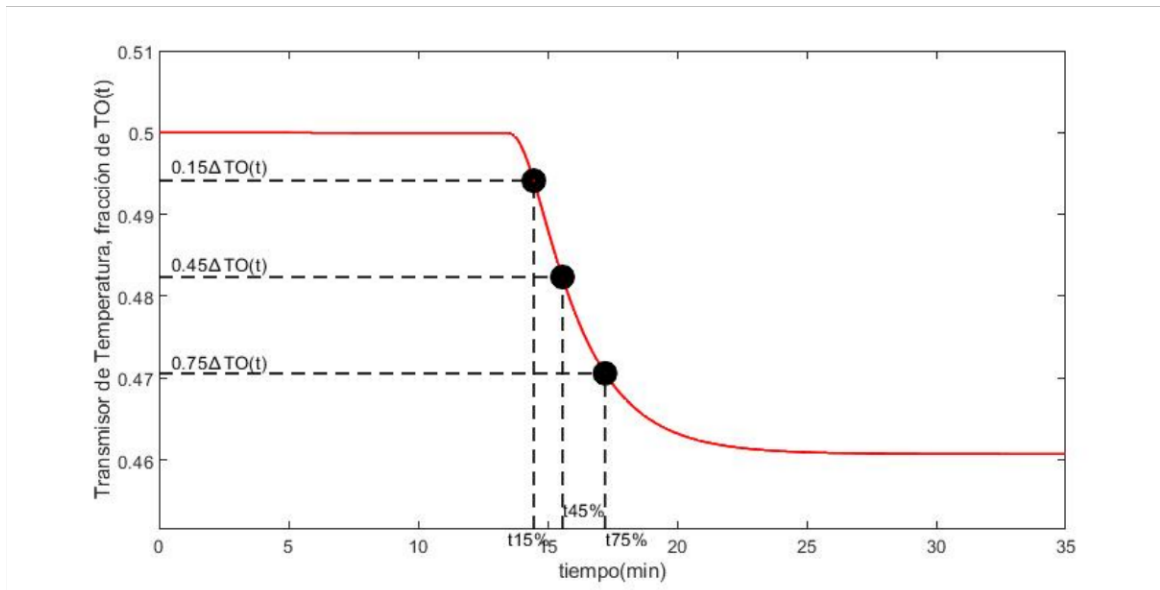
Con las pruebas realizadas, los resultados obtenidos y en base a las respuestas e índices de desempeño se concluye que el esquema de control SLABC propuesto es el que mejor se ha desenvuelto.

## 3.2 TANQUE DE MEZCLADO CON RETARDO VARIABLE Y RELACIÓN DE CONTROLABILIDAD $\frac{t_0}{\tau} > 1$

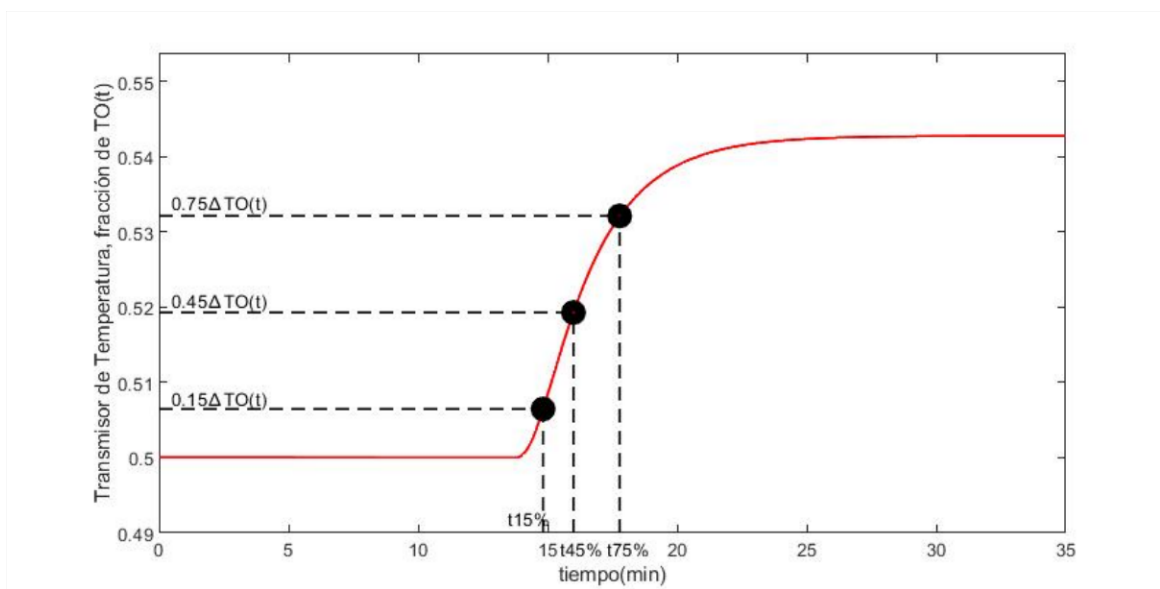
Dado que el proceso a controlar es un sistema con una relación de controlabilidad mayor a uno y además el retardo del mismo es variable, esto ocasiona que el controlador basado en algebra lineal no actúe de manera adecuada. Por esta razón en el capítulo 2 se propone dar solución a este problema con un esquema tipo predictor de Smith (PS), para los controladores basados en algebra lineal, debido a esto es necesario utilizar un modelo de segundo orden con retardo ya que el esquema de PS al compensar el retardo (parte no invertible del modelo) hace que se utilicen únicamente los polos del modelo para la sintonización y teniendo en cuenta que el controlador basado en algebra lineal propuesto por [14] se desarrolla a partir de un sistema de segundo orden es necesario que el modelo utilizado en el esquema PS sea un modelo SOPDT. Con respecto al controlador SMC se utilizará un modelo FOPDT.

### 3.2.1 APROXIMACIÓN A MODELO DE SEGUNDO ORDEN CON RETARDO

La obtención del modelo SOPDT del tanque se la hacer a partir de aplicar una variación de referencia positiva y otra negativa del 10%, en el instante  $t = 10$  [min], sobre la acción de control que regula el posicionador de la válvula que controla el ingreso del refrigerante al tanque de mezclado, es decir de 0.478 a 0.5258 y de 0.478 a 0.4302, esto con el fin de obtener un modelo promediado que se acerca de la mejor manera posible a la respuesta del proceso. En la Figura 3.12 se observa la salida del proceso para una variación positiva de la acción de control, en tanto que en la Figura 3.13 se observa la salida del proceso para una variación negativa.



