ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

EVALUACIÓN DEL IMPACTO DE LA FLEXIBILIZACIÓN DE LA EDAD DE JUBILACIÓN EN EL ECUADOR

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA MATEMÁTICA

DAYANA MADELAINE BOLAÑOS HUERTAS

dayanabolanos11@gmail.com

DIRECTOR: MSC. DIEGO PAÚL HUARACA SHAGÑAY

diego.huaracas@epn.edu.ec

DMQ, FEBRERO 2022

CERTIFICACIONES

Yo, DAYANA MADELAINE BOLAÑOS HUERTAS, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Dayana Bolaños

Dayana Madelaine Bolaños Huertas

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Dayana Madelaine Bolaños Huertas, bajo mi supervisión.

MsC. Diego Paúl Huaraca Shagñay

DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Dayana Madelaine Bolaños Huertas

MsC. Diego Paúl Huaraca Shagñay

RESUMEN

El presente estudio busca evaluar una alternativa que brinde sostenibilidad al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, a través de medir el impacto de la flexibilización de la edad de jubilación en el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio, con la finalidad de que la institución pueda seguir cubriendo sus prestaciones, como es la financiación de pensiones. Para ello, se desarrolló un aplicativo, con el software estadístico R, en donde se realizó el cálculo de pensiones y reservas matemáticas, variando la edad en la que un afiliado podría jubilarse, utilizando conocimientos fundamentales de las matemáticas financieras y actuariales, ajustándolos a los lineamientos de la Ley actual que rige en el Ecuador; además, como recurso se empleó la tabla de mortalidad de la Seguridad Social de ambos sexos, para que el resultado se apegue mucho más a la realidad ecuatoriana. Como resultado del proyecto de integración curricular se concluye que, retrasar la edad de jubilación es una propuesta que refuerza al sistema de pensiones, observando que el pensionista, debido a que presenta mayor probabilidad de muerte a medida que va envejeciendo, y, a pesar de que reciba una pensión más alta en retribución a su mayor número de cotizaciones, no recibirá el total del fondo acumulado durante toda su vida activa, quedando el fondo restante para el Seguro Social.

Palabras clave: prestación, cotización, pensión, reservas matemáticas, tabla de mortalidad, Seguro Social.

ABSTRACT

This study seeks to evaluate an alternative that provides sustainability to the Ecuadorian Social Security Institute, through measuring the impact of the flexibilization of the retirement age in the Disability, Old Age and Death Insurance of the Obligatory General Insurance, in order that the institution can continue to cover its benefits, such as pension financing. To this end, an application was developed, with the statistical software R, where the calculation of pensions and mathematical reserves was carried out, varying the age at which a member could retire, using fundamental knowledge of financial and actuarial mathematics, adjusting them to the guidelines of the current Law that governs in Ecuador; in addition, the mortality table of Social Security of both sexes was used as a resource, so that the result becomes much more attached to the Ecuadorian reality. As a result of the curricular integration project, it is concluded that delaying the retirement age is a proposal that reinforces the pension system, observing that the pensioner, because he has a greater probability of death as he gets older, and, despite receiving a higher pension in remuneration for his greater number of contributions, it will not be received the total fund accumulated over the entire active life, leaving the remaining fund for Social Security.

Keywords: benefits, contributions, pension, mathematical reserves, mortality table, Social Security

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

La jubilación es un aporte júridico necesario e importante para la sociedad, es una transición en la que el trabajador activo, ya habiendo cumplido determinados requisitos, pasa a una situación pasiva, es decir, al cese absoluto en el ejercicio de su profesión, donde accede a una pensión vitalicia, pues su objetivo es el reposo remunerado [18].

Es considerado un logro social, pues es un beneficio que posee el trabajador de recibir una renta mensual por los años que le queden de vida y protegerlo de contingencias; considerando lo mencionado anteriormente puede suponerse positivo, pero es importante reflexionar también que al ser una abrupta interrupción al trabajo puede traer consigo connotaciones negativas a nivel emocional como acentuar el envejecimiento, favorecer a la ansiedad, originar pérdida del poder adquisitivo, entre otras, lo que resulta limitante para las relaciones sociales y en ocasiones produce pérdida de identificación del individuo y favorece a su incomunicación y marginación. Esta contraposición de enfoques respecto a la jubilación se la puede extender a otro aspecto, pólemico en nuestros días, como es la edad en la que hay que jubilarse [18].

Por lo tanto, se puede pensar que la edad de jubilación no debe ser sujeta a normas estrictas, sino que más bien sea flexible, de tal manera que existan varias alternativas de jubilación con distintas condiciones, y así el trabajador pueda escoger cuál es la más conveniente para él de acuerdo al nuevo estilo de vida que desee tener; flexibilización, que no existe en el Ecuador, pues el tiempo para jubilarse está determinado por rigurosos parámetros, que se analizarán en el Capítulo 2.

Actualmente, es importante considerar el impacto de la pandemia COVID-19, pues según la Organización Internacional del Trabajo (OIT), es un factor que influye en el PIB, en el espacio fiscal del gobierno y en la estructura del mercado laboral, este último se refleja principalmente en el aumento de la tasa de desempleo, que según el INEC, a diciembre del 2019, era del 3.8 % y a mediados del 2020 se incrementó al 13.3 % [8]; estos aspectos afectan al régimen de invalidez, vejez y muerte del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS), ya que inciden en la disminución de la población de afiliados activos del Instituto, con su correspondiente reducción de la masa salarial [20].

El Boletín Estadístico Número 25, puesto a disposición por parte del IESS, con corte a diciembre de 2020, evidencia la cantidad total de afiliados de 4 132 359, con una reducción de 240 638 afiliados y un decrecimiento de USD 2 031 millones de la masa salarial, en comparación al año 2019, y la cantidad total de pensionistas de 653 844, con un aumento de 31 140 pensionistas en comparación al año 2019, sin embargo, se observa que el incremento de pensionistas dado entre los años 2018 a 2019 es de 42 787, es decir, 11 647 pensionistas más que el último aumento correspondiente a la fecha de corte; además, menciona que existe una tasa de decrecimiento del -8,06 % del PIB debido a la situación económica vivida a causa de la pandemia sanitaria mundial (COVID-19) [16].

La valuación actuarial presentada por la OIT del régimen de invalidez, vejez y muerte del IESS, en su escenario base (supone el aporte del Gobierno del 40 %, establecido por Ley) antes de la pandemia, presentó dos años críticos: el año 2037 en el cual los ingresos totales no serían suficientes para cubrir los gastos y el año 2047 momento en el cual las reservas se agotarían [21]; y, de acuerdo a la última proyección preparada por la OIT, el efecto producido por el COVID-19 impactaría de diversa manera, se visualiza una pérdida de años de sostenibilidad de 7 y 10 años, según la forma en la que el país se recuperaría de la crisis y suponiendo que el Gobierno paga total y oportunamente su contribución [20], es decir, el primer año de reserva negativa ya no sería en el 2047 sino que estaría entre los años 2040 y 2037.

El presente estudio trata de buscar estrategias que contribuyan a la sostenibilidad del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte (Seguro IVM). Para ello se analizará la flexibilización en la edad de jubilación, que consiste en ofrecer incentivos económicos para los trabajadores que desean continuar con su actividad más allá de la edad ordinaria de jubilación, así como acomodar su cuantía en los casos de anticipación de la edad de jubilación [4].

Esta propuesta lógicamente puede generar criterios contrapuestos, por un lado, habrá quienes defiendan la Ley de Jubilación Ordinaria como consta en la Constitución 2008 y la normativa del IESS, pero, por otro lado, también existirán afiliados interesados en jubilarse antes de los 60 años para dedicarse a otros quehaceres como por ejemplo, negocios que generen mayor rentabilidad o simplemente por salud y bienestar, y además, existirán también afiliados que deseen rentabilizar su experiencia y conocimiento, retrasando su jubilación. Se debe entender, que la vida no acaba cuando las potencialidades físicas van disminuyendo, por el contrario, la experiencia robustece al ser humano.

1.1. Objetivo general

Evaluar el impacto sobre la pensión jubilar al momento de anticipar o retrasar la edad de jubilación, a través del desarrollo de una simulación utilizando el sofware estadístico R.

1.2. Objetivos específicos

Para lograr realizarlo, se cumplirá con los siguientes objetivos específicos:

1. Determinar los lineamientos apropiados que posibiliten otorgar una pensión justa bajo la flexibilidad de la edad de jubilación.
2. Calcular las reservas matemáticas empleando el método prospectivo y hallar el último año con reserva positiva.

3. Implementar un simulador en el software R que permita obtener una proyección aproximada de la pensión mensual que podría recibir una persona al momento de adelantar o posponer la edad de jubilación.

1.3. Alcance

La Evaluación del Impacto de la Flexibilización de la Edad de Jubilación en el Ecuador, tiene una connotación social positiva para el Seguro IVM, ciertamente no se trata de una valuación actuarial sino de un aporte que permita contribuir al beneficio del equilibrio financiero, de igual manera, busca brindar conocimiento actuarial a investigadores, empresas, comunidades y organizaciones que estén interesados en temas afines.

El trabajo consiste en estudiar elementos de la matemática financiera y actuarial, donde se incluye el método prospectivo para el cálculo de las reservas matemáticas y la reglamentación del Seguro Social entre otros tópicos pertinentes. El recurso que se utilizará es el software R para implementar de manera práctica esta propuesta y realizar diferentes cálculos actuariales, para ello, se dispone de estudios públicos realizados por el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social entre otras entidades pertinentes, en donde se encuentran datos que serán de utilidad para efectuar el presente análisis a lo largo del semestre 2021-B.

1.4. Software R

R es un lenguaje y un sistema, creado en el año de 1992, forma parte de la filosofía de creación, pues se trata de un lenguaje de programación interpretado, de distribución libre, y se mantiene en un ambiente para el cómputo estadístico y gráfico. Este software corre en distintas plataformas como Linux, Windows y MacOS. El término ambiente pretende caracterizarlo como un sistema totalmente planificado y coherente, y en lugar de pensar que R es un sistema estadístico, es preferible verlo como un ambiente en el que se aplican técnicas estadísticas [28].

1.4.1. Características importantes de R

La capacidad de gráficos de R es muy sofisticada y mejor que la de la mayoría de los paquetes estadísticos. También existen paqueterías que permiten manipular y crear datos en distintos formatos como Excel, Matlab entre otros. Cuenta con más de 18 000 paquetes que han sido desarrollados por usuarios y programadores alrededor del mundo sin contar con los disponibles en redes personales.

R es muy útil para el trabajo interactivo, además es un poderoso lenguaje de programación para el desarrollo de nuevas herrramientas. Otra ventaja muy importante es que tiene una comunidad muy activa, por lo que, haciendo las preguntas correctas rápidamente se encuentran soluciones a los problemas que se presenten en el ámbito de la programación con R [28].

Para apoyar el uso de R se creó el software RStudio, el cual es una interfaz que permite visualizar de manera ordenada y simultánea los procesos que son llevados a cabo con R, pues a la pantalla la divide en cuatro ventanas: *i)* el escritor de sintaxis (script), *ii)* el entorno de trabajo en donde se observan los datos y objetos, *iii)* una ventana con subpestañas que muestran: el historial de archivos utilizados (files), los gráficos (plots) que se generen, los paquetes descargados (packages), la ayuda (help) que ofrece diferentes recursos para comprender el programa y una vista de reportes (viewer) que se estén realizando, *iv)* la consola que corresponde al software de R en su versión básica, ahí se ejecutan las operaciones que están en el operador de sintaxis [2].

1.4.2. Paquete Shiny

Shiny es un paquete de R que permite construir aplicaciones web interactivas a partir de los scripts de R. Fundamentalmente, trata de facilitar la conexión de valores de entrada desde una página web, haciéndolos disponibles para usar en R, y hacer que los resultados del código de R se escriban como valores de salida de vuelta a la página web. Es decir, la interactividad de estas aplicaciones permite manipular los datos sin tener que manipular el código.

Dentro de una aplicación de *shiny* debe haber mínimo un fichero, `app.R`, que contiene dos bloques, que se comunican entre sí, son los componentes: `ui`, que define la interfaz de la aplicación, y `server`, que realiza los cálculos en segundo plano cada vez que el usuario manipula los controles de la interfaz [9]. Componentes que se pasan como argumentos a la función `shinyApp` que crea un objeto de aplicación *shiny* a partir de este par `ui/server`. Se basa en un tipo de programación denominada *reactiva*, que es la que permite que las funciones de `server` simulen estar escuchando y reaccionen, de esta manera, es como cambiando los valores de entrada naturalmente hará que las partes correctas del código de R se vuelvan a ejecutar, lo que a su vez hará que se actualicen las salidas modificadas. Los valores de entrada pueden cambiar en cualquier momento y los valores de salida deben actualizarse inmediatamente para reflejar esos cambios [29].

Este paquete será utilizado como una herramienta a través de la cual se efectuarán las simulaciones del problema planteado, así se lograrán visualizar los resultados de forma intuitiva. Servirá para desarrollar el aplicativo del presente trabajo.

Capítulo 2

Seguridad Social

2.1. Delimitaciones conceptuales

Una necesaria aclaración conceptual es entre: Seguridad Social y Seguro Social. La primera es un derecho humano cuya finalidad es proteger a todas las personas frente a contingencias de la vida, como invalidez, vejez y muerte. Está reconocida tanto en constituciones internacionales como en la Constitución del Ecuador. El segundo es un mecanismo por el cual se ejecuta la Seguridad Social, pues es un sistema de protección que da cobertura a la población con dependencia laboral, y se financia con aportes de empleadores, trabajadores y el Estado. En conclusión, la Seguridad Social es el derecho mientras que el Seguro Social es el medio para llevarlo a cabo.

Otros conceptos que se aclararán son: contingencias y prestaciones. Por un lado, las contingencias, hacen referencia a riesgos sociales imprevistos que se presentan a lo largo de la vida del ser humano que se asocian a la muerte, enfermedad, pérdida de ingresos para el individuo o la familia. Por otro lado, las prestaciones, son los mecanismos a través de los cuales el Seguro Social responde a estos riesgos; las últimas, se pueden clasificar en:

- Económicas: son valores económicos que se entregan como rentas, pensiones, auxilios monetarios, subsidios o indemnizaciones por invalidez, vejez y muerte; se otorgan a afiliados o beneficiarios una vez cumplidos los requisitos de aportaciones y/o edad exigidos.

- Asistenciales: son especies generalmente asociadas a servicios médicos para proteger o prevenir una enfermedad y comprende consulta, diagnóstico, hospitalización, entrega de medicinas, prótesis y rehabilitación.
- Adicionales: no se corresponden a los objetivos mismos del Seguro Social y pueden ser créditos hipotecarios, quirografarios y prendarios.

2.2. Concepto de la Seguridad Social

La Seguridad Social es un concepto de abordaje complejo, ya que toca las áreas de la Economía y la Ciencia Política. Por un lado, como concepto económico, se refiere a la gestión de recursos de naturaleza escasa y que requieren ser administrados bajo principios de eficiencia, eficacia y celeridad. Por otro lado, como concepto político, se constituye como un proceso de sustitución de la elección individual, por una elección colectivista, en donde el Estado funciona como garante de la protección de todos los individuos. Todo aquello a través de un Seguro Social creado para realizar el cometido antes mencionado.

En otras palabras, la Seguridad Social es una realidad política, jurídica, técnica y práctica, que tiene por objeto la cobertura de determinadas contingencias consideradas como protegibles, mediante organismos estatales o privados, financiados con recursos propios; es un derecho fundamental y al mismo tiempo un instrumento de justicia social [23].

2.3. Breve reseña histórica de la Seguridad Social

La Seguridad Social nace en Alemania a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX, bajo la dirección de Otto Von Bismarck, llamado “El Padre de la Seguridad Social”, creada con el objetivo de ofrecer asistencia social por parte del Estado a los trabajadores, aunque a finales del siglo XVIII, Condorcet un ilustrado matemático francés, motivado por sus inquietudes sociales, ya había ideado un sistema que garantizaría pensiones para la clase de la que dice él "*la clase más numerosa y productiva de la sociedad*", es decir, los trabajadores franceses.

Bismarck, creó el Seguro Social con la finalidad de brindar políticas sociales y económicas que beneficien al pueblo, y, de contrarrestar las fuerzas socialistas influenciadas por Marx y Engels, quienes aseguraban que los seguros sociales no nacen por motivos políticos, económicos o sociales sino por motivos ideológicos. Proyecto que fue presentado el 17 de noviembre de 1881 al parlamento, que consiste en tres líneas: ley sobre el seguro de enfermedad aprobado en el año de 1883, ley de seguro de accidentes de trabajo aprobado en 1884 y la ley de seguro de vejez o invalidez total aprobada en 1889, finalmente el 19 de julio de 1911 se promulgó el código de Seguros Sociales.

