

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE MÉTODOS BOOTSTRAP PARA LA INFERENCIA DE ESTADÍSTICOS DE LAS SERIES DE ÍNDICES DE ALTERNANCIA DE LA ONDA T EN PACIENTES QUE PRESENTAN CARDIOPATÍAS.

TRABAJO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERA
MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

PAULA CRISTINA LEÓN GÁLVEZ
paula.leon@epn.edu.ec

Director: PHD. CARLOS ALBERTO ALMEIDA RODRÍGUEZ
carlos.almeidar@epn.edu.ec

QUITO, JUNIO 2022

DECLARACIÓN

Yo PAULA CRISTINA LEÓN GÁLVEZ, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.



Paula Cristina León Gálvez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por PAULA CRISTINA LEÓN GÁLVEZ, bajo mi supervisión.



Firmado electrónicamente por:
**CARLOS ALBERTO
ALMEIDA
RODRIGUEZ**

PhD. Carlos Alberto Almeida Rodríguez
Director del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis el PhD. Carlos Almeida por su guía y apoyo en la realización de este proyecto, además por su paciencia, tiempo y palabras de motivación.

A mi padre y madre, por los sacrificios que han realizado para permitirme cumplir esta meta. Gracias a mi padre por inculcarme el valor del trabajo y motivarme a dar lo mejor de mi para cumplir mis sueños. Gracias a mi madre por su apoyo constante, sus cuidados pese a la distancia y sus palabras de aliento.

A mis hermanos Israel y Rut por su cariño, aliento y risas que me motivaban. A mis hermanos Isaac y Andrés, quienes con sus mensajes y llamadas me impulsaron a continuar, por ser la alegría en mis días más complicados y por creer siempre en mi.

Un especial agradecimiento a Luis Eduardo, quien desde el inicio de este proyecto fue un pilar de apoyo, consuelo y fortaleza en mi día a día. Gracias por tus palabras y muestras de amor, paciencia y alegría.

DEDICATORIA

*A Isaac y Andrés,
por ser luz en mi vida. Sueñen alto, porque lo pueden lograr.*

Índice general

Resumen	IX
Abstract	X
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Justificación	3
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo general	6
1.3.2. Objetivos específicos	6
1.4. Hipótesis	6
1.5. Metodología	7
1.6. Estructura del Trabajo	9
2. Marco Teórico	10
2.1. Nociones básicas	10
2.1.1. Series temporales	11
2.1.2. Núcleos y la estimación de densidad espectral	15
2.1.3. Métodos Bootstrap en variables aleatorias independientes	16
2.2. Bootstrap en series temporales	24
2.2.1. Introducción:	24
2.2.2. Definiciones	25
2.2.3. Notaciones	26
2.2.4. Bootstrap por bloques	27

2.2.5.	<i>Moving Block Bootstrap</i>	29
2.2.6.	<i>Circular Block Bootstrap</i>	32
2.2.7.	<i>Stationary Block Bootstrap</i>	34
2.2.7.1.	Otra formulación del método	35
2.2.8.	Consistencia de los métodos Bootstrap por Bloques	39
2.2.8.1.	Análisis de las medias muestrales Bootstrap	40
2.2.8.2.	Longitud óptima de bloque para los métodos MBB, CBB y SB	42
2.2.8.3.	Análisis de la varianza de los estimadores Bootstrap por los métodos: MBB, CBB y SB	48
2.2.8.4.	Análisis de la distribución de estimadores obtenidos por los métodos Bootstrap por bloques	65
2.2.9.	TFT-Bootstrap	74
2.2.9.1.	Descripción del método TFT-Bootstrap	75
2.2.9.2.	Consistencia de los métodos	77
3.	Aplicación de métodos Bootstrap sobre series temporales	99
3.1.	Estimación de parámetros de segundo orden para los métodos Bootstrap	99
3.1.1.	Nociones generales	100
3.1.2.	Desarrollo para cada método Bootstrap	101
3.2.	Implementación de los métodos Bootstrap	102
3.2.1.	Aplicación sobre series temporales simuladas	106
3.2.1.1.	Aplicación sobre procesos autoregresivos	106
3.2.1.2.	Aplicación sobre procesos autoregresivos-medias móvil (ARMA)	110
3.2.1.3.	Aplicación sobre procesos autoregresivos con heteroscedasticidad condicional (GARCH)	119
3.3.	Aplicación sobre las series de índices de alternancia de la Onda T	126
3.3.1.	Nociones médicas básicas	126
3.3.1.1.	Muerte cardiaca súbita, enfermedades isquémicas	126

3.3.1.2.	El electrocardiograma y sus elementos	127
3.3.1.3.	Alternancia Eléctrica	129
3.3.1.4.	Índices de alternancia de la Onda T	130
3.3.2.	Bases a utilizar.	131
3.3.3.	Construcción de la series de índices de alternancia de la Onda T (TWA)	132
3.3.4.	Parámetros a estimar.	134
3.3.5.	Validación de hipótesis sobre las series de índices de TWA. . .	136
3.3.6.	Resultados obtenidos	140
3.3.7.	Resultados de la estimación de parámetros por métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap	153
4.	Conclusiones y recomendaciones	169
4.1.	Conclusiones	169
4.2.	Recomendaciones	171
	Bibliografía	173
	Anexos	178
	Algoritmos implementados	178
	Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap sobre las series de índices de TWA	190
	Estimación de la media	190
	Estimación de la autocorrelación de orden 1	204
	Estimación de la varianza	220
	Estimación del coeficiente de variación.	234

Resumen

En el presente trabajo se utilizan los métodos Bootstrap por Bloques y TFT-Bootstrap para realizar la estimación de parámetros de las series de índices de alternancia de la Onda T (TWA), particularmente de pacientes que presentan cardiopatías. La alternancia describe las variaciones latido a latido, en dirección, amplitud y/o duración en nuestro caso de la Onda T del electrocardiograma, variaciones en esta Onda pueden estar relacionadas con la presencia de cardiopatías o el posible riesgo de sufrir muerte súbita cardiaca (MSC).

El posible riesgo de sufrir cardiopatías o MSC se establece gracias al análisis de estadísticos de las series de índices de TWA, mediante condiciones sobre estos estadísticos el personal de salud determina la presencia o no de alternancia en la serie, lo que equivaldrá al riesgo de sufrir determinada cardiopatía. Una estimación adecuada de estos parámetros podría marcar la diferencia al permitir un diagnóstico oportuno y un tratamiento apropiado para los pacientes.

Este proyecto de investigación se plantea como una visión para que grupos interdisciplinarios de profesionales en estadística y salud puedan replicarlo a poblaciones de interés ajustando modelos locales a los mismos. Se generará información relevante para la construcción de potenciales nuevas metodologías y se abrirá debate sobre la posible aplicación de los métodos Bootstrap para mejorar la caracterización de la alternancia de la onda T, beneficiando a los pacientes con la detección temprana del riesgo de sufrir ciertas cardiopatías.

Abstract

In this paper, the Block Bootstrap and TFT-Bootstrap methods are used to estimate the parameters of the T-wave alternans (TWA) index series, particularly in patients with heart disease. Alternans describes the beat-to-beat variations, in direction, amplitude and/or duration in our case of the T wave of the electrocardiogram, variations in this wave may be related to the presence of heart disease or the possible risk of sudden cardiac death (SCD).

The possible risk of suffering heart disease or SCD is established through the analysis of statistics of the TWA index series, by means of conditions on these statistics the medical staff determines the absence or presence of alternation in the series, which will be equivalent to the risk of suffering a particular heart disease. A proper estimation of these parameters could make a difference in allowing timely diagnosis and appropriate treatment for patients.

This research project is proposed as a vision so that interdisciplinary groups of professionals in statistics and health can replicate it to populations of interest by adjusting local models to them. Relevant information will be generated for the construction of potential new methodologies and will open debate on the possible application of Bootstrap methods to improve the characterization of T-wave alternans, benefiting patients with early detection of the risk of suffering particular heart diseases.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

La alternancia eléctrica (AE) es un amplio concepto que describe las variaciones, latido a latido, en dirección, amplitud o duración de cualquier componente del electrocardiograma (ECG), como es el caso de la Onda T. Esta onda se asocia a ciertas enfermedades cardíacas graves, pudiendo anticipar una muerte súbita cardíaca (MSC). Alteraciones en la Onda T pueden ocurrir «bien cuando el músculo cardíaco es normal pero su frecuencia es muy rápida o cuando hay una enfermedad cardíaca seria y la frecuencia es normal». [Sáenz, J. G. *et al.*, 2012]

En este proyecto se considerará el Segmento ST-T del electrocardiograma, donde nos enfocaremos en la Onda T. La onda T representa la repolarización de los ventrículos derecho e izquierdo. La importancia de un estudio de esta onda surge ya que variaciones en esta onda fuera de lo considerado regular por la comunidad médica se relacionan con enfermedades cardíacas, posibles infartos o hipertrofias cardíacas, por citar algunos. [Hamm, C. W. y Willems, S. , 2010].

Se realizará la inferencia de estadísticos relevantes de las series de índices de alternancias de la onda T (TWA) de electrocardiogramas de pacientes que presentan cardiopatías, esto permitirá conocer de mejor forma el comportamiento de la Onda T en estos pacientes. Se realizan estas estimaciones considerando que la presencia o ausencia de alternancia que determinará el riesgo del paciente de sufrir cardiopatías o MSC; se define bajo condiciones sobre los resultados de la estimación de estadísticos de las series TWA.

Para hacer frente a la problemática de inferir adecuadamente parámetros de nuestras series temporales de TWA, utilizaremos los métodos Bootstrap, en parti-

cular el TFT-Bootstrap y el Bootstrap por bloques. Los métodos Bootstrap permiten estimar con mayor precisión los parámetros que caracterizan a las series de los índices de alternancia de la onda T (TWA) que estudiaremos en este proyecto. Los métodos Bootstrap para resolver la problemática tendrán que ser adaptados en función de las bases de datos con las que contamos.

El objetivo primordial es que con base en un análisis estadístico se contribuya a enriquecer el desarrollo teórico de la lectura de electrocardiogramas. Además, se genera una alternativa de investigación, que puede extenderse a proyectos con datos recopilados de ECG de pacientes considerados sanos y con cardiopatías, en los cuales se cuente con la experiencia de un cardiólogo o profesionales médicos del área, desarrollando así investigaciones mucho más completas, que pueden incluir un análisis comparativo entre los grupos.

Finalmente, en el presente trabajo de titulación se aplicarán una serie de herramientas que nos lleven a ya no solo tener series temporales, sino estimaciones de parámetros con alto valor de estudio. El presente proyecto se plantea como un primer paso para responder a preguntas de interés relacionadas a las investigaciones médicas y avances científicos en torno a la lectura automática del electrocardiograma.

1.2. Justificación

En este proyecto se obtendrá información relevante sobre el comportamiento de las series de TWA (índices de alternancia de la Onda T) de los ECG, en pacientes que presenten cardiopatías. Para realizar una inferencia adecuada de parámetros se usarán métodos Bootstrap adecuados para series temporales.

La efectividad del método Bootstrap para variables independientes ha llevado a investigadores a buscar un símil para series temporales. Por ello se han desarrollado métodos Bootstrap para variables dependientes, que son no paramétricos. Más aún, para la aplicación de estos métodos no se requiere de supuestos estructurales complejos en las bases de datos. [Kreiss, J. P. y Lahiri, S. N., 2012]

Considerando lo mencionado, existen diferentes clases de métodos Bootstrap para series temporales, destacándose los métodos de remuestreo sobre el dominio de frecuencias y el método de remuestreo por bloques.

El remuestreo por bloques o Bootstrap por bloques, son una serie de métodos que tienen como base la división en bloques de la serie original, para luego realizar un remuestreo de variables aleatorias independientes sobre los mencionados bloques.

Los parámetros que pueden estimarse correctamente mediante el Bootstrap por bloques son aquellos que pueden expresarse como una función suave de la media. Al considerar transformaciones adecuadas de las observaciones originales, estas formulaciones permiten considerar una amplia clase de estimadores, como los estimadores de autocorrelación, covarianza cruzada con retardos, o los estimadores de Yule-Walker para procesos autorregresivos. [Lahiri, 2003]

El método TFT-Bootstrap (remuestreo por alternancia de frecuencias de tiempo) es un métodos de remuestreo sobre el dominio de frecuencias. Este tipo de método usa la transformada rápida de Fourier, realizando luego un remuestreo sobre los coeficientes de Fourier y regresando al dominio de tiempo de la serie mediante la transformada inversa de Fourier, para obtener una serie remuestreada o muestra Bootstrap.

Este método es una extensión de los métodos Bootstrap del periodograma, con la ventaja de que se puede aplicar a estadísticos que se basen en el periodograma y a otros que estén completamente basados en la representación de las observaciones sobre el dominio del tiempo, además de que uno de los resultados del método es una serie remuestreada que conserva la estructura de la población de la que proviene. [Kirch y Politis, 2011]

Como se ha mencionado, el TFT Bootstrap requiere realizar un remuestreo sobre los coeficientes de Fourier; la forma en que se realice dicho proceso enmarca diferentes subtipos del método TFT-Bootstrap. Se considerarán los siguientes:

- Bootstrap basado en los residuos (RB), el cual parte de una estimación apropiada de la densidad espectral.
- Bootstrap local (LB), el cual parte de la selección de un Kernel apropiado.

Ambos métodos son consistentes en primer orden bajo condiciones estándar, además de conservar algunas propiedades de orden superior [Kirch y Politis, 2011]. Su utilidad ha sido comprobada por la comunidad científica, poniendo a prueba la capacidad de capturar adecuadamente la distribución de diferentes parámetros. Vale mencionar que existen algunos parámetros como la media para los cuales no son métodos apropiados.

Los métodos Bootstrap para series de tiempo y en particular los métodos de frecuencias como el TFT-Bootstrap servirán para inferir apropiadamente parámetros de las series de TWA, para comprender mejor el comportamiento de estas, aportando al desarrollo de la lectura de electrocardiogramas y realizando conclusiones significativas sobre las series de estudio.

Se ha mencionado la relación entre la Onda T y cardiopatías o incluso muerte súbita cardíaca; esta relación se ha estudiado a partir de la estimación de ciertas características (parámetros) de las series de alternancia de la Onda T, realizando una comparación entre pacientes aparentemente sanos y pacientes con cardiopatías. Algunos de los estudios relevantes sobre el tema se pueden encontrar en [García, E. V. *et al.*, 2011], [Flores-Calero, M. y Pilla-Barroso, M., 2020] y [Narayan, S. M., 2008]. Cabe mencionar que en la bibliografía médica la “alternancia de la onda T” puede usarse como referencia a la serie de datos estimada desde el estudio del ECG de un paciente, como también para referirse a algún parámetro de dichas series que permite distinguir entre pacientes sanos y aquellos que puedan presentar la cardiopatía en estudio; en este proyecto la alternancia de la onda T se utilizará exclusivamente para referirnos a la serie construida de la comparación de la Onda T, latido a latido.

Las características que sirven como punto de partida para la estimación de un posible riesgo del paciente de sufrir alguna cardiopatía, en un sentido matemático son estadísticos de las series de TWA. De esta forma, es sumamente importante una correcta estimación de dichos parámetros, ya que una estimación correcta de estas características puede hacer la diferencia para los pacientes; una detección temprana

del riesgo de sufrir alguna cardiopatía puede conducir a la aplicación oportuna de tratamientos o a la realización de más estudios clínicos que permitan el diagnóstico correcto y posterior tratamiento.

Por ello, este trabajo de titulación desarrollará la inferencia de estadísticos de las series de índices de alternancia de la onda T mediante métodos Bootstrap. Los resultados que se obtendrán serán importantes para el desarrollo de nuevas metodologías de análisis de la alternancia de la onda T.

Con los resultados se generará debate académico sobre el conocimiento existente y sobre todo sobre el nuevo conocimiento, beneficiando a los pacientes y a la comunidad médica y científica. Se plantea este proyecto de investigación como una visión para que grupos interdisciplinarios de profesionales en estadística y salud puedan replicarlo a poblaciones de interés y ajustar modelos locales a los mismos.

De esta forma, el desarrollo práctico de este proyecto generará información relevante para la construcción de potenciales nuevas metodologías, a la vez que abrirá debate sobre su posible aplicación para mejorar la caracterización de la alternancia de la onda T y con ello beneficiar a los pacientes con la detección temprana del riesgo de sufrir ciertas cardiopatías.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Inferir estadísticos de las series de índices de alternancia de la Onda T en pacientes que presentan cardiopatías mediante la adaptación adecuada de los métodos Bootstrap.

1.3.2. Objetivos específicos

- Comprender la base teórica de los métodos Bootstrap por bloques y TFT Bootstrap mediante la revisión bibliográfica.
- Implementar adecuadamente en el software R los métodos Bootstrap para series temporales: Bootstrap por bloques (MBB, CBB y SB) y TFT Bootstrap (RB y LB).
- Validar las hipótesis necesarias sobre las series de índices de TWA en pacientes que presentan cardiopatías para la aplicación de los métodos TFT-Bootstrap (RB y LB) y Bootstrap por bloques (MBB, CBB, SB).
- Aplicar computacionalmente los métodos TFT-Bootstrap (RB y LB) y Bootstrap por bloques (MBB, CBB, SB), a las series de TWA de la Onda T en pacientes que presentan cardiopatías.
- Comparar los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos Bootstrap sobre las series de índices de alternancia de la Onda T.

1.4. Hipótesis

La aplicación de los métodos Bootstrap a las series de índices de alternancia de la onda T, permite obtener mediante simulación aproximaciones de los estadísticos de dichas series, así como características de estos estadísticos.

1.5. Metodología

Las bases de datos a manejar serán estándar, usadas frecuentemente en investigaciones como la presente. Además, han sido catalogadas previamente por profesionales del área de salud, siendo clasificadas como provenientes de personas que presentan cardiopatías. Se trabajará con 15 bases de datos provenientes del MIT-BIH Arrhythmia database.

Fase 1: Este proyecto comenzará con una revisión teórica de los métodos Bootstrap sobre el dominio de frecuencias y Bootstrap por Bloques, con especial ahínco en los métodos TFT-Bootstrap (RB y LB) y Bootstrap por Bloques (MBB, CBB y SB). Se expondrá la base teórica que existe detrás de estos métodos; en ese sentido, se revisarán los conceptos y técnicas para obtener: los coeficientes de Fourier, la estimación de la función de densidad espectral de una serie de tiempo, la transformada de Fourier, la transformada inversa de Fourier, la longitud óptima de bloques, además de la revisión de la consistencia de estos métodos. En este sentido, se tendrá una base teórica sólida de conocimiento sobre los métodos Bootstrap a implementar y aplicar.

Fase 2: Se procederá a la implementación computacional de los métodos TFT-Bootstrap (RB y LB) y Bootstrap por bloques (MBB, SB y CBB), mediante el lenguaje de programación R. Posterior a ello se realizarán simulaciones de series temporales de diferentes tipos, que nos permitan corroborar la funcionalidad, precisión y eficiencia de los métodos Bootstrap implementados, bajo diferentes estructuras de las series temporales. Los resultados de estas estimaciones y su precisión serán brevemente expuestas.

Fase 3: A las series de TWA se les verificará el cumplimiento de algunas de las hipótesis necesarias para la consistencia de los resultados al aplicar los distintos métodos Bootstrap; otras hipótesis serán asumidas como ciertas debido a que sobrepasan el alcance de este proyecto.

Seleccionaremos también los parámetros a estimar con cada uno de los métodos Bootstrap, los que serán seleccionados de forma que los resultados de la aplicación de los métodos sean asintóticamente consistentes.

Fase 3.1: Se aplicarán los métodos Bootstrap por Bloques para estimar aquellos parámetros seleccionados previamente. La ventaja de esta clase de métodos es que no tienen hipótesis restrictivas para obtener resultados consistentes, pues basta con una selección adecuada de los parámetros a estimar, una correcta implementación y

una selección adecuada de la longitud de los bloques [Lahiri, S. N., 1999].

Por tanto, se seleccionará la longitud de bloques adecuada para cada subtipo de Bootstrap por bloques, se aplicarán estos métodos y se obtendrán las estimaciones de parámetros respectivas.

Fase 3.2: Se aplicarán los métodos TFT-Bootstrap, para lo cual se calculan los coeficientes de Fourier para cada serie; al ser estos coeficiente independientes e idénticamente distribuidos realizaremos un remuestreo de los mismos de acuerdo al método que corresponda (RB o LB).

Aplicaremos entonces el primer método, el TFT-Bootstrap (RB), el cual parte de una estimación adecuada de la función de densidad espectral. Se realizará la estimación de los residuos tanto de la parte real como imaginaria de los coeficientes de Fourier y se los estandarizará para luego realizar un remuestreo con reposición sobre estos. Entonces, a partir de la función estimada de densidad espectral y de los resultados del remuestreo mencionado se definen los coeficientes de Fourier remuestreados. Con estos coeficientes de Fourier remuestreados se continúe con el esquema general del método TFT-Bootstrap. [Kirch y Politis, 2011]

Para la aplicación del TFT-Bootstrap (LB), se partirá de la selección adecuada de un Kernel. Se seguirá con la definición de variables independientes conforme lo requiere el método, en función de las cuales se obtendrán los coeficientes de Fourier remuestreados y con ellos se continúa con el esquema general del método TFT-Bootstrap. [Kirch y Politis, 2011]

Posteriormente mediante la transformada inversa de Fourier, con base en los coeficientes de Fourier remuestreados con cada método, se obtiene una serie remuestreada sobre el dominio de tiempo o también llamada serie Bootstrap. [Kirch y Politis, 2011]

Con estas series remuestreadas calcularemos las estimaciones de los parámetros seleccionados previamente para estos métodos.

Fase 4: A partir de los resultados obtenidos se compararán los estimadores obtenidos de la aplicación de los diferentes métodos Bootstrap por cada una de las series utilizadas. Es decir, para cada serie se verifica la precisión con la que a partir de cada método Bootstrap se obtiene la inferencia de parámetros gracias a la estimación de parámetros de segundo orden.

Se conoce así información relevante de las series de índice de alternancia de la onda T para pacientes que han presentado cardiopatías, se calcula la precisión con la que los estimadores se obtuvieron y se concluye sobre los resultados alcanzados.

1.6. Estructura del Trabajo

En el Capítulo II se detalla toda la base teórica de la investigación. Se empieza presentando las nociones básicas referentes a series temporales y métodos Bootstrap para variables independientes, que se utilizan como introducción para tratar los métodos Bootstrap para series temporales.

Posteriormente, se describen los métodos Bootstrap por bloques (MBB, CBB y SB) y los métodos TFT-Bootstrap (RB y LB), presentando y demostrando los resultados principales que permiten obtener la consistencia de los estimadores obtenidos mediante la aplicación de los métodos mencionados.

En el Capítulo III se presentan las nociones generales respecto al electrocardiograma y el análisis de las series de índices de alternancia de la Onda T. Luego se presentarán los resultados de la aplicación de los métodos implementados sobre procesos simulados, con los que se corroborará la funcionalidad de los métodos implementados.

Finalmente, se exponen los resultados de la aplicación de los diferentes métodos Bootstrap sobre las series de TWA en pacientes con cardiopatía. Se expondrán resumidamente los resultados y existirá una comparación detallada en los anexos respectivos.

En el Capítulo IV se muestran las conclusiones y recomendaciones establecidas con base en la metodología empleada y los resultados obtenido de las aplicaciones de métodos Bootstrap para series temporales.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Nociones básicas

A lo largo de esta sección se expondrán conceptos que serán ampliamente utilizados en el desarrollo de este proyectos. En primera instancia se revisarán conceptos básicos para los estadísticos a utilizar.

Posteriormente, se expondrán los conceptos sobre series temporales que se utilizarán a lo largo del presente proyecto; particularmente se presentarán algunos resultados en torno a los coeficientes de Fourier que serán vitales para el desarrollo de los métodos TFT-Bootstrap. Además, para el desarrollo de estos métodos se introduce la estimación de densidad espectral mediante núcleo.

Finalmente, se presentan en rasgos generales los métodos Bootstrap y se exponen las nociones básicas en variables aleatorias independientes, así como los intervalos de confianza utilizados sobre las muestras Bootstrap.

DEFINICIÓN 2.1. Sean X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias con una distribución conjunta F . Se supone que se dispone de una realización de las primeras n variables tal que $\mathcal{X}_n \equiv \{X_1, \dots, X_n\}$. Así, sea $\theta \equiv \theta(F)$ un parámetro real que depende de la distribución conjunta y desconocida F . Llamaremos a los parámetros como θ parámetros de nivel 1. [Lahiri, 2003]

Además $\hat{\theta}_n = \theta(\hat{F}_n)$ se definirá como la estimación del parámetro θ a partir de la función de distribución muestral \hat{F} que proviene de la realización \mathcal{X}_n .

DEFINICIÓN 2.2. Supongamos que $\hat{\theta}_n$ es un estimador de θ basado en \mathcal{X}_n . Generalmente en las investigaciones necesitamos conocer mayor información de este estimador, tal como la precisión o la calidad de inferencia del estimador.

Valores como la varianza $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$ o los percentiles de $\hat{\theta}_n$ se denominarán parámetros de nivel 2. Es decir, estos son parámetros relacionados a la distribución muestral del estimador de un parámetro de nivel 1.

OBSERVACIÓN. Siguiendo esta línea los estadísticos relacionados con la distribución muestral de un estimador de un parámetro de nivel 2, serán denominados parámetros de nivel 3. Para estimar parámetros de órdenes superiores, se deberán usar iteraciones consecutivas del método Bootstrap o utilizar combinaciones de algunos métodos de remuestreo.

2.1.1. Series temporales

Las series temporales son observaciones de un fenómeno, donde cada observación asume un valor numérico en un instante t , estas observaciones son tomadas en momentos equidistantes. De esta forma X_t es la variable aleatoria observada en el instante t .

En este trabajo asumiremos que las series temporales son discretas, es decir, que el conjunto T de tiempo en el cual se toman las observaciones, es un conjunto discreto. T se denomina espacio de tiempos.

En el contexto de este proyecto, un proceso estocástico será una familia de variables aleatorias, denotada por $(X_t, t \in T)$ o (X_t) , definidas sobre un espacio muestral Ω y que toman valores en alguno de los conjuntos \mathbb{R} o \mathbb{R}^k .

DEFINICIÓN 2.3. Un proceso $(X_t, t \in T)$ es estrictamente estacionario si:

$$\text{Ley}(X_{t_1+l}, \dots, X_{t_k+l}) = \text{Ley}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

para todo $k = 1, 2, \dots$ y $t_1, \dots, t_k, l \in \mathbb{Z}$

En el desarrollo de este proyecto se considerará $T = \mathbb{Z}^+$ a menos que se indique lo contrario. Además, se utilizará Ley o Dist indistintamente para referirnos a la Ley de Distribución de variables o vectores aleatorios.

DEFINICIÓN 2.4. Un proceso real $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ se dice de segundo orden si $\forall t \in \mathbb{Z}$, $E(X_t^2) < \infty$.

DEFINICIÓN 2.5. Un proceso estacionario $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ es débilmente dependiente si X_t y X_{t+h} son "casi independientes" cuando h tiende al infinito. Así:

- Si el proceso es de segundo orden y débilmente estacionario y se cumple $\text{Corr}(X_t, X_{t+h}) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow \infty$, entonces diremos que el proceso es asintóticamente no correlacionado, lo que equivale a débilmente dependiente.

Esto último reemplaza al muestreo aleatorio en la Ley de los Grandes Números y el Teorema del límite central, permitiendo su aplicación. [Dedecker, J. et al., 2007] [Doukhan, P. y Louhichi, S., 1999]

DEFINICIÓN 2.6. En el contexto de este proyecto en concordancia con el método propuesto por Claudia Kirch y Dimitris Politis [Kirch y Politis, 2011], la transformada discreta de Fourier de un proceso de serie de tiempo (Z_t) de n observaciones. Para la frecuencia j se denotará por:

$$z(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \exp(-2\pi i j t / n) \quad (2.1)$$

para $j = 1, \dots, n$

Además $z(j) \in \mathbb{C}$ para todo j ya que:

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Considerando esto y reemplazando en 2.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} z(j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \exp(-2\pi i j t / n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t (\cos(-2\pi j t / n) + i \sin(-2\pi j t / n)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \cos(-2\pi j t / n) + i \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \sin(-2\pi j t / n) \\ &= x(j) + iy(j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Así $x(j)$ y $y(j)$ se denominarán los coeficientes de Fourier, asociados a la parte real e imaginaria respectivamente, y correspondientes a la frecuencia j .

OBSERVACIÓN. Se utiliza la transformada discreta de Fourier con el signo negativo por lo sugerido para aplicación del algoritmo Transformada Rápida de Fourier y debido a lo utilizado para el desarrollo del método Local Bootstrap que es luego adaptado para el método TFFT-Bootstrap Local Bootstrap. [Paparoditis, E. y Politis, D. N., 1999]

PROPIEDADES 2.1. A continuación se mencionan ciertas propiedades de los coeficientes de Fourier que serán de utilidad más adelante. Suponemos que los coeficientes de Fourier provienen de una proceso estacionario (X_t) de n observaciones. En lo que compete en los siguientes ítems $\lambda_j = 2\pi j / T$.

1. Los coeficientes de Fourier $x(1), y(1), \dots, x(N), y(N)$ son asintóticamente in-

dependientes y normalmente distribuidos, donde $N = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, es decir, N es el entero más grande que es menor o igual al valor de $(n-1)/2$. [Kirch y Politis, 2011]

2. Se cumple que:

$$\begin{aligned} E x(j) &\rightarrow 0, E y(j) \rightarrow 0, \\ \text{Var } x(j) &= \pi f(2\pi j/n) + o(1), \text{Var } y(j) = \pi f(2\pi j/n) + o(1). \\ &\text{con } j = 1, \dots, N \text{ cuando } n \rightarrow \infty \\ &\text{y } f(\cdot) \text{ es la función de densidad espectral.} \end{aligned}$$

De esta forma podemos decir que los coeficientes de Fourier $x(j), y(j)$ son asintóticamente independientes e idénticamente distribuidos $N(0, \pi f(2\pi j/n))$. [Kirch y Politis, 2011]

3. $x(j)^2 + y(j)^2$ son asintóticamente independientes y exponencialmente distribuidas con esperanza $2\pi f(\lambda_j)$ para todo j . [Brockwell y Davis, 1991]

4. Simetría de los coeficientes de Fourier:

Para $j = 1, \dots, N$ se cumple:

$$\begin{aligned} x(n-j) &= x(j) \\ y(n-j) &= -y(j) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Lo mencionado se cumple considerando la paridad de la función coseno y la imparidad de la función seno y el desarrollo tanto del coseno de la suma de ángulos y el seno de la suma de ángulos.

Esta propiedad implica que toda la información que se encuentra en los coeficientes $\lambda_j, j > T/2$, se encuentra de hecho contenida en los coeficientes $\lambda_j, j \leq N$

5. Se cumple:

$$x(n) = \sqrt{n} \bar{X}_n \text{ donde } \bar{X}_n \text{ representa el promedio de las } n \text{ observaciones}$$

$$\text{Además } y(n) = 0, \text{ y cuando } n \text{ es par: } y(n/2) = 0, x(n/2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (-1)^t X_t$$

6. Los coeficientes de Fourier son los mismos para la serie (X_t) y la serie $((X_t) - c) \forall c \in \mathbb{R}$. Además, $x(0) = y(0) = 0$. Lo cual se puede demostrar fácilmente gracias a las propiedades de la función coseno y seno.

7. Para $j = 1, \dots, N + 1$ se cumple:

$$x(-j) = x(j), y(-j) = -y(j) \quad (2.4)$$

$$x(\lceil n/2 \rceil + j) = x(N - j), y(\lceil n/2 \rceil + j) = y(N - j) \quad (2.5)$$

$$\text{Si } n \text{ es par entonces: } x(N + 1) = y(N + 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (-1)^t X_t \quad (2.6)$$

Se puede demostrar (2.4) fácilmente debido a la paridad e imparidad de la función coseno y seno respectivamente.

8. Para $j < -n/2$ y $j > n/2$ los coeficientes son periódicamente extendidos con periodo n . [Kirch y Politis, 2011]

DEFINICIÓN 2.7. La transformada inversa de Fourier de un proceso de serie de tiempo (Z_t) de n observaciones, para la frecuencia j se denotará por:

$$Z(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n z_t \exp(2\pi i j t / n) \quad (2.7)$$

para $j = 1, \dots, n$.

Usando la transformada inversa de Fourier, partiendo de los coeficientes de Fourier, podemos ir al dominio de tiempo del proceso. De esta forma si conocemos los coeficientes de Fourier: $x(1), \dots, x(n)$ y $y(1), \dots, y(n)$ provenientes de un proceso de serie de tiempo (Z_t) de n observaciones, entonces $\forall t \in T$ se cumple:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (x(j) + iy(j)) \exp(2\pi i t j / n) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^N (x(j) \cos(2\pi t j / n) - y(j) \sin(2\pi t j / n)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

DEFINICIÓN 2.8. Sea (X_t) un proceso estacionario de n observaciones tal que $t \in \mathbb{Z}$, además cuya varianza es finita y su densidad espectral es:

$$C_{XX}(\omega) = f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} E(X_0 X_{|r|}) e^{-i\omega r}, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (2.9)$$

Entonces su periodograma se define como:

$$I_{XX}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega_k t} \right|^2, \quad -\pi \leq \omega_k \leq \pi \quad (2.10)$$

Donde $N = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ y $\omega_k = (2\pi k)/n$ con $-N \leq k \leq N$.

Recordando la definición de los coeficientes de Fourier(2.2) se cumple entonces:
 $I_{XX}(\omega_k) = \frac{1}{2\pi}(x(k)^2 + y(k)^2)$

2.1.2. Núcleos y la estimación de densidad espectral

DEFINICIÓN 2.9. Un núcleo es una función no negativa, integrable, cuyo conjunto de llegada es el conjunto de números reales (\mathbb{R}). En el contexto de este proyecto, un núcleo se denotará por K y cumplirá lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1 \quad (2.11)$$

Además, la transformada inversa de Fourier del núcleo $K(\cdot)$ se denotará por $k(\cdot)$ y se define por:

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda) \exp(ix\lambda) d\lambda \quad (2.12)$$

$$\text{respectivamente: } K(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) \exp(-ix\lambda) dx \quad (2.13)$$

Se enlistan algunas funciones núcleo conocidas, que serán de utilidad más adelante:

1. Núcleo rectangular o Daniell Kernell:

$$K(\lambda) = \frac{1}{2M} \mathbb{1}_{[-M,M]}(\lambda) \quad (2.14)$$

2. Núcleo cuadrático o Barlett-Priestley Kernel:

$$K(\lambda) = \frac{3}{4} (1 - \lambda^2) \mathbb{1}_{[-1,1]}(\lambda) \quad (2.15)$$

3. Barlett Kernel:

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right)^2 \quad (2.16)$$

DEFINICIÓN 2.10. Conforme el trabajo de [Brillinger, D. R., 2001]. El estimador núcleo de la densidad espectral se definirá como:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{XX}(\omega_k; h_n) &= \hat{f}_X(\omega_k; h_n) = \frac{2\pi}{nh_n} \sum_{k=-N}^N K\left(\frac{\omega - \omega_k}{h_n}\right) I_{XX}(\omega_k) \\ &= \frac{1}{nh_n} \sum_{k=-N}^N K\left(\frac{\omega - \omega_k}{h_n}\right) (x(k)^2 + y(k)^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde $K(\cdot)$ es un núcleo simétrico, además $N = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$, $\omega_k = (2\pi k)/n$, (h_n) un ancho de banda en función de la longitud de la serie temporal n e $I_{XX}(\omega_k)$ como se definió en 2.10.

OBSERVACIÓN. Este estimador dependerá del ancho de banda (h_n) , así como de la función núcleo que se utilice. En este sentido, se utilizarán resultados previos para las elecciones de estos, de forma que se cumpla con la consistencia en los resultados de los métodos Bootstrap.

2.1.3. Métodos Bootstrap en variables aleatorias independientes

En el marco de múltiples investigaciones es fundamental conocer una aproximación de cierto estimador de la población de estudio; sin embargo, por la complejidad del tamaño de dicha población u otros factores, no es posible realizar el estudio sobre la población completa, pero se conoce en la mayoría de casos una muestra de la mencionada población.

En este punto, la cuestión es cómo inferir dicho estimador poblacional partiendo de la muestra dada. Una de las respuestas que surge a esta pregunta es los métodos Bootstrap, que permitirán partiendo de una muestra realizar una inferencia estadística del parámetro de nuestro interés.

Para explicar la idea detrás del método Bootstrap es necesario introducir la definición de remuestreo, con este término nos referimos a técnicas computacionales intensivas que permiten el cálculo de estadísticos.

Desde un punto de vista sencillo la idea detrás del Bootstrap es afrontar el problema de no poder utilizar la población, utilizando la distribución empírica que nos ofrece la muestra con la que contamos. A dicha muestra se realiza un remuestreo una y otra vez, lo que nos permita conocer cada vez que se remuestrea con mayor precisión el valor del estadístico de interés. En otras palabras, gracias a este método descubrimos una y otra vez con cada remuestreo información importante no solo de la muestra sino también de la población.

Esto último, bajo el supuesto que nuestra muestra proviene de una población y conserva su distribución; es decir, nuestra muestra se convierte en un modelo de la población.

Los métodos Bootstrap son de suma utilidad cuando se desconoce la distribución poblacional o no es posible hacer una suposición sobre dicha distribución. Los métodos Bootstrap mediante algoritmos computacionales pueden asignar una medida

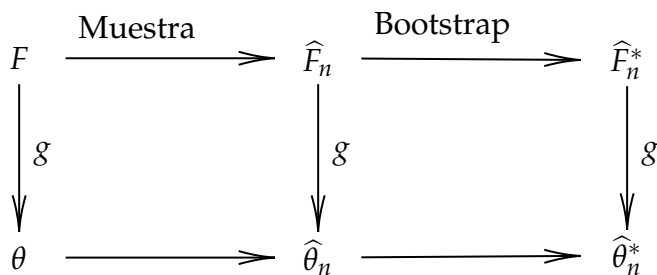
de precisión a un estimador estadístico.

En otras palabras, los métodos bootstrap nos permitirán estudiar el error estándar y el sesgo, entre otras medidas de precisión de un estimador $\hat{\theta}_n$.

Sea F la función de distribución de probabilidad; \hat{F}_n es la estimación de la función F , a partir de una muestra de n variables aleatorias cuya función de distribución es F y sea $g(\cdot)$ un funcional real, tal que $\theta = g(F)$. Entonces $\hat{\theta}_n$ es un estimador del parámetro θ , que se puede denotar como $\hat{\theta}_n = g(\hat{F}_n)$, aplicando el principio de sustitución.

Más aún, se denota por \hat{F}_n^* a la estimación de la Función F a partir de un remuestreo de n variables aleatorias tomadas de una muestra de n variables aleatorias cuya función de distribución es F . De forma análoga se obtiene $\hat{\theta}_n^* = g(\hat{F}_n^*)$ es decir, este será el cálculo del estimador partiendo de la muestra Bootstrap.

Utilizaremos de forma indistinta muestra Bootstrap o remuestreo de la muestra.



Algunas definiciones:

DEFINICIÓN 2.11. Sea (z_1, z_2, \dots, z_n) observaciones de una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de variables aleatorias independientes con distribución F . Entonces la función de distribución empírica \hat{F} se define como aquella distribución discreta, la cual asigna la probabilidad de $1/n$ para todo $z_i, i = 1, 2, \dots, n$. De esta forma las frecuencias de nuestra distribución se denotan por:

$$\hat{f}_k = \frac{\#(z_i = k)}{n} \quad \text{Para todo valor } k \text{ observado.}$$

Esta distribución será de vital importancia en el desarrollo del método Bootstrap para variables aleatorias independientes.

Otro de los conceptos importantes relacionados a los métodos Bootstrap es el principio de sustitución o "plug in", el cual es un método simple, no paramétrico, que consiste en estimar un parámetro a partir de una muestra.

Es decir, estimamos el parámetro $\theta = g(F_n)$ a partir de la función empírica de distribución \hat{F} utilizando la misma función $g(\cdot)$. Así $\hat{\theta}_n = g(\hat{F}_n)$. Llamaremos a $\hat{\theta}_n$

indistintamente estimador o estadístico.

Este principio no tiene tan buenos resultados cuando nuestra muestra (z_1, z_2, \dots, z_n) no recoge información importante de la distribución original F_n , considerando que F_n es la función de distribución de las variables aleatorias Z_1, \dots, Z_n .

Descripción del Método Bootstrap para variables aleatorias independientes:

Sea (z_1, z_2, \dots, z_n) una muestra proveniente de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, Z_1, \dots, Z_n con distribución conjunta F_n .

Y sea $\theta = s(z_1, z_2, \dots, z_n) = g(F_n)$ nuestro parámetro de interés. El método Bootstrap para variables aleatorias independientes consiste en:

1. Realizar un remuestreo aleatorio con reemplazo, de n datos, sobre los valores (z_1, z_2, \dots, z_n) . Estos valores remuestreados los denotaremos por $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$.
2. En base a nuestro conjunto remuestreado y el principio "plug in", calculamos el estimador de la muestra bootstrap, es decir: $\hat{\theta}_n^* = s(z^*) = g(\hat{F}_n^*)$
3. Se repiten B veces los pasos 1 y 2, donde B será un número lo suficientemente grande para obtener la precisión que deseamos. B es el número de muestras Bootstrap realizadas. Para referirnos al j -ésimo conjunto remuestreado los denotaremos por $z^*(j)$. De esta forma al terminar tendremos B conjuntos remuestreados: $(z^*(1), \dots, z^*(B))$ cuyos estimadores serán respectivamente: $(\hat{\theta}_n^*(1), \dots, \hat{\theta}_n^*(B))$.

Finalmente aplicando Monte Carlo, nuestro estimador será:

$$\hat{\theta}^* = \sum_{b=1}^B \frac{\hat{\theta}_n^*(b)}{B} \quad (2.18)$$

Los métodos Bootstrap son métodos relacionados generalmente con la obtención de estimadores de parámetros de nivel 2.

El principio básico detrás de los métodos Bootstrap busca recrear la relación entre la población y la muestra; considerando que la muestra resume las características de la población. Por lo cual se realiza un remuestreo de la muestra con la que se cuenta, obteniendo la llamado muestra Bootstrap.

Eligiendo correctamente la forma de realizar el remuestreo este conservará la información muestral y por tanto la información poblacional que guarda nuestra muestra; en si la muestra se convierte en un modelo de nuestra población.

Mediante el uso de este método se rompe con el problema de desconocer la distribución poblacional y en su lugar usamos la muestra y muestras Bootstrap, que son conocidas y tienen distribuciones que pueden ser estimadas, dando paso a la inferencia estadística de los parámetros desconocidos de la población.

Estimaremos ciertos valores de precisión del estimador $\hat{\theta}^*$, es decir, **estimar parámetros de nivel 2**:

En lo consiguiente se define $\hat{\theta}_n^*$ reemplazando en $\theta = g(F)$, F por \hat{F}_n^* .

- Error estándar de $\hat{\theta}^*$:

$$\widehat{Se}_B(\hat{\theta}^*) = \left\{ \frac{\sum_{b=1}^B [\hat{\theta}_n^*(b) - \hat{\theta}^*]^2}{(B-1)} \right\}^{1/2} \quad (2.19)$$

$$\text{Donde: } \lim_{B \rightarrow \infty} \widehat{Se}_B = Se_{F_n}(\theta) \quad (2.20)$$

- Sesgo o *Bias* de $\hat{\theta}$:

Para empezar consideremos la distribución G_n que será la distribución del parámetro centrado $\hat{\theta}_n - \theta$. Ya que la distribución de las variables Z_1, \dots, Z_n es desconocida entonces la distribución G_n también lo será.

Estimaremos G_n denotada por \hat{G}_n como la distribución empírica de $\hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}_n$. Consideremos además a E_* como la esperanza condicional a la muestra (z_1, \dots, z_n) . De esta forma:

$$\begin{aligned} \widehat{Bias}_B(\hat{\theta}) &= \int x \hat{G}_n(dx) \\ &= E_* \left[(\hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}_n) \right] \\ &= E_*[s(z^*)] - g(\hat{F}_n) \\ &= E_{\hat{F}_n}[s(z^*)] - \hat{\theta}_n \end{aligned}$$

Donde $g(\hat{F}_n)$ es el estimador *plug in* de θ y por Monte Carlo se aproxima la esperanza y se obtiene: $E_{\hat{F}_n}[s(z^*)] = E_*[s(z^*)] = \hat{\theta}^*(\cdot)$

- Error cuadrático medio del estimador $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{MSE}(\hat{\theta}) &= \int x^2 \widehat{G}_n(dx) = E_* \left[(\hat{\theta}_n^* - \hat{\theta}_n)^2 \right] \\
&= E_*(s(z^*) - g(\widehat{F}_n))^2 \\
&= \widehat{Var}(\hat{\theta}^*) + \left(\widehat{Bias}(\hat{\theta}^*) \right)^2 \\
&= \widehat{Se}(\hat{\theta}^*)^2 + \left(\widehat{Bias}(\hat{\theta}^*) \right)^2
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Como resultado, los métodos Bootstrap sirven para estimar los parámetros de segundo orden de la distribución desconocida $\hat{\theta} - \theta$.

El estimador Bootstrap, del parámetro de segundo orden $\varphi_n \equiv \varphi(G_n)$, siendo $\varphi(\cdot)$ un funcional de G_n , será el estimador *plug in* de dicho estimador, denotado por: $\widehat{\varphi}_n \equiv \varphi(\widehat{G}_n)$.

Lo métodos Bootstrap permiten estimar también intervalos de confianza para nuestros estadísticos de interés, a continuación se señalan algunos tipos de intervalos de confianza (IC) obtenidos con base en las muestras Bootstraps. Estos tipos de intervalo los encontramos en el trabajo desarrollado por [Efron y Tibshirani, 1994]

- **Intervalos de confianza con base en la aproximación de distribución t-student:**

Sea $\hat{\theta}$ el estimador *plug in* del parámetro de interés θ y \widehat{se} un estimador del error estándar de $\hat{\theta}$. Se cumple que conforme n crece, la distribución de $\hat{\theta}$ tiende a una distribución normal, con esperanza cercana a θ y varianza cercana a \widehat{se}^2 con lo cual:

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{se}} \sim N(0, 1)$$

Sea $z^{(\alpha)}$ el α -ésimo percentil de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned}
P \left\{ z^{(\alpha)} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{se}} \leq z^{(1-\alpha)} \right\} &= 1 - 2\alpha \\
P \left\{ \theta \in \left[\hat{\theta} - z^{(1-\alpha)} \cdot \widehat{se}, \hat{\theta} - z^{(\alpha)} \cdot \widehat{se} \right] \right\} &= 1 - 2\alpha
\end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene el Intervalo de confianza: $\left[\hat{\theta} - z^{(1-\alpha)} \cdot \widehat{se}, \hat{\theta} - z^{(\alpha)} \cdot \widehat{se} \right]$. A este le llamaremos intervalo de confianza estándar, con nivel de confianza $100(1 - 2\alpha) \%$. Efectivamente, este intervalo de confianza es válido cuando

$n \rightarrow \infty$, pero es solo una aproximación para muestras simples, con base en ello una mejor aproximación es: $Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{se}} \sim t_{n-1}$.

Esto último implica la mejora en el IC mediante: $[\hat{\theta} - t_{n-1}^{(1-\alpha)} \cdot \widehat{se}, \hat{\theta} - t_{n-1}^{(\alpha)} \cdot \widehat{se}]$.

Donde de forma similar $t_{n-1}^{(\alpha)}$ es el α -ésimo percentil de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad. Traslado esto al mundo Bootstrap se puede construir el intervalo de confianza Bootstrap- t . Con base en B muestras Bootstrap, se genera:

$$Z^*(b) = \frac{\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}}{\widehat{se}^*(b)}$$

Donde $\hat{\theta}^*(b)$ es el valor de $\hat{\theta}$ estimado a partir de la muestra b -ésima Bootstrap, de forma similar $\widehat{se}^*(b)$ es la estimación del error estándar correspondiente a dicha muestra. Por otro lado, se estima el percentil $Z^*(b)$ mediante el valor $\hat{t}^{(\alpha)}$ tal que: $\# \{Z^*(b) \leq \hat{t}^{(\alpha)}\} / B = \alpha$.

Con lo cual el intervalo de confianza "Bootstrap- t " viene dado por: $(\hat{\theta} - \hat{t}^{(1-\alpha)} \cdot \widehat{se}, \hat{\theta} - \hat{t}^{(\alpha)} \cdot \widehat{se})$

- **Intervalos de confianza con base en percentiles Bootstrap:** Los tipos de IC previos requieren supuestos de distribuciones; una forma de corregir el error generado al asumir aquello es generar intervalos basados en la estimación de distribución $\hat{\theta}$ a partir de la réplicas Bootstrap generadas.

Se utilizan los percentiles del histograma Bootstrap para definir los límites de los intervalos de confianza. Considerando las B réplicas del muestreo Bootstrap se obtiene también las réplicas de las estimaciones del parámetro θ dadas por $\hat{\theta}^*(b), b = 1, \dots, B$ y denotando \hat{G} a la función de distribución de $\hat{\theta}^*$.

De esta forma se define el intervalo "percentil" por: $[\hat{\theta}_{\%,lo}, \hat{\theta}_{\%,up}] = [\hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1 - \alpha)]$. Ya que por definición $\hat{G}^{-1}(\alpha) = \hat{\theta}^*(\alpha)$ es el $100 * \alpha$ -ésimo percentil de la distribución Bootstrap, con lo cual:

$$[\hat{\theta}_{\%,10}, \hat{\theta}_{\%,up}] = [\hat{\theta}^{*(\alpha)}, \hat{\theta}^{*(1-\alpha)}] \quad (2.22)$$

Este tipo de intervalos son una aproximación más precisa para aquellas distribuciones de las réplicas Bootstrap que no son tan próximas a una distribución normal. En el caso de aquellas que son aproximadamente normales los intervalos estándares serán muy cercanos a los obtenidos por intervalos de percentiles.

- **Intervalo BC_a :** Supongamos que $\hat{\theta}^*(\alpha)$ indica el percentil de orden α de B

Bootstrap replicas: $\hat{\theta}^*(1), \hat{\theta}^*(2), \dots, \hat{\theta}^*(B)$. El intervalo BC_a se compone de los percentiles de la distribución Bootstrap pero no los previamente vistos. Los percentiles usados dependen de 2 valores \hat{a} y \hat{z}_0 llamados la aceleración y la corrección de sesgo.

De esta forma el intervalo BC_a de cobertura de $1 - 2\alpha$ viene dado por: $(\hat{\theta}_{lo}, \hat{\theta}_{up}) = (\hat{\theta}^{*(\alpha_1)}, \hat{\theta}^{*(\alpha_2)})$.

Donde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \Phi \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z^{(\alpha)}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z^{(\alpha)})} \right) \\ \alpha_2 &= \Phi \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z^{(1-\alpha)}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z^{(1-\alpha)})} \right)\end{aligned}\tag{2.23}$$

De donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar y $z^{(\alpha)}$ es el percentil de orden α de la distribución normal estándar.

El valor de la corrección bias \hat{z}_0 se obtiene directamente de la proporción de réplicas Bootstrap menores al estimador muestral $\hat{\theta}$ tal que:

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\#\{\hat{\theta}^*(b) < \hat{\theta}\}}{B} \right)$$

A breves rasgos el valor de \hat{z}_0 mide la media del sesgo de $\hat{\theta}^*$ es decir la diferencia entre la media de $\hat{\theta}^*$ y $\hat{\theta}$.

Existen algunas formas de calcular la aceleración \hat{a} . La que utilizaremos es la siguiente: Considerando $\hat{\theta} = s(z_1, \dots, z_n)$ y sea $\mathbf{z}_{(i)}$ la muestra original eliminando z_i y sea $\hat{\theta}_{(i)} = s(\mathbf{z}_{(i)})$, además $\hat{\theta}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{(i)} / n$. Entonces la aceleración es la siguiente:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)})^3}{6 \left\{ \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)})^2 \right\}^{3/2}}$$

El valor \hat{a} se denomina aceleración debido a que se refiere a la tasa de cambio del error estándar de $\hat{\theta}$ con respecto al parámetro real θ .

En los IC previos se asume $\hat{\theta} \sim N(\theta, se^2)$; es decir, se asume que el error estándar de $\hat{\theta}$ es el mismo para todo θ . Sin embargo, esto en la realidad no es aplicable en muchos casos y el valor de aceleración \hat{a} corrige este tema.

Las ventaja principal de este intervalo es su exactitud de segundo orden que

se refiere a que tan preciso los intervalos de confianza se aproximan a:

$$\text{Prob} \left\{ \theta < \hat{\theta}_{lo} \right\} = \alpha \quad \text{and} \quad \text{Prob} \left\{ \theta > \hat{\theta}_{up} \right\} = \alpha$$

En el caso de exactitud de segundo orden esto significa que el error tiende a cero con una tasa de $1/n$ en términos de la longitud de la serie temporal n , cumpliendo:

$$\text{Prob} \left\{ \theta < \hat{\theta}_{lo} \right\} = \alpha + \frac{c_{lo}}{n} \quad \text{and} \quad \text{Prob} \left\{ \theta > \hat{\theta}_{un} \right\} = \alpha + \frac{c_{up}}{n}$$

Donde c_{lo} y c_{up} son constantes.

La ventaja principal de este intervalo es que corrige el sesgo y la asimetría en la distribución de las estimaciones Bootstrap.

En el desarrollo de este trabajo de titulación utilizaremos una corrección a la propuesta original de DiCiccio y Efron (1996).

Cuando la mitad de los valores $\hat{\theta}^*(b)$ son menor o igual que $\hat{\theta}$ entonces $\hat{z}_0 = 0$ [Efron y Tibshirani, 1994]. Sin embargo, en empates esta fórmula subestima la proporción de replicas Bootstrap que son menores o igual a $\hat{\theta}$ y sobre estima el sesgo. Utilizaremos entonces la corrección a la fórmula utilizada en MedCalc, que es un software de estadística; la corrección es la siguiente:

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{\# \left\{ \hat{\theta}^*(b) < \hat{\theta} \right\} + \frac{\# \left\{ \hat{\theta}^*(b) = \hat{\theta} \right\}}{2}}{B} \right)$$

Es importante reiterar que el principio del método Bootstrap se basa en que el remuestreo con la muestra original tienen una relación similar a la muestra con la población y que por tanto este remuestreo permite conocer información valiosa de la población en si misma. Sin embargo, claramente este principio no va a corresponder en todos los experimentos del mundo real, por lo cual no es un método aplicable a todos los problemas de estimación estadística pero si resulta de gran utilidad para una gran parte de ellos, en diferentes campo tales como: ciencias políticas [Mooney, 1996], economía [Biewen, 2002], medicina [and Bockenholt, U., 1989]; ha sido también utilizado dentro de modelos matemáticos y en la construcción de redes neuronales para la estimación de error del modelo.

2.2. Bootstrap en series temporales

En esta sección se abordarán los aspectos relativos a los métodos Bootstrap para series temporales. Se inicia con algunas definiciones generales y notaciones que serán de utilidad para el lector. Más adelante se exponen los detalles respecto a los métodos Bootstrap por Bloques MBB, CBB y SB, y posteriormente los métodos TFT-Bootstrap RB y LB.

Para los métodos mencionados se realiza una revisión de los principales teoremas de consistencia de los métodos y se realizan las demostraciones respectivas; debido al alcance de este proyecto algunas demostraciones han sido referidas a otros artículos donde se puede encontrar el detalle respectivo.

2.2.1. Introducción:

Los métodos Bootstrap realizan un remuestreo sobre una muestra de la población de interés permiten bajo condiciones no restrictivas estimar parámetros de nivel 1 y nivel 2, siendo esto fundamental para poder aproximar características como el sesgo y la varianza de un estimador $\hat{\theta}_n$ del parámetro poblacional de interés θ .

Este método ampliamente utilizado en variables aleatorias independientes ha sido adaptado para las variables dependientes y el principio básico detrás de este es el siguiente: consideremos que tenemos un proceso de serie de tiempo (Z_t) de la cual obtenemos una muestra $\mathbf{Z}_n = Z_1, \dots, Z_n$ con función de distribución conjunta F_n .

Lo primero a realizarse es una estimación de la función de distribución F_n a la que denotaremos \hat{F}_n y que además será condicional a la muestra \mathbf{Z}_n . Se genera además un remuestreo de variables aleatorias provenientes de la muestra con la que contamos; a este conjunto lo denotaremos $\mathbf{Z}_n^* = Z_1^*, \dots, Z_n^*$ y estas tendrán como función de distribución a \hat{F}_n .

De esta forma, eligiendo adecuadamente la estimación de distribución se obtendrá que la relación existente entre $\mathbf{Z}_n = Z_1, \dots, Z_n$ y F_n se asemeja a la existente entre $\mathbf{Z}_n^* = Z_1^*, \dots, Z_n^*$ y \hat{F}_n .

Así, sea $\hat{\theta}_n$ nuestro estimador del parámetro de interés de nivel 1 θ , entonces en el conexto Bootstrap obtenemos el estimador Bootstrap denotado por $\hat{\theta}_n^*$ de $\hat{\theta}_n$ reemplazando \mathbf{Z}_n por \mathbf{Z}_n^* y de igual forma se denotará a θ^* como el estimador de θ en el mundo Bootstrap reemplazando F_n por \hat{F}_n en $\theta = \theta(F_n)$.

Con lo cual la función de distribución \widehat{G}_n dada por la distribución de $\widehat{\theta}_n^* - \theta^*$ dado \mathbf{Z}_n será el estimador Bootstrap de la función de distribución $\widehat{\theta}_n - \theta$ que generalmente es desconocida, permitiendo así la estimación de parámetros de nivel 2.

Los diferentes métodos para series temporales se diferencian unos de otros por la forma de estimación de la función de distribución conjunta y por tanto la forma de obtención de cada muestra Bootstrap.

Estos métodos capturan las características básicas de la población mediante la distribución estimada y se reflejan en las muestras Bootstrap.

Para variables dependientes lograr una estimación adecuada de G_n es un poco más complejo, ya que la población no se caracteriza enteramente por una sola distribución marginal F ; por el contrario requiere que se conozca la distribución conjunta de toda la sucesión de variables Z_1, Z_2, \dots

Los estimadores Bootstrap de la distribución $\widehat{\theta} - \theta$ se calculan numérica y computacionalmente usando las simulaciones Monte Carlo. Utilizando una gran cantidad de simulaciones (copias independientes), $\widehat{\theta}^{*k} : k = 1, \dots, K$ del estimador $\widehat{\theta}_n^*$ los cuales son construidos por repeticiones de remuestreo. La distribución empírica de estas replicas Bootstrap mediante una aproximación de Monte Carlo será adecuada si se simula un número de veces suficiente; por adecuada nos referimos a que esta distribución se aproxime a la distribución Bootstrap real $\widehat{\theta}_n^* - \theta^*$ y por ende a una aproximación adecuada de sus parámetros.

Considerando lo mencionado existen diferentes clases de métodos Bootstrap para series temporales; entre estos tenemos: remuestreo por residuos, remuestreo por bloques y el remuestreo sobre el dominio de frecuencias.

2.2.2. Definiciones

Las siguientes definiciones serán de utilidad en demostraciones de los métodos Bootstrap por Bloques:

DEFINICIÓN 2.12. $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ es débilmente estacionario si:

1. $E(X_t) = m$, donde m es una constante independiente de t .
2. $\text{Cov}(X_{s+l}, X_{t+l}) = \text{Cov}(X_s, X_t), \forall s, t, l \in \mathbb{Z}$

DEFINICIÓN 2.13. Una función suave es aquella que pertenece al espacio C^∞ , es decir, es una función cuyas derivadas de todo orden existen y estas son continuas.

DEFINICIÓN 2.14. Una sucesión $\{X_n\}$ se llama m -dependiente para un entero m fijo si (X_1, \dots, X_i) y (X_j, X_{j+1}, \dots) son independientes siempre y cuando $j - i > m$.

2.2.3. Notaciones

- En lo siguiente consideremos un proceso de serie de tiempo $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ y sea una muestra $\mathbf{X}_n = X_1, \dots, X_n$ proveniente de dicha serie. Consideraremos una variable aleatoria de la forma $T_n = t_n(\mathbf{X}_n, \theta)$, donde $\theta \equiv \theta(F_n)$ es un parámetro de nivel uno que se basa en la distribución conjunta F_n de X_1, \dots, X_n y sea $t_n(\cdot; \theta)$ un funcional invariante bajo permutación de la muestra X_1, \dots, X_n .

Un ejemplo sería $T_n = n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)$ con $\theta = \mu \equiv E X_1$.

En lo que procede se utilizará la notación $j = 1, 2, 3$ para referirnos a los métodos MBB, CBB y SB respectivamente.

- $\Delta(r; \delta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r-1} \alpha(n)^{\delta/(2r+\delta)}$ donde $\alpha(\cdot)$ denota el coeficiente mixto fuerte del proceso $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$
- Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)' \in \mathbb{Z}_+^d$, entonces $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\alpha! = \prod_{j=1}^d \alpha_j!$ y $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$.
- $\hat{\mu}(j; \ell) = E_* \bar{X}_{n, \ell}^{*(j)}$
- $\hat{c}_{\alpha, j} = D^\alpha H(\hat{\mu}(j; \ell))$, $1 \leq j \leq 4$, $\bar{c}_\alpha = D^\alpha H(\bar{X}_n)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$
- $\Sigma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(\sqrt{n} \bar{X}_n)$
- $S(i; k) = \sum_{j=i}^{i+k-1} Y_{n, j}$, $i, k \in \mathbb{N}$

Coefficientes de dependencia:

- Coeficiente mixto fuerte o α -mixto:
 $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$
- ϕ -mixto:
 $\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \left\{ \left| \frac{P(A \cap B)}{P(A)} - P(B) \right| : A \in \mathcal{A}, P(A) \neq 0, B \in \mathcal{B} \right\}$
- Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias sobre el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) . Sea $\mathcal{F}_a^b = \sigma\{X_i : a \leq i < b\}$, $1 \leq a \leq b \leq \infty$ se define:
 El coeficiente fuerte mixto de $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ definido por:
 $\alpha(m) = \sup \left\{ \alpha \left(\mathcal{F}_1^{k+1}, \mathcal{F}_{k+m+1}^\infty \right) : k \in \mathbb{N} \right\}$, $m \geq 1$
 El proceso se llama fuertemente mixto cuando $\alpha(m) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$.

- Para una variable aleatoria W y $p \in [1, \infty]$, se define la p -norma de W como:

$$\|W\|_p = \begin{cases} (E|W|^p)^{1/p}, & p \in [1, \infty) \\ \inf\{x : P(|W| > x) = 0\}, & p = \infty \end{cases}$$

- Sea X y Y dos variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) se cumple entonces:
Sean $p, q, r \in (1, \infty)$ son algún número real que satisface $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$ se cumple:

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq 8[\alpha(\sigma\langle\{X\}\rangle, \sigma\langle\{Y\}\rangle)]^{1/r} \|X\|_p \|Y\|_q \quad (2.24)$$

2.2.4. Bootstrap por bloques

Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un proceso de serie de tiempo débilmente estacionaria y dependiente y sea un conjunto observado de la misma: $\mathbf{X}_n \equiv \{X_1, \dots, X_n\}$. El método Bootstrap por bloques es un método de remuestreo que consiste de manera general en la división por bloques de \mathbf{X}_n para luego realizar un remuestreo de variables aleatorias independientes sobre estos bloques. El conjunto ordenado de estos bloques obtenidos por remuestreo se denominarán variables Bootstrap.

El mantener las observaciones cercanas juntas en los bloques, permite conservar la estructura de dependencia en periodos "cortos" de las variables aleatorias. Como resultado, los bloques de remuestreo permiten llevar información relevante de la serie a las variables Bootstrap obtenidas por este método. [Kreiss, J. P. y Lahiri, S. N., 2012]

Este método permite obtener estimadores consistentes de parámetros que sean funciones suaves de la media muestral. Sea $\{X_{0i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ un proceso estacionario y \mathbb{R}^{d_0} evaluado; además sea $f: \mathbb{R}^{d_0} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función Borel medible, y sea $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave.

Suponiendo que el parámetro de interés es de primer orden (o de nivel 1) y está dado por $\theta = H(E f(X_{01}))$. Así, un estimador natural de θ está dado por $\hat{\theta}_n = H(n^{-1} \sum_{i=1}^n f(X_{0i}))$. Con lo cual, el parámetro θ y el estimador $\hat{\theta}_n$ son cada uno funciones suaves respectivamente de la media poblacional y muestral de la sucesión transformada $\{f(X_{0i})\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Muchos parámetros de primer orden y sus estimadores pueden ser expresados como función suave de las medias como se describe previamente, ya sea de forma directa sobre la serie o utilizando transformaciones adecuadas de las observaciones

de la serie.(Lahiri, 2013)

Estos métodos de forma símil al Bootstrap para variables independientes recrea la relación entre la población y la muestra. Supongamos estamos interesados en aproximar la distribución muestral de una variable aleatoria $T_n = t_n(\mathbf{X}_n; \theta)$.

Así la versión Bootstrap será $T_n^* = t_n(\mathbf{X}_n^*; \tilde{\theta}_n)$ donde $\mathbf{X}_n^* \equiv \{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ es la remuestra Bootstrap y $\tilde{\theta}_n$ es un estimador de θ con base en la distribución condicional a X_1^*, \dots, X_n^*

Además de ser métodos consistentes para funciones suaves de la media se tienen resultados consistentes para M-estimadores generalizados como es el caso de los estimadores por máxima verosimilitud, además de obtener resultados consistentes para ciertos estadísticos funcionales diferenciables. [Lahiri, 2003]

2.2.5. Moving Block Bootstrap

Este método bootstrap al que también notaremos por MBB, se constituye como uno de los primeros en desarrollarse dentro de los Bootstrap por bloques. Este método no requiere de supuestos fuertes sobre el modelo paramétrico de las series de estudio, sino tan solo la estacionariedad de la serie.

Este método realiza un remuestreo sobre bloques que se conforman de observaciones consecutivas de las series. De esta forma la estructura de dependencia de las observaciones originales se preserva en cada bloque.

Cuando las observaciones provienen de un proceso débilmente dependiente, el método MBB reproduce la estructura de dependencia del proceso de forma asintótica. [Lahiri, 2003]

Descripción del método MBB:

Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias de un proceso estacionario y sea $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ observaciones provenientes del proceso temporal. Como se mencionó previamente la base de este método es conservar la información de la serie en los bloques que serán remuestreados. Así definimos $\ell \equiv \ell_n \in \{1, 2, \dots, n\}$ como un entero que definirá la longitud de los bloques que se conformen. Entonces se requiere:

$$\ell \rightarrow \infty \text{ y } n^{-1}\ell \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Lo cual equivale a $\ell^{-1} + n^{-1}\ell = o(1)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

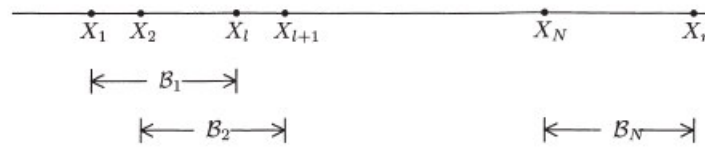


Figura 2.1: Colección $\{B_1, \dots, B_N\}$ de los bloques del método MBB.

Un punto clave en los métodos por bloques es la forma en que estos se conforman (así denotaremos por B_i a cada uno de los bloques que remuestrearemos luego). Los bloques se conforman de la siguiente forma $B_i = (X_i, \dots, X_{i+\ell-1})$ el bloque de longitud ℓ empezando en X_i , para $1 \leq i \leq N$ donde $N = n - \ell + 1$.

Para obtener la muestra Bootstrap MBB, se selecciona aleatoriamente k bloques de la colección: $\{B_1, \dots, B_N\}$. De esta forma, obtendremos B_1^*, \dots, B_k^* que será una muestra aleatoria extraída con reemplazo de la colección $\{B_1, \dots, B_N\}$. Notaremos los elementos en B_i^* por $(X_{(i-1)\ell+1}^*, \dots, X_{i\ell}^*)$, $i = 1, \dots, k$.

El seleccionar los bloques B_i^* de forma aleatoria de la colección $\{B_1, \dots, B_N\}$ equivale a seleccionar k índices de forma aleatoria del conjunto $\{1, \dots, N\}$. En otras palabras, sean I_1, \dots, I_k variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme discreta sobre $\{1, \dots, N\}$. Con lo cual se definirá $B_j^* = B_{I_j}$ con $j = 1, \dots, k$.

La muestra Bootstrap X_1^*, \dots, X_m^* se define con los elementos de los k bloques del remuestreo mencionado previamente, con $m = k\ell$. Donde k denota el entero más pequeño tal que $k\ell \geq n$, aunque en general se usarán solo los primeros n valores de los bloques remuestreados para definir la muestra Bootstrap.

Sean los bloques remuestreados con sus observaciones:

$(X_1^*, \dots, X_\ell^*)', (X_{\ell+1}^*, \dots, X_{2\ell}^*)', \dots, (X_{(k-1)\ell+1}^*, \dots, X_{k\ell}^*)'$ de forma condicional a las observaciones X_1, \dots, X_n son iid 1-dimensionales vectores aleatorios con:

$$\begin{aligned} & P_* \left((X_1^*, \dots, X_\ell^*)' = (X_j, \dots, X_{j+\ell-1})' \right) \\ &= P_* (I_1 = j) \\ &= N^{-1}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Donde P_* denota la probabilidad condicional dado $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$.

La versión MBB de $\hat{\theta}_n$ será θ_m^* definida por:

$$\theta_m^* = T(F_m^*)$$

Donde F_m^* denota la distribución empírica de (X_1^*, \dots, X_m^*)

Hasta ese punto se ha considerado los estimadores de la forma $\hat{\theta}_n = T(F_n)$ que dependen únicamente de la distribución empírica marginal de una dimensión F_n . Sin embargo para abarcar más estimadores podemos considerar lo siguiente: Dadas las observaciones \mathbf{X}_n y sea la p -dimensional medida empírica de la siguiente forma:

$$F_{p,n} = (n - p + 1)^{-1} \sum_{j=1}^{n-p+1} \delta_{Y_j}$$

Donde $Y_j = (X_j, \dots, X_{j+p-1})$ y donde para todo $y \in \mathbb{R}^p$, δ_y denota la medida de probabilidad de Dirac en \mathbb{R}^p concentrada en y . Con lo cual la versión MBB serán estimadores de la forma $\hat{\theta}_n = T(F_{p,n})$ donde $T(\cdot)$ es un funcional definido sobre un subconjunto de todas las medidas de probabilidad sobre \mathbb{R}^p

En este caso la versión MBB de $\hat{\theta}_n$ se definirá en base a: bloques definidos en términos de Y_i tal que: $\tilde{B}_j = (Y_j, \dots, Y_{j+\ell-1}), 1 \leq j \leq n - p - \ell + 2$.