**Figura 3.12.** Respuesta del proceso ante una variación de referencia positiva del 10% sobre el posicionador de la válvula.



**Figura 3.13.** Respuesta del proceso ante una variación de referencia negativa del 10% sobre el posicionador de la válvula

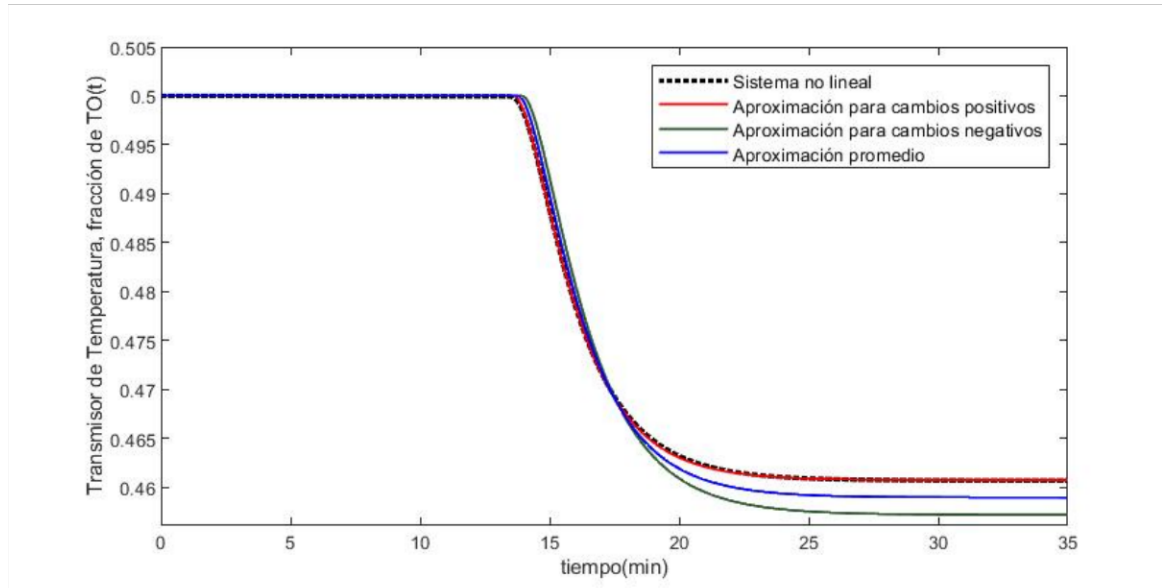
A partir de las Figuras 3.12 y 3.13, y en base al método de Stark descrito en el capítulo 1 se obtienen los modelos SOPDT para cambios de referencia tanto positivo como negativo y a su vez el modelo promediado de los mismos. Las ecuaciones (3.4), (3.5), y (3.6) muestran las funciones de transferencia para un cambio positivo, para un cambio negativo y para el promedio de ambas, respectivamente.

$$G^+(s) = \frac{-0.55185e^{-3.6138s}}{s^2 + 1.80193s + 0.6724} \quad (3.4)$$

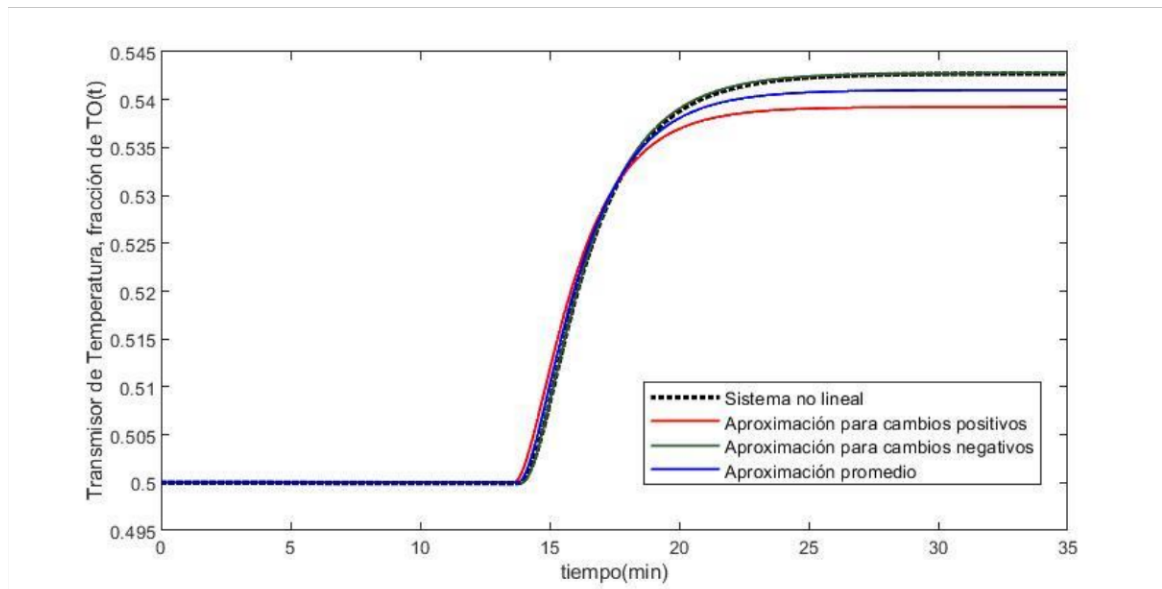
$$G^-(s) = \frac{-0.568585e^{-3.9418s}}{s^2 + 1.81247s + 0.635305} \quad (3.5)$$

$$G(s) = \frac{-0.560794e^{-3.7778s}}{s^2 + 1.80771s + 0.65372} \quad (3.6)$$

La validación de los modelos calculados ante variaciones positivas y negativas de la acción de control que actúa sobre la apertura de la válvula se muestran a continuación:.