En 1919 nace la Organización Internacional del Trabajo (OIT), donde el mundo abrió sus puertas a nuevas políticas estatales de proteccionismo, y en todas las Constituciones se promulgó el derecho a la Seguridad Social al amparo del Estado, ya que la OIT realizó la difusión de tan importante normativa, y en ella se expuso mejor que en cualquier otra legislación el significado y fin práctico de la Seguridad Social.

En países de Latinoamérica, se importa el furor europeo por las tendencias proteccionistas hacia los trabajadores y sus familias, luego se produce entre los años 1943 y 1945 una actividad legislativa sin precedentes en torno a la materia.

El desarrollo histórico de la Seguridad Social en el mundo ha atravesado innumerables etapas desde su primera concepción como un sistema asistencial hasta lo que representa actualmente, todo esto se ha evidenciado no sólo en normas legales nacionales sino en fuentes de derecho internacional [23].

2.4. La Seguridad Social en el Ecuador

2.4.1. Breve reseña histórica

En el Ecuador, se dictaron leyes en los años 1905, 1915 y 1918, las cuales normaron la cobertura destinada a los empleados públicos, educadores, telegrafistas y dependientes del poder judicial. El 8 de marzo de 1918 mediante Decreto No. 18, promulgado por el Doctor Isidro Ayora Cueva, se creó la Caja de Jubilaciones y Montepío Civil, Retiro y Montepío Militar, Ahorro y Cooperativa, como una institución de crédito con personería jurídica, organizada de conformidad con la Ley; luego, como resultado de las reivindicaciones obreras de la Revolución Juliana de 1925, permitieron que lo social sea considerado como política de Estado. El 13 de marzo de 1928, se creó la Caja de Pensiones como entidad aseguradora con patrimonio propio diferenciado de los bienes del Estado, mediante Decreto No. 18 publicado en el Registro Oficial No. 59, siendo el hito de la institucionalización del Seguro Social ecuatoriano.

La consolidación del Sistema del Seguro Social en el Ecuador se produjo en septiembre de 1963, denominada como Caja Nacional del Seguro Social, y, finalmente, mediante el Decreto No. 40 y Registro Oficial No. 15, en de julio de 1970, se creó el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social y se constituye en entidad autónoma [31].

En 1998 la Constitución dedica una larga sección a la Seguridad Social, entre los Artículos 55 a 62. Se establece el Sistema Nacional de Seguridad Social y la obligación de extenderlo progresivamente a toda la población urbana y rural con independencia de su condición laboral, se indica que se cubrirán los riesgos de enfermedad, maternidad, cesantía, vejez, invalidez, discapacidad y muerte, se otorga al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social la responsabilidad de las prestaciones del Seguro General Obligatorio como entidad autónoma, con representación tripartita, se ordena que los aportes y contribuciones del Estado consten anualmente en el Presupuesto General y que los fondos se diferencien de los del Estado; por último, se establece el Seguro Social Campesino a nivel constitucional como régimen especial del seguro general. Esta Constitución permite que instituciones privadas participen en la prestación de la

Seguridad Social.

Posteriormente se expidió la Ley de la Seguridad Social publicada en el Registro Oficial No. 465 de 30 de noviembre de 2001, vigente hasta la actualidad y, la Constitución de 2008 que incluye algunas novedades en cuanto a la seguridad social, como se verá más adelante [22].

2.4.2. Régimen de la Seguridad Social vigente

La Ley de Seguridad Social fue publicada en el Registro Oficial No. 465 de 30 de noviembre de 2001, donde consagra el régimen de seguros sociales mediante la creación del Seguro General Obligatorio constando con regímenes especiales como los Seguros: Voluntario y Campesino. Cuyos Principios Rectores estan en el Artículo 1 de esta Ley, e indican que:

"El Seguro General Obligatorio forma parte del sistema nacional de seguridad social y, como tal, su organización y funcionamiento se fundamentan en los principios de solidaridad, obligatoriedad, universalidad, equidad, eficiencia, subsidiariedad y suficiencia".

En el Artículo 2, se muestra que, los sujetos de protección son tanto los trabajadores en relación de dependencia como los independientes, así como los profesionales en libre ejercicio, el administrador de un negocio, el dueño de una empresa unipersonal, el menor trabajador independite y los demás asegurados obligados al régimen del Seguro General Obligatorio en virtud de leyes y decretos especiales.

Los riesgos cubiertos se expresan en el Artículo 3, y son:

- Enfermedad
- Maternidad
- Riesgos de trabajo
- Vejez, muerte, e invalidez, que incluye discapacidad
- Cesantía, y
- Seguro de desempleo

Y, también señala que:

"El Seguro Social Campesino ofrecerá prestaciones de salud y, que incluye maternidad, a sus afiliados, y protegerá al Jefe de familia contra las contingencias de vejez, muerte, e invalidez, que incluye discapacidad.

Para los efectos del Seguro General Obligatorio, la protección contra la contingencia de discapacidad se cumplirá a través del seguro de invalidez."

De esta manera, el Seguro General Obligatorio, está encaminado a la cobertura de quienes desarrollan alguna actividad económica ya sea como trabajadores dependientes o autónomos. El Seguro Voluntario, está diseñado para quienes no se incluyan en el anterior, además, en el Artículo 154 consta sus prestaciones y beneficios, así: *"Los afiliados voluntarios gozarán de los mismos beneficios y prestaciones que se otorgan a los afiliados obligados, en lo referente a los Seguros de Invalidez, Vejez, Muerte, Riesgos del Trabajo y asistencia por enfermedad y maternidad"* [26]. Los seguros anteriores son de carácter contributivo, es decir, su financiamiento depende de los aportes de los trabajadores, empleadores y ciertas contribuciones del Estado. En cuanto al Seguro Campesino es un régimen semicontributivo que se sustenta con una pequeña aportación del jefe o jefa de familia y se complementa con el aporte de los trabajadores afiliados y otros ingresos.

En los últimos años, la cobertura del Seguro Social ha aumentado considerablemente, sin embargo, tales extensiones no han contado con estudios actuariales, lo que pone en peligro la sostenibilidad financiera del sistema [22].

2.4.3. Ampliación de la cobertura

La Ley de Seguridad Social ha sido varias veces reformada en el ámbito de cobertura.

La primera reforma de importancia se dio en el 2010, modificando el Artículo 117, indicando que los hijos de los afiliados tendrán asistencia en salud hasta los 18 años, anteriormente se cubría hasta los seis años. La segunda reforma ocurrió en 2012, y permitió la afiliación voluntaria de los discapacitados con los mismos derechos que en la afiliación voluntaria general. Otras reformas incluidas en la Ley son la jubilación especial por vejez y por incapacidad absoluta y permanente, en la que el Artículo 84 elimina la exigencia de aportaciones mínimas previas para acceder a la pensión de discapacidad para los afiliados a quienes les sobrevenga una discapacidad total y permanente absoluta. Esta norma reforma el Artículo 186 de manera tácita, pues este último exige al menos 60 imposiciones. En el Artículo 85 de la Ley Orgánica de Discapacidades se incluye la jubilación sin mínimo de edad para las personas discapacitadas afiliadas al IESS que acrediten hasta 300 aportaciones y para los discapacitados intelectuales con 240 imposiciones, y en la Ley de Seguridad Social se exige al menos 360 imposiciones. Además, la Ley no aclara qué grado de discapacidad es necesario para acceder a este derecho. El Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social no tiene datos desagregados por este indicador y tampoco se cuenta con estudios actuariales o de impacto que puedan mostrar si existe o no afectación a la sostenibilidad del fondo.

Sin embargo, la segunda reforma se aplicó a partir del 2014, cuando se estableció la forma de financiamiento, que consistía en cargarla a los trabajadores afiliados, es decir, aumentando el porcentaje de aporte al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social (IESS), en $0,1\,\%$. De este modo, son los trabajadores quienes aportan para que se cumplan las prestaciones otorgadas en la Ley Orgánica de Discapacidades.

La tercera reforma relevante se realizó en el 2015, en la Ley Orgánica para la Justicia Laboral y Reconocimiento del Trabajo no Remunerado, en donde incluye la ampliación de la cobertura para personas que realizan trabajo no remunerado en el hogar, protección que se concreta en el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte, y su financiación se estableció a cuenta de la unidad familiar y un subsidio de parte del Estado para quienes tengan menores ingresos.

Por tanto, se observa que la cobertura en estos últimos años ha aumentado, y sin bases claras ni debidos estudios que garanticen la sostenibilidad del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, y sin un mayor aporte del Estado, quien es el encargado de velar por la salud de los ecuatorianos, sino que más bien, se ha hecho un llamado a la “solidaridad” de los trabajadores afiliados, quienes están supliendo los deberes que tiene el Estado, pues de hecho, si están siendo solidarios, ya que aportan en la medida de su capacidad al Seguro y las prestaciones se entregan en la medida de la necesidad [22].

Este trabajo se enfocará en el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte (Seguro IVM), pues es el concepto que más fondos posee debido a que recoge la mayor tasa de aportación del total de financiación del IESS, con el fin de conceder diferentes prestaciones a sus pensionistas, las cuales serán detalladas en la sección 2.5.

2.5. Sistema de pensiones

La Ley de Seguridad Social del 2001 estableció un sistema mixto para el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte, es decir, integraba a los sistemas de reparto y de capitalización individual, sin embargo las normas que regulaban el sistema fueron declaradas inconstitucionales, y se siguió utilizando el régimen anterior a través del Régimen de Transición que consistía en un sistema de reparto, es decir, de solidaridad intergeneracional. Régimen que debía desaparecer paulatinamente mientras se aplicaba el sistema mixto de pensiones.

Por otra parte, los fondos y reservas del Seguro IVM, se administran y mantienen separados del patrimonio del IESS, y no pueden ser dispuestos para otros fines que no sean los expresamente determinados en la Ley [22].

2.5.1. Prestaciones del Sistema de Pensiones

Las prestaciones que concede el Régimen del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte son:

- Jubilación ordinaria por vejez
- Jubilación por invalidez o subsidio transitorio por incapacidad
- Jubilación por discapacidad
- Pensiones de montepío por viudez y orfandad
- Auxilio de funerales

De acuerdo a la Ley de Seguridad Social y a la Resolución No. C.D. 100 de 21 de febrero de 2006, se establecen los requisitos para poder percibir las prestaciones antes mencionadas, a excepción de los requisitos de la jubilación por discapacidad que estan determinados por la Ley Orgánica de discapacidades publicada en el Suplemento del Registro Oficial No. 796 de 25 de septiembre de 2012, y son los que se muestran en el siguiente cuadro 2.1:

Prestaciones	**Requisitos**
Jubilación ordinaria por vejez	***i)*** Sesenta (60) años de edad o más y acreditare por lo menos trescientos sesenta (360) imposiciones mensuales o más. ***ii)*** Sesenta y cinco (65) años de edad o más, siempre que registre un mínimo de ciento ochenta (180) imposiciones mensuales o más. ***iii)*** Setenta (70) años de edad o más, siempre que registre un mínimo de ciento veinte (120) imposiciones mensuales o más. ***iv)*** Con cualquier edad y acreditare cuatrocientos ochenta (480) imposiciones mensuales o más.
Jubilación por invalidez	***i)*** La incapacidad absoluta y permanente para todo trabajo, sobrevenida en la actividad o en período de inactividad compensada, cualquiera sea la causa que la haya originado y siempre que se acredite no menos de sesenta (60) imposiciones mensuales, de las cuales seis (6) como mínimo deberán ser inmediatamente previas a la incapacidad (consecutivas). ***ii)*** La incapacidad absoluta y permanente para todo trabajo, sobrevenida dentro de los dos (2) años siguientes al cese en la actividad o al vencimiento del período de inactividad compensada, cualquiera sea la causa que haya originado, siempre que el asegurado hubiere acumulado ciento veinte (120) imposiciones mensuales como mínimo y no fuere beneficiario de otra pensión jubilar.

Prestaciones	**Requisitos**
Subsidio transitorio por incapacidad	***i)*** El asegurado que registre al menos sesenta (60) imposiciones mensuales, de las cuales las seis (6) últimas deberán ser inmediatamente anteriores a la incapacidad. ***ii)*** La contingencia haya afectado la actividad laboral, que prive al asegurado la obtención de la mayor parte del ingreso necesario para el sustento. ***iii)*** Se verifique que el asegurado cesó en dicha actividad a causa de la contingencia, entendiéndose por tal que interrumpió el desempeño de su labor o concluyó la relación laboral o contractual. ***iv)*** La incapacidad no está amparada por el Seguro General de Riesgos del Trabajo.
Pensiones de Montepío	Si el jubilado en goce de pensión de invalidez o vejez, o el asegurado activo que al momento de su fallecimiento tuviere acreditadas al menos sesenta (60) imposiciones mensuales o se encontrare en el período de protección del seguro de muerte.
Auxilio de funerales	Si el afiliado tuviere acreditadas 6 imposiciones mensuales, por lo menos, dentro de los últimos doce (12) meses anteriores a su fallecimiento o que genere derecho a pensiones de montepío.
Jubilación por discapacidad	***i)*** Las y los afiliados a quienes les sobrevenga una discapacidad permanente total o permanente absoluta tendrán derecho a la pensión por discapacidad sin requisito mínimo de aportaciones previas. ***ii)*** Las personas con discapacidad afiliadas al IESS, tendrán derecho a una pensión, si acreditaren trescientas (300) aportaciones, sin límite de edad. Y, en los casos de personas con discapacidad intelectual acreditaren doscientas cuarenta (240) aportaciones.

Cuadro 2.1: Requisitos para percibir las prestaciones del Seguro IVM

En estudios actuariales de la OIT como los del propio IESS han dado alerta sobre la necesidad de reformar el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte.

2.5.2. Cálculo de la pensión jubilar

El cálculo de la pensión actualmente está dado por la Resolución No. C.D. 100 de 21 de febrero del 2006, en donde se especifica en el Artículo 2 [7], que:

"*La Base de Cálculo de la Pensión del régimen de transición, sera igual al promedio de los cinco (5) años de mejores sueldos o salarios sobre los cuales se aportó. Para el cómputo de la base de cálculo de la pensión, se procederá a la suma de doce (12) meses de imposiciones consecutivas y ese resultado se dividirá para doce (12). Obtenido así el promedio mensual de los sueldos o salarios de cada año de imposiciones del afiliado, se seleccionarán los cinco (5) promedios mensuales de mayor cuantía y el resultado de la suma se dividirá para cinco (5). [. . .]*"

Y, en el Artículo 13, estipula que la pensión mensual será igual al resultado que se obtenga de multiplicar lo anterior por el coeficiente anual de años aportados, mostrado a continuación:

Años de imposiciones	**Coef.**	**Años de imposiciones**	**Coef.**	**Años de imposiciones**	**Coef.**	**Años de imposiciones**	**Coef.**
5	0,4375	14	0,5500	23	0,6625	32	0,7750
6	0,4500	15	0,5625	24	0,6750	33	0,7875
7	0,4625	16	0,5750	25	0,6875	34	0,8000
8	0,4750	17	0,5875	26	0,7000	35	0,8125
9	0,4875	18	0,6000	27	0,7125	36	0,8325
10	0,5000	19	0,6125	28	0,7250	37	0,8605
11	0,5125	20	0,6250	29	0,7375	38	0,8970
12	0,5250	21	0,6375	30	0,7500	39	0,9430
13	0,5375	22	0,6500	31	0,7625	40	1,0000

Cuadro 2.2: Coeficientes anuales de años cumplidos de imposiciones

Así, a partir de los cuarenta años se incrementará el $0,0125$ por cada año de imposiciones adicionales.

Cabe señalar que existió un método de cálculo de pensión diferente al mencionado anteriormente, aplicado desde la vigencia de la Resolución No. C.D. 554 de 4 de agosto de 2017, hasta que fue declarada inconstitucional por el Pleno de la Corte Constitucional [3], a través de la Sentencia 16-18-IN/21 del 28 de abril de 2021, argumentanto que el financiamiento de las prestaciones no puede ser deducido de las pensiones de los jubilados sin una razón plenamente justificada, ya que modificaba el método de cálculo del "*promedio de los cinco (5) años de mejor sueldo*" para determinar el monto de la pensión jubilar.

2.5.3. Pensiones máximas y mínimas

Según [14]. Las pensiones máximas para el Seguro IVM son:

Años aportados	Porcentaje de SBU
10-14	250 %
15-19	300 %
20-24	350 %
25-29	400 %
30-34	450 %
34-39	500 %
40 y más	550 %

Cuadro 2.3: Pensiones máximas para el Seguro IVM

Y, las pensiones mínimas para el Seguro IVM son:

Años aportados	Porcentaje de SBU
Hasta 10	50 %
11-20	60 %
21-30	70 %
31-35	80 %
36-39	90 %
40 y más	100 %

Cuadro 2.4: Pensiones mínimas para el Seguro IVM

2.5.4. Revalorización de pensiones

La pensión de jubilación recibe revalorizaciones anuales, de acuerdo al Artículo 234 de la Ley de Seguridad Social [26], esta revalorización se da al inicio de cada año, y ocurre en la misma proporción que la inflación promedio anual del año pasado.