Se seleccionarán k bloques de la colección: $\{\tilde{\mathcal{B}}_i : 1 \leq i \leq n - p - l + 2\}$ para generar las observaciones MBB: $Y_1^*, \dots, Y_\ell^*; Y_{\ell+1}^*, \dots, Y_{2\ell}^*; \dots, Y_m^*$ donde $m = k\ell$

La versión MBB del estimador se definirá como: $\theta_{m,n}^* = T(\tilde{F}_{m,n}^*)$ donde $\tilde{F}_{m,n}^* \equiv m^{-1} \sum_{j=1}^m \delta_{Y_j^*}$ es la distribución empírica de Y_1^*, \dots, Y_m^* . En pocas palabras en este caso la versión MBB se define en función de bloques de Y -valores en lugar de bloques de X -valores.

OBSERVACIÓN. Se tratará más adelante las características necesarias que debe cumplir la longitud l para que el método MBB genere resultados consistentes.

Algoritmo 1: Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie estacionaria débilmente dependiente y \mathbf{X}_n una muestra de dicha serie entonces el método MBB consiste en:

- 1: **for** $i \in 1:N$ **do**
- 2: $B_i = (X_i, \dots, X_{i+l-1})$
- 3: **end for**
- 4: **for** $i \in 1:k$ **do**
- 5: Se selecciona I_i tal que siga una distribución uniforme discreta sobre el conjunto $\{1, \dots, N\}$
- 6: $B_i^* = B_{I_i}$
- 7: **end for**
- 8: Estimamos a partir de B_1^*, \dots, B_k^* el parámetro θ tal que $\theta_m^* = T(F_m^*)$

Donde $N = n - \ell + 1$, $m = k\ell$, ℓ la longitud de bloque, n la longitud de la serie temporal y k el número de bloques remuestreados.

2.2.6. Circular Block Bootstrap

El método descrito previamente sufre de un efecto de "frontera" no deseado; esto significa que las observaciones del inicio y final del conjunto \mathbf{X}_n tienen un "menor" peso, que las que se encuentran en la mitad. De esta forma, para $\ell \leq j \leq n - \ell$ la j -ésima observación X_j aparece en exactamente ℓ bloques de los que produce el método, mientras que para $1 \leq j \leq \ell - 1$ las observaciones X_j y X_{n-j+1} aparece solo j veces en los bloques del método.

Politis y Romanos en 1992 proponen un método que resolvería este problema. Su idea consiste en colocar las observaciones de forma "circular" y formar los bloques a partir de las observaciones redefinidas en esta forma.

Descripción del método CBB:

Dadas las variables $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ se define un nuevo proceso de serie de tiempo $Y_{n,i}$ $i \geq 1$ que será una "extensión periódica".

Esto consiste en que: para todo $i \geq 1$, existen enteros $k_i \geq 0$ y $j_i \in [1, n]$ tal que $i = k_i n + j_i$; así la variable $Y_{n,i}$, $i \geq 1$ se define por $Y_{n,i} = X_{j_i}$. Como se puede ver en la figura a continuación esto equivale a poner las variables X_1, \dots, X_n de forma consecutiva y repetitiva en una línea recta, etiquetándolas serialmente como $Y_{n,i}$, $i \geq 1$.

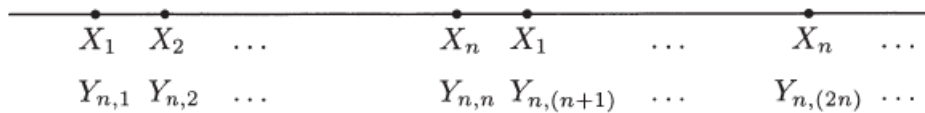


Figura 2.2: Proceso de serie de tiempo periódicamente extendido $Y_{n,i}$, $i \geq 1$

Se definen entonces los bloques en relación a este método de la siguiente forma: $B_{(i,j)} = B(i,j) = (Y_{n,i}, \dots, Y_{n,(i+j-1)})$ para $1 \leq i \leq n$, $j = \ell$, donde ℓ es fijo y será la longitud de los bloques que satisface $1 \ll \ell \ll n$. Más adelante se describirá a detalle la forma de selección de longitud de bloques (ℓ).

Así cada X_i aparece exactamente ℓ veces en la colección de bloques $\{B_{(1,\ell)}, \dots, B_{(n,\ell)}\}$ y considerando que se utiliza el remuestreo por bloques de esta colección con la misma probabilidad para cada uno; entonces cada observación inicial tiene una probabilidad igual de ser seleccionada bajo este método, solucionando el problema descrito previamente.

Definimos la colección de variables aleatorias independientes e idénticamente

distribuidas I_1, \dots, I_k , estos serán los índices que definirán los bloques que se tomarán de la colección: $\{B_{(1,\ell)}, \dots, B_{(n,\ell)}\}$ de forma que $B_{(I_w, \ell)}$ corresponde al w -ésimo bloque seleccionado por muestreo con reposición sobre la colección de bloques. Por tanto I_w para $1 \leq w \leq k$ tomará valores entre 1 y n tal que $P_*(I_w = i) = n^{-1}$ para todo $1 \leq w \leq k$ y para todo $1 \leq i \leq n$.

De forma similar al método MBB, k denota el entero más pequeño tal que $k\ell \geq n$. Y se denotarán los Bloques Bootstrap tal que $B_i^* = B_{I_i}$ con $i = 1, \dots, k$. La muestra Bootstrap X_1^*, \dots, X_m^* se define con los elementos de los k bloques del remuestreo mencionado previamente donde $m = k\ell$ se usarán solo los primeros n valores de los bloques remuestreados para definir la versión Bootstrap del estadístico de interés.

Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie estacionaria débilmente dependiente y \mathbf{X}_n una muestra de dicha serie entonces el método CBB consiste en:

- 1: **for** $i \in 1:n$ **do**
- 2: $Y_{n,i} = (X_{J_i})$ tal que $i = nk_i + J_i$ con $k_i \geq 0, J_i \in [1, n]$
- 3: **end for**
- 4: **for** $i \in 1:n$ **do**
- 5: $B_i = (Y_{n,i}, \dots, Y_{n,i+\ell-1})$
- 6: **end for**
- 7: **for** $i \in 1:k$ **do**
- 8: Se selecciona I_i tal que siga una distribución uniforme discreta sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$
- 9: $B_i^* = B_{I_i}$
- 10: **end for**
- 11: Estimamos a partir de B_1^*, \dots, B_k^* el parámetro θ tal que $\theta_m^* = T(F_m^*)$

Donde $m = k\ell$, ℓ la longitud de bloque, n la longitud de la serie temporal y k el número de bloques remuestreados.

2.2.7. Stationary Block Bootstrap

A diferencia de los métodos descritos previamente, este método utiliza una longitud de bloque aleatoria proveniente de una distribución geométrica para generar los bloques Bootstrap.

De manera similar a como se definieron los bloques previamente, utilizaremos: $B(I_i, L_i)$ con la diferencia que L_i para $1 \leq i \leq k$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas bajo distribución geométrica con $p \in (0, 1)$ tal que $P_*(L_i = k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

Además I_1, \dots, I_k son v.a.i.i.d. con distribución uniforme discreta sobre $\{1, \dots, n\}$; donde $k = \inf\{r \geq 1 : L_1 + \dots + L_r \geq n\}$.

Así se definen los bloques para aplicar el método SB de la siguiente forma: $B(I_1, L_1), \dots, B(I_k, L_k)$. Los bloques SB Bootstrap B_1^*, \dots, B_k^* serán definidos entonces por $B_j^* = B(I_j, L_j)$ para $1 \leq j \leq k$; los primeros n elementos de los Bloques B_1^*, \dots, B_k^* constituirán la muestra Bootstrap por el método SB.

Politis y Romano demostraron que la muestra Bootstrap obtenida por este método es estacionaria, de ahí proviene su nombre.

Sea $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie estacionaria débilmente dependiente y \mathbf{X}_n una muestra de dicha serie entonces el método CBB consiste en:

- 1: **for** $i \in 1:n$ **do**
- 2: $Y_{n,i} = (X_{J_i})$ tal que $i = nk_i + J_i$ con $k_i \geq 0$, $J_i \in [1, n]$
- 3: **end for**
- 4: **for** $i \in 1:k$ **do**
- 5: Se selecciona I_i tal que siga una distribución uniforme discreta sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$
- 6: Se selecciona L_i tal que siga una distribución geométrica con parámetro p
- 7: $B(I_i, L_i) = (Y_{n,I_i}, \dots, Y_{n,I_i+L_i-1})$
- 8: $B_i^* = B(I_i, L_i)$
- 9: **end for**
- 10: Estimamos a partir de B_1^*, \dots, B_k^* el parámetro θ tal que $\theta_m^* = T(F_m^*)$

Donde $m = k\ell$, ℓ la longitud de bloque, n la longitud de la serie temporal y k el número de bloques remuestreados.

Para la elección del parámetro p consideramos la media esperada de las variables L_i de forma que los resultados sean consistentes.

2.2.7.1. Otra formulación del método

A continuación se presenta otra formulación del método SB a partir de la cual proviene su nombre; además, este resultado permite obtener la esperanza de los bloques respectivos.

En esta segunda formulación del método SB, diremos que la sucesión $\{X_i^{*(3)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ se obtiene de la siguiente forma:

- Para $X_1^{*(3)}$ se selecciona de forma aleatoria de la colección $\{X_1, \dots, X_n\}$, en otras palabras $X_1^{*(3)} = Y_{n, I_1}$ donde I_1 es tal y como se definió en las secciones previas y $\{Y_{n,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es el proceso de serie de tiempo periódicamente extendido.
- Dado $X_i^{*(3)} = Y_{n, i_0}$ con $i_0 \geq 1$ e $i \geq 1$; así la siguiente observación Bootstrap del método denotada por $X_{i+1}^{*(3)}$ se selecciona de la siguiente forma:

$$X_{i+1}^{*(3)} = \begin{cases} Y_{n, (i_0+1)} & \text{con probabilidad} \\ & (1 - p) \\ \text{Muestreo aleatorio simple} & \text{con probabilidad} \\ \text{sobre el conjunto de datos: } \{X_1, \dots, X_n\} & p \end{cases}$$

Para corroborar que esta formulación es equivalente al proceso descrito en la sección anterior: Denotaremos las siguientes variables:

- W_i será la variable aleatoria asociada al experimento para seleccionar $X_i^{*(3)}$ para $i \geq 2$. Tal que las variables W_i , $i \geq 2$ son variables independientes e idénticamente distribuidas con la probabilidad condicional a \mathbf{X}_n : $P_*(W_i = 1) = 1 - P_*(W_i = 0) = 1 - p$. Donde 1 está asociado a un "éxito" y 0 a un fracaso.
- Las variables $\{I_i : i \geq 1\}$ independientes entre si e idénticamente distribuidas con distribución uniforme discreta sobre $\{1, \dots, n\}$. Estas son independientes de las variables $\{W_i : i \geq 2\}$
- Las variables $M_j, j \geq 0$ tal que $M_0 = 1$ y $M_j = \inf\{i \geq M_{j-1} + 1 : W_i = 1\}$, $j \geq 1$. En otras palabras estas variables denotan el número de intentos sobre las pruebas $\{W_i : i \geq 2\}$ hasta que se obtiene el j -ésimo éxito y por ello sigue una distribución binomial negativa de parámetro j y p

De esta forma se cumple para todo $j \geq 1$ que la observación del método $X_{M_j}^{*(3)}$ es seleccionado mediante muestreo aleatorio simple de la colección $\{X_1, \dots,$

$X_n\}$ tal que: $X_{M_j}^{*(3)} = Y_{n, I_j+1}$, $j \geq 1$ esto procede de la definición al estar relacionados los M_j con el j -ésimo "éxito" en las pruebas $\{W_i : i \geq 2\}$.

Por otro lado para todo índice i entre $M_{j-1} + 1$ y $M_j - 1$ por definición estarían relacionados a un "fracaso" en los experimentos W_i tal que $W_i = 0$. Con lo cual las variables $\{W_i : i = M_{j-1}, \dots, M_j - 1\}$ se relacionan a las observaciones de la muestra Bootstrap de la siguiente forma: $\{X_{M_{j-1}}^{*(3)}, \dots, X_{M_j-1}^{*(3)}\} = \{Y_{n, I_j}, \dots, Y_{n, (I_j + M_j - M_{j-1} - 1)}\}$ $j \geq 1$.

Recordemos que las variables M_j , $j \geq 1$ son variables binomiales negativas que por tanto pueden ser expresadas como la suma de j variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución Geométrica de parámetro p . Así definimos las variables S_i , $i \geq 1$ independientes e idénticamente distribuidas tal que $P(S_i = x) = (1 - p)^{x-1}(p)$, $x \geq 1$, correspondiendo al número de x intentos necesarios hasta obtener un "éxito".

Con esto $M_j = \sum_{i=1}^j S_i$ para todo $j \geq 1$, de esta forma si definimos $L_j = M_j - M_{j-1}$, $j \geq 1$ entonces $\{L_j\}_{j \geq 1}$ tendrán una distribución geométrica de parámetro p , demostrándose así la equivalencia de este procedimiento con el definido en la sección anterior referente al método SB.

Ya que los bloques se seleccionaran bajo $B_j^* = B(I_j, L_j)$ para $1 \leq j \leq k$ según lo definido en este desarrollo y que a su vez coincide con la descripción del método presentada en la sección anterior.

Considerando lo expuesto y definido entonces se cumple:

$$\begin{aligned} & \text{Sean } 2 \leq i \leq n, j \geq 2 : P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_{i-1} \right) \\ &= P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_{i-1}, W_j = 0 \right) P_* (W_j = 0) \\ &+ P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_{i-1}, W_j = 1 \right) P_* (W_j = 1) \\ &= (1)(1 - p) + (1/n) * (p) \\ &= (1 - p) + (n)^{-1}(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Sean } 1 \leq i \leq n, j \geq 2, 1 \leq t < n \text{ tal que } i \neq t + 1 : P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t \right) \\ &= P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t, W_j = 0 \right) P_* (W_j = 0) \\ &+ P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t, W_j = 1 \right) P_* (W_j = 1) \\ &= (0)(1 - p) + (1/n)(p) \\ &= (n)^{-1}(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sean } i = 1, j \geq 2, t = n : P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t \right) \\
&= P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t, W_j = 0 \right) P_* (W_j = 0) \\
&+ P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t, W_j = 1 \right) P_* (W_j = 1) \\
&= (1)(1-p) + (1/n)(p) \\
&= (1-p) + (n)^{-1}(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sean } 1 < i \leq n, j \geq 2, t = n : P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t \right) \\
&= P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t, W_j = 0 \right) P_* (W_j = 0) \\
&+ P_* \left(X_j^{*(3)} = X_i \mid X_{j-1}^{*(3)} = X_t, W_j = 1 \right) P_* (W_j = 1) \\
&= (0)(1-p) + (1/n)(p) \\
&= (n)^{-1}(p)
\end{aligned}$$

El siguiente teorema resume las características del muestreo SB bajo la definición presentada en esta sección, además nos da un resultado sobre la esperanza de la media Bootstrap de este método, lo cual será de utilidad en la demostración de consistencia del método.

TEOREMA 2.1. *Sea \mathcal{F}_{in} la σ -álgebra generada por Z_i y X_1, \dots, X_n , $i \geq 1$. Entonces, la distribución condicional a \mathbf{X}_n : $\left\{ X_i^{*(3)}, \mathcal{F}_{in} \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov estacionaria para cada $n \geq 1$, es decir, se cumple:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left(X_i^{*(3)} \mid \mathbf{X}_n \right) &= \mathcal{L} \left(X_1^{*(3)} \mid \mathbf{X}_n \right) \quad \forall i \geq 1 \\
\mathcal{L} \left(X_{(i+1)}^{*(3)} \mid Z_1, \dots, Z_i, \mathbf{X}_n \right) &= \mathcal{L} \left(X_{(i+1)}^{*(3)} \mid Z_i, \mathbf{X}_n \right) \quad \forall i \geq 1
\end{aligned}$$

De estas se concluye que $\{X_i^{*(3)}\}_{i \geq 1}$ es estacionaria. Además se cumpliría que:

$$E_* \left(\bar{X}_m^{*(3)} \right) = E_* \left(X_1^{*(3)} \right) \quad \text{Donde } \bar{X}_m^{*(3)} \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m X_i^{*(3)} \quad (2.25)$$

Demostración. Para la demostración de este teorema es necesario recordar lo enunciado en esta sección respecto a la forma alternativa de definir el procedimiento del método SB.

Definimos entonces la familia de variables $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ como una Cadena de Markov cuyo espacio de estados es $\{1, \dots, n\}$ tal que considerando la distribución condicional respecto a \mathbf{X}_n , la distribución inicial de la cadena es $\pi \equiv (n^{-1}, \dots, n^{-1})'$ y su

matriz de probabilidad de transición es \mathcal{P} , donde sus entradas son:

$$p_{ij} = \begin{cases} (1-p) + n^{-1}p & 1 \leq i < n, j = i+1 \\ n^{-1}p & 1 \leq i < n, j \neq i+1 \\ n^{-1}p & i = n, 2 \leq j \leq n \\ (1-p) + n^{-1}p & i = n, j = 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

De esta forma efectivamente se cumple $P_*(Z_{n+1} | Z_0, \dots, Z_n) = P_*(Z_{n+1} | Z_n)$ por lo cual es una cadena de Markov.

Además, si consideramos las probabilidades condicionales obtenidas previamente estas coinciden con las probabilidades de transición definidas en (2.26) y efectivamente la primera observación se toma mediante muestreo aleatorio sobre $\{1, \dots, n\}$. Es decir, hemos expresado el proceso de selección de índices del método SB como una cadena de Markov.

Con lo cual:

$$X_i^{*(3)} = X_{Z_i}, i \geq 1$$

Ahora para demostrar la estacionariedad de $\{X_i^{*(3)}\}_{i \in \mathbb{N}}$, verificaremos que la matriz P es doblemente estocástica así:

Sea $i = n$ se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_{nj} &= (1-p) + n^{-1}p + (n-1)(n)^{-1}p \\ &= 1 - p + (n)^{-1}p + p - (n)^{-1}p = 1 \end{aligned}$$

Donde $(n-1)n^{-1}p$ corresponde a las $(n-1)$ entradas p_{nj} donde $2 \leq j \leq n$ y $(1-p) + n^{-1}p$ corresponde a p_{n1} .

Sea $1 \leq i < n$ se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_{ij} &= (1-p) + n^{-1}p + (n-1)(n)^{-1}p \\ &= 1 - p + (n)^{-1}p + p - (n)^{-1}p = 1 \end{aligned}$$

Donde $(n-1)n^{-1}p$ corresponde a las $(n-1)$ entradas p_{ij} donde $1 \leq j \leq n$ tal que $j \neq i+1$ y $(1-p) + n^{-1}p$ corresponde a $p_{i(i+1)}$.

Sea $1 < j \leq n$ se cumple:

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = (1-p) + n^{-1}p + (n-1)(n)^{-1}p$$

$$= 1 - p + (n)^{-1}p + p - (n)^{-1}p = 1$$

Donde $(n-1)n^{-1}p$ corresponde a las $(n-1)$ entradas p_{ij} donde $1 \leq j \leq n$ tal que $i \neq j-1$ y $(1-p) + n^{-1}p$ corresponde a $p_{(j-1)j}$.

Sea $j = 1$ se cumple:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_{i1} &= (1-p) + n^{-1}p + (n-1)(n)^{-1}p \\ &= 1 - p + (n)^{-1}p + p - (n)^{-1}p = 1 \end{aligned}$$

Donde $(n-1)n^{-1}p$ corresponde a las entradas p_{i1} donde $1 < j \leq n-1$ y $(1-p) + n^{-1}p$ corresponde a p_{n1} .

De esta forma se comprueba que P es una matriz doblemente estocástica por lo cual cumple la relación $\pi'P = \pi'$, considerando también que $\pi' = (n^{-1}, \dots, n^{-1})$. Por lo tanto π es la distribución estacionaria de $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cadena estacionaria de Markov.

Con ello por propiedades de las cadenas de Markov se cumple:

$$E_* \left(\bar{X}_m^{*(3)} \right) = E_* \left(X_1^{*(3)} \right)$$

Y considerando π se obtiene:

$$E_* \left(X_1^{*(3)} \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$$

Ya que $X_1^{*(3)}$ se obtiene por muestreo aleatorio simple de $\{X_1, \dots, X_n\}$ ■

2.2.8. Consistencia de los métodos Bootstrap por Bloques

En esta sección se demostrará la consistencia de los métodos Bootstrap por Bloques bajo condiciones de la serie, los parámetros a estimar y la longitud del bloque utilizada. Se empieza por realizar un análisis de las medias muestrales Bootstrap cuyos resultados serán de utilidad al demostrar la consistencia de la varianza de los estimadores Bootstrap; posteriormente se analizan los resultados principales sobre la longitud óptima de bloque que permiten tener resultados consistentes y eficientes.

Una vez realizada la demostración de consistencia de la varianza de los estimadores Bootstrap se procede con el análisis de la distribución de los estimadores

Bootstrap, y con ello se obtiene la consistencia asintótica de dichos estimadores; finalmente, se presenta el resultado de consistencia de los estimadores que son funciones suaves de la media de un proceso estacionario.

2.2.8.1. Análisis de las medias muestrales Bootstrap

Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una serie estacionaria de vectores aleatorios que toman valores en \mathbb{R}^d . Sea T_n la media muestral centrada y escalada tal que $T_n = \sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)$ donde $\mu = E(X_1)$ y $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

Se establecerá la consistencia asintótica de la matriz de covarianzas de estimadores obtenidos por métodos MBB y CBB, tal que $\text{Var}(T_n) \equiv E T_n T_n'$ así como de la distribución muestral $G_n(x) \equiv P(T_n \leq x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, estas características del parámetro T_n .

Consideraremos en adelante que para los dos métodos se remuestran $b \equiv \lfloor n/\ell \rfloor$ bloques y por lo tanto la muestra Bootstrap tiene $n_1 = b\ell$ observaciones. Además para diferenciar los métodos MBB y CBB usaremos superíndices en los estimadores u observaciones, con lo cual $\bar{X}_n^{*(1)}$ corresponde a la media muestral de las observaciones Bootstrap obtenidas por el método MBB, usaremos en cambio el superíndice (2) para lo referente al método CBB y (3) para el método SB.

Notemos que el estimador Bootstrap de T_n viene dado por $T_n^{*(j)} \equiv \sqrt{n_1} (\bar{X}_n^{*(j)} - E_* \bar{X}_n^{*(j)})$, $j = 1, 2$, así como $\text{Var}(T_n) = \text{Var}_*(T_n^{*(j)})$, $j = 1, 2$. Donde E_* y Var_* denotan respectivamente la esperanza condicional y la varianza condicional, dado \mathbf{X}_n

De igual forma el estimador Bootstrap de $G_n(\cdot)$ viene dado por la distribución condicional de $T_n^{*(j)}$ dado \mathbf{X}_n , $j = 1, 2$

Para lo siguiente definimos las siguientes variables aleatorias:

$$\left(\diamond B_i^{*(1)} \right) = \begin{cases} X_1 + \cdots + X_{1+\ell-1} & \text{con probabilidad } \frac{1}{n-\ell+1} \\ \vdots & \\ X_{n-\ell+1} + \cdots + X_n & \text{con probabilidad } \frac{1}{n-\ell+1} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\left(\diamond B_i^{*(2)} \right) = \begin{cases} Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,1+\ell-1} & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \\ \vdots & \\ Y_{n,n} + \cdots + Y_{n,n+\ell-1} & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \end{cases} \quad (2.28)$$

Donde $\left(\diamond B_i^{*(j)} \right)$ será la v.a. correspondiente a la suma de las observaciones co-

respondiente al i -ésimo bloque Bootstrap, esto para $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, 2$; tal que $m = k * \ell$ y $j = 1$ corresponderá a los bloques bootstrap por el método MBB y $j = 2$ corresponderá a los bloques bootstrap por el método CBB.

De esta forma, asumiendo $n/\ell = k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $N = n - \ell + 1$, se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_* \left(\overline{X}_n^{*(1)} \right) &= \mathbb{E}_* \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{*(1)} \right) \\ &= \frac{k}{n} \mathbb{E}_* \left(\diamond B_1^{*(1)} \right) \\ &= \ell^{-1} \left[\left(\frac{1}{n - \ell + 1} \right) * \left(\sum_{i=1}^{n-\ell+1} X_i + X_{i+1} + \dots + X_{i+\ell-1} \right) \right] \end{aligned}$$

En este punto cabe recordar lo que se mencionó en las secciones previas, en el método MBB aparecen ℓ veces las variables X_i , $i \in \{\ell, \dots, n - \ell + 1\}$ en los bloques sobre los cuales se realiza el remuestreo, además aparecen j veces las variables X_j y X_{n-j+1} , $j \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. Con lo cual:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_* \left(\overline{X}_n^{*(1)} \right) &= \frac{1}{N\ell} \left[\ell * \sum_{j=\ell}^{n-\ell+1} X_j + \sum_{i=1}^{\ell-1} (i) * (X_i + X_{n-i+1}) \right] \\ &= \frac{1}{N\ell} \left[\ell \sum_{j=1}^n (X_j) + \sum_{i=1}^{\ell-1} (i) * (X_i + X_{n-i+1}) - \ell \sum_{j=1}^{\ell-1} (X_j + X_{n-j+1}) \right] \\ &= \frac{1}{N\ell} \left[\ell \sum_{j=1}^n (X_j) + \sum_{j=1}^{\ell-1} (j - \ell) (X_j + X_{n-j+1}) \right] \\ &= \frac{1}{N\ell} \left[\ell n \overline{X}_n - \sum_{j=1}^{\ell-1} (\ell - j) (X_j + X_{n-j+1}) \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[n \overline{X}_n - \ell^{-1} \sum_{j=1}^{\ell-1} (\ell - j) (X_j + X_{n-j+1}) \right] \end{aligned}$$

Así, finalmente

$$\mathbb{E}_* \left(\overline{X}_n^{*(1)} \right) = \frac{1}{N} \left[n \overline{X}_n - \ell^{-1} \sum_{j=1}^{\ell-1} (\ell - j) (X_j + X_{n-j+1}) \right] \quad (2.29)$$

Por otro lado:

$$\mathbb{E}_* \left(\overline{X}_n^{*(2)} \right) = \mathbb{E}_* \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{*(2)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{n} E_* \left(\diamond B_1^{*(2)} \right) \\
&= \ell^{-1} \left[\left(\frac{1}{n} \right) * \left(\sum_{i=1}^n Y_{n,i} + Y_{n,i+1} + \cdots + Y_{n,i+\ell-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

En este punto cabe recordar lo mencionado en capítulos anteriores referente a que en el método CBB, en la colección de bloques sobre la que se realiza el remuestreo respectivo aparece exactamente ℓ veces cada variable $X_i, 1 \leq i \leq n$. De esta forma:

$$\begin{aligned}
E_* \left(\overline{X}_n^{*(2)} \right) &= \ell^{-1} \left[\left(\frac{1}{n} \right) \ell \sum_{i=1}^n X_i \right] \\
&= \ell^{-1} [\ell \overline{X}_n] \\
&= \overline{X}_n
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$E_* \left(\overline{X}_n^{*(2)} \right) = \overline{X}_n \quad (2.30)$$

Respecto a $E_* \left(\overline{X}_n^{*(3)} \right)$ de lo desarrollado en la sección previa se obtiene

$$E_* \left(\overline{X}_n^{*(3)} \right) = \overline{X}_n$$

2.2.8.2. Longitud óptima de bloque para los métodos MBB, CBB y SB

El siguiente teorema y las siguientes hipótesis serán empleadas en la demostración del teorema 2.3, que es un primer paso para encontrar la longitud óptima de bloque para cada método.

TEOREMA 2.2. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles sobre un espacio E que converge puntualmente sobre E a la función f . Suponga que existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones integrables sobre E que convergen puntualmente sobre E hacia g tal que $|f_n| \leq g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n = \int_E g$ entonces se cumple: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$

HIPÓTESIS 1. La función $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es r -veces continuamente diferenciable y $\max \{|D^\nu H(x)| : |\nu| = r\} \leq C (1 + \|x\|^{a_0}), x \in \mathbb{R}^d$ para algún entero $a_0 \geq 1$.

HIPÓTESIS 2. $E \|X_1\|^{2r+\delta} < \infty$ y $\Delta(r; \delta) < \infty$ para algún $\delta > 0$ optimolongitudlahiri

Para lo referente a esta sección definimos: $\widehat{\varphi}_{1n}(j; \ell) \equiv \widehat{\text{Bias}}_j(\ell) = E_* T_{n,\ell}^{*(j)}, j = 1, 2, 3$ y $\widehat{\varphi}_{2n}(j; \ell) \equiv \widehat{\text{Var}}_j(\ell) = \text{Var}_* \left(T_{n,\ell}^{*(j)} \right), j = 1, 2, 3$. Donde $T_{n,\ell}^{*(j)} = H \left(\overline{X}_{n,\ell}^{*(j)} \right) -$

$$H \left(E_* \bar{X}_{n,\ell}^{*(j)} \right), j = 1, 2, 3.$$

La longitud óptima de bloques se encuentra gracias a la minimización del error cuadrático medio del sesgo ($\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)$) y varianza ($\widehat{\text{Var}}_j(\ell)$) del estimador Bootstrap $T_{n,\ell}^*$, por lo cual como primer paso en el teorema 2.3 encontramos el sesgo de $\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)$ y $\widehat{\text{Var}}_j(\ell)$. Posteriormente en el teorema 2.6 se encuentra la varianza de $\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)$ y $\widehat{\text{Var}}_j(\ell)$.

Finalmente, en el teorema 2.7 se encuentra la longitud óptima de bloques para el método MBB y CBB y la longitud esperada de bloques para el método SB.

TEOREMA 2.3. *Asumiendo que ℓ es tal que $\ell^{-1} + n^{-1/2}\ell = o(1)$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

1. *Suponga que la Condición 1 se cumple con $r = 3$ y que la Condición 2 se cumple con $r = 3 + a_0$, donde a_0 es definido por la Condición 1. Así:*

$$\text{Bias} \left(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell) \right) = n^{-1}\ell^{-1}A_1 + o \left(n^{-1}\ell^{-1} \right) \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$\text{Donde } A_1 = - \sum_{|\alpha|=1} \sum_{|\beta|=1} c_{\alpha+\beta} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| E X_1^\alpha X_{1+j}^\beta \right) \text{ y } c_\alpha = D^\alpha H(\mu) / \alpha!, \alpha \in (\mathbb{Z}_+)^d.$$

2. *Suponga que la Condición 1 se cumple con $r = 2$ y que la Condición 2 se cumple con $r = 4 + 2a_0$, donde a_0 es definido por la Condición 1. Entonces:*

$$\text{Bias} \left(\widehat{\text{Var}}_j(\ell) \right) = n^{-1}\ell^{-1}A_2 + o \left(n^{-1}\ell^{-1} \right) \text{ para } j = 1, 2, 3$$

$$\text{Donde } A_2 = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j| E \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_{1+j}, \tilde{Z}_i = \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha (X_i - \mu)^\alpha, i \geq 1, \text{ y } c_\alpha \text{ es definido como en el literal anterior.}$$

Demostración. Una demostración detallada de este teorema se puede encontrar en Lahiri, 2003. Para la demostración se hace uso de los siguientes resultados:

LEMA 2.4. *Asuma que $\ell = O(n^{1-\epsilon})$ para algún $0 < \epsilon < 1$, $E \|X_1\|^{2r+\delta} < \infty$ y $\Delta(r; \delta) < \infty$, para algún entero positivo r y para algún $\delta > 0$. Así:*

$$(i) E \left\{ E_* \|S(I_{j,1}; \ell)\|^{2r} \right\} \leq C(r, d) \zeta_{2r+\delta}^{2r} \Delta(r; \delta) \cdot \ell^r \text{ para } j = 1, 2, 3.$$

$$(ii) E \|\hat{\mu}(j; \ell)\|^{2r} \leq C(r, d) \zeta_{2r+\delta}^{2r} \Delta(r; \delta) \cdot n^{-r} \text{ para } j = 1, 2, 3.$$

$$(iii) E \left\{ E_* \left\| \bar{X}_{n,\ell}^{*(j)} \right\|^{2r} \right\} \leq C(r, d) \zeta_{2r+\delta}^{2r} \Delta(r; \delta) \cdot n^{-r}, j = 1, 2, 3$$

LEMA 2.5. *Asuma que $\ell = O(n^{1-\epsilon})$ para algún $0 < \epsilon < 1$, $E \|X_1\|^{2r+\delta} < \infty$ y $\Delta(r; \delta) < \infty$, para algún entero positivo r y para algún $\delta > 0$. Así:*

$$(i) E \left\{ E_* \|S(I_{4,1}; L_1)\|^{2r} \right\} \leq C(r, d) \zeta_{2r+\delta}^{2r} \Delta(r; \delta) \cdot \ell^r$$

$$(ii) E \left\{ E_* \left\| \bar{X}_{n,\ell}^{*(4)} \right\|^{2r} \right\} \leq C(r, d) \zeta_{2r+\delta}^{2r} \Delta(r; \delta) \cdot n^{-r} (1 + \ell(np)^{-2r})$$

Para el caso del MBB y CBB la demostración consiste en el desarrollo de la expansión de Serie de Taylor de $H(\bar{X}_{n,\ell}^{*(j)})$ al rededor de $\hat{u}(j; \ell)$, siendo esta una expansión de serie de taylor de grado 2 con un resto en la forma de integral.

A partir de ello considerando que:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n,\ell}^{*(j)} &= (1/n) \sum_{i=1}^n X_i^{*(j)} \\ &= (1/b) \sum_{i=1}^b X_i^{*(j)} + \dots + X_{i+\ell-1}^{*(j)} \end{aligned}$$

Es decir, constituye la media de b bloques que son a su vez v.a.i.i.d.

Utilizando este resultado sobre la expansión de Taylor se expresan $\hat{\phi}_{1n}(j; \ell)$ y $\hat{\phi}_{2n}(j; \ell)$ en función de un resto y de la suma de la esperanzas o varianzas condicionales de $(S(I_{j,1}; \ell)^\alpha)$. Así por ejemplo para $\hat{\phi}_{1n}(j; \ell)$ se obtiene :

$$\hat{\phi}_{1n}(j; \ell) = b^{-1} \ell^{-2} \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha E_* (S(I_{j,1}; \ell)^\alpha) + R_{1n}(j; \ell) \quad (2.31)$$

Posteriormente se busca acotar la esperanza del resto elevado al cuadrado, cuya cota deberá estar en función de n y ℓ , para esto se utiliza la desigualdad de Hölder y el lema 2.4. Así por ejemplo para el caso presentado se cumple $E(R_{1n}(j; \ell))^2 \leq C[n^{-3} + n^{-4}\ell^2]$.

Con este resultado y considerando que: $\text{Bias}(\hat{\phi}_{1n}(j; \ell)) = E \hat{\phi}_{1n}(j; \ell) - \text{Bias}(\hat{\theta}_n)$ y $\text{Bias}(\hat{\phi}_{2n}(j; \ell)) = E \hat{\phi}_{2n}(j; \ell) - \text{Var}(\hat{\theta}_n)$

Considerando además expresiones específicas para $\text{Bias}(\hat{\theta}_n)$ y $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$ se obtiene finalmente los resultados esperados.

Para el caso del método SB el cambio principal radica en que al ser la longitud una variable aleatoria, no se cumple que $\bar{X}_{n,\ell}^{*(3)}$ sea la media de b bloques con idéntica longitud. Sin embargo, la idea es similar expresar $\hat{\phi}_{1n}(3; \ell)$ y $\hat{\phi}_{2n}(3; \ell)$ en función de un resto y de la suma de las esperanzas o varianzas de $(\bar{X}_{n,\ell}^{*(3)} - \bar{X}_n)^\alpha$.

Gracias a la estacionariedad de la muestra Bootstrap, al resultado del lema 2.5 y otras desigualdades el desarrollo de estos términos permiten llegar al resultado planteado en el teorema. Para un mayor detalle se encuentra la demostración en Lahiri, 2003 Cap 5.7. ■

TEOREMA 2.6. *Asuma que las condiciones del Teorema 2.3 se cumplen sobre la*

longitud de bloque ℓ y sobre el índice r acorde a las Condición 1 y la Condición 2 según lo que corresponda. Así, existen funciones simétricas, no negativas y \mathbb{R} -evaluadas g_1, g_2 tal que:

1.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) &= \{4\pi^2 g_1(0)/3\} n^{-3}\ell + o(n^{-3}\ell), j = 1, 2 \\ \text{Var}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) &= (2\pi) \left[2\pi g_1(0) + \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{iw}) g_1(w) dw \right] (n^{-3}\ell) \\ &\quad + o(n^{-3}\ell), j = 3\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\widehat{\text{Var}}_j(\ell)) &= \{(2\pi)^2 g_2(0)/3\} n^{-3}\ell + o(n^{-3}\ell), j = 1, 2 \\ \text{Var}(\widehat{\text{Var}}_j(\ell)) &= (2\pi) \left[2\pi g_2(0) + \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{iw}) g_2(w) dw \right] (n^{-3}\ell) \\ &\quad + o(n^{-3}\ell), j = 3\end{aligned}$$

Demostración.- Una demostración detallada de este teorema se encuentra en Lahir, 2003 Teorema 5.2.

En esta demostración como en el caso previo se parte de la expansión de las series de Taylor de $\widehat{\varphi}_{1n}(j; \ell)$ y $\widehat{\varphi}_{2n}(j; \ell)$. Se define de esta forma $T_{n,j}$ como la diferencia entre nuestro estimador de estudio y el término que agrupa el resto del desarrollo de la serie de Taylor. Así por ejemplo para el caso de $\widehat{\varphi}_{1n}(j; \ell)$ visto en 2.31 para el caso del MBB o CBB se define $T_{n,j} = b^{-1}\ell^{-2} \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha E_* (S(I_{j,1}; \ell))^\alpha, 1 \leq j \leq 2$.

Se desarrolla entonces una cota al término $|\text{Var}(\widehat{\varphi}_{in}(j; \ell)) - \text{Var}(T_{n,j})|$ utilizando la desigualdad de Cauchy Schwarz y según lo que corresponde a cada caso. De esta forma para $\widehat{\varphi}_{1n}(j; \ell)$ y $1 \leq j \leq 2$.

$$\begin{aligned}|\text{Var}(\widehat{\varphi}_{1n}(j; \ell)) - \text{Var}(T_{n,j})| &= |\text{Var}(T_{n,j} + R_{1n}(j; \ell)) - \text{Var}(T_{n,j})| \\ &= |\text{Var}(R_{1n}(j; \ell)) - 2\text{Cov}(T_{n,j}; R_{1n}(j; \ell))| \\ &\leq \|R_{1n}(j; \ell)\|_2^2 + 2[\text{Var}(T_{n,j})]^{1/2} \|R_{1n}(j; \ell)\|_2\end{aligned}$$

De igual forma que para el teorema previo se busca una cota para el resto al cuadrado la cual dependa de n, ℓ y constantes. De esta forma basta desarrollar el término restante para el caso de análisis este sería $\text{Var}(T_{n,j})$ de forma que esta co-

responda al resultado presentado en el Teorema a demostrar.

Para lograr este objetivo se hace uso de un lema específico para el efecto para el caso del método MBB. Para el caso del método CBB se desarrolla la esperanza al cuadrado de la diferencia de los términos $T_{2,j}$ y $T_{1,j}$ encontrando una cota para esto en función de n, ℓ , para esto se utiliza también un Lema específico para el efecto.

Para el caso del método SB el esquema general es similar, sin embargo el desarrollo considera las diferentes entradas de la matriz de varianzas y se desarrollan cotas necesarias para cada término. ■

De estos teoremas se concluye que para los método Bootstrap por bloques mencionados, se cumple que cuando la esperanza de la longitud de bloques ℓ aumenta, entonces el sesgo del estimador Bootstrap por bloques disminuye, mientras que la varianza aumenta.

Para cada método existe un valor crítico de ℓ que minimiza el MSE. A estos valores del parámetro ℓ le denominaremos la longitud óptima del bloque de primer orden por MSE. Así sea: $\ell_{1j}^0 = \operatorname{argmin} \left\{ \operatorname{MSE} \left(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell) \right) : n^\epsilon \leq \ell \leq n^{(1-\epsilon)/2} \right\}$ y $\ell_{2j}^0 = \operatorname{argmin} \left\{ \operatorname{MSE} \left(\widehat{\text{Var}}_j(\ell) \right) : n^\epsilon \leq \ell \leq n^{(1-\epsilon)/2} \right\}$ para $j = 1, 2, 3$, estos denotan entonces la longitud óptima de bloques por MSE para estimar la varianza y Bias de $\widehat{\theta}_n$, con $\epsilon \in (0, 1/3)$ que es una constantes dada.

El siguiente teorema brinda la fórmula para la longitud óptima de bloques para estimar tanto ϕ_{1n} como ϕ_{2n} .

TEOREMA 2.7. *Suponga que las condiciones del Teorema 2.3 y del Teorema 2.6 se cumplen y además $A_k \neq 0, g_k(0) \neq 0, k = 1, 2$. Así, para $k = 1, 2$ se cumple:*

$$\begin{aligned} \ell_{kj}^0 &\sim \left(3A_k^2 / \left[2\pi^2 g_k(0) \right] \right)^{1/3} \cdot n^{1/3}, j = 1, 2 \\ \ell_{kj}^0 &\sim \left(A_k^2 / \left[2\pi^2 g_k(0) + \pi \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{iw}) g_k(w) dw \right] \right)^{1/3} \cdot n^{1/3}, j = 3 \end{aligned}$$

Demostración.- De acuerdo a los resultados obtenidos en los teoremas previos y considerando que $\operatorname{MSE}(X) = \operatorname{Var}(X) + (\operatorname{Bias}(X))^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{MSE}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) &= \operatorname{Var}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) + \left(\operatorname{Bias}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) \right)^2 \\ \operatorname{MSE}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) &= 4\pi^2 g_1(0) 3^{-1} n^{-3} \ell + o(n^{-3} \ell) + \left(n^{-1} \ell^{-1} A_1 + o(n^{-1} \ell^{-1}) \right)^2, j = 1, 2 \\ \operatorname{MSE}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)) &= 2\pi \left[2\pi g_1(0) + \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{iw}) g_1(w) dw \right] n^{-3} \ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + o(n^{-3}\ell) + \left(n^{-1}\ell^{-1}A_1 + o(n^{-1}\ell^{-1})\right)^2, j = 3 \\
\text{MSE}(\widehat{\text{Var}}_j(\ell)) & = (2\pi)^2 g_2(0) 3^{-1} n^{-3} \ell + o(n^{-3}\ell) + \left(n^{-1}\ell^{-1}A_2 + o(n^{-1}\ell^{-1})\right)^2, j = 1, 2 \\
\text{MSE}(\widehat{\text{Var}}_j(\ell)) & = 2\pi \left[2\pi g_2(0) + \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{iw}) g_2(w) dw \right] n^{-3} \ell \\
& + o(n^{-3}\ell) + \left(n^{-1}\ell^{-1}A_2 + o(n^{-1}\ell^{-1})\right)^2, j = 3
\end{aligned}$$

Buscando la longitud óptima que permita la minimización del MSE se evidencia lo siguiente:

- Considerando la no negatividad de las funciones g_1 y g_2 , además de considerar los errores de orden $(n^{-3}\ell)$ y $(n^{-1}\ell^{-1})$ se obtiene que la optimización se reduce a la minimización de la función $c_1x + c_2x^2$ sobre $x > 0$ y con $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$.

Así por ejemplo, para el caso de $\text{MSE}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)), j = 1, 2$, se minimizaría la función $c_1x + c_2x^2$ tal que $c_1 = 4\pi^2 g_1(0) 3^{-1} n^{-3}$, $c_2 = n^{-2} A_1^2$.

- Las diferencias entre $\text{MSE}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell))$ y $\text{MSE}(\widehat{\text{Var}}_j(\ell))$ se dan a partir de la definición de funciones g_1, g_2 y de los resultados A_1, A_2 por lo cual se pueden escribir los resultados de ℓ_{kj}^0 para el caso de $k = 1, 2$ con variaciones sobre k para señalar las diferencias en los términos citados previamente.
- Bajo el criterio de la derivada, se puede comprobar que nuestra función $c_1x + c_2x^2$ alcanza su mínimo en $(2c_2/c_1)^{1/3}$, con un valor de $c_1^{2/3} c_2^{1/3} 2^{1/3} + c_1^{2/3} c_2^{1/3} 2^{-2/3} = (3/\sqrt[3]{4}) c_1^{2/3} c_2^{1/3}$
- Así por ejemplo para el caso de $\text{MSE}(\widehat{\text{Bias}}_j(\ell)), j = 1, 2$ la longitud óptima será $\ell_{1j}^0 = [2(n^{-2} A_1^2) / (4\pi^2 g_1(0) 3^{-1} n^{-3})]^{1/3}, j = 1, 2$
 $\ell_{1j}^0 = [(3A_1^2) / (2\pi^2 g_1(0))]^{1/3} n^{-1/3}, j = 1, 2$
- De esta forma se obtienen los resultados esperados:

$$\begin{aligned}
\ell_{kj}^0 & \sim \left(3A_k^2 / [2\pi^2 g_k(0)]\right)^{1/3} \cdot n^{1/3}, j = 1, 2 \\
\ell_{kj}^0 & \sim \left(A_k^2 / \left[2\pi^2 g_k(0) + \pi \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{iw}) g_k(w) dw\right]\right)^{1/3} \cdot n^{1/3}, j = 3
\end{aligned}$$

■

2.2.8.3. Análisis de la varianza de los estimadores Bootstrap por los métodos: MBB, CBB y SB

Para lo referente a esta y las siguientes secciones definimos a partir de un proceso de serie de tiempo estacionario $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de n observaciones. Sea $U_i = (X_i + \dots + X_{i+\ell-1})/\ell$ que sería la media del bloque $(X_i, \dots, X_{i+\ell-1})$, $i \geq 1$ asociado al método MBB. Considerando $\mu = E(X_1)$.

Sea $U_i^{(2)} = (Y_{n,i} + \dots + Y_{n,(i+\ell-1)})/\ell$, $i \geq 1$ la media de los bloques asociados al método CBB. Considerando el parámetro $T_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ se obtienen los estimadores Bootstrap: $T_n^{*(j)} \equiv \sqrt{n_1}(\bar{X}_n^{*(j)} - E_* \bar{X}_n^{*(j)})$, $j = 1, 2$ y $T_n^{*(j)} = \sqrt{n}(\bar{X}_n^{*(j)} - \bar{X}_n)$ cuando $j = 3$.

Además definimos $U_{li} = \sqrt{\ell}U_i$. De esta forma $\text{Var}(T_n) = E T_n T_n'$

En primera instancia se encontrará el valor de $\text{Var}_*(T_n^{*(j)})$ para $j = 1, 2, 3$ correspondientes a los métodos MBB, CBB y SB respectivamente, esto ya que más adelante se demostrará la consistencia de esta varianza.

Haciendo uso de las propiedades de la Varianza, así como de la independencia de los bloques del método MBB se obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_*(T_n^{*(1)}) &= \text{Var}_*\left(\sqrt{n_1}\left(\bar{X}_n^{*(j)} - E_* \bar{X}_n^{*(j)}\right)\right) \\
&= n_1 \text{Var}_*\left(\bar{X}_n^{*(j)} - \hat{\mu}^*\right) \\
&= n_1 \text{Var}_*\left(\bar{X}_n^{*(j)}\right) \\
&= n_1 \text{Var}_*\left(n_1^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{*(1)}\right) \\
&= n_1 \text{Var}_*\left((kl)^{-1} \sum_{i=1}^k X_{1+\ell(i-1)}^{*(1)} + \dots + X_{i\ell}^{*(1)}\right) \\
&= n_1^{-1} * k * \text{Var}(X_1^* + \dots + X_\ell^*) \\
&= \ell^{-1} * E_* \left(((X_1^* + \dots + X_\ell^*) - E_*(X_1^* + \dots + X_\ell^*))^2 \right) \\
&= \ell^{-1} * \{E_* \left((X_1^* + \dots + X_\ell^*)^2 \right) - [E_*(X_1^* + \dots + X_\ell^*)]^2\} \\
&= \ell^{-1} * \left\{ (n - \ell - 1)^{-1} * \sum_{i=1}^{n-\ell+1} (X_i + \dots + X_{i+\ell-1})^2 - \right. \\
&\quad \left. \left[(n - \ell + 1)^{-1} * \sum_{i=1}^{n-\ell+1} (X_i + \dots + X_{i+\ell+1}) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ell^{-1} \left\{ \frac{\ell^2}{n-\ell+1} \sum_{i=1}^{n-\ell+1} U_i U_i' - \left(\frac{\ell}{n-\ell+1} \right)^2 \left[\sum_{i=1}^{n-\ell+1} U_i \right]^2 \right\} \\
&= \frac{\ell}{N} \sum_{i=1}^N U_i U_i' - \ell \widehat{\mu}_n \widehat{\mu}_n'
\end{aligned}$$

Donde $\widehat{\mu}_n = \sum_{i=1}^N U_i / N$, $N = n - \ell + 1$ y $n_1 = k\ell$. ■

De forma similar para el método CBB se cumple:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_* \left(T_n^{*(2)} \right) &= n_1^{-1} * k * \text{Var} (X_1^* + \dots + X_\ell^*) \\
&= \ell^{-1} * \{ \mathbf{E}_* \left((X_1^* + \dots + X_\ell^*)^2 \right) - [\mathbf{E}_* (X_1^* + \dots + X_\ell^*)]^2 \} \\
&= \ell^{-1} * \left\{ (n)^{-1} * \sum_{i=1}^n (Y_{n,i} + \dots + Y_{n,i+\ell-1})^2 - \right. \\
&\quad \left. \left[(n)^{-1} * \sum_{i=1}^n (Y_{n,i} + \dots + Y_{n,i+\ell-1}) \right]^2 \right\} \\
&= \ell^{-1} \left\{ \frac{\ell^2}{n} \sum_{i=1}^n U_i^{(2)} U_i^{(2)'} - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \left[\ell \sum_{i=1}^n X_i \right]^2 \right\} \\
&= \frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^n U_i^{(2)} U_i^{(2)'} - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right]^2 \\
&= \frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^n U_i^{(2)} U_i^{(2)'} - \bar{X}_n \bar{X}_n'
\end{aligned}$$

La siguiente proposición nos permite obtener el resultado de $\text{Var}_* \left(T_n^{*(j)} \right)$ correspondiente al método SB. ■

PROPOSICIÓN 2.1. Sea $\widehat{\Gamma}_n(k) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i X_{i+k}' - \bar{X}_n \bar{X}_n'$, $0 \leq k < n$, $q = 1 - p$, $q_{n0} = 1/2$ y $q_{nk} = (1 - n^{-1}k)q^k + (n^{-1}k)q^{n-k}$, $1 \leq k < n$. Si $0 < p < 1$, entonces:

$$\text{Var}_* \left(T_n^{*(3)} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} q_{nk} \left(\widehat{\Gamma}_n(k) + \widehat{\Gamma}_n(k)' \right) + \bar{X}_n \bar{X}_n' (q^k)$$

Demostración: Acorde a lo mencionado en la descripción del método se cumple: L_i , $1 \leq i \leq k$ son las longitudes del bloque i del método SB; estos siguen una distribución Geométrica de parámetro p , donde $k = \inf \{ i \geq 1 : L_1 + \dots + L_i \geq n \}$.

De esta forma X_1^* y X_{1+k}^* , $k \geq 1$, son parte del mismo bloque cuando se cumple $1 + k \leq L_1$. Consideremos $\mathcal{T}_n = \sigma(\mathcal{X}_n, L_1, \dots, L_n)$ la σ -álgebra generada por las n observaciones de la serie \mathcal{X}_n y por las variables de longitud de bloques L_i , $1 \leq i \leq k$.

Entonces se cumple:

$$E_* \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \right) = E \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \mid \mathcal{X}_n \right)$$

Considerando la propiedad de la esperanza condicional $E(E(X \mid Y, Z) \mid Y) = E(X \mid Y)$.

$$E_* \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \right) = E \left\{ E \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \mid \mathcal{T}_n \right) \mid \mathcal{X}_n \right\}$$

Donde usando el teorema de la probabilidad total se obtiene:

$$\begin{aligned} E \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \mid \mathcal{T}_n \right) &= E \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \mid \mathcal{T}_n, \mathbb{1}(1+k \leq L_1) \right) E \left(\mathbb{1}(1+k \leq L_1) \right) \\ &\quad + E \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \mid \mathcal{T}_n, \mathbb{1}(1+k > L_1) \right) E \left(\mathbb{1}(1+k > L_1) \right) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{n,i} Y'_{n,i+k} E \left(\mathbb{1}(1+k \leq L_1) \right) \\ &\quad + n^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_{n,i} Y'_{n,j} E \left(\mathbb{1}(1+k > L_1) \right) \end{aligned}$$

Con lo cual se cumple:

$$\begin{aligned} E_* \left(X_1^* X_{1+k}^{*'} \right) &= E \left\{ \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{n,i} Y'_{n,i+k} \right) \mathbb{1}(1+k \leq L_1) \mid \mathcal{X}_n \right\} \\ &\quad + E \left\{ \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{n,i} \right) \left(n^{-1} \sum_{j=1}^n Y'_{n,j} \right) \mathbb{1}(k \geq L_1) \mid \mathcal{X}_n \right\} \\ &= \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{n,i} Y'_{n,i+k} \right) E \left(\mathbb{1}(k < L_1) \mid \mathcal{X}_n \right) \\ &\quad + \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{n,i} \right) \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n Y'_{n,i} \right) E \left(\mathbb{1}(k \geq L_1) \mid \mathcal{X}_n \right) \\ &= n^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} X_i X'_{i+k} + \sum_{i=n-k+1}^n X_i X'_{i+k-n} \right\} \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} p(1-p)^i \right) \\ &\quad + \left(\bar{X}_n \bar{X}'_n \right) \left(\sum_{i=0}^{k-1} p(1-p)^i \right) \\ &= n^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} X_i X'_{i+k} + \sum_{i=n-k+1}^n X_i X'_{i+k-n} \right\} \left(1 - \left(p \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \right) \right) \\ &\quad + \left(\bar{X}_n \bar{X}'_n \right) \left(p \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \right) \\ &= n^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} X_i X'_{i+k} + \sum_{i=n-k+1}^n X_i X'_{i+k-n} \right\} q^k \\ &\quad + \left(\bar{X}_n \bar{X}'_n \right) (1 - q^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i X'_{i+k} + n^{-1} \sum_{i=n-k+1}^n X_i X'_{i+k-n} - \left(\bar{X}_n \bar{X}'_n \right) \right\} q^k \\
&+ \left(\bar{X}_n \bar{X}'_n \right) \\
&= \left\{ \hat{\Gamma}_n(k) + \hat{\Gamma}_n(n-k) \right\} q^k + \left(\bar{X}_n \bar{X}'_n \right) (1 + q^k)
\end{aligned}$$

Considerando que $E_* \left(\bar{X}_n^{*(3)} \right) = \bar{X}_n$ entonces se cumple:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_* \left(T_n^{*(3)} \right) &= E \left(T_n^{*(3)} T_n^{*(3)'} \right) \\
&= E_* \left[\left(\sqrt{n} (\bar{X}_n^{*(3)} - \bar{X}_n) \right) \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n^{*(3)} - \bar{X}_n) \right)' \right] \\
&= E_* \left\{ n \left[\bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}_n^{*(3)'} - \bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}'_n - \bar{X}_n \bar{X}_n^{*(3)'} + \bar{X}_n \bar{X}'_n \right] \right\} \\
&= n \left\{ E_* \left[\bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}_n^{*(3)'} \right] - E_* \left[\bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}'_n \right] - E_* \left[\bar{X}_n \bar{X}_n^{*(3)'} \right] + E_* \left[\bar{X}_n \bar{X}'_n \right] \right\} \\
&= n \left\{ E_* \left[\bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}_n^{*(3)'} \right] - 2 \bar{X}_n \bar{X}'_n + \bar{X}_n \bar{X}'_n \right\} \\
&= n \left\{ E_* \left[\bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}_n^{*(3)'} \right] - \bar{X}_n \bar{X}'_n \right\}
\end{aligned}$$

Respecto al primer término se obtiene utilizando la estacionariedad del proceso:

$$\begin{aligned}
E_* \left[\bar{X}_n^{*(3)} \bar{X}_n^{*(3)'} \right] &= \frac{1}{n^2} E_* \left[\sum_{i=1}^n X_i^{*(3)} \sum_{j=1}^n X_j^{*(3)'} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} E_* \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i^{*(3)} X_j^{*(3)'} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} E_* \left[\sum_{i=1}^n X_i^{*(3)} X_i^{*(3)'} + \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n X_i^{*(3)} X_j^{*(3)'} + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n X_i^{*(3)} X_j^{*(3)'} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n E_* \left(X_i^{*(3)} X_i^{*(3)'} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n E_* \left(X_i^{*(3)} X_j^{*(3)'} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n E_* \left(X_i^{*(3)} X_j^{*(3)'} \right) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[n E_* \left(X_1^{*(3)} X_1^{*(3)'} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n E_* \left(X_i^{*(3)} X_j^{*(3)'} \right) + E_* \left(X_j^{*(3)} X_i^{*(3)'} \right) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[n E_* \left(X_1^{*(3)} X_1^{*(3)'} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right) + \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right)' \right) \right) \Big] \\
& = \left[n^{-1} \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_1^{*(3)'} \right) \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (n^{-1} - in^{-2}) \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right) + \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right)' \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Con lo cual se cumple:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_* \left(T_n^{*(3)} \right) & = \left\{ \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_1^{*(3)'} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right) + \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right)' \right) \right. \\
& \quad \left. - n \bar{X}_n \bar{X}_n' \right\} \\
& = \left\{ \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_1^{*(3)'} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right) + \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right)' \right) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=1}^{n-1} 2(1 - in^{-1}) \bar{X}_n \bar{X}_n' - \bar{X}_n \bar{X}_n' \right\} \\
& = \left\{ \left[\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_1^{*(3)'} \right) - \bar{X}_n \bar{X}_n' \right] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right) + \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right)' - 2 \bar{X}_n \bar{X}_n' \right) \right\} \\
& = \left[\left\{ \hat{\Gamma}_n(0) + \hat{\Gamma}_n(n)' \right\} q^0 + \bar{X}_n \bar{X}_n' (1 + q^0) - \bar{X}_n \bar{X}_n' \right] \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) \left(\mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right) + \mathbf{E}_* \left(X_1^{*(3)} X_{1+i}^{*(3)'} \right)' - 2 \bar{X}_n \bar{X}_n' \right) \\
& = \left[\left\{ \hat{\Gamma}_n(0) + \hat{\Gamma}_n(n)' \right\} q^0 + \bar{X}_n \bar{X}_n' (q^0) \right] \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) \left\{ \left[\hat{\Gamma}_n(i) + \hat{\Gamma}_n(n-i)' + \hat{\Gamma}_n(i)' + \hat{\Gamma}_n(n-i) \right] q^i + \bar{X}_n \bar{X}_n' (q^i) \right\} \\
& = \left[\left\{ \hat{\Gamma}_n(0) + \hat{\Gamma}_n(n)' \right\} + \bar{X}_n \bar{X}_n' \right] \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) \left\{ \left[\hat{\Gamma}_n(i) + \hat{\Gamma}_n(i)' + \hat{\Gamma}_n(n-i)' + \hat{\Gamma}_n(n-i) \right] q^i + \bar{X}_n \bar{X}_n' (q^i) \right\}
\end{aligned}$$

Considerando lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} (1 - in^{-1}) q^i \left\{ \hat{\Gamma}_n(n-i)' + \hat{\Gamma}_n(n-i) \right\} \\
& = \sum_{j=1}^{n-1} (jn^{-1} q^{n-j}) \left\{ \hat{\Gamma}_n(j)' + \hat{\Gamma}_n(j) \right\}
\end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Var}_* \left(T_n^{*(3)} \right) &= \left[\left\{ \widehat{\Gamma}_n(0) + \widehat{\Gamma}_n(n)' \right\} + \overline{X}_n \overline{X}'_n \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (1 - in^{-1}) q^i \left[\widehat{\Gamma}_n(i) + \widehat{\Gamma}_n(i)' \right] + (in^{-1} q^{n-i}) \left[\widehat{\Gamma}_n(i)' + \widehat{\Gamma}_n(i) \right] \right. \\
&+ \left. \overline{X}_n \overline{X}'_n(q^i) \right\} \\
&= \left[\left\{ \widehat{\Gamma}_n(0) + \widehat{\Gamma}_n(n)' \right\} + \overline{X}_n \overline{X}'_n \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} q_n k \left(\widehat{\Gamma}_n(i)' + \widehat{\Gamma}_n(i) \right) + \overline{X}_n \overline{X}'_n(q^i) \\
&= \widehat{\Gamma}_n(0) + \overline{X}_n \overline{X}'_n + \sum_{i=1}^{n-1} q_n k \left(\widehat{\Gamma}_n(i)' + \widehat{\Gamma}_n(i) \right) + \overline{X}_n \overline{X}'_n(q^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} q_n k \left(\widehat{\Gamma}_n(i)' + \widehat{\Gamma}_n(i) \right) + \overline{X}_n \overline{X}'_n(q^i)
\end{aligned}$$

La última línea procede del hecho que $\widehat{\Gamma}_n(0)' = \widehat{\Gamma}_n(0)$, con esto queda demostrado el resultado esperado. ■

El siguiente teorema demuestra la consistencia de la Varianza del estimador Bootstrap para el caso del método MBB y CBB.

TEOREMA 2.8. *Suponga que existe un $\delta > 0$ tal que $E \|X_1\|^{2+\delta} < \infty$ y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\delta/2+\delta} < \infty$. Si, adicionalmente, se cumple $\ell^{-1} + n^{-1}\ell = o(1)$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde ℓ es la longitud de los bloques, entonces se cumple para el método MBB ($j = 1$) y CBB ($j = 2$):*

$$\text{Var}_* \left(T_n^{*(j)} \right) \xrightarrow{p} \Sigma_{\infty} \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Demostración: Para la demostración respectiva se hará uso del siguiente lema:

LEMA 2.9. *Sea $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un función Borel medible y sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de vectores aleatorios con coeficiente misto fuerte $\alpha(\cdot)$. Sea $\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}$ y $\zeta_{2+\delta, n} = \max \left\{ \left(E \left| f(\sqrt{\ell} U_i) \right|^{2+\delta} \right)^{1/(2+\delta)} : 1 \leq i \leq N \right\}, \delta > 0$. Sea $\{w_{in} : i \geq 1, n \geq 1\} \subset [-1, 1]$ una colección de números reales. Entonces, existen constantes*

$C_1, C_2, C_3(\delta)$ y $C_4(\delta)$ tal que para todo $1 < \ell < n/2$ y todo $n > 2$:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^N w_{inf}(\sqrt{\ell} U_i) \right) \leq \min \left\{ C_1 \|f\|_{\infty}^2 n \ell \left[1 + \sum_{1 \leq k \leq n/\ell} \alpha(k\ell) \right], \right. \\ \left. C_3(\delta) \zeta_{2+\delta, n}^2 n \ell \left[1 + \sum_{1 \leq k \leq n/\ell} \alpha(k\ell)^{\delta/(2+\delta)} \right] \right\} \quad (2.32)$$

Se asumirá $\mu = E(X_1) = 0$. Empezaremos por el método MBB:

Se define $U_i^* = (X_{(\ell-1)i+1}^* + \dots + X_{li}^*) / \ell$ que es la media del i -ésimo bloque a partir del método MBB.

Recordemos que de lo previamente realizado:

$$\text{Var}_* \left(T_n^{*(1)} \right) = \frac{\ell}{N} \sum_{i=1}^N U_i U_i' - \ell \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n' \quad (2.33)$$

Lo primero que se realizará es encontrar el orden de $E(\ell \|\hat{\mu}_n \hat{\mu}_n' \|\|)$ es decir analizar el último término de (2.33).

Ahora supongamos $d = 1$ entonces se cumple:

$$E \left[\ell \hat{\mu}_n^2 \right] = E \left(\frac{\ell}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N U_i \right)^2 \right) = E \left(\frac{\ell}{N^2 \ell^2} \left(\sum_{i=1}^N X_i + \dots + X_{i+\ell-1} \right)^2 \right) \\ = E \left(\frac{1}{N^2 \ell} \left(\sum_{i=1}^N X_i + \dots + X_{i+\ell-1} \right)^2 \right)$$

Considerando una aplicación de la desigualdad de Cauchy–Schwarz sobre el espacio \mathbb{R}^n se cumple: $(\sum_{i=1}^n u_i v_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n u_i^2) (\sum_{i=1}^n v_i^2)$ y con esto se obtiene:

$$E \left[\ell \hat{\mu}_n^2 \right] \leq E \left(\frac{N}{N^2 \ell} \sum_{i=1}^N (X_i + \dots + X_{i+\ell-1})^2 \right) \\ = \frac{1}{N \ell} \sum_{i=1}^N E \left((X_i + \dots + X_{i+\ell-1})^2 \right) \\ = \frac{N}{N \ell} E \left((X_i + \dots + X_{i+\ell-1})^2 \right) \\ = \frac{1}{\ell} E \left(\sum_{i=1}^{\ell} X_i \right)^2 \\ = \frac{1}{\ell} \left(E \left[\sum_{i=1}^{\ell} (X_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j>i}^{\ell} X_i X_j \right] \right)$$

$$= \frac{1}{\ell} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E} \left(X_i^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j>i}^{\ell} \mathbb{E} (X_i X_j) \right)$$

Considerando que la sucesión $\{X_i\}$ es estacionaria y los índices se definen sobre el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} se cumple: $\mathbb{E} | X_1 X_{1+k} | = \mathbb{E} | X_1 X_{-k+1} |$ y además haciendo uso de las propiedades del valor absoluto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ell \hat{\mu}_n^2 \right] &\leq \frac{1}{\ell} \left(\ell \left| \mathbb{E} \left(X_1^2 \right) \right| + 2 \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j>i}^{\ell} \left| \mathbb{E} (X_i X_j) \right| \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \left(\sum_{i=1-\ell}^{\ell-1} (\ell - |i|) \left| \mathbb{E} (X_1 X_{1+i}) \right| \right) \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Jensen sobre la función de valor absoluto que es convexa, haciendo uso de la propiedad (2.24) con $r = \frac{2+\delta}{\delta}$, $p = q = 2 + \delta$ entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ell \hat{\mu}_n^2 \right] &\leq \frac{1}{\ell} \left(\sum_{i=1-\ell}^{\ell-1} (\ell - |i|) \mathbb{E} (|X_1 X_{1+i}|) \right) \\ &= \frac{1}{\ell} \left(\ell \mathbb{E} \left(X_1^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - |i|) \mathbb{E} (|X_1 X_{1+i}|) \right) \\ &\leq \frac{1}{\ell} \left(\ell \mathbb{E} \left(X_1^2 \right) + 2 \left[\sum_{i=1}^{\ell-1} 8 (\ell - |i|) [\alpha(\sigma\langle\{X_1\}\rangle, \sigma\langle\{X_{1+i}\}\rangle)]^{1/r} \|X_1\|_p \|X_{1+i}\|_q \right] \right) \\ &\leq \frac{1}{\ell} \left(\ell \mathbb{E} \left(X_1^2 \right) + 16 \ell \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha(i)^{\delta/(2+\delta)} \left(\mathbb{E} |X_1|^{2+\delta} \right)^{2/(2+\delta)} \right) \\ &= \left(\mathbb{E} \left(X_1^2 \right) + 16 \sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha(i)^{\delta/(2+\delta)} \left(\mathbb{E} |X_1|^{2+\delta} \right)^{2/(2+\delta)} \right) = O(1) \end{aligned}$$

Las últimas desigualdades se dan considerando $\alpha(\cdot) \geq 0$.

Ahora si consideramos $d > 1$ se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \hat{\mu}_n - \bar{X}_n \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| N^{-1} \sum_{i=1}^N U_i - \bar{X}_n \right\|^2 \\ &= \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i + \dots + X_{i+\ell-1} - \bar{X}_n \right\|^2 \\ &= \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i + \dots + X_{i+\ell-1} - \bar{X}_n - \left(\frac{1-\ell}{N} \right) \bar{X}_n + \left(\frac{1-\ell}{N} \right) \bar{X}_n \right\|^2 \\ &= \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i + \dots + X_{i+\ell-1} - \left(\frac{1-\ell}{N} \right) \bar{X}_n + \left(\frac{1-\ell-N}{N} \right) \bar{X}_n \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i + \cdots + X_{i+\ell-1} - \left(\frac{1-\ell}{N}\right) \bar{X}_n - \left(\frac{n}{N}\right) \bar{X}_n \right\|^2 \\
&= \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i + \cdots + X_{i+\ell-1} - \left(\frac{1-\ell}{N}\right) \bar{X}_n - \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^n X_i \right\|^2 \\
&= \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i + \cdots + X_{i+\ell-1} - \left(\frac{1-\ell}{N}\right) \bar{X}_n - \left(\frac{1}{N\ell}\right) \ell \sum_{i=1}^n X_i \right\|^2
\end{aligned}$$

Considerando que $\sum_{i=1}^N X_i + \cdots + X_{i+\ell-1} = \ell \sum_{i=\ell}^{n-\ell+1} X_i + \sum_{j=1}^{\ell-1} j (X_j + X_{n-j+1})$.