**Figura 3.14.** Validación de modelos SOPDT ante cambio de referencia positivos



**Figura 3.15.** Validación de modelos SOPDT para variaciones de referencia negativas

En las figuras 3.14 y 3.15 puede observar la validación de los modelos SOPDT para variaciones de referencia tanto positivas como negativas, respectivamente. Se puede observar que el modelo calculado para cambios positivos se ajusta de manera adecuada

a variaciones positivas en la referencia, sin embargo, no se ajusta de forma correcta cuando la variación en la referencia es negativa. Esto también se refleja al modelo obtenido para cambios negativos debido a que este se ajusta correctamente a variaciones negativas en la referencia, pero no lo hace de manera adecuada cuando la variación en la referencia es positiva. De igual forma se puede observar que el modelo promediado descrito por la ecuación (3.6) es el que mejor se ajusta tanto para cambios positivos como negativos en la referencia.

### 3.2.2 APROXIMACIÓN A MODELO DE PRIMER ORDEN CON RETARDO

De manera análoga a la forma que se obtuvo el modelo SOPDT, se harán las mismas variaciones de referencia a la entrada del proceso en el mismo instante de tiempo.

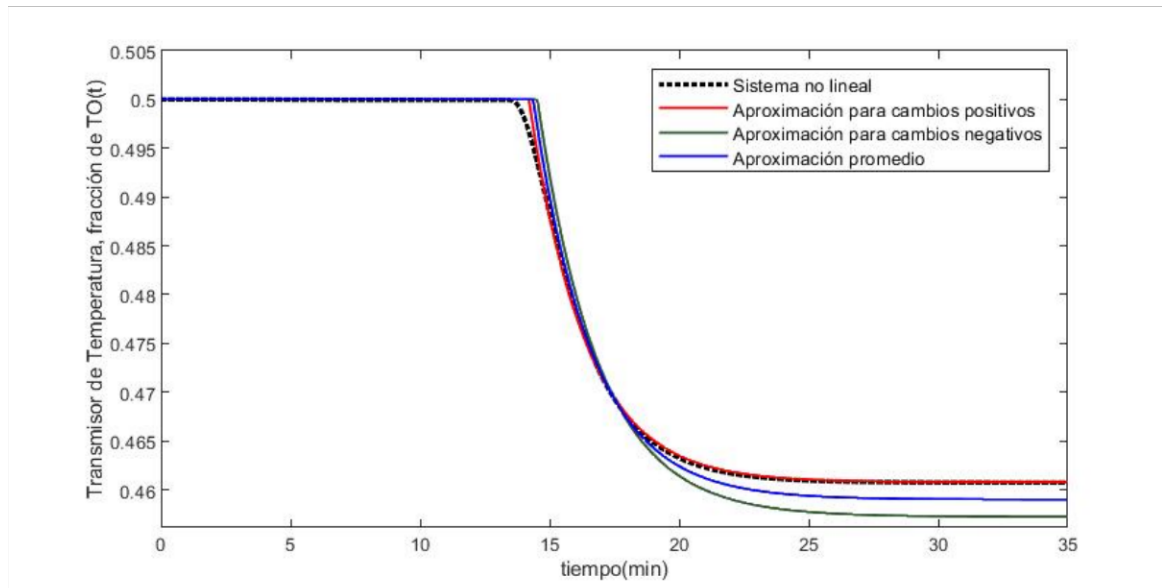
A partir de las figuras 3.12 y 3.13 y en base al método de Alfaro descrito en el capítulo 1 se obtienen los modelos FOPDT para cambios de referencia tanto positivo como negativo y a su vez el modelo promediado de los mismos. Las ecuaciones (3.7), (3.8), y (3.9) muestran las funciones de transferencia para un cambio positivo, para un cambio negativo y para el promedio de ambas, respectivamente.

$$G^+(s) = -0.82071 \frac{e^{-4.2033s}}{2.1772s + 1} \quad (3.7)$$

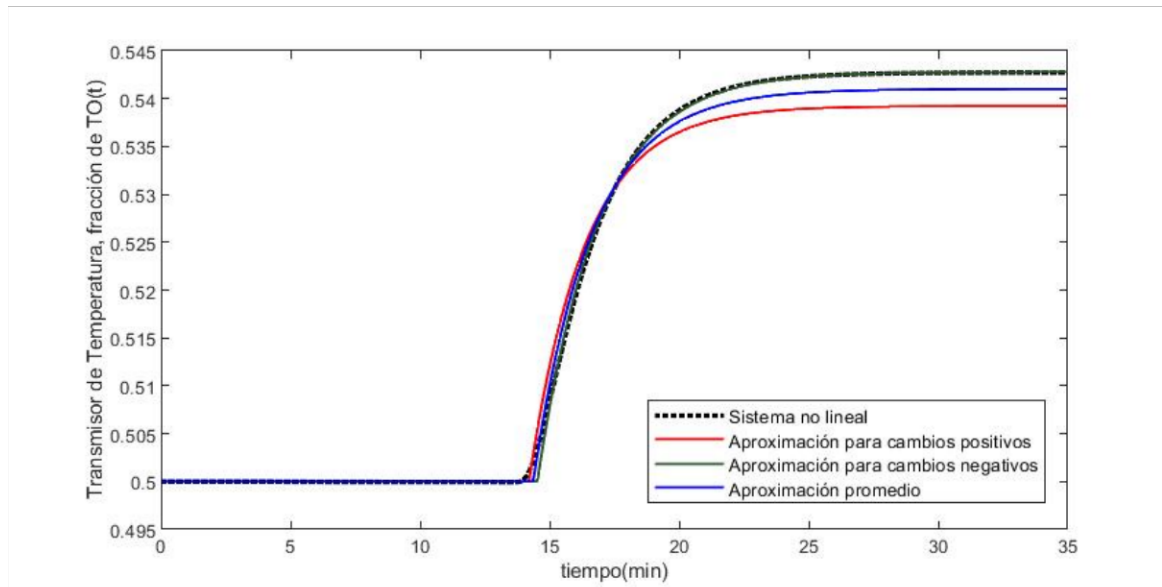
$$G^-(s) = -0.89498 \frac{e^{-4.52842s}}{2.3574s + 1} \quad (3.8)$$

$$G(s) = -0.85785 \frac{e^{-4.3659s}}{2.2673s + 1} \quad (3.9)$$

La validación de los modelos calculados ante variaciones positivas y negativas de la acción de control que actúa sobre la apertura de la válvula se muestran a continuación:



**Figura 3.16.** Validación de modelos FOPDT para variaciones positivas de referencia



**Figura 3.17.** Validación de modelos FOPDT para variaciones negativas de referencia

La validación de los modelos FOPDT obtenidos para variaciones de referencia tanto positivas como negativas de se muestra en las figuras 3.16 y 3.17, respectivamente. Se puede observar que el modelo promediado descrito por la ecuación (3.9) se ajusta de mejor manera a las variaciones positivas y negativas de la referencia.