2.6. Impacto de la flexibilización de la edad de jubilación

2.6.1. Concepto de flexibilización

De acuerdo al diccionario de la Real Academia Española, por flexibilización se entiende lo siguiente: es la acción de flexibilizar. El significado de flexibilizar es: hacer que cierta cosa sea flexible, y a la vez la definición de flexible es:

- Que no se sujeta a normas estrictas, a dogmas o a trabas, y
- Susceptible de cambios o variaciones según las circunstancias o necesidades [25].

Por tanto, el concepto de flexibilización aplicado a la edad de jubilación, se comprenderá como un término económico, puesto que, en el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social se estudiarán diferentes opciones de acceder al Seguro de IVM variando la edad, anticipándola o retrasándola a la ordinaria que es de 60 años, según las circunstancias en las que se encuentra, como son la obligación de cubrir a sus afiliados de las correspondientes contingencias que se puedan presentar, cuando está presente el aumento de la cobertura sin sustento actuarial, factores como el incremento de la esperanza de vida, descenso de la natalidad entre otros factores demográficos, lo que permitirá fortalecer el sistema que se encuentre posiblemente fisurado debido a rigidez o normas estrictas con las que se desarrolla.

2.6.2. Antecedentes en otros países

En diferentes Estados miembros de la Unión Europea, existen interesantes experiencias en la implantación de sistemas que permiten una jubilación gradual y flexible, ya que considera que las políticas tendentes a retrasar la edad efectiva de la jubilación podrían compensar el envejecimiento de la población [4].

En España, en el Acuerdo para la Mejora y el Desarrollo del Sistema de Protección Social, suscrito el 9 de abril de 2001 por el Gobierno, la Confederación de Comisiones Obreras, la Confederación Española de Organizaciones Empresariales y la Confederación Española de la Pequeña y Mediana Empresa, se incluyeron un conjunto de medidas para este fin. Por un lado, con el objetivo de lograr una mayor permanencia en la actividad, se adoptaron las siguientes medidas.

En primer término, la reforma de la regulación de la jubilación parcial, de manera que se posibilite percibir una pensión de jubilación y desarrollar actividades laborales. En segundo término, la exoneración del pago de cotizaciones sociales correspondientes a los trabajadores de 65 o más años, que acrediten 35 años efectivos de cotización y que decidan voluntariamente la continuación o la reiniciación de su actividad laboral. Y en tercer término, la introducción de previsiones que posibiliten que el porcentaje aplicable a la base reguladora de la pensión de jubilación pueda superar el $100\,\%$, respecto de aquellos trabajadores que permanezcan en activo más allá de los sesenta y cinco años de edad y acrediten un mínimo de treinta y cinco años de cotización.

Por otro lado, con el propósito de reformular las condiciones de acceso a la jubilación anticipada, siempre que reúnan determinados requisitos, se ha de proceder a la equiparación de los coeficientes reductores aplicables a la jubilación a partir de los 60 años y 61 años.

Y, a partir de tal acuerdo se llevó a efecto el Real Decreto-Ley 16/2001, donde se reformularon catorce artículos referentes a la flexibilización de la edad de jubilación, estableciendo un nuevo régimen de bonificaciones o reducciones graduales, con la finalidad de permitir la inmediata efectividad del conjunto de medidas necesarias para cumplir con este propósito [5].

Para este año 2021, la edad de jubilación se queda en 65 años si se han cotizado 37 años y tres meses o más y 66 años si se han cotizado menos de 37 años y tres meses, y, el objetivo es que en 2027 la edad de jubilación de los trabajadores sea de 65 años con 38 años y seis meses o más de servicio y de 67 años con menos de 38 años y seis meses [10]. Debido al establecimiento de estos parámetros, el gobierno español ha elevado las pensiones este 2021, con carácter general, un 0.9 % tal y como se recoge en los Presupuestos Generales del Estado. Las pensiones mínimas por su parte, crecen un 1.8 % [6]. Con este cambio, la pensión media de un jubilado se incrementa alrededor de unos 15 euros más.

Según un estudio realizado por el Banco de España en 2021, las reformas introducidas en los últimos años, al incorporar, entre otras medidas, una elevación progresiva de la edad de jubilación, reforzaron sustancialmente la sostenibilidad financiera del sistema [12].

En Estados Unidos la edad para recibir los beneficios del Seguro Social por jubilación es tan temprano como a los 62 años. Por ejemplo, si cumple 62 años en el 2021, su beneficio será alrededor de 29.2 % menos de lo que sería si espera hasta cumplir su plena edad de jubilación que es de 66 años y 10 meses [30]. El sistema de pensiones de Holanda, que es considerado como el mejor del mundo, actualmente, hasta agosto de 2021, se accede al derecho a cobrar esta prestación a partir de los 66 años y cuatro meses. Esta edad está incrementándose progresivamente hasta el 2026 en función del año de nacimiento hasta llegar a los 67 años para los nacidos en diciembre de 1958 [1].

De acuerdo con estas premisas, debe hacerse una Evaluación del Impacto de la Flexibilización de la Edad de Jubilación en el Ecuador, esto significa que es necesario realizar un estudio sobre algunas variantes que pueden aplicarse al momento de fijar la pensión por vejez: por ejemplo, el incremento de la edad de jubilación, el incremento de las tasas de aportación, la reducción de las pensiones, entre otras, con el fin de garantizar el sostenimiento de la Seguridad Social a largo plazo.

2.6.3. Jubilación en el Ecuador

Según datos históricos del IESS [15], la mayoría de afiliados en el Ecuador se jubila al cumplir los 60 años de edad, una vez que ha alcanzado 30 años de aportación, pues, por un lado, para acceder a su pensión antes de los 60 años debería tener 40 o más años de aportación, por ejemplo, en los años 2018-2019, en el Seguro IVM hubieron 56 352 personas que pasaron de ser afiliados a ser pensionistas a la edad de 60 años, y 6 838 personas a la edad de 55 años. Por otro lado, para retrasar la edad de jubilación existe la opción de tener como requisitos 65 años de edad y 15 años de aportación y otra opción de tener 70 años de edad y 10 años de aportación, así mismo, en los años 2018-2019, se jubilaron 36 189 personas a la edad de 65 años y hubo un decremento de pensionistas de 15 645 a la edad de 70 años [15]. Por tanto, la propuesta de la presente investigación es retrasar la edad de jubilación, este retraso no podría darse más allá de cinco años puesto que afectaría a la rotación de trabajadores, es decir, jóvenes ya graduados no pudieran reemplazar a las personas que ya cuentan con una edad avanzada y aún no acceden a su jubilación, en este sentido, se prentende medir el impacto de retrasar: un año, dos años, y así hasta alcanzar los cinco años de retraso, recibiendo los flujos adicionales que conlleva trabajar de un año más hasta cinto años más, de esta manera, se pretende obtener más fondos lo que sugiere tener mayor sostenibilidad del Seguro IVM. Para el caso de adelantar la edad de jubilación se propone hacerlo, de igual manera, hasta cinco años a la edad ordinaria, y se lo realizaría para casos especiales cumpliento ciertos requisitos.

En nuestro país, el principal problema del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte, es que otorga pensiones sin ningún sustento actuarial [20], a eso se suma que la fórmula de cálculo no se ha actualizado en varios años, mientras que la esperanza de vida cada vez es mayor [11], como se muestra en la figura 2.1 (correspondiente a ambos sexos), por tanto, el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social año a año requiere mayor cantidad de dinero para cubrir las pensiones. Por consiguiente, se hace necesario y urgente buscar alternativas para que el Seguro Social se fortalezca.

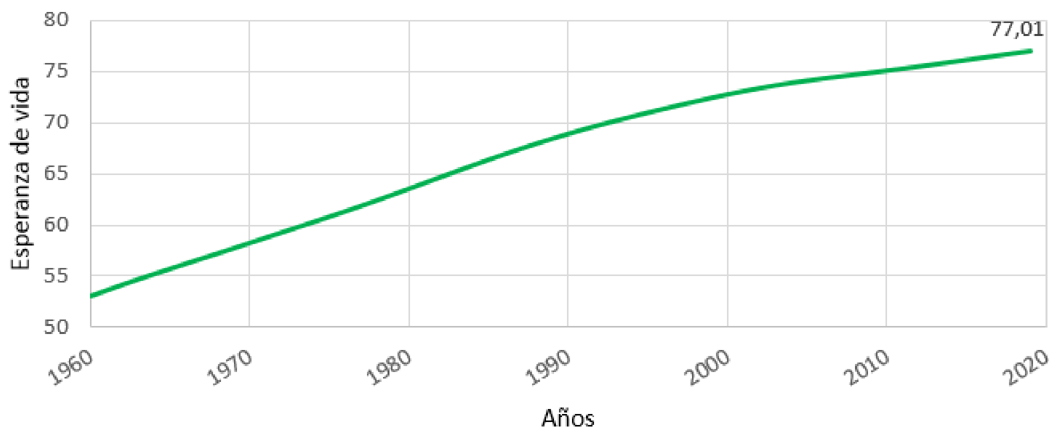

Figura 2.1: Evolución de la esperanza de vida en el Ecuador.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se revisarán los fundamentos financieros y actuariales mínimos que se emplearán para el desarrollo del trabajo, a través de sus técnicas y modelos se tomarán decisiones importantes, que afectarán directamente a lo que se vaya a realizar en un tiempo futuro, pues, se espera que los recursos con los que se cuenten sean optimizados [24]. Se considerarán conceptos como el de biometría, que engloba a un conjunto de métodos que servirán para estudiar fundamentalmente la supervivencia de la población [27], ésta es representada generalmente por un conjunto de características agrupadas en las denominadas tablas de mortalidad, idea que se detallará en la sección 3.4. Para ejecutar el cálculo de pensiones y reservas, se revisarán ítems como son tarificación de rentas, reservas matemáticas y sistemas de financiamiento, entre otros temas pertinentes. Finalmente, se implementará todos éstos conceptos adaptados a la realidad ecuatoriana, a través de el software R y se analizán los resultados que se obtengan.

3.1. Fundamentos de la matemática financiera

A partir de la presente sección se supone un ambiente de certidumbre, donde los agentes económicos conocen con certeza el valor que en el futuro van a tomar las variables económicas, como la inflación, el valor del dólar, el PIB, entre otros. Además, se va a suponer que no existen oportunidades de arbitraje, es decir, que no existe la oportunidad de aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico [19].

3.1.1. Interés y tipo de interés

Conceptos básicos que se deben conocer es el interés y el tipo de interés [19], se tiene que:

Interés

El interés, denotado como I, es el monto del incremento que se ha generado por un capital a lo largo del tiempo, puede ser representado como:

$$I = \textit{Capital final} \; - \; \textit{Capital inicial}$$

Tipo de interés

El tipo de interés o tasa de interés, denotado como i, es el precio obtenido por cada capital por unidad de tiempo, depende de la política monetaria y fiscal, al igual que, de las expectativas de los agentes económicos sobre el comportamiento futuro de la actividad económica, es decir, está determinado por factores exógenos. Puede ser representado como:

$$\textit{Tipo de interés} = \frac{\textit{Interés de la unidad de tiempo}}{\textit{Capital inicial}}$$

3.1.2. Regímenes de capitalización

Se analizarán dos procedimientos que se utilizan para el cálculo del interés: el régimen de capitalización simple y el régimen de capitalización compuesta [19]. Para ello, se considera la realización de una operación financiera elemental, donde durante un periodo de tiempo n, se dispone de un capital C que pertenece a una persona u organización, y donde la otra parte queda obligada a devolver al final de ese periodo, el capital C más su correspondiente interés I.

Régimen de capitalización simple

Para este caso, al interés I se lo calcula mediante la siguiente ecuación:

$$I = C \cdot i \cdot n \tag{3.1}$$

donde, el capital C es el número de unidades monetarias (u.m.), i es el tipo de interes, y n es el periodo de tiempo que dura la operación expresado en unidades de tiempo (la unidad de tiempo corresponderá a el año, a menos que se indique lo contrario). Por tanto, luego de n periodos de tiempo, se tiene que, el capital será:

$$C_n = C + I = C + C \cdot i \cdot n = C(1 + i \cdot n) \tag{3.2}$$

Notemos que, por ejemplo, si el tipo de interés i se encuentra expresado en tanto porciento anual, la duración de la operación n, debe estar acorde a la unidad de tiempo, es decir, en años. Se trabaja con dos procedimientos, puede ser con el año natural (o base 5) que es de 365 días o con el año comercial (o base 0) que es de 360 días. De este modo, n será igual al número de días de la operación sobre 365 o 360, dependiendo del procedimiento que se emplee.

El tipo de interés, i, es una magnitud que depende inversamente de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando, si la unidad de tiempo escogida es equivalente a $1/m$ años, entonces el tipo de interés i^m expresado en la nueva unidad de tiempo equivalente a un tipo de interés anual i deberá verificar que:

$$I = C \cdot i^m \cdot n^* = C \cdot i \cdot n \tag{3.3}$$

donde, $n^* = n \cdot m$, es el número de nuevas unidades de tiempo incluidas en n años. Por tanto,

$$C \cdot i^m \cdot (n \cdot m) = C \cdot i \cdot n \tag{3.4}$$

$$i^m = \frac{i}{m} \tag{3.5}$$

así, i^m es el tipo de interés subperiodal bajo el régimen de capitalización simple.

Régimen de capitalización compuesta

La capitalización compuesta hace que los intereses gerenen, a su vez, intereses. En este caso, el interés I se lo calcula mediante la siguiente ecuación:

$$I = C[(1+i)^n - 1] \tag{3.6}$$

donde, como antes, C es el capital, i es el tipo de interés y n es el periodo de tiempo que dura la operación. Pues, si luego de n años un inversor recibe una cantidad de C_n, ésta debe ser igual a la que hubiese recibido un año antes C_{n-1}, más los intereses generados durante ese año, entonces:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i \cdot 1 = C_{n-1}(1+i) \tag{3.7}$$

Así mismo, la cuantía que recibirá el inversor si al cabo de un año cerrase la cuenta C_1, es igual a $C_0 + C_0 \cdot i$, es decir:

$$C_1 = C_0(1+i) \tag{3.8}$$

lo que implica que,

$$C_n = C_0(1+i)^n \tag{3.9}$$

La expresión anterior es utilizada para liquidar las operaciones financieras bajo el régimen de capitalización compuesta. De este modo, la recompensa o interés que se recibiría por poner a disposición a un tercero un capital de C_0 u.m. durante un periodo de $n \geq 0$ años a un tipo de interés i, sería:

$$I = C_0[(1+i)^n - 1] \tag{3.10}$$

De igual manera que el tipo de interés bajo el régimen de capitalización simple, i es una magnitud que depende de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. De esta forma, si se escoge una unidad de tiempo equivalente a $1/m$ años $m \in \mathbb{N}$, el tipo de interés i^m expresado en la nueva unidad de tiempo equivalente a un tipo de interés anual i deberá verificar:

$$I = C[(1+i^m)^{n^*} - 1] = C[(1-i)^n - 1] \tag{3.11}$$

siendo $n^* = n \cdot m$ el número de nuevas unidades de tiempo incluidas en n años. Por tanto,

$$(1 + i^m)^{n \cdot m} = (1 + i)^n \Rightarrow i^m = (1 + i)^{1/m} - 1 \tag{3.12}$$

donde i^m es el tipo de interés subperiodal bajo el régimen de capitalización compuesta.

Tipo de interés nominal

Sea una operación financiera consistente en la inversión de una unidad monetaria en el instante t durante un periodo de amplitud $1/m$. Diremos que j^m representa el tipo de interpes nominal por unidad de tiempo (año) pagadero o capitalizable con frecuencia m si el tipo de interés efectivo subperiodal correspondiente al subperiodo $[t, t + 1/m]$ es igual a j^m/m, es decir, si:

$$\frac{j^m}{m} = i^m \tag{3.13}$$

De esta forma, si realizamos una inversión en t de C_0 unidades monetarias a un plazo $1/m$ a un tipo de interés nominal anual pagadero con frecuencia m igual a j^m, la cuantía acumulada al final de la inversión C_1, será:

$$C_1 = C_0 \left[1 + \frac{j^m}{m}\right] \tag{3.14}$$

De la relación entre el tipo de interés nominal j^m, y el tipo de interés efectivo subperiodal i^m, podemos obtener el tipo de interés anual equivalente i, al tipo de interés nominal anual capitalizable con frecuencia m:

$$(1 + i) = (1 + i^m)^m = \left[1 + \frac{j^m}{m}\right]^m \tag{3.15}$$

Tipo de interés instantáneo

El tipo de interés nominal j^m permite obtener el tipo de interés efectivo correspondiente a un periodo de amplitud $1/m$ (con inicio en t) a partir de la explesión $i^m = \frac{j^m}{m}$. Así, j^{12} permite obtener el tipo de interés efectivo correspondiente al periodo mensual $[t, t + 1/12]$; de igual modo, j^{365} permite obtener el tipo de interés efectivo al que se pactan las operaciones a un día de t. Aunque en la práctica no se realicen operaciones a menos de un día, desde un punto de vista teórico sí pueden plantearse operaciones a un plazo $\left[t, t+\frac{1}{m}\right]$, donde $m > 365$. Estas operaciones se pactarían a un tipo de interés nominal j^m a partir del cual obtendríamos i^m, el tipo de interés efectivo como $\frac{1}{m}j^m$. Evidentemente, conforme m aumenta, disminuye la amplitud del intervalo $[t, t+1/m]$.