Por lo cual:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N X_i + \cdots + X_{i+\ell-1} - \ell \sum_{i=1}^n X_i &= \sum_{j=1}^{\ell-1} j (X_j + X_{n-j+1}) - \ell \sum_{i=1}^{\ell-1} X_i + X_{n-i+1} \\
&= - \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - j) (X_i + X_{n-i+1})
\end{aligned}$$

De esta forma haciendo uso de las propiedades de la norma:

$$\begin{aligned}
n \mathbb{E} \|\hat{\mu}_n - \bar{X}_n\|^2 &= n \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - j) (X_i + X_{n-i+1}) + \left(\frac{1-\ell}{N}\right) \bar{X}_n \right\|^2 \\
&= n \mathbb{E} \left\| (N\ell)^{-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} (\ell - j) (X_i + X_{n-i+1}) + \left(1 - \frac{n}{N}\right) \bar{X}_n \right\|^2 \\
&\leq n \mathbb{E} \left\{ \left| (N\ell)^{-1} \right| \sum_{i=1}^{\ell-1} \|(\ell - i) (X_i + X_{n-i+1})\| + \left| 1 - \frac{n}{N} \right| \|\bar{X}_n\| \right\}^2
\end{aligned}$$

Usando las propiedades: $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $|1 - \frac{n}{N}| = \left| \frac{\ell-1}{N} \right| \leq \left| \frac{\ell}{N} \right|$ la desigualdad triangular de la norma y la estacionariedad de la serie se obtiene:

$$\begin{aligned}
n \mathbb{E} \|\hat{\mu}_n - \bar{X}_n\|^2 &= n \mathbb{E} \left\{ \left| (N\ell)^{-1} \right| \sum_{i=1}^{\ell} \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell}\right) (X_i) \right\| + \left| (N\ell)^{-1} \right| \sum_{i=1}^{\ell} \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell}\right) (X_{n-i+1}) \right\| \right. \\
&\quad \left. + \left| 1 - \frac{n}{N} \right| \|\bar{X}_n\| \right\}^2 \\
&\leq 2n \mathbb{E} \left[2 \left\{ \left| (N\ell)^{-1} \right| \sum_{i=1}^{\ell} \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell}\right) (X_i) \right\| \right\}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \left| (N\ell)^{-1} \right| \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell}\right) (X_{n-i+1}) \right\| \right\}^2 + \left\{ \left| 1 - \frac{n}{N} \right| \|\bar{X}_n\| \right\}^2 \right] \\
&\leq 2n \left[\left| 2(N\ell)^{-2} \right| \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \ell \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell}\right) (X_i) \right\|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \left| 2(N)^{-2} \right| \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \ell \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell} \right) (X_{n-i+1}) \right\|^2 \right) + \left| \frac{\ell}{N} \right|^2 \mathbb{E} \|\bar{X}_n\|^2 \Big]$$

Por otro lado considerando que la serie es estacionaria se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E} \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell} \right) (X_{n-i+1}) \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E} \left\| \left(\frac{\ell-i}{\ell} \right) (X_{\ell-i}) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{E} \left\| \left(\frac{i}{\ell} \right) (X_i) \right\|^2 \end{aligned}$$

Además si definimos $W_{in} = \frac{i}{\ell}$, $2 \leq i \leq \ell$ y $W_{\ell n} = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell-1} \ell \mathbb{E} \left\| \left(\frac{i}{\ell} \right) (X_i) \right\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{\ell} \ell (W_{in})^2 \mathbb{E} \|(X_1)\|^2 \\ &= \ell \mathbb{E} \|(X_1)\|^2 \sum_{i=1}^{\ell} (W_{in})^2 \\ &= (2\ell^2 + 3\ell + 1) \mathbb{E} \|(X_1)\|^2 \\ &= O(\ell^2) \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\sqrt{n}\bar{X}_n\|^2 &= n^{-1} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^2 \\ &\leq n^{-1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \|X_i\| \right)^2 \\ &\leq n^{-1} n \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \|X_i\|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|X_i\|^2 \right) = O(1) \end{aligned}$$

De lo obtenido y considerando $\mathbb{E} \|\bar{X}_n\|^2 = O(1)$ se obtiene:

$$n \mathbb{E} \|\hat{\mu}_n - \bar{X}_n\|^2 = 2O(\ell/n) + O(\ell/n)^2 = O(\ell/n) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Por propiedades de la norma y utilizando la propiedad $\|uu^T\| \leq \|u\|^2$ tal que $u \in$

\mathbb{R}^d con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \ell \|\hat{\mu}_n \hat{\mu}'_n\| \} &\leq \ell \mathbb{E} \|\hat{\mu}_n\|^2 \\ &\leq \ell \cdot \left\{ 2 \mathbb{E} \|\bar{X}_n\|^2 + 2 \mathbb{E} \|\bar{X}_n - \hat{\mu}_n\|^2 \right\} \\ &= O(\ell/n) \end{aligned} \quad (2.34)$$

De esta forma faltaría demostrar:

$$\ell N^{-1} \sum_{i=1}^N U_i U'_i \longrightarrow_p \Sigma_\infty \quad (2.35)$$

Para esto notemos $V_{in} = \ell U_i U'_i \mathbf{1} \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right)$ y $R_{in} = \sqrt{\ell} U_i \sqrt{\ell} U'_i - V_{in}$, $1 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [V_{in}] &= \mathbb{E} \left[\ell U_i U'_i \mathbf{1} \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right) \right] \\ &= \ell U_i U'_i P \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right) \leq \ell U_i U'_i \end{aligned}$$

Usando este resultado se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| N^{-1} \sum_{i=1}^N (V_{in} - \mathbb{E} (V_{in})) \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\| N^{-1} \sum_{i=1}^N \ell U_i U'_i \left[\mathbf{1} \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - P \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right) \right] \right\|^2 \end{aligned}$$

Si definimos $w_i = \mathbf{1} \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right) - P \left(\|\sqrt{\ell} U_i\| < (n/\ell)^{1/8} \right)$ entonces se puede hacer uso del lema (2,9) ya que $|w_i| \leq 1$, $1 \leq i \leq N$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| N^{-1} \sum_{i=1}^N (V_{in} - \mathbb{E} (V_{in})) \right\|^2 &= N^{-2} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^N w_i \ell U_i U'_i \right\|^2 \\ &\leq N^{-2} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N |w_i| \|\ell U_i U'_i\| \right]^2 \\ &\leq N^{-2} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N |w_i| \|\sqrt{\ell} U_i\|^2 \right]^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{N} \right)^2 C(d) \left(\left((n/\ell)^{1/8} \right)^2 \right)^2 n \ell \left[1 + \sum_{1 \leq k \leq n/\ell} \alpha(k \ell) \right] \\ &= \left(\frac{1}{N} \right)^2 C(d) n^{3/2} \ell^{1/2} \left[1 + \sum_{1 \leq k \leq n/\ell} \alpha(k \ell) \right] \\ &\leq C(d) (\ell/n)^{1/2} \left[1 + \sum_{k \geq 1} \alpha(k) \right] = o(1) \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis se puede aplicar el literal 2 del teorema (2,11). Con lo cual se cumple $\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_\infty)$ ya que se supuso $\mu = 0$.

Notemos $U_{11} = \sqrt{\ell}\bar{X}_\ell$, $T_n = \|U_{11}\|^2 \mathbf{1}(\|U_{11}\| > (n/\ell)^{1/8})$. De esta forma se cumple: $T_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, además $|T_n| \leq \|U_{11}\|^2, \forall n$. Además se cumple $\|\sqrt{\ell}\bar{X}_\ell\| \rightarrow \|\sqrt{n}\bar{X}_n\|$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo cual podemos usar el teorema general de convergencia dominada (2,2) ya que este último converge en distribución a una distribución normal estándar por lo visto en el párrafo precedente, de esta forma se cumple:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\|U_{11}\|^2 \mathbf{1}(\|U_{11}\| > (n/\ell)^{1/8}) \right] &= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_{11}\|^2 \mathbf{1}(\|U_{11}\| > (n/\ell)^{1/8}) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Por otro lado se cumple:

$$\begin{aligned} \|EV_{in} - \Sigma_\infty\| &= \|E[V_{in} - \ell U_i U_i' + \ell U_i U_i'] - \Sigma_\infty\| \\ &= \|E[\ell U_i U_i' (\mathbf{1}(\|U_i\| < (n/\ell)^{1/8}) - 1) + \ell U_i U_i'] - \Sigma_\infty\| \\ &= \|E[\ell U_i U_i' (\mathbf{1}(\|U_i\| > (n/\ell)^{1/8})]\| + \|E(\ell U_i U_i') - \Sigma_\infty\| \\ &\leq \|E[\ell U_i U_i' \mathbf{1}(\|U_i\| > (n/\ell)^{1/8})]\| + \|E(\ell U_i U_i') - \Sigma_\infty\| \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Jensen se obtiene:

$$\|EV_{in} - \Sigma_\infty\| \leq E \left\| \left[\ell U_i U_i' \mathbf{1}(\|U_i\| > (n/\ell)^{1/8}) \right] \right\| + \|E(\ell U_i U_i') - \Sigma_\infty\|$$

Por la propiedad submultiplicativa de la norma se obtiene:

$$\|EV_{in} - \Sigma_\infty\| \leq E \|U_i\|^2 \mathbf{1}(\|U_i\| > (n/\ell)^{1/8}) + \|E(\ell U_i U_i') - \Sigma_\infty\|$$

Además se cumple:

$$\begin{aligned} \|E(\ell U_i U_i') - \Sigma_\infty\| &= \|E(\ell U_1 U_1') - \Sigma_\infty\| \\ &= \|E(\ell \bar{X}_\ell \bar{X}_\ell') - \Sigma_\infty\| \\ &\rightarrow \|E(n \bar{X}_n \bar{X}_n') - \Sigma_\infty\| \\ &\rightarrow \|\Sigma_\infty - \Sigma_\infty\| = 0 \end{aligned}$$

De (2,36) y la última desigualdad se obtiene:

$$\|E V_{in} - \Sigma_\infty\| \leq o(1) \tag{2.37}$$

Finalmente se demostrará (2,35), sea $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \ell N^{-1} \sum_{i=1}^N U_i U_i' - \Sigma_\infty \right\| > 3\epsilon \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| N^{-1} \sum_{i=1}^N \ell U_i U_i' - \Sigma_\infty - \mathbb{E} V_{in} + \mathbb{E} V_{in} + V_{in} - V_{in} \right\| > 3\epsilon \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (\ell U_i U_i' - V_{in}) + \sum_{i=1}^N N^{-1} (\mathbb{E} V_{in} - \Sigma_\infty) + \sum_{i=1}^N N^{-1} (V_{in} - \mathbb{E} V_{in}) \right\| \right. \\
&\quad \left. > 3\epsilon \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (R_{in}) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (\mathbb{E} V_{in} - \Sigma_\infty) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (V_{in} - \mathbb{E} V_{in}) \right\| \right. \\
&\quad \left. > 3\epsilon \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (R_{in}) \right\| + N^{-1} \sum_{i=1}^N \|\mathbb{E} V_{in} - \Sigma_\infty\| + \left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (V_{in} - \mathbb{E} V_{in}) \right\| > 3\epsilon \right)
\end{aligned}$$

Por el resultado previo (2,37) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \ell N^{-1} \sum_{i=1}^N U_i U_i' - \Sigma_\infty \right\| > 3\epsilon \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (R_{in}) \right\| > \epsilon \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(N^{-1} \sum_{i=1}^N \|\mathbb{E} V_{in} - \Sigma_\infty\| > \epsilon \right) \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (V_{in} - \mathbb{E} V_{in}) \right\| > \epsilon \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (R_{in}) \right\| > \epsilon \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \sum_{i=1}^N N^{-1} (V_{in} - \mathbb{E} V_{in}) \right\| > \epsilon \right)
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Chebyshev y los resultados previos obtenidos, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\| \ell N^{-1} \sum_{i=1}^N U_i U_i' - \Sigma_\infty \right\| > 3\epsilon \right) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^{-1} \mathbb{E} \|R_{1n}\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^{-2} \mathbb{E} \left\| N^{-1} \sum_{i=1}^N (V_{in} - \mathbb{E} V_{in}) \right\|^2 \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^{-1} \mathbb{E} \|U_1\|^2 \mathbf{1} \left(\|U_1\| > (n/\ell)^{1/8} \right) + o(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De esta forma queda demostrado el teorema para el método MBB. Ahora para el método CBB demostraremos que $\text{Var}_* \left(T_n^{*(2)} \right) - \text{Var}_* \left(T_n^* \right) = o_p(1)$.

Usando la desigualdad de Cauchy Schwarz se cumple $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$, con este resultado obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\|X_1 + \dots + X_m\|^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\left\| \left(X_1^1, \dots, X_1^d \right) + \dots + \left(X_m^1, \dots, X_m^d \right) \right\|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left\| \left(X_1^1 + \dots + X_m^1, \dots, X_1^d + \dots + X_m^d \right) \right\|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left(X_1^1 + \dots + X_m^1 \right)^2 + \dots + \left(X_1^d + \dots + X_m^d \right)^2 \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(m \sum_{i=1}^m (X_i^1)^2 + \dots + m \sum_{i=1}^m (X_i^d)^2 \right) \\
&= mC_1 ; \text{ donde } C_1 \text{ es una constante mayor a } 0
\end{aligned}$$

Recordemos previamente se obtuvo

$$\text{Var}_* \left(T_n^{*(2)} \right) = \frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^n U_i^{(2)} U_i^{(2)'} - \bar{X}_n \bar{X}_n' \quad (2.38)$$

Usando estos últimos resultados y considerando que $U_i = U_i^{(2)}$, para $1 \leq i \leq N$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left\| \left(\ell N^{-1} \sum_{i=1}^N U_i U_i' \right) - \left(\ell n^{-1} \sum_{i=1}^n U_i^{(2)} U_i^{(2)'} \right) \right\| \\
&= \mathbb{E} \left\| \left((\ell N^{-1} - \ell n^{-1}) \sum_{i=1}^N U_i U_i' \right) - \left((\ell n^{-1}) \sum_{i=N+1}^n U_i^{(2)} U_i^{(2)'} \right) \right\| \\
&\leq \mathbb{E} \left[\left(|\ell N^{-1} - \ell n^{-1}| \sum_{i=1}^N \|U_i U_i'\| \right) + \left(|\ell n^{-1}| \sum_{i=N+1}^n \|U_i^{(2)} U_i^{(2)'}\| \right) \right] \\
&\leq \left(\frac{\ell - 1}{Nn} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \|\sqrt{\ell} U_i\|^2 \right) + \left((n\ell)^{-1} \sum_{i=N+1}^n \mathbb{E} \|U_i^{(2)}\|^2 \right) \\
&\leq \left(\frac{\ell - 1}{Nn} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \|\sqrt{\ell} U_i\|^2 \right) + \left((n\ell)^{-1} \sum_{i=N+1}^n \mathbb{E} \|X_i + \dots + X_n + X_1 + \dots \right. \\
&\quad \left. + X_{\ell - (n-i+1)}\|^2 \right) \\
&\leq \left(\frac{\ell}{Nn} N \mathbb{E} \|\sqrt{\ell} U_1\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} \sum_{i=N+1}^n \mathbb{E} \|X_i + \dots + X_n\|^2 + \mathbb{E} \|X_1 + \dots \right. \\
&\quad \left. + X_{\ell - (n-i+1)}\|^2 \right) \\
&\leq \left(\frac{\ell}{n} \mathbb{E} \|\sqrt{\ell} \bar{X}_\ell\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} \sum_{i=N+1}^n \mathbb{E} \|X_i + \dots + X_n\|^2 + \mathbb{E} \|X_1 + \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + X_{\ell-(n-i+1)} \Big\| \Big\|^2 \Big) \\
& \leq \left(\frac{\ell}{n} \mathbb{E} \left\| \sqrt{\ell} \bar{X}_\ell \right\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} \sum_{i=1}^{\ell-1} 2 \mathbb{E} \|X_1 + \dots + X_i\|^2 \right) \\
& \leq \left(\frac{\ell}{n} \mathbb{E} \left\| \sqrt{\ell} \bar{X}_\ell \right\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} 2(\ell-1) \text{Max} \{ \mathbb{E} \|X_1 + \dots + X_i\|^2 : 1 \leq i \leq \ell-1 \} \right) \\
& \leq \left(\frac{\ell}{n} \mathbb{E} \left\| \sqrt{\ell} \bar{X}_\ell \right\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} 2(\ell) \text{Max} \{ \mathbb{E} \|X_1 + \dots + X_i\|^2 : 1 \leq i \leq \ell-1 \} \right) \\
& \leq \left(\frac{\ell}{n} \mathbb{E} \left\| \sqrt{\ell} \bar{X}_\ell \right\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} 2(\ell) \text{Max} \{ i C_i : 1 \leq i \leq \ell-1 \} \right) \\
& \leq \left(\frac{\ell}{n} \mathbb{E} \left\| \sqrt{\ell} \bar{X}_\ell \right\|^2 \right) + \left(2(n\ell)^{-1} 2(\ell) \text{Max} \{ \ell C_i : 1 \leq i \leq \ell-1 \} \right) \\
& = O((n^{-1}\ell))
\end{aligned}$$

Con esto se demuestra que $\text{Var}_* (T_n^{*(2)}) \rightarrow_p \text{Var}_* (T_n^*)$, considerando además los resultados previos $\mathbb{E} \{ \ell \|\hat{\mu}_n \hat{\mu}'_n\| \} \leq O(\ell/n)$, $\mathbb{E} \{ \ell \|\bar{X}_n \bar{X}'_n\| \} \leq O(\ell/n)$ por lo cual se obtiene $\ell \|\hat{\mu}_n \hat{\mu}'_n\| = O_p(\ell/n)$ y $\ell \|\bar{X}_n \bar{X}'_n\| = O_p(\ell/n)$.

De estos resultados y considerando (2,35) se demuestra que $\text{Var}_* (T_n^{*(2)}) \rightarrow_p \Sigma_\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ ■

El siguiente teorema demuestra la consistencia de la Varianza del estimador Bootstrap para el caso del método SB.

TEOREMA 2.10. *Supongo que $\mathbb{E} \|X_1\|^{4+\delta} < \infty$ y $\sum_{n=1}^\infty n^3 \alpha(n)^{\delta/(4+\delta)} < \infty$ para algún $\delta > 0$. Además, suponga que $p + (n^{1/2}p)^{-1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $p = \mathbb{E}[L_i]^{-1}$. Entonces se cumple:*

$$\text{Var}_* (T_n^{*(3)}) \rightarrow_p \Sigma_\infty \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Demostración.- Una demostración detallada de este teorema se puede encontrar en Lahiri, 2003. Se presentará a continuación un bosquejo de la demostración.

Sea $\tilde{\Gamma}_n(k) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i X'_{i+k}$, $0 \leq k < n$ y sea $\tilde{\Sigma}_n = \tilde{\Gamma}_n(0) + \sum_{k=1}^{n-1} q_{nk} (\tilde{\Gamma}_n(k) + \tilde{\Gamma}_n(k)')$ Así por lo demostrado en la proposición (2,1) se cumple:

$$\text{Var}_* (T_n^{*(3)}) = \tilde{\Sigma}_n - \bar{X}_n \bar{X}'_n \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2q_{nk} - q^k \right)$$

Consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} q_{ni} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - n^{-1}i\right) q^i + \left(n^{-1}i\right) q^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - n^{-1}i\right) q^i + \left(n^{-1}(n-i)\right) q^i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - n^{-1}i + n^{-1}(n-i)\right) q^i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - n^{-1}(i-n+i)\right) q^i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(2 - 2n^{-1}i\right) q^i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} 2q^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2q^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2q^i = \frac{2}{1-q} = 2p^{-1}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se cumple $p^{-1} \|\bar{X}_n\|^2 = o_p(1)$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir se cumple $p^{-1} \|\bar{X}_n\|^2 \rightarrow^p 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\epsilon > 0$ se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| p^{-1} \|\bar{X}_n\|^2 \right| > \epsilon \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| p^{-1} n^{-2} \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|^2 \right| > \epsilon \right) = 0$$

De esta forma se obtiene:

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2q_{nk} - q^k \leq 1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} q^k = 3 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 3p^{-1}$$

Gracias a estos resultados se cumple: $\left\| \bar{X}_n \bar{X}_n' \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2q_{nk} - q^k\right) \right\| = o_p(1)$ y por ello basta con demostrar que $\tilde{\Sigma}_n \rightarrow^p \Sigma_\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$

Para conseguir dicho resultado la demostración consiste en probar que tanto el sesgo como la varianza de los elementos de $\tilde{\Sigma}_n$ tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Para obtener dicho resultado se utilizan ciertas cotas derivadas de lemas específicos para el efecto.

Tan solo se demostrará a continuación que el sesgo de los elementos de $\tilde{\Sigma}_n$ tienden a cero, para un detalle de la demostración de la varianza se puede encontrar en Lahiri, 2003.

De esta forma denotemos $\hat{\sigma}_n(j; \alpha, \beta) \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^{n-j} X_i^\alpha X_{i+j}^\beta$, donde $0 \leq j \leq n-1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\alpha| = |\beta| = 1$ tal que $x^\alpha = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$ con $x \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)' \in \mathbb{Z}_+^k$.

Recordemos que $\Sigma_\infty = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_1, X_{1+i})$, ahora sea A una matriz de dimen-

siones dx^d , denotaremos los elementos de la matriz de la siguiente forma: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ tal que $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$, así por ejemplo si consideramos $\alpha = (1, 0, \dots, 0)'$ y $\beta = (1, 0, \dots, 0)'$, entonces $A(\alpha, \beta)$ denotará el elemento $(1, 1)$ de la matriz A .

Haciendo uso de esta notación se cumple:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \tilde{\Sigma}_n(\alpha, \beta) - \Sigma_\infty(\alpha, \beta) \\
&= \mathbb{E} \left\{ \hat{\sigma}_n(0; \alpha, \beta) + \sum_{k=1}^{n-1} q_{nk} (\hat{\sigma}_n(k; \alpha, \beta) + \hat{\sigma}_n(k; \beta, \alpha)) \right\} \\
&\quad - \left\{ \mathbb{E} X_1^{\alpha+\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right) \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^\alpha X_i^\beta + \sum_{k=1}^{n-1} q_{nk} n^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-k} X_i^\alpha X_{i+k}^\beta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{j=1}^{n-k} X_j^\beta X_{j+k}^\alpha \right) \right\} - \left\{ \mathbb{E} X_1^{\alpha+\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right) \right\} \\
&= \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (X_i^{\alpha+\beta}) + \sum_{k=1}^{n-1} q_{nk} n^{-1} (n-k) \left(\mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right) \right\} - \left\{ \mathbb{E} X_1^{\alpha+\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ q_{nk} (1 - n^{-1}k) - 1 \right\} \left(\mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right) \\
&\quad - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\mathbb{E} (X_1^\alpha X_{1+k}^\beta) + \mathbb{E} (X_1^\beta X_{1+k}^\alpha) \right)
\end{aligned}$$

Por otro lado se cumple:

$$\begin{aligned}
\left| q_{nk} - n^{-1}kq_{nk} - 1 \right| &= \left| q^k - n^{-1}kq^k + n^{-1}kq^{n-k} - n^{-1}kq_{nk} - 1 \right| \\
&= \left| (q^k - 1) + n^{-1}k(q^{n-k} - q^k - q_{nk}) \right| \\
&\leq \left| 1 - q^k \right| + \left| n^{-1}k \right| \left(\left| q^{n-k} \right| + \left| q^k \right| + \left| q_{nk} \right| \right) \\
&\leq \left| 1 - q^k \right| + 3n^{-1}k \\
&\leq |1 - q| + 3n^{-1}k \\
&\leq kp + 3n^{-1}k
\end{aligned}$$

Así, se cumple:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E} \tilde{\Sigma}_n(\alpha, \beta) - \Sigma_\infty(\alpha, \beta) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ q_{nk} (1 - n^{-1}k) - 1 \right\} \left(\mathbb{E} \left(X_1^\alpha X_{1+k}^\beta \right) + \mathbb{E} \left(X_1^\beta X_{1+k}^\alpha \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=n}^{\infty} \left(\mathbb{E} \left(X_1^\alpha X_{1+k}^\beta \right) + \mathbb{E} \left(X_1^\beta X_{1+k}^\alpha \right) \right) \right\| \end{aligned}$$

Considerando que $\sum_{k=1}^{\infty} |k| \left\| \mathbb{E} X_1 X'_{1+k} \right\| < \infty$ y sea $1 \leq k \leq n-1$ se cumple $|q_{nk}(1 - n^{-1}k) - 1| \leq 3$, Así se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \tilde{\Sigma}_n(\alpha, \beta) - \Sigma_\infty(\alpha, \beta) \right| \\ & \leq 2 \sum_{1 \leq k^2 \leq p^{-1}} \left(kp + 3n^{-1}k \right) \left\| \mathbb{E} X_1 X'_{1+k} \right\| + 8 \sum_{k^2 p > 1} \left\| \mathbb{E} X_1 X'_{1+k} \right\| \\ & \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■

2.2.8.4. Análisis de la distribución de estimadores obtenidos por los métodos Bootstrap por bloques

El siguiente teorema será de utilidad en la demostración de la consistencia de la distribución de los estimadores Bootstrap.

TEOREMA 2.11. *Teorema del límite central para sucesiones fuertemente mixtas: Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de variables aleatoria estacionarias con coeficiente mixto fuerte $\alpha(\cdot)$*

1. *Suponga que $P(|X_1| \leq c) = 1$ para algún $c \in (0, \infty)$ y además $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) < \infty$. Entonces se cumple:*

$$0 \leq \sigma_\infty^2 \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_{1+k}) < \infty \quad (2.39)$$

Si adicionalmente $\sigma_\infty^2 > 0$ entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_1) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\infty^2) \quad (2.40)$$

2. *Suponga que para algún $\delta \in (0, \infty)$, $E|X_1|^{2+\delta} < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha(n)\|^{\delta/2+\delta} < \infty$. Entonces se cumple (2.39). Adicionalmente si $\sigma_\infty^2 > 0$, entonces se cumple (2.40)*

El siguiente teorema demuestra la consistencia de la distribución del estimador

Bootstrap para el caso del método MBB y CBB.

TEOREMA 2.12. *Supongo que existe $\delta > 0$ tal que $E \|X_1\|^{2+\delta} < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{\delta/(2+\delta)} < \infty$. Además, suponga que $\Sigma_{\infty} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_1, X_{1+i})$ es no singular y que $\ell^{-1} + n^{-1}\ell = o(1)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces para $j = 1, 2$ se cumple:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| P_* \left(T_n^{*(j)} \leq x \right) - P(T_n \leq x) \right| \rightarrow_p 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Demostración.-Para realizar la demostración se hará uso de los siguientes resultados:

1. **Teorema de Polyäs:** Sean $\{X_n\}$ y X variables aleatorias reales con funciones de distribución F_n y F respectivamente. Supongamos que F es continua sobre \mathbb{R} . Entonces X_n converge débilmente a X si y solo si F_n converge a F uniformemente sobre \mathbb{R}
2. Sean dos variables aleatorias X y Y , además una constante $\eta > 0$ se cumple:

$$\begin{aligned} & E |X + Y|^2 \mathbf{1}(|X + Y| > \eta) \\ & \leq E \left(|X|^2 + |Y|^2 + 2|X||Y| \right) \mathbf{1}(|X| + |Y| > \eta) \\ & \leq 4 E \left(\text{Max}\{|X|^2, |Y|^2\} \right) \mathbf{1}(2 \text{Max}\{|X|, |Y|\} > \eta) \\ & \leq 4 \left[E |X|^2 \mathbf{1}(|X| > \eta/2) + E |Y|^2 \mathbf{1}(|Y| > \eta/2) \right] \end{aligned}$$

3. **Teorema del límite central de Lindeberg:** Sea $\{X_{nj}; 1 \leq j \leq r_n\}_{n \geq 1}$ una matriz triangular donde para cada $n \geq 1$, $\{X_{nj}; 1 \leq j \leq r_n\}$ es una colección de vectores independientes tal que se cumple: $E X_{nj} = 0$ para todo $1 \leq j \leq r_n$ y $\sum_{j=1}^{r_n} E X_{nj} X_{nj}' = \mathbb{I}_d$. Supongamos que $\{X_{nj}; 1 \leq j \leq r_n\}_{n \geq 1}$ satisface la condición de Lindeberg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{r_n} E \|X_{nj}\|^2 \mathbf{1}(\|X_{nj}\| > \epsilon) = 0$$

Entonces se cumple:

$$\sum_{j=1}^{r_n} X_{nj} \xrightarrow{d} N(0, \mathbb{I}_d) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

En primer lugar notemos que T_n converge en distribución a $N(0, \Sigma_{\infty})$ y que esta última es una distribución continua; así, utilizando una versión multivariante del teorema de Pólya se cumple que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |P(T_n \leq x) - \Phi(x; \Sigma_\infty)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Esto para $j=1,2$

A partir de ello bastaría demostrar que se cumple:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| P_* \left(T_n^{*(j)} \leq x \right) - \Phi(x; \Sigma_\infty) \right| \rightarrow_p 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.41)$$

Sea $\widehat{\Delta}_n(a) = \ell b^{-1} \sum_{i=1}^b \mathbb{E}_* \left\| U_i^{*(j)} - \widehat{\mu}_n \right\|^2 \mathbb{1} \left(\sqrt{\ell} \left\| U_i^{*(j)} - \widehat{\mu}_n \right\| > 2a \right)$, $a > 0$. Los vectores $U_1^{*(j)}, \dots, U_b^{*(j)}$ son vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos de forma condicional a \mathbb{X}_n , se cumple entonces por la desigualdad de Markov que para todo $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P \left(\widehat{\Delta}_n \left((n/\ell)^{1/4} \right) > \epsilon \right) &\leq \epsilon^{-1} \mathbb{E} \widehat{\Delta}_n \left((n/\ell)^{1/4} \right) \\ &= \epsilon^{-1} \mathbb{E} \left[\ell \mathbb{E}_* \left\| U_1^{*(j)} - \widehat{\mu}_n \right\|^2 \mathbb{1} \left(\sqrt{\ell} \left\| U_1^{*(j)} - \widehat{\mu}_n \right\| > 2(n/\ell)^{1/4} \right) \right] \end{aligned}$$

La última igualdad procede debido a que $U_1^{*(j)}, \dots, U_b^{*(j)}$ son vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. Considerando $U_{1i}^{(j)} = \sqrt{\ell} U_i^{*(j)}$, la estacionariedad de la serie y los bloques definidos para cada método ($B_i^{(j)}$) para $j = 1, 2$ se cumple:

$$\begin{aligned} P \left(\widehat{\Delta}_n \left((n/\ell)^{1/4} \right) > \epsilon \right) &\leq \epsilon^{-1} \mathbb{E} \left[\left\| U_{11}^{(j)} - \sqrt{\ell} \widehat{\mu}_n \right\|^2 \mathbb{1} \left(\left\| U_{11}^{(j)} - \sqrt{\ell} \widehat{\mu}_n \right\| > 2(n/\ell)^{1/4} \right) \right] \\ &\leq 4\epsilon^{-1} \left[\mathbb{E} \left\| U_{11}^{(j)} \right\|^2 \mathbb{1} \left(\left\| U_{11}^{(j)} \right\| > (n/\ell)^{1/4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \ell \mathbb{E} \left\| \widehat{\mu}_n \right\|^2 \mathbb{1} \left(\left\| \sqrt{\ell} \widehat{\mu}_n \right\| > (n/\ell)^{1/4} \right) \right] \\ &\leq 4\epsilon^{-1} \left[\mathbb{E} \left\| U_{11}^{(j)} \right\|^2 \mathbb{1} \left(\left\| U_{11}^{(j)} \right\| > (n/\ell)^{1/4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \ell \mathbb{E} \left\| \widehat{\mu}_n \right\|^2 \right] \end{aligned}$$

Para el método MBB ($j = 1$) de lo realizado en la demostración previa se obtienen los resultados (2,34) y (2,36) con lo cual se cumple:

$$\begin{aligned} P \left(\widehat{\Delta}_n \left((n/\ell)^{1/4} \right) > \epsilon \right) &\leq 4\epsilon^{-1} \left[\mathbb{E} \left\| U_{11}^{(1)} \right\|^2 \mathbb{1} \left(\left\| U_{11}^{(1)} \right\| > (n/\ell)^{1/4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \ell \mathbb{E} \left\| \widehat{\mu}_n \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Ahora para el caso del método CBB ($j = 2$), de forma similar a lo desarrollado para el caso del método MBB, se cumple:

Bajo las hipótesis se puede aplicar el literal 2 del teorema (2,11). Con lo cual se cumple $\sqrt{n}\bar{X}_n \rightarrow^d N(0, \Sigma_\infty)$.

Notemos $U_{11}^{(2)} = \sqrt{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} Y_{ni} = \sqrt{\ell}\bar{X}_\ell$, $T_n = \left\| U_{11}^{(2)} \right\|^2 \mathbf{1} \left(\left\| U_{11}^{(2)} \right\| > (n/\ell)^{1/8} \right)$. De esta forma se cumple: $T_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, además $|T_n| \leq \left\| U_{11}^{(2)} \right\|^2, \forall n$. Además se cumple $\left\| \sqrt{\ell}\bar{X}_\ell \right\| \rightarrow \left\| \sqrt{n}\bar{X}_n \right\|$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo cual podemos usar el teorema general de convergencia dominada (2,2) ya que este último converge en distribución a una distribución normal estándar por lo visto en el párrafo precedente, de esta forma se cumple:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left\| U_{11}^{(2)} \right\|^2 \mathbf{1} \left(\left\| U_{11}^{(2)} \right\| > (n/\ell)^{1/8} \right) \right] &= \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| U_{11}^{(2)} \right\|^2 \mathbf{1} \left(\left\| U_{11}^{(2)} \right\| > (n/\ell)^{1/8} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Por propiedades de la norma y de lo obtenido en (2,30) para $j = 2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \ell \mathbb{E} \left\| \hat{\mu}_n \right\|^2 &= \ell \mathbb{E} \left\| \bar{X}_n \right\|^2 \\ &= O(\ell/n) \end{aligned} \quad (2.43)$$

De esta forma para el método CBB se obtiene de igual forma que:

$$\begin{aligned} P \left(\hat{\Delta}_n \left((n/\ell)^{1/4} \right) > \epsilon \right) &\leq 4\epsilon^{-1} \left[\mathbb{E} \left\| U_{11}^{(2)} \right\|^2 \mathbf{1} \left(\left\| U_{11}^{(2)} \right\| > (n/\ell)^{1/4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \ell \mathbb{E} \left\| \hat{\mu}_n \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Así para $j = 1, 2$ se cumple:

$$\hat{\Delta}_n \left((n/\ell)^{1/4} \right) \xrightarrow{p} 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.44)$$

Por otro lado para demostrar (2,41), esta se cumple si para toda sucesión $\{n_i\}$, existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que se cumple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| P_* \left(T_{n_k}^{*(j)} \leq x \right) - \Phi(x; \Sigma_\infty) \right| = 0 \text{ casi seguramente} \quad (2.45)$$

De esta forma, sea $\{n_i\}$ una sucesión, considerando los resultados obtenidos en (2,44) y el teorema previo, se cumple entonces que existe una subsucesión $\{n_k\}$ de $\{n_i\}$ tal que:

$$\text{Var}_* \left(T_{n_k}^{*(j)} \right) \rightarrow \Sigma_\infty \quad \text{c.s. y} \quad \hat{\Delta}_{n_k} \left((n_k/\ell_{n_k})^{1/4} \right) \rightarrow 0 \text{ c.s. cuando } k \rightarrow \infty \quad (2.46)$$

Además se cumple:

$$\begin{aligned}
T_n^{*(j)} &= \sqrt{n_1} \left(\bar{X}_n^{*(j)} - E_*^{*(j)} \right) \\
&= \sqrt{b\ell} \left(\frac{1}{b\ell} \sum_{i=1}^b X_{(\ell-1)i+1}^{*(j)} + \cdots + X_{i\ell}^{*(j)} \right) - \sqrt{b\ell} \hat{\mu}_n \\
&= \sqrt{\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{i=1}^b \frac{X_{(\ell-1)i+1}^{*(j)} + \cdots + X_{i\ell}^{*(j)}}{\ell} \right) - \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{b}} b \hat{\mu}_n \\
&= \sqrt{\frac{\ell}{b}} \sum_{i=1}^b (U_i^* - \hat{\mu}_n)
\end{aligned}$$

De esta forma $T_n^{*(j)}$ es una suma de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos: $\left(\sqrt{\frac{\ell}{b}} (U_1^* - \hat{\mu}_n), \dots, \sqrt{\frac{\ell}{b}} (U_b^* - \hat{\mu}_n) \right)$.

Estos vectores aleatorios por el resultado obtenido en (2,46) se comprueba que satisfacen la condición de Lindenberg alrededor de la subsucesión $\{n_k\}$ casi seguramente. De esta forma es posible aplicar el TLC de Lindeberg, con lo cual la distribución condicional $\left(T_{n_k}^{*(j)} \mid \mathcal{X}_{n_k} \right)$ de $T_{n_k}^{*(j)}$ converge casi seguramente hacia $N(0, \Sigma_\infty)$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Sobre este último resultado se aplica nuevamente una versión multivariante del teorema de Polya, con lo cual se cumple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| P_* \left(T_{n_k}^{*(j)} \leq x \right) - \Phi(x; \Sigma_\infty) \right| = 0 \text{ c.s.}$$

Esto para el método MBB y CBB, con lo cual queda demostrado el teorema. ■

Este teorema demuestra que al igual que el estimado Bootstrap de la varianza, el estimado de la función de distribución $\hat{G}_n^{(j)}$ son estimadores consistentes de G_n para una serie de valores de la longitud de bloque: ℓ . De esta forma las hipótesis de los teoremas presentado son necesarias para obtener la consistencia de los estimadores tanto de la varianza como de la función de distribución, respectivamente.

El siguiente teorema demuestra la consistencia de la distribución del estimador Bootstrap para el caso del método SB.

TEOREMA 2.13. *Suponga que $E \|X_1\|^{6+\delta} < \infty$, Σ_∞ es no singular, y $\sum_{n=1}^\infty n^5 \alpha(n)^{\delta/(6+\delta)} < \infty$ para algún $\delta > 0$. Además, asuma que $p + [(n^{1/2}p)]^{-1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| P_* \left(\tilde{T}_n^{*(3)} \leq x \right) - P(T_n \leq x) \right| \rightarrow_p 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Demostración.- Para el desarrollo de esta demostración se utilizan los siguientes resultados:

1. **Teorema de Berry-Esseen.-** Sea x_1, \dots, X_n una sucesión de n variables aleatorias independientes (pero no necesariamente idénticamente distribuidas) tal que $E X_j = 0$ y $E |X_j|^3 < \infty$ para $1 \leq j \leq n$. Si $\sigma_n^2 \equiv n^{-1} \sum_{j=1}^n E X_j^2 > 0$, entonces se cumple:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma_n} \sum_{j=1}^n X_j \leq x \right) - \Phi(x) \right| \\ & \leq (2,75) \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{j=1}^n (E |X_j|^3 / \sigma_n^3) \end{aligned}$$

Donde $\Phi(x)$ denota la función de distribución de una distribución normal estándar sobre \mathbb{R} .

2. **Lema de Wald.-** Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d y sea T un tiempo de paro apropiado con respecto a una sucesión creciente de σ -álgebras $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que F_n es independiente de $\{X_k : k \geq n+1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $E T < \infty$. Sea $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \in \mathbb{N}$ y se define una suma aleatoria de parada S_T tal que $S_T = \sum_{n \in \mathbb{N}} S_n \mathbb{1}(T = n)$. Entonces se cumple:

- (a) Si $E |X_1| < \infty$, entonces

$$E(S_T) = (E T) (E X_1)$$

- (b) Si $E X_1^2 < \infty$, entonces

$$E(S_T - T \cdot E X_1)^2 = T \cdot \text{Var}(X_1)$$

3. **Teorema de Polyás** resultado presentado en demostraciones previas.

Bajo la misma consideración presentada en (2,41) basta demostrar $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P_* \left(\tilde{T}_n^{*(3)} \leq x \right) - \Phi(x/\sigma_\infty) \right| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, una demostración detallada de este resultado se puede encontrar en Lahiri, 2003.

Para obtener este resultado se considera el tiempo de paro $K = \inf \{i : L_1 + \dots + L_i \geq n\}$ y se define $S(I_j; L_j) \equiv \sum_{j=I_j}^{I_j+L_j-1} Y_{n,j}$, así como propiedades de la Esperanza y probabilidad condicional a $T_n = \sigma \langle \mathbf{X}_n, L_1, \dots, L_n \rangle$ y a \mathbf{X}_n .

De esta forma se expresa $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P_* \left(\tilde{T}_n^{*(3)} \leq x \right) - \Phi(x/\sigma_\infty) \right|$ en función de las variables $S(I_j; L_j)$ y de la esperanza condicional a \mathcal{X}_n se utiliza de esta forma la cota dada en el Teorema de Berry-Esseen.

Posteriormente, haciendo uso del Lema de Wald, de las propiedades de la esperanza condicional y de otras propiedades derivadas del tiempo de paro K , así como el orden de convergencia de conjuntos definidos para el efecto se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P_* \left(\tilde{T}_n^{*(3)} \leq x \right) - \Phi(x/\sigma_\infty) \right| \\ & \leq C(\sigma_\infty) n^{-3/2} E(K | \mathcal{X}_n) E(\hat{\rho}_3(L_1) | \mathcal{X}_n) + C(\sigma_\infty) \cdot a_n + 2P(A_n^c | \mathcal{X}_n) \\ & = O_p \left(n^{-3/2} \cdot (np) \cdot (p^{-3/2}) \right) + O(a_n) \\ & + O_p \left(p^{1/2} + n^{-1/4} (\log n)^3 \right) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■

Consideraremos ahora estimadores que pueden ser expresados como función suave de la media, a estos denominaremos que responden al Modelo de Función Suave. Supongamos que $\{X_{0i}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es un proceso estacionario sobre \mathbb{R}^{d_0} . Sea $f : \mathbb{R}^{d_0} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función Borel medible, y sea $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Supongamos que el parámetro de interés es de primer nivel, dado por $\theta = H(E[f(X_{01})])$. Un estimador natural de θ está dado por $\hat{\theta}_n = H(n^{-1} \sum_{i=1}^n f(X_{0i}))$. De esta forma, tanto θ como $\hat{\theta}_n$ son funciones suaves de la media poblacional y muestral respectivamente de la sucesión $\{f(X_{0i})\}_{i \in \mathbb{Z}}$,

Ahora sea $T_{1n} = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$, este será el estimador centrado y escalado del estimador $\hat{\theta}_n$, tal que $\theta = H(E[f(X_{01})])$

Para lo que procede consideremos $X_i = f(X_{0i})$, $i \in \mathbb{Z}$, así $\theta = H(E X_1)$ y $\hat{\theta}_n = H(\bar{X}_n)$. Por otro lado, sea $\mathcal{X}_n^{*(j)}$, $j = 1, 2$ la muestra Bootstrap de n_1 elementos y la muestra de N_1 elementos para el caso $j = 3$; tal que $n_1 = b\ell$, $b = \lfloor n/\ell \rfloor$ y $N_1 = L_1 + \dots + L_K$, para $j = 1, 2$ es decir el método MBB y CBB la longitud de los b bloques será ℓ , para el caso de $j = 3$ es decir el método SB donde la longitud óptima de bloques esperada es $p^{-1} \in (1, n)$.

Así definimos los estimadores Bootstrap tal que: $T_{1n}^{*(j)} = \sqrt{n_1}(\theta_n^{*(j)} - \hat{\theta}_{n,j})$, $j = 1, 2$ y $T_{1n}^{*(j)} = \sqrt{N_1}(\theta_n^{*(j)} - \tilde{\theta}_{n,j})$, $j = 3$. Donde $\theta_n^{*(j)} = H(\bar{X}_n^{*(j)})$ y $\hat{\theta}_{n,j} = H(E_* \bar{X}_n^{*(j)})$ $1 \leq j \leq 3$.

Con esto es importante destacar el siguiente teorema que especifica las hipótesis necesarias para obtener la consistencia de los estimadores obtenidos por los méto-

dos Bootstrap por bloques mencionados en el caso de parámetros que son funciones suaves de la media.

TEOREMA 2.14. *Supongan que existe una función H diferenciable sobre una vecindad $N_H \equiv \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - EX_1\| < 2\eta\}$ de $E(X_1)$ para algún $\eta > 0$, $\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha H(EX_1)| \neq 0$ y que las derivadas parciales de primer orden de H satisfacen la condición de Lipschitz de orden $\kappa > 0$ sobre N_H . Asumimos además que se cumplen las condiciones del Teorema 2,12 para $j = 1, 2$ y del Teorema 2,13 para $j = 3$, esto sobre la serie transformada $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Entonces:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P_* \left(T_{1n}^{*(j)} \leq x \right) - P \left(T_{1n} \leq x \right) \right| \rightarrow_p 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Para $j = 1, 2, 3$

Demostración.- Una demostración detallada de este teorema puede encontrarse en Lahiri, 2003, teorema 4.1. A continuación se expone brevemente el esquema de la misma, para lo cual se utilizan los siguientes resultados:

- Sea ϱ una medida sobre el conjunto de medidas de probabilidad sobre \mathbb{R}^d , midiendo la topología de la convergencia débil de medidas de probabilidad. De esta forma los resultados de los teoremas (2,12) y (2,13) implican que se cumple:

$$\varrho \left(\mathcal{L} \left(T_n^{*(j)} \mid \mathcal{X}_n \right), N(0, \Sigma_\infty) \right) \rightarrow_p 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.47)$$

Para $j=1,2,3$.

- **Teorema condicional de Slutsky:** Sea $n \in \mathbb{N}$, sea b_n^* y T_n^* vectores r -dimensionales y s -dimensionales respectivamente, y sea A_n^* una matriz de dimensiones rxs , todos ellos definidos sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Supongamos que \mathcal{X}_∞ es una sub- σ álgebra sobre \mathcal{F} y que existen variables aleatorias medibles sobre \mathcal{X}_∞ las cuales serán \hat{A} y \hat{b} , tal que:

$$\begin{aligned} & P \left(\|A_n^* - \hat{A}\| > \epsilon \mid \mathcal{X}_\infty \right) + P \left(\|b_n^* - \hat{b}\| > \epsilon \mid \mathcal{X}_\infty \right) \\ & \rightarrow_p 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Además, supongamos que existe una distribución de probabilidad ν sobre \mathbb{R}^s tal que $\mathcal{L} \left(T_n^* \mid \mathcal{X}_\infty \right) \rightarrow^d \nu$, cuando $n \rightarrow \infty$, es decir $\varrho_s \left(\mathcal{L} \left(T_n^* \mid \mathcal{X}_\infty \right), \nu \right) \rightarrow_p 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde $\varrho_k(\cdot)$ mide la convergencia

en distribución de vectores aleatorios sobre $\mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\mathcal{L}(A_n^* T_n^* + b_n^* | \mathcal{X}_\infty) \xrightarrow{d} \nu \hat{g}^{-1} \quad \text{en probabilidad}$$

es decir, $q_r(\mathcal{L}(A_n^* T_n^* + b_n^* | \mathcal{X}_\infty), \nu \hat{g}^{-1}) \xrightarrow{p} 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Donde $\hat{g} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ corresponde a $\hat{g}(t) = \hat{A}t + \hat{b}, t \in \mathbb{R}^s$ y donde $\nu \hat{g}^{-1}$ denota la distribución de probabilidad inducida por \hat{g} bajo ν , en otras palabras $\nu \hat{g}^{-1}(B) = \nu(\hat{g}^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$

Considerando que $T_{1n}^{*(j)} = AT_n^{*(j)} + R_n^{*(j)}$, tal que $a_n(j) \left(H(\bar{X}_n^{*(j)}) - H(E_* \bar{X}_n^{*(j)}) - AT_n^{*(j)} \right)$, para $j = 1, 2, 3$ y donde A es una matriz $1 \times d$ dimensional con elementos $D_1 H(E X_1), \dots, D_d H(E X_1)$, donde $D_i H(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} H(x)$.

La demostración se completa demostrando que se cumple:

$$P\left(\left|R_n^{*(j)}\right| > 2\epsilon \mid \mathcal{X}_\infty\right) = o_p(1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (2.48)$$

Para $j = 1, 2, 3$, para dicha demostración se considera la vecindad sobre la cual la función H es diferencial y además tomando en consideración que sobre la misma se satisface la condición de Lipschitz, por otro lado se divide al caso cuando están fuera de dicha vecindad. De esta forma por el resultado obtenido en el primer numeral (2,47), y gracias a (2,48) aplicando el Teorema condicional de Slutsky se obtiene el resultado esperado. ■

2.2.9. TFT-Bootstrap

Como un primer acercamiento a los métodos TFT- Bootstrap es necesario mencionar los métodos Bootstrap de remuestreo sobre el periodograma. Estos métodos se basan en que un vector del periodograma de algunas frecuencias finitas y ordenadas es aproximadamente independiente y exponencialmente distribuida; este método surge con el objetivo de generar intervalos de confianza para la densidad espectral, pero se extiende con algunas modificaciones para la inferencia de estadísticos radiales como la autocorrelación, para modelos de regresión y estadísticos de otros tipos como la auto covarianza. Su nombre proviene del hecho que los estadísticos de interés a inferir con este método son generalmente funciones del periodograma. La mayoría de subtipos de este método no reproducen series temporales en el dominio de tiempo.

Los métodos Bootstrap sobre el periodograma son un tipo de método de remuestreo sobre el dominio de frecuencias, también denominado Bootstrap sobre el dominio de frecuencias.

El método TFT-Bootstrap es un tipo de método sobre el dominio de frecuencias, el cual consiste en realizar un remuestreo sobre los coeficientes de Fourier de la serie respectiva. De forma resumida este método parte de un conjunto de observaciones en el dominio de tiempo, de estas se obtienen los coeficientes de Fourier y en el dominio de frecuencias se realiza un remuestreo, para luego con ayuda de la transformada inversa de Fourier y partiendo de los coeficientes remuestreados generar un proceso de serie de tiempo remuestreado sobre el dominio de tiempo.

Por sus siglas en inglés este método es un remuestreo por alternancia de frecuencias de tiempo (time frequency toggle TFT). Estos métodos son una extensión de los métodos Bootstrap del periodograma ya que aplica procesos similares para estadísticos que pueden ser expresados como funciones del periodograma, sin embargo se pueden también aplicar para la inferencia de otros estadísticos que no se puede expresar por el periodograma, siendo esta su principal avance, además de la ventaja de reproducir series remuestreadas sobre el dominio de tiempo.

El TFT-Bootstrap realiza un remuestreo de magnitud y fase de los coeficientes de Fourier, esto lo distingue de otros métodos Bootstrap sobre el dominio de frecuencias, ya que otros como el método de "datos sustitutos" realizan solo un remuestreo sobre la fase de los coeficientes de Fourier. Algo que comparten ambos métodos es que nos útiles para inferir la distribución de la media muestral.

Las muestras TFT tienen una trayectoria asintóticamente Gausiana, de esta for-

ma el método TFT aproxima posibles procesos no lineales mediante un proceso Gaussiano, y reproduciendo de forma correcta la estructura de segundo orden. Este método captura correctamente la distribución de estadísticos como estadísticos (CUSUM) en el análisis de punto de cambio, o por ejemplo estadísticos de mínimos cuadrados en test de raíces unitarias, estadísticos que pueden ser expresados como función del periodograma también son correctamente inferidos por este método, entre estos tenemos la autocorrelación muestral o los estimadores de Yule Walker. Se destaca del método TFT-Bootstrap que replica correctamente la estructura del momento de segundo orden para una clase amplia de procesos estocásticos incluidos los procesos no lineales. [Kirch y Politis, 2011]

2.2.9.1. Descripción del método TFT-Bootstrap

A continuación se describen los pasos del método TFT-Bootstrap:

1. Se calculan los coeficientes de Fourier conforme lo mencionado en la Hipótesis 3.
2. Sea $y^*(T) = x^*(T) = 0$. Si n es par adicionalmente se define $x^*(T/2) = y^*(T/2) = 0$.
3. Se obtiene la muestra Bootstrap de los coeficientes de Fourier: $x^*(1), y^*(1), \dots, x^*(N), y^*(N)$, esto mediante los procedimientos definidos para cada subtipo de TFT-Bootstrap.
4. Se definen la muestra Bootstrap de los coeficientes de Fourier de acuerdo a la propiedad (2,3), es decir $X^*(T - j) = x^*(j)$ y $y^*(T - j) = -y^*(j)$
5. Usando la transformada inversa de Fourier (2,8) sobre $x^*(j) + iy^*(j)$, $j = 1, \dots, T$, se transforma la muestra Bootstrap de los coeficientes de Fourier a una muestra Bootstrap sobre el dominio de tiempo. Es decir se obtiene un muestra Bootstrap $\{Z^*(t) : 1 \leq T\}$ la cual es \mathbb{R} -valuada y centrada. Pudiéndose utilizar para la inferencia de múltiples estadísticos basados en las sumas parciales del proceso centrado $\{Z(\cdot)\}$.

Para obtener una secuencia Bootstrap del proceso no estacionario a partir de las observaciones $\{V(\cdot)\}$ se puede añadir la media Bootstrap μ_T^* al proceso $\{Z^*(\cdot)\}$, donde μ_T^* se obtiene por un proceso Bootstrap independiente del TFT, a partir de $\{Z^*(\cdot)\}$. En otras palabras se define: $V^*(t) = Z^*(t) + \mu_T^*$, el cual es una aproximación Bootstrap de $\{V(\cdot)\}$.

De esta forma $\{Z^*(\cdot)\}$ contiene la información sobre la estructura de covarianza del proceso de serie de tiempo y μ_T^* contiene la información de la media muestral siendo una variable aleatoria del proceso de serie de tiempo.

En cuánto a los subtipos de métodos Bootstrap se han definido algunas adaptaciones de métodos usados para el remuestreo del periodograma para hacerlo ahora sobre los coeficientes de Fourier. Así tenemos:

Residual based Bootstrap o Bootstrap basado en residuos (RB):

1. Se debe estimar la densidad espectral $f(\cdot)$ por $\hat{f}(\cdot)$ satisfice:

$$\sup_{\lambda \in [0, \pi]} |\hat{f}(\lambda) - f(\lambda)| \xrightarrow{P} 0 \quad (2.49)$$

2. Se estiman los residuos de la parte tanto real como imaginaria de los coeficientes de Fourier y se los coloca en vectores $\{\tilde{s}_j : 1 \leq j \leq 2N\}$:

$$\tilde{s}_j = \frac{x(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}}, \quad \tilde{s}_{N+j} = \frac{y(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}} \quad (2.50)$$

Para $j = 1, \dots, N$ Luego se los estandariza tal que:

$$s_j = \frac{\tilde{s}_j - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l}{\sqrt{1/(2N) \sum_{t=1}^{2N} \left(\tilde{s}_t - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l \right)^2}} \quad (2.51)$$

Estos residuos son aproximadamente i.i.d, por lo cual emplear un remuestreo i.i.d es razonable.

3. Sean s_j^* , $j = 1, \dots, 2N$ una muestra aleatoria extraída al azar i.i.d a partir de s_1, \dots, s_{2N} . Este paso de remuestreo es condicional a las observaciones $V(1), \dots, V(T)$.

4. Se definen los coeficientes de Fourier remuestreados por:

$$x^*(j) = \sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)} s_j^*, \quad y^*(j) = \sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)} s_{N+j}^* \quad (2.52)$$

Local Bootstrap o Bootstrap local (LB): La ventaja de este subtipo de TFT-Bootstrap es que no requiere de una estimación inicial de la densidad espectral. Estos métodos utilizan la idea de que una vecindad al rededor de cada frecuencia de la distribución de los diferentes coeficientes es casi idéntica, si la densidad espectral es suave.

1. Se selecciona un núcleo simétrico y no negativo $K(\cdot)$ tal que:

$$\int K(t)dt = 1$$

Además se selecciona un ancho de banda h_T que cumple $h_T \rightarrow 0$ y $Th_T \rightarrow \infty$.

2. Se definen variables independientes e idénticamente distribuidas $J_{1,T}, \dots, J_{2N,T}$ sobre \mathbb{Z} tal que:

$$p_{s,T} = P(J_{j,T} = s) = \frac{K(2\pi s / (Th_T))}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} K(2\pi j / (Th_T))} \quad (2.53)$$

Además se definen variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli B_1, \dots, B_{2N} con parámetro $1/2$.

3. Se obtiene la muestra de los coeficientes de Fourier de la siguiente forma:

$$\tilde{x}^*(j) = \begin{cases} x(j + J_{j,T}), & \text{if } B_j = 0 \\ y(j + J_{j,T}), & \text{if } B_j = 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\tilde{y}^*(j) = \begin{cases} y(j + J_{N+j,T}), & \text{if } B_{N+j} = 0 \\ x(j + J_{N+j,T}), & \text{if } B_{N+j} = 1 \end{cases}$$

Luego la muestra Bootstrap de coeficientes de Fourier se define como la versión centrada de la muestra previa, de la siguiente forma:

$$x^*(j) = \tilde{x}^*(j) - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s)) \quad (2.55)$$

$$y^*(j) = \tilde{y}^*(j) - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s))$$

Donde $j = 1, \dots, N$.

2.2.9.2. Consistencia de los métodos

En primer lugar se expondrán algunas hipótesis que serán de utilidad más adelante, en esta sección se considerará además que se observa $V(1), \dots, V(T)$, $N = \lfloor (T-1)/2 \rfloor$ y $\lambda_j = 2\pi j/T$. Las hipótesis a continuación son claves para la obtención de una estructura de momento de segundo orden correcta dentro de las series remuestreadas.

HIPÓTESIS 3. $\{V(i) : i \geq 1\}$ es un proceso estacionario con función de auto covarianza absolutamente sumable $\gamma(\cdot)$. En este caso la densidad espectral del proceso existe, siendo continua y acotada y definida por:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda} \gamma(n) \quad (2.56)$$

HIPÓTESIS 4. $\{V(i) : i \geq 1\}$ cumple el siguiente teorema del límite funcional central:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi f(0)T}} \sum_{t=1}^{[Tu]} (V(t) - EV(1)) : 0 \leq u \leq 1 \right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \{W(u) : 0 \leq u \leq 1\}$$

Donde $f(\cdot)$ es la densidad espectral de $\{V(\cdot)\}$ y $\{W(\cdot)\}$ es un proceso estándar de Wiener.

HIPÓTESIS 5. Sea la densidad espectral acotada por debajo por $f(\lambda) \geq c > 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 2\pi$.

Se denotará $Z(j) = V(j) - \bar{V}_T$ que serán las observaciones centradas donde $\bar{V}_T = T^{-1} \sum_t V(t)$. Se consideran también los coeficiente de la transformada rápida de Fourier a partir de lo observado, es decir:

$$x(j) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T V(t) \cos(-\lambda_j t) \quad (2.57)$$

$$y(j) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T V(t) \sin(-\lambda_j t)$$

$$x(j) + iy(j) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T V(t) \exp(-i\lambda_j t) \quad (2.58)$$

Para $j = 1, \dots, T$.

HIPÓTESIS 6. Para la muestra Bootstrap los coeficientes $\{x^*(k) : 1 \leq k \leq N\}$ y $\{y^*(k) : 1 \leq k \leq N\}$ son sucesiones independientes así como mutuamente independientes (condicionales a lo observado) con $E^*(x^*(k)) = E^*(y^*(k)) = 0$

HIPÓTESIS 7. Existe convergencia uniforme de el momento de segundo orden de la serie Bootstrap sobre el dominio de frecuencias, tal que:

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |\text{var}^*(x^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = o_P(1)$$

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |\text{var}^*(y^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = o_P(1)$$

HIPÓTESIS 8. *Existe una cota uniforme del momento de cuarto orden de la sucesión Bootstrap sobre el dominio de tiempo, tal que:*

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \mathbb{E}^* (x^*(k))^4 \leq C + o_P(1), \quad \sup_{1 \leq k \leq N} \mathbb{E}^* (y^*(k))^4 \leq C + o_P(1)$$

Si definimos la distancia de Mallows como $d_2(P_1, P_2) = \inf \left(\mathbb{E} |X_1 - X_2|^2 \right)^{1/2}$ donde el ínfimo se toma a partir de todas las variables \mathbb{R} -evaluadas (X_1, X_2) con distribuciones marginales P_1 y P_2 respectivamente.

HIPÓTESIS 9. *La sucesión Bootstrap en el dominio de frecuencias converge uniformemente en la distancia de Mallows hacia el mismo límite hacia el que convergen los coeficientes de Fourier, tal que:*

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) &= o_P(1) \\ \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (y^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) &= o_P(1) \end{aligned}$$

Es pertinente mencionar que esta hipótesis implica a su vez la Hipótesis (7).

Como se ha mencionado previamente los métodos TFT-Bootstrap replican correctamente la estructura del momento de segundo orden en las series remuestreadas que generan estos métodos, este resultado se concluye del tercer numeral del siguiente lema:

LEMA 2.15.

1. *Supongamos que se cumple la Hipótesis (6). Así para algún $0 \leq u \leq 1$ y $1 \leq m \leq T$ se cumple:*

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(l) \right) = 0$$

2. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis (3,6 y 7). Entonces para $0 \leq u, v \leq 1$ se cumple:*

$$\begin{aligned} &\text{cov}^* \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(l_1), \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} Z^*(l_2) \right) \\ &\xrightarrow{P} \begin{cases} 2\pi f(0) \text{mín}(u, v), & \frac{m}{T} \rightarrow 0 \\ 2\pi f(0) [\text{mín}(u, v) - uv], & m = T \end{cases} \end{aligned}$$

3. Supongamos que se cumplen las Hipótesis (3,6 y 7). Se cumple entonces:

$$\begin{aligned}\text{Cov}_*(Z^*(l_1), Z^*(l_2)) &= \text{Cov}(V(l_1), V(l_2)) + o_P(1) \\ &= \text{Cov}(Z(l_1), Z(l_2)) + o_P(1)\end{aligned}$$

Para todo l_1, l_2 fijos.

Demostración.- Para la demostración de algunos de los literales se utilizará el siguiente lema:

Bajo la Hipótesis (3), se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{T} \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) \cos(\lambda_k h) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma(h + lT) - \frac{2\pi}{T} f(0) - \frac{2\pi}{T} f(\pi) \exp(i\pi h) \mathbb{1}_{\{T \text{ par}\}} \\ N &= \lfloor (T-1)/2 \rfloor, \lambda_k = 2\pi k/T\end{aligned}\tag{2.59}$$

Para la demostración del literal (1):

$$E_* \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(l) \right) = E_* \left(\frac{2}{\sqrt{mT}} \sum_{l=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{j=1}^N x^*(j) \cos\left(\frac{2\pi lj}{T}\right) - y^*(j) \sin\left(\frac{2\pi lj}{T}\right) \right)$$

Donde considerando que se cumple $E_*(x^*(j)) = E_*(y^*(j)) = 0, \forall j$ se obtiene el resultado esperado.

Ahora para la demostración del numeral (2), considerando $E_*(x^*(j)) = E_*(y^*(j)) = 0, \forall j$, lo supuesto la Hipótesis (7) y el resultado del lema citado al inicio de la demostración se tiene:

$$\begin{aligned}\text{cov}_* \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(l_1), \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} Z^*(l_2) \right) \\ &= \frac{4}{Tm} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{k=1}^N \text{var}_*(x^*(k)) \cos(l_1 \lambda_k) \cos(l_2 \lambda_k) \\ &\quad + \frac{4}{Tm} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{k=1}^N \text{var}_*(y^*(k)) \sin(l_1 \lambda_k) \sin(l_2 \lambda_k) \\ &= \frac{4\pi}{Tm} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) \cos(\lambda_k (l_1 - l_2)) + o_P(1) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma(l_1 - l_2 + lT) - \frac{2\pi}{T} f(0) - \frac{2\pi}{T} f(\pi) \exp(i\pi(l_1 - l_2)) \mathbb{1}_{\{T \text{ par}\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\pi}{mT}f(0)(\lfloor mu \rfloor \lfloor mv \rfloor) + \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma(l_1 - l_2 + lT) \\
&\quad - \frac{2\pi f(\pi)}{mT} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \exp(i\pi(l_1 - l_2)) \mathbb{1}_{\{Tpar\}}
\end{aligned}$$

Desarrollaremos el segundo y tercer término por separado, considerando que $u \leq v$. Para el segundo término, considerando que $\gamma(\cdot)$ es absolutamente sumable se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{j \neq 0} |\gamma(l_1 - l_2 + jT)| \leq \sum_{|h| \leq m} \frac{m - |h|}{m} \sum_{j \neq 0} |\gamma(h + jT)| \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\gamma(j)| + \sum_{|h| \leq m - \sqrt{m}} \sum_{j \neq 0} |\gamma(h + jT)| = o(1) + 2 \sum_{k \geq \sqrt{m}} |\gamma(k)| = o(1)
\end{aligned}$$

Por otro lado si consideramos $j = 0$ en el mismo término obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \gamma(l_1 - l_2) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mu \rfloor} \gamma(l_1 - l_2) + \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=\lfloor mu \rfloor+1}^{\lfloor mv \rfloor} \gamma(l_1 - l_2) \\
&\leq \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mu \rfloor} \gamma(l_1 - l_2) + \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{\lfloor mv \rfloor-1} h |\gamma(h)| \\
&= 2\pi f(0)u + o(1)
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad procede considerando que $\gamma(\cdot)$ es absolutamente sumable y de la definición de $f(\cdot)$. De esta forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma(l_1 - l_2 + lT) &= \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \sum_{j \neq 0} |\gamma(l_1 - l_2 + jT)| \\
&\quad + \frac{1}{m} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \gamma(l_1 - l_2) \\
&= o(1) + 2\pi f(0) \min(u, v)
\end{aligned}$$

Para el último término se considera:

$$\frac{1}{Tm} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \exp(i\pi(l_1 - l_2)) = \frac{1}{Tm} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} \exp(\pi i l_1) \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} \exp(-\pi i l_2) = O\left(\frac{1}{Tm}\right)$$

Por otro lado, para el primer término se cumple:

$$2\pi f(0) \frac{1}{Tm} (\lfloor mv \rfloor)(\lfloor mu \rfloor) = \begin{cases} o(1), & \frac{m}{T} \rightarrow 0 \\ 2\pi f(0)uv + o(1), & m = T. \end{cases}$$

De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{cov}_* \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l_1=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(l_1), \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l_2=1}^{\lfloor mv \rfloor} Z^*(l_2) \right) &= -\frac{2\pi}{mT} f(0) (\lfloor mu \rfloor \lfloor mv \rfloor) + o(1) \\ &\quad + 2\pi f(0) \text{mín}(u, v) + O\left(\frac{1}{mT}\right) \\ \xrightarrow{P} \begin{cases} 2\pi f(0) \text{mín}(u, v), & \frac{m}{T} \rightarrow 0 \\ 2\pi f(0) (\text{mín}(u, v) - uv), & m = T. \end{cases} \end{aligned}$$

Para la demostración del último numeral considerando que $\text{Var}(x(j)) = \text{Var}(y(j)) = \pi f(\lambda_j) + o(1)$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_*(Z^*(l_1), Z^*(l_2)) &= \frac{4}{T} \sum_{k=1}^N \text{Var}(x^*(k)) \cos(l_1 \lambda_k) \cos(l_2 \lambda_k) \\ &\quad + \text{Var}(y^*(k)) \sin(l_1 \lambda_k) \sin(l_2 \lambda_k) \\ &= \frac{4\pi}{T} \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) \cos(\lambda_k(l_1 - l_2)) + o_p(1) \\ &= \frac{4}{T} \sum_{k=1}^N (\text{Var}(x(j)) \cos(l_1 \lambda_k) \cos(l_2 \lambda_k) + \text{Var}(y(j)) \sin(l_1 \lambda_k) \sin(l_2 \lambda_k)) + o_p(1) \\ &= \text{Cov}(V(l_1), V(l_2)) + o_p(1) \end{aligned}$$

Por otro lado si consideramos $Z(j) = V(j) - \bar{V}_T$ tal que $\bar{V}_T = T^{-1} \sum_t V(t)$ se cumple que $\text{Cov}(Z(j), Z(k)) = \text{Cov}(V(j), V(k)) + o_p(1), \forall j, k$. Con lo cual obtenemos el resultado deseado. ■

Con este lema queda demostrado que el proceso $\{Z^*(\cdot)\}$ al igual que el proceso de sumas parciales tienen la estructura adecuada de la auto covarianza.

En esta misma línea el teorema siguiente brinda un teorema funcional de límite central en el mundo Bootstrap, demostrando que el proceso de sumas parciales tiene también el momento de segundo orden correcto.

TEOREMA 2.16. *Supongamos que se cumplen las Hipótesis (3,6,7 y 8), entonces:*

1. Si $m/T \rightarrow 0$ luego se cumple en probabilidad:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi f(0)m}} \sum_{l=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(l) : 0 \leq u \leq 1 \mid V(\cdot) \right\} \xrightarrow{D[0,1]} \{W(u) : 0 \leq u \leq 1\}$$

Donde $\{W(u) : 0 \leq u \leq 1\}$ en un proceso de Wiener.

2. Si adicionalmente se cumple la Hipótesis (9), se obtiene en probabilidad:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi f(0)T}} \sum_{l=1}^{\lfloor Tu \rfloor} Z^*(l) : 0 \leq u \leq 1 \mid V(\cdot) \right\} \xrightarrow{D[0,1]} \{B(u) : 0 \leq u \leq 1\}$$

Donde $\{B(u) : 0 \leq u \leq 1\}$ es un Movimiento Browniano.

Demostración.- La demostración presentada por Kirch y Politis, [Kirch, 2010] utiliza los siguientes resultados:

1.

LEMA 2.17. Si se cumplen las hipótesis (3,6 a 8) se cumple que para todo $u < v$

$$E^* \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l=\lfloor mu \rfloor+1}^{\lfloor mv \rfloor} Z^*(l) \right)^4 \leq (D + o_P(1)) (v - u)^2 \quad (2.60)$$

Para alguna constante $D > 0$

2.

LEMA 2.18. Sea $S_m^*(u) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{\lfloor mu \rfloor} Z^*(j)$.