### 3.2.3 SINTONIZACIÓN

Para la sintonización de los controladores basados en algebra lineal se utiliza la ecuación (2.45) que sirven para definir los valores de  $K_x$ ,  $T$  y  $K_i$ . En tanto que los parámetros  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $k_d$  y  $\delta$  para la sintonización del controlador SMC son obtenidos a partir de las (2.17).

Para el controlador SLABC los parámetros de la parte discontinua del SMC se sintoniza a partir de la ecuación (2.49). De la misma manera los parámetros  $n_{iter}$  y  $e_{min}$  se obtienen a partir de las ecuaciones (2.47) y (2.48), respectivamente. Los parámetros con los cuales se sintonizan los controladores son mostrados en la tabla 3.4.

**Tabla 3.4.** Rangos y valores de sintonización para los controladores aplicados al tanque de mezclado

Controlador	Parámetro	Rango	Valor de sintonización
LABC	$K_x$	0 - 1	0.95
	$T$ [min]	0.05 – 0.191	0.1
LABC+I	$K_x$	0 - 1	0.95
	$T$ [min]	0.05 - 0.191	0.1
	$K_i$	No aplica	0.0514
SMC	$\lambda_0$	No aplica	0.11259
	$\lambda_1$	No aplica	0.67
	$k_d$	No aplica	0.33132
	$\delta$	No aplica	0.70492
SLABC	$K_x$	0 - 1	0.95
	$T$ [min]	0.05 – 0.191	0.1
	$\lambda_0$	No aplica	0.81695
	$\lambda_1$	No aplica	1.80771
	$k_d$	No aplica	0.3424
	$\delta$	No aplica	0.6737
	$n_{iter}$	1 - 19	19
	$e_{min}$	0 - 0.05	0.02

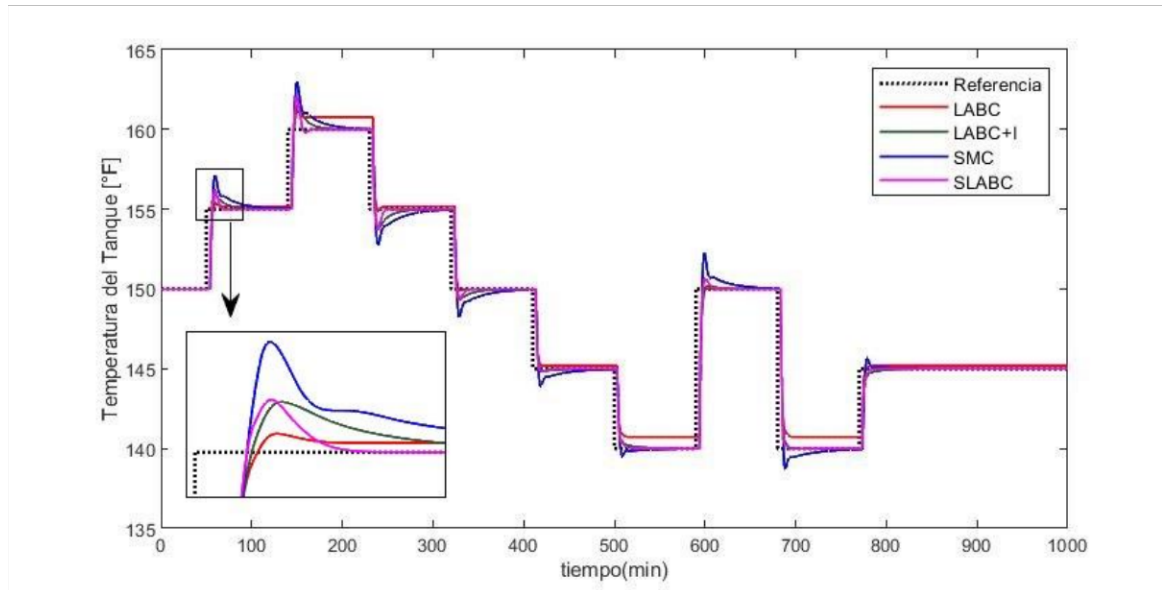
### 3.2.4 RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados del sistema no lineal (tanque de mezclado) con los diferentes esquemas de control para examinar el desempeño de los controladores frente a pruebas de cambios de referencia y perturbaciones.

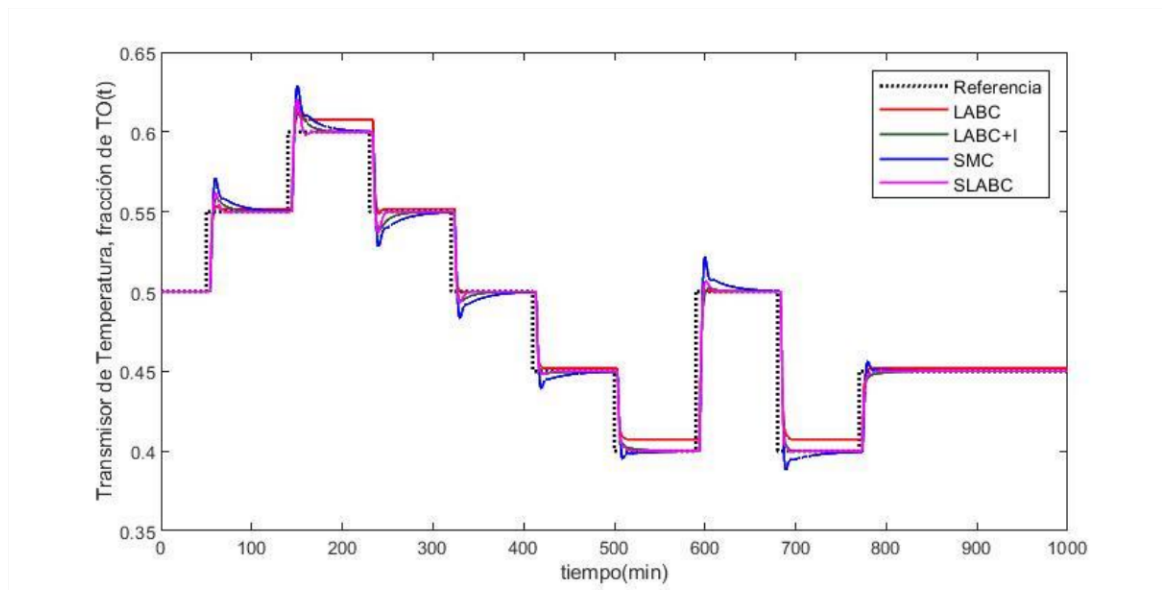
#### 3.2.4.1 Variaciones positivas y negativas de la referencia