Este proceso conduce al concepto de tipo de interés instantáneo o tipo de interés nominal capitalizable continuamente como el valor al que tiende j^m conforme m tiende a infinito, es decir, conforme disminuye la amplitud del intervalo $[t, t+1/m]$. Así, definimos el tipo de interés instantáneo o tipo de interés nominal capitalizable continuamente, referido al instante t, y denotamo por δ, al límite, que supondremos que existe para todo t:

$$\delta = \lim_{m \to +\infty} j^m \tag{3.16}$$

3.2. Rentas financieras

Las rentas financieras [19] son aquellas que se pagan regularmente durante un periodo de tiempo, con la finalidad de construir un capital para el futuro o retornar una deuda adquirida en el presente. En cualquier situación, es posible calcular el valor actual o valor final de la renta.

Figura 3.1: Esquema de una Renta Financiera

$$A = \{(C_1, t_1), ..., (C_n, t_n)\} \text{ con } t_{j+1} - t_j = t \wedge j \in \{1, ..., n-1\}$$

donde, C_n es la cuantía del capital, t_j es el vencimiento o fecha de disposición del capital, t es el periodo de tiempo constante, y, finalmente (C_j, t_j) son los términos de la renta y $[t_j, t_j + 1]$ es el periodo de maduración de la renta.

3.2.1. Clasificación de las rentas

Las rentas pueden clasificarse de acuerdo a los siguientes criterios que se resumen en el siguiente esquema:

$$\text{En función de su} \begin{cases} \text{Periodo} \begin{cases} \text{Anuales} \\ \text{Fraccionadas} \end{cases} \\ \text{Cuantía} \begin{cases} \text{Constantes} \\ \text{Variables} \end{cases} \\ \text{Inicio} \begin{cases} \text{Inmediatas} \\ \text{Diferidas} \end{cases} \\ \text{Vida} \begin{cases} \text{Temporales} \\ \text{Perpetuas} \end{cases} \\ \text{Vencimiento} \begin{cases} \text{Pospagables} \\ \text{Prepagables} \end{cases} \end{cases}$$

A continuación, se valorará cada tipo de renta, es decir, se hallará el valor financiero de cada uno de los capitales que componen la renta, para ello, se aplicará la capitalización compuesta. Se calculará el valor actual si el momento de la valoración es t_0 o el valor final si el momento es t_n.

3.2.2. Rentas anuales, constantes e inmediatas

En este tipo de rentas, se consideran periodos de un año, con cuantías constantes C las que vencen a partir del primer periodo, éstas, a su vez, pueden ser prepagables o pospagables.

Rentas inmediatas temporales pospagables

Es una renta inmediata temporal y pospagable, ya que, las cuantías C vencen desde el primer periodo, hay finitos periodos n, y se pagan al final de cada uno.

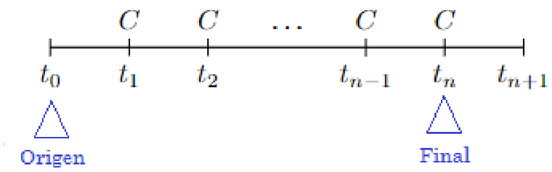

Figura 3.2: Renta anual, constate, inmediata,temporal y pospagable

Supondiendo que $C = 1$, la expresión para calcular el valor actual de este tipo de renta es la suma de los valores actuales de las cuantías que la constituyen, es decir, el valor de las cuantías descontadas al momento t_0 con un tipo de interés efectivo i, y se denota como $a_{\overline{n}|i}$, detallado a continuación:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \tag{3.17}$$

La anterior expresión se observa que se trata de una progresión geométrica finita, a razón de $1/(1+i)$, así, esta dada por $S = (a_n \cdot r - a_1)/(r-1)$, donde, el término S es la suma de la progresión, r es la razón de la progresión, a_1 es el primer término y a_n es el último término de la progresión. Aplicando dicha fórmula a la ecuación 3.17 y multiplicando $(1+i)$ a su numerador y denominador, finalmente se obtiene al valor actual de una renta anual, constante, inmediata, temporal y pospagable:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{3.18}$$

De forma similar, se obtiene para determinar el valor final de la renta, que será igual a la suma de los valores finales de las cuantías que la constituyen, es decir, el valor de las cuantías capitalizadas al momento t_n con un tipo de interés efectivo i, y se denota como $s_{\overline{n}|i}$, detallado a continuación:

$$s_{\overline{n}|i} = 1 \cdot (1+i)^{n-1} + 1 \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + 1 \cdot (1+i) + 1 \tag{3.19}$$

Se observa que, la expresión anterior se trata de una progresión geométrica finita, a razón de $1/(1+i)$, como antes, se tiene:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3.20}$$

la cual corresponde al valor final de una renta anual, constante, inmediata, temporal y pospagable. Además, existe la siguiente relación:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-n} s_{\overline{n}|i} \tag{3.21}$$

Rentas inmediatas temporales prepagables

Es una renta inmediata temporal y prepagable, ya que, las cuantías C vencen desde el primer periodo, hay finitos periodos n, y se pagan al inicio de cada uno.

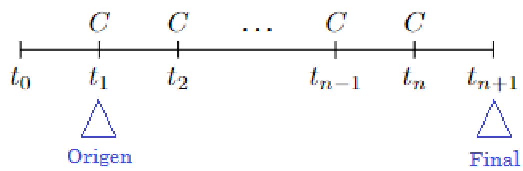

Figura 3.3: Renta anual, constate, inmediata,temporal y prepagable

Considerando una cuantía $C = 1$, el valor actual de la renta será igual a la suma de los valores actuales de las cuantías que la constituyen, es decir, el valor de las cuantías descontadas al momento t_1 con un tipo de interés efectivo i,y se denota como $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$, detallado a continuación:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \tag{3.22}$$

expresión que comparándola con 3.17 se nota que cumplen con esta relación $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}$ de donde:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{3.23}$$

que corresponde al valor actual de una renta anual, constante, inmediata, temporal y prepagable.

Similarmente se obtiene que el valor final de la renta, que es igual a la suma de los valores finales de las cuantías que la constituyen, es decir, el valor de las cuantías capitalizadas al momento t_{n+1} con un tipo de interés efectivo i, a este valor se lo denota como $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, detallado a continuación:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = 1\cdot(1+i)^n + 1\cdot(1+i)^{n-1} + 1\cdot(1+i)^{n-2} + \cdots + 1\cdot(1+i)^2 + (1+i) \tag{3.24}$$

que junto con la expresión 3.20 se tiene la relación $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}$, así:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3.25}$$

el cual, es el valor final de una renta anual, inmediata, temporal, constante y prepagable. Existe también la siguiente relación:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-n}\ddot{s}_{\overline{n}|i} \tag{3.26}$$

Rentas inmediatas perpetuas pospagables

Una renta es inmediata perpetua y pospagable si se vence desde el primer periodo, dura un número infinito de términos y se paga al final de cada periodo.

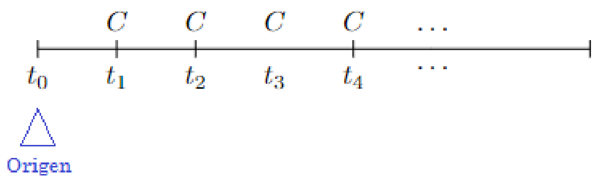

Figura 3.4: Renta constante, inmediata, perpetua y pospagable

Considerando una cuantía $C = 1$, el valor actual de la renta será igual a la suma de los valores actuales de las cuantías que la constituyen, es decir, el valor de las cuantías descontadas en t_0 con i como tipo de interes efectivo, así, se denota como $a_{\overline{\infty}|i}$, detallado a continuación:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots \tag{3.27}$$

La expresión anterior es igual al límite cuando n tiende a infinito de una renta temporal pospagable, así:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \tag{3.28}$$

$$= \frac{1}{i} \tag{3.29}$$

que es el valor actual de una renta anual, inmediata, constante, perpetua y pospagable.

Rentas inmediatas perpetuas prepagables

Una renta es inmediata perpetua y prepagable si se vence desde el primer periodo, dura un número infinito de términos y se paga al inicio de cada periodo.

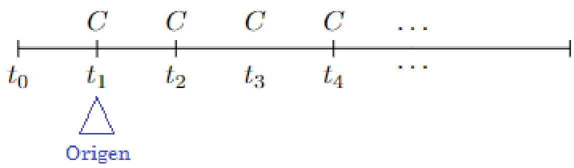

Figura 3.5: Renta constante, inmediata, perpetua y prepagable

Considerando $C = 1$, con i como interés efectivo, el valor actual de esta renta se denota como $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ y se detalla así:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots \tag{3.30}$$

Como antes, cuando n tiende al infinito de una renta temporal prepagable se tiene:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} (1+i)\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} \tag{3.31}$$

$$= \frac{1+i}{i} \tag{3.32}$$

que corresponde al valor actual de una renta anual, inmediata, constante, perpetua y prepagable.

Rentas anuales constantes y diferidas

Una renta es diferida m periodos, cuando el vencimiento inicia m periodos después del momento de la valoración inicial de la renta.

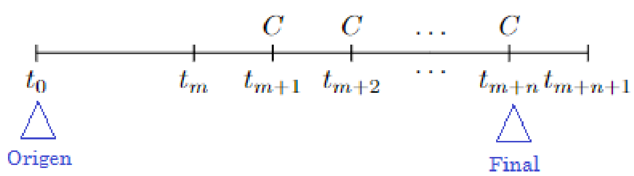

Figura 3.6: Renta constante, diferida, temporal y pospagable

Una vez más, considerando $C = 1$, el valor actual de la renta se denota como ${}_{m|}a_{\overline{n}|i}$, detallado a continuación:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-m} a_{\overline{n}|i} \tag{3.33} $$

con $(1+i)^{-m}$, conocido como el factor de descuento. Por otra parte, el valor final de la renta se lo denota como ${}_{m|}s_{\overline{n}|i}$ y con 3.21 se deduce lo siguiente:

$$ {}_{m|}s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+m} {}_{m|}a_{\overline{n}|i} \tag{3.34} $$

por lo tanto, se tiene que:

$$ {}_{m|}s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n} a_{\overline{n}|i} \tag{3.35} $$

es el valor final de una renta diferida m periodos, temporal y pospagable.

Ahora, observemos el siguiente esquema:

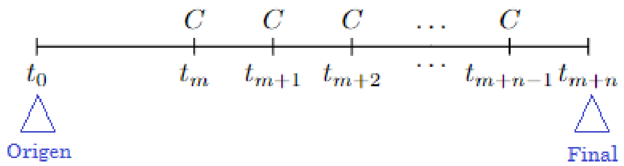

Figura 3.7: Renta constante, diferida, temporal y prepagable

Así mismo, si se difiere m periodos una renta temporal prepagable constante, y considerando $C = 1$, el valor actual y valor final de la renta estarán dados por:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-m} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \tag{3.36} $$

$$ {}_{m|}\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \tag{3.37} $$

Y, con una renta perpetua pospagable y una renta perpetua prepagable, diferidas m periodos, el valor inicial de cada renta estará dado por:

$$ {}_{m|}a_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-m} a_{\overline{\infty}|i} \tag{3.38} $$

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-m} \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} \tag{3.39} $$

Cuando el valor de la cuantía es diferente de 1, para obtener el valor de la renta, basta multiplicar dicho valor al de la renta de cuantía igual a 1, obtenido con la fórmula correspondiente de las mostradas en esta sección.

Rentas geométricas temporales pospagables

Una renta es geométrica temporal y pospagable, si cada cuantía C varía de acuerdo a una progresión geométrica, de razón q, consta de n periodos y vence al final de cada uno.

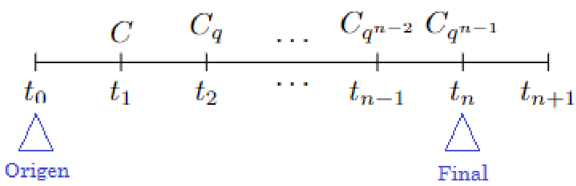

Figura 3.8: Renta inmediata, anual, variable en progresión geométrica, temporal y pospagable

El valor actual de esta renta esta denotado por $A(C,q)_{\overline{n}|i}$, detallado a continuación:

$$A(C,q)_{\overline{n}|i} = C(1+i)^{-1} + (C\cdot q)(1+i)^{-2} + (C\cdot q^2)(1+i)^{-3} + \cdots + (C\cdot q^{n-1})(1+i)^{-n} \tag{3.40}$$

así, se trata de la suma de términos de una progresión geométrica finita de razón $q\cdot(1+i)^{-1}$, se puede expresar como sigue:

$$A(C,q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C\cdot \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} & \text{si } q \neq (1+i) \\ C\cdot n\cdot (1+i)^{-1} & \text{si } q = (1+i) \end{cases} \tag{3.41}$$

El valor final de esta renta, se denota como $S(C,q)\overline{n}|i$, y ulitizando 3.21 se tiene:

$$S(C,q)_{\overline{n}|i} = (1+i)^n A(C,q)_{\overline{n}|i} \tag{3.42}$$

de donde, se obtiene:

$$S(C,q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C\cdot \frac{(1+i)^n-q^n}{1+i-q} & \text{si } q \neq (1+i) \\ C\cdot n\cdot (1+i)^{n-1} & \text{si } q = (1+i) \end{cases} \tag{3.43}$$

Rentas geométricas temporales prepagables

Una renta es geométrica temporal y prepagable, si cada cuantía C varía de acuerdo a una progresión geométrica, de razón q, consta de n periodos y vence al inicio de cada uno.

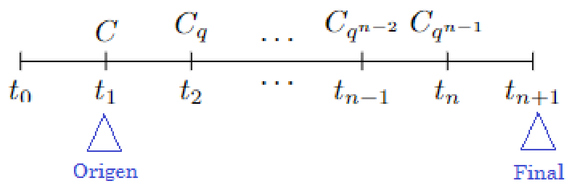

Figura 3.9: Renta inmediata, anual, variable en progresión geométrica, temporal y prepagable

El valor inicial de esta renta, se lo denota por $\ddot{A}(C,q)_{\overline{n}|i}$, y con la ecuación 3.23, se sigue que:

$$\ddot{A}(C,q)_{\overline{n}|i} = (1+i)A(C,q)_{\overline{n}|i} \tag{3.44}$$

por tanto,

$$\ddot{A}(C,q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C \cdot (1+i) \cdot \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} & \text{si } q \neq (1+i) \\ C \cdot n & \text{si } q = (1+i) \end{cases} \tag{3.45}$$

Y, para obtener el valor final de esta renta, que se lo denota por $\ddot{S}(C,q)_{\overline{n}|i}$, se utiliza la ecuación 3.26 con la que se tiene:

$$\ddot{S}(C,q)_{\overline{n}|i} = (1+i)^n \ddot{A}(C,q)_{\overline{n}|i} \tag{3.46}$$

por tanto,

$$\ddot{S}(C,q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C \cdot (1+i)^{n+1} \cdot \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} & \text{si } q \neq (1+i) \\ C \cdot n \cdot (1+i)^n & \text{si } q = (1+i) \end{cases} \tag{3.47}$$

Rentas geométricas perpetuas pospagables

Es una renta geométrica perpetua y pospagable, si existe un número infito de vencimientos de cuantías que siguen una progresión geométrica, y que se pagan al final de cada periodo. El valor inicial se lo denota por

$A(C,q)_{\overline{\infty}|i}$ y se expresa así:

$$A(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} A(C,q)_{\overline{n}|i} \tag{3.48}$$

Y, de la expresión 3.41, se obtiene que el valor inicial de esta renta es:

$$A(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \begin{cases} \frac{C}{1+i-q} & \textbf{si } q < (1+i) \\ \infty & \textbf{si } q \geq (1+i) \end{cases} \tag{3.49}$$

3.3. Modelo Biométrico

El modelo biométrico [19] es un modelo estocástico, ya que posee en su estructura por lo menos una variable aleatoria que es la edad de fallecimiento, denotada como X, que representa el tiempo biológico transcurrido desde el instante del nacimiento de un individuo hasta su muerte. La edad de fallecimiento X, intrínsecamente, es una variable continua, definida dentro del conjunto $[0,+\infty[$, sin embargo, la información disponible de la edad de fallecimiento de los individuos obtenida a través de censos, suministra los años completos que ha vivido el individuo; además, se acepta la existencia de una edad límite w, denominada infinito actuarial, de esta manera X, en la práctica, se define sobre el conjunto $[0,w]$.