- Si se cumplen las hipótesis (3, 6 a 8) y $m/T \rightarrow 0$ se obtiene que para todo $0 < u_1, \dots, u_p \leq 1$ en probabilidad:

$$(S_m^*(u_1), \dots, S_m^*(u_p)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma) \quad (2.61)$$

donde $\Sigma = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,p}$ con $c_{i,j} = 2\pi f(0) \min(u_i, u_j)$

- Si se cumplen las hipótesis (3,6 a 9) se obtiene que para todo $0 < u_1, \dots, u_p \leq 1$ en probabilidad:

$$(S_T^*(u_1), \dots, S_T^*(u_p)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma) \quad (2.62)$$

donde $\Sigma = (c_{i,j})_{i,j=1,\dots,p}$ con $c_{i,j} = 2\pi f(0) (\min(u_i, u_j) - u_i u_j)$

3.

TEOREMA 2.19. Sea $T_X = T_P$ donde P es la distribución de la variable X . Con T_X un subconjunto de $[0, 1]$ con elementos t para los cuales la proyección π_t es continua excepto en un conjunto cero medible. En nuestro caso $\pi_t = S_m^*(t)$

Supongamos que se cumple: $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}}_{\gamma_n} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ para puntos t_i de T_X , tal que $X_1 - X_{1-\delta} \xrightarrow{\mathcal{L}}_{\delta \rightarrow 0} 0$ y suponiendo que para $r \leq s \leq t, n \geq 1$ y $\lambda > 0$ se cumple:

$$P[|X_s^n - X_r^n| \wedge |X_t^n - X_s^n| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^{4\beta}} [F(t) - F(r)]^{2\alpha}$$

donde $\beta \geq 0$ y $\alpha > \frac{1}{2}$, y F es una función continua, no decreciente sobre $[0, 1]$.

Una condición más restrictiva de la hipótesis anterior es la siguiente:

$$E[|X_s^n - X_r^n|^{2\beta} |X_t^n - X_s^n|^{2\beta}] \leq [F(t) - F(r)]^{2\alpha} \quad (2.63)$$

Bajos estas hipótesis se cumple que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}}_n X$

Los lemas (2,60) y (2,18) implican el cumplimiento de las Hipótesis del Teorema (2,19) considerando la condición de momentos es decir la hipótesis de la ecuación (2,63). Así aplicando el teorema mencionado se obtiene que:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l=1}^{\lfloor mu \rfloor} (Z^*(l) - E^* Z^*(l)) : 0 \leq u \leq 1 \right\} \xrightarrow{D[0,1]} \begin{cases} \{W(u) : 0 \leq u \leq 1\}, & \frac{m}{T} \rightarrow 0 \\ \{B(u) : 0 \leq u \leq 1\}, & m = T \end{cases}$$

Recordemos que $Z^*(l)$ es la serie Bootstrap centrada por lo cual $E^* Z^*(l) = 0$ de esta forma se obtiene el resultado deseado. ■

Este teorema implica la validez de la inferencia de estadístico como los estadísticos CUSUM en el análisis del punto de cambio o estadísticos de mínimos cuadrados en el test de raíces unitarias. [Kirch y Politis, 2011]

Algunos estadísticos están basados en sumas parciales y no en las sumas parciales centradas. Para estos casos se aplica el siguiente corolario que es consecuencia de la parte 2. del teorema previo, conservando la validez de los resultados del TFT-Bootstrap.

COROLARIO 2.20. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema (2.16) y sea μ_T^* la versión Bootstrap de la media $\mu = EV(1)$, independiente de $\{Z^*(\cdot)\}$ tal

que para todo $z \in \mathbb{R}$:

$$P^* \left(\sqrt{T} (\mu_T^* - \mu) \leq z \right) \xrightarrow{P} \Phi \left(\frac{z}{\sqrt{2\pi f(0)}} \right)$$

Donde $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución normal estándar. Así en probabilidad se cumple:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{|2\pi f(0)T}} \sum_{t=1}^{\lfloor Tu \rfloor} (V^*(t) - \mu) : 0 \leq u \leq 1 \mid V(\cdot) \right\} \xrightarrow{D[0,1]} \{W(u) : 0 \leq u \leq 1\}$$

Donde $V^*(t) = Z^*(t) + \mu_T^*$.

Demostración.- Este corolario se desprende directamente de la aplicación del resultado del teorema (2.16) ■

Validez del método Empecemos considerando aquellos estimadores basados en el núcleo de la densidad espectral, así como los estadísticos de razón y los estimadores de Whittle.

Estos estimadores se basan en el periodograma si consideramos el periodograma obtenido por el método TFT-Bootstrap, este es muy similar al obtenido mediante los métodos que les dan el nombre a cada subtipo de Bootstrap, es decir Local Bootstrap y Bootstrap residual, cuando estos se desarrollan sobre el dominio de frecuencias.

En particular encontramos referencias de estos métodos y teoremas de validez de estos para los estadísticos previamente mencionados en Dahlhaus y Janas [Dahlhaus, R. y Janas, D., 1996] y Paparoditis y Politis [Paparoditis, E., 2022].

La diferencia de los periodogramas obtenidos mediante los métodos TFT tanto (RB) como (LB) de sus predecesores, que les dan sus nombre, reside en que no se realiza el remuestreo simultáneo de la parte real e imaginaria de los coeficientes de Fourier, ya que se hace uso de la propiedad de independencia de estos. Más aún las versiones Bootstrap de estos coeficientes conservan la independencia entre si cuando condicionamos respecto a las observaciones obtenidas. En particular, haciendo uso de esto último los teoremas de validez que se pueden encontrar en las referencias mencionadas previamente, permiten demostrar la validez de nuestros métodos TFT-Bootstrap (RB y LB) para las clases de estimadores mencionados. [Kirch y Politis, 2011]

Respecto a los estimadores CUSUM en el análisis de puntos críticos y los estimadores de mínimos cuadrados en las pruebas de raíces unitarias se puede encontrar la validez del método en Kirch y Politis, 2011; en lo concerniente a los Teoremas(6,1)

y (6,2) respectivamente.

Validez del teorema (2.16) para los métodos mencionados Considerando que el teorema mencionado es la base de los resultados válidos de los métodos, es vital que este resultado se cumpla, para ello en cada método es necesario que se cumplan las hipótesis respectivas del teorema, es decir las hipótesis (3,6,7,8).

Para ello usaremos las siguientes hipótesis relacionadas con las particularidades de cada método, dando así directrices sobre las elecciones que se debe hacer en cada uno de ellos y otras que se deben cumplir sobre la serie original.

Hipótesis:

HIPÓTESIS 10. La densidad espectral es acotada por debajo tal que $f(\lambda) \geq c \geq 0$ para todo $0 \leq \lambda \leq 2\pi$

HIPÓTESIS 11. Sea $\hat{f}(\cdot)$ la estimación de la densidad espectral $f(\cdot)$ de forma uniforme, es decir tal que cumple: $\sup_{\lambda \in [0, \pi]} |\hat{f}(\lambda) - f(\lambda)| \xrightarrow{P} 0$

HIPÓTESIS 12. Las siguientes ecuaciones sobre las sumas del periodograma y los coeficientes de Fourier se cumplen:

1.

$$\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{f(\lambda_j)}} \xrightarrow{P} 0$$

2.

$$\frac{1}{2\pi N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{f(\lambda_j)} \xrightarrow{P} 1$$

3.

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{I^2(j)}{f^2(\lambda_j)} \leq C + o_P(1)$$

Para alguna constante $C > 0$, donde $I(j) = x^2(j) + y^2(j)$ es el periodograma. En particular, el ítem 2 se cumple si $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{I^2(j)}{f^2(\lambda_j)} \xrightarrow{P} C > 0$

HIPÓTESIS 13. La función de distribución empírica basada en los coeficientes de Fourier converge uniformemente a la función de distribución normal estándar $\Phi(\cdot)$, tal que:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \left(\mathbb{1} \left\{ x(j) \leq z \sqrt{\pi f(\lambda_j)} \right\} + \mathbb{1} \left\{ y(j) \leq z \sqrt{\pi f(\lambda_j)} \right\} \right) - \Phi(z) \right| \xrightarrow{P} 0$$

HIPÓTESIS 14. Se cumplen las siguientes características sobre las sumas del periodograma y/o coeficientes de Fourier:

1.

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{j,T} (x(k+j) + y(k+j)) \right| = o_P(1)$$

2.

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{j,T} I(k+j) - 2\pi f(\lambda_k) \right| = o_P(1)$$

3.

$$\sup_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{j,T} I^2(k+j) \leq C + o_P(1)$$

Donde $I(j) = x^2(j) + y^2(j)$ si j no es un múltiplo de T y $I(cT) = 0$ para $c \in \mathbb{Z}$ y $p_{j,T}$ establecidos como en la descripción del método

HIPÓTESIS 15. La función empírica de distribución basada en los coeficientes de Fourier converge uniformemente a la función de distribución normal estándar $\Phi(\cdot)$, tal que:

$$\sup_s P \left(\sup_{z \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_{j-s,T} \left(\mathbb{1} \left\{ x(j) \leq z \sqrt{\pi f(\lambda_j)} \right\} + \mathbb{1} \left\{ y(j) \leq z \sqrt{\pi f(\lambda_j)} \right\} \right) - \Phi(z) \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

Con esto claro establecemos el teorema siguiente:

TEOREMA 2.21. Asumimos que se cumple la Hipótesis (3) tanto para el método RB como LB. De igual forma para ambos métodos la Hipótesis (6) se cumple por definición.

Ahora para el método RB, supongamos que se cumple la Hipótesis (10), así:

1. Supongamos que se cumple la Hipótesis (11), entonces se cumple la Hipótesis (7).
2. Supongamos que se cumple adicionalmente la Hipótesis (12), entonces se cumple la Hipótesis (8).
3. Supongamos que se cumple adicionalmente la Hipótesis (13), entonces se cumple la Hipótesis (9).

Ahora para el método LB tenemos:

1. Supongamos que se cumplen las Hipótesis (14) literales 1 y 2, entonces se cumple la Hipótesis (7).
2. Supongamos que se cumple adicionalmente la Hipótesis (14) literal 3, entonces se cumple la Hipótesis (8).
3. Supongamos que se cumple adicionalmente la Hipótesis (15), entonces se cumple la Hipótesis (9).

Demostración.- a) Residual based Bootstrap RB:

1. Por demostrar:

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |\text{var}^*(x^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = o_P(1)$$

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |\text{var}^*(y^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = o_P(1)$$

Considerando que $\text{Var}^*(x^*(k)) = \text{Var}^*(y^*(k))$ desarrollaremos tan solo para el caso de x^* ya que será análogo para y^* .

$$\begin{aligned} \text{Var}^*(x^*(k)) &= E^*(x^*(k))^2 - (E^*(x^*(k)))^2 = E^*(x^*(k))^2 \\ &= \pi \hat{f}(\lambda_k) E^*(s_k^*)^2 \\ &= \pi \hat{f}(\lambda_k) \sum_{i=1}^{2N} s_i^2 * \left(\frac{1}{2N}\right) \\ &= \frac{\pi \hat{f}(\lambda_k)}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \left(\frac{\tilde{s}_i - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l}{\sqrt{(1/(2N)) \sum_{t=1}^{2N} (\tilde{s}_t - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l)^2}} \right)^2 \\ &= \pi \hat{f}(\lambda_k) \frac{\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} (\tilde{s}_i - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l)^2}{\frac{1}{2N} \sum_{t=1}^{2N} (\tilde{s}_t - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l)^2}} \\ &= \pi \hat{f}(\lambda_k) \end{aligned}$$

Utilizando este resultado se obtiene:

$$\sup_k |\text{var}^*(x^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = \sup_k \left| \pi \hat{f}(\lambda_k) - \pi f(\lambda_k) \right| \xrightarrow{P} 0$$

La convergencia se obtiene de aplicar la Hipótesis (11). ■

2. Por demostrar:

$$\sup_{1 \leq k \leq N} E^*(x^*(k))^4 \leq C + o_P(1), \quad \sup_{1 \leq k \leq N} E^*(y^*(k))^4 \leq C + o_P(1)$$

Considerando que $E^* (x^*(k))^4 = E^* (y^*(k))^4$ desarrollaremos tan solo para el caso de x^* ya que será análogo para y^* .

$$\begin{aligned}
E^* (x^*(k))^4 &= \frac{\pi^2 \hat{f}^2(k)}{2N} \sum_{i=1}^{2N} s_i^4 \\
&= \frac{\pi^2 \hat{f}^2(k)}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \left(\frac{\tilde{s}_i - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l}{\sqrt{(1/(2N)) \sum_{t=1}^{2N} (\tilde{s}_t - (1/(2N)) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l)^2}} \right)^4 \\
&= \frac{(\pi^2 \hat{f}^2(\lambda_k)) \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} (\tilde{s}_j - \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l)^4}{\left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} (\tilde{s}_j - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \tilde{s}_k)^2 \right)^2}
\end{aligned}$$

Desarrollaremos por separados el numerador y denominador de la expresión previa, de esta forma se obtiene que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \left(\tilde{s}_j - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \tilde{s}_k \right)^2 \\
&= \frac{1}{2N} \left[\sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j^2 - \frac{2}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \tilde{s}_i \sum_{k=1}^{2N} \tilde{s}_k + \left(\frac{1}{2N} \right)^2 2N \left(\sum_{i=1}^{2N} \tilde{s}_i \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2N} \left[\sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j^2 + \left(\sum_{i=1}^{2N} \tilde{s}_i \right)^2 \left(\frac{1}{2N} - \frac{1}{N} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j^2 - \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \tilde{s}_i \right)^2 \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi \hat{f}(\lambda_j)} - \left(\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}} \right)^2
\end{aligned}$$

Las últimas líneas se obtienen considerando $\tilde{s}_j = \frac{x(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}}$, $\tilde{s}_{N+j} = \frac{y(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}}$ y $I(j) = x^2(j) + y^2(j)$ para $j = 1, \dots, N$.

Consideramos ahora un cambio en el denominador que nos permita utilizar la Hipótesis (12) para lograr la convergencia en probabilidad que necesitamos, es decir necesitamos expresar en función de la densidad espectral y no de su

estimación, de esta forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \left(\tilde{s}_j - \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \tilde{s}_k \right)^2 = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi \hat{f}(\lambda_j)} - \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}} \right)^2 \\
& = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} - \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_j)}} \right)^2 \\
& + O(1) \sup_k \left| \frac{f(\lambda_k) - \hat{f}(\lambda_k)}{\pi \hat{f}(\lambda_k)} \right| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{f(\lambda_j)} \xrightarrow{P} 1
\end{aligned}$$

La última línea procede de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi \hat{f}(\lambda_j)} - \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}} \right)^2 \\
& = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi \hat{f}(\lambda_j)} - \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)}} \right)^2 + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} \\
& = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} \left(\frac{\hat{f}(\lambda_j) - f(\lambda_j)}{\hat{f}(\lambda_j)} \right) - \left[\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_j)}} \left(\frac{\hat{f}(\lambda_j) - f(\lambda_j)}{\hat{f}(\lambda_j)} \right) \right]^2 \\
& \leq \left[1 + \sup_k \left| \frac{\hat{f}(\lambda_k) - f(\lambda_k)}{\hat{f}(\lambda_k)} \right| \right] \left[\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} \right] \\
& - \sup_k \left| \frac{\hat{f}(\lambda_k) - f(\lambda_k)}{\hat{f}(\lambda_k)} \right| \left[\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j) + y(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_j)}} \right] \xrightarrow{P} 1
\end{aligned}$$

Este resultado implica que nuestro denominador converge en probabilidad y que este no diverge en el resultado que esperamos. Por otro lado para el numerador tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \left(\tilde{s}_i - \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l \right)^4 \\
& \leq \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \left(2 \left[\tilde{s}_j^2 + \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j \right)^2 \right] \right)^2 \\
& \leq \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} 2 \left[\left(2\tilde{s}_j^2 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j \right)^4 \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2N} \left(\sum_{j=1}^{2N} (8\tilde{s}_j^4) + \frac{1}{2N^4} \left(\sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j \right)^4 \right)$$

De esto conocemos que por la Hipótesis (12) literal 1 el segundo término converge en probabilidad a cero, por lo cual analizaremos tan solo el primer término.

$$\begin{aligned} 8 \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} (\tilde{s}_j^4) &= 8 \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j)^4 + y(j)^4}{(\pi \hat{f}(\lambda_j))^2} \\ &\leq 8 \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{x(j)^4 + y(j)^4 + 2x(j)^2 y(j)^2}{(\pi \hat{f}(\lambda_j))^2} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{I(j)}{\pi \hat{f}(\lambda_j)} \right)^2 \\ &= 8 \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{I(j)}{\pi \hat{f}(\lambda_j)} + \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} - \frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} \right)^2 \\ &\leq 4 \frac{1}{N} \left(1 + \sup_k \left(\frac{f(\lambda_k) - \hat{f}(\lambda_k)}{\pi \hat{f}(\lambda_k)} \right)^2 \right) \sum_{j=1}^N \left(\frac{I(j)}{\pi f(\lambda_j)} \right)^2 \leq C + o_p(1) \end{aligned}$$

La última línea debido a la Hipótesis (12) literal 3, con lo cual uniendo estos resultados obtenemos $\sup_{1 \leq k \leq N} E^*(x^*(k))^4 \leq C + o_p(1)$. ■

3. Por demostrar:

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq j \leq N} d_2(\mathcal{L}^*(x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j))) &= o_p(1) \\ \sup_{1 \leq j \leq N} d_2(\mathcal{L}^*(y^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j))) &= o_p(1) \end{aligned}$$

Se desarrollará la demostración para el caso de $x^*(j)$ la demostración es idéntica para $y^*(j)$.

Para el desarrollo de esta demostración definiremos lo siguiente: sea $\{U_N(j) : 1 \leq j \leq 2N\}$ la sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman los valores de $1, \dots, 2N$ con igual probabilidad.

Además se denota: $\tilde{s}_j^* = \tilde{s}_{U_N(j)}, \tilde{s}_j^* = \sqrt{\hat{f}(\lambda_{U_N(j)}) / f(\lambda_{U_N(j)})} \tilde{s}_{U_N(j)}, s_j^* = S_{U_N(j)}$. Recordemos además que para este método se tiene $x^*(j) \stackrel{\mathcal{L}^*}{=} \sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)} s_j^*$
 $y^*(j) \stackrel{\mathcal{L}^*}{=} \sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)} s_{N+j}^*, j = 1, \dots, N$

De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) \\ & \leq \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), \mathcal{L}^* \left(\sqrt{\pi f(\lambda_j)} s_j^* \right) \right) \\ & + \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* \left(\sqrt{\pi f(\lambda_j)} s_j^* \right), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) \end{aligned}$$

Desarrollaremos cada término por separado, obtenemos así:

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), \mathcal{L}^* \left(\sqrt{\pi f(\lambda_j)} s_j^* \right) \right) \\ & = \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* \left(\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)} s_j^* \right), \mathcal{L}^* \left(\sqrt{\pi f(\lambda_j)} s_j^* \right) \right) \\ & = \sup_j \mathbb{E}^* \left[s_j^* \left(\sqrt{\pi \hat{f}(\lambda_j)} - \sqrt{\pi f(\lambda_j)} \right) \right]^2 \\ & \leq \mathbb{E}^* (s_1^*)^2 \sup_j \left| \pi \hat{f}(\lambda_j) - \pi f(\lambda_j) \right| = \sup_j \left| \pi \hat{f}(\lambda_j) - \pi f(\lambda_j) \right| \end{aligned}$$

La última línea la obtenemos considerando el resultado desarrollado de la varianza de $x^*(j)$ tomando en cuenta que $\text{Var}^*(x^*(j)) = \pi \hat{f}(\lambda_j) \mathbb{E}^*(s_j^*)^2 = \pi \hat{f}(\lambda_j)$ para todo $j = 1, \dots, N$.

Para el segundo término aplicaremos nuevamente desigualdad triangular para la distancia en función de las variables definidas al inicio, obteniendo:

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* \left(\sqrt{\pi f(\lambda_j)} s_j^* \right), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) \\ & \leq \sup_j |f(\lambda_j)| d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (s_1^*), N(0, 1) \right) \\ & \leq \sup_j |f(\lambda_j)| \left[d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (s_1^*), \mathcal{L}^* (\tilde{s}_1^*) \right) + d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (\tilde{s}_1^*), \mathcal{L}^* (\tilde{\tilde{s}}_1^*) \right) \right. \\ & \quad \left. + d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (\tilde{\tilde{s}}_1^*), N(0, 1) \right) \right] \\ & \leq \sup_j |f(\lambda_j)| \left[\mathbb{E}^* (s_1^* - \tilde{s}_1^*)^2 + \mathbb{E}^* (\tilde{s}_1^* - \tilde{\tilde{s}}_1^*)^2 \right. \\ & \quad \left. + d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (\tilde{\tilde{s}}_1^*), N(0, 1) \right) \right] \end{aligned}$$

Sobre estos términos, en el caso de $d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (\tilde{\tilde{s}}_1^*), N(0, 1) \right)$ por la hipótesis (13) y la Hipótesis (12) converge en probabilidad a cero.

Para los otros términos desarrollaremos a continuación:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* (s_1^* - \tilde{s}_1^*)^2 &= \mathbb{E}^* \left(s_{U_N(1)} - \tilde{s}_{U_N(1)} \right)^2 = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} (s_j - \tilde{s}_j)^2 \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \left(s_j^2 - 2s_j\tilde{s}_j + \tilde{s}_j^2 \right) \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \left[s_j^2 - 2\tilde{s}_j \left(\frac{\tilde{s}_j - 1/(2N) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l}{\sqrt{1/(2N) \sum_{t=1}^{2N} \left(\tilde{s}_t - 1/(2N) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l \right)^2}} \right) + \tilde{s}_j^2 \right] \\
&= 1 - \frac{1}{N} \left(\frac{\sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j^2 - 1/(2N) \left(\sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l \right)^2}{\sqrt{1/(2N) \sum_{t=1}^{2N} \left(\tilde{s}_t - 1/(2N) \sum_{l=1}^{2N} \tilde{s}_l \right)^2}} \right) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \tilde{s}_i^2 \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

La última línea procede de los resultados obtenidos previamente y de la hipótesis (12)

Por otro lado se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \left(\hat{s}_1^* - \tilde{s}_1^* \right)^2 &= \mathbb{E}^* \left(\tilde{s}_{U_N(1)} - \tilde{s}_{U_N(1)} \sqrt{\frac{\hat{f}(\lambda_{U_N(1)})}{f(\lambda_{U_N(1)})}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j^2 \left[1 - \sqrt{\frac{\hat{f}(\lambda_j)}{f(\lambda_j)}} \right]^2 \\
&\leq \sup_k \frac{|f(\lambda_k) - \hat{f}(\lambda_k)|}{f(\lambda_k)} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} \tilde{s}_j^2 = o_p(1)
\end{aligned}$$

Uniendo estos resultados a lo encontrado previamente se obtiene $\sup_{1 \leq j \leq N} d_2(\mathcal{L}^*(x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)))$.

■

b) Local Bootstrap LB:

1. Por demostrar:

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |\text{var}^*(x^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = o_p(1)$$

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |\text{var}^*(y^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| = o_p(1)$$

Considerando que $\text{Var}^*(x^*(k)) = \text{Var}^*(y^*(k))$ desarrollaremos tan solo para el caso de x^* ya que será análogo para y^* .

$$\text{Var}^*(x^*(k)) = \text{E}(x^*(k))^2 - (\text{E} x^*(k))^2$$

De donde recordando la forma de obtención de nuestros coeficientes remuestreados definida por:

$$x^*(j) = \tilde{x}^*(j) - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s))$$

$$y^*(j) = \tilde{y}^*(j) - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s))$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\text{E} x^*(k) = \text{E} \left[\tilde{x}^*(k) - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right]$$

Considerando la forma de obtención de los $\tilde{x}^*(k)$ y $\tilde{y}^*(k)$, se cumple:

$$\text{E} [\tilde{x}^*(k)] = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s))$$

Considerando estos últimos resultados obtenemos $\text{E} x^*(k) = 0$. Desarrollaremos entonces el primer término: $\text{E}(x^*(k))^2$

$$\begin{aligned} \text{E}(x^*(k))^2 &= \text{E} \left[\left(\tilde{x}^*(k) - \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^2 \right] \\ &= \text{E} \left[(\tilde{x}^*(k))^2 - \tilde{x}^*(k) \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Considerando la forma de obtención de los $\tilde{x}^*(k)$ y $\tilde{y}^*(k)$, se cumple:

$$\text{E} [(\tilde{x}^*(k))^2] = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s)^2 + y(k+s)^2)$$

Considerando estos resultados se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x^*(k))^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} \left(x(k+s)^2 + y(k+s)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^2 \end{aligned}$$

Con estos resultados se obtiene:

$$\text{Var}^*(x^*(k)) = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (I(k+s)) - \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^2$$

Con ello:

$$\begin{aligned} &\sup_k |\text{var}^*(x^*(k)) - \pi f(\lambda_k)| \\ &\leq \sup_k \left| \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (I(k+s)) - 2\pi f(\lambda_k) \right| + \sup_k \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^2 \\ &= o_p(1) \end{aligned}$$

La última línea se obtiene aplicando la Hipótesis(14) literales 1 y 2. ■

2. Por demostrar:

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq k \leq N} \mathbb{E}^* (x^*(k))^4 &\leq C + o_p(1), \quad \sup_{1 \leq k \leq N} \mathbb{E}^* (y^*(k))^4 \leq C + o_p(1) \\ \mathbb{E}^* (x^*(k))^4 &\leq 2 \mathbb{E}^* \left((\tilde{x}^*(k))^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^2 \right)^2 \\ &\leq 4 \mathbb{E}^* \left((\tilde{x}^*(k))^4 + \frac{1}{16} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^4 \right) \end{aligned}$$

Además se obtiene que:

$$\mathbb{E}^* \left[(\tilde{x}^*(k))^4 \right] = \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} \left(x(k+s)^4 + y(k+s)^4 \right)$$

Utilizando esta igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} E^* (x^*(k))^4 &\leq 2 \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} \left(x(k+s)^4 + y(k+s)^4 \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^4 \\ &\leq 2 \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} \left(I(k+s)^2 \right) + \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^4 \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \sup_k E^* (x^*(k))^4 &\leq \sup_k 2 \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} \left(I(k+s)^2 \right) \\ &+ \sup_k \frac{1}{4} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(k+s) + y(k+s)) \right)^4 \leq C + o_p(1) \end{aligned}$$

La última línea se obtiene aplicando las hipótesis (14) literales 1 y 3. ■

3. Por demostrar:

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) &= o_p(1) \\ \sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (y^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) &= o_p(1) \end{aligned}$$

Se desarrollará la demostración para el caso de $x^*(j)$ la demostración es idéntica para $y^*(j)$.

Notemos $\tilde{x}^*(j) = \tilde{x}^*(j) / \sqrt{\pi f(\lambda_{j+J_{j,T}})}$ donde $J_{j,T}$ es la misma variable aleatoria definida en el método LB. De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} &\sup_{1 \leq j \leq N} d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) \\ &\leq \sup_{1 \leq j \leq N} d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), \mathcal{L}^* (\tilde{x}^*(j)) \right) + \sup_{1 \leq j \leq N} d_2^2 \left(\mathcal{L}^* (\tilde{x}^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) \end{aligned}$$

Recordemos que $d_2(P_1, P_2) = \inf \left(E |X_1 - X_2|^2 \right)^{1/2}$ donde el ínfimos se tomar sobre todas las variables aleatoria (X_1, X_2) con distribuciones marginales P_1 y

P_2 respectivamente. Por ello se cumple:

$$\begin{aligned} & \sup_j d_2^2(\mathcal{L}^*(\tilde{x}^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j))) \\ & \leq \pi \sup_j |f(\lambda_j)| \sup_j d_2^2\left(\mathcal{L}^*\left(\frac{\tilde{x}^*(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_j)}}\right), N(0, 1)\right) \end{aligned}$$

Además por definición de $x^*(j)$ se cumple:

$$\sup_j d_2^2(\mathcal{L}^*(x^*(j)), \mathcal{L}^*(\tilde{x}^*(j))) = \sup_j \left| \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s)) \right|^2$$

De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq j \leq N} d_2^2(\mathcal{L}^*(x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j))) \\ & \leq \sup_j \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s)) \right)^2 \\ & + \pi \sup_j |f(\lambda_j)| \left[\sup_j d_2^2\left[\mathcal{L}^*\left(\tilde{x}^*(j)/\sqrt{\pi f(\lambda_j)}\right), \mathcal{L}^*(\tilde{x}^*(j))\right] \right. \\ & \left. + \sup_j d_2^2(\mathcal{L}^*(\tilde{x}^*(j)), N(0, 1)) \right] \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} & \sup_j d_2^2\left[\mathcal{L}^*\left(\tilde{x}^*(j)/\sqrt{\pi f(\lambda_j)}\right), \mathcal{L}^*(\tilde{x}^*(j))\right] \\ & = \sup_j \mathbb{E} \left| \frac{\tilde{x}^*(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_j)}} - \tilde{x}^*(j) \right|^2 = \sup_j \mathbb{E} \left| \frac{\tilde{x}^*(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_j)}} - \frac{\tilde{x}^*(j)}{\sqrt{\pi f(\lambda_{j+J_{j,T}})}} \right|^2 \\ & \leq \sup_j \left| \frac{\sqrt{f(\lambda_{j+J_{j,T}})} - \sqrt{f(\lambda_j)}}{\sqrt{\pi f(\lambda_{j+J_{j,T}})} f(\lambda_j)} \right|^2 \mathbb{E} |\tilde{x}^*(j)|^2 \\ & \leq \sup_j \left| \frac{f(\lambda_{j+J_{j,T}}) - f(\lambda_j)}{\pi f(\lambda_{j+J_{j,T}}) f(\lambda_j)} \right| \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} I(j+s) \\ & \leq \sup_{1 \leq l \leq N - Th_T} \sup_{-Th_T \leq k \leq Th_T} \frac{|f(\lambda_{l+k}) - f(\lambda_l)|}{f(\lambda_{l+k}) f(\lambda_l)} \sup_j \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} I(j+s) \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis (3) f es uniformemente continua, por lo cual

$\sup_{1 \leq k \leq N} \sup_{-Th_T \leq j \leq Th_T} |f(\lambda_{k+j}) - f(\lambda_k)| = o(1)$. Aplicando este resultado obtenemos que;

$$\sup_{1 \leq l \leq N} \sup_{-Th_T \leq k \leq Th_T} \frac{|f(\lambda_{l+k}) - f(\lambda_l)|}{f(\lambda_{l+k}) f(\lambda_l)} \sup_j \sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} I(j+s) = o_p(1)$$

Por otro lado por la Hipótesis (15) se obtiene que:

$$\sup_s d_2^2 \left(\mathcal{L}^* \left(\tilde{x}^*(s) \right), N(0, 1) \right) \preceq o_p(1)$$

Y finalmente aplicando la Hipótesis (14) literal 1, se obtiene:

$$\sup_j \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} p_{s,T} (x(j+s) + y(j+s)) \right)^2 = o_p(1)$$

Con todos estos resultados obtenemos finalmente:

$$\sup_{1 \leq j \leq N} d_2 \left(\mathcal{L}^* (x^*(j)), N(0, \pi f(\lambda_j)) \right) = o_p(1)$$

■

De esta forma con este teorema se demuestra como efectivamente en base a suposiciones sencillas sobre las series y las elecciones en cada método entonces las hipótesis del teorema 2.16 se cumplen tanto para el teorema RB y LB, lo que permite que las series remuestreadas y el proceso de sumas parciales de esta conservan la estructura correcta del momento de segundo orden de la serie original.

Capítulo 3

Aplicación de métodos Bootstrap sobre series temporales

En este capítulo se presenta en primera instancia los aspectos relacionados a la implementación de los métodos Bootstrap por Bloques (MBB,CBB y SB), así como TFT-Bootstrap (RB y LB) en el software R. Posteriormente se exhibirá los resultados de las simulaciones de series temporales de diferentes tipos: estacionarias, lineales y no lineales, con las cuales corroboraremos el funcionamiento de los métodos Bootstrap implementados previamente.

Finalmente, se presentan los resultados de las estimaciones realizadas mediante los métodos Bootstrap a las series de índices de alternancia de la Onda T en pacientes con cardiopatías, se mostrará la validez de la aplicación de los métodos, así como la comparación de los resultados y su interpretación.

3.1. Estimación de parámetros de segundo orden para los métodos Bootstrap

En esta sección se presentará la implementación utilizada para la obtención de los parámetros de segundo orden: BIAS, MSE y Varianza; para ello se presentará su obtención teórica y la formulación práctica usada para su estimación mediante la técnica Monte Carlo.

3.1.1. Nociones generales

Se considerará en esta subsección: $T_n = \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta)$, tal que $\hat{\theta}_n$ se estima a partir de un proceso de serie temporal $\{X_n\}$ estacionaria, con n , siendo θ nuestro parámetro de interés.

De esta forma expresaremos los parámetros de segundo orden de interés de la siguiente forma: $\varphi_{1n} \equiv E T_n^2 = (n) \text{MSE}(\hat{\theta}_n)$, $\varphi_{2n} \equiv E T_n = \sqrt{n} \text{BIAS}(\hat{\theta}_n)$ y $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \equiv \varphi_{3n} = \varphi_{1n} - \varphi_{2n}^2$.

Se supondrá en adelante que $\hat{\theta}_{n1} = H(\bar{Y}_{n1})$ donde $\{Y_i\}$ es una serie estacionaria definida a partir de la serie $\{X_i\}$ de longitud de serie temporal $n1$, además H será una función suave; en otras palabras, nuestro estimador se puede expresar como función suave de la media de un proceso estacionario.

Además consideraremos el símbolo * en los estimadores y series para señalar que provienen de muestras Bootstrap.

De esta forma se definirá los estimadores de los parámetros de segundo orden de la siguiente forma: $\hat{\varphi}_{1n} = E (T_n^*)^2$, $\hat{\varphi}_{2n} = E (T_n^*)$ y $\hat{\varphi}_{3n} = \hat{\varphi}_{1n} - \hat{\varphi}_{2n}^2$.

Donde E_* es la esperanza condicional a las observaciones. Además, para los métodos por Bloques: $T_n^* = \sqrt{n1} \left(H(\bar{Y}_{n1}^*) - H(E_*(\bar{Y}_{n1}^*)) \right)$ y para los métodos TFT-Bootstrap $T_n^* = \sqrt{n1} \left(H(\overline{G(X_n^*)}_{n1}) - H(E_*(\overline{G(X_n^*)}_{n1})) \right)$, tal que $G(X_n^*)$ denota los elementos de una serie definida de forma paralela a $\{Y_i\}$ a partir de $\{X_i\}$ pero en este caso a partir de $\{X_i^*\}$, donde esta última es cada muestra Bootstrap obtenida.

Por último, se debe señalar que para los métodos TFT-Bootstrap el remuestreo se realiza sobre la serie original pese a que su estimador se pueda definir como función suave de la media de un proceso redefinido, mientras que para los métodos por Bloques el remuestreo se realiza sobre el proceso redefinido.

En ambos casos para una comparación acertada de los resultados se ha utilizado las mismas funciones implementadas, con la diferencia que para el TFT-Bootstrap el proceso redefinido será a partir de cada muestra Bootstrap obtenida, y en el caso de los métodos por Bloques las muestras Bootstrap obtenidas ya tendrán la forma del proceso redefinido por lo cual no se aplicará una transformación adicional.

3.1.2. Desarrollo para cada método Bootstrap

A continuación se desarrollará $E_* \left(\bar{Y}_{n1}^* \right)$ para los diferentes métodos Bootstrap, utilizando los siguientes superíndices: ⁽¹⁾ para el método MBB, ⁽²⁾ para el método CBB, ⁽³⁾ para el método SB, ⁽⁴⁾ para el método TFT-Bootstrap RB y ⁽⁵⁾ para el método TFT-Bootstrap.

Se considera ℓ como la longitud de bloque elegida para los métodos MBB y CBB y para el método SB ℓ denotará la esperanza de la longitud de bloques. Para los métodos MBB y CBB definimos k_0 como el mínimo entero que cumple $\geq n1/\ell$. Utilizaremos para esto los resultados obtenidos en la sección 2.2.8.1.

Método MBB:

$$\begin{aligned}
 E_* \left(\bar{Y}_{n1}^{*(1)} \right) &= E_* \left(\frac{1}{n1} \sum_{i=1}^{n1} Y_i^{*(1)} \right) \\
 &= \frac{1}{n1} E_* \left(\left[\sum_{i=1}^{k_0-1} Y_{(i-1)\ell+1}^{*(1)} + \dots + Y_{i\ell}^{*(1)} \right] + Y_{\ell(k_0-1)+1}^{*(1)} + \dots + Y_{n1}^{*(1)} \right) \\
 &= \frac{1}{n1} \left(\sum_{i=1}^{k_0-1} E_* \left(Y_{(i-1)\ell+1}^{*(1)} + \dots + Y_{i\ell}^{*(1)} \right) + E_* \left(Y_{\ell(k_0-1)+1}^{*(1)} + \dots + Y_{n1}^{*(1)} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{n1} \left[\frac{k_0 - 1}{n1 - \ell + 1} \sum_{i=1}^{n1-\ell+1} Y_i + \dots + Y_{i+\ell-1} + \frac{1}{n1 - \ell + 1} \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=1}^{n1-\ell+1} X_i + \dots + X_{i+n1-\ell(k_0-1)-1} \right]
 \end{aligned}$$

Notaremos este resultado como $\hat{\mu}_{n1}^{(1)} \equiv E_* \left(\bar{Y}_{n1}^{*(1)} \right)$

Método CBB:

$$\begin{aligned}
 E_* \left(\bar{Y}_{n1}^{*(2)} \right) &= E_* \left(\frac{1}{n1} \sum_{i=1}^{n1} Y_i^{*(2)} \right) \\
 &= \frac{1}{n1} E_* \left(\left[\sum_{i=1}^{k_0-1} Y_{(i-1)\ell+1}^{*(2)} + \dots + Y_{i\ell}^{*(2)} \right] + Y_{\ell(k_0-1)+1}^{*(2)} + \dots + Y_{n1}^{*(2)} \right) \\
 &= \frac{1}{n1} \left(\sum_{i=1}^{k_0-1} E_* \left(Y_{(i-1)\ell+1}^{*(2)} + \dots + Y_{i\ell}^{*(2)} \right) + E_* \left(Y_{\ell(k_0-1)+1}^{*(2)} + \dots + Y_{n1}^{*(2)} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{n1} \left[\frac{k_0 - 1}{n1} \sum_{i=1}^{n1} \ell Y_i + \frac{\ell - (k_0\ell - n1)}{n1} \sum_{i=1}^{n1} Y_i \right] = \bar{Y}_i
 \end{aligned}$$

La última línea procede recordando que cada elemento de la serie aparece ℓ veces en todos los bloques y si consideramos los primeros s elementos de los bloques, cada

observación de la serie aparece exactamen s veces. Notaremos este resultado como $\hat{\mu}_{n1}^{(2)} \equiv E_* \left(\bar{Y}_{n1}^{*(2)} \right)$

Método SB: Por último recordando la definición secundaria del método Bootstrap SB que nos permite expresarlo como cadena de Markov, del resultado 2,25 se obtiene: $E_* \left(\bar{Y}_{n1}^{*(3)} \right) = \bar{Y}_i$, notamos como en los casos anteriores a este resultado como $\hat{\mu}_{n1}^{(3)}$

Método TFT-Bootstrap

A partir de la investigación realizada se estimará de forma práctica la esperanza condicional de la media de la muestra Bootstrap mediante las observaciones iniciales de la serie. Considerando que el método TFT-Bootstrap tiene por objetivo generar una serie remuestreada que guarde la estructura de segundo orden de la serie original, por lo cual la esperanza condicional a las observaciones no es más que la misma serie observada. En otras palabras: $E_*(\bar{X}_n^{*(4)}) = E_*(\bar{X}_n^{*(5)}) = \bar{Y}_{n1}$

Recordar que las muestras Bootstrap de los métodos TFT son centradas por lo cual al estimar parámetros de primer orden que consideren la media, se sumará una estimación de la media de la serie que puede ser obtenida por cualquier de los métodos previos.

Con estos resultados se tendrían las diferentes versiones de T_n^* para cada método, lo cual se considerará en la implementación de estos estimadores. Finalmente, se utilizará el método Monte Carlo para realizar la estimación de los parámetros de segundo orden con las consideraciones presentadas.

3.2. Implementación de los métodos Bootstrap

En esta sección se presentan aspectos que se consideraron para la implementación de los métodos Bootstrap para series temporales. Los métodos Bootstrap seleccionados fueron: Bootstrap por bloques (MBB, CBB, SB) y TFT-Bootstrap (RB, LB), para su implementación se utilizó el software R debido a que este cuenta con la programación previa de funciones complementarias que nos ayudarán a implementar adecuadamente los métodos Bootstrap.

Se generaron dos funciones, una para los métodos Bootstrap por Bloques y la segunda para los métodos TFT-Bootstrap, siguiendo los esquemas presentados en el capítulo previo.

Métodos Bootstrap por bloques: Respecto a los métodos por bloques se consi-

deran tres tipos que serán reconocidos en con diferentes subíndices: para el método MBB el índice 1, para el método CBB el índice 3 y para el método SB el índice 4.

Para la construcción de esta función se utilizó la función "b.star" de la librería "np", esta función permite determinar la longitud óptima de bloques para el método CBB y la longitud óptima esperada para el método SB. Para este último caso nos referimos a la esperanza de ℓ donde esta es la variable aleatoria que representa la longitud de bloque y $\ell \sim Geom(p)$, donde $p = 1/(1 + E(\ell))$. Esta función se establece bajo lo enunciado en [Patton, A. *et al.*, 2009] y [Politis, D.N. y White, H., 2004]. Sin embargo, la función respectiva también permite el ingreso de una longitud determinada por el usuario.

Además por lo establecido en [Politis, D.N. y White, H., 2004] se cumple que la longitud óptima de bloque para el método MBB equivale a la longitud óptima de bloque para el método CBB ya que ambos métodos coinciden en el sesgo y varianza de los estimadores bootstrap de varianza; lo cual se puede corroborar teóricamente en el teorema (2,7) presentado previamente.

La implementación de estos métodos se encuentra en el Anexo:Algoritmos implementados y la función ha sido denominada "BooBloque".

Métodos TFT-Bootstrap: Respecto a los métodos TFT-Bootstrap se consideran dos tipos que serán reconocidos en la implementación con diferentes subíndices: para el método RB el índice 1 y para el método LB el índice 2.

Como primer paso se realizó la implementación de funciones que nos permitan obtener los coeficientes de la transformada rápida de Fourier conforme lo establecido en las fórmulas (2,57). Existen diferentes funciones implementadas en R que nos permiten obtener los coeficientes de Fourier, sin embargo resulta indispensable que los coeficientes se obtengan bajo la referida fórmula que consta en el trabajo de [Kirch y Politis, 2011] y las funciones existentes no se adaptaban a esta necesidad. Se desarrollaron de esta forma la función "xFFT1" y "yFFT1" para los coeficientes de Fourier respectivos, estas funciones se encuentran en el Anexo:algoritmos implementados.

La función implementada para la obtención de las muestras TFT-Bootstrap se denomina "bootcfourier" y se encuentra en el Anexo:algoritmos implementados. A continuación se expondrán algunas consideraciones importantes que se tomaron en cuenta para la implementación de los métodos TFT-Bootstrap.

Método TFT Bootstrap RB

En el capítulo previo se detalló el proceso a seguir para la obtención de la muestra

TFT-Bootstrap RB, en su primer paso se detallaba la necesidad de que a estimación de la densidad espectral cumpla la ecuación (2,49):

$$\sup_{\lambda \in [0, \pi]} |\hat{f}(\lambda) - f(\lambda)| \xrightarrow{P} 0.$$

Esta característica también constituye la Hipótesis (11) que es fundamental para la consistencia de los resultados obtenidos.

Por ello el estimador de la densidad espectral a utilizar será el siguiente estimador núcleo de densidad:

$$\hat{f}_T(\lambda) = \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} K((\lambda - \lambda_j)/h_T) I(j)}{2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} K(\lambda_j/h_T)} \quad (3.1)$$

Este tipo de estimador proviene del estimador núcleo de la densidad espectral presentado en el primer capítulo (2,17). Para que este estimador sea adecuado se requiere se cumplan las siguientes características sobre el núcleo:

HIPÓTESIS 16. Sea $K(\cdot)$ una función par positiva tal que $\int K(\lambda) d\lambda = 1$ y:

$$\frac{2\pi}{Th_T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{2\pi j}{Th_T}\right) = \int K(x) dx + o(1) = 1 + o(1)$$

Esta última propiedad reemplazada en la ecuación (2,17) permite obtener el tipo de estimador de densidad espectral señalado en (2,3) que se adecua a lo señalado en [Kirch y Politis, 2011].

A continuación se presenta el lema que permite corroborar que este estimador de densidad espectral bajo ciertas condiciones cumple con lo requerido en el paso 1 del método TFT-Bootstrap RB (2,49).

HIPÓTESIS 17. Sea el núcleo $K(\cdot)$ real, función par, tal que.

$$\int_{\mathbb{R}} |K(\lambda)| d\lambda < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} K(\lambda) d\lambda = 1$$

Además, la transformada inversa de Fourier de K dada por $k(x)$ satisface $|k(x)| \leq \tilde{k}(x)$ donde $\tilde{k}(x)$ es monótonamente decreciente sobre $[0, \infty)$, que además es par con:

$$\int_0^{\infty} (1+x)\tilde{k}(x) dx < \infty$$

HIPÓTESIS 18. Denotemos:

$$\Gamma_V(r) := N^{-1} \sum_{j=1}^{N-r} (V(j) - EV(0))(V(j+r) - EV(0))$$

satisface uniformemente en r cuando $T \rightarrow \infty$: $\Gamma_V(r) - E\Gamma_V(r) = O_P(N^{-\nu})$ para algún $0 < \nu < 1/2$

LEMA 3.1. Supongamos se cumplen las Hipótesis (3,16,17,18) y que el estimador $\hat{f}_T(\lambda)$ se define como en (3,1).

Además, supongamos que el ancho de banda satisface: $h_T + h_T^{-1}T^{-\nu} \xrightarrow{P} 0$ entonces:

$$\max_{\lambda \in [0, 2\pi]} \left| \hat{f}_T(\lambda) - f(\lambda) \right| \xrightarrow{P} 0$$

Estos resultados corroboran la validez del uso del estimador presentado, su implementación se realizó notando la función como "estdensidad" y se presenta en el Anexo:algoritmos implementados.

El ancho de banda utilizado en este método para todas las aplicaciones ha sido de 0,01 conforme la aplicación que se encuentra en la sección 7 del artículo principal de este método. [Billingsley, 1999]

Método TFT Bootstrap LB

En este método es fundamental considerar el paso 2 del método que considera v.a.i.i.d $J_{1,T}, \dots, J_{2N,T}$ sobre \mathbb{Z} tal que:

$$p_{s,T} = P(J_{j,T} = s) = \frac{K(2\pi s / (Th_T))}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} K(2\pi j / (Th_T))}$$

Estas variables se implementaron mediante la función "vartfft" presentada en el Anexo 2.

Además para este método se considera un ancho de banda h_T , el cual requiere además cumplir $h_T \rightarrow 0$ y $Th_T \rightarrow \infty$ para que se cumpla la validez del método.

En el caso de la implementación del local bootstrap para nuestra función se utilizó $h_T = \lfloor \frac{T-1}{2} \rfloor^{-1/3}$ que cumple con las características señaladas en el párrafo anterior. Se ha considerado este ancho de banda también considerando lo explicado en la sección 4 del artículo sobre el método Local Bootstrap original. [Paparoditis, E. y Politis, D. N., 1999]

Consideraciones sobre ambos métodos TFT-Bootstrap

Para ambos métodos en los casos que corresponda las sumatorias sobre \mathbb{Z} se han acotado entre $-N$ y N , considerando que entre estos rangos se encuentra la información de los coeficientes de Fourier por su periodicidad. Además los coeficientes de Fourier se han obtenido considerando las propiedades presentadas en (2,1) y

conforme lo presentado en las ecuaciones (2,57)

Por otro lado, una vez obtenidos los coeficientes de Fourier remuestreados, a partir de estos se genera la serie temporal respectiva utilizando la fórmula presentada en (2,8).

Adicionalmente para la aplicaciones que se verán a continuación se utilizará el núcleo Cuadrático o *Bartlett–Priestley kernel (BPK)* (2,15) y el núcleo rectangular (2,14), para ambos métodos, ya que estos núcleos cumplen con las condiciones necesarias para la validez de los métodos. [Kirch y Politis, 2011].

3.2.1. Aplicación sobre series temporales simuladas

En esta sección se presentarán los estimadores empleados para testear los algoritmos de métodos Bootstrap y los resultados obtenidos de la aplicación.

En esta sección los intervalos presentados son obtenidos mediante el método BCa paramétrico con un nivel de confianza del 95 %, bajo lo señalado en (2,23), en los casos en que se obtuvo indeterminaciones se utilizó el método BCa no paramétrico con $\hat{a} = 0,061$ y $\hat{z}_0 = 0,146$, con el nivel de confianza señalado.

Mediante el software R se simularán series temporales de los procesos respectivos con un tamaño de muestra de $n = 1\ 500$. Para todos los métodos se realizaron 2000 muestras Bootstrap. Para los métodos MBB y CBB se utilizó una longitud de bloques de 5 y para el método SB una longitud estimada de bloque de 5 tal que $E(\ell) = 5$. Respecto al método TFT-Bootstrap RB se utilizó un ancho de banda de 0,01, utilizado por Kirch & Politis en la presentación de sus ejercicios prácticos. [Kirch y Politis, 2011]

Se considerarán procesos AR, ARMA Y GARCH. Para el desarrollo de la aplicación sobre los dos últimos procesos se realizó una revisión detallada del artículo [Kristensen, D. y Linton, O., 2006] sobre el cual se basarán los estimadores respectivos.

3.2.1.1. Aplicación sobre procesos autoregresivos

Se define como proceso autoregresivo al proceso $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ estacionario que satisface:

$$X_t = \sum_{j=1}^p \pi_j X_{t-j} + u_t$$

tal que $t \in \mathbb{Z}$ y $\pi_p \neq 0$, $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ es ruido blanco con $u_t \perp u_{t-1}$.

Se denota este proceso por $AR(p)$.

El proceso $AR(p)$ admite una representación de la forma:

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \epsilon_{i-j}, i \in \mathbb{Z}$$

Donde las constantes $\{a_i\}_{i \geq 0}$ se determina por: $\pi(z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, donde $\pi(z) = 1 - \pi_1 z - \dots - \pi_p z^p$. Esta propiedad conlleva a los estimadores de Yule Walker para la estimación de los parámetros π_1, \dots, π_p . Dichos estimadores se establecen en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2. *La autocovarianza de un $AR(p)$ satisface las ecuaciones de Yule Walker:*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \pi_j \gamma_{\ell-j} = \gamma_{\ell} & \ell = 1, 2, \dots \\ \sum_{j=1}^p \pi_j \gamma_j + \sigma^2 = \gamma_0 \end{cases}$$

Utilizaremos las ecuaciones de Yule Walker para realizar la estimación de los parámetros; es importante considerar que estos estimadores se podrán expresar como función suave de la media, lo cual nos permite la aplicación de los métodos Bootstrap por bloques. Se realizará el análisis respectivo para cada uno de los modelos que se simularán.

Modelo AR(1) Consideraremos el proceso autoregresivo de orden 1 de forma que cumple: $X_t = \pi_1 X_{t-1} + u_t$.

Para este caso en específico la ecuación de Yule Walker es la siguiente:

$$\pi_1 \gamma_0 = \gamma_1$$

Con lo cual se construye el estimador: $\widehat{\pi}_1 = \frac{\widehat{\gamma}_1}{\widehat{\gamma}_0}$ cuando $\widehat{\gamma}_0 \neq 0$ y $\widehat{\pi}_1 = 0$ caso contrario.

Donde $\widehat{\gamma}_i$ es el estimador consistente de la Función de autocovarianza dada por:

$$\widehat{\gamma}_i = (n-k)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i X_{(i+k)} - \overline{X}_{(n-k)}^2 \quad (3.2)$$

Donde $\overline{X}_{(n-k)} = (n-k)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i$.

A continuación se mostrará cómo se puede expresar el estimador $\widehat{\pi}_1$ como función suave de la media que nos permita la aplicación de los métodos Bootstrap por Bloques.

A partir del proceso autoregresivo construimos un nuevo proceso vectorial $(Y_i, i \in \mathbb{Z})$ tal que:

$$Y_i = (X_i, X_i^2, X_i X_{i+1})$$

Con $i = 1, \dots, n - 1$, donde n corresponde a la longitud de la serie temporal, en nuestro caso es de 1500.

De esta forma definimos la función $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $H(x, y, z) = \frac{z-x^2}{y-x^2}$ cuando $y \neq x^2$ y 0 caso contrario; con esto nuestro estimador puede escribirse como: $\widehat{\pi}_1 = H(\bar{Y}_{n-1})$.

Con esta reescritura de nuestro estimador es posible su aplicación considerando el método Bootstrap por bloques sobre la serie Y_i .

Mediante la función `arima.sim` simularemos una serie temporal $AR(1)$ con longitud de serie temporal de 1500 con parámetro $\pi_1 = 0,6$ y ruido blanco con distribución $N(0, 1)$.

En la tabla 3,1 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de π_1 mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se han resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo estos el método MBB, el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático y el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	0,550401	0,615124	-0,07307	0,62161	0,616271
<i>KR-LB</i>	0,564232	0,578978	1,065558	1,422651	0,287237
<i>KC-RB</i>	0,551603	0,612198	-0,03015	0,526869	0,52596
<i>KC-LB</i>	0,546357	0,600923	0,244257	0,409496	0,349834
<i>MBB</i>	0,546852	0,615372	-0,01887	0,65699	0,656634
<i>CBB</i>	0,54774	0,617298	-0,03198	0,65178	0,650758
<i>SB</i>	0,54776	0,614692	-0,05424	0,644433	0,641491

Cuadro 3.1: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada $AR(1)$, de parámetro $\pi_1 = 0,6$.

De los resultados obtenidos podemos observar que el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular pese a tener la menor varianza se observa que presenta el mayor sesgo, lo cual se refleja también en el intervalo obtenido $[0,564232; 0,578978]$ que no contiene en su interior el valor real del parámetro que corresponde a 0,6; siendo el único intervalo con esas características.

Modelo AR(2)

Consideraremos el proceso autoregresivo de orden 2 de forma que cumple: $X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + u_t$.

Para este caso en específico las ecuaciones de Yule Walker son las siguientes:

$$\pi_1 \gamma_1 + \pi_2 \gamma_0 = \gamma_2$$

$$\pi_1 \gamma_0 + \pi_2 \gamma_1 = \gamma_1$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_0} - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0}}{1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0}} \\ \pi_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \left(\frac{1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_0}}{1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0}} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Notando $r_i = \frac{\gamma_i}{\gamma_0}$ como la función de autocorrelación del proceso, podemos reescribir las ecuaciones como:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \\ \pi_1 &= \frac{r_1 - r_1 r_2}{1 - r_1^2} \end{aligned}$$

Un estimador consistente de la función de autocorrelación de orden k se define por:

$$\hat{r}_k = \frac{\left\{ (n-k)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i X_{(i+k)} - \bar{X}_{(n-k)}^2 \right\}}{\left\{ (n-k)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} X_i^2 - \bar{X}_{(n-k)}^2 \right\}}$$

Haciendo uso de este estimador obtenemos los siguientes estimadores de los parámetros:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_2 &= \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1^2}{1 - \hat{r}_1^2} \\ \hat{\pi}_1 &= \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_1 \hat{r}_2}{1 - \hat{r}_1^2} \end{aligned}$$

A continuación se mostrará como se puede expresar los estimadores $\hat{\pi}_1$ y $\hat{\pi}_2$ como función suave de la media lo cual nos permite la aplicación de los métodos Bootstrap por Bloques.

A partir del proceso autoregresivo construimos un nuevo proceso vectorial $(Y_i, i \in \mathbb{Z})$ tal que:

$$Y_i = \left(X_i, X_i^2, X_i X_{i+1}, X_i X_{i+2} \right)$$

Con $i = 1, \dots, n - 2$, donde n corresponde a la longitud de la serie temporal, en nuestro caso es de 1500.

De esta forma definimos las siguientes funciones: $R_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $R_1(x, y, z, w) = \frac{z-x^2}{y-x^2}$ cuando $y \neq x^2$ y 0 caso contrario; $R_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $R_2(x, y, z, w) = \frac{w-x^2}{y-x^2}$ cuando $y \neq x^2$ y 0 caso contrario; $H_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $H_1(x, y) = \frac{x(1-y)}{1-x^2}$ cuando $1 \neq x^2$ y 0 caso contrario; finalmente: $H_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $H_2(x, y) = \frac{y-x^2}{1-x^2}$ cuando $1 \neq x^2$ y 0 caso contrario.

Con estas funciones podemos reescribir los estimadores de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_1 &= H_1(R_1((\bar{Y}_{n-2})), R_2((\bar{Y}_{n-2}))) \\ \hat{\pi}_2 &= H_2(R_1((\bar{Y}_{n-2})), R_2((\bar{Y}_{n-2})))\end{aligned}$$

Con esta reescritura de los estimadores es posible su aplicación considerando el método Bootstrap por bloques sobre la serie Y_i .

Mediante la función `arima.sim` simularemos una serie temporal $AR(2)$ con longitud de serie temporal de 1500 con parámetro $\pi_1 = 1,5$ y $\pi_2 = -0,56$, con ruido blanco con distribución $N(0, 1)$.

En la tabla 3,2 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de π_1 en el modelo $AR(2)$ mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo estos respectivamente el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular, el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular y el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

En la tabla 3,3 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de π_2 en el modelo $AR(2)$ mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en los tres casos el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

En el caso de ambos parámetros resulta evidente la mejora en la estimación mediante los métodos TFT-Bootstrap en comparación a los métodos Bootstrap por Bloques.

3.2.1.2. Aplicación sobre procesos autoregresivos-medias móvil (ARMA)

En esta sección consideraremos tan solo los procesos $ARMA(1,1)$. Para este proceso como en el caso de los procesos autoregresivos utilizaremos los estimadores

Modelo	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	1,462129	1,536298	-0,73425	1,350386	0,811268
<i>KR-LB</i>	1,446154	1,500519	0,323041	0,538649	0,434294
<i>KC-RB</i>	1,463892	1,527592	-0,76153	1,328095	0,748173
<i>KC-LB</i>	1,461808	1,515408	-0,34868	0,538686	0,417106
<i>MBB</i>	1,305019	1,853555	51,76401	1,232877	-2678,28
<i>CBB</i>	1,309702	1,859955	50,92593	1,151634	-2592,3
<i>SB</i>	1,321723	1,757247	31,49281	0,778118	-991,019

Cuadro 3.2: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada AR(2), respecto al parámetro $\pi_1 = 1,5$

Modelo	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	-0,58686	-0,5185	0,621022	1,172124	0,786456
<i>KR-LB</i>	-0,55938	-0,50776	-0,37325	0,559256	0,419942
<i>KC-RB</i>	-0,5934	-0,52397	0,667745	1,177178	0,731295
<i>KC-LB</i>	-0,56964	-0,51631	0,102392	0,415433	0,404949
<i>MBB</i>	-0,89666	-0,37407	-1,25611	48,04507	46,46725
<i>CBB</i>	-0,90073	-0,37895	-1,17651	47,30807	45,9239
<i>SB</i>	-0,7975	-0,39013	-0,80129	29,04782	28,40575

Cuadro 3.3: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada AR(2), respecto al parámetro $\pi_2 = -0,56$

por el método de momentos, es decir las provenientes de las ecuaciones de Yule Walker.

Sin embargo, se aclara que de la investigación realizada los estimadores de Yule Walker no son recomendables para la estimación de los parámetros de medias móviles, ya que estos estimadores son ineficientes y provienen de ecuaciones cuadráticas sobre los parámetros que pueden llevar a soluciones para las cuales el proceso es no invertible o inclusive no existe solución sobre \mathbb{R} .

Por otro lado, realizaremos un análisis específico para los proceso ARMA(1,1) que nos permite estimar eficientemente el parámetro media móvil del modelo bajo ciertas condiciones, con los estimadores de Yule Walker. Recordemos que esto se realiza para verificar la consistencia de los métodos Bootstrap implementados y no la eficiencia de los estimadores, El uso del estimador de Yuler Walker para MA es con fines ilustrativos.

De esta forma consideremos el proceso ARMA(1,1) que cumple: $X_t = \phi X_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$ donde u_t es un r.b. de varianza σ^2 y media 0 Se obtendrán primero las ecuaciones de la función de autocorrelación para este proceso.

Se cumple: $E[u_t X_t] = \sigma^2$; $E[u_{t-1} X_t] = \phi \sigma^2 + \theta \sigma^2$. Haciendo uso de estos resulta-

dos obtenemos:

$$\begin{aligned} E[X_t^2] &= \phi E[X_t X_{t-1}] + E[u_t X_t] + \theta E[u_{t-1} X_t] \\ \gamma_0 &= \phi \gamma_1 + \sigma^2 + \theta [\phi \sigma^2 + \theta \sigma^2] \\ \gamma_0 &= \phi \gamma_1 + \sigma^2 + \phi \theta \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} E[X_t X_{t-1}] &= \phi E[X_{t-1}^2] + E[u_t X_{t-1}] + \theta E[u_{t-1} X_{t-1}] \\ \gamma_1 &= \phi \gamma_0 + \theta \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora considerando $k > 1$ el r.b. u_t no está correlacionado con X_{t-1}, \dots, X_1 con lo cual se obtiene la última ecuación:

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}, \quad k > 1 \quad (3.6)$$

Haciendo uso de esta última ecuación con $k = 2$ obtenemos:

$$\phi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (3.7)$$

Ahora considerando las ecuaciones (3,4) y (3,5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_0 - \phi \gamma_1}{\gamma_1 - \phi \gamma_0} &= \frac{\theta^2 + \theta \phi + 1}{\theta} \\ \theta^2 (\gamma_1 - \phi \gamma_0) + \theta [\gamma_1 \phi - \phi^2 \gamma_0 + \phi \gamma_1 - \gamma_0] + [\gamma_1 - \phi \gamma_0] &= 0 \\ \theta^2 + \theta \left[\frac{-\phi^2 \gamma_0 + 2\phi \gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_1 - \phi \gamma_0} \right] + 1 &= 0 \\ \theta^2 + \theta \left[\frac{-\phi^2 + 2\phi r_1 - 1}{r_1 - \phi} \right] + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Como se había mencionado previamente obtenemos una ecuación cuadrática la cual puede generar inconvenientes a la hora de estimar el parámetro θ , por lo cual impondremos algunas condiciones y la raíz que se utilizará para estimar el parámetro.

Definiremos $b := \frac{\phi^2 - 2\phi r_1 + 1}{\phi - r_1}$, esta estará bien definida si y solo si $\phi \neq r_1$.

Considerando las ecuaciones anteriores obtenemos la igualdad si y solo si $\phi^2 = 1$ o $\theta = 0$ ya que se debería cumplir:

$$(1 + \phi \theta) (\phi + \theta) = \phi (1 + \theta^2 + 2\phi \theta)$$

Lo que equivale a:

$$\theta = \phi^2 \theta$$

De esta forma establecemos las primeras condiciones $0 < \phi < 1$ y $\theta \neq 0$, además si notamos: $\Phi(z)X_t = \theta_0 + \Theta(z)u_t$ tal que: $\Phi(z) = (1 - \phi z)$ requerimos que sus raíces sean de valor absoluto mayor a 1, así como para $\Theta(z) = (1 + \theta z)$ debe tener raíces de valor absoluto mayores a 1, para obtener la linealidad e invertibilidad del proceso.

Con todas estas consideraciones b estará correctamente definido y $b > 2$, además considerando lo mencionado previamente en nuestro caso en específico la raíz de $\Theta(z)$ es $\frac{-1}{\theta}$ lo cual para cumplir lo requerido consideraremos la raíz que cumpla $|\theta| < 1$, esto se ha considerado para escribir nuestro estimador para θ .

Consideraremos los siguientes estimadores:

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{r}_2}{\hat{r}_1} \quad (3.8)$$

En la práctica este método puede llevar a valores menores a 0 o mayores a 1 lo cual va contra nuestras restricciones. Para solventar este inconveniente el estimador se truncará entre los valores 1 y 0.

Sin embargo de la revisión de literatura se encontró un estimador que de alguna forma solventa estos inconvenientes el cual es el siguiente: $\phi = \sum_{j=1}^{\infty} w_j \frac{r^{(j+1)}}{r^{(j)}}$ para toda secuencia tal que $\sum_{j=1}^{\infty} w_j = 1$. Este estimador será otra de las opciones que utilizaremos para contrastar los resultados que se obtengan, en nuestro caso utilizaremos $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3}$ y $w_j = 0, j \neq 0$

Al primer estimador le notaremos por $\hat{\phi}_1$ y al último presentado lo notaremos como $\hat{\phi}_2$ bajo la serie de coeficientes w_j establecida.

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & |\hat{b}| \leq 2 \\ \frac{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2} & |\hat{b}| > 2, \left| \frac{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2} \right| < 1 \\ \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2} & |\hat{b}| > 2, \left| \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2} \right| < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases} \quad (3.9)$$

Donde: $\hat{b} = \frac{\hat{\phi}^2 - 2\hat{\phi}\hat{r}_1 + 1}{\hat{\phi} - \hat{r}_1}$ Todas estas consideraciones se han realizado a partir de los resultados obtenidos sobre la ecuaciones de Yule Walker para el proceso ARMA. [Kristensen, D. y Linton, O., 2006], [Harvey, 1993]

Una de las razones por las cuales utilizamos estos estimadores es para poder

aplicar los métodos Bootstrap por Bloques como función de la media de un proceso, lo cual realizaremos a continuación.

Para la aplicación del estimador $\hat{\phi}_1$ se construye un nuevo proceso vectorial $(Y_{i1}, i \in \mathbb{Z})$ tal que:

$$Y_{i1} = \left(X_i, X_i^2, X_i X_{i+1}, X_i X_{i+2} \right)$$

Para la aplicación del estimador $\hat{\phi}_2$ se construye un nuevo proceso vectorial $(Y_{i2}, i \in \mathbb{Z})$ tal que:

$$Y_{i2} = \left(X_i, X_i^2, X_i X_{i+1}, X_i X_{i+2}, X_i X_{i+3}, X_i X_{i+4} \right)$$

Con $i = 1, \dots, n - 4$, donde n corresponde a la longitud de la serie temporal, en nuestro caso es de 1500.

De esta forma definimos las siguientes funciones: $R_{11} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $R_{11}(x, y, z, w) = \frac{w-x^2}{z-x^2}$ cuando $y > x^2, z \neq x^2$; $R_{12} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $R_{12}(x, y, z, w, d, c) = \frac{1}{3} \frac{w-x^2}{z-x^2} + \frac{1}{3} \frac{d-x^2}{w-x^2} + \frac{1}{3} \frac{c-x^2}{d-x^2}$ cuando $z \neq x^2, w \neq x^2, d \neq x^2$ y 0 caso contrario.

$B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$B(x, y, z, w) \begin{cases} \frac{x^2+1 - \frac{2x(w-y^2)}{z-y^2}}{x - \frac{w-y^2}{z-y^2}} & z > y^2, w \neq y^2 \\ \frac{x^2+1}{x} & z > y^2, w = y^2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.10)$$

$R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$R(x) \begin{cases} \frac{-x - \sqrt{x^2-4}}{2} & |x| > 2, \left| \frac{-x - \sqrt{x^2-4}}{2} \right| < 1 \\ \frac{-x + \sqrt{x^2-4}}{2} & |x| > 2, \left| \frac{-x + \sqrt{x^2-4}}{2} \right| < 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.11)$$

De esta forma podemos reescribir los estimadores de la siguiente forma:

$$\hat{\phi}_1 = R_{11} \left(\bar{Y}_{(n-2)1} \right) \quad (3.12)$$

$$\hat{\phi}_2 = R_{12} \left(\bar{Y}_{(n-4)2} \right) \quad (3.13)$$

Para definir el estimador de θ se define $W_{i1} = (Y_{i1}(1), Y_{i1}(2), Y_{i1}(3))$ donde $Y_{i1}(k)$ es

el k-ésimo elemento del vector Y_{i1} definido previamente. Además se define $W_{i2} = (Y_{i2}(1), Y_{i2}(2), Y_{i2}(3))$ donde $Y_{i2}(k)$ es el k-ésimo elemento del vector Y_{i2} definido previamente.

$$\hat{\theta}_1 = R \left(B \left(R_{11} \left(\bar{Y}_{(n-2)1} \right), W_{i1} \right) \right) \quad (3.14)$$

$$\hat{\theta}_2 = R \left(B \left(R_{12} \left(\bar{Y}_{(n-4)2} \right), W_{i2} \right) \right) \quad (3.15)$$

Recordar que de esta forma es posible aplicar los métodos Bootstrap por Bloques ya que los estimadores son funciones de la media de los procesos definidos en este caso Y_{i1} y Y_{i2} y sobre estos procesos aplicamos el remuestreo por bloques. Por otro lado, recordar que respecto al TFT-Bootstrap no existe inconveniente en la aplicación sobre los distintos estimadores.

ARMA(1,1) $\phi = 0,6$ y $\theta = -0,35$

Considerando lo previo, realizaremos la simulación de un proceso ARMA(1,1) de tamaño 1500 mediante la función `arima.sim` con los parámetros $AR = 0,6$ y $MA = -0,35$, que cumplen con las hipótesis requeridas, el proceso tendrá un ruido blanco $N(0,1)$.

En primera instancia se presentarán los resultados de aplicar los estimadores $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\theta}_1$. En la tabla 3,4 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de ϕ en el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo estos respectivamente el método MBB para el sesgo y el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular para los otros dos casos.

En la tabla 3,5 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de θ en el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en el primer caso el método CBB y en los dos restante el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

De forma general podemos mencionar que pese a los inconvenientes y la ineficiencia de los estimadores de Yule Walker para el proceso ARMA se obtienen estimaciones aceptables e intervalos que contienen el valor real del parámetro, bajo las condiciones que hemos establecido.