En esta evaluación se realizan cambios de referencia tipo escalón, tanto positivos como negativos, en la temperatura del tanque de mezclado, en donde la temperatura del tanque toma los siguientes valores (150, 155, 160, 155, 150, 145, 140, 150, 140, 145)  $[^{\circ}F]$  en los instantes (0, 50, 140, 230, 410, 500, 590, 680, 770) [min], respectivamente. En las figuras 3.18 y 3.19 se observa la salida del proceso, en unidades físicas ( $^{\circ}F$ ) así como en por

unidad (salida del transmisor), frente a los cambios de referencia descritos con anterioridad, respectivamente.



**Figura 3.18.** Respuesta del sistema (unidades físicas) ante variaciones referencia de temperatura



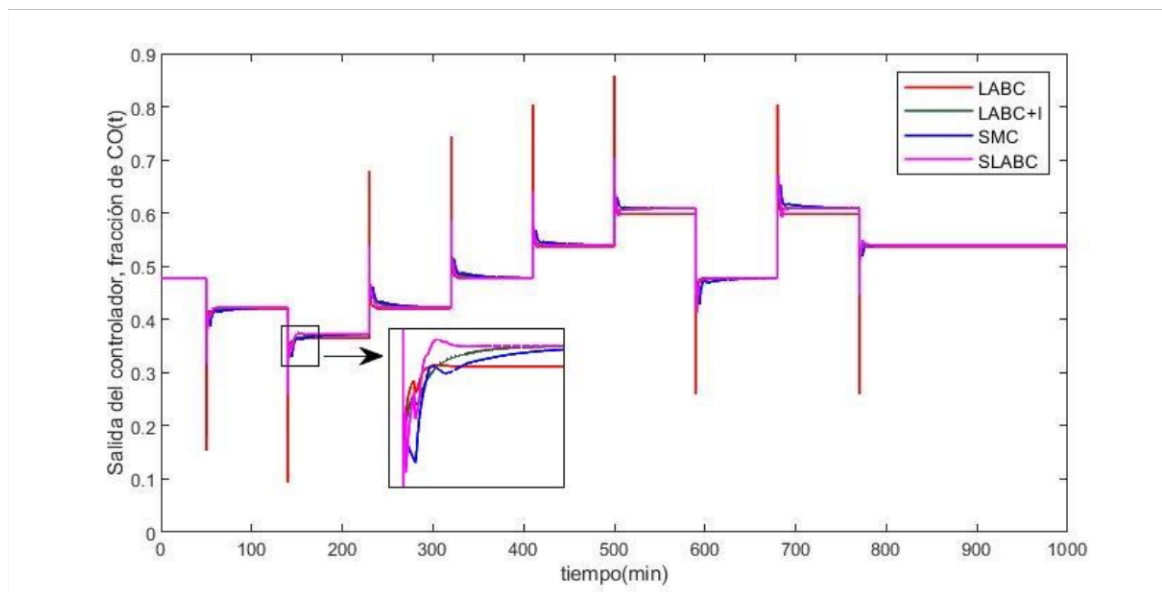
**Figura 3.19.** Respuesta del sistema (salida del transmisor, fracción de  $TO(t)$ ) ante variaciones de referencia de temperatura

Las figuras anteriores muestran la salida del proceso con los diferentes esquemas de control ante cambios de referencia, tanto positivos como negativos, donde se puede observar que el sistema con la mejor respuesta es el que tiene implementado el controlador SLABC, tanto en tiempo de establecimiento como en error cero en estado estable y tiene un máximo sobre impulso aceptable en comparación con el resto de controladores. Se observa también que el controlador SMC es el que peor sobre impulso presenta y es el que más se demora en llegar a la referencia, en tanto que el controlador LABC presenta error



en estado estacionario. La tabla 3.5 muestra la comparación de los índices de desempeño ISE, ITSE, ISU, máximo sobre impulso y tiempo de establecimiento de cada esquema de control.

La Figura 3.20 muestra las señales de control de los diferentes controladores frente a pruebas de cambio de referencia.



**Figura 3.20.** Señales de control antes variaciones de referencia de temperatura

En la figura anterior se observa que todas las señales de control presentan sobre picos en el transitorio, en especial la del controlador LABC, mientras que la acción de control del SMC es la que tiene el sobre pico más pequeño.