3.3.1. Función de fallecimiento

De la variable aleatoria edad de fallecimiento X, su función de distribución se denota por $F(x)$, así:

$$F(x) = P[X < x],\ \forall x \geq 0 \tag{3.50}$$

que representa, la probabilidad de fallecer antes de la edad x, y es denominada función de fallecimiento, que cumple: $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$ o $F(w) = 1$ y $F(x)$ es una función no decreciente y continua por la derecha.

Hipótesis básicas sobre el modelo biométrico

- Homogeneidad: Si X_i y X_j son las edades de fallecimiento de los individuos i y j pertenecientes a la misma población, entonces, para todo x elemento de $\mathbb{R}^+$, se cumple que: $F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x) = F(x)$, donde F es la función de distribución de X.
- Independencia: Si X_i y X_j son las edades de fallecimiento de los individuos i y j, entonces, para todo x y y elementos de $\mathbb{R}^+$, se tiene: $F_{X_i|X_j=y}(x) = F(x)$. Es decir, la edad de fallecimiento de un individuo no depende de la edad de fallecimiento de otro individuo cualquiera.
- Estacionariedad: Las probabilidades biométricas sobre los individuos no dependen de su fecha de nacimiento, sino que dependen de su edad, característica aceptada para periodos cortos de tiempo.

3.3.2. Función de supervivencia

La función de supervivencia será denotada como $S(x)$, y es la probabilidad de sobrevivir hasta una edad x, así:

$$S(x) = 1 - F(x) \tag{3.51}$$

y, cumple que: $S(0) = 1$, $S(\infty) = 0$ o $S(w) = 0$ y, $S(x)$ es una función no creciente y continua por la derecha.

3.3.3. Vida residual

Vida residual es la variable aleatoria que representa los años que restan por vivir a una persona que alcanza la edad x, es denotada por $T(x)$ o T_x, definida sobre $[0, w - x]$, y para todo X mayor que x, se tiene:

$$T(x) = X - x \tag{3.52}$$

representada en el siguiente esquema:

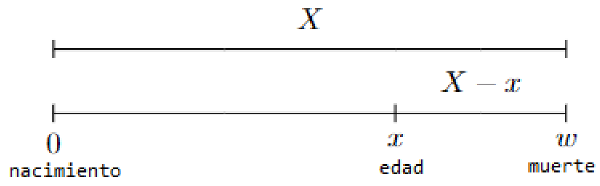

Figura 3.10: Variable edad de fallecimiento y vida residual

La función de distribución de esta variable se denota por $F_x(t)$, y representa la probabilidad de fallecer de un individuo antes de t años dado que sobrevió a la edad x, así:

$$F_x(t) = P[T_x \leq t] = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(t)} \tag{3.53}$$

Y, la probabilidad de que un individuo sobreviva t años dado que sobrevivió a la edad x, es $S_x(t)$, así:

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} \tag{3.54}$$

de la ecuación 3.53 y de la ecuación 3.54, se tiene:

$$F_x(t) = \frac{S_0(x) - S_0(x+t)}{S_0(x)} \tag{3.55}$$

Notación actuarial

Sobre T_x, se pueden expresar las probabilidades siguientes:

- ${}_tq_x$: es la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca dentro de t años. Así:

$$ {}_tq_x = P[T_x \leq t] = F_x(t), \;\; t \geq 0 \tag{3.56}$$

- ${}_tp_x$: es la probabilidad de que un individuo de edad x permanezca vivo a la edad de $x+t$. Así:

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P[T_x > t] = S_x(t), \;\; t \geq 0 \tag{3.57}$$

Generalizando la ecuación 3.54, para s, t mayores o iguales a 0, se tiene: ${}_{t+s}p_x = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}$. Y, para el caso particular $x = 0$, entonces $T(0) = X$ y por tanto se tiene para todo t mayor o igual que 0:

$$ {}_0q_x = P[X \leq t] = F_0(t) \tag{3.58} $$

$$ {}_0p_x = P[X > t] = S_0(t) \tag{3.59} $$

donde $F_0(t)$, representa la probabilidad de que un recién nacido muera antes de la edad t, por tanto, para todo t mayor que 0 se cumple $F_0(t) = F(t)$, análogamente para todo t mayor que 0 se tiene $S_0(t) = S(t)$. Por otra parte, si $t = 1$, las expresiones 3.56 y 3.57 pueden escribirse como: q_x y p_x.

Para expresar que la probabilidad de que un individuo de x años de edad permanezca vivo t años y fallezca dentro de los próximos u años, es decir, la probabilidad de que fallezca dentro de las edades $x+t$ y $x+t+u$, se denota por ${}_{t|u}q_x$, y se expresa así:

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x \tag{3.60} $$

Y, es posible enunciarla también como:

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t} \tag{3.61} $$

Si $u = 1$, se omite este prefijo de las ecuaciones.

3.3.4. Fuerza de mortalidad

La fuerza de mortalidad o tasa instantánea de mortalidad, denotada por μ_x o $\mu(x)$, representa la probabilidad de que un individuo que se supone vivo en el instante x, no sobreviva al siguiete intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño d_x:

$$ \mu_x = \lim_{dx \to 0^+} \frac{1}{dx} P[T_x \leq dx] \tag{3.62} $$

$$ = -\frac{d}{dx} \ln S_0(x) \tag{3.63} $$

así, recoge el valor del límite de la probabilidad temporal de fallecimiento fraccionada dentro del año, por lo que podemos generalizar (2.63) como:

$$\mu(x+t) = -\frac{1}{S_x(t)}\frac{d}{dx}S_x(t) = -\frac{d}{dx}\ln S_x(t) \tag{3.64}$$

Y, considerando que $f(x) = F'(x)$, (2.63) se puede expresar así:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} \tag{3.65}$$

que representa la fuerza de mortalidad para una persona de x años de edad.

3.4. Tablas de Mortalidad

Las tablas de mortalidad o tablas de vida [19], son el principal indicador del calendario de la mortalidad, esto significa que se trata de la distribución del número de fallecidos por edad de una generación. También ofrece, las esperanzas de vida a cualquier edad. Las tablas de mortalidad pueden referirse al total de la población, a cada sexo, a un determinado grupo étnico o en general a cualquier subconjunto poblacional. Su principal aplicación es la medición de los niveles de mortalidad de la población considerada en un instante, es importante en el cálculo de los seguros de vida, en la fijación de las pensiones, entre otros. A continuación, se detallan las principales funciones biométricas que se muestran en una tabla de mortalidad:

- x: es la edad de la persona en el rango, $o \leq x \leq w$, donde w es la edad límite.
- ℓ_x: es el número de sobrevivientes a la edad x, suponiendo una cohorte inicial de ℓ_0 recién nacidos.
- d_x: es el número de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$.

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1} \tag{3.66}$$

si las defunciones ocurren en un periodo de n años, la notación será:

$$ {}_n d_x = \ell_x - \ell_{x+n} \tag{3.67} $$

- q_x: es la probabilidad que una persona de x años de edad muera antes de cumplir $x+1$.

$$ q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x} \tag{3.68} $$

$$ {}_n q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x} = \frac{{}_n d_x}{\ell_x} \tag{3.69} $$

  de la última expresión, si la probabilidad de que una persona de x años de edad muera antes de cumplir $x+n$.

- p_x: es la probabilidad de que una persona de x años de edad sobreviva hasta la edad $x+1$.

$$ p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} \tag{3.70} $$

$$ {}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \tag{3.71} $$

  de la última expresión, si la probabilidad de que una persona de x años de edad sobreviva hasta la edad $x+n$. Hay que notar que: $p_x = 1 - q_x$.

- e_x: esperanza de vida residual a la edad x.

$$ e_x = \frac{T_x}{\ell_x} \tag{3.72} $$

  donde, T_x es el número total de años de vida vividos por una generación entre las edades x y w:

$$ T_x = \sum_{i=x}^{w-1} L_i \tag{3.73} $$

  con,

$$ L_x = \ell_{x+1} + \frac{1}{2} d_x \tag{3.74} $$

  que es el número medio de personas vivas entre x y $x+1$ años.

En general, para construir una tabla de mortalidad, se necesita recoger información del número y edad de personas expuestas al riesgo de muerte, y sus edades al momento de la muerte.

3.5. Tarificación de Rentas

Las rentas actuariales conocidas también como rentas de supervivencia [19], consisten en brindar al asegurado un pago de manera regular durante todo el tiempo que permanezca con vida. De manera similar a las rentas financieras, las rentas actuariales se pueden clasificar por su periodo, cuantía, inicio, vida y vencimiento, las cuales se especificarán a continuación.

3.5.1. Rentas actuariales anuales, constantes e inmediatas

Una renta actuarial es anual, constante e inmediata, si el periodo de cada pago corresponde a un año, es de cuantía C constante y vence a partir del primer periodo. Éstas se pueden subclasificar en rentas temporales y vitalicias, que pueden ser pospagables o prepagables.

Rentas actuariales pospagables temporales

Una renta actuarial es pospagable y temporal, si los pagos, de cuantía C, se efectúan al final de cada periodo, y existen n periodos.

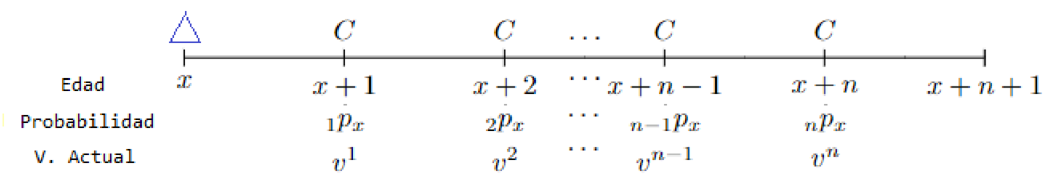

Figura 3.11: Renta actuarial anual, constante, inmediata, pospagable, temporal

La prima pura para esta operación se denota por $a_{x:\overline{n}|}$ y se expresa como sigue:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} v^k{}_kp_x \tag{3.75}$$

En esta opción de tarificación, se tiene que el problema que el modelo probabilístico no supone una distribución de probabilidad ($\sum_k {}_kp_x > 1$).

También es posible hallar la prima pura encontrando el valor actuarial de la variable aleatoria Y:

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K_x}|i} = \frac{1-v^{K_x}}{i} & \text{si } K_x < n \\ a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} & \text{si } K_x \geq n \end{cases} \tag{3.76}$$

se puede expresar $Y = \frac{1-Z}{i}$, donde:

$$Z = \begin{cases} v^{K_x} & \text{si } K_x < n \\ v^n & \text{si } K_x \geq n \end{cases} \tag{3.77}$$

entonces, la prima pura será:

$$a_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \frac{1-[Z]}{i} \tag{3.78}$$

Rentas actuariales pospagables vitalicias

Una renta actuarial es pospagable y vitalicia, si los pagos de cuantía C se efectúan al final de cada periodo, y existen infinitos periodos, es decir, hasta que el asegurado fallezca. Suponemos $C = 1$, así la prima pura de la operación se denota por a_x, expresada a continuación:

$$a_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{w-x} v^k{}_kp_x \tag{3.79}$$

Rentas actuariales prepagables temporales

Una renta actuarial es prepagable y temporal, si los pagos de cuantía C se efectúan al inicio de cada periodo, y existen n periodos.

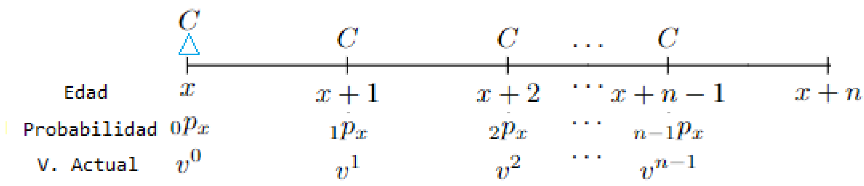

Figura 3.12: Renta actuarial anual, constante, inmediata, prepagable, temporal

Suponemos $C = 1$, así la prima pura de este tipo de renta actuarial se denota por $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, expresada a continuación:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kp_x \tag{3.80}$$

Rentas actuariales prepagables vitalicias

Una renta actuarial es prepagable y vitalicia, si los pagos de cuantía C se efectúan al inicio de cada periodo, y duran todo el tiempo que el asegurado permanezca vivo. Suponemos $C = 1$, para tarificar esta renta, así la prima pura se denota por $\ddot{a}_x$, se expresa como sigue:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^k {}_kp_x \tag{3.81}$$

3.5.2. Rentas actuariales anuales, constantes y diferidas

Una renta actuarial es anual, constante y diferida, si sus cuantías C se vencen cada año a partir de la edad $x + m$, donde m son los periodos diferidos. Sin pérdida de generalidad, se supone que $C = 1$, y que se difieren m periodos en una renta actuarial pospagable vitalicia. La prima pura se denota por ${}_{m|}a_x$ y se expresa como sigue:

$${}_{m|}a_x = {}_mE_x a_{x+m} \tag{3.82}$$

con ${}_mE_x = v^n \cdot {}_np_x$ factor de descuento actuarial de m periodos.

3.5.3. Rentas actuariales con coberturas variables

Coberturas con variación geométrica

Esta renta sigue una progresión geométrica, pues la cuantía de la póliza se incrementa con una tasa de crecimiento α. Tomando un caso particular, sin pérdida de generalidad, de una renta actuarial temporal pospagable, la prima pura se denota por ${}^{\alpha}V\, a_{\overline{x:n}|}$, y se expresa así:

$$ {}^{\alpha}V\, a_{\overline{x:n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^k v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^{k-1} v^k{}_k p_x \tag{3.83} $$

Ahora, si se tiene una recta actuarial prepagable, la prima pura se denota como ${}^{\alpha}V\, \ddot{a}_{\overline{x:n}|}$ y será:

$$ {}^{\alpha}V\, \ddot{a}_{\overline{x:n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha)^k v^k{}_k p_x \tag{3.84} $$

3.6. La prima

En toda operación financiera, a lo largo del tiempo, existen dos fuentes de capitales intercambiables: la prestación que es el conjunto de capitales que entrega el prestamista o acreedor, y la contraprestación que es el conjunto de capitales que entrega el prestatario o deudor.

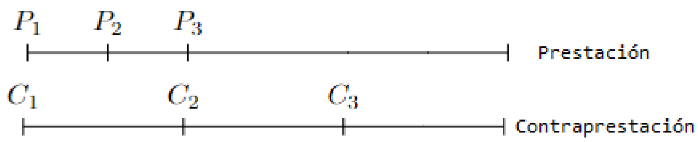

Figura 3.13: Flujos dentro de una operación financiera

De manera análoga, sucede en los casos de seguros pues existe el intercambio de una prima por una prestación asegurada. Se emplea entonces, el *principio de equilibrio financiero-actuarial*, éste consiste en que: dada γ como pérdida del asegurador, se tiene que el valor esperado de la pérdida mencionada es cero:

$$ E(\gamma) = 0 \tag{3.85} $$

Así, bajo hipótesis necesarias, los aseguradores pueden determinar la distribución del valor actual de la pérdida futura, y a partir de ésta determinar la prima, es decir, el cálculo de la prima se lo realiza bajo (2.85), lo que implica que:

$$E[\text{VA Prestaciones aseguradas} - \text{VA Prima neta}] = 0 \tag{3.86}$$

que a su vez, se tiene:

$$E[\text{VA Prestaciones aseguradas}] = E[\text{VA Prima neta}] \tag{3.87}$$

Así, para fijar la prima pura o neta de una operación se debe considerar que su esperanza se corresponde con la de las prestaciones aseguradas en la póliza, dada P o π como prima única:

$$\pi = E[\text{VA Prestaciones aseguradas}] \tag{3.88}$$

Entonces, la prima neta o pura es la aportación necesaria para financiar el pago de las contingencias en término medio, sin considerar posibles desviaciones ni gastos.