Ahora presentaremos los resultados de aplicar los estimadores $\hat{\phi}_2$ y $\hat{\theta}_2$. En la tabla 3,6 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de ϕ en el modelo

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	0,489139	0,835955	-0,28739	16,58678	16,50419
<i>KR-LB</i>	0,548938	0,832265	-0,9411	10,50537	9,619697
<i>KC-RB</i>	0,504733	0,818424	-0,31659	14,06103	13,9608
<i>KC-LB</i>	0,560265	0,890705	-2,03851	16,74737	12,59182
<i>MBB</i>	0,490211	0,831114	0,017301	16,05426	16,05396
<i>CBB</i>	0,495035	0,838514	-0,13614	16,32912	16,31059
<i>SB</i>	0,479045	0,815818	-0,09183	15,68095	15,67252

Cuadro 3.4: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\phi = 0,6$ con el estimador $\hat{\phi}_1$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	-0,67169	-0,26587	0,231779	22,90914	22,85542
<i>KR-LB</i>	-0,65425	-0,32346	0,824326	13,94713	13,26762
<i>KC-RB</i>	-0,66035	-0,28524	0,250236	19,49475	19,43213
<i>KC-LB</i>	-0,72122	-0,33752	1,770964	19,47965	16,34334
<i>MBB</i>	-0,66418	-0,26586	-0,11269	21,95526	21,94256
<i>CBB</i>	-0,66657	-0,26866	0,011295	22,03425	22,03413
<i>SB</i>	-0,6429	-0,2579	-0,02727	20,80633	20,80558

Cuadro 3.5: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\theta = -0,35$ con el estimador $\hat{\theta}_1$

ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo estos respectivamente el método MBB, el método TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático y el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

En la tabla 3,7 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de θ en el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo estos respectivamente el método MBB, el método CBB y el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

ARMA(1,1) $\phi = 0,4$ y $\theta = -0,25$

Considerando lo previo, realizaremos la simulación de un proceso ARMA(1,1) de tamaño 1500 mediante la función arima.sim con los parámetros $AR = 0,4$ y $MA = -0,25$, que cumplen con las hipótesis requeridas, el proceso tendrá un ruido blanco $N(0,1)$.

En primera instancia se presentarán los resultados de aplicar los estimadores $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\theta}_1$. En la tabla 3,8 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de ϕ en

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	0,357921	0,717666	-0,52267	22,00251	21,72932
<i>KR-LB</i>	0,540761	0,733961	-4,21979	34,62519	16,81852
<i>KC-RB</i>	0,376798	0,708307	-0,54912	16,54184	16,24031
<i>KC-LB</i>	0,194357	0,58378	4,70716	31,81169	9,654334
<i>MBB</i>	0,3517	0,70536	-0,06469	16,85301	16,84883
<i>CBB</i>	0,354749	0,703966	-0,14872	17,82599	17,80387
<i>SB</i>	0,347883	0,710882	-0,30336	18,84427	18,75224

Cuadro 3.6: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\phi = 0,6$ con el estimador $\hat{\phi}_2$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	-0,53051	-0,11814	0,427744	26,06118	25,87821
<i>KR-LB</i>	-0,5652	-0,30888	4,318915	37,5964	18,94338
<i>KC-RB</i>	-0,52142	-0,15031	0,496317	19,78067	19,53434
<i>KC-LB</i>	-0,36473	0,024227	-5,65292	45,6097	13,65417
<i>MBB</i>	-0,51467	-0,14208	-0,01846	19,8172	19,81686
<i>CBB</i>	-0,51505	-0,12494	0,053283	19,4981	19,49526
<i>SB</i>	-0,518	-0,1344	0,180836	21,56118	21,52848

Cuadro 3.7: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\theta = -0,35$ con el estimador $\hat{\theta}_2$

el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en los tres casos el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

En la tabla 3,9 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de θ en el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en el primer caso el método MBB y en los dos restante el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

En primera instancia se presentarán los resultados de aplicar los estimadores $\hat{\phi}_2$ y $\hat{\theta}_2$. En la tabla 3,10 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de ϕ en el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo respectivamente el método TFT-Bootstrap RB con núcleo rectangular y en los dos valores restantes el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático

En la tabla 3,11 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de θ en

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	0,144559	0,627771	-0,4947	34,09602	33,85129
<i>KR-LB</i>	0,266837	0,604747	-1,67143	17,48226	14,68859
<i>KC-RB</i>	0,185681	0,647194	-0,58026	28,08182	27,74512
<i>KC-LB</i>	0,253134	0,511807	0,039979	9,216346	9,214747
<i>MBB</i>	0,07467	0,673996	-0,04441	48,09649	48,09452
<i>CBB</i>	0,093217	0,686473	-0,12797	48,45175	48,43537
<i>SB</i>	0,104711	0,697135	-0,43743	47,50197	47,31063

Cuadro 3.8: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\phi = 0,4$ con el estimador $\hat{\phi}_1$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	-0,5136	-0,00304	0,503609	37,03209	36,77847
<i>KR-LB</i>	-0,48403	-0,12116	1,92745	19,69418	15,97912
<i>KC-RB</i>	-0,51574	-0,03754	0,584934	30,47855	30,1364
<i>KC-LB</i>	-0,41604	-0,1337	1,551362	13,22314	10,81641
<i>MBB</i>	-0,55433	0,058649	0,027358	51,63339	51,63264
<i>CBB</i>	-0,56225	0,054283	0,129638	51,11004	51,09323
<i>SB</i>	-0,58205	0,037188	0,430867	49,69456	49,50892

Cuadro 3.9: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\theta = -0,25$ con el estimador $\hat{\theta}_1$

el modelo ARMA(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en el primer caso el método TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático y en los dos restante el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	-1,11304	0,723213	2,372801	2478,277	2472,646
<i>KR-LB</i>	-0,48222	0,46136	7,204647	152,698	100,7911
<i>KC-RB</i>	-0,74636	0,697163	5,893086	24293,54	24258,81
<i>KC-LB</i>	0,242018	0,738384	-6,06086	98,10589	61,37189
<i>MBB</i>	-4,75556	0,702502	4,228468	69615,11	69597,23
<i>CBB</i>	-2,33688	0,803988	-7,84094	38666,14	38604,66
<i>SB</i>	-2,03222	0,790403	10,35506	79059,45	78952,22

Cuadro 3.10: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\phi = 0,4$ con el estimador $\hat{\phi}_2$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
<i>KR-RB</i>	-0,58732	0,59254	-0,44593	148,5621	148,3633
<i>KR-LB</i>	-0,33366	0,671599	-6,30431	97,00351	57,25916
<i>KC-RB</i>	-0,55104	0,485349	0,024581	126,925	126,9244
<i>KC-LB</i>	-0,60794	-0,1355	7,839222	123,617	62,16358
<i>MBB</i>	-0,56665	0,686018	-0,04141	162,43	162,4282
<i>CBB</i>	-0,62214	0,617511	1,003553	179,4338	178,4267
<i>SB</i>	-0,62211	0,591538	0,348542	166,6028	166,4813

Cuadro 3.11: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada ARMA(1,1), respecto al parámetro $\theta = -0,25$ con el estimador $\hat{\theta}_2$

3.2.1.3. Aplicación sobre procesos autoregresivos con heteroscedasticidad condicional (GARCH)

En esta sección se considerará tan solo el procesos GARCH(1,1). Considerando los requerimientos que deben cumplirse para la aplicación de los métodos Bootstrap por Bloques utilizaremos funciones suaves de la media para realizar la estimación de parámetros.

Consideraremos el proceso GARCH(1,1) dado por:

$$y_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha y_{t-1}^2.$$

Donde $E[z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ y $E[z_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = 1$ donde \mathcal{F}_t es la σ -álgebra generada por $\{z_t, z_{t-1}, \dots\}$.

Como se mencionó al comienzo del capítulo los estimadores a utilizar son producto del análisis del artículo [Kristensen, D. y Linton, O., 2006]. Notaremos el siguiente proceso $X_t := y_t^2$.

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha y_{t-1}^2$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha X_{t-1}$$

$$0 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha X_{t-1} - \sigma_t^2$$

$$0 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha X_{t-1} - \sigma_t^2 + \beta X_{t-1} - \beta X_{t-1} + X_t - X_t$$

$$X_t = \omega + (\alpha + \beta) X_{t-1} + (X_t - \sigma_t^2) - \beta (X_{t-1} - \sigma_{t-1}^2)$$

Notando: $\phi := \alpha + \beta$, $\theta := -\beta$ y finalmente $v_t := X_t - \sigma_t^2$ se obtiene:

$$X_t = \omega + \phi X_{t-1} + v_t + \theta v_{t-1} \quad (3.16)$$

De esta forma hemos encontrado una representación ARMA para el proceso y_t^2 cuyos residuos representan una diferencia martingala considerando que z_t son i.i.d $(0, 1)$.

Recordar que además se asume que $\alpha + \beta < 1$ y valores mayores a 0 para obtener la positividad de la varianza.

Ahora sobre este proceso ARMA definido construiremos los estimadores para los parámetros del modelo GARCH, basándonos en los estimadores presentados previamente.

Para esto lo primero es recordar las hipótesis que habíamos impuesto sobre los parámetros del modelo ARMA para que los estimadores Yule Walker nos den resultados. De esta forma es necesario que se cumpla $0 < \phi < 1, \theta < 0$ lo que implica $\alpha + \beta < 1$ y $\beta > 0$

De esta forma general definimos los estimadores de la siguiente manera $\hat{\alpha} = \hat{\theta} + \hat{\phi}$ y $\hat{\beta} = -\hat{\theta}$.

De forma particular, bajo lo definido en la sección anterior se define:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= -\hat{\theta}_1 \\ \hat{\alpha}_1 &= -\hat{\beta}_1 + \hat{\phi}_1 \\ \hat{\beta}_2 &= -\hat{\theta}_2 \\ \hat{\alpha}_2 &= -\hat{\beta}_2 + \hat{\phi}_2\end{aligned}$$

Tal que:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1 &= R_{11} \left(\bar{X}_{(n-2)1} \right) \\ \hat{\phi}_2 &= R_{12} \left(\bar{X}_{(n-4)2} \right) \\ \hat{\theta}_1 &= R \left(B \left(R_{11} \left(\bar{X}_{(n-2)1} \right), W_{i1} \right) \right) \\ \hat{\theta}_2 &= R \left(B \left(R_{12} \left(\bar{X}_{(n-4)2} \right), W_{i2} \right) \right)\end{aligned}$$

Donde R_{11}, R_{12}, B, R definidos como en la sección previa, además para este caso $X_{i1} = (X_i, X_i^2, X_i X_{i+1}, X_i X_{i+2})$ y $X_{i2} = (X_i, X_i^2, X_i X_{i+1}, X_i X_{i+2}, X_i X_{i+3}, X_i X_{i+4})$, $W_{i1} = (X_{i1}(1), X_{i1}(2), X_{i1}(3))$ donde $X_{i1}(k)$ es el k-ésimo elemento del vector X_{i1} y finalmente $W_{i2} = (X_{i2}(1), X_{i2}(2), X_{i2}(3))$ donde $X_{i2}(k)$ es el k-ésimo elemento del vector X_{i2} .

Previo a la aplicación presentaremos el teorema que verifica la consistencia de estos estimadores bajo ciertas hipótesis que consideraremos más adelante para la

aplicación práctica. Una demostración detallada de este teorema se puede encontrar en el apéndice del artículo [Kristensen, D. y Linton, O., 2006].

HIPÓTESIS 19. *El proceso de error $\{z_t\}$ es independiente e idénticamente distribuido (i.i.d) con distribución marginal dada por una menor densidad semicontinua sobre \mathbb{R} , que satisface $E[z_t] = 0$ y $E[z_t^2] = 1$*

HIPÓTESIS 20. *El proceso $\{y_t\}$ es estrictamente estacionario con $E[(\beta + \alpha z_t^2)^2] < 1$*

HIPÓTESIS 21. $E[(\beta + \alpha z_t^2)^4] < 1$

TEOREMA 3.3. *Supongamos se cumplen las hipótesis 19, 20, así los estimadores $\hat{\lambda} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^T$ como se definió previamente son estimadores consistentes tal que $\hat{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda$.*

Si adicionalmente se cumple la hipótesis 21 entonces se cumple:

$$\sqrt{T}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, V), \text{ donde}$$

$$V = \frac{\partial D(\sigma^2, r_1, r_2)}{\partial(\sigma^2, r_1, r_2)} \begin{bmatrix} V_{\sigma^2} & O_{1 \times 2} \\ O_{2 \times 1} & V_{r_2} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial D(\sigma^2, r_1, r_2)}{\partial(\sigma^2, r_1, r_2)} \right)^T.$$

Este teorema expresa la consistencia de los resultados obtenidos mediante este proceso de donde se deduce la importancia del cumplimiento de la Hipótesis 20 por ello se desarrollará dicha esperanza para obtener la condición respectiva:

$$\begin{aligned} E \left[(\beta + \alpha z_t^2)^2 \right] \\ = E \left[\beta^2 + 2\beta\alpha z_t^2 + \alpha^2 z_t^4 \right] \end{aligned}$$

Desarrollaremos la $E[z_t^4]$. Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_t^2, z_t^2) &= E \left[(z_t^2 - E[z_t^2]) (z_t^2 - E[z_t^2]) \right] \\ &= E \left[(z_t^2 - 1)^2 \right] \\ &= E \left[z_t^4 \right] - 2E \left[z_t^2 \right] + 1 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_t^2, z_t^2) &= \text{Var} \left[z_t^2 \right] \\ &= 2 \end{aligned}$$

Esto último ya que z_t^2 tiene una distribución Chi-cuadrado de parámetro $k = 1$. De

estas dos ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} E \left[z_t^4 \right] - 1 &= 2 \\ E \left[z_t^4 \right] &= 3 \end{aligned}$$

Utilizando esto la restricción finalmente es

$$\beta^2 + 2\beta\alpha + 3\alpha^2 < 1$$

Además esto implica que existe el momento de cuarto orde de z_t

Por otra parte, la última hipótesis implica que existe el momento de octavo orden sobre z_t . Con todo esto se han establecido los parámetros a utilizar en los modelos GARCH a continuación.

$$\text{GARCH}(1,1) \quad \omega = 0,5 \quad \alpha = 0,25 \quad \beta = 0,35$$

Para la aplicación de los métodos Bootstrap debido a que los estimadores se han establecido sobre la serie X_t definida como el cuadrado del proceso GARCH, las muestras Bootstrap se obtendrá del proceso X_t y no de y_t , aunque este último es la simulación obtenida por la función garchSim. En primera instancia se presentarán los resultados de aplicar los estimadores $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\alpha}_1$.

En la tabla 3,12 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de α en el modelo GARCH(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en este caso el TFT-Bootstrap RB con núcleo Rectangular y en los dos últimos el TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

En la tabla 3,13 se presentan los resultados obtenidos de la estimación de β en el modelo GARCH(1,1) mediante los métodos descritos previamente. En esta tabla se ha resaltado los modelos con los menores valores de sesgo(BIAS), error cuadrático

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	0,215756	1,184156	1,621339	148,2523	145,6235
CBB	0,20443	1,18241	1,482742	141,3723	139,1738
SB	0,224269	1,153051	1,511576	136,4191	134,1342
KR-RB	0,370053	0,902713	-0,74166	39,42114	38,87108
KR-LB	0,464058	0,843554	-1,83754	25,43722	22,06068
KC-RB	0,395759	0,884754	-0,81786	34,70795	34,03906
KC-LB	0,422858	0,621386	8,867665	105,1789	26,54342

Cuadro 3.12: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\alpha = 0,25$ con el estimador $\hat{\alpha}_1$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	-0,05132	0,49488	0,825183	46,49911	45,81818
CBB	-0,05203	0,498696	0,793574	44,80353	44,17377
SB	-0,04583	0,479001	0,831331	43,47533	42,78422
KR-RB	0,045784	0,325152	-0,36396	10,87121	10,73875
KR-LB	0,091427	0,293438	-0,80394	6,584843	5,938522
KC-RB	0,063782	0,321939	-0,40303	9,423912	9,261475
KC-LB	0,080723	0,17371	4,902682	31,6555	7,619212

Cuadro 3.13: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\beta = 0,35$ con el estimador $\hat{\beta}_1$

medio (MSE) y varianza(VAR); siendo en el primer caso el método TFT-Bootstrap RB con núcleo rectangular y en los dos restante el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

A continuación se presentan los resultados de la estimación mediante los estimadores $\hat{\theta}_2$ en la tabla 3.14 y $\hat{\beta}_2$ en la tabla 3.15. De lo presentado en las tablas anteriores ya se evidencia que estos estimadores generan valores significativos de sesgo, error cuadrático medio o varianza, sin embargo al utilizar los estimadores del tipo 2 los resultados son aún más dispersos sobretodo en el caso de los métodos por bloques.

Esto se complementa significativamente con lo explicado en la parte teórica ya que una vez más señalamos que estos estimadores no son eficientes. Más aún pese a utilizar los mismos estimadores que en el caso del modelo ARMA dieron resultados significativos, en esta ocasión se obtienen resultados más ineficientes y volátiles, esto podría estar relacionado significativamente con la redefinición del proceso GARCH como un proceso ARMA, ya que esto significa aplicar los métodos Bootstrap sobre la serie observada elevada al cuadrado, añadiendo pasos que incrementan el sesgo.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	-0,02547	1,410163	-0,22067	1616,243	1616,195
CBB	-0,0612	1,39651	-2,35847	474,5468	468,9844
SB	-0,00043	1,340583	-0,57416	1254,861	1254,531
KR-RB	0,427694	1,15998	-0,32042	72,64023	72,53756
KR-LB	0,513575	1,070515	1,396446	37,74661	35,79655
KC-RB	0,445698	1,151158	-0,56307	69,80059	69,48354
KC-LB	0,588332	0,911574	5,981721	55,43739	19,65641

Cuadro 3.14: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\alpha = 0,25$ con el estimador $\hat{\alpha}_2$

Para tener una segunda visión de los resultados que se pueden obtener al aplicar los métodos Bootstrap con estos estimadores sobre un proceso Garch, realizamos

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	-0,12858	0,610557	-0,46474	78,25531	78,03933
CBB	-0,1284	0,594969	-0,80407	77,21581	76,56927
SB	-0,11617	0,575931	-0,36174	65,24116	65,1103
KR-RB	0,082721	0,47174	-0,13067	20,44351	20,42643
KR-LB	0,126507	0,411806	0,885792	10,9595	10,17487
KC-RB	0,090824	0,462225	-0,25978	19,66686	19,59938
KC-LB	0,175621	0,320675	3,403673	17,18119	5,596195

Cuadro 3.15: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\beta = 0,35$ con el estimador $\hat{\beta}_2$

una segunda simulación. En este caso el modelo es el siguiente:

$$\text{GARCH}(1,1) \quad \omega = 0,5 \quad \alpha = 0,15 \quad \beta = 0,25$$

En los resultados a presentar a continuación se puede notar crecimientos significativos en las estimaciones de los parámetros de segundo orden es decir en el BIAS, MSE y VAR de los estimadores, esto también guarda relación con la teoría ya que el proceso GARCH previo constaba de momento de cuarto y octavo orden, mientras que este tan solo con momento de cuarto orden por lo cual la consistencia del estimador es ineficiente.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	-0,39254	2,207028	-3,81546	2860,912	2846,354
CBB	-0,41524	2,210328	-3,26724	1199,657	1188,982
SB	-0,34137	2,227884	-5,16127	2729,932	2703,293
KR-RB	-0,05818	2,087048	1,003754	628,3942	627,3866
KR-LB	-0,79276	1,44183	13,6333	1018,048	832,1811
KC-RB	-0,00588	2,051086	0,651622	520,1389	519,7143
KC-LB	-46,1209	1,4509	20,07701	18683,43	18280,34

Cuadro 3.16: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\alpha = 0,15$ con el estimador $\hat{\alpha}_1$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	-0,13621	0,934862	-3,26279	216,4712	205,8254
CBB	-0,13391	0,945298	-3,26933	217,4377	206,7492
SB	-0,10918	0,94396	-3,71214	222,6447	208,8648
KR-RB	-0,00958	0,900132	-1,02029	125,4279	124,3869
KR-LB	-0,235	0,734536	4,704669	141,5442	119,4103
KC-RB	-0,01174	0,899069	-0,64291	119,5711	119,1577
KC-LB	-0,39745	0,729562	5,893896	173,9479	139,2099

Cuadro 3.17: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\beta = 0,25$ con el estimador $\hat{\beta}_1$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	2,150658	19482,82	285,1675	2,86E+08	2,85E+08
CBB	2,200348	1403,755	-63,5967	4037566	4033521
SB	2,166843	139,9312	-94,502	241426,2	232495,6
KR-RB	2,10328	691,3608	-37,2066	1566826	1565441
KR-LB	2,071892	86,38248	-128,909	283310,2	266692,8
KC-RB	1,79948	270,9742	-272,734	53732470	53658086
KC-LB	2,15902	2958,471	56,63451	15444942	15441735

Cuadro 3.18: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\alpha = 0,15$ con el estimador $\hat{\alpha}_2$

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	BIAS	MSE	VAR
MBB	-0,27856	0,958063	-9,75999	473,0387	377,7813
CBB	-0,35602	0,951832	-11,8607	518,2172	377,5404
SB	-0,38137	0,962409	-11,8587	540,9252	400,2964
KR-RB	-0,47892	0,954626	-13,4509	638,979	458,0534
KR-LB	-0,17182	0,982144	-23,4819	1000,086	448,6869
KC-RB	-0,4377	0,958137	-12,2683	586,5436	436,0335
KC-LB	-0,77833	0,900397	-2,0944	353,8373	349,4508

Cuadro 3.19: Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap a la serie simulada GARCH(1,1), respecto al parámetro $\beta = 0,25$ con el estimador $\hat{\beta}_2$

3.3. Aplicación sobre las series de índices de alternancia de la Onda T

3.3.1. Nociones médicas básicas

En esta sección se presentarán los conceptos de muerte cardíaca súbita (MSC), el concepto de electrocardiograma y sus elementos principales, con detalle en la Onda T que es nuestro eje de estudio.

Se presentan además los conceptos básicos de alternancia eléctrica y el índice de alternancia de la Onda T (TWA por sus siglas en inglés).

Finalmente se expondrá una descripción de las bases de datos utilizadas en el presente proyecto.

3.3.1.1. Muerte cardíaca súbita, enfermedades isquémicas

Según datos del Registro estadístico de defunciones generales del INEC en el Ecuador, en el año 2019, la enfermedad isquémica del corazón es la principal causa de muerte en hombres y mujeres con el 11,8 % y en el año 2020 esta cifra alcanzó el 11,7 % siendo de igual forma la principal causa de muerte en hombres y mujeres.

La enfermedad o cardiopatía isquémica (o enfermedad de la arteria coronaria) hace referencia a las enfermedades producidas por la falta de aporte de sangre (por tanto, de oxígeno y alimento) al corazón. La muerte súbita cardíaca, MSC o SCD por sus siglas en inglés, se caracteriza por un colapso o paro cardíaco súbito secundario a arritmias cardíacas, en personas con o sin enfermedad cardíaca; la sangre deja de fluir al cerebro y todo el organismo y causa la muerte si no es tratada en minutos. [Mariona Montero, V. A., 2015] Además, para ser catalogado por MSC la muerte debe ocurrir de manera inesperada dentro de la primera hora desde el inicio de los síntomas o si se produce en ausencia de testigos cuando el fallecido ha sido visto en buenas condiciones menos de 24 horas antes de hallarlo muerto. [Bayés de Luna, A. y Elosua, 2012]

La cardiopatía isquémica es la causa de al menos el 80 % de los casos de MSC. [Myerburg, R. J., 2012]. Sin embargo, en menor proporción existen casos en los cuales no se presentan síntomas previos o signo alguno de cardiopatía, en cuyo caso se complica el predecir si una persona tiene un riesgo de sufrir MSC. [Goya Esteban, 2014] Debido a los niveles de prevalencia de la MSC la comunidad médica ha

formulado diversos indicadores de riesgo que permitan establecer si una persona podría sufrir MSC y con ello aplicar un tratamiento adecuado.

En la búsqueda de prevenir una MSC se ha desarrollado un proceso efectivo con este objetivo, que constituye el implante de desfibriladores cardioversores (IDC o ICD por sus siglas en inglés); sin embargo, este proceso es considerado un procedimiento invasivo y de alto costo, por lo cual es fundamental para la comunidad médica realizar este procedimiento tan solo a aquellos pacientes que presenten un riesgo real de sufrir MSC. Los indicadores de este riesgo además deberán ser lo menos invasivos posibles para que sean accesibles al ciudadano promedio y además para disminuir el riesgo de sufrir complicaciones durante el procedimiento.

De esta forma, se han desarrollado índices no invasivos que permitan predecir el riesgo de arritmias. Algunos de ellos se basan en el análisis del electrocardiograma (ECG) y entre ellos se encuentra el índice de alternancia de la Onda T (TWA por sus siglas en inglés).

Estos índices provenientes del análisis del electrocardiograma no son ampliamente utilizados debido a que no existe un consenso sobre la técnica adecuada de procesamiento de la señal o en el proceso de obtención de la información clínica relevante; más aún, la interpretación de estos índices no es clara en algunos casos. [Goya Esteban, 2014] Por esta razón, el desarrollo matemático existente en los procedimientos para la obtención de estos índices es aún un campo de estudio abierto de gran relevancia.

Entre las causas principales de MSC se encuentra la arritmia ventricular, que puede predecirse por el índice TWA en el análisis del ECG. De esta forma, este índice constituye uno de los más prometedores en la predicción de riesgo de sufrir MSC. [Ye, C. *et al.*, 2017]

Este proyecto de titulación pretende ser un primer paso para el desarrollo de nuevas metodologías de obtención de la TWA, explorando la aplicabilidad de los métodos Bootstrap en la obtención de dicho índice y por tanto de la captura de información relevante del ECG.

3.3.1.2. El electrocardiograma y sus elementos

Como se mencionó en la sección anterior el electrocardiograma es un procedimiento médico que permite diagnosticar algunas cardiopatías, así como darles un seguimiento adecuado a estas.

El ECG registra una variación de voltaje cardíaco con respecto al tiempo colocando electrodos en la superficie del cuerpo. El análisis del ECG consiste en la identificación de diferencias en las formas de onda electrocardiográfica entre los registros de pacientes sanos con aquellas de pacientes enfermos.

Para comprender el registro electrocardiográfico es necesario conocer que la célula miocárdica en situación de reposo es eléctricamente positiva a nivel extracelular y negativa a nivel intracelular. Cualquier estímulo produce un aumento de permeabilidad de los canales de sodio, que conlleva a que se cambie la polaridad, siendo positiva intracelularmente y negativa extracelularmente, proceso al que denominaremos despolarización. Posteriormente vuelve a su polaridad inicial, a lo que le llamaremos repolarización. [Morell Ocaña, M. *et al.*, 2002]

La masa muscular de las aurículas es pequeña en comparación con la de los ventrículos, por lo que la variación eléctrica que acompaña a la contracción auricular también lo es. La contracción de las aurículas se asocia con la onda «P» del ECG. La masa ventricular es grande, por lo que se produce una gran oscilación del ECG cuando los ventrículos se despolarizan: es lo que se denomina complejo «QRS». La onda «T» del ECG se asocia con el retorno de la masa ventricular a su estado de reposo eléctrico («repolarización»). Las letras P, Q, R, S y T se seleccionaron en los comienzos de la historia del ECG, escogidas de forma arbitraria. Las deflexiones P, Q, R, S y T se denominan ondas; las ondas Q, R y S en conjunto forman un complejo, mientras que el intervalo entre la onda S y el comienzo de la onda T es el «segmento ST» [Hampton, 2009]

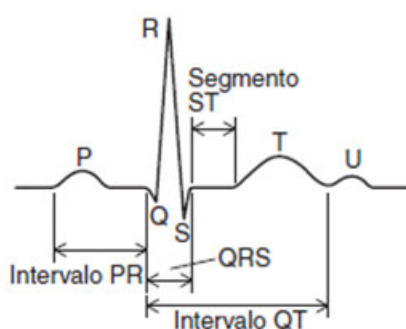


Figura 3.1: Esquema de un electrocardiograma normal que muestra todas sus ondas, así como el segmento S-T.

Ondas:

- **P:** despolarización auricular
- **QRS:** despolarización ventricular; su duración normal es de 0,06 a 0,1 sg sien-

do:

- **Q:** primera onda negativa antes de la primera onda positiva.
- **R:** toda onda positiva. Si existe una segunda onda positiva la llamamos R´
- **S:** toda onda negativa después de una onda positiva.
- **QS:** complejo totalmente negativo.
- **T:** Representa la actividad eléctrica en los ventrículos durante la repolarización. [Catalano, 2002].
- **U:** pequeña onda que sigue a la onda T, de significado incierto. [Morell Ocaña, M. *et al.*, 2002]

Generalmente, la onda T exhibe una reflexión positiva. La inversión de la onda T se observa en las siguientes circunstancias: 1. Normalidad. 2. Isquemia. 3. Hipertrofia ventricular. 4. Bloqueo de rama del haz. 5. Tratamiento con digoxina. Las derivaciones adyacentes a las que presentan una inversión de la onda T muestran en ocasiones ondas T «bifásicas», al principio ascendentes y después invertidas. De esta forma este podría ser un indicador de la presencia de cardiopatías. [Morell Ocaña, M. *et al.*, 2002]

Alteraciones en la Onda T pueden ocurrir «bien cuando el músculo cardiaco es normal pero su frecuencia es muy rápida o cuando hay una enfermedad cardiaca seria y la frecuencia es normal». [Sáenz, J. G. *et al.*, 2012]

3.3.1.3. Alternancia Eléctrica

La alternancia eléctrica (AE) es un amplio concepto que describe las variaciones, latido a latido, en dirección, amplitud y/o duración de cualquier componente del electrocardiograma, como es el caso de la Onda T.

Las causas habituales de AE incluyen derrames pericárdicos, intoxicaciones por fármacos, alteraciones electrolíticas, isquemia miocárdica aguda y taquiarritmias. [Ruiz Serrano, A. *et al.*, 2010]

La onda T se asocia a enfermedad cardiaca grave, pudiendo anticipar muerte cardiaca súbita [Sáenz, J. G. *et al.*, 2012]. Existen múltiples investigaciones en torno a la relación de TWA con la predicción de riesgo de sufrir MSC.

3.3.1.4. Índices de alternancia de la Onda T

La alternancia de la onda T (TWA por sus siglas en inglés) es una variación latida a latido en amplitud, forma o duración del segmento ST o de la Onda T.

La alternancia de la onda T se mide generalmente en microvoltios lo que implica que es difícil su detección mediante el ojo humano, además, este suele ser menor al ruido blanco de la señal del ECG. Por tanto, es necesario generar procedimientos que mediante el procesamiento de señal permitan su medición. [Goya Esteban, 2014]

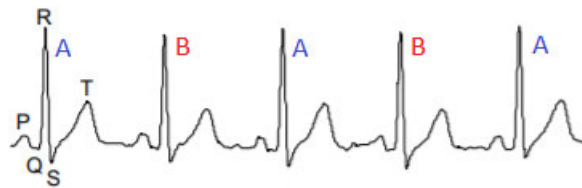


Figura 3.2: Electrocardiograma catalogado. [Monasterio, V. *et al.*, 2012]

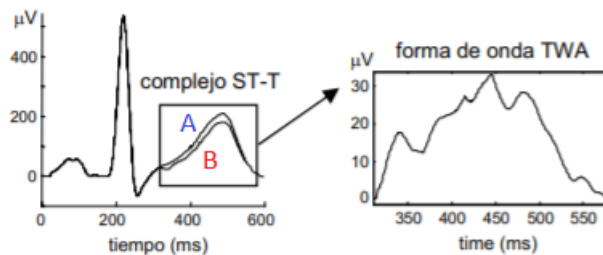


Figura 3.3: En la imagen de la izquierda se aprecia la superposición de dos latidos consecutivos. De la diferencia de estos latidos “pares e impares” se construye la serie de índices de alternancia de la Onda T para este ECG, que se puede apreciar en la imagen de la derecha. [Monasterio, V. *et al.*, 2012]

En un sentido matemático la serie de índices de alternancia de la onda T se podría considerar como el resultante de la comparación consecutiva de curvas, dichas curvas son las ondas T de latidos consecutivos, esto para cada ECG.

De esta forma, si tenemos el ECG, los latidos consecutivos se categorizan en A y B consecutivamente como en la imagen siguiente; entonces la alternancia de la onda T se medirá entre los latidos consecutivos categorizados AB, BA.

Los métodos existentes para el análisis de la alternancia de la onda T se puede referir a dos procesos: la detección de TWA (hace referencia a la existencia o no de TWA en la señal) o a la estimación (hace referencia a la cuantificación de parámetros de TWA o índices de alternancia de la onda T como la magnitud). Los métodos existentes realizan uno o ambos procesos para la detección de riesgo. Existen también

procesos preparatorios de las señales que son usado para condicionar la señal antes de la detección de TWA y la estimación. [Goya Esteban, 2014]

Algunos métodos han sido propuestos para el análisis de los índices de TWA; entre los más usados constan: el método espectral [Blanco-Velasco, M. *et al.*, 2010], el método de correlaciones [Burattini, L. *et al.*, 1999], el método modificado de medias móviles [Nearing, B. D. y Verrier, R. L., 2002], por citar algunos. Como se puede evidenciar estos métodos hacen uso de técnicas computacionales especializadas y tienen una base matemática en su desarrollo.

Con este proyecto se pretende estudiar la posibilidad de desarrollar un nuevo método de análisis de los índices de TWA que utilice los métodos Bootstrap para series temporales, en particular los métodos TFT-Bootstrap.

La relación entre los índices de alternación de la Onda T y la MSC ha sido ampliamente estudiada (entre estas tenemos: [Verrier, R. L. *et al.*, 2009], [Nemati, S. *et al.*, 2011], [Ikeda, T. *et al.*, 2002], [Nieminen y Verrier, 2010]) y aún es un campo en desarrollo. Se han realizado además investigaciones especializadas con casos específicos; por ejemplo: el análisis de TWA durante el sueño en pacientes sanos, con enfermedades cardíacas y con apnea del sueño [Nemati, S. *et al.*, 2011], análisis de TWA como predictor de MSC luego de infartos de miocardio [Ikeda, T. *et al.*, 2002] o la actividad de los TWA en la predicción de MSC en pacientes con enfermedades crónicas del corazón [Monasterio, V. *et al.*, 2012].

3.3.2. Bases a utilizar.

Las bases de datos que se utilizarán son 15 provenientes de las bases de datos de arritmias MIT-BIH (<https://archive.physionet.org/physiobank/database/mitdb/>). Estas bases de datos han sido recopiladas en el Hospital Beth Israel de Boston (ahora el Centro Médico Beth Israel Deaconess) y en el MIT, publicadas desde 1980.

Estas bases de datos constituyen el primer conjunto de material de prueba estándar disponible para la evaluación de detectores de arritmias, y se ha utilizado para ello, así como para la investigación sobre la dinámica cardíaca en más de 500 sitios en todo el mundo. [Moody, G. B. y Mark, R. G. , 2001]

La base de datos de arritmias de MIT-BIH contiene 48 bases de media hora de registros de ECG ambulatorios de dos canales, obtenidos de 47 sujetos de estudio (25 hombres y 22 mujeres). De estos, 23 registros se seleccionaron al azar de un conjunto de 4.000 registros de ECG ambulatorios de 24 horas recopilados de una población

mixta de pacientes hospitalizados (alrededor del 60 %) y pacientes ambulatorios (alrededor del 40 %) en el Hospital Beth Israel de Boston; las 25 grabaciones restantes se seleccionaron del mismo conjunto para incluir arritmias menos comunes, pero clínicamente significativas que no estarían bien representadas en una pequeña muestra aleatoria.

Las grabaciones se digitalizaron a 360 muestras por segundo por canal con una resolución de 11 bits en un rango de 10 mV. Dos o más cardiólogos anotaron independientemente cada registro.

A estas bases de datos de ECG, se les aplicó una etapa de pre procesamiento y extracción de características. El pre procesamiento consiste en la definición y filtrado de los diferentes segmentos del ECG, como la detección del complejo QRS y la segmentación del complejo ST-T. La extracción de características que en nuestro caso específico consiste en la disminución de información con la que se trabajará y mantener únicamente la señal relacionada a la Onda T. [Betancourt, N. *et al.*, 2019]

En el caso de las bases de datos utilizadas el proceso de extracción de la Onda T se realiza según un método de correlación ([Noohi, M. y Sadr, A. , 2010]); esto nos permite obtener 15 bases de datos de las cuales cada una de ellas representa las Ondas T de un ECG ambulatorio de 24 horas, a su vez cada fila de las mencionadas bases representa la Onda T de un latido del mismo paciente por base.

En el presente trabajo de titulación obtendremos las series de índices de alternancia de la Onda T mediante la comparación de curvas latido a latido utilizando múltiples medidas de comparación, ya sean medidas de dispersión como de tamaño. Posterior a ello aplicaremos los métodos Bootstrap para series temporales a las series mencionadas con lo que se analizará la aplicabilidad de estos métodos para la estimación de parámetros de las series de TWA.

3.3.3. Construcción de la series de índices de alternancia de la Onda T (TWA)

En esta sección ampliaremos las funciones utilizadas en la comparación de curvas (correspondiente a latidos) para la construcción de la series temporales de índices de alternancia de la Onda T.

Lo primero a considerar es que las filas de una misma base, es decir los latidos, no necesariamente tienen la misma longitud debido a que estos son la Onda T de cada latido expresada en mV y no tiene una longitud definida, sino que el método

Base	Dimensiones	%Máximo de datos nulos por fila. (\approx)	Radio de la vecindad. (\approx)
P1	1864 x 101	41,5841 %	0,24(101)
P2	2083 x 101	39,6039 %	0,25(101)
P3	2539 x 97	48,4536 %	0,21(97)
P4	2121 x 100	41,0000 %	0,24(100)
P5	2538 x 65	13,8462 %	0,38(65)
P6	1793 x 89	39,3258 %	0,25(89)
P7	1878 x 89	42,6966 %	0,23(89)
P8	1952 x 105	39,0476 %	0,25(105)
P9	2396 x 97	46,3918 %	0,22(97)
P10	1533 x 89	1,1236 %	0,44(89)
P11	2280 x 101	49,5050 %	0,20(101)
P12	1987 x 59	8,4746 %	0,41(59)
P13	1861 x 105	49,5238 %	0,20(105)
P14	2475 x 62	3,2258 %	0,43(62)
P15	1517 x 91	38,4615 %	0,26(91)

Cuadro 3.20: Información de las bases utilizadas

utilizado para la extracción de Onda lo define por cada latido.

Además se tomará en consideración que todo método utilizado para la extracción de las Ondas del ECG tiene un margen de error en sus extremos, por lo cual en nuestras bases en cada fila podrían existir pocos datos que realmente no pertenecen a la Onda T.

Para lidiar con estas situaciones se equipararon los tamaños de fila de toda base, eliminando aproximadamente el 10 % de los datos entre el inicio y el final de la fila, más específicamente se utilizó la fórmula $p = \lfloor 0,05 * n \rfloor + 1$ con n tamaño máximo de fila por base y se trabajó con los datos que se encontraban entre las filas p y $n - p + 1$.

Por esta razón y debido a que la característica de interés a estudiar es la amplitud de las serie TWA se compararán los valores de una vecindad alrededor del valor más alto de cada Onda T de cada latido, el radio a utilizar para cada vecindad se estableció bajo la consideración del % máximo de datos vacíos por fila y considerando la eliminación del 10 % de datos de los extremos. Así los radios utilizados fueron:

Las funciones utilizadas para la comparación de las ondas T latido a latido son las siguiente:

Funciones de medida de tamaño:

$$F_1 = \text{valorserie } j = \max_i | \text{latido}_i^j - \text{latido}_i^{j-1} |$$

$$F_2 = \text{valorserie } j = \text{mediana} (| \text{latido}_i^j - \text{latido}_i^{j-1} |)$$

Funciones de medida de dispersión:

$$F_3 = \text{valorserie } j = sd (| \text{latido}_{i'}^j, \dots, \text{latido}_n^j |)$$

Donde sd representa la desviación estándar.

$$F_4 = \text{valorserie } j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n | \text{latido}_i^j - \overline{\text{latido}^j} |$$

Donde latido_i^j representa la i -ésima componente de la j -ésima fila de la Base respectiva.

De esta forma obtenemos por cada base 4 series temporales, dando un total de 60 series sobre las que aplicaremos los métodos Bootstrap para series temporales. Se corroboró que las series definidas mediante estas funciones daban series completas sin valores nulos.

3.3.4. Parámetros a estimar.

Para la elección de los parámetros a estimar, se han considerado diversas características que nos permitan corroborar los resultados teóricos obtenidos, así como estimar posibles parámetros de interés para la interpretación de la amplitud de TWA. Se debe recordar que la amplitud no es más que un parámetro de las series de índices de alternancia de la Onda T, y sobre esta se aplica el criterio que nos permite saber si el paciente tiene riesgo de sufrir MSC.

Los parámetros escogidos son: media, auto-correlación de orden uno, varianza y coeficiente de variación; los notaremos respectivamente por μ, r_1, σ^2 y θ_2 . Sea $\{X_i\}$ un proceso estacionario con longitud de la serie temporal de n , sobre el cuál deseamos estimar los parámetros previos, se definen estimadores consistentes de la siguiente forma:

Media:

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Auto-correlación de orden uno:

$$\hat{r}_1 = \frac{\left\{ (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{(i+1)} - \bar{X}_{(n-1)}^2 \right\}}{\left\{ (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 - \bar{X}_{(n-1)}^2 \right\}},$$

cuando $(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 \neq \bar{X}_{(n-1)}^2$ y 0 en caso contrario.

Varianza:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2$$

cuando $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 > \bar{X}_n^2$ y 0 caso contrario

Coefficiente de variación:

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\mu}|}$$

Para la aplicación de los métodos Bootstrap por Bloques expresaremos estos estimadores como función suave de la media de un proceso redefinido en los casos que corresponda. Se utilizarán en todos los métodos Bootstrap las mismas funciones implementadas, con la diferencia que en el caso del TFT-Bootstrap estas son aplicadas sobre la redefinición de series a partir de las muestras Bootstrap obtenidas; mientras que para los métodos Bootstrap por bloques las muestras Bootstrap se obtienen de la serie redefinida.

Media:

Para el caso de la media no se requerirá redefinir un nuevo proceso. Sin embargo es importante recordar que las muestras Bootstrap obtenidas por los métodos TFT son series centradas que conservan la estructura del momento de segundo orden, por tanto a partir de estas series los estimadores de media darán valores de cero, razón por la cual estos estimadores se aplicarán solo por lo métodos Bootstrap por bloques. Con el objetivo de contrastar la teoría se realizó la estimación de media a partir de las muestras TFT-Bootstrap sobre dos bases. Los resultados se presentan en el Anexo.

Auto-correlación de orden uno

A partir de la serie estacionaria $\{X_i\}$ con longitud de la serie temporal de n se define el proceso $\{Y_i\}$ tal que: $Y_i = (X_i, X_i^2, X_i X_{i+1})$ con $i = 1, \dots, n-1$.

Definimos la función $H_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $H_1(x, y, z) = \left\{ (z - x^2) / (y - x^2) \right\} \mathbb{1}(y > x^2)$. Así podemos reescribir nuestro estimador: $\hat{r}_1 = H_1(\bar{Y}_{n-1})$

Varianza

A partir de la serie estacionaria $\{X_i\}$ con longitud de la serie temporal de n se define el proceso $\{Y_{i2}\}$ tal que: $Y_{i2} = (X_i, X_i * X_i)$ con $i = 1, \dots, n$.

Definimos la función $H_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $H_2(x, y) = \{(y - x^2)\} \mathbb{1}(y > x^2)$. Así podemos reescribir nuestro estimador: $\hat{\sigma}^2 = H_2(\bar{Y}_{n2})$

Coficiente de variación

Considerando que este estimador requiere que la serie remuestreada conserve la información de la media, para el caso del TFT-Bootstrap sumaremos a cada observación de las series remuestreadas el correspondiente estimador de media, obtenido mediante la aplicación de métodos Bootstrap por bloques, en particular elegiremos el resultado del modelo que tiene un menor MSE.

A partir de la serie estacionaria $\{X_i\}$ con longitud de la serie temporal de n se define el proceso $\{Y_{i3}\}$ tal que: $Y_{i3} = (X_i, X_i^2)$ con $i = 1, \dots, n$.

Definimos la función $H_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $H_3(x, y) = \left\{ \frac{(y-x^2)}{x} \right\} \mathbb{1}(y > x^2) \mathbb{1}(x > 0)$. Así podemos reescribir nuestro estimador: $\hat{\theta}_2 = H_3(\bar{Y}_{n3})$.

En conclusión se estimarán mediante los métodos Bootstrap por Bloques los siguientes parámetros: media, autocorrelación de orden uno, varianza y coeficiente de variación; mientras que mediante los métodos TFT-Bootstrap se estimarán la autocorrelación de orden uno, varianza y coeficiente de variación.

3.3.5. Validación de hipótesis sobre las series de índices de TWA.

Estacionariedad:

Lo primero que se realizará para la aplicación respectiva es verificar la estacionariedad de las series construidas en las secciones previas. Para ello se ha utilizado la prueba aumentada de Dickey Fuller implementada en el software R mediante la función `adf.test` y la prueba Phillips-Perron de raíces unitarias implementada en el software R mediante la función `pp.test`.

De esta forma, las series de TWA construidas de las comparaciones de curva mediante las funciones F_3 y F_4 a partir de la base 14 son las únicas para las cuales no hubo evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula de que la serie tiene raíces unitarias en la prueba aumentada de Dickey Fuller. Se presentan en las gráficas 3.4 y 3.5 las representaciones gráficas de estas series.

Como se puede apreciar al ser F_3 y F_4 funciones de comparación de dispersión son muy similares los comportamientos de las series de TWA obtenidas, con un

cambio en la escala.

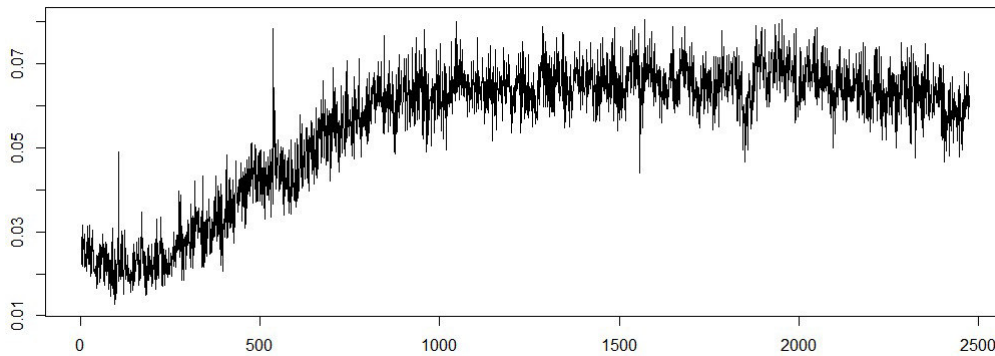


Figura 3.4: Serie de TWA construida a partir de la aplicación de la función F_3 sobre la Base 14, la notaremos como p146

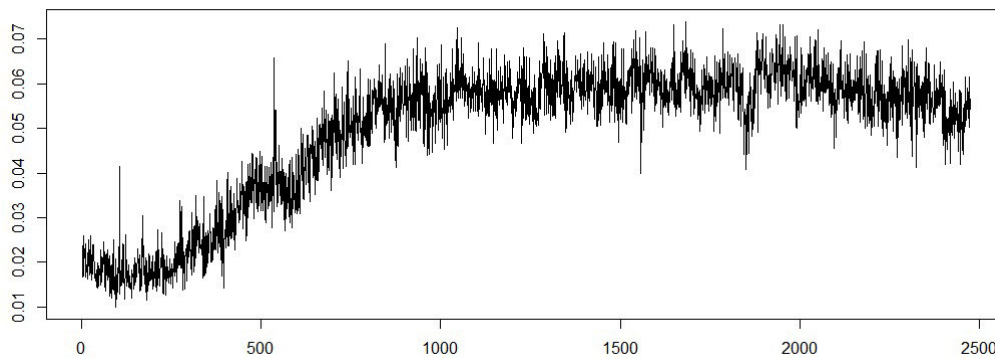


Figura 3.5: Serie de TWA construida a partir de la aplicación de la función F_4 sobre la Base 14, la notaremos como p147

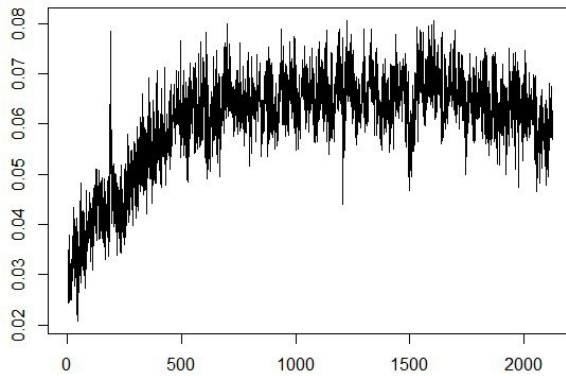
```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: ts(p146)
Dickey-Fuller = -2.1611, Lag order = 13, p-value = 0.5101
alternative hypothesis: stationary
```

(a) Prueba ADF sobre serie p146

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: ts(p147)
Dickey-Fuller = -2.0677, Lag order = 13, p-value = 0.5497
alternative hypothesis: stationary
```

(b) Prueba ADF sobre serie p147

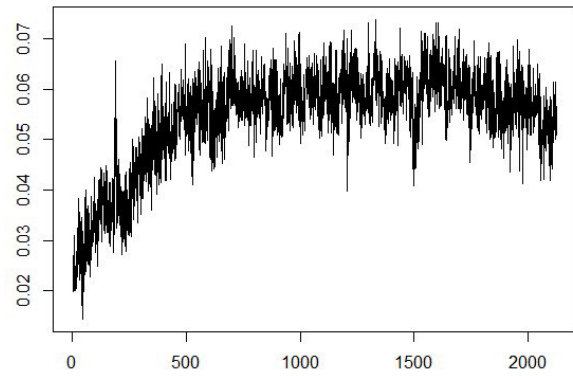
Para proceder con la aplicación de los métodos Bootstrap se aplicarán a estas series dos técnicas para obtener la estacionariedad respectiva, la primera técnica consistirá en eliminar las observaciones iniciales de la serie que parecen ser las responsables de la no estacionariedad debido a la volatilidad no constante. De esta forma para las series p146 y p147 se eliminarán los primeros 350 elementos de cada serie y las notaremos como p1461 y p1471 respectivamente, a continuación se muestran los resultados.



(a) Serie p1461

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: ts(p1461)
Dickey-Fuller = -3.6943, Lag order = 12, p-value = 0.02427
alternative hypothesis: stationary
```