**Tabla 3.5.** Tabla comparativa de índices de desempeño de los diferentes controladores frente a variaciones de referencia de la temperatura del tanque

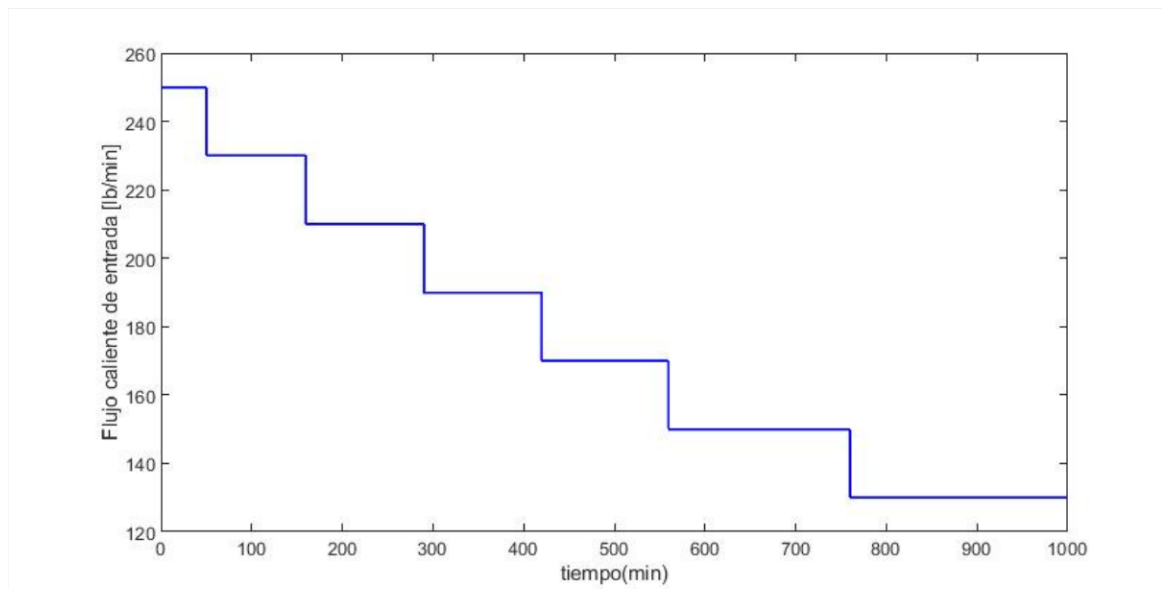
Controlador	ISE	ITSE	ISU	$M_p$ [%]	$t_s$ [min]
<b>LABC</b>	0.191	53880	0.09261	3.2	13
<b>LABC+I</b>	0.1892	54590	0.02458	19.2	49
<b>SMC</b>	0.2037	56460	0.05592	42	65
<b>SLABC</b>	0.1849	53730	0.03098	19.7	18

En la tabla 3.5 se muestran los índices de desempeño de los diferentes controladores para la prueba de cambios de referencia de temperatura del tanque donde se puede observar que el controlador LABC tiene el peor ISU a pesar de tener el tiempo de establecimiento más corto y el menor sobre impulso, esto se debe a que el controlador no hace que el

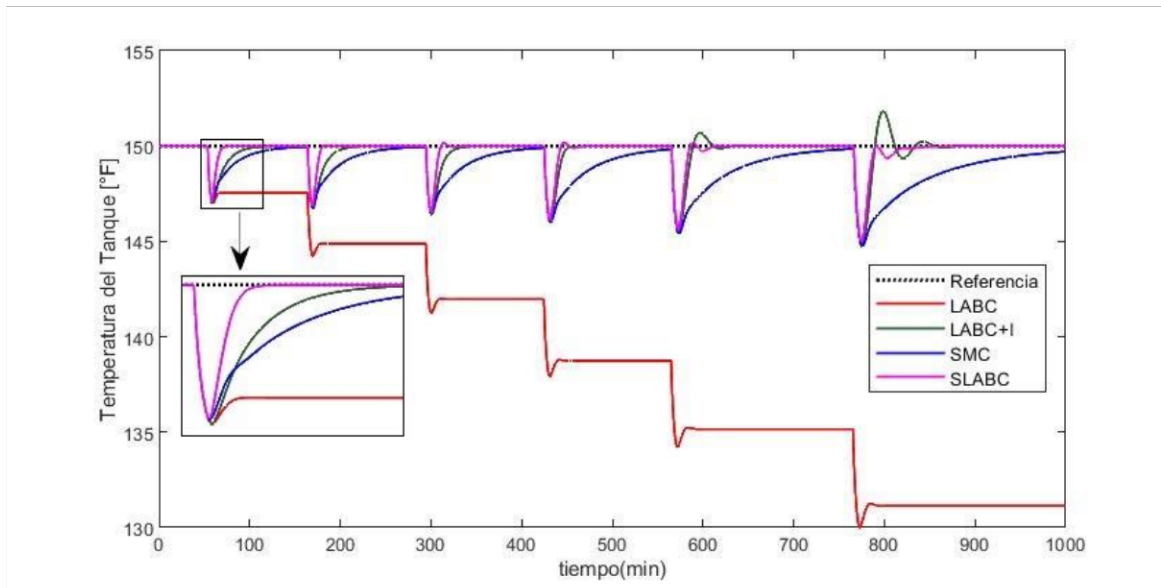
sistema alcance la referencia y presente error en estado estable. El controlador LABC+I presenta el mejor ISU, sin embargo, tiene un tiempo de establecimiento alto con respecto a los controladores LABC y SLABC. Con respecto al controlador SMC se observa que es que tiene el tiempo de establecimiento más largo, además que su máximo sobre impulso e índices ISE e ITSE son los más elevados. Finalmente, el controlador SLABC propuesto presenta el mejor ISE e ITSE, de igual forma su índice ISU es el segundo mejor con respecto al resto de controladores y tiene un tiempo de establecimiento adecuado con respecto al sobre impulso que presenta en comparación con los demás esquemas de control.