Si la prima depende del riesgo total de la operación y su pago no se realiza en un solo desembolso, por ejemplo: mensual, trimestral, semestral, entre otros, entonces se considera una prima nivelada fraccionada, denotada como $P_n^{(m)}$ o $P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$, donde m es el número de periodos en los que se ha fraccionado el año y n es el número de años en los que se va a pagar la prima. Así, bajo el principio de equivalencia financiero-actuarial se tiene:

$$E[\text{VA Primas fraccionadas}] = E[\text{VA Prima pura}] \tag{3.89}$$

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{3.90}$$

3.7. Reservas matemáticas

La reserva matemática es el saldo de una operación actuarial en un determinado momento de tiempo, es decir, es la diferencia entre la esperanza del valor actual de las primas futuras y la esperanza del valor actual de las prestaciones futuras. Por ejemplo:

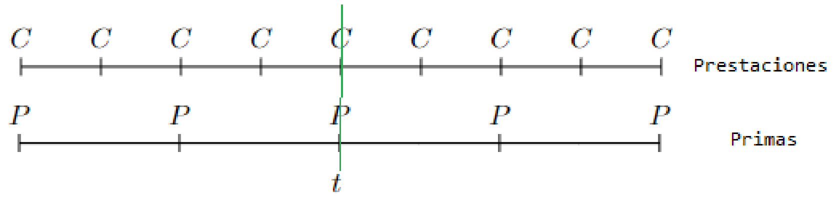

Figura 3.14: Operación de seguros

De este modo, la esperanza de todas las primas valoradas en t debe ser equivalente a la esperanza de todas las prestaciones valoradas en t:

$$E\left[\sum_{i=0}^{n} P_i^t\right] = E\left[\sum_{i=0}^{n} C_i^t\right] \tag{3.91}$$

expresión que se puede descomponer como sigue:

$$E\left[\sum_{i=0}^{t} P_i^t\right] + E\left[\sum_{i=t+1}^{n} P_i^t\right] = E\left[\sum_{i=0}^{t} C_i^t\right] + E\left[\sum_{i=t+1}^{n} C_i^t\right] \tag{3.92}$$

de donde, se desprende el concepto de reserva matemática, a la que se la denota como ${}_tV$, conmutando los términos de 3.92 se observa:

Reserva Matemática	
Método retrospectivo	Método prospectivo
${}_tV = E\left[\sum_{i=0}^{t} P_i^t\right] - E\left[\sum_{i=0}^{t} C_i^t\right]$	${}_tV = E\left[\sum_{i=t+1}^{n} C_i^t\right] - E\left[\sum_{i=t+1}^{n} P_i^t\right]$

Cuadro 3.1: Reserva matemática

Para el cálculo de la reserva matemática, en este trabajo tomaremos el método prospectivo, pues la dota de un sentido económico, ya que representa el exceso de pagos pendientes que debe realizar la compañía para liquidar la operación, es decir, es el monto del que se debe disponer como asegurador en cada momento para hacer frente a los compromisos futuros que se adquieran, por tanto:

$${}_tV > 0, \ \forall t > 0 \tag{3.93}$$

lo que significa que el valor esperado de las prestaciones futuras será mayor que el valor esperado de las primas futuras, de esta forma siempre existirá una fase de ahorro.

3.7.1. Cálculo de la reserva matemática en el Ecuador

La Junta de Regulación indica que la reserva matemática para planes de pensiones, rentas vitalicias, seguros de vida individual, asistencia médica, coberturas de vida y cualquier otro tipo de seguro que necesite de reserva matemática, ésta deberá ser en un $100\,\%$ calculada, a través, de criterios actuariales basados en estándares aceptados sobre todas las pólizas vigentes y deberán ser presentados a la Superintendencia de Compañías, Valores y Seguros para su aprobación.

La metodología general indica que en pólizas de mediano y largo plazo (mayores a un año), la reserva matemática se calculará mediante el método prospectivo, en caso de que las características del contrato impidieran el uso de éste método, entonces puede emplearse el método retrospectivo. En lo referente a pólizas de corto plazo (menores a un año), en caso de fallecimiento o afines, se indica que el cálculo de la reserva matemática se realizará con prima no devengada, para el caso de supervivencia la reserva se calculará por el total de la prima pura de riesgo más intereses devengados en el periodo correspondiente con la tasa de interés técnica utilizada en la determinación de la prima [17].

3.8. Sistemas de financiamiento

Los sistemas de financiamiento ofrecen respuesta a la pregunta de cómo financiar y cómo valorar los denominados, en general, seguros de vejez. Si se acumula o almacena la producción de los años de vida activa, para un posterior disfrute en la vejez, no sería necesario utilizar estos sistemas; pero con éstos es posible acceder a bienes no almacenables, como servicios asistenciales, médicos, entre otros, ya que, es administrada esa producción eficientemente para aprovechar mejor los recursos [32].

En el Ecuador, el Libro Segundo Ley de Seguridad Social [26], indica que a parir del cese de toda la actividad y siempre que cumpla con los requisitos para la jubilación de vejez ordinaria, una vez aprobada su solicitud, percibirá una renta mensual vitalicia determinada por el saldo acumulado en su cuenta de capitalización individual y por la expectativa de vida que señalen las tablas generales aprobadas por el IESS.

3.8.1. Sistema de capitalización individual

Según [32] se define como aquél en el que el equilibrio entre el valor de las primas y el valor de las prestaciones es de carácter actuarial. En este sistema la edad es importante y el equilibrio se plantea individuo a individuo, pues a cada asegurado le corresponderá su prima; las prestaciones futuras quedan garantizadas, ya que, es un sistema autosuficiente por cuanto no es necesario que nuevas personas se incorporen al colectivo. Además, en sentido demográfico, es un método longitudinal tanto para las prestaciones como para las cotizaciones:

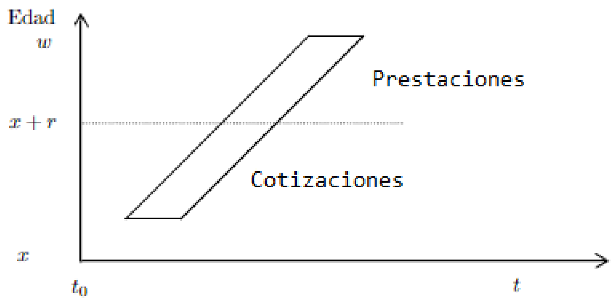

Figura 3.15: Gráfico sistema de capitalización

Como ejemplo, dado un individuo de edad x_h, con prima y renta de jubilación constantes, P_h y R_h, respectivamente, y suponiendo que x_r es la edad de jubilación, se tiene los siguientes esquemas temporales de primas y prestaciones:

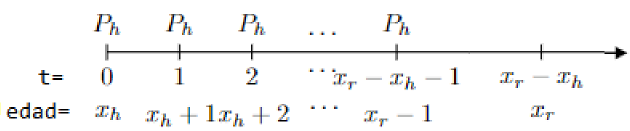

Figura 3.16: Primas - capitalización individual

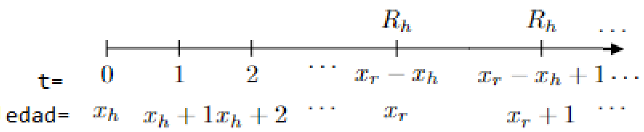

Figura 3.17: Prestaciones - capitalización individual

Así, para cada individuo de un colectivo, en lo referente a primas, tendrán duraciones distintas, pues, existe una diferencia entre la edad de jubilación x_r y la edad x_i que tiene en ese momento el individuo i-ésimo del colectivo. Por otra parte, en lo referente a prestaciones, se observa un diferimiento diferente en las rentas vitalicias, como antes, la edad de jubilación x_r y la edad x_i del individuo i-ésimo es diferente también.

Para un individuo de edad x_h, su ecuación de equivalencia es la siguiente:

$$P_h \ddot{a}_{x_h:x_r-x_h} = R_h \cdot {}_{x_r-x_h|}\ddot{a}_{x_h} = R_h \cdot {}_{x_r-x_h}E_{x_h} \cdot \ddot{a}_{x_r} \tag{3.94}$$

donde: R_h es la renta anual de jubilación, x_r es la edad de retiro, P_h es la prima constante, $\ddot{a}_{x_r}$ es el valor actual actuarial de una renta constante, prepagable, unitaria, vitalicia, $\ddot{a}_{x_h:x_r-x_h}$ es el valor actual actuarial de una renta constante, prepagada, unitaria, temporal de $x_r - x_h$ periodos, ${}_{x_r-x_h|}\ddot{a}_{x_h}$ es el valor actual actuarial de una renta constante, prepagable, unitaria, vitalicia y diferida $x_r - x_h$ periodos, finalmente ${}_{x_r-x_h}E_{x_h}$ es el factor de actualización actuarial para $x_r - x_h$ periodos, es el producto del factor de descuento y la probabilidad de que el indiviuo sobreviva a la edad x_r.

Para el cálculo de la reserva, t años después de empezar la operación, siguiendo el método prospectivo, para un individuo que no se ha jubilado de edad x_h, es el que sigue:

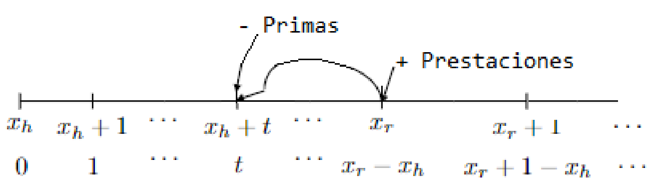

Figura 3.18: Esquema temporal cálculo de reserva

donde se observa que, si el individuo tiene una mayor edad, entonces menos número de primas le quedan por aportar. La fórmula para el cálculo es la que sigue:

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x_h} &= {}_{x_r-x_h-t|}\ddot{a}_{x_h+t} \cdot R_h - P_h \cdot \ddot{a}_{x_h+t:x_r-x_h-t} && (3.95)\\
&= \ddot{a}_{x_r} \cdot {}_{x_r-x_h-t}E_{x_h+t} \cdot R_h - P_h \cdot \ddot{a}_{x_h+t:x_r-x_h-t} && (3.96)
\end{aligned}
$$

donde, ${}_{x_r-x_h-t|}\ddot{a}_{x_h+t}$ es el valor actual actuarial de una renta constante, prepagable, unitaria, vitalicia, diferida $x_r - x_h - t$ periodos, contratada por un individuo de edad $x_h + t$.

Capítulo 4

Aplicativo para la evaluación del impacto de la flexibilización en la edad de jubilación en el Ecuador

4.1. Estructura del aplicativo

Mendiante el aplicativo web que se implementó utilizando la herramienta *Shiny* de RStudio, se evaluará el impacto de la flexibilización en la edad de jubilación en el Ecuador, pues posibilitará mantener una relación dinámica entre los datos de entrada y los datos de salida, logrando visualizar los cambios que conlleve calcular pensiones a diferentes edades de jubilación, y así mismo se mostrarán los resultados en las reservas matemáticas, para ello, se trabajará con ejemplos particulares en los que se pueda evidenciar el impacto provocado al variar los datos de entrada. Para desarrollar la programación en el software R, se empleó la teoría del Capítulo 3, adaptándola a la realidad ecuatoriana, además, se utilizó una base de datos, descrita en la subsección 4.1.1, y diversos paquetes disponibles en R, entre los que se destaca el paquete *lifecontingencies*, pues admite el manejo de tablas de mortalidad y contiene funciones, como *axn* (subsección 4.1.2), para realizar fácilmente matemáticas financieras y actuariales.

4.1.1. Base de datos

La base de datos que se utilizó contiene información de la tabla de mortalidad de afiliados de ambos sexos del Ecuador, su estructura se presenta en el cuadro 4.1, y contiene también los coeficientes anuales según los años aportados, los últimos descritos en el cuadro 2.2.

x	q_x
15	$0,0005964$
16	$0,000663045$
17	$0,000729268$
$\vdots$	$\vdots$
108	$0,846889952$
109	$0,90625$
110	1

Cuadro 4.1: Tabla de mortalidad de los afiliados ecuatorianos. Fuente: IESS [13]

Donde, x representa la edad del afiliado y q_x representa la probabilidad de que el afiliado de edad x años muera antes de cumplir $x + 1$, y esta descrita en la ecuación 3.69.

4.1.2. Función *axn*

Esta función calcula el valor actuarial de las rentas, dada una tabla actuarial. Además, se puede utilizar para simular la distribución estocástica del valor de la renta. Se la utiliza de la siguiente manera:

```
axn(actuarialtable,x,n,i,m,k,payment)
```

donde: **`actuarialtable`** es un objeto de tabla actuarial, **`x`** es la edad del asegurado, **`n`** es el número de términos de la renta y si la renta se pretende pagar hasta la muerte éste se omite, **`i`** es la tasa de interés, **`m`** es el período de aplazamiento y se supone que es 1 si se omite, **`k`** es el número de pagos fraccionados por período y se supone que es 1 si se omite, **`payment`** es tipo de pago que puede ser **`"immediate"`** cuando trata de una renta pospagable o **`"due"`** si trata de una renta prepagable.

4.1.3. Interfaz

En la figura 4.1, se muestra la interfaz del aplicativo. Al lado izquierdo cuenta con cuatro opciones de entrada de datos, que determinará el usuario:

1. **Ingresar fecha de nacimiento:** esta entrada no tiene repercusión en los cálculos que se van a realizar, únicamente se lo implementó con un fin visual y dinámico.
2. **Ingresar la edad de inicio de las cotizaciones:** se refiere a la edad donde se ingresó al sistema del IESS.
3. **Ingresar el primer salario (al iniciar las cotizaciones):** el cual tendrá revalorizaciones de acuerdo a la tasa de crecimiento anual del salario básico unificado.
4. **Ingresar la edad de jubilación:** edad que puede variar de acuerdo a la perspectiva del usuario sin olvidar que se trabaja con los requisitos mínimos de imposiciones mensuales del régimen vigente de la Seguridad Social.

Al lado derecho cuenta con una barra con una escala, que va desde el $1\,\%$ al $8\,\%$, que representa la **tasa de interés** que se utilizará para realizar los cálculos actuariales, de modo que el usuario pueda modificarla si es el caso; inicialmente se encuentra fija con el $4\,\%$.

Finalmente, cuenta con un botón denominado como: **Calcular Pensión**, el cual activa el proceso de programación con los datos ingresados y actualiza la salidas de acuerdo a ellos, mostrando lo siguiente:

1. Número de aportaciones realizadas
2. Coeficiente de años de aportación
3. Salario Básico (Mensual)
4. Tasa de Cotización $\%$
5. Fondo Acumulado en los años de cotización
6. Pensión de Jubilación (Anual)

7. Pensión de Jubilación (Mensual)

Y, también muestra el gráfico de **Evolución de las Reservas**, donde se muestran las aportaciónes del afiliado que constituyen el fondo y como se van agotando a medida que son recibidas cuando es pensionista.

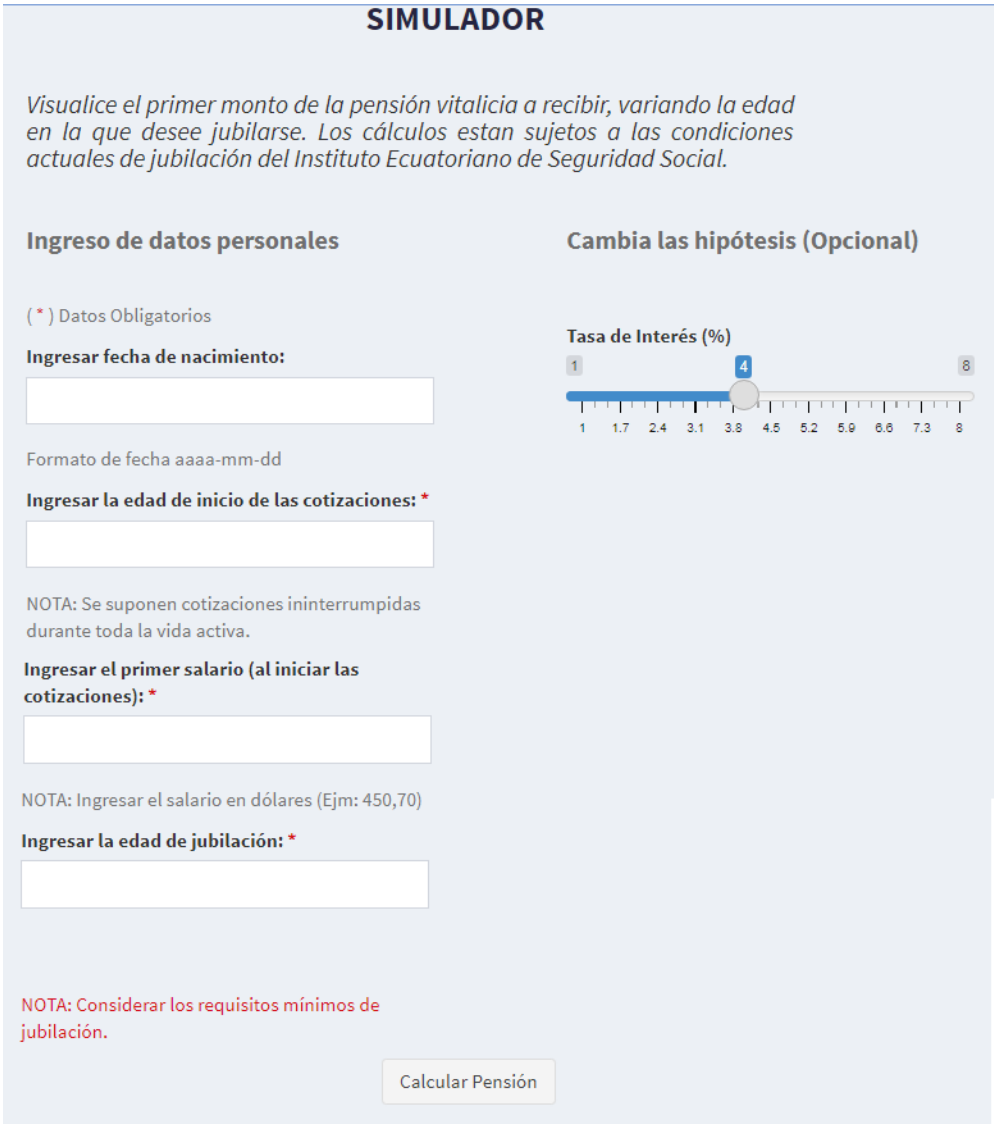

Figura 4.1: Simulador para el cálculo de pensiones y reservas matemáticas

4.2. Cálculo de la pensión en la simulación

Los lineamientos a seguir son los siguientes. El Seguro IVM recibe la mitad del porcentaje de cotización del aporte para el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, de donde se cuantificará el valor de ahorro acumulado durante toda la vida activa de un afiliado. Para el cálculo de las pensiones jubilares se tomará en cuenta la normativa vigente, descrita en la subsección 2.5.2, que consiste en primer lugar, en calcular la base de cálculo, así:

$$\textit{Promedio mensual año } i = \frac{\sum_{j=1}^{12} \textit{ Imposicion mensual}_j}{12} \tag{4.1}$$

donde, *Promedio mensual año* i es el promedio mensual de los sueldos de cada año i de imposiciones del afiliado. Entonces, se escogen los cinco mejores promedios, es decir, los de más alta cuantía, y se calcula la media aritmética, así:

$$\textit{Base calculo} = \frac{\sum_{k=1}^{5} \textit{Promedio escogido}_k}{5} \tag{4.2}$$

luego, se multiplica la *Base calculo* por el coeficiente (cuadro 2.2) que le corresponde según el número de imposiciones realizadas:

$$\textit{Pension obtenida} = \textit{Base calculo} \cdot \textit{Coeficiente} \tag{4.3}$$

y, se verifica si cumple con las pensiones mínimas y máximas (subsección 2.5.3).