(a) Prueba ADF sobre serie p1461

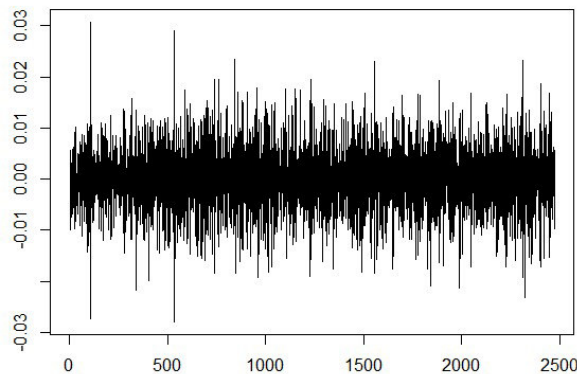


(b) Serie p1471

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: ts(p1471)
Dickey-Fuller = -3.5824, Lag order = 12, p-value = 0.03436
alternative hypothesis: stationary
```

(b) Prueba ADF sobre serie p1471

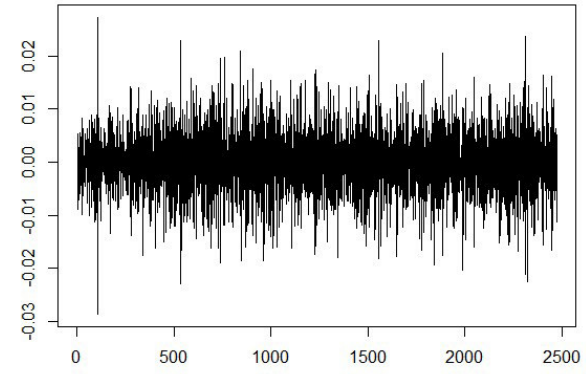
La segunda técnica consiste en la diferenciación de la serie, de forma que si notamos como $\{X_i\}$ a la serie respectiva la diferenciación será la serie $\{Y_i\}$ tal que $Y_i = X_{i+1} - X_i$. Aplicaremos esta técnica sobre las series p146 y p147 y las notaremos p1462 y p1472 respectivamente.



(a) Serie p1462

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: ts(p1462)
Dickey-Fuller = -19.123, Lag order = 13, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

(a) Prueba ADF sobre serie p1462



(b) Serie p1472

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: ts(p1472)
Dickey-Fuller = -19.187, Lag order = 13, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

(b) Prueba ADF sobre serie p1472

De esta forma obtenemos las series a las cuales aplicaremos los métodos Bootstrap, considerando que para las demás series existe información suficiente para re-

chazar la hipótesis nula y por tanto podemos decir que trabajamos con series estacionarias.

Aspectos relativos a los métodos Bootstrap por Bloques:

Una vez corroborada la estacionariedad de las series de índices TWA, el otro aspecto a considerar para la consistencia de los resultados es la longitud de bloques para cada serie, para esto como se había mencionado previamente se utilizará la función "b.star" que implementa numéricamente los resultados obtenido de [Politis, D.N. y White, H., 2004] y [Patton, A. *et al.*, 2009].

Aspectos relativos a los métodos TFT-Bootstrap:

TFT-Bootstrap RB

En el caso del método TFT-Bootstrap RB recordemos del teorema 2.21 es necesario que se cumplan las hipótesis (10,11,12,13). De estas la hipótesis 10 no requiere corroboración pues utilizaremos esta definición en la implementación de los coeficientes de Fourier.

Por otra parte la hipótesis 11 requiere para su cumplimiento lo expresado en el lema 3.1 por lo cual utilizaremos los núcleos utilizados previamente (BPK y K. uniforme) los cuales cumplen con las características necesarias, además de considerar el ancho de banda de 0,01 conforme lo expuesto en [Kirch y Politis, 2011].

Para el caso de la hipótesis 12 se tiene el siguiente lema:

LEMA 3.4. *Asumiendo que se cumple la hipótesis 3 entonces:*

- *Se cumple el literal (a) de la hipótesis 12*
- *Si adicionalmente se cumple: $\max_{1 \leq j, k \leq N} \left| \text{cov}(I(j), I(k)) - (2\pi f(\lambda_j))^2 \delta_{j,k} \right| = o(1)$ donde $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ y 0 caso contrario. Entonces se cumple el literal (b) de la hipótesis 12*
- *Si adicionalmente se cumple $\max_{1 \leq j, k \leq N} \left| \text{cov}(I^2(j), I^2(k)) - 4(2\pi f(\lambda_j))^4 \delta_{j,k} \right| = o(1)$ entonces se cumple el literal (c) de la hipótesis 12*

Las condiciones de este lema se cumple para una amplia cantidad de procesos, tales como los procesos lineales o procesos que cumplen con condiciones básicas sobre los momentos de diversos orden, entre otros.[Kirch y Politis, 2011]

Por último para el caso de la hipótesis 13 en el caso de procesos lineales se requiere que los coeficientes sean absolutamente sumables y en e caso de otros procesos

se requiere el cumplimiento de otras condiciones sobre los momentos del proceso. [Kirch y Politis, 2011]

En este proyecto asumiremos el cumplimiento de las hipótesis (12,13) para todas nuestras series de TWA debido al alcance del proyecto.

TFT-Bootstrap LB

En el caso del método TFT-Bootstrap LB recordemos del teorema 2.21 es necesario que se cumplan las hipótesis (14,15).

El cumplimiento de la hipótesis 15 es semejante al cumplimiento de la hipótesis 13 su cumplimiento se basa en el lema 5.3 en [Kirch y Politis, 2011].

Para el cumplimiento de la hipótesis 14 es necesario el cumplimiento de ciertas condiciones sobre el núcleo a utilizar como la condición uniforme de Lipschitz y condiciones sobre el ancho de banda tal que $(h^3 T)^{-1} = o(1)$ el detalle se encuentra en el lema 5.4 en [Kirch y Politis, 2011].

En este proyecto asumiremos el cumplimiento de las hipótesis (14,15) para todas nuestras series de TWA debido al alcance del proyecto.

En este caso el ancho de banda que se utilizará es $\lfloor \frac{T-1}{2} \rfloor^{-1/3}$ donde T es la longitud de la serie temporal.

3.3.6. Resultados obtenidos

Se presenta a continuación brevemente los resultados más relevantes obtenidos así como la comparación general sobre una base elegida, los resultados completos se encuentra en la sección de Anexos .

Los intervalos que se presentarán han sido obtenidos mediante el método BCa paramétrico con un nivel de confianza del 95 % bajo lo señalado en (2.23); una vez más, para los casos donde se han obtenido indeterminación se utilizó el método BCa no paramétrico con los valores $\hat{a} = 0,061$ y $\hat{z}_0 = 0,146$. Para todos los métodos se realizaron 2.000 muestras Bootstrap para la estimación de parámetros.

Esta investigación fue realizada usando los recursos del Laboratorio de Cálculo Científico del Centro de Modelización Matemática: MODEMAT, Escuela Politécnica Nacional (Quito). Haciendo uso del supercomputador QUINDE del HPC-MODEMAT el cual está construido y configurado especialmente para aprovechar la matriz de núcleos al ejecutar algoritmos y paquetes informáticos con capacidad de paralelización en CPU y GPU.

Esto debido al costo computacional que implicaba la ejecución de los scripts de R, para obtener 2000 muestras Bootstrap por cada método para cada serie de índices de TWA, se utilizaron 4 nodos de la partición quinde-G8-4650 y la política QoS: "extended"; esto último debido a que la duración de script por serie oscilaba entre las 5 y 10 horas. Se realizó la aplicación de métodos Bootstrap sobre un total de 62 series.

La base elegida para realizar comparaciones y mostrar de forma general los resultados es la base P1, además se mostrarán resultados de otras bases cuando lo amerite. Amerita recordar que por la cada base se generan 4 series, de la comparación de latidos mediante las funciones F_1, F_2, F_3 y F_4 , para la Base P1, estas se notarán respectivamente como Serie P14, P15, P16 y P17.

Resultados de la estimación de la media

En primera instancia se expondrán los resultados de la estimación de la media para cada serie mencionada, ya que para ello se aplicarán tan solo los métodos por Bloques. Más aún estas estimaciones nos permitirán obtener muestras Bootstrap TFT sobre el dominio de tiempo y no centradas. Esto considerando que los métodos TFT-Bootstrap dan como resultado una muestra Bootstrap sobre el dominio de tiempo de la serie, pero esta muestra está centrada, para obtener la serie no centrada se le debe sumar un estimador de la media obtenida por un método Bootstrap adecuado, en este caso usaremos el método Bootstrap por Bloques con menor MSE.

Base	Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
P14	MBB	0,05517671	0,07101712	0,0399796	0,03997621
	CBB	0,0556085	0,07108682	0,03729895	0,03729894
	SB	0,05530181	0,07084742	0,03818777	0,03817873
P15	MBB	0,02575044	0,03223002	0,0066377	0,00663753
	CBB	0,02559836	0,03215539	0,0066851	0,00668459
	SB	0,02572143	0,03238141	0,00699744	0,0069974
P16	MBB	0,07322064	0,07817596	0,00421494	0,00393361
	CBB	0,0735316	0,07848828	0,00424872	0,00424576
	SB	0,07289385	0,07875842	0,00580311	0,00580176
P17	MBB	0,06354942	0,06828543	0,0036013	0,00339883
	CBB	0,06424222	0,06871935	0,0034389	0,00343534
	SB	0,06376682	0,06909832	0,0048078	0,00480397

Cuadro 3.21: Resumen sobre la estimación de la media por cada método Bootstrap por bloques y para cada serie de índices de TWA.

En la tabla 3.21 se presentan los resultados del IC paramétrico, el error cuadrático medio y la varianza de las 2000 muestras Bootstrap obtenidas para cada serie

	P14-CBB	P15-MBB	P16-MBB	P17-CBB
Estimador $\hat{\mu}^*$	0,06129192	0,02824678	0,07658165	0,07658165

Cuadro 3.22: Estimador de la media obtenido mediante el método Monte Carlo de las 2000 muestras Bootstrap por cada método señalado.

por cada uno de los métodos, se ha resaltado por cada serie el método con menor MSE y VAR. Finalmente en la tabla 3.22 se presentan los estimadores Bootstrap $\hat{\mu}^*$ obtenidos por la aplicación del método Monte Carlo a las muestras Bootstrap correspondientes, en esta tabla se presentan tan solo los resultados del método con menor MSE por cada serie, estos estimadores serán los utilizados más adelante para añadir a las muestras TFT-Bootstrap para obtener series remuestreadas sobre el dominio de tiempo y no centradas.

A continuación se muestra gráficamente los resultados obtenidos de las estimaciones a partir de cada muestra Bootstrap por cada método, además se presentan los IC BCa paramétrico e IC BCa no paramétrico conforme lo descrito en las secciones previas; se ha trazado también una línea de referencia sobre la estimación del parámetro en la serie observada. Estos gráficos permiten contrastar la teoría de obtención del intervalo BCa paramétrico que pretende corregir el sesgo de los estimadores Bootstrap considerando el valor del estimador en la serie observada, esto siguiendo la idea de los métodos Bootstrap de forma que la serie observada es a la población, como las muestras Bootstrap son a la serie de estudio.

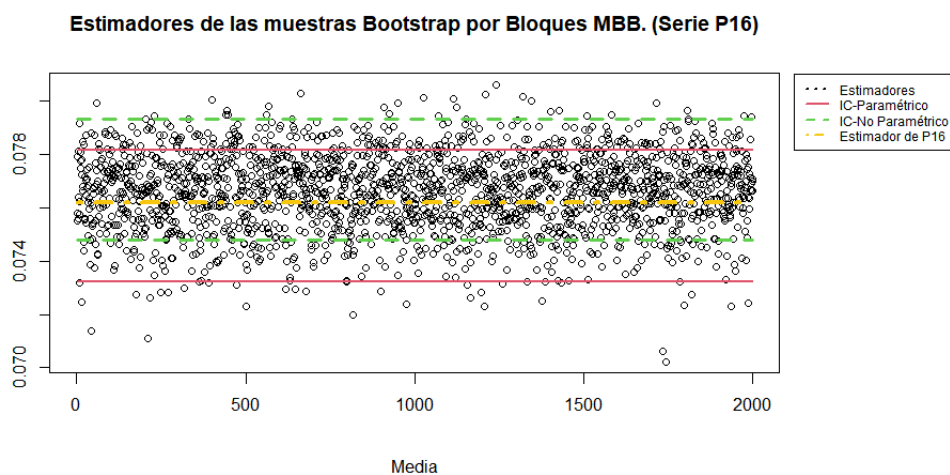


Figura 3.6: Resultados de la estimación de la media sobre la serie P16 mediante el método MBB.

Previo a presentar los resultados de la estimación de los parámetros restantes, se

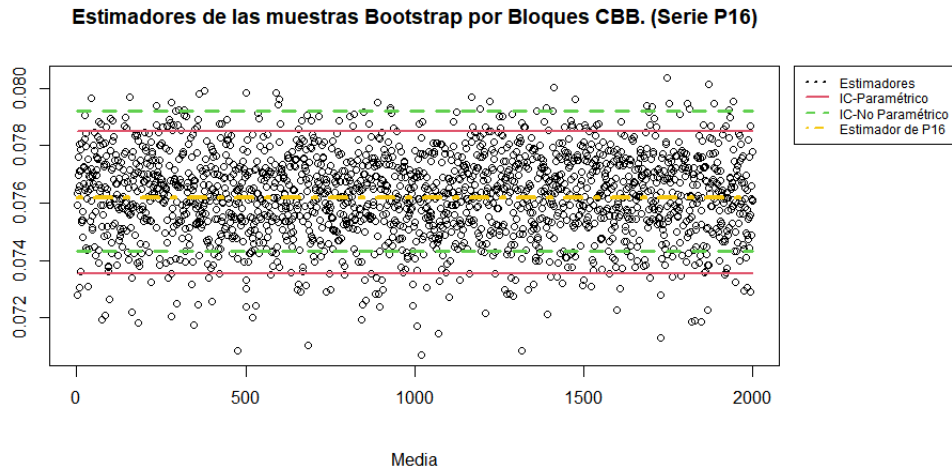


Figura 3.7: Resultados de la estimación de la media sobre la serie P16 mediante el método CBB.

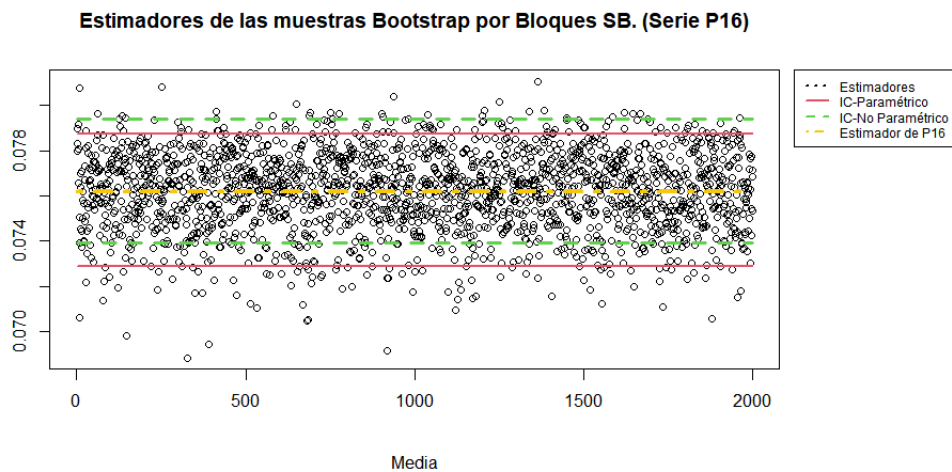


Figura 3.8: Resultados de la estimación de la media sobre la serie P16 mediante el método SB.

mostrará algunos de los resultados de las muestras Bootstrap obtenidas en el caso del método TFT.

A continuación en la tabla 3.23 se presentan los cuartiles de las series de índices de TWA de la Base P1 y en la tabla 3.24 presentamos los límites establecidos para definir los outliers o valores atípicos de la serie. Estos son establecidos en función del rango intercuartil $RIQ = Q_3 - Q_1$ y los cuartiles Q_3 y Q_1 , los valore atípicos leves distan 1,5 veces el rango intercuartílico por debajo de Q_1 o por encima de Q_3 y valor atípico extremo aquel que dista 3 veces el rango intercuartílico por debajo de Q_1 o por encima de Q_3 .

Una de las cuestiones importantes sobre nuestras series de estudio es que pre-

	P14	P15	P16	P17
Q_0	0,011888	0,002573	0,031684	0,027089
Q_1	0,035403	0,013864	0,069536	0,060686
Q_2	0,049130	0,022032	0,076883	0,067302
Q_3	0,067309	0,033622	0,083521	0,073209
Q_4	1,022148	0,735449	0,474535	0,412322

Cuadro 3.23: Cuartiles de las series conformadas a partir de la Base P1

	P14	P15	P16	P17
RIQ	0,0319065	0,0197583	0,0139852	0,0125228
Q_1-3 RIQ	-0,0603167	-0,0454111	0,0275800	0,0231178
$Q_1-1,5$ RIQ	-0,0124569	-0,0157737	0,0485578	0,0419019
$Q_3+1,5$ RIQ	0,1151692	0,0632596	0,1044986	0,0919929
Q_3+3 RIQ	0,1630290	0,0928971	0,1254764	0,1107770

Cuadro 3.24: Construcción de límites para la detección de outliers en cada serie.

sentan picos que son valores atípicos leves (superiores a la línea sólida verde) y valores atípicos extremos (superiores a la línea entrecortada azul). Esta información podría no recogerse en las muestras Bootstrap obtenidas, de hecho este aspecto se ha considerado como una posible causa de obtención de resultados no confiables en el caso de Bootstrap sobre variables independientes. [Canty, A. J. *et al.*, 2006]. Esta información se puede apreciar en la figura 3.9 para la serie P14, en la figura 3.10 para la serie P15, en la figura 3.11 para la serie P16 y en la figura 3.12 para la serie P17.

Ahora se muestran también los resultados en relación a la función de autocovarianza, esto con el objetivo de corroborar la teoría, en la cual se demostró que con los métodos TFT-Bootstrap se preserva la estructura de covarianza (estructura del momento de segundo orden) en el Lema 2.15.

Esta característica se corrobora en la figura 3.13 para la serie P14, en la figura 3.14 para la serie P15, en la figura 3.15 para la serie P16 y en la figura 3.16 para la serie P17; en todos los casos la estructura de covarianza parece conservarse, recordemos que se han tomado como ejemplo la muestra Bootstrap N. 300 de cada tipo de método TFT, sin embargo se hizo un análisis más detallado y se corroboró la conservación de esta característica en otras de las muestras TFT.

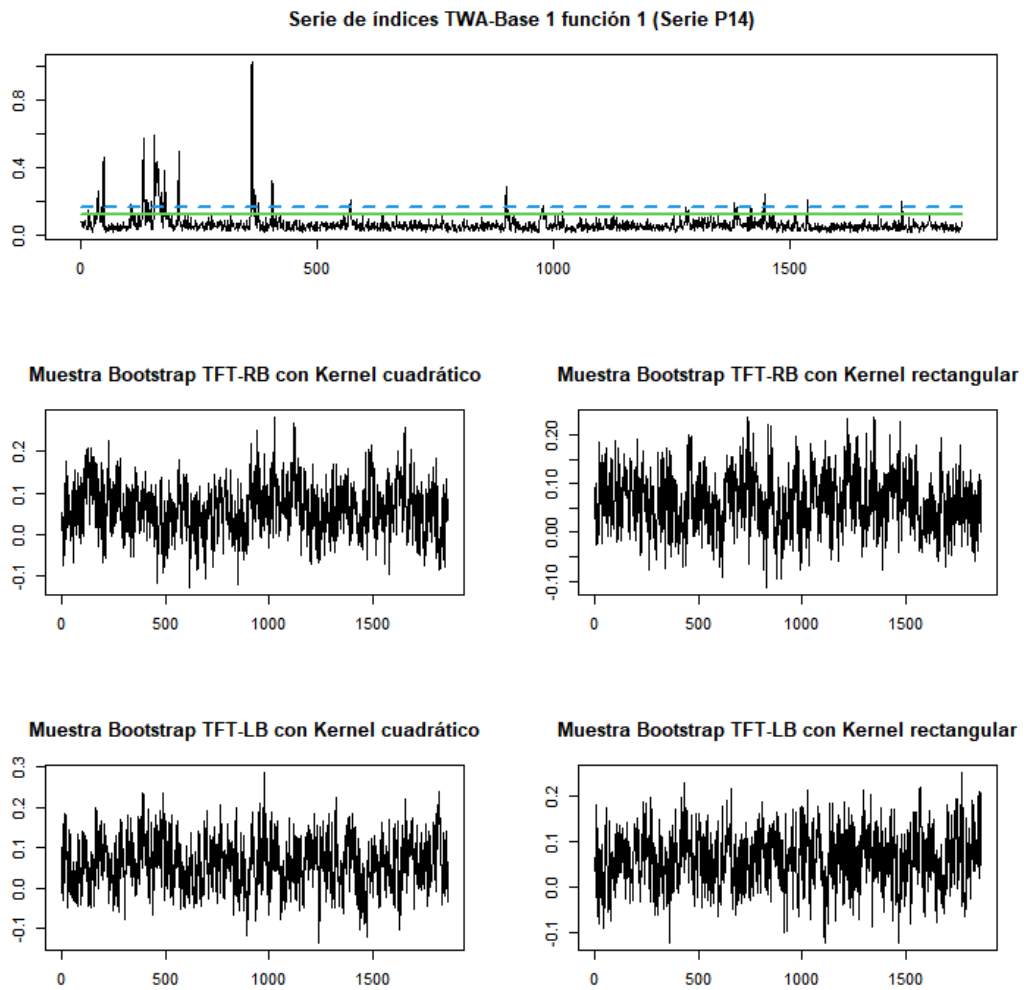


Figura 3.9: En la parte superior se encuentra la serie de TWA construida a partir de la aplicación de la función F_1 sobre la Base 1, Serie P14. En la parte inferior se muestran las diferentes muestras Bootstrap específicamente se tomo la muestra 300 de cada método, además se presenta la serie luego de haber sumado la media Bootstrap CBB.

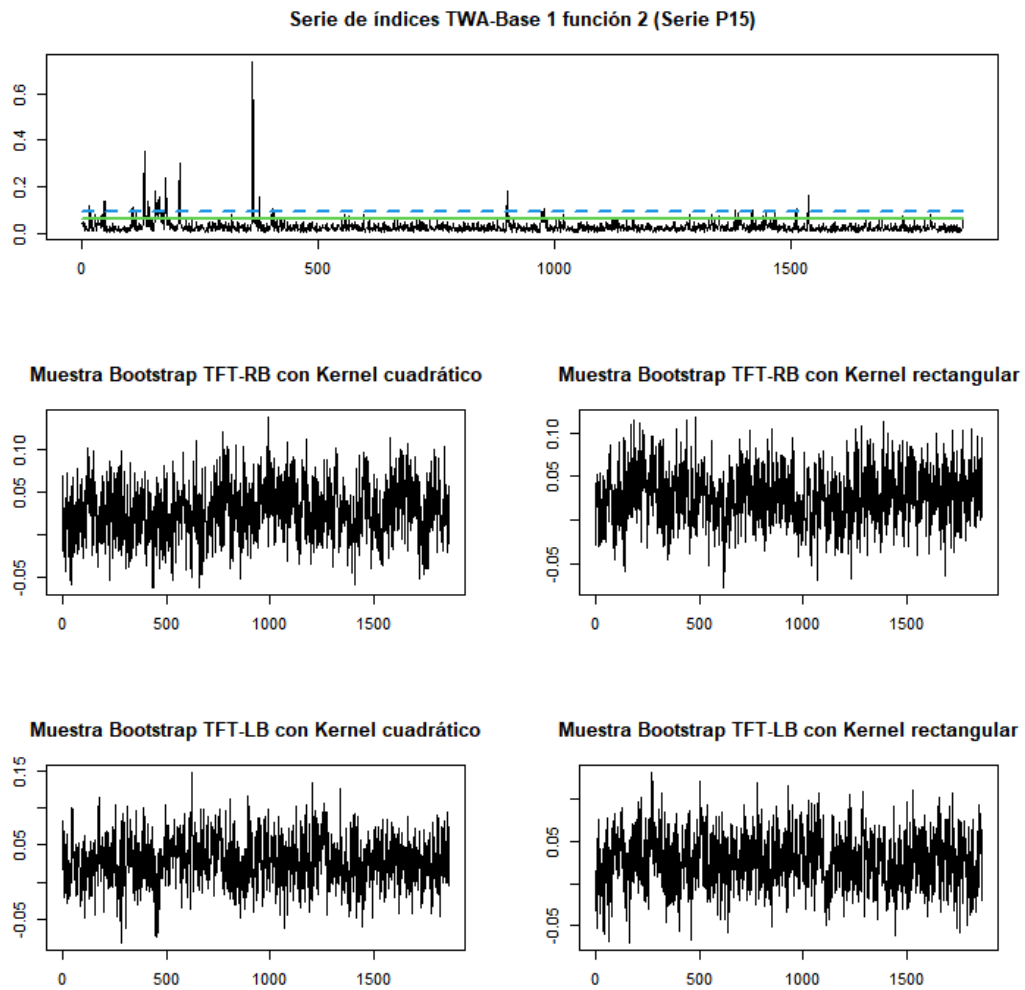


Figura 3.10: En la parte superior se encuentra la serie de TWA construida a partir de la aplicación de la función F_2 sobre la Base 1, Serie P15. En la parte inferior se muestran las diferentes muestras Bootstrap específicamente se tomo la muestra 300 de cada método, además se presenta la serie luego de haber sumado la media Bootstrap MBB.

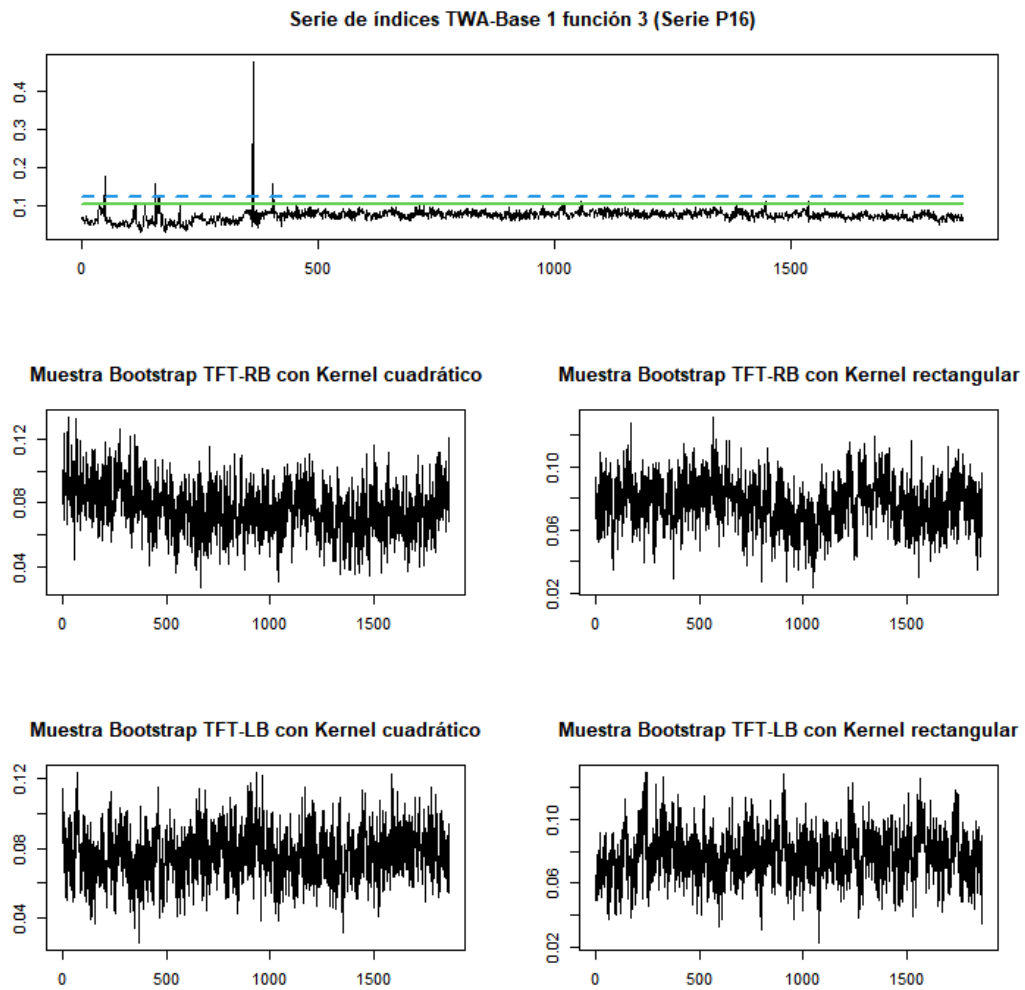


Figura 3.11: En la parte superior se encuentra la serie de TWA construida a partir de la aplicación de la función F_3 sobre la Base 1, Serie P16. En la parte inferior se muestran las diferentes muestras Bootstrap específicamente se tomo la muestra 300 de cada método, además se presenta la serie luego de haber sumado la media Bootstrap MBB.

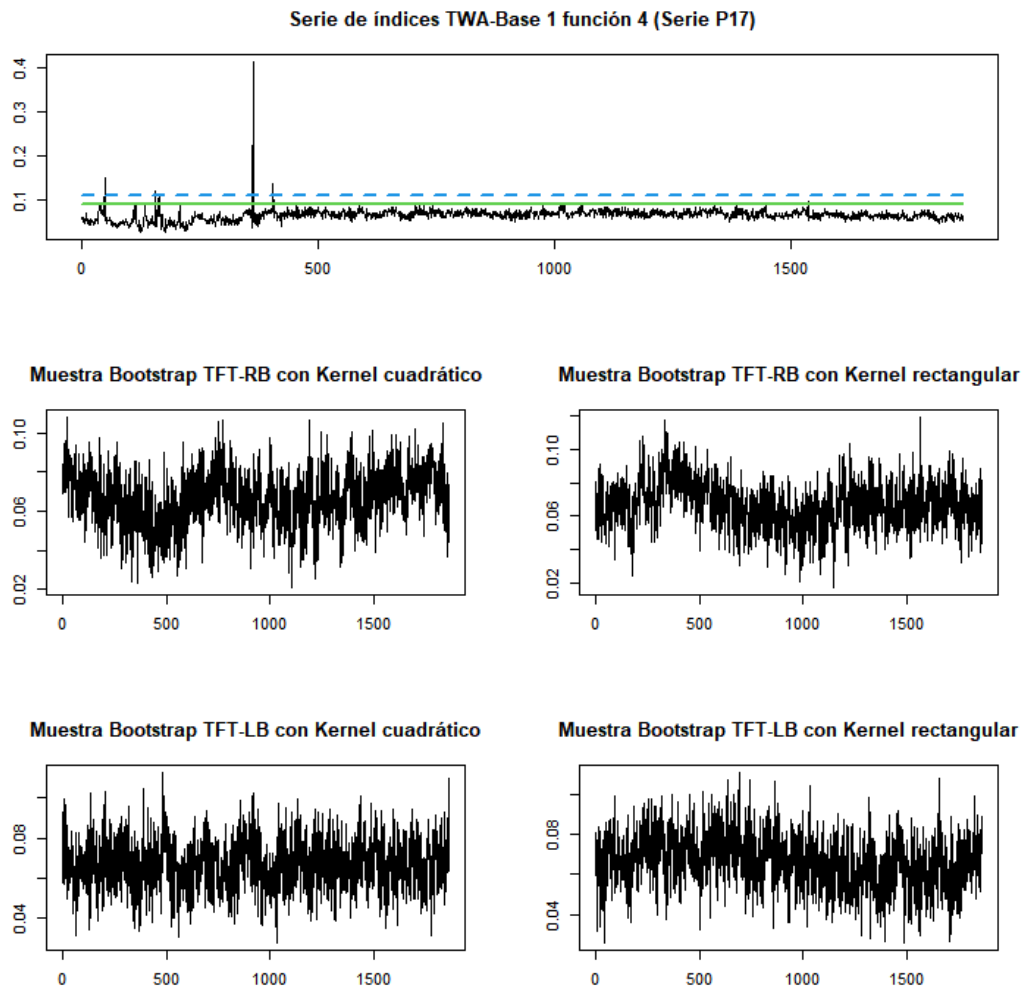


Figura 3.12: En la parte superior se encuentra la serie de TWA construida a partir de la aplicación de la función F_4 sobre la Base 1, Serie P17. En la parte inferior se muestran las diferentes muestras Bootstrap específicamente se tomo la muestra 300 de cada método, además se presenta la serie luego de haber sumado la media Bootstrap CBB.

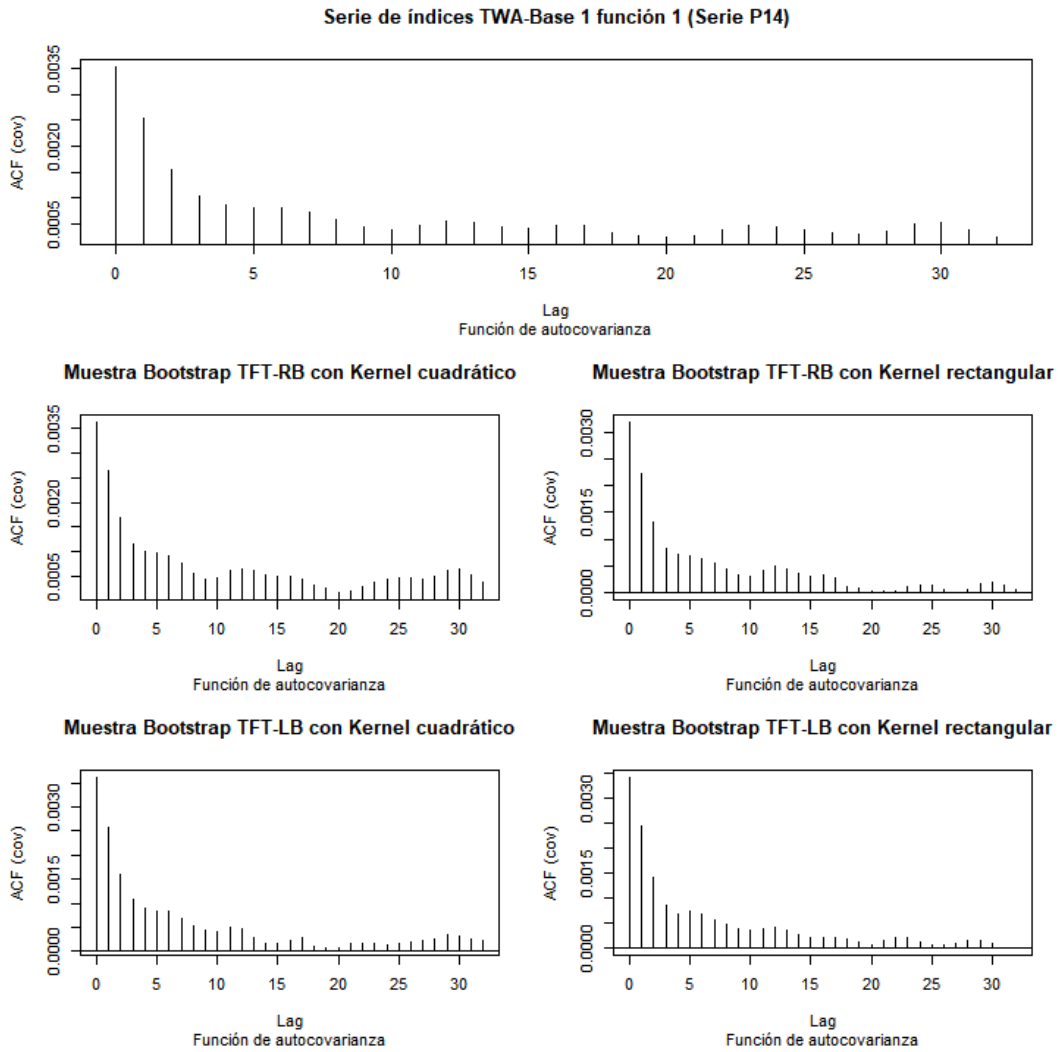
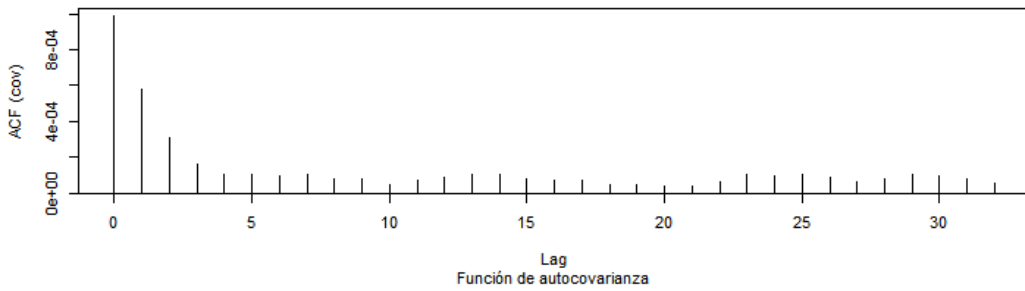
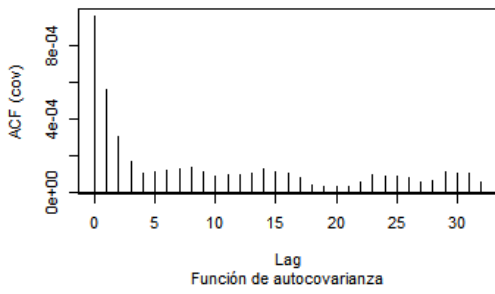


Figura 3.13: Funciones de autocovarianza serie P14 y muestras TFT-Bootstrap

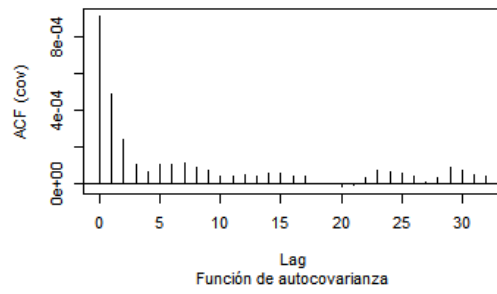
Serie de índices TWA-Base 1 función 2 (Serie P15)



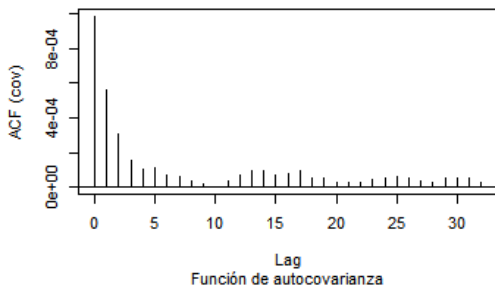
Muestra Bootstrap TFT-RB con Kernel cuadrático



Muestra Bootstrap TFT-RB con Kernel rectangular



Muestra Bootstrap TFT-LB con Kernel cuadrático



Muestra Bootstrap TFT-LB con Kernel rectangular

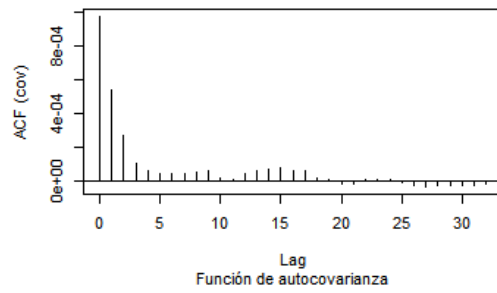


Figura 3.14: Funciones de autocovarianza serie P15 y muestras TFT-Bootstrap

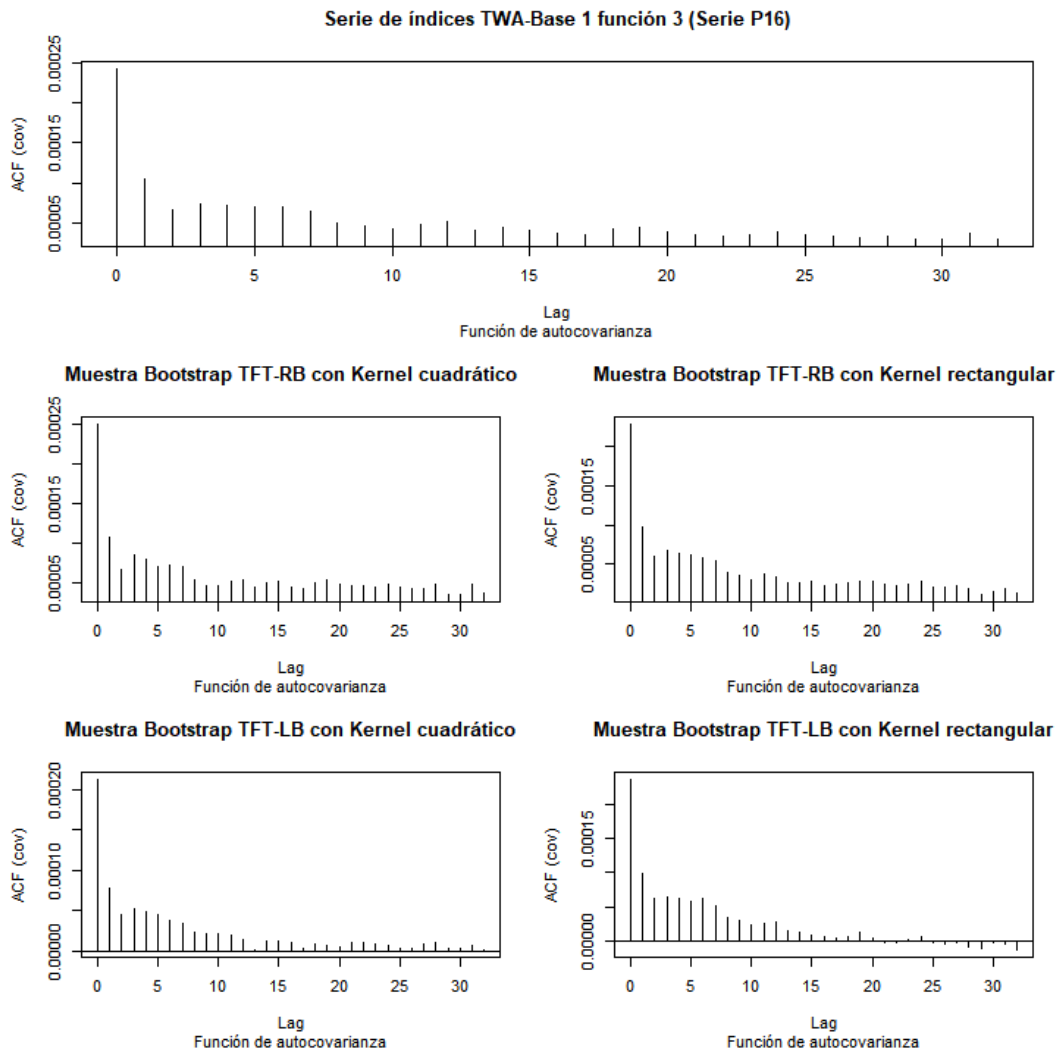
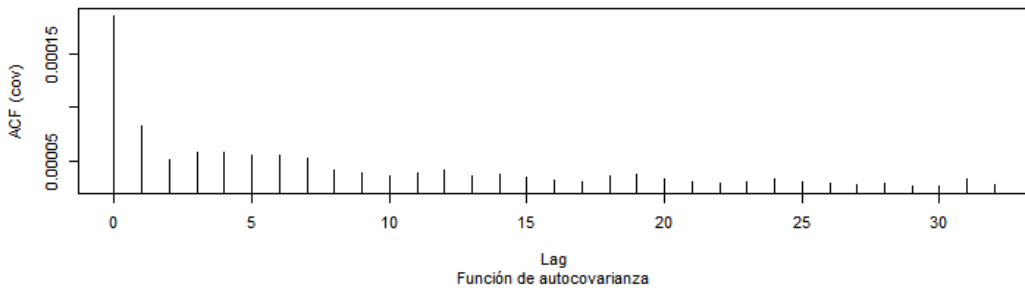
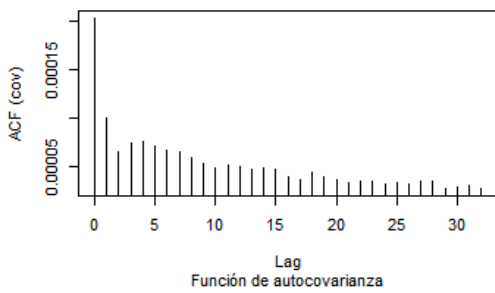


Figura 3.15: Funciones de autocovarianza serie P16 y muestras TFT-Bootstrap

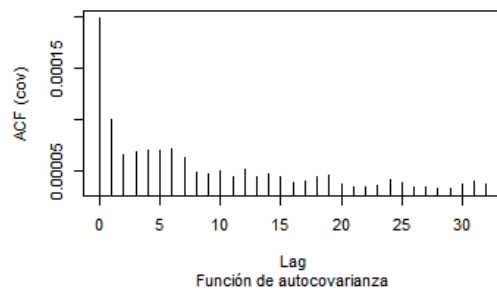
Serie de índices TWA-Base 1 función 4 (Serie P17)



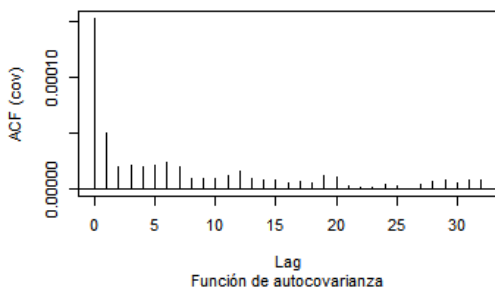
Muestra Bootstrap TFT-RB con Kernel cuadrático



Muestra Bootstrap TFT-RB con Kernel rectangular



Muestra Bootstrap TFT-LB con Kernel cuadrático



Muestra Bootstrap TFT-LB con Kernel rectangular

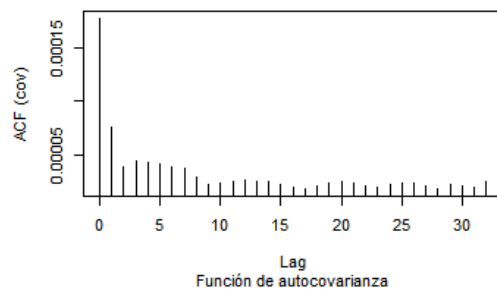


Figura 3.16: Funciones de autocovarianza serie P17 y muestras TFT-Bootstrap

3.3.7. Resultados de la estimación de parámetros por métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap

Se presentará brevemente los resultados de la estimación de parámetros mediante métodos Bootstrap, por cada estimador se presentará los resultados de una serie a partir de la Base 1.

Es importante mencionar que para el caso de los tres estimadores a continuación se utilizarán las mismas muestras TFT-Bootstrap, en el caso de los Bootstrap por Bloque como la redefinición de serie para aplicar el método es distinta entre la autocorrelación de orden 1 y los otros dos estimadores, sin embargo para la varianza y el coeficiente de variación se realiza la misma redefinición de serie entonces estas compartirán las mismas muestras Bootstraps por bloques.

Estimación de la autocorrelación de orden 1.

En primera instancia se presentarán en las tablas a continuación un resumen de los resultados obtenidos en todos los casos se presentan los intervalos de confianza BCa paramétricos.

Como se aprecia en las tablas a continuación los métodos TFT-Bootstrap presentan valores menores de error cuadrático medio en comparación a los métodos por bloques.

De forma particular para la serie P14 el método de menor MSE corresponde al método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático, este método además consta de la menor varianza en comparación con las demás, un detalle importante sobre esta serie es que para los métodos TFT los intervalos pese a tener límites cercanos esto se debe a la cercanía de la distribución de los estimadores Bootstrap y no se debe a un caso similar de lo que sucede en la figura 3.20 o el caso presentado en la figura 3.22.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,5532396	0,7747866	10,6447370	9,6973327
CBB	0,5565541	0,7782538	10,6687681	9,5737759
SB	0,5712908	0,7785031	11,2317325	9,8802305
KR-RB	0,6969578	0,7482428	0,4608024	0,4437445
KR-LB	0,6923196	0,7306062	0,3660452	0,2633147
KC-RB	0,6968961	0,7471481	0,4542077	0,4302472
KC-LB	0,7005814	0,7402479	0,2884669	0,2707302

Cuadro 3.25: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 mediante métodos Bootstrap para la serie P14

En el caso de la serie P15 el método de menor MSE corresponde al método TFT-

Bootstrap LB con núcleo cuadrático, además el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular consta de la menor varianza en comparación con los demás métodos. Al realizar la inspección gráfica sobre esta serie y sobre los resultados del muestreo se pudo apreciar la corrección de sesgo utilizada por el intervalo BCa particularmente sobre los métodos LB en el caso del KR los estimadores Bootstrap se encuentran sesgados por debajo del estimador de la serie P15, por el contrario para el caso del KC el sesgo es por encima de la serie P15.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,460689	0,665118	12,824224	11,226235
CBB	0,453023	0,662238	13,131227	11,602369
SB	0,454682	0,665034	13,456765	11,628561
KR-RB	0,560754	0,618849	0,574484	0,552692
KR-LB	0,579432	0,610839	0,871898	0,311857
KC-RB	0,561154	0,619709	0,586252	0,565460
KC-LB	0,558105	0,599771	0,418596	0,329397

Cuadro 3.26: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 mediante métodos Bootstrap para la serie P15

En el cuadro correspondiente a la serie P16 se constata que el método de menor MSE corresponde al método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular, además el método TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático consta de la menor varianza en comparación con los demás métodos. En este caso se puede apreciar que los intervalos respectivos guardan relación entre si.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,281480	0,624957	21,659445	21,436508
CBB	0,273684	0,612128	21,624947	20,807207
SB	0,273126	0,611231	20,961206	20,429387
KR-RB	0,389875	0,524227	3,621780	2,852251
KR-LB	0,359856	0,493096	3,023236	3,017066
KC-RB	0,392126	0,519743	3,632204	2,793896
KC-LB	0,381293	0,500601	3,656302	3,089941

Cuadro 3.27: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 mediante métodos Bootstrap para la serie P16

Para una interpretación completa de los resultados de los métodos Bootstrap para la serie P17 se presentará gráficamente los estimadores Bootstrap obtenidos y los intervalos de confianza paramétricos y no paramétricos. Este análisis se realizó con las demás series sin embargo, se presentan tan solo los resultados para esta serie, en este caso el método de menor MSE es el TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático, y

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,2873083	0,6319476	20,9846398	20,8092620
CBB	0,2946453	0,6282124	20,9233319	20,4654243
SB	0,2907390	0,6315126	20,3101313	20,0294486
KR-RB	0,4011517	0,5434102	4,1540440	3,2834029
KR-LB	0,4546928	0,4576959	8,9646300	2,2511680
KC-RB	0,4092021	0,5425646	3,6779503	2,7849500
KC-LB	0,4534819	0,4651899	9,1196907	2,3881835

Cuadro 3.28: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 mediante métodos Bootstrap para la serie P17

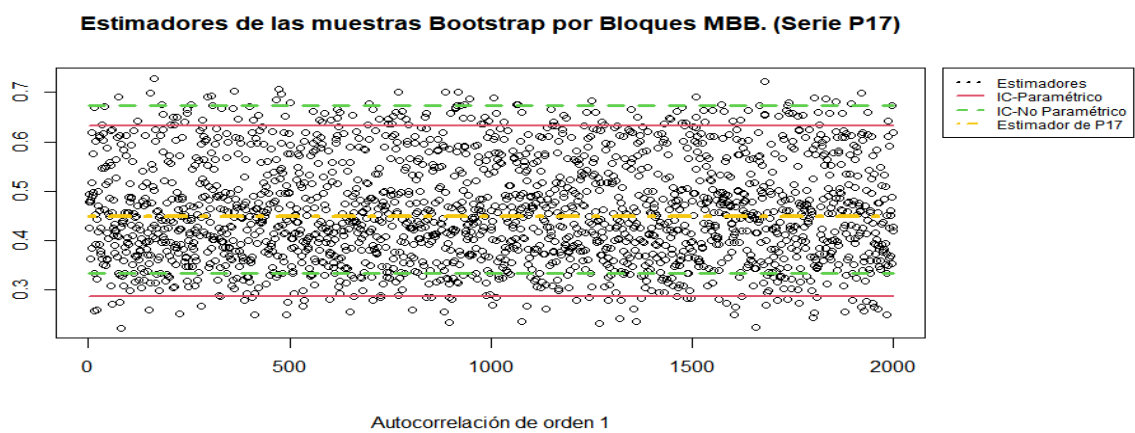


Figura 3.17: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método MBB.

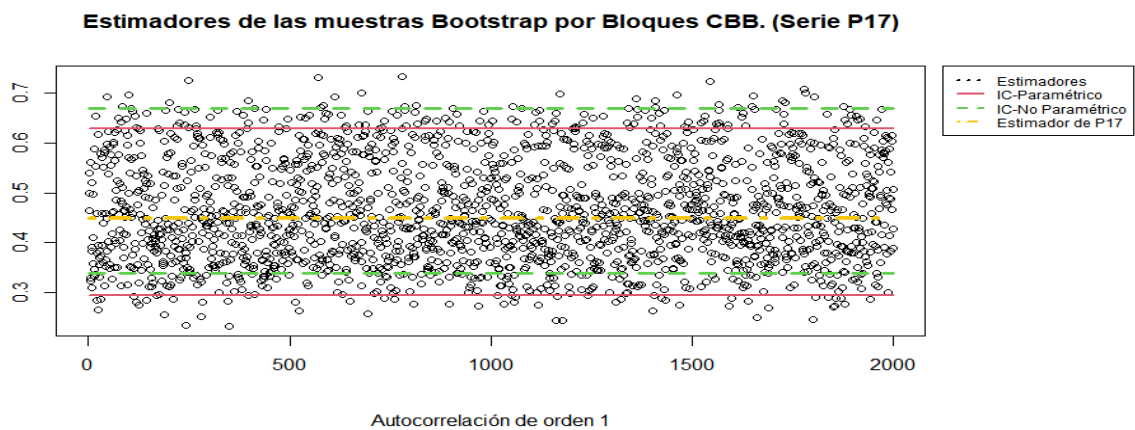


Figura 3.18: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método CBB.

considerando la varianza el método de menor varianza es el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

Se podrá observar a continuación que para el caso de los métodos TFT-Bootstrap

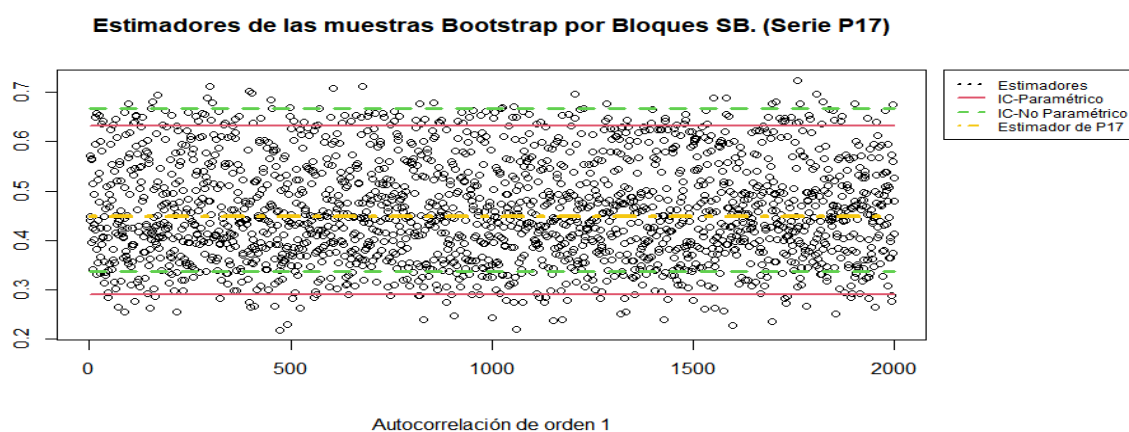


Figura 3.19: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método SB

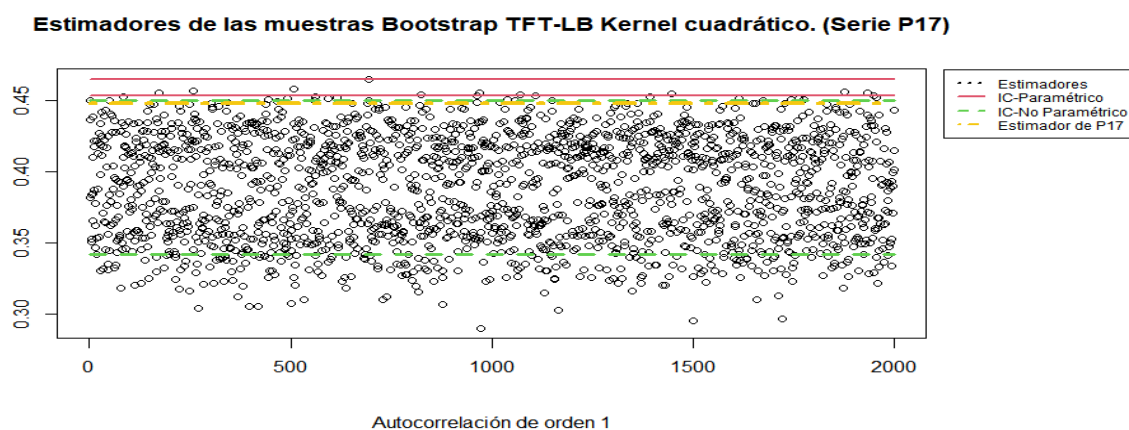


Figura 3.20: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

LB tanto en núcleo rectangular (Figura 3.20) y núcleo cuadrático (Figura 3.22) se aprecia en estos gráficos que los intervalos de confianza BCa paramétricos tienen una longitud mínima y se aprecia que los estimadores Bootstrap encontrados se encuentran sesgados hacia abajo del estimador de la serie, lo cual difiere de lo que se aprecia con otros métodos donde los estimadores Bootstrap están distribuidos "equitativamente" por encima y debajo del estimador de la serie, un ejemplo de ello las estimaciones por el método SB (Figura 3.19) o las estimaciones TFT-Bootstrap RB (Figura 3.21 y figura 3.23).

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-RB Kernel cuadrático. (Serie P17)

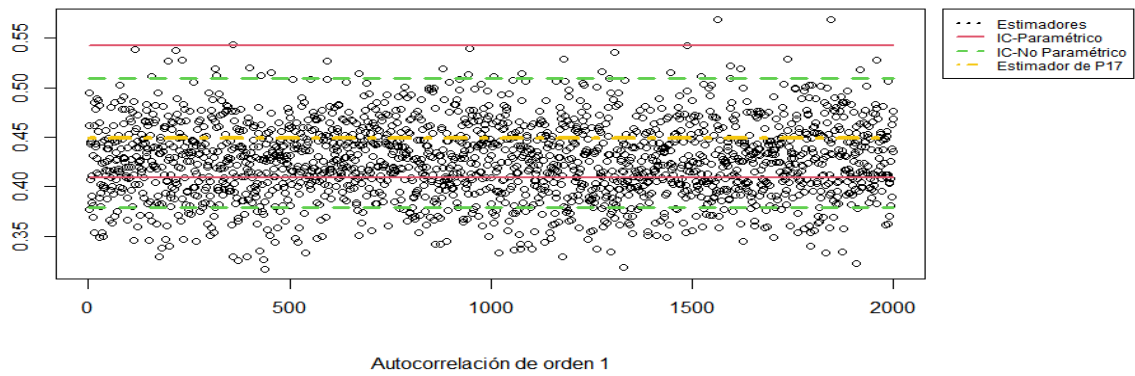


Figura 3.21: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel rectangular. (Serie P17)

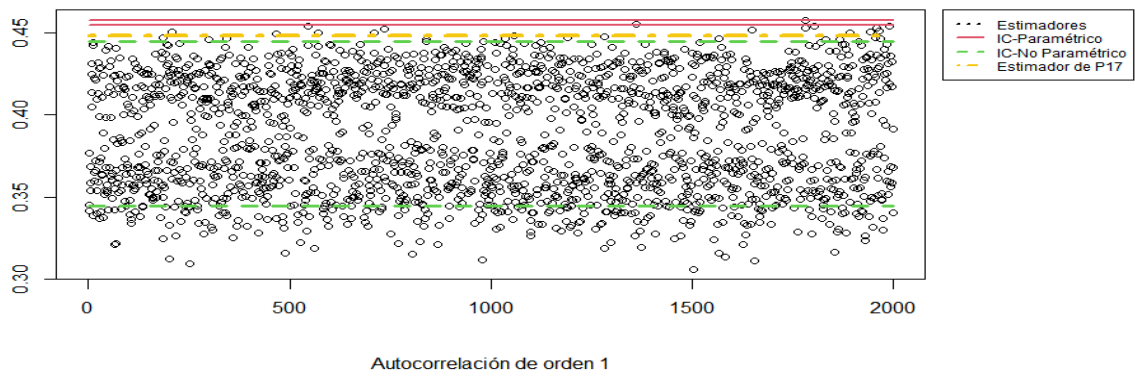


Figura 3.22: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-RB Kernel rectangular. (Serie P17)

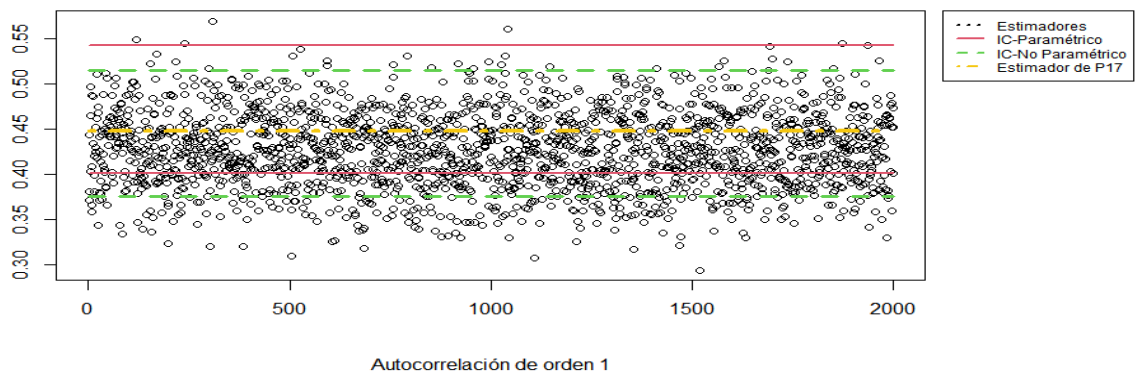


Figura 3.23: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método TFT-Bootstrap RB con núcleo rectangular.

Estimación de la varianza.

Siguiendo el esquema previo se presentarán los resultados generales en las tablas a continuación y en este caso para la serie P15 se mostrarán los resultados gráficamente.

Una vez más se corrobora que mediante los métodos TFT-Bootstrap se obtienen estimadores de menor MSE y VAR en comparación a los métodos Bootstrap por bloques, este comportamiento se repite en la mayoría de bases de datos y series, sin embargo en un número menor se obtienen resultados con menor MSE y VAR en los métodos Bootstrap por Bloques en comparación a los métodos TFT-Bootstrap (Base 5 por ejemplo, se puede verificar aquello en Anexos). De forma general también por el tipo de parámetro a estimar, los IC obtenidos son de longitud de milésimas.

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,001654	0,006967	0,004109	0,004108
CBB	0,001625	0,007247	0,004422	0,004422
SB	0,001513	0,007245	0,004392	0,004382
KR-RB	0,003282	0,003956	0,000071	0,000069
KR-LB	0,003338	0,003846	0,000044	0,000040
KC-RB	0,003309	0,003969	0,000069	0,000066
KC-LB	0,003282	0,003748	0,000047	0,000042

Cuadro 3.29: Resultados de la estimación de la varianza mediante métodos Bootstrap para la serie P14

Considerando que para los métodos TFT los diversos estimadores se han obtenido de las mismas muestras TFT-Bootstrap se puede evidenciar que el MSE y la VAR guardan relación a los resultados presentados en la sección previa para la autocorrelación de orden 1.

Así para el caso de la serie P14 el menor MSE y la menor VAR se presenta para el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular. Para la serie P16 los valores de MSE y VAR son muy cercanos entre los diferentes métodos TFT, sin embargo los intervalos obtenidos son distintos entre los diferentes métodos debido a los estimadores Bootstrap obtenidos

De forma similar a lo analizado previamente, para el caso de la serie P17 se corroborará que el comportamiento de los intervalos BCa para el caso de los TFT-Bootstrap LB se mantiene, las gráficas del estimador de varianza son similares a las presentadas en el caso de autocorrelación, esto debido a que los estimadores se obtuvieron de las mismas muestras TFT-Bootstrap.

En el caso de la estimación de la varianza se presentarán gráficamente los re-

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,0001313	0,0005860	0,0000184	0,0000183
CBB	0,0001359	0,0005784	0,0000187	0,0000187
SB	0,0001312	0,0005518	0,0000182	0,0000182
KR-RB	0,0002264	0,0002935	0,0000006	0,0000005
KR-LB	0,0002169	0,0002740	0,0000006	0,0000005
KC-RB	0,0002267	0,0002908	0,0000006	0,0000005
KC-LB	0,0002282	0,0002728	0,0000006	0,0000005

Cuadro 3.30: Resultados de la estimación de la varianza mediante métodos Bootstrap para la serie P16

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,0001018	0,0004305	0,0000111	0,0000111
CBB	0,0001045	0,0004264	0,0000105	0,0000105
SB	0,0001008	0,0004412	0,0000108	0,0000107
KR-RB	0,0001725	0,0002393	0,0000004	0,0000003
KR-LB	0,0001885	0,0001907	0,0000007	0,0000002
KC-RB	0,0001739	0,0002314	0,0000004	0,0000003
KC-LB	0,0001871	0,0001902	0,0000007	0,0000002

Cuadro 3.31: Resultados de la estimación de la varianza mediante métodos Bootstrap para la serie P17

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,000470	0,002256	0,000371	0,000371
CBB	0,000500	0,002218	0,000343	0,000343
SB	0,000511	0,002282	0,000323	0,000323
KR-RB	0,000939	0,001098	0,000003	0,000003
KR-LB	0,000984	0,001032	0,000005	0,000001
KC-RB	0,000936	0,001093	0,000003	0,000003
KC-LB	0,000931	0,001018	0,000003	0,000002

Cuadro 3.32: Resultados de la estimación de la varianza mediante métodos Bootstrap para la serie P15

sultados de la serie P15 que podemos ver a continuación, en la tabla 3.32 se aprecia como en el caso de la autocorrelación que el método de menor varianza es el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

Estimación del coeficiente de variación.

En el caso de este parámetro se utilizan las mismas muestras TFT-Bootstrap que en los casos previos y las muestras Bootstrap por bloques son las mismas que las utilizadas para la varianza.

Particularmente, en este caso a las muestras TFT-Bootstrap ha sido necesario su-

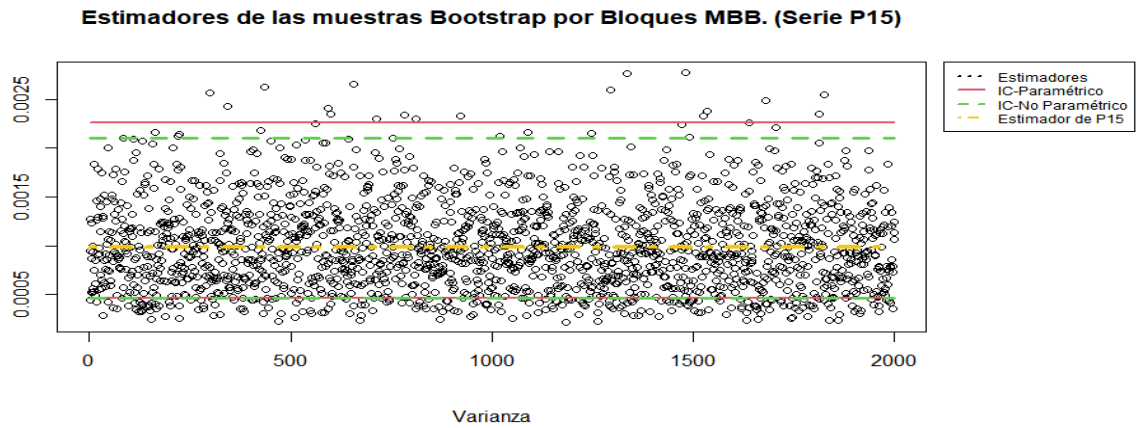


Figura 3.24: Resultados de la estimación de la varianza por el método MBB.

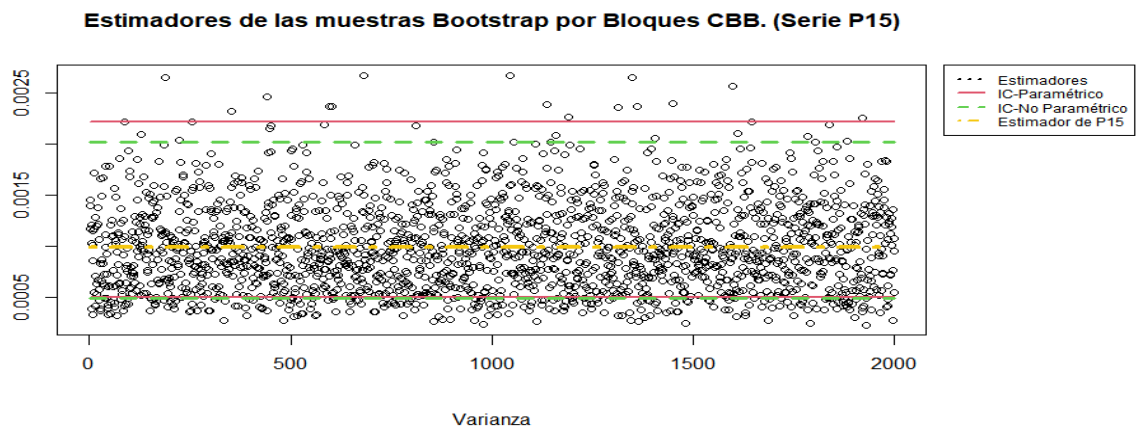


Figura 3.25: Resultados de la estimación de la varianza por el método CBB.

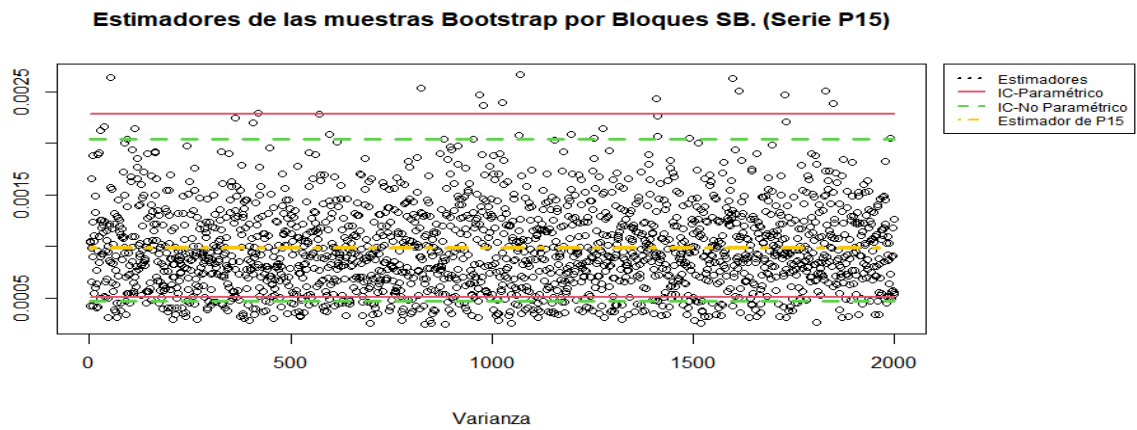


Figura 3.26: Resultados de la estimación de la varianza por el método SB

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel cuadrático. (Serie P15)

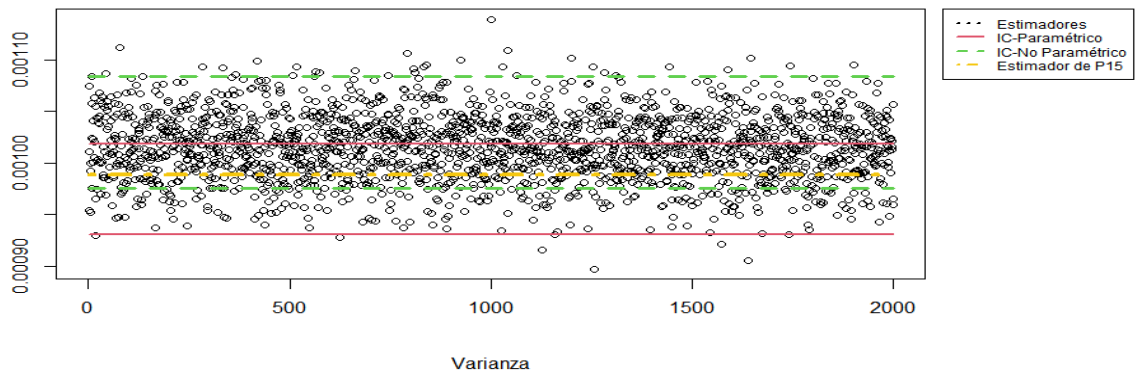


Figura 3.27: Resultados de la estimación de la varianza por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-RB Kernel cuadrático. (Serie P15)

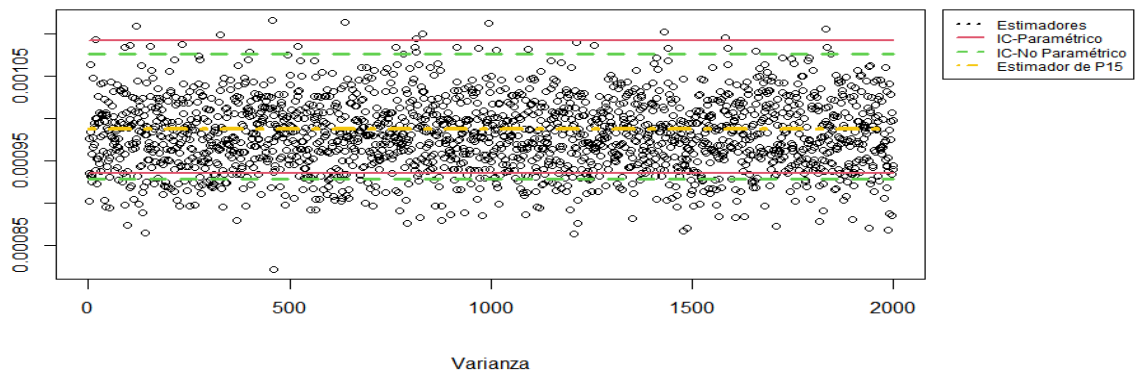


Figura 3.28: Resultados de la estimación de la varianza por el método TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel rectangular. (Serie P15)

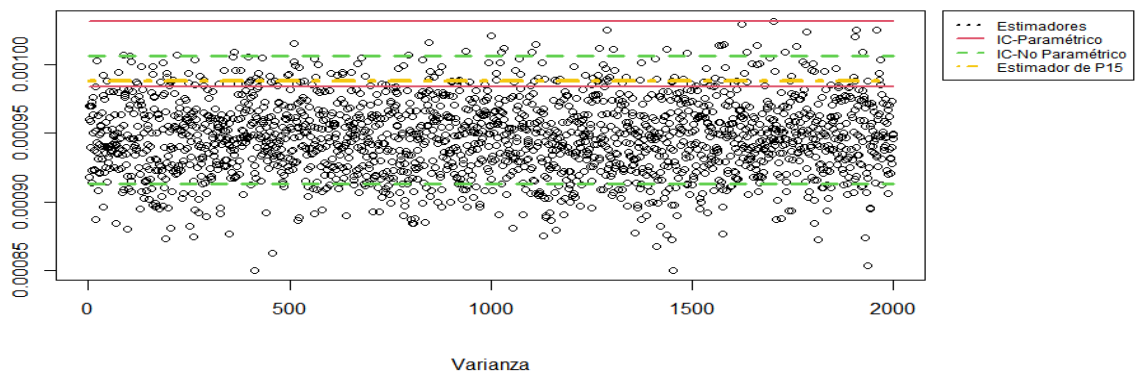


Figura 3.29: Resultados de la estimación de la varianza por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

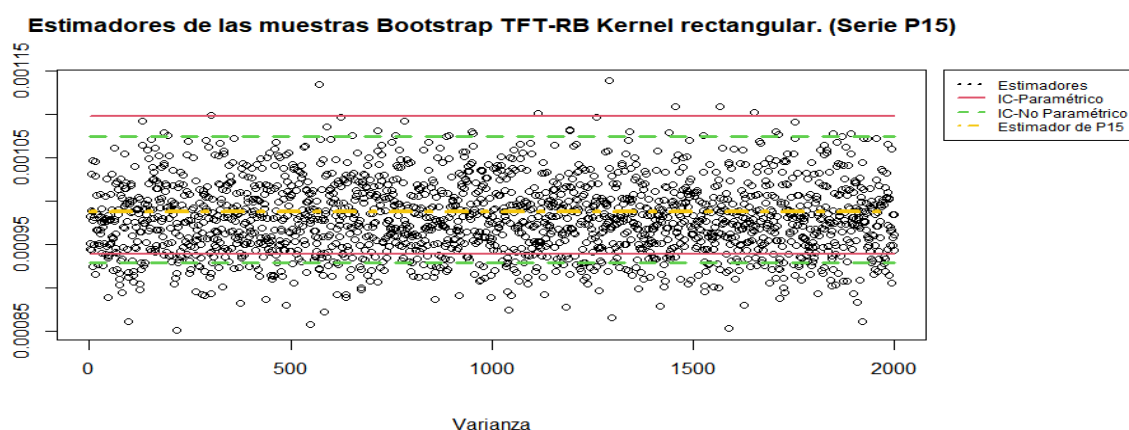


Figura 3.30: Resultados de la estimación de la varianza por el método TFT-Bootstrap RB con núcleo rectangular.

marles el estimador de la media ya que el coeficiente de variación se calcula también en base a la media de la muestra Bootstrap.

Una vez más pese a que en este caso se ha utilizado las muestras TFT-Bootstrap con la suma del estimador de la media los métodos Bootstrap con menor MSE y VAR son los mismos que para los casos previos. Notemos que la serie P14 y P15 son

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,8377428	1,5401908	74,7766742	72,7800731
CBB	0,8484210	1,5235190	69,9690665	67,6419800
SB	0,8634275	1,5331824	65,7874109	63,0313574
KR-RB	1,0877017	1,1784052	1,1185092	1,0568633
KR-LB	1,1128728	1,1377047	1,6279256	0,4744148
KC-RB	1,0855144	1,1749756	1,1089602	1,0571204
KC-LB	1,0817817	1,1305217	1,0046751	0,6047354

Cuadro 3.33: Resultados de la estimación del coeficiente de variación mediante métodos Bootstrap para la serie P15

series de índices de TWA construidas a partir de la comparación de latidos mediante funciones de tamaño por lo cual la escala en la que se encuentran sus estimadores es similar. De forma paralela las series P16 y P17 se construyen a partir de funciones de dispersión por lo cual los estimadores obtenidos están en rangos similares entre si.

Finalmente se detallan las series con las cuales al momento de obtener los intervalos BCa paramétricos se obtuvo indeterminaciones o intervalos con límites que son prácticamente similares y cuyo parámetro no responde a dicho comportamiento. Estos inconvenientes se presentaron tan solo con el método TFT-Bootstrap LB. Es

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,1501131	0,3215813	3,4560389	3,3608430
CBB	0,1531363	0,3154945	3,3471590	3,3177273
SB	0,1478884	0,3140255	3,6384147	3,5723139
KR-RB	0,1977590	0,2237221	0,1228969	0,0853326
KR-LB	0,1939834	0,2180109	0,0957330	0,0954914
KC-RB	0,1983525	0,2226968	0,1206753	0,0817129
KC-LB	0,1984423	0,2156706	0,1212392	0,0846876

Cuadro 3.34: Resultados de la estimación del coeficiente de variación mediante métodos Bootstrap para la serie P16

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,151296	0,313278	3,559989	3,489208
CBB	0,153179	0,315305	3,232836	3,208767
SB	0,148355	0,317928	3,703486	3,611411
KR-RB	0,197315	0,232278	0,129157	0,100870
KR-LB	0,206142	0,207333	0,238205	0,056943
KC-RB	0,198164	0,228384	0,114159	0,086819
KC-LB	0,205409	0,207047	0,243274	0,062214

Cuadro 3.35: Resultados de la estimación del coeficiente de variación mediante métodos Bootstrap para la serie P17

Método	Intervalo inferior	Intervalo superior	MSE	VAR
MBB	0,7392973	1,2492651	47,7000503	46,2258198
CBB	0,7483066	1,2606082	50,6141548	48,2672882
SB	0,7129831	1,2433923	53,5663057	50,3355455
KR-RB	0,9355323	1,0289482	1,3658515	1,3148795
KR-LB	0,9433371	1,0134718	0,8605379	0,7731061
KC-RB	0,9389506	1,0319994	1,3245748	1,2580174
KC-LB	0,9350363	0,9991314	0,8690124	0,7870213

Cuadro 3.36: Resultados de la estimación del coeficiente de variación mediante métodos Bootstrap para la serie P14

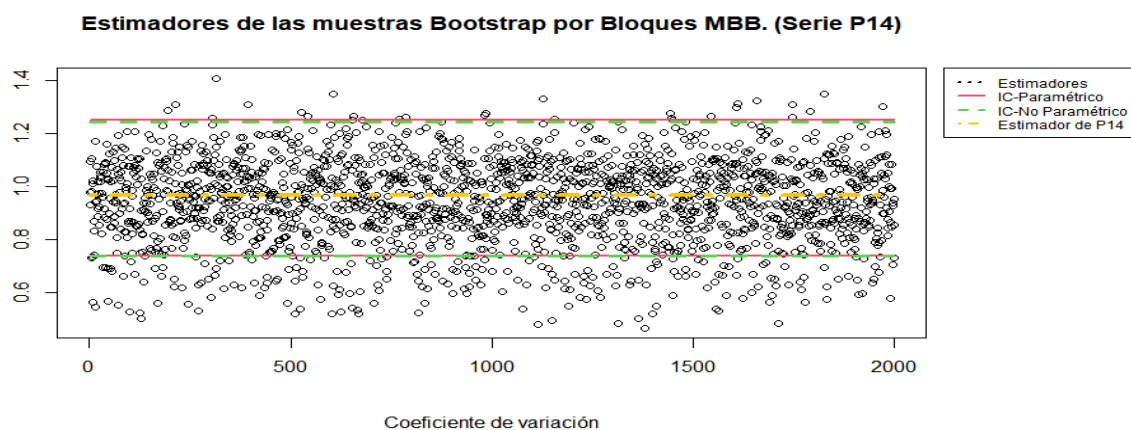


Figura 3.31: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método MBB.

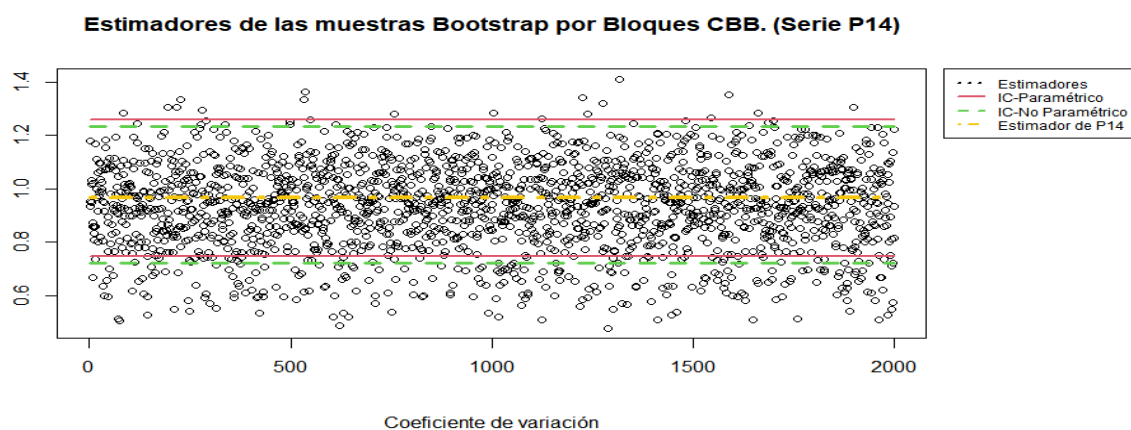


Figura 3.32: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método CBB.

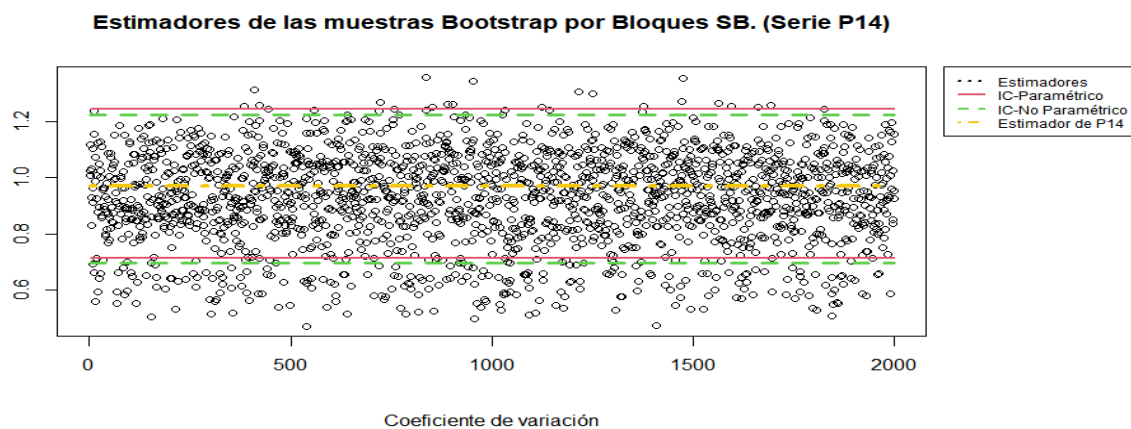


Figura 3.33: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método SB

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel cuadrático. (Serie P14)

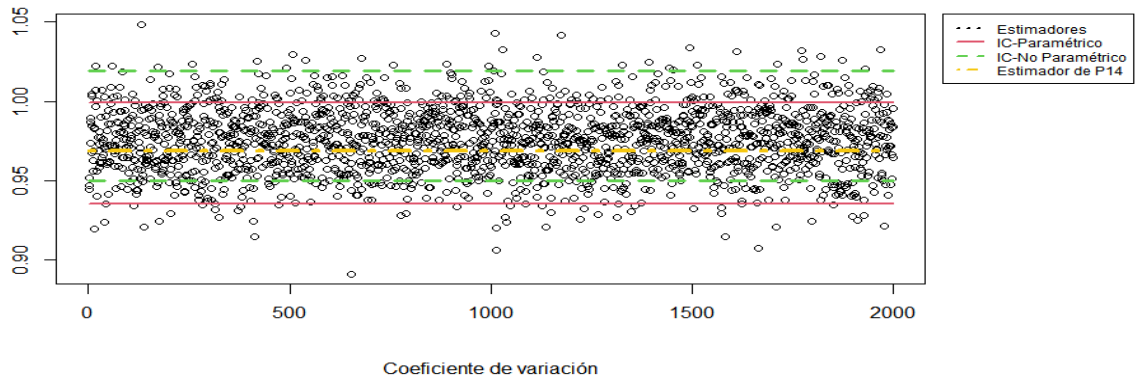


Figura 3.34: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-RB Kernel cuadrático. (Serie P14)

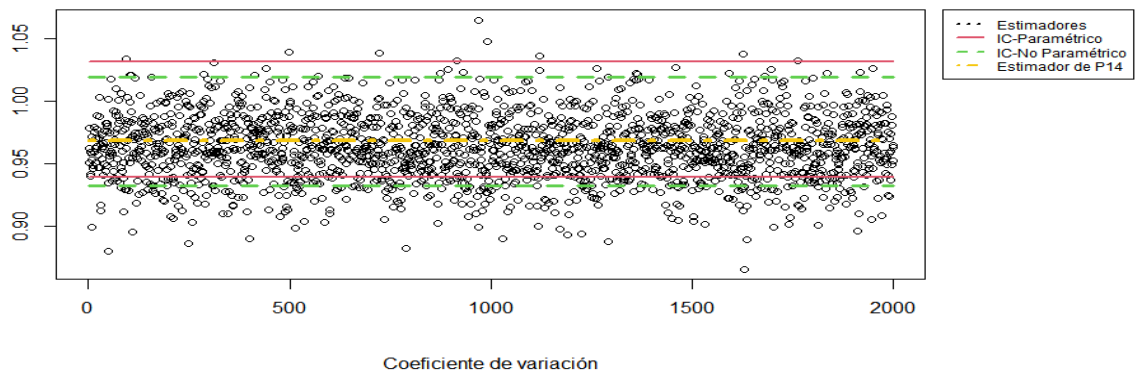


Figura 3.35: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método TFT-Bootstrap RB con núcleo cuadrático.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel rectangular. (Serie P14)

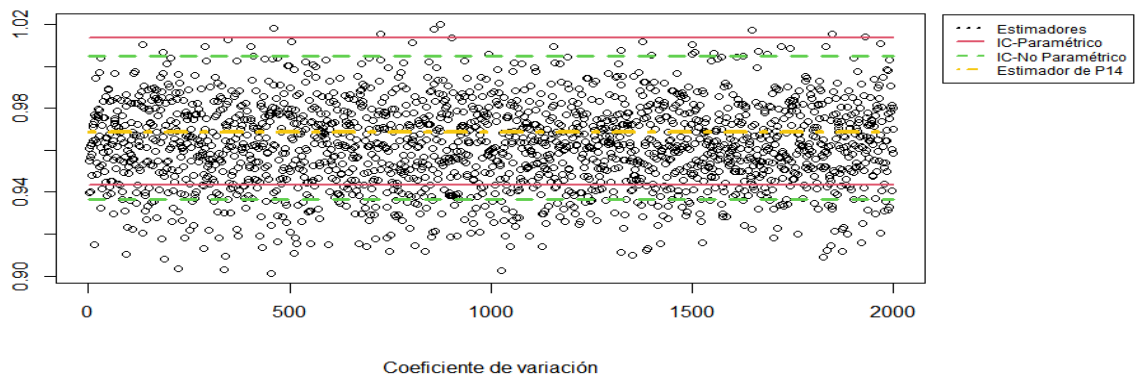


Figura 3.36: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular.

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-RB Kernel rectangular. (Serie P14)

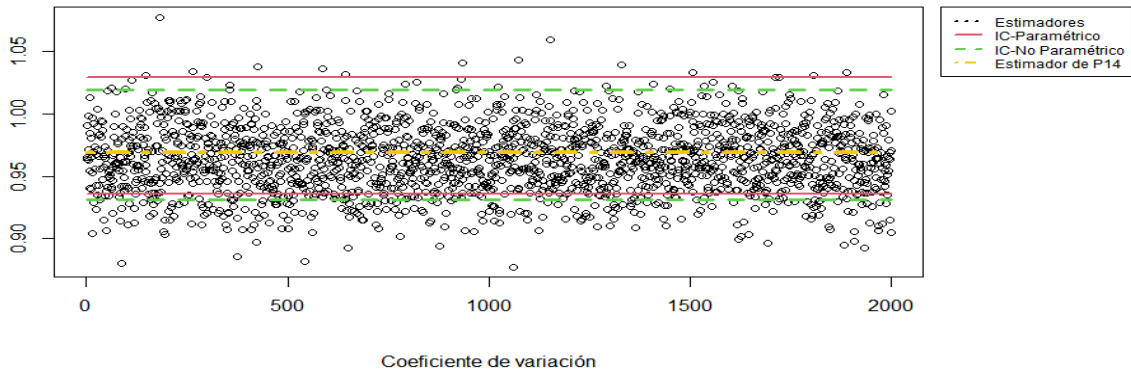


Figura 3.37: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método TFT-Bootstrap RB con núcleo rectangular.

importante destacar que las indeterminaciones se dan cuando todos los estimadores Bootstrap se encuentran por encima del estimador obtenido de la serie de estudio, a continuación un resumen de los encontrados:

Para la base P2 la serie obtenida a partir de la función F_1 , serie P24: la estimación del IC a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático ha dado indeterminación (autocorrelación de orden 1) o intervalos con límites básicamente iguales (coeficiente de variación y varianza).

Para la base P4 la serie obtenida a partir de la función F_4 , serie P47: las estimaciones del IC a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular ha dado indeterminaciones en el caso de la varianza y el coeficiente de variación.

Para la base P5 la serie obtenida a partir de la función F_3 , serie P56, las estimaciones a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático ha dado indeterminaciones en los IC para los tres parámetros estimados.

Para la base P8 la serie obtenida a partir de la función F_3 , serie P86, la estimación del IC a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático ha dado indeterminación (autocorrelación de orden 1) e intervalos con límites básicamente iguales (coeficiente de variación y varianza).

Para una muestra gráfica de lo que sucede en cada uno de estos ejemplos se mostrará lo que sucede con la serie P86, En las gráficas 3.38 y 3.39 muestran gráficamente intervalos BCa paramétricos que tienen límites básicamente iguales por ello no se distingue diferencia.

Para la base P10 la serie obtenida a partir de la función F_4 , serie P107, la estimación del IC a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo rectangular ha dado

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel cuadrático. (Serie p86)

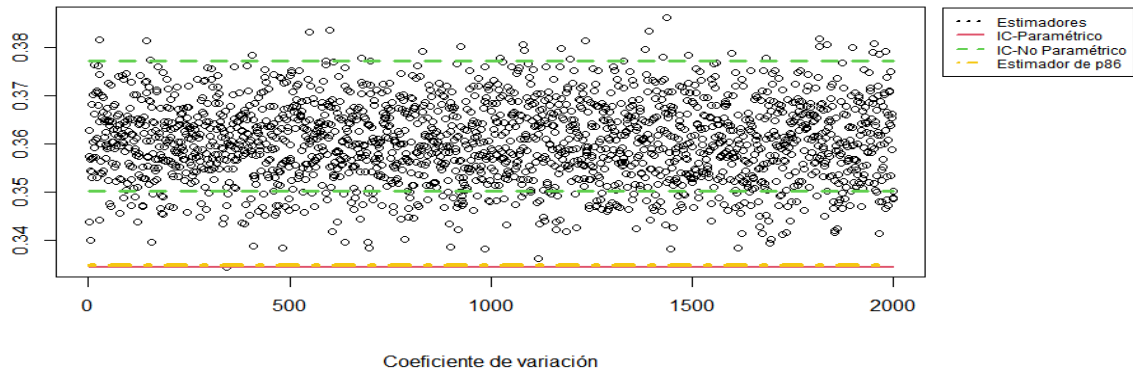


Figura 3.38: Resultados de la estimación del coeficiente de variación por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático de la serie P86. En este caso el intervalo paramétrico es $[0,334429341; 0,334430893]$

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel cuadrático. (Serie P86)

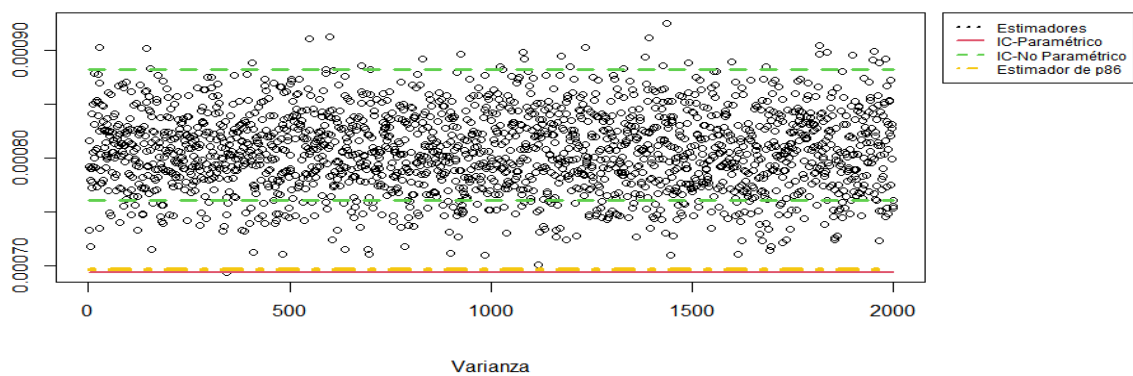


Figura 3.39: Resultados de la estimación de la varianza por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático de la serie P86. En este caso el intervalo paramétrico es $[0,000693706; 0,000693713]$

Estimadores de las muestras Bootstrap TFT-LB Kernel cuadrático. (Serie P86)

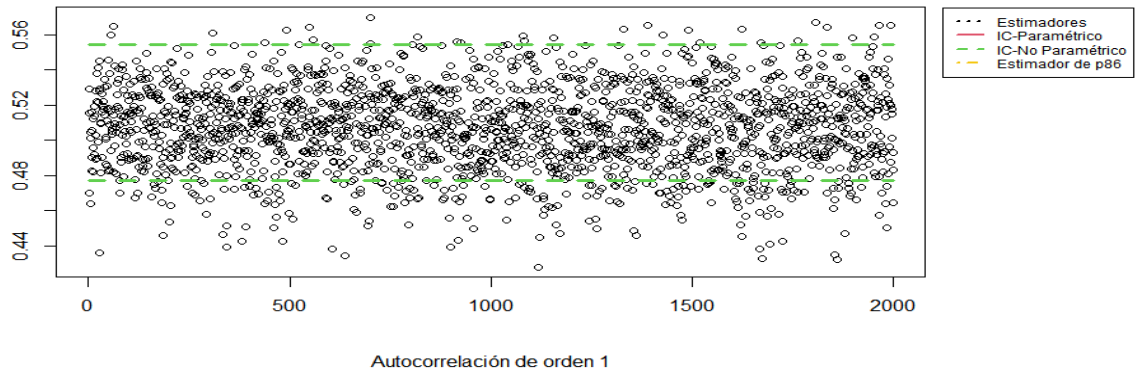


Figura 3.40: Resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1 por el método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático de la serie P86. Cuando hablamos de IC indeterminado nos referimos a que se obtiene $]-\infty, \infty[$, además el estimador de la serie es 0,4123706 y la indeterminación se da porque todos los estimadores Bootstrap están por encima del valor estimado de la serie.

indeterminación (coeficiente de variación y varianza).

Para la base P12 la serie obtenida a partir de la función F_4 , serie P127, la estimación del IC a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático ha dado indeterminación (coeficiente de variación y varianza).

Para la serie P1461, la estimación del IC a partir del método TFT-Bootstrap LB con núcleo cuadrático ha dado indeterminación en la estimación de la autocorrelación de orden 1.

Al obtener estos resultados en la mayoría de los casos se probó con un nuevo re-muestreo pero los resultados obtenidos llevaron de igual forma a indeterminaciones o intervalos con límites muy cercanos.

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

En el capítulo previo se evidencia ampliamente que los métodos Bootstrap para series temporales empleados sobre las series de índices TWA permiten inferir estadísticos de dichas series. Sobre la base de los resultados obtenidos y del análisis realizado se concluye lo siguiente:

- Los métodos TFT-Bootstrap requieren menos adaptaciones de las series para su aplicación, sin embargo, el costo computacional es elevado en comparación a la aplicación de los métodos Bootstrap por bloques. Debido al alcance de este proyecto la implementación del algoritmo se limitó a una correcta programación; sin embargo, es posible explorar la optimización del algoritmo que permite reducir el costo computacional.
- De forma general se aprecia que los resultados de las estimaciones de los parámetros de segundo nivel son significativamente distintas entre los métodos Bootstrap por Bloques y TFT-Bootstrap, y en la mayoría de estimaciones los resultados más precisos se obtienen de los métodos TFT-Bootstrap. Intuitivamente se esperaba mayor precisión de los estimadores mediante el TFT-Bootstrap debido a sus propiedades de conservación de la estructura del momento de segundo orden y la posibilidad de estos de generar muestras bootstrap de las series temporales sobre el dominio del tiempo.

Los métodos por Bloques, por el contrario, al tener la subdivisión por bloques conservan en cada uno de los bloques la estructura de la muestra; sin embargo, en la totalidad de muestra Bootstrap esta estructura general de momentos no

se conserva lo cual impide que se realice la estimación de parámetros que lo requieran, siendo una gran limitante. Esto se debe a la idea intuitiva que hay detrás de este método; la idea es que cada bloque es una muestra en si de la población de estudio y por ello la "unión" de estos bloques conlleva a tener una muestra del comportamiento general que puede tener dicha población. Además de la limitación mencionada previamente estos métodos se verán seriamente impactados por la presencia de valores atípicos en la muestra.

- Debido al alcance de este proyecto se utilizaron de forma general 2 tipos de núcleo para los métodos TFT-Bootstrap y anchos de banda que habían sido utilizados previamente en otros artículos científicos, sin embargo considerando las series trabajadas que en su mayoría presentaron valores atípicos sería fundamental realizar un análisis minucioso del impacto de estas dos características sobre las estimaciones obtenidas, ya que de los resultados obtenidos se aprecia los efectos que esto puede tener sobre el método aplicado, de forma especial en el caso del TFT-Bootstrap LB, el cual para algunas de nuestras series conllevó a intervalos de confianza no estables al 95 % de confianza.

La no estabilidad de estos intervalos ha sido descartada en relación a la longitud de la serie temporal esto debido a que para series con menor longitud se pudo estimar correctamente los IC respectivos. Del análisis realizado entre las posibles causas de esta particularidad se podría considerar: la presencia de outliers, una elección no óptima del ancho de banda o un posible uso de un núcleos ineficiente.

Se debe analizar también que los métodos TFT-Bootstrap generan series Bootstrap asintóticamente Gaussianas, es decir se aproxima a la población de estudio mediante procesos Gaussianos con la misma estructura de covarianza; esto para el caso de series no lineales podría ser considerado un factor que conlleve a resultados ineficientes.

- A partir del estudio teórico y práctico realizado es posible emplear los métodos TFT-Bootstrap para la inferencia de estadísticos de las series de TWA orientados a la detección de riesgo de sufrir determinada cardiopatía o MSC. Además, el desarrollo de estudios más completos sobre pacientes considerados sanos y pacientes con cardiopatías es posible mediante estos métodos para inferir estadísticos que permitan caracterizar mejor el comportamiento de las series de TWA para cada grupo de estudio.

Uno de los supuestos importantes sobre los métodos Bootstrap para series

temporales es que las series deben ser estacionarias, por lo cual entra en consideración también la obtención de las series procurando que estas preserven esta característica para obtener resultados consistentes de las estimaciones.

- Respecto a los resultados o tenidos a grandes rasgos podemos decir que la expectativa en estos pacientes con cardiopatías era encontrar valores de autocorrelación de orden 1 significativamente menores que 1, es decir, que no exista correlación significativa entre las variables separadas por un periodo (un latido), en estos casos es en los que se podría determinar la presencia de alternancia y por ende un riesgo de sufrir cardiopatías.

En este sentido, los resultados obtenidos sobre las series de estudio se encuentran aproximadamente entre 0,02 y 0,6 de acuerdo a la serie. Considerando la limitación de interpretación de estos resultados debido al conocimiento médico que es necesario, pero, tomando como base la expectativa sobre este estimador, inicialmente se cumple sobre las series lo intuido matemáticamente.

Por otro lado, respecto a los estimadores relativos a la dispersión de datos como el coeficiente de variación y la varianza, en la misma línea de lo mencionado previamente, bajo el comportamiento de esta onda en pacientes con cardiopatía que presentan "saltos abruptos" en la Onda entre latidos, se esperaría que los estimadores de dispersión tengan valores significativos. Respecto a los resultados obtenidos en estos estimadores fueron variados y sería necesario un análisis más detallado para establecer la presencia de alternancia bajo estos resultados.

A partir de esto, la medición de presencia de alternancia, por ende el riesgo de sufrir cardiopatías, puede ser aplicable mediante metodologías que utilicen los métodos Bootstrap. El desarrollo de esta posibilidad de lectura automática de electrocardiogramas debe construirse con estudios sobre grupos de pacientes, con el apoyo de investigadores del área de salud y matemática, sin embargo, este proyecto abre este camino con miras a una posibilidad de óptimo desarrollo.

4.2. Recomendaciones

- Pese a la eficiencia y funcionalidad de los métodos Bootstrap para series temporales, se debe recordar que estos parten de la idea que nuestra muestra conserva características de la población de forma que al obtener nuestras muestras

Bootstrap conservamos la información de la población, por lo cual es fundamental que previo a realizar aseveraciones sobre los estadísticos obtenidos por métodos Bootstrap se verifique que la muestra de estudio no es un comportamiento inusual de la población, ya que esto conllevaría a muestras Bootstrap sobreajustadas de la muestra y no de la población.

- Previo a la aplicación de métodos Bootstrap es fundamental realizar el análisis respectivo sobre el parámetro a estimar con el objetivo de definir adecuadamente el método Bootstrap más propicio para su estimación y también si se debe realizar una redefinición de la serie previo a remuestrear.

Además, para el caso de los métodos TFT-Bootstrap es fundamental considerar el cumplimiento de ciertos supuestos sobre la serie, el núcleo a utilizar o el ancho de banda respectivo, ya que como se demostró en el teorema 2.21 esto influye directamente en la obtención de resultados concisos y de la conservación de la estructura de autocovarianza.

- El costo computacional ha sido significativamente elevado para los métodos TFT-Bootstrap, por lo cual es recomendable realizar una optimización del algoritmo o a su vez si se trata de estadísticos de razón emplear otros de los métodos Bootstrap por residuos que requieren menor costo computacional y a su vez se encuentran implementados en algunos softwares como R o python. Recordando que el método TFT-Bootstrap es considerado novedoso por lo cual aún no hay una formulación específica en estos software informáticos.

Bibliografía

- [and Bockenholt, U., 1989] and Bockenholt, U., W. (1989). Bootstrapping: Applications to psychophysiology. *Psychophysiology*, 26(2):208–221.
- [Bayés de Luna, A. y Elosua, 2012] Bayés de Luna, A. y Elosua, R. (2012). Muerte súbita. . *Revista Española de Cardiología*, 65(11):1039–1052.
- [Betancourt, N. et al., 2019] Betancourt, N., Almeida, C., y Flores-Calero, M. (2019). T Wave Alternans Analysis in ECG Signal: A Survey of the Principal Approaches. . *In International Conference on Information Technology & Systems*, pp. 417–426.
- [Biewen, 2002] Biewen, M. (2002). Bootstrap inference for inequality, mobility and poverty measurement. *Journal of Econometrics*, 108(2):317–342.
- [Billingsley, 1999] Billingsley, P. (1999). *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York.
- [Blanco-Velasco, M. et al., 2010] Blanco-Velasco, M., Cruz-Roldán, F., Godino-Llorente, J. I., y Barner, K. E. (2010). Nonlinear trend estimation of the ventricular repolarization segment for T-wave alternans detection. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 57(10):2402–20412.
- [Brillinger, D. R., 2001] Brillinger, D. R. (2001). *Time series: data analysis and theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Brockwell y Davis, 1991] Brockwell, P. J. y Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer, New York.
- [Burattini, L. et al., 1999] Burattini, L., Zareba, W., y Moss, A. J (1999). Correlation method for detection of transient T-wave alternans in digital holter ECG recordings. *Annals of Noninvasive Electrocardiology*, 4(4):416–424.

- [Canty, A. J. *et al.*, 2006] Canty, A. J., Davison, A. C., Hinkley, D. V., y Ventura, V. (2006). Bootstrap diagnostics and remedies. *Canadian Journal of Statistics*, 34(1):5–27.
- [Catalano, 2002] Catalano, J. T. (2002). *Guide to ECG analysis*. Lippincott Williams & Wilkins.
- [Dahlhaus, R. y Janas, D., 1996] Dahlhaus, R. y Janas, D. (1996). A frequency domain bootstrap for ratio statistics in time series analysis. *Ann. Statist.*, 24:1934–1963.
- [Dedecker, J. *et al.*, 2007] Dedecker, J., Doukhan, P., Lang, G., Rafael, L. R. J., Louhichi, S., y Prieur, C. (2007). *Weak dependence: With examples and applications*. Springer.
- [Doukhan, P. y Louhichi, S., 1999] Doukhan, P. y Louhichi, S. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stochastic processes and their applications*, 84(2):313–342.
- [Efron y Tibshirani, 1994] Efron, B. y Tibshirani, R. J. (1994). *An introduction to the bootstrap*. CRC press, New York.
- [Flores-Calero, M. y Pilla-Barroso, M., 2020] Flores-Calero, M. y Pilla-Barroso, M. (2020). Detección de la muerte súbita cardíaca usando el método espectral adaptativo sobre la onda t: estudio experimental sobre bases de datos públicas. *Ingenius. Revista de Ciencia y Tecnología*, 24:59–67.
- [Garcia, E. V. *et al.*, 2011] Garcia, E. V., Pastore, C. A., Samesima, N., y Pereira Filho, H. G. (2011). T-wave alternans: desempeño clínico, limitaciones, metodologías de análisis. *Arquivos Brasileiros de Cardiologia*, 96(3):e53–e61.
- [Goya Esteban, 2014] Goya Esteban, R. (2014). *Signal Processing and Non-parametric Statistics for ECG Long-Term Monitoring: Application to Heart Rate Variability, Atrial Fibrillation and T-Wave Alternans*. Tesis doctoral, Universidad Rey Juan Carlos.
- [Hamm, C. W. y Willems, S. , 2010] Hamm, C. W. y Willems, S. (2010). *El electrocardiograma: su interpretación práctica; 32 cuadros*. Ed. Médica Panamericana.
- [Hampton, 2009] Hampton, J. (2009). *ECG fácil*. Elsevier.
- [Harvey, 1993] Harvey, A. C. (1993). *Time Series Models*. MIT Press, Massachusetts.

- [Ikeda, T. *et al.*, 2002] Ikeda, T., Saito, H., Tanno, K., Shimizu, H., Watanabe, J., Ohnishi, Y., Kasamaki, Y., y Ozawa, Y. (2002). T-wave alternans as a predictor for sudden cardiac death after myocardial infarction. *American Journal of Cardiology*, 89(1):79–82.
- [Kirch y Politis, 2011] Kirch, C. y Politis, D. N. (2011). TFT-bootstrap: Resampling time series in the frequency domain to obtain replicates in the time domain. *The Annals of Statistics*, 39(3):1427–1470.
- [Kirch, 2010] Kirch, C. & Politis, D. N. (2010). Supplement to "TFT-bootstrap: Resampling time series in the frequency domain to obtain replicates in the time domain.". DOI:10.1214/10-AOS868SUPP.
- [Kreiss, J. P. y Lahiri, S. N., 2012] Kreiss, J. P. y Lahiri, S. N. (2012). Bootstrap methods for time series. . In *Handbook of statistics*, 30:3–26.
- [Kristensen, D. y Linton, O., 2006] Kristensen, D. y Linton, O. (2006). A closed-form estimator for the GARCH (1, 1) model. *Econometric Theory*, 22(2):323–337.
- [Lahiri, 2003] Lahiri, S. (2003). *Resampling methods for dependent data*. Springer, New York.
- [Lahiri, S. N., 1999] Lahiri, S. N. (1999). Theoretical comparisons of block bootstrap methods. *Annals of Statistics*, pp. 386–404.
- [Mariona Montero, V. A., 2015] Mariona Montero, V. A., R. M. P. A. . (2015). Muerte súbita cardiaca. Estratificación de riesgo, prevención y tratamiento. . *Archivos de cardiología de México*, 85(4):329–336.
- [Monasterio, V. *et al.*, 2012] Monasterio, V., Laguna, P., Cygankiewicz, I., Vázquez, R., Bayés-Genís, A., de Luna, A. B., y Martínez, J. P. (2012). Average T-wave alternans activity in ambulatory ECG records predicts sudden cardiac death in patients with chronic heart failure. *Heart rhythm*, 9(3):383–389.
- [Moody, G. B. y Mark, R. G. , 2001] Moody, G. B. y Mark, R. G. (2001). The impact of the MIT-BIH arrhythmia database. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 20(3):45–50.
- [Mooney, 1996] Mooney, C. Z. (1996). Bootstrap statistical inference: Examples and evaluations for political science. *American Journal of Political Science*, 40(2):570–602.

- [Morell Ocaña, M. *et al.*, 2002] Morell Ocaña, M., Buforn Galiana, A., Vergara Olivares, J., y Dominguez, L. (2002). *Cardiología: ECG en urgencias. Manual de Urgencias y Emergencias*. Dep. Legal: MA-348-2002, ISBN: 84-699-8399-7.
- [Myerburg, R. J., 2012] Myerburg, R. J., . J. (2012). Sudden cardiac death caused by coronary heart disease. *Circulation*, 125(8):1043–1052.
- [Narayan, S. M., 2008] Narayan, S. M. (2008). T-wave alternans testing for ventricular arrhythmias. *Progress in cardiovascular diseases*, 51(2):118–127.
- [Nearing, B. D. y Verrier, R. L., 2002] Nearing, B. D. y Verrier, R. L. (2002). Modified moving average analysis of T-wave alternans to predict ventricular fibrillation with high accuracy. *Journal of Applied Physiology*, 92(2):541–549.
- [Nemati, S. *et al.*, 2011] Nemati, S., Malhotra, A., y Clifford, G. D. (2011). T-wave alternans patterns during sleep in healthy, cardiac disease, and sleep apnea patients. *Journal of electrocardiology*, 44(2):126–130.
- [Nieminen y Verrier, 2010] Nieminen, T. y Verrier, R. L. (2010). Usefulness of T-wave alternans in sudden death risk stratification and guiding medical therapy. *Annals of Noninvasive Electrocardiology*, 15(3):276–288.
- [Noohi, M. y Sadr, A. , 2010] Noohi, M.. y Sadr, A. (2010). T wave detection by correlation method in the ECG signal. *The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE)*, 5(2010):550–552.
- [Paparoditis, E., 2022] Paparoditis, E. (2022). Frequency domain bootstrap for time series. In *Empirical Process Techniques for Dependent Data (H. Dehling et al., eds.)*, p. 365–381.
- [Paparoditis, E. y Politis, D. N., 1999] Paparoditis, E. y Politis, D. N. (1999). The Local Bootstrap for Periodogram Statistics. *Journal of Time Series Analysis*, 20(2):193–222.
- [Patton, A. *et al.*, 2009] Patton, A. , Politis, D.N., y White, H. (2009). CORRECTION TO "Automatic block-length selection for the dependent bootstrap" by D. Politis and H. White. *Econometric Reviews*, 28(4):372–375.
- [Politis, D.N. y White, H., 2004] Politis, D.N. y White, H. (2004). Automatic block-length selection for the dependent bootstrap. *Econometric Reviews*, 23(1):53–70.

- [Ruiz Serrano, A. *et al.*, 2010] Ruiz Serrano, A., Ibáñez Torres, J. C., Polo Espinosa, J. L., y Burgo Fernández, J. L. D. (2010). Alternancia eléctrica. *Revista Clínica de Medicina de Familia*, 3(1):54–56.
- [Sáenz, J. G. *et al.*, 2012] Sáenz, J. G., Gérez-Callejas, M. J., Urunuela, R. Z., Larios, A. M., Aguilera, J. G., y Soba, A. M., . (2012). Alternancia eléctrica, patrón electrocardiográfico en el diagnóstico de enfermedad cardiaca grave. *SEMERGEN-Medicina de Familia*, 38(6):400–404.
- [Verrier, R. L. *et al.*, 2009] Verrier, R. L., Kumar, K., y Nearing, B. D (2009). Basis for sudden cardiac death prediction by T-wave alternans from an integrative physiology perspective. *Heart Rhythm*, 6(3):416–422.
- [Ye, C. *et al.*, 2017] Ye, C., Zeng, X., Li, G. and Shi, C., Jian, X., y Zhou, X. (2017). A multichannel decision-level fusion method for T wave alternans detection. *Review of Scientific Instruments*, 88(9):094301.

Anexos

Algoritmos implementados