### 3.2.4.2 Perturbaciones en el caudal del flujo de entrada

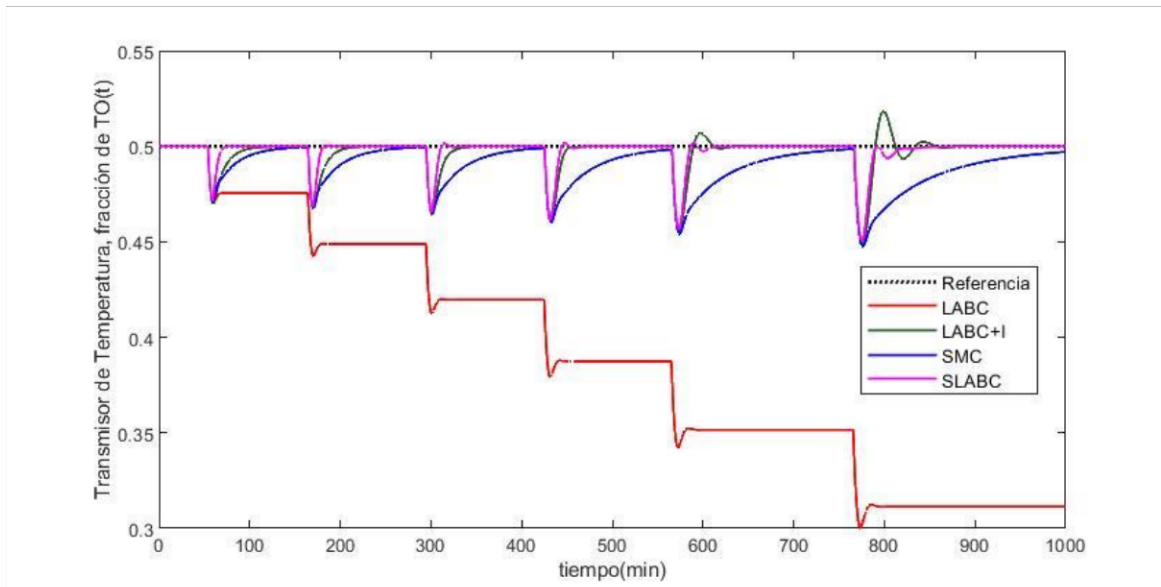
Para realizar esta evaluación se aplican perturbaciones externas sobre el flujo caliente de entrada, estas perturbaciones son de tipo escalón, donde el flujo toma los valores de (250, 230, 210, 190, 170, 150, 130)  $\left[ \frac{lb}{min} \right]$  en los instantes (0, 50, 160, 290, 420, 560, 760) [min], respectivamente. La Figura 3.21 muestra las perturbaciones en el flujo caliente. Las figuras 3.22 y 3.23 presentan la salida del proceso, tanto en unidades físicas como en por unidad, para los diferentes controladores cuando al sistema se introducen las perturbaciones previamente descritas, respectivamente.



**Figura 3.21.** Perturbaciones en el flujo caliente de entrada

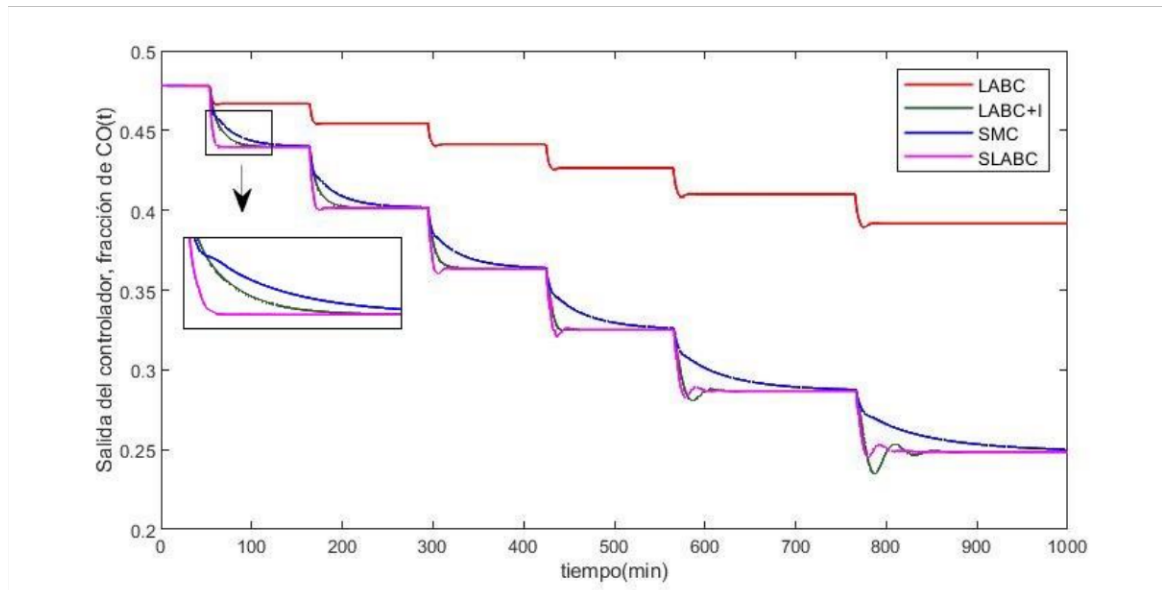


**Figura 3.22.** Salida del proceso (unidades físicas) ante perturbaciones.



**Figura 3.23.** Salida del proceso (salida del transmisor) ante perturbaciones

En las figuras 3.22 y 3.23 se observa que el controlador LABC no es capaz de mantener la referencia a diferencia del resto de controladores. De igual forma se observa que todos los controladores tienen un sobre impulso similar y que el controlador que más rápido alcanza la referencia es el controlador SLABC propuesto. La Figura 3.24 muestra las acciones de control de los diferentes controladores ante las perturbaciones antes mencionadas.



**Figura 3.24.** Señales de control ante perturbaciones en el flujo de entrada

En la figura 3.24 que puede observar que el controlador SLABC alcanza su valor en estado estable más rápido que el resto de controladores.

La tabla 3.6 muestra los valores de índices de desempeño de los controladores frente a perturbaciones en el flujo de entrada donde se puede observar que el controlador con los mejores índices es el controlador SLABC propuesto.

**Tabla 3.6.** Tabla comparativa de los índices de desempeños de los diferentes controladores frente a perturbaciones en el flujo de entrada

Controlador	ISE	ITSE $[ \times 10^6 ]$	ISU
<b>LABC</b>	15.78	9.075	10.75
<b>LABC+I</b>	0.1002	0.03134	0.07907
<b>SMC</b>	0.2336	0.09182	0.1467
<b>SLABC</b>	0.07226	0.02340	0.06076

Con las pruebas realizadas, los resultados obtenidos y en base a las respuestas e índices de desempeño se concluye que el esquema de control SLABC propuesto es el que mejor se ha desenvuelto.