Ahora, como se tiene la cantidad total de lo que ha contibuido el afiliado, para calcular la pensión mensual, se considerará la capitalización individual (subsección 3.8.1), pues se busca comparar las pensiones obtenidas a diferentes edades y para ello se necesita que el sistema sea actuarialmente justo, es decir, que lo que se ha aportado sea lo que se reciba, que significa, que no se va a recibir más dinero del que se ha dado a la Seguridad Social; así el ahorro se lo dividirá para una renta actuarial vitalicia, diferida con doce flujos por año, y con progresión geométrica pues la pensión cada año recibe una revalorización (subsección 2.5.4). Todos los cálculos traidos a valor actual. Por tanto, se aplicará la teoría del sistema de capitalización individual, pero en este caso la renta estará en función de la base del cálculo en el Ecuador, es decir, empleando la media aritmética.

Las hipótesis actuariales que se utilizarán para realizar los cálculos a partir de la presente sección, serán de acuerdo a la Dirección Actuarial, de Investigación y Estadística del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, concretamente, a su último estudio publicado en septiembre de 2019, que es la Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio, con fecha de corte al 31 de diciembre de 2018 [14]. Y son las siguientes:

1. Tasa de cotitazación del aporte para el Seguro IVM es igual al $10,46\,\%$.
2. Tasa de interés es igual al $4\,\%$.
3. Tasa de crecimiento anual del salario básico unificado es igual a $2,53\,\%$.
4. Tasa de crecimiento anual de pensiones es igual a $2,54\,\%$.

El código con el cual se realizó los cálculos se ubica en el Anexo A.

4.3. Resultados

Para analizar el impacto sobre la pensión jubilar al momento de anticipar o retrasar la edad de jubilación, adaptando los cálulos actuariales a las condiciones actuales que rigen en la Seguridad Social ecuatoriana, se tomaron cuatro ejemplos, en los que se ilustra los resultados de aplicar los lineamientos apropiados, descritos a lo largo del trabajo, que posibiliten otorgar una pensión justa bajo la flexibilidad de la edad de jubilación.

4.3.1. Ejemplos

Ejemplo 1. Un individuo, servidor público, ingresa al sistema de afiliación del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social a la edad de 25 años, y desea conocer que edad es mejor para jubilarse, suponiendo que existiera en el Ecuador flexibilidad en la edad de jubilación, su primer sueldo es de $\$$ 900. Calcular la primera pensión mensual a recibir, a partir del siguiente mes de jubilación, si se jubila a la edad de 60, 61, 62, 63, 64 o 65 años y el fondo que acumularía en todos los años de aportación. Los resultados se observan en el cuadro 4.2 y la evolución de la reserva, de la pensión más alta, en la figura 4.2.

Datos de entrada						
Edad de inicio de cotizaciones (años):						25
Primer sueldo al iniciar las cotizaciones ($):						900
Edad de jubilación (años):						60 - 65
Resultados						
Edad de jubilación (años)	Años de aportación	Fondo acumulado ($)	Último año con reserva positiva	Pensión de jubilación anual ($)	Pensión de jubilación mensual ($)	Tasa de incremento mensual %
60	35	159 035	88	3 604	259	3,09
61	36	165 937	90	3 696	267	2,62
62	37	173 015	91	3 789	274	2,92
63	38	180 271	93	3 885	282	2,84
64	39	187 710	94	3 983	290	3,10
65	40	195 338	95	4 084	299	

Cuadro 4.2: Resultados ejemplo 1

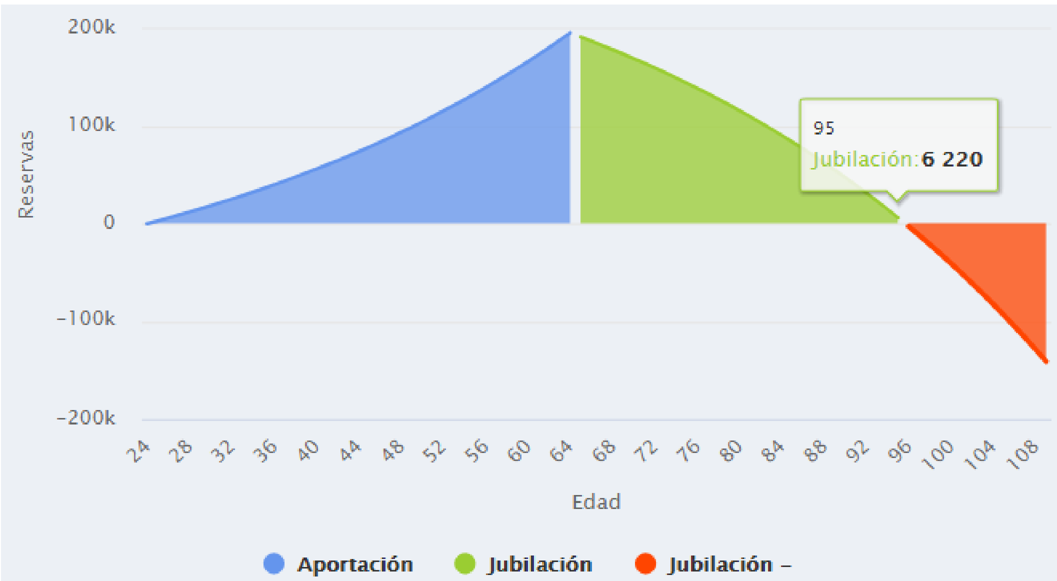

Figura 4.2: Evolución de la reserva del ejemplo 1 - edad de jubilación 65 años

Ejemplo 2. Un individuo, trabajador autónomo, ingresa al sistema de afiliación del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social a la edad de 18 años, y desea conocer que edad es mejor para jubilarse, suponiendo que existiera en el Ecuador flexibilidad en la edad de jubilación, su primer sueldo es de $ 500. Calcular la primera pensión mensual a recibir, a partir del siguiente mes de jubilación, si se jubila a la edad de 58, 59, 60, 61, 61 o 63 años y el fondo que acumularía en todos los años de aportación. Los resultados se observan en el cuadro 4.3 y la evolución de la reserva, de la pensión más alta, en la figura 4.3.

Datos de entrada						
Edad de inicio de cotizaciones (años):						18
Primer sueldo al iniciar las cotizaciones ($):						500
Edad de jubilación (años):						58 - 63
Resultados						
Edad de jubilación (años)	Años de aportación	Fondo acumulado ($)	Último año con reserva positiva	Pensión de jubilación anual ($)	Pensión de jubilación mensual ($)	Tasa de incremento mensual %
58	40	124 609	88	2 605	178	2,81
59	41	129 598	92	2 671	183	3,28
60	42	134 713	91	2 739	189	2,65
61	43	139 958	92	2 808	194	3,09
62	44	145 335	93	2 879	200	3,00
63	45	150 849	95	2 952	206	

Cuadro 4.3: Resultados ejemplo 2

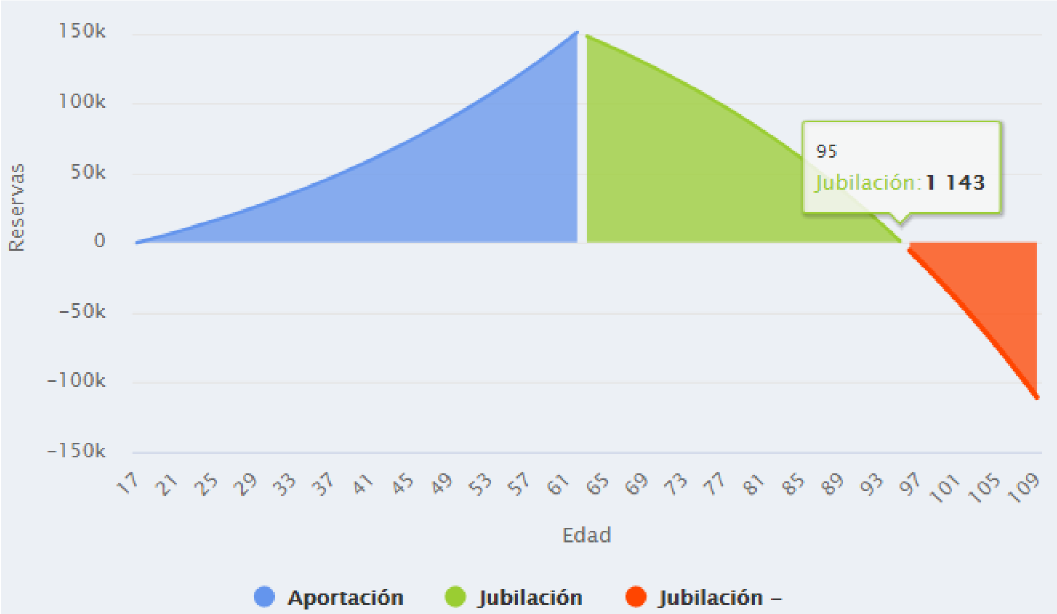

Figura 4.3: Evolución de la reserva del ejemplo 2 - edad de jubilación 63 años

Ejemplo 3. Un individuo, trabajador del sector privado bajo relación de dependencia, ingresa al sistema de afiliación del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social a la edad de 30 años, y desea conocer que edad es mejor para jubilarse, suponiendo que existiera en el Ecuador flexibilidad en la edad de jubilación, su primer sueldo es de $ 1 500. Calcular la primera pensión mensual a recibir, a partir del siguiente mes de jubilación, si se jubila a la edad de 60, 61, 62, 63, 64 o 65 años y el fondo que acumularía en todos los años de aportación. Los resultados se observan en el cuadro 4.4 y la evolución de la reserva, de la pensión más alta, en la figura 4.4.

Datos de entrada						
Edad de inicio de cotizaciones (años):					30	
Primer sueldo al iniciar las cotizaciones ($):					1 500	
Edad de jubilación (años):					60 - 65	
Resultados						
Edad de jubilación (años)	Años de aportación	Fondo acumulado ($)	Último año con reserva positiva	Pensión de jubilación anual ($)	Pensión de jubilación mensual ($)	Tasa de incremento mensual %
60	30	195 970	86	4 909	365	3,01
61	31	205 371	88	5 033	376	2,66
62	32	215 009	89	5 161	386	2,85
63	33	224 891	91	5 291	397	2,77
64	34	235 023	92	5 425	408	2,70
65	35	245 412	93	5 562	419	

Cuadro 4.4: Resultados ejemplo 3

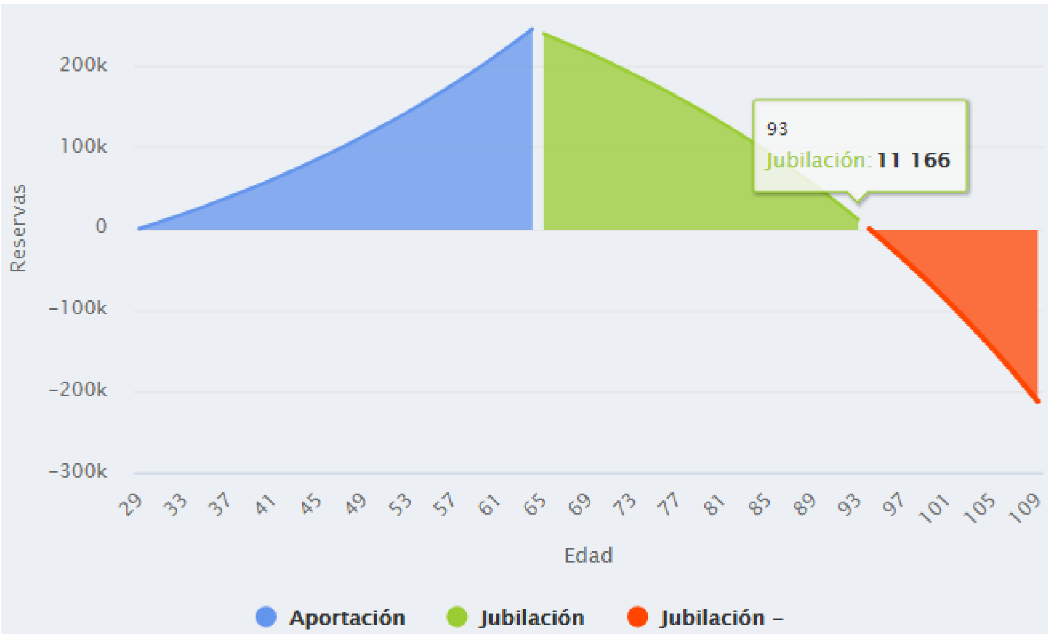

Figura 4.4: Evolución de la reserva del ejemplo 3 - edad de jubilación 65 años

Ejemplo 4. Un individuo, un empleado de la función judicial, ingresa al sistema de afiliación del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social a la edad de 32 años, y desea conocer que edad es mejor para jubilarse, suponiendo que existiera en el Ecuador flexibilidad en la edad de jubilación, su primer sueldo es de $ 1 200. Calcular la primera pensión mensual a recibir, a partir del siguiente mes de jubilación, si se jubila a la edad de 65, 66, 67, 68, 69 o 70 años y el fondo que acumularía en todos los años de aportación. Los resultados se observan en el cuadro 4.5 y la evolución de la reserva, de la pensión más alta, en la figura 4.5.

Datos de entrada						
Edad de inicio de cotizaciones (años):						32
Primer sueldo al iniciar las cotizaciones ($):						1 200
Edad de jubilación (años):						65 - 70
Resultados						
Edad de jubilación (años)	Años de aportación	Fondo acumulado ($)	Último año con reserva positiva	Pensión de jubilación anual ($)	Pensión de jubilación mensual ($)	Tasa de incremento mensual %
65	33	185 314	93	4 360	321	
66	34	193 663	94	4 470	330	2,80
67	35	202 223	95	4 583	339	2,73
68	36	211 000	97	4 699	349	2,95
69	37	219 999	98	4 818	359	2,87
70	38	229 226	100	4 940	369	2,79

Cuadro 4.5: Resultados ejemplo 4

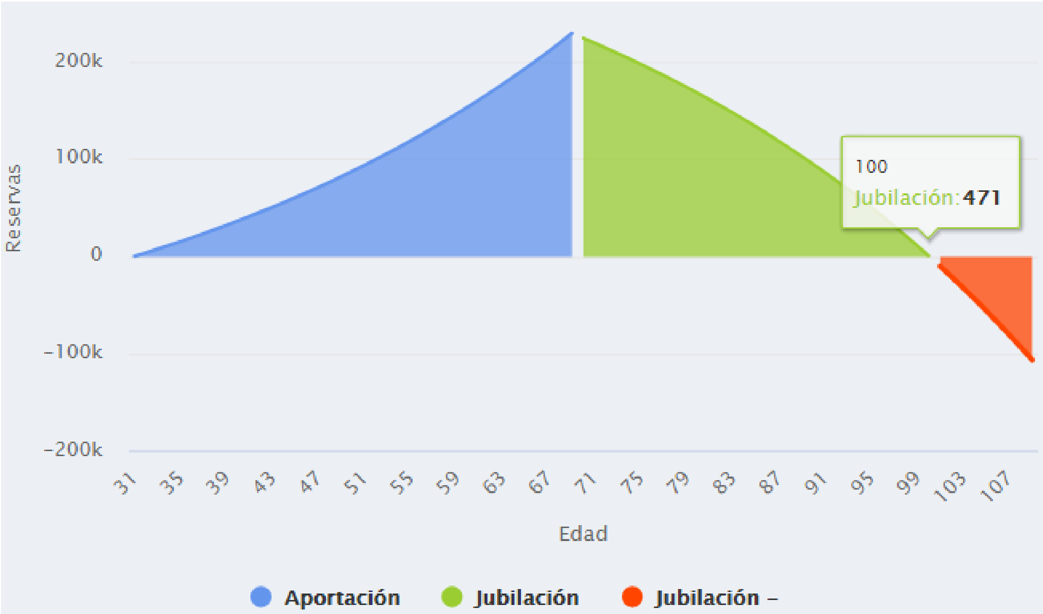

Figura 4.5: Evolución de la reserva del ejemplo 4 - edad de jubilación 70 años

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

En el presente trabajo de integración curricular, se logró entender el valor que tienen las matemáticas financieras y actuariales en una sociedad, pues de éstas depende su desarrollo integral, que se encuentra estrechamente ligado a la Seguridad Social. A través, de la utilización de sus técnicas y conceptos, se realizan los procesos indicados para garantizar el buen manejo de los recursos que ponen a disposición los cotizantes a su prestamista, que en este caso es el Seguro Social. Todo aquello con el fin de contar a futuro con un respaldo para enfrentar las posibles contingencias que puedan ocurrir. La novedoso del estudio, de manera general, es que la propuesta de retrasar la edad de jubilación sí significa sostenibilidad para el Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte, logro que a su vez beneficia al Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, consiguiendo así, poder brindar un mejor servicio a la población de afiliados y pensionistas del Ecuador.