```
BooBloque=function(data,t,f,long){
  B=as.list(c())
  n=as.numeric(length(data))
  if(t==1){
    #MBB
    if(long==0){
      l=as.numeric(b.star(matrix(unlist(data),nrow=length(data),
        ),byrow=T),round=T)[1,2])
    } else {
      l=long }
    N=n-l+1
    for(i in 1:N) {
      B[[i]]=c(data[i:(i+l-1)])
    }
    b=ceiling(n/l)
    C=as.list(c())
    for(j in 1:b) {
      k=0
      k=extraDistr::rdunif(n=1,min=1,max=N)
      C[[j]]=B[[k]]
    }
    B=C
  }
  else if(t==3){
    #CBB
    if(long==0){
```

```

    l=as.numeric(b.star(matrix(unlist(data), nrow=length(
        data), byrow=T), round=T)[1,2])
}
else{
  l=long
}
b=c()
N=ceiling(n/l)
for (i in 1:N) {
  aleatorio=extraDistr::rdunif(n=1,min=1,max=n)
  if(aleatorio>(n-l+1)){
    j=0
    while (aleatorio+j<=n) {
      b=c(b,data[aleatorio+j])
      j=j+1
    }
    rango=l-j
    j=1
    while (j<=rango) {
      b=c(b,data[j])
      j=j+1
    }
    B[[i]]=c(b)
    b=c()
  }else{
    B[[i]]=c(data[aleatorio:(aleatorio+l-1)])
  }
}
}
else if(t==4){
  #SBB
  v1=0
  rk=0
  if(long==0){
    k=as.numeric(b.star(matrix(unlist(data), nrow=length(
        data), byrow=T), round=T)[1,1])

```

```

}
else {k=long}
G <- Geom(prob = 1/(k+1))
b=c()
N=0
i=0
while (N<n) {
  l=as.numeric(distr::r(G)(1))
  v1[i+1]=l
  while (l==0){l=as.numeric(distr::r(G)(1))}
  if ((N+1)>n) {
    l= as.numeric(n)-as.numeric(N)
    N=n
  } else { N=N+1}
  i=i+1
  aleatorio=extraDistr::rdunif(n=1,min=1,max=n)
  rk[i]=aleatorio
  if (aleatorio >(n-l+1)) {
    j=0
    while (aleatorio+j<=n) {
      b=c(b, data[aleatorio+j])
      j=j+1
    }
    rango=l-j
    j=1
    while (j<=rango) {
      b=c(b, data[j])
      j=j+1
    }
    B[[i]]=b
    b=c()
  } else {
    B[[i]]=c(data[aleatorio:(aleatorio+l-1)])
  }
}
}

```

```

    }
n1=as.numeric(length(B))
serie=c()
  for (w in 1:n1) {
    serie=c(serie,B[w])
  }
serie=do.call(c,B)
serie=serie[1:n]
return(serie)
}

xFFT1=function(data){
  n=as.numeric(length(data))
  n1=as.numeric(length(data[[1]]))
  x=as.list(c())
  r=(1/(sqrt(n)))
  t=floor((n-1)/2)
  for (i in 1:t) {
    suma=rep(0,n1)
    for (j in 1:n) {
      suma=suma+(data[[j]]*cos(-((2*pi*(i))/n)*(j)))
    }
    x[[i]]=r*suma
    x[[n-i]]=x[[i]]
  }

  if(n%2==0)
  {
    x[[n/2]]=rep(0,n1)
    for (j in 1:n) {
      x[[n/2]]=x[[n/2]]+(data[[j]]*(-1)^j)
    }
    x[[n/2]]=r*x[[n/2]]
  }

  return(x)
}

```

```

yFFT1=function(data){
  n=as.numeric(length(data))
  n1=as.numeric(length(data[[1]]))
  x=as.list(c())
  r=(1/(sqrt(n)))
  t=floor((n-1)/2)
  for (i in 1:t) {
    suma=rep(0,n1)
    for (j in 1:n) {
      suma=suma+(data[[j]]*sin(-((2*pi*(i))/n)*(j)))
    }
    x[[i]]=r*suma
    x[[n-i]]=-x[[i]]
  }

  if (n%2==0)
  {
    x[[n/2]]=rep(0,n1)
  }

  return(x)
}

vartft=function(tn,ht1,n,f,k){
  suma1=0
  ps=0
  Fps=0
  resultado=0
  for (i in (-tn):tn){
    suma1=suma1+ f(2*pi*i/(n*ht1[i+tn+1]))
  }
  for(j in (-tn):tn){
    ps[tn+j+1]=((f((pi*2*j)/(n*ht1[i+tn+1])))/suma1)
  }
  for(i in 1:(2*tn+1)){
    Fps[i]=sum(ps[1:i])
  }
}

```



```

aux=0
j=1
while (aux!=1 && j<length(Fps)){
  if (Fps[j]!=0){
    var1=j
    aux=1
  }
  j=j+1
}
aux1=0
j=1
while (aux1!=1 && j<length(Fps)){
  if (Fps[j]>0.9999){
    var2=j
    aux1=1
  }
  j=j+1
}
for(j in 1:k){
  varu=0
  c=0
  varu=runif(n=1,min=0,max=1)
  i=var1
  while (c==0 && i<var2) {
    if (varu<Fps[i]){
      resultado[j]=i-tn-1#creo que toca agregarle -1
      c=1
    }
    i=i+1
  }
  if (c==0){
    resultado[j]=var2-tn-1
  }
}
return(resultado)
}

```

```

estdensidad=function(f,coefx,coefy,ht,n,landa, sum1){
  suma2=0
  tn=floor((n-1)/2)
  for(j in ((-tn):(-1))) {
    suma2=suma2+(f((landa-(2*pi*j/n))/ht)*(coefx[[abs(j)]]^2+
      coefy[[abs(j)]]^2))
  }
  for(j in ((1):(tn))) {
    suma2=suma2+(f((landa-(2*pi*j/n))/ht)*(coefx[[abs(j)]]^2+
      coefy[[abs(j)]]^2))
  }
  return(suma2/sum1)
}

```

```

bootcfourier=function(data,t,f,ht,iteraciones){
  x=y=as.list(c())
  xx=yy=as.list(c())
  z=x
  respuesta=as.list(c())
  n=length(data)
  tn=floor((n-1)/2)
  coefx=xFFT1(data)
  coefy=yFFT1(data)
  n1=length(data[[1]])
  x[[n]]=y[[n]]=rep(0,n1)
  if(n%2==0)
  {
    x[[n/2]]=y[[n/2]]=rep(0,n1)
  }
  if(t==1)
  {
    sum1=0
    for(i in ((-tn):tn)) {
      sum1=sum1+f(2*pi*i/(ht*n))
    }
  }
}

```

```

sum1=2*pi*sum1
s=as.list(c())
for (j in 1:tn) {
  vtem=(1/(sqrt(pi*estdensidad(f,coefx,coefy,ht,n,2*pi*j/n,
    sum1))))
  s[[j]]=(coefx[[j]]*vtem
  s[[tn+j]]=(coefy[[j]]*vtem
}
suma1=rep(0,n1)
suma2=rep(0,n1)
cf=as.list(c())
for (i in 1:(2*tn)) {
  suma1=suma1+s[[i]]
}
for (i in 1:(2*tn)) {
  suma2=suma2+((s[[i]]-((1/(2*tn))*(suma1)))^2)
}
for (k in 1:(2*tn)) {
  cf[[k]]=(s[[k]]-((1/(2*tn))*suma1))*(1/(sqrt((1/(2*tn))
    *suma2)))
}
for (it in 1:iteraciones) {
  remuestreo=as.list(c())
  for (i in 1:(2*tn)) {
    p=0
    p=extraDistr::rdunif(n=1,min=1,max=(2*tn))
    remuestreo[[i]]=cf[[p]]
  }
  for (j in 1:tn) {
    vtem1=sqrt(pi*estdensidad(f,coefx,coefy,ht,n,2*pi*j/n,
      sum1))
    x[[j]]=vtem1*remuestreo[[j]]
    y[[j]]=vtem1*remuestreo[[tn+j]]
  }
  ###empieza el ultimo paso del proceso general
  for (i in 1:tn) {

```

```

    x[[n-i]]=x[[i]]
    y[[n-i]]=-y[[i]]
  }
  for (k in 1:n) {
    suma=rep(0,n1)
    for (j in 1:tn) {
      suma=suma+(x[[j]]*cos(2*pi*k*j/n))-(y[[j]]*sin(2*pi
        *k*j/n))
    }
    z[[k]]=suma*(2/sqrt(n))
  }
  z=unlist(z, use.names=FALSE)
  respuesta[[it]]=z
  it=it+1
}
}
else{
  ht1=0
  for (i in (-tn):tn){
    ht1[i+tn+1]=tn^(-1/3)
  }
  indices=vartft(tn,ht1,n,f,2*tn)
  ##paso 3 del LB
  for (it in 1:iteraciones) {
    varbernou=stats::rbinom(2*tn,1,0.5)
    for (j in 1:(tn)) {
      suma=(indices[j]+j)
      if (abs(suma)>length(coefx)) {
        entero=floor((suma)/length(coefx))
        indicereal=suma-length(coefx)*entero
      }
      else{
        indicereal=suma
      }
    }
    if (varbernou[j]==0){
      if (indicereal==0){

```

```

        xx[[j]]=0
    }
    else{
        xx[[j]]=coefx[[abs(indicereal)]]
    }
}
else{
    if(indicereal<0){
        xx[[j]]=-coefy[[abs(indicereal)]]
    }
    else if(indicereal==0){
        xx[[j]]=0
    }
    else{
        xx[[j]]=coefy[[abs(indicereal)]]
    }
}
}
for (j in (tn+1):(2*tn)) {
    suma=(indices[j]+j-tn)
    if(abs(suma)>length(coefy)){
        entero=floor((suma)/length(coefy))
        indicereal=suma-length(coefy)*entero
    }
    else{
        indicereal=suma
    }
    if(varbernou[j]==1){
        if(indicereal==0){
            yy[[j-tn]]=0
        }
        else{
            yy[[j-tn]]=coefx[[abs(indicereal)]]
        }
    }
}
else{

```

```

    if (indicereal < 0) {
        yy[[j-tn]] = -coefy [[ abs(indicereal) ]]
    }
    else if (indicereal == 0) {
        yy[[j-tn]] = 0
    }
    else {
        yy[[j-tn]] = coefy [[ abs(indicereal) ]]
    }
}
}

suma2=0
ps=0
for (i in (-tn):tn) {
    suma2=suma2+ f(2*pi*i/(n*ht1[i+tn+1]))
}
for(j in (-tn):tn) {
    ps[tn+j+1]=((f((pi*2*j)/(n*ht1[j+tn+1])))/suma2)
}
for(j in 1:tn) {
    sumaprob=0
    for (i in (-tn):(tn)) {
        prob=ps[i+tn+1]
        indice=i+j
        valx=0
        valy=0
        if (abs(indice)>length(coefx)) {
            entero=floor((indice)/length(coefx))
            indiceN=indice-length(coefx)*entero
        }
        else {
            indiceN=indice
        }
        if (indiceN < 0) {
            valx=coefx [[ abs(indiceN) ]]

```

```

        valy=-coefy [[ abs(indiceN) ]]
    }
    else if(indiceN==0){
        valx=valy=0
    }
    else {
        valx=coefx [[ abs(indiceN) ]]
        valy=coefy [[ abs(indiceN) ]]
    }
    mult=prob*( valx+valy)
    sumaprob=sumaprob+mult
}
x[[ j ]]=xx [[ j ]]-((1/2)*sumaprob)
y[[ j ]]=yy [[ j ]]-((1/2)*sumaprob)
}
for (i in 1:tn) {
    x[[n-i]]=x[[ i ]]
    y[[n-i]]=-y[[ i ]]
}
for (k in 1:n) {
    suma=rep(0,n1)
    for (j in 1:tn) {
        suma=suma+(x[[ j ]]*cos(2*pi*k*j/n))-(y[[ j ]]*sin(2*pi
            *k*j/n))
    }
    z[[k]]=suma*(2/sqrt(n))
}
z=unlist(z, use.names=FALSE)
respuesta [[ it ]]=z
it=it+1
}