### 3.3 CONCLUSIONES

- Se estudió dos procesos químicos no lineales, reactor CSTR y tanque de mezclado de retardo variable, los cuales presentan características de relación de controlabilidad menor a la unidad y mayor a la unidad, respectivamente. Se observó como el conocer el parámetro de relación de controlabilidad existente en un proceso sirve para seleccionar un esquema de control u otro basándose en este valor, y de esta manera diseñar el controlador que mejor se adapte al sistema.
- Se estudió los métodos de aproximación a modelos de orden reducido y se realizó la aproximación a modelos FOPDT para los dos procesos seleccionados y a modelo SOPDT en el caso del tanque de mezclado con retardo variable.
- Se estudió los controladores basados en modos deslizantes y en algebra lineal y se diseñó los controladores SMC, LABC, LABC+I y el controlador propuesto SLABC, a partir del modelo de primer orden con retardo bajo un esquema de realimentación típico para procesos con relación de controlabilidad menor a uno y a partir de la aproximación de segundo orden con retardo bajo un esquema de modelo interno tipo predictor de Smith para procesos con relación de controlabilidad mayor a la unidad, y se determinaron leyes de control con esquemas fijos, esto es, que se pueden sintonizar directamente en procesos con características similares.
- Se implementó los controladores diseñados en el software de simulación Simulink de Matlab y se comprobó su correcto funcionamiento al simularlos con los procesos seleccionados y ponerlos a prueba mediante variaciones de referencia e introducción de perturbaciones.
- Se comprobó las características de estado transitorio, estado estable y los índices de desempeño de cada controlador diseñado y a partir de estos parámetros se realizó un análisis comparativo del funcionamiento del controlador SLABC con respecto a los controladores SMC, LABC y LABC+I, donde se evidencio que el controlador SLABC es el que mejores resultados muestra a nivel global frente a las pruebas a las que fueron sometidos todos los controladores dentro de cada proceso, esto se debe a que el controlador SLABC al ser un híbrido entre SMC y LABC obtiene la robustes controlador por modos deslizantes y la velocidad de seguimiento de referencia del controlador basado en algebra lineal.

### 3.4 RECOMENDACIONES

- Para aplicar el controlador SLABC a un determinado proceso se recomienda analizar previamente la relación de controlabilidad que tenga la planta y acorde a ello elegir el esquema SLABC que mejor se ajuste al proceso.
- Para sintonizar los controladores basados en algebra lineal y el controlador SLABC se recomienda empezar por valores cercanos a los limites superiores y a partir de allí ir reduciendo el valor de estos parámetros hasta obtener una respuesta que haga que el sistema funcione de manera óptima.
- Los parámetros de sintonización mostrados para el controlador SLABC sirven como base para tener un punto de partida con una respuesta estable, si se desea tener la mejor respuesta posible es recomendable realizar una sintonización empírica en base a la obtención del mejor índice de rendimiento, por ejemplo, el índice ISE.

## 4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B. Bandyopadhyay, F. Deepak, y K. S. Kim, *Sliding mode control using novel sliding surfaces*, vol. 392. 2009.
- [2] O. Camacho y C. A. Smith, «Sliding mode control: An approach to regulate nonlinear chemical processes», *ISA Trans.*, vol. 39, n.º 2, pp. 205-218, 2000, doi: 10.1016/S0019-0578(99)00043-9.
- [3] M. Cartagena y R. Pillajo, «Diseño, Simulación Y Comparación De Controladores Basados En Métodos Numéricos Y Álgebra Lineal Aplicados a Procesos Químicos Con Respuesta Inversa Aproximables a Modelos De Orden Reducido», p. 141, 2018.
- [4] G. Scaglia, O. L. Quintero Montoya, V. Mut, y F. Di Sciascio, «Numerical methods based controller design for mobile robots», *IFAC Proc. Vol.*, vol. 17, n.º 1 PART 1, pp. 4820-4827, 2008, doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.2408.
- [5] M. A. Perez, A. Perez, y E. Perez, «Unidad1Y2», *Introducción a Los Sist. Control Y Model. Matemático Para Sist. Lineales Invariantes En El Tiempo.*, pp. 1-69, 2008.
- [6] V. M. Alfaro Ruíz, «Identificación De Procesos Sobreamortiguados Utilizando Técnicas De Lazo Abierto», *Rev. Ing.*, vol. 11, n.º 1-2, 2011, doi: 10.15517/ring.v11i1-2.605.
- [7] J. Henriquez y J. Martinez, «Identificación y sintonización de controladores PID para procesos de integración.», *Metod. Sintonizacion*, p. 33, 2019.
- [8] F. De La Cruz y O. Camacho, «Controlador De Modos Deslizantes Basado En Predictor De Smith Y Modelo De Segundo Orden Para Procesos Con Elevado Retardo», *Rev. Politécnica*, vol. 35, n.º 2, pp. 1-7, 2015.
- [9] O. Camacho, R. Rojas, y W. García, «Variable structure control applied to chemical processes with inverse response», *ISA Trans.*, vol. 38, n.º 1, pp. 55-72, 1999, doi: 10.1016/S0019-0578(99)00005-1.
- [10] J. J. Slotine y W. Li, «Applied Nonlinear Control», Prentice-Hall, Ed. New Jersey, 1991, pp. 278-290.
- [11] A. Rosales, G. Scaglia, V. Mut, y F. Di Sciascio, «Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments-a linear algebra approach», *Robotica*, vol. 27, n.º

- 7, pp. 981-997, 2009, doi: 10.1017/S0263574709005402.
- [12] A. Rosales, G. Scaglia, V. Mut, y F. di Sciascio, «Navegación de Robots Móviles en Entornos no Estructurados utilizando Álgebra Lineal», *Rev. Iberoam. Automática e Informática Ind. RIAI*, vol. 6, n.º 2, pp. 79-88, 2009, doi: 10.1016/s1697-7912(09)70096-2.
- [13] G. Scaglia, A. Rosales, L. Quintero, V. Mut, y R. Agarwal, «A linear-interpolation-based controller design for trajectory tracking of mobile robots», *Control Eng. Pract.*, vol. 18, n.º 3, pp. 318-329, 2010, doi: 10.1016/j.conengprac.2009.11.011.
- [14] O. Camacho, G. Scaglia, y O. Lucia Quintero, «A Dead Time Compensator Based on Linear Algebra (DTCLA)», *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, n.º 1, pp. 3075-3080, 2017, doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.678.