De manera general, para analizar de mejor manera al fondo de pensiones del Seguro Social, se necesitaría realizar un análisis más completo de sus ingresos y egresos, y contar con información amplia y relevante que permita estudiar a fondo el comportamiento de las distintas prestaciones que ofrece.

5.1. Conclusiones

- El principio de equivalencia financiera actuarial, en donde se tiene un sistema justo, en el que ninguna de las partes se beneficie más que la otra, se alcanza aplicando conocimientos actuariales que posibiliten tener una pensión digna para quienes deseen acogerse a esta prestación, que a la vez, es un derecho adquirido por todo el tiempo que ha cotizado. Empleando matemática actuarial, se calculó las distintas pensiones que se pueden obtener al variar la edad de jubilación, y de acuerdo a ello el afiliado sea quien analice y decida cuando desea jubilarse, y que en el mejor caso, el Seguro Social aproveche también sus aportaciones adicionales.

- En los ejemplos tomados, se notó que, a mayor tiempo de cotización se va a tener una mejor pensión a recibir, pues están presentes factores como: el uso de las matemáticas financieras-actuariales, la revalorización de las pensiones y del salario básico unificado, así, cotizando un año más con un aporte más alto, ese adicional se vea relejado en las pensiones que le queden por cobrar durante su vida restante. Así mismo, es beneficioso para la institución prestante, ya que hay que tener en cuenta que la duración del fondo será mayor, pero la esperanza de vida del afiliado será menor conforme pase el tiempo dejando una buena parte de su fondo para el Seguro Social.

- Se consiguió calcular las reservas matemáticas conforme al porcentaje de aportación que recibe el Seguro IVM utilizando el método prospectivo y se halló el último año con reserva positiva, para poder comparar la edad del pensionista en ese último año con la esperanza de vida del mismo y ver que cantidad del fondo del pensionista posiblemente le quede al Seguro Social.

- En lo referente a reducir la edad para jubilarse, se observó que no es sostenible para el sistema, pues tendría que cubrir sus obligaciones por un tiempo más prolongado. Lo que resulta favorable es retardarla, pues la consecuencia directa que se notó, es que, como el pensionista tendrá una alta probabilidad de muerte, a medida que transccurren los años, lo más seguro es que no reciba por mucho tiempo su jubilación y el fondo restante servirá convenientemente para otras prestaciones que ofrece el Seguro IVM. Adelantar la edad jubilar, tampoco será muy beneficioso para el pensionista, pues si tiene menos aportaciones, por un lado, recibirá un monto inferior reduciendo su capacidad adquisitiva, Si se quisiera reducir la edad de jubilación podría hacerse pero no en las mismas proporciones como cuando se decide retrasarla.

- Se observó que el tiempo para retrasar la edad de jubilación no podría exceder a más de 5 años pues esto afectaria directamente a la rotacion de empleados, es decir, no podrían ingresar fácilmente afiliados jovenes, ya que habría menos oportunidades de trabajar por cuanto las personas desean seguir trabajando, ya sea por satisfacción o por recibir una mejor pensión, de igual manera, si bien sería bueno para el seguro que cotize durante más tiempo pues el último año de edad con reserva positiva llegaría a estar en el rango de los 90 a 100 años donde probabilidad de muerte es muy alta.

- Se realizó la simulación correspondiente para posponer la edad de jubilación, pues para obtener una pensión justa adaptada a la realidad en el Ecuador resulta inviable adelantarla, únicamente se estudiaría para casos especiales como invalidez o discapacidad, condiciones que imposibiliten seguir trabajando. Utilizando técnicas actuariales la cuantía de las pensiones se comporta incrementándose a medida que se retrasa la edad de jubilación, siendo más beneficioso para el IESS, que era lo que se buscaba, puesto que, si el IESS esta financieramente estable, entonces tendrá mayor oportunidad de funcionar durante más tiempo y seguir solventando las necesidades de sus afiliados.

5.2. Recomendaciones

- Se necesita contar con más tiempo para poder realizar un estudio que aborde ampliamente temas concernientes al Seguro de IVM, para analizar factores que no se pudieron examinar en el presente estudio, es importante también contar con bases de datos bien estructuradas y con información pertinente donde se pueda explotar su información y así aprovechar los recursos obteniendo mayores ventajas.

- El trabajo en equipo sería una buena alternativa para hacer frente al compromiso de aportar ideas para favorecer al Seguro Social, ya que, es una cuestión que interesa a la mayoría de la población, y esa carga resulta difícil de manejar para una sola persona. De igual manera, se llevaría a cabo un análisis con perspectivas diferentes en cuanto cómo se abordaría la flexibilidad en la edad de jubilación. También, se favorecería en gran medida si se tiene la colaboración de personas extranjeras de países en donde la flexibilidad de la edad de jubilación se haya o estén implementando y analizar que es lo que podría funcionar o resultar conveniente para el Seguro Social ecuatoriano.

- Por otro lado, lo que afecta también a la sostenibilidad del IESS es la corrupción que existe dentro de la institución, y el mal manejo de recursos que ha tenido por parte de sus mismos empleados, quienes no han respetado las leyes, por lo que, se hace necesario también investigar que soluciones podrían servir para frenar esas situaciones malintencionadas que afectan al país.

Capítulo A

Anexo A

Código que se utilizó para realizar el cálculo de pensiones y reservas matemáticas en el software R

```
################ CARGA DE LIBRERIAS ################
library(shiny)
library(shinythemes)
library(shinydashboard)
library(readxl)
library(tidyverse)
library(magrittr)
library(ggpubr)
library(ggplot2)
library(stats)
library(foreign)
library(RCurl)
library(data.table)
library(highcharter)
library(FinancialMath)
library(gridExtra)
library(scales)
library(lifecontingencies)
################ LECTURA DE BASES DE DATOS ################
probs <- unname(unlist(read_excel("Base/Tablas_Mortalidad.xlsx",sheet =
    "MORT")[,c(2)]))
TM0 <- probs2lifetable(probs, radix =100000, type= "qx", name="
    Mortalidad")
TM <- as(TM0,"data.frame")
```

```
Rango <- read_excel("Base/Tablas_Mortalidad.xlsx",sheet = "RANGOS")
#####VALORES FIJOS
TCot <-20.92/200
Alpha<-2.53/100
Beta<-2.54/100
################ SIST ECUATORIANO ################
PENSION_RA<-function(TCot,Edad0, EdadJ, Num_Apor,Salario, interes, alfa
    , TasaSust, Anios_BR){
  interes1<-(1+interes)^(1/12)-1
  v<-(1+interes1)
  WF<-(Salario)
  WF_A<-0
  B_Reg<-0
  for (i in 1:12) {
    WF_A<-WF_A+WF*v^(i/12)+(425+WF)*axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes,
        payment = "due")
  }
  ve<-c(0:(EdadJ-Edad0-1))
  for (i in 1:(EdadJ-Edad0)) {
    B_Reg[i]<-WF_A*TCot*(1+alfa)^(ve[i])
  }
  Base_10<-mean(B_Reg[(EdadJ-Edad0-Anios_BR+1):(EdadJ-Edad0)])
  Pen<-Rango$Porcentaje*Base_10
  den<-12*axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes1, k=12, payment = "due")+
      axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes, payment = "due")
  num<-Pen-425*axn(TM0, x=EdadJ, n=1, i= interes, payment = "due")
  Pen_men<-num/den
  flujo<-cumsum(B_Reg)
  return(list(round(Base_10,2),round(Pen,2),round(flujo[length(flujo)
      ],2),round(Pen_men[1],2),round(B_Reg,2)))
}
######## RESERVAS
RESERVAS_RAI<-function(flujo_A,pension,EdadJ,beta){
  flujo<-cumsum(flujo_A)
  flujo_P<-0
  for (i in 1:(110-EdadJ)) {
    flujo_P[i]<-pension*(1+beta)^(i-1)
  }
  flujo_P1<-cumsum(flujo_P)
  reserva_F<-0
  for (i in 1:(110-EdadJ)) {
    reserva_F[i]<-flujo[length(flujo)]-flujo_P1[i]
  }
```

```
  return(list(flujo[length(flujo)],round(flujo,2),round(reserva_F,2),
     round(flujo_P,2)))
}
######## GRAFICOS DE RESERVAS
RESERVA_GRAF_AP<-function(xdata,ydata){
    base<-data.frame(cbind(xdata,ydata))
    names(base)[1]<-"X"
    names(base)[2]<-"Y"
    graf.linea<-ggplot(base, aes(x=X, y=Y,group=1))+geom_line()
    graf.linea1<-graf.linea + geom_line(colour="red") +
        labs(x="Periodo␣de␣Aportaci n␣(anios)", y="Reserva")+
        geom_point(colour="darkorange2",size=3)+
        scale_y_continuous(labels=scales::number)
    return(graf.linea1)
}
RESERVA_GRAF_JUB<-function(xdata,ydata){
    base<-data.frame(cbind(xdata,ydata))
    names(base)[1]<-"X"
    names(base)[2]<-"Y"
    graf.linea<-ggplot(base, aes(x=X, y=Y,group=1))+geom_line()
    graf.linea1<-graf.linea + geom_line(colour="red") +
        labs(x="Periodo␣de␣Jubilaci n␣(anios)", y="Reserva")+
        geom_point(colour="darkorange2",size=3)+
        scale_y_continuous(labels=scales::number)
    return(graf.linea1)
}
FUN_TIR<-function(T_mort,Edad0,EdadJ,Tipo_cot,cotizaciones,pensiones){
  px_tir<-T_mort[(Edad0+1):EdadJ]
  TIR1<-cotizaciones*px_tir*Tipo_cot
  TIR2<- -T_mort[(EdadJ+1):length(T_mort)]*pensiones
  V_TIR<-c(TIR1,TIR2)
  TIR<-IRR(0,V_TIR,c(1:length(V_TIR)))*100
  return(round(TIR[[1]],2))
}
```

Referencias bibliográficas

[1] Banco Bilbao Vizcaya Argentaria S.A. *El sistema de pensiones de Holanda: el mejor sistema del mundo*. Recuperado desde: https://afly.co/frt6.

[2] Giorgio Boccardo and Felipe Ruiz. *Manual de apoyo docente para la asignatura Estadística Descriptiva*. Universidad de Chile, julio 2019. Recuperado desde: https://afly.co/g1d6.

[3] Corte Constitucional del Ecuador. *Sentencia No. 16-18-IN/21*, abril 2021. Recuperado desde: https://acortar.link/d6MiqH.

[4] Sofía De La Maza and Ignacio Cruz. La flexibilización de la edad de jubilación: Aspectos económicos de la política social. *Universidad Autónoma de Madrid*, pages 95–115, 2002. Recuperado desde: https://afly.co/g186.

[5] Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado. *REAL DECRETO-LEY 16/2001, de 27 de diciembre, de medidas para el establecimiento de un sistema de jubilación gradual y flexible*. Gobierno de España, diciembre 2001. Recuperado desde: https://afly.co/jvj6.

[6] Agencia Estatal Boletín Oficial del Estado. *Disposiciones Generales*. Gobierno de España, diciembre 2020. Recuperado desde: https://afly.co/fr66.

[7] El Consejo Directivo del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social. *Resolución No. C.D. 100*, febrero 2006. Recuperado desde: https://acortar.link/tffLAV.

[8] Elizabeth Feijoó. *Encuesta Nacional de Empleo, Desempleo y Subempleo (ENEMDU TELEFÓNICA)*. INEC, mayo–junio 2020. Recuperado desde: https://afly.co/ygs6.

[9] Carlos Gil. *R para profesionales de los datos: una introducción*, abril 2018. Recuperado desde: https://afly.co/yh36.

[10] Gobierno de España. *Seguridad Social: Requisitos*. Recuperado desde: https://afly.co/fqn6.

[11] Grupo Banco Mundial. *Esperanza de vida al nacer, total (años) - Ecuador*. Recuperado desde: https://acortar.link/S9iwMn.

[12] Pablo Hernández. *EL SISTEMA DE PENSIONES EN ESPAÑA: UNA ACTUALIZACIÓN TRAS EL IMPACTO DE LA PANDEMIA*. Banco de España, 2021. Recuperado desde: https://afly.co/jvk6.

[13] IESS. *Tablas dinámicas de mortalidad y supervivencia*. Recuperado desde: https://acortar.link/za0aiy.

[14] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social, Quito, Ecuador. *Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez, Vejez y Muerte del Seguro General Obligatorio*, septiembre 2019. Recuperado desde: https://afly.co/sfr6.

[15] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social. *BOLETÍN ESTADÍSTICO NÚMERO 24*, noviembre 2020. Recuperado desde: https://afly.co/yj66.

[16] Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social. *BOLETÍN ESTADÍSTICO NÚMERO 25*, agosto 2021. Recuperado desde: https://afly.co/ygv6.

[17] Junta de Política y Regulación Monetaria y Financiera. *Libro III: Sistemas de Seguros Privados*, septiembre 2021. Recuperado desde: https://acortar.link/FGZhCy.

[18] Francisco Leturia, José Yanguas, and Miguel Leturia. Jubilación: Necesidad de reflexión. *Revista de Servicios Sociales*, 22:39–43, 1993. Recuperado desde: https://afly.co/sfc6.

[19] Eliseo Navarro and Juan Nave. *Fundamentos de Matemáticas Financieras*. Universidad de Castilla - La Mancha, España, 2001.

[20] Organización Internacional del Trabajo. *La pandemia COVID-19 y sus efectos en la sostenibilidad del Seguro de invalidez, vejez y muerte del IESS*, mayo 2020. Recuperado desde: https://afly.co/ygt6.

[21] Organización Internacional del Trabajo. *Valuación actuarial del régimen de invalidez, vejez y muerte del Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social*, abril 2020. Recuperado desde: https://afly.co/g1d6.

[22] Angélica Porras. La seguridad social en ecuador: Un necesario cambio de paradigmas. *Revista de Derecho*, 24:3–20, 2015. Recuperado desde: https://afly.co/sfk6.

[23] Alejandro Pérez, Soto Domínguez, and Yenny Calderón. El concepto de seguridad social: Una aproximación a sus alcances y límites. *Revista de la División de Ciencias Jurídicas y Políticas*, 10, 2012. Recuperado desde: https://afly.co/yhb6.

[24] Carlos Ramirez, Milton García, Cristo Pantoja, and Ariel Zambrano. *Fundamentos de las Matemáticas Financieras*. Universidad Libre Sede Cartagena, 2009. Recuperado desde: https://afly.co/xz96.

[25] Real Academia Española. *Diccionario de la Lengua Española: flexible*. Recuperado desde: https://dle.rae.es/flexible.

[26] Registro Oficial Suplemento 465 de 30-nov-2001. *Ley de Seguridad Social*, marzo 2011. Recuperado desde: https://afly.co/g146.

[27] Fernando Sandoya. *Matemáticas Actuariales y Operaciones de seguros*. ESPOL, 2007. Recuperado desde: https://afly.co/1kw7.

[28] Julio Santana and Efraín Farfán. *El Arte de Programar en R. Un Lenguaje para la Estadística*. Subcoordinación de Vinculación, Comercialización y Servicios Editoriales, noviembre 2014. Recuperado desde: https://afly.co/sfg6.

[29] Shiny. The basic parts of a shiny app. *RStudio*, junio 2017. Recuperado desde: https://afly.co/yh46.

[30] Social Security Administration. *Beneficios por jubilación*, 2022. Recuperado desde: https://www.ssa.gov/pubs/ES-05-10935.pdf.

[31] Reporte Técnico. Instituto ecuatoriano de seguridad social (iess). Technical report, Superintendencia de Bancos, 2020. Recuperado desde: https://afly.co/sfn6.

[32] Carlos Vidal and Enrique Deversa. *Sistemas Básicos de Financiación de las Prestaciones: Fundamentos Actuariales*.