}

return(respuesta)
}

```

Resultados de la aplicación de métodos Bootstrap sobre las series de índices de TWA

Estimación de la media.

En la tabla 4.1 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la media para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_1 , es decir las series del tipo $Pj4$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques.

		MBB	CBB	SB
Base P1	LÍMITE INFERIOR	0,0551767	0,0556085	0,0553018
	LÍMITE SUPERIOR	0,0710171	0,0710868	0,0708474
	MSE	0,0399796	0,0372989	0,0381878
	VAR	0,0399762	0,0372989	0,0381787
Base P2	LÍMITE INFERIOR	0,0511609	0,0508436	0,0507897
	LÍMITE SUPERIOR	0,0618800	0,0615610	0,0634099
	MSE	0,0209002	0,0219453	0,0267479
	VAR	0,0208821	0,0219195	0,0267258
Base P3	LÍMITE INFERIOR	0,1185698	0,1215421	0,1186094
	LÍMITE SUPERIOR	0,2257421	0,2351607	0,2385345
	MSE	2,7878614	2,7293010	3,2478632
	VAR	2,7701861	2,7292406	3,2468477
Base P4	LÍMITE INFERIOR	0,0881788	0,0880420	0,0879820
	LÍMITE SUPERIOR	0,0956771	0,0957056	0,0956696
	MSE	0,0113817	0,0117265	0,0119937
	VAR	0,0112887	0,0117094	0,0119935
	LÍMITE INFERIOR	0,0702806	0,0704925	0,0702190
	LÍMITE SUPERIOR	0,0788888	0,0789886	0,0800490
	MSE	0,0183687	0,0171325	0,0217770

Base P5		MBB	CBB	SB
	VAR	0,0182405	0,0171324	0,0217672
Base P6	LÍMITE INFERIOR	0,1143561	0,1144052	0,1142660
	LÍMITE SUPERIOR	0,1263011	0,1264046	0,1266208
	MSE	0,0238079	0,0236150	0,0255190
	VAR	0,0238021	0,0236080	0,0255145
Base P7	LÍMITE INFERIOR	0,1109925	0,1111338	0,1106763
	LÍMITE SUPERIOR	0,1514170	0,1523425	0,1561277
	MSE	0,2845270	0,2858818	0,3436943
	VAR	0,2841460	0,2857414	0,3436915
Base P8	LÍMITE INFERIOR	0,0857629	0,0856696	0,0849599
	LÍMITE SUPERIOR	0,0924785	0,0921698	0,0924294
	MSE	0,0080088	0,0076135	0,0099358
	VAR	0,0080084	0,0076135	0,0098722
Base P9	LÍMITE INFERIOR	0,1573899	0,1571555	0,1557002
	LÍMITE SUPERIOR	0,1817603	0,1830089	0,1839737
	MSE	0,1377736	0,1419675	0,1706421
	VAR	0,1371251	0,1419536	0,1705547
Base P10	LÍMITE INFERIOR	0,1247242	0,1245002	0,1243498
	LÍMITE SUPERIOR	0,1298553	0,1295167	0,1294919
	MSE	0,0037298	0,0036944	0,0036790
	VAR	0,0036840	0,0036931	0,0036725
Base P11	LÍMITE INFERIOR	0,1204891	0,1207212	0,1210671
	LÍMITE SUPERIOR	0,1494580	0,1485912	0,1478161
	MSE	0,1669262	0,1588654	0,1547442
	VAR	0,1669258	0,1588654	0,1547101
	LÍMITE INFERIOR	0,2439560	0,2451849	0,2436924

		MBB	CBB	SB
	LÍMITE SUPERIOR	0,2800329	0,2805468	0,2824535
Base P12	MSE	0,2380436	0,2271919	0,2687020
	VAR	0,2368845	0,2271816	0,2686653
	LÍMITE INFERIOR	0,0584327	0,0575394	0,0571720
	LÍMITE SUPERIOR	0,0754196	0,0742896	0,0766948
Base P13	MSE	0,0445884	0,0450186	0,0580800
	VAR	0,0433415	0,0449679	0,0580733
	LÍMITE INFERIOR	0,0438333	0,0438491	0,0438444
	LÍMITE SUPERIOR	0,0461502	0,0463159	0,0462740
Base P14	MSE	0,0012755	0,0013213	0,0012975
	VAR	0,0012528	0,0013210	0,0012959
	LÍMITE INFERIOR	0,0896229	0,0896274	0,0897803
	LÍMITE SUPERIOR	0,0958387	0,0958783	0,0957582
Base P15	MSE	0,0055012	0,0052995	0,0050439
	VAR	0,0055011	0,0052991	0,0050402

Cuadro 4.1: Resumen de resultados de la estimación de media, series del tipo $Pj4$

En la tabla 4.2 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la media para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_2 , es decir las series del tipo $Pj5$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques.

		MBB	CBB	SB
	LÍMITE INFERIOR	0,0257504	0,0255984	0,0257214
	LÍMITE SUPERIOR	0,0322300	0,0321554	0,0323814
Base P1	MSE	0,0066377	0,0066851	0,0069974
	VAR	0,0066375	0,0066846	0,0069974
	LÍMITE INFERIOR	0,0236018	0,0236353	0,0234627

		MBB	CBB	SB
	LÍMITE SUPERIOR	0,0302470	0,0301754	0,0311460
Base P2	MSE	0,0084610	0,0079027	0,0104656
	VAR	0,0084125	0,0079009	0,0104656
	LÍMITE INFERIOR	0,0583890	0,0592984	0,0572059
	LÍMITE SUPERIOR	0,1188351	0,1211171	0,1244578
Base P3	MSE	0,8531761	0,7969176	1,0149769
	VAR	0,8461451	0,7966429	1,0147710
	LÍMITE INFERIOR	0,0448609	0,0448828	0,0450257
	LÍMITE SUPERIOR	0,0498556	0,0502564	0,0503332
Base P4	MSE	0,0053287	0,0055724	0,0054096
	VAR	0,0052282	0,0055665	0,0054083
	LÍMITE INFERIOR	0,0249667	0,0251537	0,0248665
	LÍMITE SUPERIOR	0,0284472	0,0286027	0,0288612
Base P5	MSE	0,0028942	0,0027622	0,0037488
	VAR	0,0027961	0,0027622	0,0037463
	LÍMITE INFERIOR	0,0566974	0,0566291	0,0568298
	LÍMITE SUPERIOR	0,0630143	0,0630815	0,0632539
Base P6	MSE	0,0065248	0,0067208	0,0068226
	VAR	0,0064717	0,0067205	0,0068224
	LÍMITE INFERIOR	0,0587413	0,0593346	0,0584581
	LÍMITE SUPERIOR	0,0974391	0,0965132	0,1011900
Base P7	MSE	0,2510858	0,2238383	0,3043863
	VAR	0,2510723	0,2235020	0,3040916
	LÍMITE INFERIOR	0,0343363	0,0343882	0,0342442
	LÍMITE SUPERIOR	0,0372480	0,0373519	0,0374004
	MSE	0,0015748	0,0015814	0,0017484

Base P8		MBB	CBB	SB
	VAR	0,0015587	0,0015812	0,0017481
	LÍMITE INFERIOR	0,0736238	0,0741308	0,0738611
	LÍMITE SUPERIOR	0,0893878	0,0901955	0,0920039
Base P9	MSE	0,0551463	0,0556125	0,0729981
	VAR	0,0544434	0,0556026	0,0729981
	LÍMITE INFERIOR	0,0565246	0,0565220	0,0564624
	LÍMITE SUPERIOR	0,0587774	0,0586291	0,0586931
Base P10	MSE	0,0006902	0,0006527	0,0006875
	VAR	0,0006870	0,0006527	0,0006872
	LÍMITE INFERIOR	0,0437808	0,0437739	0,0440985
	LÍMITE SUPERIOR	0,0573230	0,0566184	0,0571744
Base P11	MSE	0,0372762	0,0346885	0,0335641
	VAR	0,0372563	0,0346722	0,0335608
	LÍMITE INFERIOR	0,1217069	0,1226003	0,1224649
	LÍMITE SUPERIOR	0,1399475	0,1405766	0,1415900
Base P12	MSE	0,0595183	0,0581725	0,0641635
	VAR	0,0589635	0,0581715	0,0641543
	LÍMITE INFERIOR	0,0273249	0,0272203	0,0266349
	LÍMITE SUPERIOR	0,0383207	0,0375097	0,0391803
Base P13	MSE	0,0193264	0,0174612	0,0253566
	VAR	0,0188129	0,0174585	0,0253492
	LÍMITE INFERIOR	0,0171511	0,0171612	0,0171080
	LÍMITE SUPERIOR	0,0190419	0,0190394	0,0189662
Base P14	MSE	0,0007582	0,0007392	0,0007266
	VAR	0,0007548	0,0007392	0,0007265
	LÍMITE INFERIOR	0,0466444	0,0467412	0,0465968

		MBB	CBB	SB
	LÍMITE SUPERIOR	0,0506019	0,0507507	0,0503222
Base P15	MSE	0,0021639	0,0021258	0,0019414
	VAR	0,0021638	0,0021245	0,0019411

Cuadro 4.2: Resumen de resultados de la estimación de media, series del tipo $Pj5$

En la tabla 4.3 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la media para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_3 , es decir las series del tipo $Pj6$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques.

		MBB	CBB	SB
	LÍMITE INFERIOR	0,0732206	0,0735316	0,0728939
	LÍMITE SUPERIOR	0,0781760	0,0784883	0,0787584
Base 1	MSE	0,0042149	0,0042487	0,0058031
	VAR	0,0039336	0,0042458	0,0058018
	LÍMITE INFERIOR	0,1129628	0,1128419	0,1125107
	LÍMITE SUPERIOR	0,1168813	0,1168976	0,1169282
Base 2	MSE	0,0031841	0,0030490	0,0035822
	VAR	0,0031384	0,0030467	0,0035812
	LÍMITE INFERIOR	0,0672973	0,0676069	0,0670693
	LÍMITE SUPERIOR	0,0812316	0,0821299	0,0833824
Base 3	MSE	0,0457002	0,0437446	0,0536751
	VAR	0,0451216	0,0437343	0,0536689
	LÍMITE INFERIOR	0,1128314	0,1129547	0,1126688
	LÍMITE SUPERIOR	0,1153565	0,1157961	0,1159672
Base 4	MSE	0,0017582	0,0016095	0,0019570
	VAR	0,0013545	0,0016086	0,0019553
	LÍMITE INFERIOR	0,1258128	0,1257533	0,1250120

		MBB	CBB	SB
Base 5	LÍMITE SUPERIOR	0,1334300	0,1333386	0,1342509
	MSE	0,0136301	0,0133505	0,0190870
	VAR	0,0135898	0,0133491	0,0190867
Base 6	LÍMITE INFERIOR	0,2764748	0,2762198	0,2763322
	LÍMITE SUPERIOR	0,2817001	0,2817418	0,2817075
	MSE	0,0047989	0,0047363	0,0047540
	VAR	0,0046993	0,0047363	0,0047382
Base 7	LÍMITE INFERIOR	0,0769146	0,0768900	0,0768482
	LÍMITE SUPERIOR	0,0818008	0,0817559	0,0825699
	MSE	0,0044698	0,0040489	0,0056781
	VAR	0,0043816	0,0040489	0,0056781
Base 8	LÍMITE INFERIOR	0,0744514	0,0748076	0,0735296
	LÍMITE SUPERIOR	0,0830176	0,0833839	0,0838822
	MSE	0,0138514	0,0131133	0,0201734
	VAR	0,0135554	0,0131092	0,0201701
Base 9	LÍMITE INFERIOR	0,1107079	0,1100772	0,1057781
	LÍMITE SUPERIOR	0,1420353	0,1428215	0,1461672
	MSE	0,2250300	0,2375938	0,3494320
	VAR	0,2250295	0,2375609	0,3490556
Base 10	LÍMITE INFERIOR	0,1941318	0,1933938	0,1930178
	LÍMITE SUPERIOR	0,2036621	0,2030810	0,2040622
	MSE	0,0133638	0,0129577	0,0177827
	VAR	0,0129587	0,0129577	0,0177810
	LÍMITE INFERIOR	0,0464686	0,0467617	0,0465631
	LÍMITE SUPERIOR	0,0604293	0,0605513	0,0616397
	MSE	0,0399370	0,0388300	0,0483974

Base 11		MBB	CBB	SB
	VAR	0,0398066	0,0388060	0,0483522
	LÍMITE INFERIOR	0,1496581	0,1483514	0,1480613
	LÍMITE SUPERIOR	0,1568244	0,1559771	0,1568605
Base 12	MSE	0,0108814	0,0106320	0,0142661
	VAR	0,0092375	0,0105951	0,0142646
	LÍMITE INFERIOR	0,0281661	0,0280699	0,0280196
	LÍMITE SUPERIOR	0,0325438	0,0321249	0,0328643
Base 13	MSE	0,0030738	0,0028362	0,0036955
	VAR	0,0030686	0,0028354	0,0036953
	LÍMITE INFERIOR	0,0554857	0,0566925	0,0559092
	LÍMITE SUPERIOR	0,0623710	0,0630197	0,0634853
Base 14-61	MSE	0,0075646	0,0074085	0,0106849
	VAR	0,0063325	0,0074078	0,0106727
	LÍMITE INFERIOR	-0,0000067	-0,0000074	-0,0000068
	LÍMITE SUPERIOR	0,0000404	0,0000380	0,0000421
Base 14-62	MSE	0,0000005	0,0000005	0,0000006
	VAR	0,0000005	0,0000005	0,0000006
	LÍMITE INFERIOR	0,1021755	0,1022832	0,1021272
	LÍMITE SUPERIOR	0,1044337	0,1044167	0,1043934
Base 15	MSE	0,0007026	0,0006291	0,0007205
	VAR	0,0007026	0,0006282	0,0007200

Cuadro 4.3: Resumen de resultados de la estimación de media, series del tipo $Pj6$

En la tabla 4.4 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la media para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_4 , es decir las series del tipo $Pj7$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques.

		MBB	CBB	SB
Base 1	LÍMITE INFERIOR	0,063549416	0,064242218	0,063766824
	LÍMITE SUPERIOR	0,068285426	0,068719348	0,069098317
	MSE	0,003601295	0,003438897	0,004807800
	VAR	0,003398829	0,003435345	0,004803968
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,098625819	0,098496976	0,098279738
	LÍMITE SUPERIOR	0,102281859	0,102242525	0,102355473
	MSE	0,002751182	0,002563128	0,002976152
	VAR	0,002684616	0,002563052	0,002975386
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,055072131	0,055252003	0,054579586
	LÍMITE SUPERIOR	0,067013348	0,067294076	0,068083066
	MSE	0,032930187	0,031933016	0,040291047
	VAR	0,032634383	0,031908115	0,040288866
Base 4	LÍMITE INFERIOR	0,096587189	0,096840163	0,096678167
	LÍMITE SUPERIOR	0,098824740	0,099297716	0,099446266
	MSE	0,001308252	0,001199152	0,001490567
	VAR	0,000988474	0,001198405	0,001489838
Base 5	LÍMITE INFERIOR	0,110440509	0,110258790	0,109127375
	LÍMITE SUPERIOR	0,118474159	0,117779542	0,118422911
	MSE	0,014892384	0,013663214	0,020046333
	VAR	0,014891674	0,013651259	0,019986833
Base 6	LÍMITE INFERIOR	0,227149554	0,226914891	0,226969978
	LÍMITE SUPERIOR	0,231584145	0,231488202	0,231460355
	MSE	0,003393326	0,003271087	0,003295432
	VAR	0,003327923	0,003266670	0,003295432
	LÍMITE INFERIOR	0,062360247	0,062427416	0,062285607
	LÍMITE SUPERIOR	0,066303508	0,066343800	0,066795366

		MBB	CBB	SB
Base 7	MSE	0,002825895	0,002679306	0,003526043
	VAR	0,002764090	0,002675876	0,003522591
Base 8	LÍMITE INFERIOR	0,060725969	0,061250793	0,060571450
	LÍMITE SUPERIOR	0,067847710	0,068354920	0,069374426
	MSE	0,009162332	0,009061601	0,013230590
	VAR	0,008779399	0,009041763	0,013230536
Base 9	LÍMITE INFERIOR	0,091884877	0,092396408	0,088640266
	LÍMITE SUPERIOR	0,119104033	0,119913748	0,122247967
	MSE	0,167197919	0,165889440	0,248894478
	VAR	0,166575179	0,165796134	0,248874369
Base 10	LÍMITE INFERIOR	0,169741446	0,169172939	0,168544883
	LÍMITE SUPERIOR	0,178136806	0,177738021	0,178199592
	MSE	0,009977725	0,010307052	0,013497357
	VAR	0,009643933	0,010305803	0,013480282
Base 11	LÍMITE INFERIOR	0,036973115	0,036813762	0,036973718
	LÍMITE SUPERIOR	0,049152739	0,048971410	0,050342102
	MSE	0,030636390	0,029058219	0,035774239
	VAR	0,030621484	0,029053939	0,035768386
Base 12	LÍMITE INFERIOR	0,130588994	0,129538506	0,129037373
	LÍMITE SUPERIOR	0,137886389	0,136695122	0,137546717
	MSE	0,010142741	0,009395982	0,012540026
	VAR	0,008788375	0,009395297	0,012531686
Base 13	LÍMITE INFERIOR	0,022472905	0,022243852	0,022239974
	LÍMITE SUPERIOR	0,026447224	0,026095772	0,026760577
	MSE	0,002517322	0,002439513	0,003167690
	VAR	0,002513054	0,002433949	0,003167404

		MBB	CBB	SB
Base 14-71	LÍMITE INFERIOR	0,050343224	0,050882857	0,049907992
	LÍMITE SUPERIOR	0,056115237	0,056813163	0,057025474
	MSE	0,006878805	0,006861591	0,009549218
	VAR	0,005765426	0,006857799	0,009549178
Base 14-72	LÍMITE INFERIOR	-0,000005212	-0,000005837	-0,000008187
	LÍMITE SUPERIOR	0,000039350	0,000037652	0,000039905
	MSE	0,000000451	0,000000451	0,000000527
	VAR	0,000000451	0,000000451	0,000000526
Base 15	LÍMITE INFERIOR	0,087572943	0,087494626	0,087579117
	LÍMITE SUPERIOR	0,089497492	0,089509673	0,089532227
	MSE	0,000535087	0,000542602	0,000524335
	VAR	0,000533993	0,000542516	0,000524161

Cuadro 4.4: Resumen de resultados de la estimación de media, series del tipo $Pj7$

En la tabla 4.5 se encuentra el estimador de la media utilizado para sumar a las muestras TFT-Bootstrap lo cual es imprescindible para la estimación del coeficiente de variación que se verá más adelante.

Serie	Método con menor MSE	Estimador de la media
P14	CBB	0,06129192
P15	MBB	0,02824678
P16	MBB	0,07658165
P17	CBB	0,07658165
P24	MBB	0,05535767
P25	CBB	0,02630363
P26	CBB	0,1151188
P27	CBB	0,1007036
P34	CBB	0,166457

Serie	Método con menor MSE	Estimador de la media
P35	CBB	0,08345571
P36	CBB	0,07322284
P37	CBB	0,05980238
P44	MBB	0,09204709
P45	MBB	0,04757612
P46	CBB	0,1145163
P47	CBB	0,09807025
P54	CBB	0,0743495
P55	CBB	0,02671278
P56	CBB	0,1297422
P57	CBB	0,1142803
P64	CBB	0,1198397
P65	MBB	0,05942757
P66	CBB	0,2789799
P67	CBB	0,229336
P74	MBB	0,1289592
P75	CBB	0,07513659
P76	CBB	0,07934006
P77	CBB	0,06451922
P84	CBB	0,08881416
P85	MBB	0,03576323
P86	CBB	0,07875029
P87	CBB	0,06490312
P94	MBB	0,1692061
P95	MBB	0,08244141
P96	MBB	0,126917

Serie	Método con menor MSE	Estimador de la media
P97	CBB	0,1059737
P104	SB	0,1269709
P105	CBB	0,05755187
P106	CBB	0,1983319
P107	MBB	0,1727661
P114	SB	0,1330329
P115	SB	0,04975013
P116	CBB	0,05250477
P117	CBB	0,04239291
P124	CBB	0,2632001
P125	CBB	0,1316776
P126	CBB	0,1523168
P127	CBB	0,1329166
P134	MBB	0,06367432
P135	CBB	0,03142311
P136	CBB	0,0298555
P137	CBB	0,0239519
P144	MBB	0,0449915
P145	SB	0,018037
P1461	CBB	0,06039521
P1462	CBB	153,056 e-5
P1471	CBB	0,053848
P1472	CBB	170,689 e-5
P154	SB	0,092376
P155	SB	0,0483478
P156	CBB	0,1033468

Serie	Método con menor MSE	Estimador de la media
P157	SB	0,08851279

Cuadro 4.5: Resumen de la media estimada para cada serie.

Estimación de la autocorrelación de orden 1.

En la tabla 4.6 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la autocorrelación de orden 1 para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_1 , es decir las series del tipo $Pj4$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P1	LÍMITE INFERIOR	0,55323960	0,55655405	0,57129077	0,69695782	0,69231964	0,69689613	0,70058136
	LÍMITE SUPERIOR	0,77478662	0,77825375	0,77850310	0,74824278	0,73060623	0,74714807	0,74024789
	MSE	10,64473697	10,66876807	11,23173251	0,46080241	0,36604522	0,45420774	0,28846686
	VAR	9,69733268	9,57377593	9,88023048	0,44374448	0,26331473	0,43024720	0,27073018
Base P2	LÍMITE INFERIOR	0,47705043	0,45610268	0,44300839	0,62917000	0,62518029	0,62892687	0,58801826
	LÍMITE SUPERIOR	0,71783478	0,71621810	0,71827851	0,70637523	0,66734856	0,70267330	0,64197386
	MSE	19,65986235	22,49852678	25,73592333	1,16136620	0,91472666	1,13321052	5,55073652
	VAR	17,58750636	19,53672607	22,14105777	1,06255777	0,43872805	1,04676492	0,56713166
Base P3	LÍMITE INFERIOR	0,75984557	0,75780327	0,76439408	0,76364310	0,79873246	0,76268375	0,80656427
	LÍMITE SUPERIOR	0,83124682	0,83409920	0,83256924	0,84209709	0,81160082	0,84105962	0,80689429
	MSE	1,77241965	2,01441313	1,93323733	1,89031429	4,56015276	1,91422253	7,60177700
	VAR	1,62396596	1,83233523	1,68489724	1,62114572	1,39244447	1,64695958	1,50601736
	LÍMITE INFERIOR	0,33634458	0,33348666	0,33388485	0,36064968	0,39610088	0,35873627	0,39847946

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P4	LÍMITE SUPERIOR	0,45821537	0,45567913	0,46027255	0,42405008	0,40368915	0,42060179	0,40205579
	MSE	2,89526349	2,99028631	3,10736210	0,77670312	1,83791204	0,73412725	2,66308685
	VAR	2,89152482	2,96884480	3,06160683	0,77655270	0,37982562	0,73320026	0,43847885
	LÍMITE INFERIOR	0,37447785	0,38793942	0,37481432	0,42444124	0,43502980	0,42503469	0,42917778
Base P5	LÍMITE SUPERIOR	0,51918316	0,52491634	0,52792795	0,50285101	0,47179569	0,50609063	0,45917150
	MSE	4,94257413	4,66096569	5,59340681	1,51730685	0,32470909	1,45355156	0,81512816
	VAR	4,91287152	4,55069239	5,46886463	1,38483361	0,32412537	1,35001301	0,32396743
	LÍMITE INFERIOR	0,40417450	0,41101103	0,40659456	0,44901677	0,46391653	0,45021816	0,45998117
Base P6	LÍMITE SUPERIOR	0,53880723	0,53514099	0,53731359	0,50403299	0,50181451	0,50130839	0,49726667
	MSE	3,13281897	2,78688348	2,97069194	0,49032726	0,52808503	0,44683881	0,29681523
	VAR	3,08348873	2,75851266	2,95493046	0,48760730	0,28707835	0,44664881	0,24646326
	LÍMITE INFERIOR	0,50753926	0,50280585	0,50308871	0,50912352	0,51932570	0,51112467	0,51493342
Base P7	LÍMITE SUPERIOR	0,56669933	0,56195112	0,56246966	0,56166947	0,55837609	0,56547110	0,55673397
	MSE	0,58208541	0,62395928	0,65573148	0,52125334	0,50830843	0,51748258	0,33818149
	VAR	0,56127198	0,62365654	0,65430915	0,48320506	0,33847100	0,47409969	0,30079905
	LÍMITE INFERIOR	0,21224087	0,21435105	0,21098238	0,25172886	0,24582297	0,25586391	0,24769265

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P8	LÍMITE SUPERIOR	0,38525148	0,38501301	0,39048913	0,33121327	0,30185734	0,32923083	0,31997235
	MSE	5,50546265	5,18343645	5,87875092	1,14132008	1,44509269	0,98663818	1,02677108
	VAR	5,48920877	5,15258353	5,84443308	1,13949010	0,70648044	0,98022105	0,95558788
	LÍMITE INFERIOR	0,54614562	0,54809881	0,54573456	0,56519010	0,56828236	0,56547000	0,57734402
Base P9	LÍMITE SUPERIOR	0,64228028	0,63985783	0,64485683	0,61670306	0,60012903	0,61728319	0,61380600
	MSE	2,00252573	1,86821841	2,07685088	0,60933877	0,28493794	0,60061997	0,46443450
	VAR	1,99773350	1,86177641	2,07111340	0,58241576	0,24072927	0,56746013	0,30951709
	LÍMITE INFERIOR	0,07575918	0,07714930	0,07062349	0,10106783	0,14722452	0,10918806	0,12135205
Base P10	LÍMITE SUPERIOR	0,21729167	0,24768341	0,25380215	0,18887511	0,14745364	0,18617437	0,17834346
	MSE	4,03369972	4,40709572	4,77708714	1,12335930	3,99835399	0,94923058	0,51663806
	VAR	3,31917821	4,40036171	4,76991274	0,98817313	0,42843996	0,79956158	0,43919980
	LÍMITE INFERIOR	0,53001889	0,53284155	0,53658819	0,56186045	0,59020017	0,56435819	0,57116152
Base P11	LÍMITE SUPERIOR	0,64385839	0,64143991	0,64055298	0,63986689	0,62954991	0,63808889	0,63150198
	MSE	3,16264715	2,90367427	2,80765078	1,52736278	3,30661482	1,27130353	1,05256038
	VAR	3,01748438	2,76694326	2,69695277	1,34617845	1,11165665	1,15051275	0,85645684
	LÍMITE INFERIOR	0,44754443	0,44321653	0,44323731	0,46738893	0,48701073	0,46818051	0,46617508

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE SUPERIOR	0,55776653	0,55400743	0,55153851	0,54521097	0,54136387	0,54501873	0,52728237
Base P12	MSE	2,54266226	2,29535095	2,26898900	1,24833079	0,96621053	1,19433213	0,68474525
	VAR	2,42846995	2,27869719	2,24962463	1,17446987	0,58771291	1,09673885	0,66251751
	LÍMITE INFERIOR	0,49257713	0,49406547	0,48493216	0,53172718	0,56465104	0,53158379	0,53007916
	LÍMITE SUPERIOR	0,63004888	0,62840617	0,62578352	0,61680132	0,57385671	0,62158808	0,58141829
Base P13	MSE	3,54618648	3,28623529	3,53398070	1,30658803	1,72156839	1,28896543	0,58269324
	VAR	3,35200184	3,24061642	3,47363292	1,18801806	0,38013701	1,16731585	0,46240048
	LÍMITE INFERIOR	0,34466598	0,34142629	0,34635009	0,46935030	0,48083170	0,46889437	0,47716517
	LÍMITE SUPERIOR	0,63192749	0,62959072	0,63223689	0,52306788	0,52064759	0,52189290	0,51649191
Base P14	MSE	22,19238627	23,12942670	21,93748492	0,67563886	0,50095779	0,65265502	0,34816117
	VAR	20,90982530	21,68869817	20,76116910	0,67225155	0,38230116	0,65125849	0,34534065
	LÍMITE INFERIOR	0,20388102	0,21692660	0,21780464	0,28763435	0,31215711	0,28821029	0,30069591
	LÍMITE SUPERIOR	0,42101451	0,42752919	0,42538529	0,36272648	0,36011195	0,35973320	0,32019543
Base P15	MSE	7,08645648	6,59376324	7,09230117	0,75710530	1,07682251	0,71684443	1,83681609
	VAR	6,91471996	6,47258093	6,82720921	0,75496482	0,51065831	0,71684439	0,45794223

Cuadro 4.6: Resumen de resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1, series del tipo $Pj4$

En la tabla 4.7 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la autocorrelación de orden 1 para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_2 , es decir las series del tipo $Pj5$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P1	LÍMITE INFERIOR	0,46068928	0,45302318	0,45468205	0,56075411	0,57943178	0,56115389	0,55810481
	LÍMITE SUPERIOR	0,66511781	0,66223753	0,66503404	0,61884855	0,61083850	0,61970929	0,59977143
	MSE	12,82422366	13,13122735	13,45676481	0,57448374	0,87189822	0,58625249	0,41859636
	VAR	11,22623452	11,60236871	11,62856128	0,55269246	0,31185729	0,56546022	0,32939712
Base P2	LÍMITE INFERIOR	0,48390879	0,47041023	0,49403177	0,59234936	0,58911353	0,59590605	0,59285654
	LÍMITE SUPERIOR	0,67607492	0,67883520	0,67809380	0,66988422	0,64022169	0,66680724	0,64787199
	MSE	14,68892066	18,06602151	22,50849440	1,26188200	0,88401339	1,16566044	0,63991868
	VAR	13,42316565	16,08780040	19,82247130	1,13852382	0,58318336	1,02218402	0,59333270
Base P3	LÍMITE INFERIOR	0,61928115	0,61718631	0,61963818	0,61028806	0,65328732	0,60770162	0,57937684
	LÍMITE SUPERIOR	0,70003415	0,69964028	0,70207626	0,71105238	0,68184918	0,71299481	0,69872279
	MSE	1,68554710	1,61799064	1,64409582	2,99977774	7,71162581	3,16506849	2,99316140
	VAR	1,53107546	1,54782311	1,52866098	2,64222553	2,38836836	2,81298593	2,94949757
	LÍMITE INFERIOR	0,29096865	0,29382086	0,28995789	0,32360520	0,36609103	0,32556708	0,34091623
	LÍMITE SUPERIOR	0,44259305	0,44374767	0,44188274	0,39057998	0,36681551	0,39151651	0,38726027

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P4	MSE	4,39629390	4,24760304	4,45668727	0,88411973	3,18615894	0,83676294	0,52937709
	VAR	4,34224953	4,18940235	4,43524301	0,88398087	0,40868224	0,83676065	0,42232053
	LÍMITE INFERIOR	0,32671939	0,32948509	0,32649505	0,35495910	0,38254812	0,35720223	0,35792437
	LÍMITE SUPERIOR	0,44304183	0,44715364	0,45152509	0,44884232	0,38271429	0,44714507	0,39211618
Base P5	MSE	3,25724064	3,70316646	4,15895011	2,13460388	5,21084172	2,00815918	1,70631595
	VAR	3,23609868	3,55676279	3,99492327	1,96673860	0,50992611	1,77115471	0,53547102
	LÍMITE INFERIOR	0,39183117	0,38983507	0,38799391	0,40958113	0,41390146	0,41268781	0,42953464
	LÍMITE SUPERIOR	0,48163660	0,48132824	0,48172954	0,47065894	0,45957739	0,47116296	0,46783068
Base P6	MSE	1,53079567	1,54415744	1,62235929	0,60571445	0,33789247	0,56107652	0,87463320
	VAR	1,47838605	1,52010691	1,59511628	0,60505617	0,33072462	0,55966849	0,39836449
	LÍMITE INFERIOR	0,50321652	0,50147507	0,50119486	0,50276877	0,47364399	0,50429913	0,51558045
	LÍMITE SUPERIOR	0,55278998	0,55442693	0,55426913	0,56210125	0,53691751	0,55903140	0,55383979
Base P7	MSE	0,44061925	0,45355165	0,47017132	0,66915586	2,08070580	0,64131391	1,04065792
	VAR	0,43556606	0,45258582	0,46860195	0,58395030	0,86732040	0,54600137	0,46373354
	LÍMITE INFERIOR	0,14439882	0,13949474	0,14157030	0,28482353	0,31320187	0,28633750	0,28690227
	LÍMITE SUPERIOR	0,52695950	0,51772051	0,52872711	0,36866103	0,35361901	0,36234278	0,34547716

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P8	MSE	27,92947437	27,73269821	28,94063974	1,17122194	2,19537004	0,99202201	0,63435569
	VAR	26,75863863	26,81067438	27,69733859	1,16700901	0,69585345	0,98921059	0,61168694
	LÍMITE INFERIOR	0,53771763	0,53791322	0,53553953	0,54879257	0,56801929	0,54885341	0,56169672
	LÍMITE SUPERIOR	0,61436668	0,61408642	0,61252936	0,60805751	0,59574462	0,60456398	0,59969093
Base P9	MSE	1,34634492	1,30106305	1,41297555	0,74964770	1,02360769	0,72586955	0,46251806
	VAR	1,32865476	1,28633685	1,40019130	0,71870146	0,36817110	0,68574207	0,30549483
	LÍMITE INFERIOR	-0,06041538	-0,04580643	-0,05134704	-0,02275445	-0,01377109	-0,01818529	0,00743601
	LÍMITE SUPERIOR	0,07378373	0,08530593	0,09306038	0,05122811	0,01247370	0,05054699	0,06323434
Base P10	MSE	2,70673223	2,56783714	2,95899267	0,80208396	2,43232733	0,72567354	0,78988060
	VAR	2,57576113	2,56613990	2,94535543	0,78262021	0,47630919	0,69699478	0,40088790
	LÍMITE INFERIOR	0,56600768	0,56374988	0,56599836	0,58836900	0,58860855	0,59010099	0,58888745
	LÍMITE SUPERIOR	0,66847080	0,66497427	0,65929916	0,65129885	0,64138065	0,64925513	0,63979613
Base P11	MSE	2,27576553	2,17446658	1,93203067	1,04273211	0,62307747	0,88872123	0,61273405
	VAR	2,20544516	2,15223795	1,88880452	0,89370964	0,60476842	0,75475967	0,58580286
	LÍMITE INFERIOR	0,44774732	0,44481290	0,44381538	0,46591820	0,45999569	0,46855426	0,47485225
	LÍMITE SUPERIOR	0,54234145	0,54069430	0,53807664	0,53491590	0,50686099	0,53567957	0,51968977

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base P12	MSE	1,75519232	1,73174537	1,66304559	0,94502043	0,62359137	0,89615153	0,38250070
	VAR	1,72731062	1,71750364	1,64664806	0,89572274	0,36117652	0,83654444	0,38157639
	LÍMITE INFERIOR	0,51264090	0,51381985	0,51215117	0,52007623	0,54454540	0,52299791	0,51522779
	LÍMITE SUPERIOR	0,59216123	0,58718687	0,58597963	0,60437287	0,58013097	0,60804323	0,55424053
Base P13	MSE	1,33121912	1,09443653	1,20087346	1,32125009	1,27242927	1,30776741	1,06444446
	VAR	1,23159070	1,04653584	1,12339589	1,17831321	0,52045653	1,10958793	0,33666970
	LÍMITE INFERIOR	0,44036068	0,44669796	0,45421465	0,61625568	0,63429570	0,61825523	0,62007457
	LÍMITE SUPERIOR	0,75495504	0,75253180	0,75490172	0,66059180	0,65652497	0,66199623	0,65277095
Base P14	MSE	33,89436119	33,85545193	28,89664654	0,45338141	0,68820810	0,40895166	0,25194548
	VAR	30,22888851	29,95792711	26,29745885	0,45060965	0,25018915	0,40889883	0,24688937
	LÍMITE INFERIOR	0,09907979	0,10285114	0,10125264	0,18450039	0,19101021	0,18635817	0,17875206
	LÍMITE SUPERIOR	0,37745107	0,38250766	0,37805390	0,26926732	0,25523801	0,26928114	0,23560692
Base P15	MSE	11,20175642	11,25597717	11,04258342	1,03305470	0,58508022	0,95728837	1,37043500
	VAR	10,84819865	10,86439866	10,74086583	1,03274920	0,58312330	0,95642710	0,59504431

Cuadro 4.7: Resumen de resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1, series del tipo $Pj5$

En la tabla 4.8 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la autocorrelación de orden 1 para todas las bases,

a partir de la formación de la serie mediante la función F_3 , es decir las series del tipo $Pj6$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	LÍMITE INFERIOR	0,28147951	0,27368402	0,27312568	0,38987476	0,35985624	0,39212606	0,38129291
	LÍMITE SUPERIOR	0,62495651	0,61212833	0,61123147	0,52422725	0,49309628	0,51974340	0,50060073
	MSE	21,65944484	21,62494748	20,96120555	3,62178017	3,02323551	3,63220416	3,65630215
	VAR	21,43650767	20,80720679	20,42938656	2,85225135	3,01706648	2,79389556	3,08994122
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,40522154	0,40676480	0,40007469	0,52412412	0,56121134	0,52343957	0,57570402
	LÍMITE SUPERIOR	0,68685086	0,69593445	0,68749124	0,63245500	0,62208005	0,62769274	0,60925874
	MSE	17,64730440	20,33741339	20,27531861	2,35234545	2,02638269	2,15331091	2,43898333
	VAR	16,72273200	18,59314934	18,78204731	2,33328539	1,17434065	2,14773465	0,78676982
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,23531120	0,22881942	0,23559970	0,25420385	0,20802473	0,25142861	0,26590113
	LÍMITE SUPERIOR	0,36213442	0,36163917	0,36395993	0,37132506	0,32459036	0,36367377	0,35245938
	MSE	4,79361771	5,27106138	5,29596009	3,48035284	4,88248594	3,48736226	2,63554869
	VAR	4,53531824	4,93001210	4,91210579	3,14807318	2,69366829	3,22909774	2,05434077
	LÍMITE INFERIOR	0,27702617	0,26862694	0,26257695	0,29854566	0,33915508	0,30258688	0,29457279
	LÍMITE SUPERIOR	0,44833518	0,43029692	0,43173904	0,40307140	0,39023618	0,39963094	0,37718177
	MSE	6,32554178	5,39280212	5,88668846	2,16931454	3,60441455	1,82061461	1,76291729

Base 4		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	5,84850139	5,31413167	5,84539397	2,16495901	1,43725006	1,80786533	1,33113806
	LÍMITE INFERIOR	0,43202694	0,41916841	0,41281105	0,3624106	0,3215817	0,3770879	0,27119449
	LÍMITE SUPERIOR	0,56731144	0,55691037	0,57249927	0,6268740	0,5659081	0,6429383	0,41422916
Base 5	MSE	7,17896218	5,90841258	8,03799759	21,7495980	26,0913694	22,9370618	68,36413908
	VAR	5,75983568	5,48696959	7,16985697	18,9001163	20,0946487	18,7569399	5,21750705
	LÍMITE INFERIOR	0,18180413	0,17495806	0,17262054	0,21738069	0,17351195	0,21902577	0,20670040
	LÍMITE SUPERIOR	0,34504805	0,33357866	0,33872603	0,31514550	0,28156656	0,30340953	0,30423398
Base 6	MSE	4,45269246	4,20080639	4,73052556	1,60946378	3,54239961	1,30267305	1,66087315
	VAR	4,40583401	4,20030036	4,72034858	1,50097427	1,87783977	1,22190571	1,61938968
	LÍMITE INFERIOR	0,18032702	0,17789973	0,18195236	0,19075515	0,19691057	0,19358106	0,21258201
	LÍMITE SUPERIOR	0,28839253	0,28886183	0,28784071	0,28599650	0,22691270	0,28522914	0,27835254
Base 7	MSE	2,09500782	2,20160958	1,95139803	1,61575748	3,44842703	1,54595062	1,35959932
	VAR	2,09170287	2,17919893	1,92304490	1,52502333	0,83157517	1,45418060	0,79183398
	LÍMITE INFERIOR	0,32722200	0,32486063	0,32085773	0,34817712	0,41905527	0,35474091	0,47721591
	LÍMITE SUPERIOR	0,49907013	0,50093573	0,51446573	0,52610135	0,44020141	0,52294171	0,55434173
	MSE	5,74507801	5,74649581	7,36093823	6,43981999	6,68165141	6,98033120	18,50135881

Base 8		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	5,59154377	5,64332967	7,12590908	5,50759762	1,12086723	5,20695515	1,09409679
	LÍMITE INFERIOR	0,73148343	0,70038157	0,69439572	0,68146332	0,49510037	0,67857444	0,48181872
	LÍMITE SUPERIOR	0,83641044	0,82799344	0,83428456	0,85856532	0,84338971	0,85285290	0,84628276
Base 9	MSE	5,91175733	4,33978706	6,34073465	14,94322542	24,88694737	14,51508505	28,06897802
	VAR	4,15226557	4,06457412	5,75453482	11,46983627	23,92773031	11,13276976	26,50021707
	LÍMITE INFERIOR	0,65757923	0,66136500	0,66173235	0,62267529	0,58358151	0,63376142	0,57919006
	LÍMITE SUPERIOR	0,78493807	0,77514867	0,78834200	0,79082907	0,75800292	0,78768957	0,76358514
Base 10	MSE	2,60453896	2,04103071	2,77877346	3,85625988	4,85339081	3,73495997	4,90713710
	VAR	2,46798668	1,94082685	2,57037270	3,81694602	4,21846423	3,56178894	4,69221593
	LÍMITE INFERIOR	0,21447328	0,22427152	0,22494566	0,26855640	0,26328589	0,26771767	0,21398135
	LÍMITE SUPERIOR	0,47196367	0,46912835	0,46441561	0,46483906	0,42676918	0,45604697	0,40671209
Base 11	MSE	14,50029373	14,11767573	13,92430814	9,15875276	6,71023041	8,45161486	9,33343111
	VAR	14,17623218	13,64612650	13,30775828	8,17948583	6,37249939	7,70224888	6,50163890
	LÍMITE INFERIOR	-0,19899531	-0,21401835	-0,21291964	-0,20787362	-0,19973221	-0,20096543	-0,15812947
	LÍMITE SUPERIOR	-0,05824547	-0,07920063	-0,07250249	-0,07222219	-0,12068754	-0,07048048	-0,09148626
	MSE	3,98825682	3,36581387	3,86640396	3,24639962	1,55391736	3,11362849	2,63927544

Base 12		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	3,42210875	3,35515149	3,81300202	3,22445217	1,17696155	2,98970566	1,10829535
	LÍMITE INFERIOR	0,05352310	0,04959247	0,03971708	0,12825637	0,20099287	0,12809172	0,16348508
	LÍMITE SUPERIOR	0,39762245	0,38427169	0,38120700	0,28825888	0,20099739	0,28400511	0,23657027
Base 13	MSE	19,91674792	19,66607596	21,98927420	5,45647751	6,29950004	4,93744967	1,17201841
	VAR	19,86110065	19,63180259	21,97636420	4,78585990	0,60001146	4,36348418	1,02530481
	LÍMITE INFERIOR	0,67921619	0,55582633	0,51781143	0,693932729	0,703420276	0,692365944	0,6464504
	LÍMITE SUPERIOR	0,86104492	0,85156702	0,85617676	0,867691752	0,794082407	0,86251931	0,7453498
Base 14-61	MSE	51,81758370	28,99321434	39,63485454	18,59722312	1,821349547	19,08559557	13,5582617
	VAR	33,65919486	26,16201961	34,59235514	12,25646766	1,70742515	12,38343458	2,3706082
	LÍMITE INFERIOR	-0,50151158	-0,49903257	-0,49848384	-0,50475301	-0,50207398	-0,50321241	-0,49046296
	LÍMITE SUPERIOR	-0,45752023	-0,45574031	-0,45947422	-0,45471879	-0,47218703	-0,45578261	-0,45794994
Base 14-62	MSE	0,45030009	0,42793063	0,35078763	0,58053481	0,59448082	0,51185944	0,30168734
	VAR	0,44912751	0,42787770	0,35077088	0,57440446	0,27350970	0,50832671	0,26129893
	LÍMITE INFERIOR	0,18833981	0,18309376	0,12484872	0,22679958	0,23319995	0,23197367	0,24020995
	LÍMITE SUPERIOR	0,41737062	0,41072950	0,45675695	0,33395178	0,31916050	0,33022214	0,29786022
	MSE	7,57127693	7,38036755	15,31925021	1,54642097	1,29313495	1,27586347	2,97708843

Base 15	MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
VAR	7,55969349	7,36156778	15,26756559	1,50692156	1,00458956	1,23614300	1,01386153

Cuadro 4.8: Resumen de resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1, series del tipo $Pj6$

En la tabla 4.9 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la autocorrelación de orden 1 para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_4 , es decir las series del tipo $Pj7$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	LÍMITE INFERIOR	0,28730829	0,29464526	0,29073899	0,40115175	0,45469284	0,40920211	0,45348192
	LÍMITE SUPERIOR	0,63194764	0,62821239	0,63151265	0,54341019	0,45769591	0,54256455	0,46518986
	MSE	20,98463984	20,92333193	20,31013125	4,15404398	8,96462997	3,67795035	9,11969069
	VAR	20,80926201	20,46542432	20,02944857	3,28340292	2,25116796	2,78494996	2,38818351
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,40561009	0,41046963	0,40505152	0,53289627	0,54741133	0,54098938	0,56364631
	LÍMITE SUPERIOR	0,70213316	0,70476812	0,70117776	0,64603731	0,61912348	0,64358734	0,63095044
	MSE	18,98317890	19,39546472	20,78895171	2,47418571	0,91381922	2,15033303	1,63300854
	VAR	18,01393590	18,06035447	19,20810064	2,44087031	0,87462251	2,12910188	1,17929625
	LÍMITE INFERIOR	0,21336114	0,21249218	0,22324538	0,24735510	0,24220348	0,24856549	0,25060827
	LÍMITE SUPERIOR	0,36114411	0,36458747	0,36669701	0,36238190	0,34895292	0,36588049	0,34856684

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 3	MSE	5,98825340	6,79191022	7,08463116	3,30686489	3,09344698	3,60256068	3,48455535
	VAR	5,70662259	6,35732939	6,38159330	3,04618354	2,86672629	3,22193316	2,79983124
	LÍMITE INFERIOR	0,21828936	0,21642633	0,20527590	0,24760945	0,30617386	0,25036638	0,23708798
	LÍMITE SUPERIOR	0,39204973	0,38021556	0,37883203	0,35542764	0,30675039	0,35220347	0,33027081
Base 4	MSE	6,61923898	5,49027295	5,99369516	2,28730474	4,88898456	2,02155838	1,89856726
	VAR	6,23990851	5,42150474	5,95645645	2,27912821	0,68924531	1,98184838	1,58694118
	LÍMITE INFERIOR	0,36015280	0,34944722	0,34954111	0,29953945	0,13317821	0,30705680	0,21524510
	LÍMITE SUPERIOR	0,51442093	0,50577650	0,51487960	0,59016206	0,53669977	0,59294445	0,50773525
Base 5	MSE	7,78673462	7,26948645	9,25459180	26,23986552	54,89922696	30,12115306	48,53689945
	VAR	6,51341566	6,65787883	8,00267762	22,41173226	32,21380625	23,97631141	32,59084517
	LÍMITE INFERIOR	0,18551987	0,18666208	0,18008949	0,22300581	0,21974759	0,22500874	0,24384439
	LÍMITE SUPERIOR	0,34893239	0,34604130	0,35248728	0,31639310	0,28941089	0,31327392	0,29744534
Base 6	MSE	4,63848090	4,18992637	4,91084009	1,60130649	0,93623489	1,49698832	2,43540821
	VAR	4,55862112	4,16416828	4,90993408	1,44424179	0,83492567	1,36272076	1,22500367
	LÍMITE INFERIOR	0,16145352	0,16481748	0,16831245	0,17624345	0,18873487	0,17752533	0,18477773
	LÍMITE SUPERIOR	0,26256609	0,26555880	0,26535876	0,27561790	0,24426574	0,27081732	0,25241974

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 7	MSE	1,72582001	1,73758894	1,70007746	1,54127038	0,59481168	1,41077252	1,17682740
	VAR	1,72581986	1,73164057	1,66864297	1,43221211	0,52534067	1,33361709	0,89030099
	LÍMITE INFERIOR	0,29552825	0,30223542	0,28871099	0,32295926	0,39054190	0,32800827	0,39277991
	LÍMITE SUPERIOR	0,46759996	0,47723488	0,48220930	0,49181788	0,41038016	0,49696984	0,39281054
Base 8	MSE	5,49457232	5,64881147	7,14351707	6,14679347	5,68457367	6,31894768	11,63479592
	VAR	5,40641208	5,56060346	6,93375257	5,34207039	1,25945160	4,75422690	1,31014024
	LÍMITE INFERIOR	0,72281131	0,69804446	0,67921099	0,67337888	0,49389971	0,67375132	0,76662534
	LÍMITE SUPERIOR	0,82804015	0,82681490	0,83213068	0,85518371	0,84127905	0,85166347	0,77732477
Base 9	MSE	6,18073677	4,85537911	7,63277125	14,57505155	25,78472115	15,72675674	96,78238211
	VAR	4,45728712	4,54200463	7,02587473	11,42501084	24,36908122	11,72600935	43,88045082
	LÍMITE INFERIOR	0,64977044	0,65148008	0,64992995	0,64374424	0,54551930	0,64240275	0,67741072
	LÍMITE SUPERIOR	0,77781778	0,77011150	0,78477746	0,81077160	0,64667135	0,79459854	0,82143231
Base 10	MSE	2,83399517	2,32400018	2,99273324	4,11574164	24,53477333	3,53204474	6,37943747
	VAR	2,64958950	2,23232653	2,76776307	4,09731609	1,52603891	3,47206697	3,62906065
	LÍMITE INFERIOR	0,20041294	0,20740805	0,20567221	0,27188581	0,21814566	0,26310566	0,33394129
	LÍMITE SUPERIOR	0,45830450	0,46755041	0,45886896	0,45871020	0,37497703	0,44962022	0,40178554

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 11	MSE	14,61870355	14,94288894	14,57201116	8,43601975	13,05537737	7,62571697	15,98774433
	VAR	14,42843549	14,46221438	14,31318790	7,52633017	5,97800726	7,19363356	5,77283627
	LÍMITE INFERIOR	-0,19913973	-0,21120979	-0,22236851	-0,20715704	-0,17973807	-0,20037735	-0,16302629
	LÍMITE SUPERIOR	-0,07492513	-0,07912182	-0,08213557	-0,07598833	-0,10651129	-0,07189204	-0,06843081
Base 12	MSE	3,83919191	3,15830806	3,68704838	3,10966596	1,21093073	2,85375042	3,14210099
	VAR	3,19267275	3,12326931	3,64800531	3,06838741	1,06925690	2,74966963	1,32968135
	LÍMITE INFERIOR	0,03682412	0,05025962	0,04416843	0,13665186	0,22901623	0,13530456	0,23212020
	LÍMITE SUPERIOR	0,41212809	0,41407730	0,41775748	0,30619206	0,22921702	0,29198046	0,23854040
Base 13	MSE	24,93910822	23,74543323	24,55700640	5,80974792	9,16086600	5,19198999	5,78231816
	VAR	24,89978644	23,64743673	24,55577896	5,18387921	1,10748148	4,73781674	0,92379342
	LÍMITE INFERIOR	0,70826856	0,59105910	0,53581252	0,71507110	0,74912900	0,72124313	0,72639613
	LÍMITE SUPERIOR	0,87646001	0,86277583	0,86296242	0,88137055	0,81693010	0,87893479	0,81646759
Base 14-71	MSE	55,45733920	26,45851997	36,42948692	16,99596192	2,44606540	16,86933864	1,70750566
	VAR	36,99490870	24,00890526	32,04623136	11,35959697	1,83497883	10,70159141	1,66062470
	LÍMITE INFERIOR	-0,52151543	-0,51937374	-0,51799612	-0,51875369	-0,51240369	-0,51802297	-0,51539499
	LÍMITE SUPERIOR	-0,47189034	-0,47099053	-0,47208652	-0,47046279	-0,49006070	-0,47102959	-0,49113093

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 14-72	MSE	0,58733639	0,54356334	0,48817205	0,53322955	0,58805984	0,50644795	0,80464049
	VAR	0,57898724	0,54354366	0,48794137	0,53306042	0,25916113	0,50584905	0,29294344
	LÍMITE INFERIOR	0,20225625	0,19765676	0,15285763	0,24691851	0,30451700	0,24911283	0,24138340
	LÍMITE SUPERIOR	0,44829705	0,43920100	0,45613803	0,35198001	0,35022704	0,34688344	0,33736662
Base 15	MSE	8,37950860	8,46712578	13,57904834	1,51445925	2,89638324	1,31363923	1,52393082
	VAR	8,36014434	8,41061509	13,39560064	1,46290986	0,94161290	1,26329374	1,08852323

Cuadro 4.9: Resumen de resultados de la estimación de la autocorrelación de orden 1, series del tipo $Pj7$

Estimación de la varianza.

En la tabla 4.10 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la varianza para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_1 , es decir las series del tipo $Pj4$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	LÍMITE INFERIOR	0,00165367	0,00162531	0,00151276	0,00328158	0,00333789	0,00330857	0,00328170
	LÍMITE SUPERIOR	0,00696700	0,00724718	0,00724487	0,00395576	0,00384556	0,00396882	0,00374800
	MSE	0,00410866	0,00442246	0,00439194	0,00007130	0,00004423	0,00006883	0,00004739
	VAR	0,00410790	0,00442229	0,00438168	0,00006911	0,00004049	0,00006592	0,00004235

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,00073228	0,00073740	0,00069949	0,00165395	0,00165016	0,00165160	0,00180679
	LÍMITE SUPERIOR	0,00344133	0,00351892	0,00373037	0,00206162	0,00188838	0,00204670	0,00180680
	MSE	0,00130433	0,00132541	0,00140819	0,00002775	0,00001405	0,00002748	0,00007239
	VAR	0,00129630	0,00132186	0,00140613	0,00002555	0,00001185	0,00002570	0,00000846
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,02909161	0,02804510	0,02899285	0,05367072	0,06257011	0,05363076	0,06421815
	LÍMITE SUPERIOR	0,10592025	0,10267503	0,11314265	0,08038669	0,06726385	0,08035538	0,06427989
	MSE	1,32608421	1,31031085	1,53748595	0,14088326	0,26433904	0,14402938	0,41036488
	VAR	1,32508387	1,30592150	1,53349727	0,12810160	0,06955385	0,13101413	0,05729528
Base 4	LÍMITE INFERIOR	0,00302656	0,00302704	0,00303175	0,00332780	0,00344516	0,00331553	0,00353174
	LÍMITE SUPERIOR	0,00436680	0,00428460	0,00426993	0,00373451	0,00366775	0,00368646	0,00354941
	MSE	0,00030341	0,00026764	0,00026342	0,00003135	0,00002724	0,00002739	0,00009234
	VAR	0,00030341	0,00026734	0,00026314	0,00003131	0,00001337	0,00002739	0,00001331
Base 5	LÍMITE INFERIOR	0,00133048	0,00136166	0,00132922	0,00149666	0,00149529	0,00149979	0,00152201
	LÍMITE SUPERIOR	0,00188839	0,00191323	0,00197204	0,00174551	0,00161594	0,00174698	0,00163880
	MSE	0,00007414	0,00006966	0,00008795	0,00001292	0,00000488	0,00001265	0,00000319
	VAR	0,00007399	0,00006963	0,00008752	0,00001202	0,00000333	0,00001166	0,00000319
Base 6	LÍMITE INFERIOR	0,00926841	0,00922867	0,00913193	0,01120237	0,01179671	0,01119143	0,01154546
	LÍMITE SUPERIOR	0,01625794	0,01598792	0,01568553	0,01278534	0,01252608	0,01267587	0,01271362
	MSE	0,00717082	0,00704540	0,00689419	0,00040136	0,00060767	0,00034998	0,00025153
	VAR	0,00716786	0,00704401	0,00689401	0,00040073	0,00019850	0,00034994	0,00017780
	LÍMITE INFERIOR	0,02745769	0,02804199	0,02553475	0,04033757	0,04158697	0,04034996	0,04091819
	LÍMITE SUPERIOR	0,05970516	0,06033623	0,06352206	0,04616602	0,04583889	0,04613664	0,04508079

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 7	MSE	0,18464080	0,17500780	0,24932038	0,00600201	0,00580039	0,00563712	0,00303268
	VAR	0,18409140	0,17498701	0,24921323	0,00575638	0,00365351	0,00532558	0,00293842
Base 8	LÍMITE INFERIOR	0,00221348	0,00222054	0,00221145	0,00235215	0,00232122	0,00236588	0,00232494
	LÍMITE SUPERIOR	0,00300750	0,00301099	0,00294290	0,00265850	0,00253079	0,00266410	0,00259744
	MSE	0,00009280	0,00009575	0,00008286	0,00001615	0,00002020	0,00001500	0,00001542
	VAR	0,00009222	0,00009572	0,00008274	0,00001582	0,00001050	0,00001464	0,00001377
Base 9	LÍMITE INFERIOR	0,03176338	0,03183293	0,03121442	0,03692933	0,03691520	0,03702079	0,03658251
	LÍMITE SUPERIOR	0,05037613	0,05109041	0,05055410	0,04241942	0,04005182	0,04237517	0,03996896
	MSE	0,07230251	0,07301896	0,07640339	0,00623775	0,00416474	0,00591092	0,00462305
	VAR	0,07228004	0,07290211	0,07640329	0,00599023	0,00276079	0,00560609	0,00295897
Base 10	LÍMITE INFERIOR	0,00233064	0,00228394	0,00229577	0,00237907	0,00243512	0,00239933	0,00243930
	LÍMITE SUPERIOR	0,00299217	0,00293673	0,00291609	0,00269963	0,00266561	0,00268351	0,00265494
	MSE	0,00005903	0,00005500	0,00005112	0,00001391	0,00000720	0,00001131	0,00000710
	VAR	0,00004919	0,00005500	0,00005106	0,00001387	0,00000685	0,00001131	0,00000662
Base 11	LÍMITE INFERIOR	0,00829819	0,00864364	0,00866326	0,01023117	0,01089493	0,01027861	0,01083327
	LÍMITE SUPERIOR	0,01454805	0,01485716	0,01447820	0,01245105	0,01222500	0,01229714	0,01241461
	MSE	0,00836399	0,00784158	0,00697974	0,00095656	0,00135383	0,00083867	0,00106565
	VAR	0,00831198	0,00783181	0,00697316	0,00095035	0,00061740	0,00083781	0,00054365
Base 12	LÍMITE INFERIOR	0,02327130	0,02332889	0,02323101	0,02286747	0,02315652	0,02290728	0,02329108
	LÍMITE SUPERIOR	0,02605274	0,02601591	0,02613435	0,02682281	0,02577117	0,02665227	0,02617289
	MSE	0,00148331	0,00145507	0,00161440	0,00280665	0,00140909	0,00248391	0,00159941
	VAR	0,00146764	0,00141417	0,00157570	0,00280195	0,00133839	0,00247856	0,00157622

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 13	LÍMITE INFERIOR	0,00224330	0,00230172	0,00228413	0,00327013	0,00355467	0,00326822	0,00330711
	LÍMITE SUPERIOR	0,00521816	0,00531645	0,00542326	0,00405583	0,00355480	0,00396808	0,00374165
	MSE	0,00145786	0,00142269	0,00153338	0,00008112	0,00015984	0,00007660	0,00003184
	VAR	0,00145467	0,00142233	0,00153255	0,00007591	0,00002031	0,00007065	0,00003184
Base 14	LÍMITE INFERIOR	0,00026568	0,00025916	0,00026190	0,00035820	0,00036240	0,00035839	0,00036573
	LÍMITE SUPERIOR	0,00063239	0,00062124	0,00062707	0,00039990	0,00039342	0,00039977	0,00039853
	MSE	0,00002377	0,00002329	0,00002142	0,00000038	0,00000021	0,00000038	0,00000026
	VAR	0,00002375	0,00002328	0,00002133	0,00000038	0,00000021	0,00000038	0,00000020
Base 15	LÍMITE INFERIOR	0,00207923	0,00209197	0,00208174	0,00272218	0,00284064	0,00272805	0,00273991
	LÍMITE SUPERIOR	0,00413272	0,00424699	0,00412442	0,00306522	0,00301616	0,00304581	0,00301652
	MSE	0,00053986	0,00055024	0,00053925	0,00001590	0,00002713	0,00001387	0,00001033
	VAR	0,00053955	0,00054961	0,00053924	0,00001556	0,00000939	0,00001371	0,00001031

Cuadro 4.10: Resumen de resultados de la estimación de la varianza, series del tipo $Pj4$

En la tabla 4.11 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la varianza para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_2 , es decir las series del tipo $Pj5$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	0,000469845	0,000500246	0,000510953	0,000939303	0,000984277	0,000936195	0,000931053
	LÍMITE SUPERIOR	0,002255604	0,002217687	0,002281633	0,001098070	0,001031750	0,001093019	0,001018069
	MSE	0,000370993	0,000342635	0,000323481	0,000003435	0,000004631	0,000003413	0,000003283

Base 1		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	0,000370801	0,000342634	0,000323320	0,000003312	0,000001430	0,000003313	0,000001955
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,000301558	0,000307508	0,000265306	0,000596236	0,000593268	0,000598207	0,000591085
	LÍMITE SUPERIOR	0,001255199	0,001209846	0,001277214	0,000734568	0,000685876	0,000738702	0,000677754
	MSE	0,000147619	0,000143553	0,000175013	0,000003156	0,000001915	0,000002998	0,000002052
	VAR	0,000147569	0,000143513	0,000174790	0,000002849	0,000001780	0,000002663	0,000001671
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,009990184	0,010638816	0,009177344	0,020639986	0,023052852	0,020580829	0,018873315
	LÍMITE SUPERIOR	0,042195503	0,043150665	0,044443863	0,028414193	0,024900414	0,028439267	0,026395208
	MSE	0,223559639	0,225024197	0,267209459	0,011805592	0,022711884	0,012080982	0,016420219
	VAR	0,223559191	0,224571290	0,266250166	0,010745075	0,006392297	0,011099151	0,014198715
Base 4	LÍMITE INFERIOR	0,001237546	0,001231339	0,001238244	0,001420744	0,001489845	0,001423484	0,001404154
	LÍMITE SUPERIOR	0,001894937	0,001886194	0,001914447	0,001590941	0,001552469	0,001581667	0,001512677
	MSE	0,000077619	0,000077966	0,000077165	0,000005317	0,000007800	0,000004769	0,000005180
	VAR	0,000077517	0,000077939	0,000077036	0,000005304	0,000002128	0,000004757	0,000002463
Base 5	LÍMITE INFERIOR	0,000204590	0,000205701	0,000203250	0,000240162	0,000250458	0,000241443	0,000240727
	LÍMITE SUPERIOR	0,000314549	0,000311820	0,000327613	0,000281798	0,000251045	0,000279379	0,000257285
	MSE	0,000002793	0,000002615	0,000003338	0,000000356	0,000000855	0,000000328	0,000000278
	VAR	0,000002779	0,000002611	0,000003325	0,000000333	0,000000115	0,000000298	0,000000105
Base 6	LÍMITE INFERIOR	0,002299136	0,002288678	0,002275772	0,002864367	0,002979740	0,002872619	0,003092728
	LÍMITE SUPERIOR	0,004192760	0,004242573	0,004382868	0,003244567	0,003224932	0,003236586	0,003100732
	MSE	0,000558964	0,000565419	0,000635513	0,000024090	0,000025047	0,000021160	0,000081273
	VAR	0,000558626	0,000565364	0,000634263	0,000024079	0,000012011	0,000021121	0,000012047
	LÍMITE INFERIOR	0,019350393	0,019737928	0,018002318	0,030313756	0,029490025	0,030477190	0,031349132

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 7	LÍMITE SUPERIOR	0,045688784	0,046951848	0,048562780	0,034863512	0,031742491	0,034967156	0,034494543
	MSE	0,121778023	0,125722579	0,158251200	0,003639116	0,024406244	0,003540702	0,004526929
	VAR	0,121010193	0,125722562	0,158234168	0,003339074	0,005651526	0,003156471	0,002183065
Base 8	LÍMITE INFERIOR	0,000390185	0,000389146	0,000384996	0,000479825	0,000499437	0,000482382	0,000492507
	LÍMITE SUPERIOR	0,000804853	0,000807034	0,000802012	0,000542546	0,000538763	0,000539314	0,000543232
	MSE	0,000022176	0,000020828	0,000023432	0,000000638	0,000000858	0,000000563	0,000000514
	VAR	0,000022176	0,000020784	0,000023432	0,000000633	0,000000361	0,000000559	0,000000355
Base 9	LÍMITE INFERIOR	0,008645796	0,008714704	0,008290004	0,010501617	0,010869379	0,010516597	0,010482830
	LÍMITE SUPERIOR	0,015155174	0,015513139	0,015521550	0,012186544	0,011696488	0,012023342	0,011507052
	MSE	0,008719258	0,008740742	0,009729742	0,000526226	0,000418515	0,000485001	0,000251592
	VAR	0,008684102	0,008736967	0,009726663	0,000497885	0,000217056	0,000454863	0,000224927
Base 10	LÍMITE INFERIOR	0,000555334	0,000553466	0,000553682	0,000562805	0,000583468	0,000568604	0,000562039
	LÍMITE SUPERIOR	0,000669686	0,000663631	0,000661937	0,000638106	0,000632047	0,000636817	0,000613928
	MSE	0,000001637	0,000001658	0,000001561	0,000000791	0,000000552	0,000000634	0,000000545
	VAR	0,000001611	0,000001658	0,000001561	0,000000788	0,000000356	0,000000630	0,000000399
Base 11	LÍMITE INFERIOR	0,002420210	0,002425835	0,002609417	0,003080022	0,003224962	0,003106466	0,003119576
	LÍMITE SUPERIOR	0,004436342	0,004480530	0,004481554	0,003634078	0,003625726	0,003613704	0,003562682
	MSE	0,000853437	0,000837434	0,000684851	0,000063628	0,000068786	0,000053973	0,000042490
	VAR	0,000846902	0,000837160	0,000682798	0,000063628	0,000039869	0,000053957	0,000042486
	LÍMITE INFERIOR	0,006740046	0,006702691	0,006734430	0,006710151	0,006751171	0,006751354	0,006754429
	LÍMITE SUPERIOR	0,007702834	0,007642090	0,007678487	0,007739574	0,007360493	0,007719266	0,007398034
	MSE	0,000178778	0,000167839	0,000172136	0,000186280	0,000125305	0,000173038	0,000101866

Base 12

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	0,000172583	0,000167503	0,000170339	0,000186017	0,000082151	0,000172300	0,000083539
Base 13	LÍMITE INFERIOR	0,001024467	0,001010873	0,000934587	0,001495248	0,001569130	0,001503188	0,001516974
	LÍMITE SUPERIOR	0,002527382	0,002470080	0,002604471	0,001823208	0,001679802	0,001813310	0,001677524
	MSE	0,000343415	0,000354441	0,000434299	0,000015962	0,000014362	0,000014647	0,000004692
	VAR	0,000342238	0,000354222	0,000434277	0,000014606	0,000005519	0,000012714	0,000004653
Base 14	LÍMITE INFERIOR	0,000093177	0,000092831	0,000096094	0,000177203	0,000183125	0,000178172	0,000177992
	LÍMITE SUPERIOR	0,000412099	0,000417015	0,000414040	0,000200976	0,000199011	0,000201039	0,000193836
	MSE	0,000017075	0,000017329	0,000015669	0,000000123	0,000000111	0,000000112	0,000000091
	VAR	0,000017059	0,000017325	0,000015658	0,000000123	0,000000066	0,000000112	0,000000070
Base 15	LÍMITE INFERIOR	0,000776068	0,000784860	0,000790511	0,001074987	0,001092900	0,001075728	0,001090695
	LÍMITE SUPERIOR	0,001808322	0,001797385	0,001752712	0,001213583	0,001200375	0,001202244	0,001198254
	MSE	0,000124626	0,000116840	0,000113372	0,000002406	0,000001511	0,000002110	0,000001462
	VAR	0,000124355	0,000116795	0,000113312	0,000002372	0,000001327	0,000002097	0,000001377

Cuadro 4.11: Resumen de resultados de la estimación de la varianza, series del tipo $Pj5$

En la tabla 4.12 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la varianza para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_3 , es decir las series del tipo $Pj6$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	0,00013129	0,00013592	0,00013116	0,00022640	0,00021694	0,00022675	0,00022823
	LÍMITE SUPERIOR	0,00058604	0,00057839	0,00055178	0,00029352	0,00027400	0,00029077	0,00027279

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	MSE	0,00001839	0,00001867	0,00001820	0,00000059	0,00000055	0,00000058	0,00000058
	VAR	0,00001835	0,00001867	0,00001815	0,00000047	0,00000054	0,00000045	0,00000047
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,00010559	0,00010427	0,00009816	0,00015375	0,00016329	0,00015387	0,00017008
	LÍMITE SUPERIOR	0,00030674	0,00031492	0,00029527	0,00020254	0,00018749	0,00019580	0,00017009
	MSE	0,00000622	0,00000616	0,00000666	0,00000037	0,00000024	0,00000032	0,00000102
	VAR	0,00000622	0,00000612	0,00000666	0,00000035	0,00000014	0,00000031	0,00000008
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,00116750	0,00115602	0,00106395	0,00240851	0,00227205	0,00240764	0,00255945
	LÍMITE SUPERIOR	0,00490487	0,00495018	0,00506088	0,00286553	0,00264157	0,00285545	0,00271318
	MSE	0,00294553	0,00295191	0,00346000	0,00004367	0,00008892	0,00004391	0,00008134
	VAR	0,00294051	0,00295080	0,00345970	0,00003935	0,00004216	0,00004059	0,00002224
Base 4	LÍMITE INFERIOR	0,00013891	0,00013590	0,00013585	0,00014349	0,00014880	0,00014439	0,00014422
	LÍMITE SUPERIOR	0,00018066	0,00017496	0,00017454	0,00016981	0,00016500	0,00016851	0,00016469
	MSE	0,00000032	0,00000028	0,00000029	0,00000012	0,00000014	0,00000011	0,00000008
	VAR	0,00000030	0,00000028	0,00000028	0,00000012	0,00000007	0,00000010	0,00000008
Base 5	LÍMITE INFERIOR	0,00023191	0,00023125	0,00022934	0,0002097	0,0001958	0,0002129	0,00018066
	LÍMITE SUPERIOR	0,00030004	0,00030025	0,00030666	0,0003611	0,0003003	0,0003723	0,00022353
	MSE	0,00000119	0,00000106	0,00000148	0,00000042	0,00000046	0,00000043	0,00000967
	VAR	0,00000107	0,00000100	0,00000132	0,00000039	0,00000033	0,00000038	0,00000043
Base 6	LÍMITE INFERIOR	0,00066112	0,00066128	0,00066065	0,00066338	0,00064685	0,00066467	0,00065047
	LÍMITE SUPERIOR	0,00077302	0,00077238	0,00076774	0,00077492	0,00076222	0,00077120	0,00075219
	MSE	0,00000204	0,00000206	0,00000194	0,00000206	0,00000236	0,00000180	0,00000231
	VAR	0,00000200	0,00000205	0,00000193	0,00000205	0,00000225	0,00000179	0,00000188

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 7	LÍMITE INFERIOR	0,00045352	0,00045850	0,00043947	0,00052449	0,00051156	0,00052681	0,00054779
	LÍMITE SUPERIOR	0,00067507	0,00067380	0,00070192	0,00060523	0,00056393	0,00060110	0,00058055
	MSE	0,00000849	0,00000811	0,00001093	0,00000110	0,00000095	0,00000097	0,00000117
	VAR	0,00000849	0,00000810	0,00001091	0,00000098	0,00000052	0,00000087	0,00000040
Base 8	LÍMITE INFERIOR	0,00063198	0,00063874	0,00063346	0,00063305	0,00069511	0,00064010	0,00069371
	LÍMITE SUPERIOR	0,00077330	0,00078297	0,00078711	0,00090353	0,00073349	0,00087990	0,00069371
	MSE	0,00000358	0,00000344	0,00000422	0,00000829	0,00000420	0,00000806	0,00002612
	VAR	0,00000354	0,00000332	0,00000405	0,00000742	0,00000117	0,00000636	0,00000260
Base 9	LÍMITE INFERIOR	0,00279507	0,00266429	0,00255845	0,00229800	0,00146272	0,00228747	0,00151507
	LÍMITE SUPERIOR	0,00401346	0,00383262	0,00396203	0,00530607	0,00467611	0,00508737	0,00474776
	MSE	0,00040595	0,00034587	0,00049574	0,00151449	0,00271199	0,00141806	0,00266214
	VAR	0,00028329	0,00031122	0,00044634	0,00131432	0,00267676	0,00122050	0,00266212
Base 10	LÍMITE INFERIOR	0,00031948	0,00030108	0,00030210	0,00029080	0,00024676	0,00029842	0,00024430
	LÍMITE SUPERIOR	0,00044856	0,00043938	0,00043001	0,00053582	0,00046133	0,00051927	0,00046413
	MSE	0,00000317	0,00000262	0,00000270	0,00000607	0,00000712	0,00000580	0,00000712
	VAR	0,00000209	0,00000250	0,00000249	0,00000523	0,00000708	0,00000434	0,00000711
Base 11	LÍMITE INFERIOR	0,00115212	0,00116402	0,00118365	0,00131395	0,00129568	0,00131053	0,00123288
	LÍMITE SUPERIOR	0,00187293	0,00185872	0,00188161	0,00178987	0,00166121	0,00178995	0,00161873
	MSE	0,00010724	0,00009806	0,00009689	0,00004146	0,00002970	0,00003859	0,00004997
	VAR	0,00010699	0,00009775	0,00009580	0,00003881	0,00002837	0,00003648	0,00003784
	LÍMITE INFERIOR	0,00136773	0,00132667	0,00129697	0,00139285	0,00147596	0,00140751	0,00149259
	LÍMITE SUPERIOR	0,00167120	0,00163708	0,00166024	0,00159273	0,00154327	0,00161999	0,00152323

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 12	MSE	0,00001798	0,00001712	0,00002345	0,00000767	0,00001122	0,00000759	0,00001618
	VAR	0,00001551	0,00001710	0,00002342	0,00000714	0,00000294	0,00000688	0,00000296
Base 13	LÍMITE INFERIOR	0,00012313	0,00012358	0,00012361	0,00018625	0,00019893	0,00018747	0,00019960
	LÍMITE SUPERIOR	0,00035342	0,00036459	0,00033805	0,00024227	0,00020650	0,00023840	0,00021175
	MSE	0,00000746	0,00000766	0,00000662	0,00000034	0,00000012	0,00000029	0,00000022
	VAR	0,00000745	0,00000766	0,00000662	0,00000030	0,00000004	0,00000026	0,00000006
Base 14-61	LÍMITE INFERIOR	0,00007943	0,00005674	0,00005386	7,67162E-05	8,33506E-05	7,76404E-05	1,05661E-04
	LÍMITE SUPERIOR	0,00017144	0,00015892	0,00015972	1,81587E-04	1,16675E-04	1,77193E-04	1,05689E-04
	MSE	0,00000243	0,00000199	0,00000222	1,47612E-06	4,18965E-07	1,46816E-06	9,62265E-07
	VAR	0,00000155	0,00000198	0,00000218	1,27958E-06	3,63230E-07	1,24966E-06	1,66131E-07
Base 14-62	LÍMITE INFERIOR	0,00004467	0,00004502	0,00004524	0,00004633	0,00004710	0,00004652	0,00004685
	LÍMITE SUPERIOR	0,00005200	0,00005218	0,00005227	0,00005144	0,00005074	0,00005132	0,00005048
	MSE	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000000	0,00000001	0,00000000
	VAR	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000000	0,00000001	0,00000000
Base 15	LÍMITE INFERIOR	0,00023610	0,00023860	0,00023846	0,00027832	0,00027610	0,00028071	0,00027763
	LÍMITE SUPERIOR	0,00041345	0,00040842	0,00040849	0,00032635	0,00030824	0,00032449	0,00031519
	MSE	0,00000360	0,00000322	0,00000338	0,00000029	0,00000030	0,00000023	0,00000021
	VAR	0,00000359	0,00000322	0,00000338	0,00000029	0,00000020	0,00000023	0,00000020

Cuadro 4.12: Resumen de resultados de la estimación de la varianza, series del tipo $Pj6$

En la tabla 4.13 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación de la varianza para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_3 , es decir las series del tipo $Pj7$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando

métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	LÍMITE INFERIOR	0,0001018142	0,0001044874	0,0001007787	0,0001725483	0,0001884513	0,0001738901	0,0001871233
	LÍMITE SUPERIOR	0,0004304804	0,0004264240	0,0004411792	0,0002392609	0,0001907428	0,0002314132	0,0001902054
	MSE	0,0000111281	0,0000105059	0,0000107814	0,0000004032	0,0000007151	0,0000003559	0,0000007321
	VAR	0,0000111227	0,0000105049	0,0000107323	0,0000003237	0,0000001698	0,0000002785	0,0000001855
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,0000799983	0,0000831894	0,0000794312	0,0001208030	0,0001197442	0,0001217403	0,0001282844
	LÍMITE SUPERIOR	0,0002339216	0,0002270707	0,0002341092	0,0001587339	0,0001389488	0,0001575534	0,0001475143
	MSE	0,0000040651	0,0000034764	0,0000037038	0,0000002439	0,0000001609	0,0000002193	0,0000001799
	VAR	0,0000040558	0,0000034652	0,0000036951	0,0000002321	0,0000000896	0,0000002096	0,0000000990
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,0008480217	0,0008410437	0,0008403220	0,0017929925	0,0017739435	0,0017981491	0,0017839242
	LÍMITE SUPERIOR	0,0036041128	0,0036600501	0,0039554777	0,0021455800	0,0020576803	0,0021312005	0,0020617220
	MSE	0,0016156790	0,0016494574	0,0019349754	0,0000232521	0,0000193330	0,0000238859	0,0000193685
	VAR	0,0016150052	0,0016465781	0,0019345263	0,0000214463	0,0000193303	0,0000215286	0,0000186607
	LÍMITE INFERIOR	0,0001047964	0,0001031226	0,0001049647	0,000109918	0,0001026604	0,000110820	0,000108724
	LÍMITE SUPERIOR	0,0001374412	0,0001368669	0,0001341672	0,000129482	0,0001119138	0,000129303	0,000124052
	MSE	0,0000001983	0,0000002005	0,0000001605	0,000000068	0,0000002776	0,000000061	0,000000055

Base 4		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	0,0000001876	0,0000002004	0,0000001596	0,000000066	0,0000000165	0,000000057	0,000000050
	LÍMITE INFERIOR	0,0002445736	0,0002436295	0,0002439756	0,0002254625	0,0001785946	0,0002267687	0,0002583337
	LÍMITE SUPERIOR	0,0003124407	0,0003092218	0,0003193629	0,0003798185	0,0003301105	0,0003907504	0,0002995214
Base 5	MSE	0,0000011342	0,0000010910	0,0000014273	0,0000045882	0,0000267707	0,0000049291	0,0000089333
	VAR	0,0000010236	0,0000010172	0,0000012509	0,0000041564	0,0000131850	0,0000042187	0,0000036402
	LÍMITE INFERIOR	0,0004517408	0,0004493850	0,0004514393	0,0004477007	0,0004508041	0,0004493907	0,0004494813
	LÍMITE SUPERIOR	0,0005185599	0,0005144653	0,0005150287	0,0005232959	0,0005102260	0,0005246375	0,0005117805
Base 6	MSE	0,0000007304	0,0000007066	0,0000006875	0,0000009385	0,0000006075	0,0000009017	0,0000006170
	VAR	0,0000007071	0,0000007029	0,0000006849	0,0000009332	0,0000005931	0,0000009007	0,0000006148
	LÍMITE INFERIOR	0,0003451724	0,0003506392	0,0003456577	0,0004070870	0,0004262983	0,0004079748	0,0004230422
	LÍMITE SUPERIOR	0,0005210592	0,0005279643	0,0005222855	0,0004642441	0,0004517053	0,0004641447	0,0004545189
Base 7	MSE	0,0000050592	0,0000050259	0,0000054376	0,0000005726	0,0000007004	0,0000005129	0,0000007510
	VAR	0,0000050538	0,0000050168	0,0000054189	0,0000005213	0,0000002267	0,0000004734	0,0000002992
	LÍMITE INFERIOR	0,0004573682	0,0004613853	0,0004621529	0,0004585288	0,0005144480	0,0004657783	0,0005108323
	LÍMITE SUPERIOR	0,0005602915	0,0005592998	0,0005666505	0,0006137535	0,0005145315	0,0006236737	0,0005229571
	MSE	0,0000018751	0,0000017098	0,0000020703	0,0000036635	0,0000045529	0,0000035743	0,0000031361

Base 8		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	0,0000018747	0,0000016731	0,0000019758	0,0000033249	0,0000005916	0,0000028132	0,0000006217
	LÍMITE INFERIOR	0,0019657554	0,0019094189	0,0018546862	0,0016562841	0,0010310139	0,0016670044	0,0022369640
	LÍMITE SUPERIOR	0,0028046761	0,0027259806	0,0027933794	0,0037001490	0,0033310478	0,0035799383	0,0023710265
Base 9	MSE	0,0002033409	0,0001647168	0,0002383430	0,0007388573	0,0014503033	0,0007391431	0,0017460402
	VAR	0,0001549063	0,0001528386	0,0002114160	0,0006487671	0,0014068864	0,0006209914	0,0006830922
	LÍMITE INFERIOR	0,0002554274	0,0002364243	0,0002353148	0,0002263887	0,0001611321	0,0002346361	0,0001955823
	LÍMITE SUPERIOR	0,0003413373	0,0003402378	0,0003392328	0,0004312629	0,0002048409	0,0003984562	0,0003592900
Base 10	MSE	0,0000019356	0,0000015116	0,0000016607	0,0000040448	0,0000158663	0,0000033435	0,0000040411
	VAR	0,0000012049	0,0000014383	0,0000015281	0,0000035892	0,0000002599	0,0000026336	0,0000040371
	LÍMITE INFERIOR	0,0008602430	0,0008795012	0,0008676582	0,0010027553	0,0009324777	0,0009987573	0,0010954465
	LÍMITE SUPERIOR	0,0013910507	0,0014098180	0,0014004507	0,0013498229	0,0012195450	0,0013352993	0,0012030069
Base 11	MSE	0,0000597357	0,0000561917	0,0000603087	0,0000219595	0,0000297170	0,0000204553	0,0000316370
	VAR	0,0000597026	0,0000559540	0,0000600274	0,0000201895	0,0000214406	0,0000198274	0,0000110233
	LÍMITE INFERIOR	0,0012820637	0,0012397813	0,0012372756	0,0013029034	0,0013539400	0,0013066977	0,0012148806
	LÍMITE SUPERIOR	0,0015379224	0,0015104394	0,0015324127	0,0014969790	0,0014525325	0,0014944189	0,0013319093
	MSE	0,0000145948	0,0000129454	0,0000162167	0,0000072577	0,0000043336	0,0000064914	0,0000310215

Base 12		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	0,0000125403	0,0000129340	0,0000161692	0,0000066729	0,0000023539	0,0000059742	0,0000025245
	LÍMITE INFERIOR	0,0000898154	0,0000930271	0,0000923368	0,0001431517	0,0001553364	0,0001427399	0,0001562837
	LÍMITE SUPERIOR	0,0002748606	0,0002888475	0,0002729495	0,0001892824	0,0001553383	0,0001841075	0,0001568897
Base 13	MSE	0,0000048649	0,0000049758	0,0000045377	0,0000002059	0,0000003625	0,0000001904	0,0000002220
	VAR	0,0000048599	0,0000049756	0,0000045376	0,0000001853	0,0000000331	0,0000001760	0,0000000304
	LÍMITE INFERIOR	0,0000728157	0,0000537781	0,0000505539	0,0000728117	0,0000814206	0,0000759269	0,0000785502
	LÍMITE SUPERIOR	0,0001610738	0,0001501233	0,0001564865	0,0001819165	0,0001200747	0,0001762659	0,0001161365
Base 14-71	MSE	0,0000022849	0,0000018617	0,0000022502	0,0000014873	0,0000003004	0,0000013987	0,0000004012
	VAR	0,0000015131	0,0000018456	0,0000021859	0,0000013066	0,0000002989	0,0000011651	0,0000003369
	LÍMITE INFERIOR	0,0000387021	0,0000392014	0,0000389511	0,0000405707	0,0000428846	0,0000405034	0,0000403652
	LÍMITE SUPERIOR	0,0000460538	0,0000465263	0,0000468228	0,0000451351	0,0000443110	0,0000451673	0,0000435681
Base 14-72	MSE	0,0000000129	0,0000000125	0,0000000138	0,0000000049	0,0000000108	0,0000000049	0,0000000054
	VAR	0,0000000125	0,0000000125	0,0000000138	0,0000000049	0,0000000024	0,0000000049	0,0000000028
	LÍMITE INFERIOR	0,0001736354	0,0001747012	0,0001718662	0,0002035434	0,0002163665	0,0002048955	0,0002070289
	LÍMITE SUPERIOR	0,0003091446	0,0003021969	0,0003045005	0,0002379611	0,0002283085	0,0002365287	0,0002364000
	MSE	0,0000019522	0,0000019170	0,0000020172	0,0000001467	0,0000002699	0,0000001282	0,0000001214

Base 15	MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
VAR	0,0000019465	0,0000019162	0,0000020172	0,0000001446	0,0000000787	0,0000001268	0,0000001081

Cuadro 4.13: Resumen de resultados de la estimación de la varianza, series del tipo $Pj7$

Estimación del coeficiente de variación.

En la tabla 4.14 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación del coeficiente de variación para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_1 , es decir las series del tipo $Pj4$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

234

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	LÍMITE INFERIOR	0,7392973	0,7483066	0,7129831	0,9355323	0,9433371	0,9389506	0,9350363
	LÍMITE SUPERIOR	1,2492651	1,2606082	1,2433923	1,0289482	1,0134718	1,0319994	0,9991314
	MSE	47,7000503	50,6141548	53,5663057	1,3658515	0,8605379	1,3245748	0,8690124
	VAR	46,2258198	48,2672882	50,3355455	1,3148795	0,7731061	1,2580174	0,7870213
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,5238915	0,5343446	0,5084776	0,7378066	0,7349989	0,7376858	0,7673501
	LÍMITE SUPERIOR	0,9604328	0,9690145	0,9678283	0,8234950	0,7872690	0,8206225	0,7673508
	MSE	36,1907754	38,4389847	44,3436520	1,3358847	0,5899666	1,3213759	3,8100436
	VAR	35,6559292	37,5928412	41,6329786	1,1802790	0,5322485	1,1897016	0,4288661

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	1,4156784	1,3937301	1,4114790	1,3872337	1,4987945	1,3876067	1,5205167
	LÍMITE SUPERIOR	1,6531512	1,6488070	1,6578358	1,6830758	1,5583235	1,6952594	1,5225883
Base 3	MSE	22,8473328	22,8798837	24,1991610	20,9858741	41,9806174	21,5044009	66,9429636
	VAR	17,5087115	19,0995442	18,5756282	19,0012326	11,8477038	19,4682802	10,3106813
	LÍMITE INFERIOR	0,6107145	0,6112106	0,6123449	0,6291748	0,6404840	0,6285126	0,6471592
	LÍMITE SUPERIOR	0,7007190	0,6929590	0,6977753	0,6676544	0,6578816	0,6638737	0,6472155
Base 4	MSE	1,3972327	1,2105487	1,2179795	0,2741757	0,3017089	0,2360074	0,9376854
	VAR	1,3790664	1,2043435	1,2109996	0,2649169	0,1159327	0,2311875	0,1189426
	LÍMITE INFERIOR	0,5147688	0,5141399	0,5120875	0,5201500	0,5197355	0,5207304	0,5242990
	LÍMITE SUPERIOR	0,5567269	0,5567661	0,5568724	0,5611629	0,5404752	0,5621340	0,5442278
Base 5	MSE	0,4237608	0,4266414	0,5098437	0,3717608	0,1389344	0,3636534	0,0913624
	VAR	0,4131472	0,4183677	0,4859435	0,3463163	0,0938067	0,3355142	0,0912693
	LÍMITE INFERIOR	0,8300295	0,8304853	0,8292138	0,8834560	0,9061488	0,8828698	0,8965846
	LÍMITE SUPERIOR	1,0136270	1,0067475	1,0047500	0,9439554	0,9342645	0,9396504	0,9411649
Base 6	MSE	5,3281440	5,2538030	5,0987545	0,5902475	0,9470978	0,5157126	0,3725750
	VAR	5,2825251	5,2309167	5,0723517	0,5889810	0,3025274	0,5155721	0,2660651

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	1,4139627	1,4361999	1,3927375	1,5455761	1,5708036	1,5461838	1,5588139
	LÍMITE SUPERIOR	1,7316753	1,7462752	1,7644157	1,6549228	1,6534180	1,6518899	1,6374525
Base 7	MSE	17,7774993	18,5974208	27,4554055	2,0552478	1,7870169	1,9088772	1,0303328
	VAR	17,7118162	18,2196784	26,5626324	2,0481498	1,3336154	1,8941316	1,0302181
	LÍMITE INFERIOR	0,5373162	0,5385044	0,5359676	0,5458321	0,5423893	0,5473038	0,5428196
	LÍMITE SUPERIOR	0,6015197	0,6046016	0,5993140	0,5803054	0,5661707	0,5808404	0,5736199
Base 8	MSE	0,6868446	0,6701900	0,6579807	0,2068873	0,2501425	0,1922126	0,1966256
	VAR	0,6696249	0,6688114	0,6561432	0,2027388	0,1302392	0,1876644	0,1743250
	LÍMITE INFERIOR	1,1106501	1,1092727	1,1100892	1,1420716	1,1433792	1,1448220	1,1362420
	LÍMITE SUPERIOR	1,2846401	1,2815664	1,2879280	1,2280303	1,1911705	1,2315655	1,1884798
Base 9	MSE	5,6450795	5,5895264	5,7238781	1,5129078	0,7302816	1,4523719	0,8641688
	VAR	5,5903249	5,5051549	5,6796456	1,3487922	0,6040447	1,2666824	0,6512559
	LÍMITE INFERIOR	0,3841490	0,3802656	0,3807409	0,3844080	0,3888988	0,3860440	0,3892005
	LÍMITE SUPERIOR	0,4233669	0,4192352	0,4197639	0,4095501	0,4067735	0,4084956	0,4060411
Base 10	MSE	0,2454369	0,2122820	0,2026811	0,0861028	0,0450302	0,0694651	0,0451946
	VAR	0,1892250	0,2116546	0,2018273	0,0854986	0,0423414	0,0694540	0,0411137

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	0,7293536	0,7335904	0,7341041	0,7604305	0,7848604	0,7622961	0,7827712
	LÍMITE SUPERIOR	0,8577212	0,8611484	0,8607874	0,8389367	0,8309820	0,8339289	0,8376064
Base 11	MSE	3,3546861	3,4981080	3,3125538	1,2150968	1,8236988	1,0640449	1,4292188
	VAR	3,3500157	3,4168559	3,2606186	1,2033802	0,8269343	1,0614637	0,7197354
	LÍMITE INFERIOR	0,5492691	0,5511834	0,5467622	0,5764104	0,5794690	0,5762453	0,5812728
	LÍMITE SUPERIOR	0,6428789	0,6450781	0,6438812	0,6239540	0,6123052	0,6211227	0,6161526
Base 12	MSE	1,5691981	1,6407788	1,7389155	0,4161345	0,1975606	0,3698563	0,2424443
	VAR	1,5616617	1,6406273	1,7357730	0,4103199	0,1945777	0,3639431	0,2310392
	LÍMITE INFERIOR	0,7882265	0,8032319	0,8115956	0,8804731	0,9196686	0,8778922	0,8854125
	LÍMITE SUPERIOR	1,0700918	1,0810046	1,1042317	0,9662384	0,9367424	0,9640999	0,9381534
Base 13	MSE	13,2877724	13,3175667	13,2239814	1,3781678	1,5981110	1,2839827	0,7817350
	VAR	13,2706316	13,1171666	12,9182528	1,3470116	0,3896889	1,2598289	0,5568849
	LÍMITE INFERIOR	0,3687445	0,3651803	0,3670759	0,4213276	0,4236418	0,4212346	0,4256211
	LÍMITE SUPERIOR	0,5469331	0,5408626	0,5473893	0,4452554	0,4414857	0,4452472	0,4445618
Base 14	MSE	6,0521666	6,1117864	5,7851888	0,1249886	0,0702498	0,1259911	0,0822697
	VAR	6,0252898	6,0447634	5,6643249	0,1249437	0,0700533	0,1259817	0,0672361

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	0,5050536	0,5074604	0,5058339	0,5643187	0,5763384	0,5649166	0,5660886
	LÍMITE SUPERIOR	0,6722705	0,6841646	0,6765711	0,5986262	0,5943206	0,5968374	0,5939364
Base 15	MSE	4,0103571	4,0667466	4,0503884	0,1630047	0,2789381	0,1421940	0,1054213
	VAR	3,9674655	4,0185876	4,0258920	0,1604434	0,0998241	0,1411718	0,1053006

Cuadro 4.14: Resumen de resultados de la estimación del coeficiente de variación, series del tipo $Pj4$

En la tabla 4.15 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación del coeficiente de variación para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_2 , es decir las series del tipo $Pj5$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	0,83774278	0,84842095	0,86342750	1,08770174	1,11287283	1,08551442	1,08178173
	LÍMITE SUPERIOR	1,54019076	1,52351898	1,53318242	1,17840524	1,13770471	1,17497562	1,13052172
Base 1	MSE	74,77667418	69,96906652	65,78741090	1,11850921	1,62792556	1,10896019	1,00467513
	VAR	72,78007309	67,64198002	63,03135742	1,05686334	0,47441480	1,05712044	0,60473544
	LÍMITE INFERIOR	0,73301848	0,73112783	0,70075621	0,93060010	0,92908973	0,93223736	0,92750471
	LÍMITE SUPERIOR	1,18323668	1,18090376	1,17336668	1,03203105	0,99860966	1,03715079	0,99380114
	MSE	45,25913399	46,34536160	51,04971068	1,87191279	1,05521936	1,78520126	1,08079466

Base 2		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	43,46734164	44,62365356	48,82335162	1,63513170	1,00260490	1,53094035	0,92844641
	LÍMITE INFERIOR	1,68351040	1,67743408	1,67141814	1,71004544	1,80346816	1,70923491	1,63600231
	LÍMITE SUPERIOR	2,08317614	2,06748236	2,08402537	1,99467491	1,89011045	1,99731600	1,93375791
Base 3	MSE	49,91773768	48,71183012	53,58806256	17,93909343	35,26897826	18,38467475	25,90549923
	VAR	39,44416241	40,28736439	42,11534946	16,94614166	11,26213178	17,48874593	21,37422368
	LÍMITE INFERIOR	0,77080040	0,76581422	0,76735368	0,79960935	0,81914316	0,79996627	0,79656584
	LÍMITE SUPERIOR	0,89117282	0,88620171	0,88851206	0,84728702	0,82820140	0,84640591	0,82575365
Base 4	MSE	2,55783527	2,63180907	2,60827064	0,43966086	0,85648777	0,39695576	0,24521675
	VAR	2,53234231	2,61051318	2,57956384	0,39319946	0,16320184	0,35196594	0,17753657
	LÍMITE INFERIOR	0,56911066	0,56773841	0,56857985	0,58012821	0,59225643	0,58161437	0,58082710
	LÍMITE SUPERIOR	0,62966708	0,62767138	0,63091812	0,62837771	0,59284052	0,62549225	0,60038550
Base 5	MSE	0,89380771	0,90824556	1,02337452	0,49431344	1,14020763	0,45846177	0,37321433
	VAR	0,87777830	0,88900249	0,97403213	0,46160408	0,14943481	0,41412989	0,14037254
	LÍMITE INFERIOR	0,82907256	0,82737289	0,82758537	0,89668327	0,91580287	0,89794549	0,93040714
	LÍMITE SUPERIOR	1,03710139	1,04310836	1,05219067	0,95446750	0,95525321	0,95184403	0,93658710
	MSE	7,42557579	7,51128420	8,57579909	0,56985343	0,52157239	0,49535971	1,79749531

Base 6		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	7,37654576	7,46749247	8,43723170	0,56232544	0,28809154	0,49372547	0,30157759
	LÍMITE INFERIOR	2,21453217	2,23017387	2,22191450	2,29418856	2,28669710	2,30308106	2,32891520
	LÍMITE SUPERIOR	2,51512586	2,54064756	2,57917708	2,45743330	2,32938584	2,46025360	2,44067686
Base 7	MSE	15,57442618	18,41769323	23,43122325	4,69741095	37,31077301	4,50728082	4,79848970
	VAR	15,52666599	17,84951105	22,27164348	4,67209262	7,05847072	4,44976516	3,17098823
	LÍMITE INFERIOR	0,56364947	0,56302298	0,56063194	0,61517093	0,62728833	0,61657435	0,62382170
	LÍMITE SUPERIOR	0,76638863	0,76541547	0,75806547	0,65509788	0,64897208	0,65182787	0,65192151
Base 8	MSE	5,67654280	5,47412373	6,03859590	0,25768179	0,40395082	0,22791278	0,24221728
	VAR	5,61453276	5,39493189	5,99686943	0,24530826	0,14406488	0,21685746	0,13946184
	LÍMITE INFERIOR	1,19994744	1,19990210	1,19662398	1,25751143	1,28053078	1,26037033	1,26060808
	LÍMITE SUPERIOR	1,47671233	1,46086817	1,44572341	1,35577011	1,31145680	1,35236122	1,31966434
Base 9	MSE	12,47264591	12,47341304	12,40654782	2,16970572	2,22878951	2,03726123	0,75302501
	VAR	12,26023900	12,34419917	12,28062527	1,66330274	0,73775410	1,51892171	0,73969253
	LÍMITE INFERIOR	0,41109347	0,41061118	0,41035886	0,41186830	0,41959409	0,41402042	0,41151477
	LÍMITE SUPERIOR	0,44564882	0,44253197	0,44240708	0,43852695	0,43665182	0,43795830	0,43041463
	MSE	0,14887165	0,14827218	0,14334988	0,10060543	0,07122858	0,08040021	0,06782272

Base 10		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	0,14549511	0,14817062	0,14323422	0,10014573	0,04605961	0,08000930	0,04966269
	LÍMITE INFERIOR	1,06379495	1,07501639	1,06977599	1,12001500	1,14732000	1,12461272	1,12826728
	LÍMITE SUPERIOR	1,25132457	1,26454569	1,26303266	1,21855927	1,21093713	1,21262412	1,20784998
Base 11	MSE	7,41705729	7,71498512	8,30730905	1,94858427	2,39483557	1,65290950	1,31622501
	VAR	7,38743801	7,60604251	8,23999352	1,92417186	1,24756347	1,63508948	1,28874593
	LÍMITE INFERIOR	0,59544100	0,58974296	0,59037183	0,62316339	0,62401810	0,62477207	0,62541731
	LÍMITE SUPERIOR	0,70132866	0,69695326	0,70231869	0,66942076	0,65280346	0,66851031	0,65453585
Base 12	MSE	2,15553606	2,13055225	2,23450958	0,37745916	0,22435740	0,35274957	0,18837130
	VAR	2,10796060	2,12850586	2,23450254	0,37353714	0,16212758	0,34668800	0,16583772
	LÍMITE INFERIOR	1,09892542	1,13688434	1,13747978	1,22989404	1,25909190	1,23285263	1,23812893
	LÍMITE SUPERIOR	1,40441534	1,41654013	1,40990196	1,35920811	1,30417371	1,35445990	1,30215958
Base 13	MSE	15,40271428	15,57965955	15,62211769	2,54048111	2,26982903	2,33585951	0,75233469
	VAR	15,40203547	14,95214517	14,70144741	2,33711106	0,91547420	2,04653122	0,74120650
	LÍMITE INFERIOR	0,55845738	0,55899415	0,56919434	0,74450203	0,75682311	0,74665115	0,74648088
	LÍMITE SUPERIOR	1,07066303	1,07533560	1,07850822	0,79301788	0,78907455	0,79346625	0,77867825
	MSE	52,53805514	55,32517152	48,53337156	0,51436623	0,47774017	0,46808994	0,37359599

Base 14		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	VAR	51,64573275	53,78276592	47,90800288	0,51434388	0,28342832	0,46690572	0,28877599
	LÍMITE INFERIOR	0,58760660	0,59233136	0,59569744	0,67785296	0,68389845	0,67814693	0,68327144
	LÍMITE SUPERIOR	0,85091406	0,84492182	0,84434164	0,72011626	0,71714241	0,71704233	0,71586120
Base 15	MSE	8,32768902	8,09217074	8,05689458	0,22872202	0,14710344	0,20045158	0,14075587
	VAR	8,30766903	8,06257674	7,96091452	0,22553341	0,12668986	0,19928373	0,13098460

Cuadro 4.15: Resumen de resultados de la estimación del coeficiente de variación, series del tipo $Pj5$

En la tabla 4.16 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación del coeficiente de variación para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_3 , es decir las series del tipo $Pj6$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
	LÍMITE INFERIOR	0,15011311	0,15313629	0,14788836	0,19775905	0,19398344	0,19835249	0,19844227
	LÍMITE SUPERIOR	0,32158127	0,31549450	0,31402546	0,22372211	0,21801093	0,22269684	0,21567058
Base 1	MSE	3,45603891	3,34715902	3,63841466	0,12289695	0,09573303	0,12067532	0,12123924
	VAR	3,36084298	3,31772726	3,57231394	0,08533262	0,09549144	0,08171287	0,08468760
	LÍMITE INFERIOR	0,08827195	0,08814611	0,08505916	0,10758767	0,11095568	0,10772066	0,11327935
	LÍMITE SUPERIOR	0,15599489	0,15876860	0,15299629	0,12357105	0,11894178	0,12152575	0,11327957

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 2	MSE	0,74290347	0,76858273	0,81880653	0,04111306	0,02738154	0,03590010	0,12197877
	VAR	0,74165879	0,75176073	0,81638986	0,03942254	0,01633087	0,03467914	0,00975464
	LÍMITE INFERIOR	0,50833985	0,50052584	0,48146057	0,67136783	0,65117794	0,67136009	0,69186278
	LÍMITE SUPERIOR	0,85526349	0,85454367	0,85938562	0,73169192	0,70283360	0,73093281	0,71128220
Base 3	MSE	31,76922899	34,97779755	40,24497919	0,82842784	1,50000601	0,82875797	1,62027678
	VAR	30,85361104	33,33723339	38,21077248	0,72616980	0,73474116	0,74751736	0,43298875
	LÍMITE INFERIOR	0,10331939	0,10165677	0,10180719	0,10464164	0,10655192	0,10495610	0,10488328
	LÍMITE SUPERIOR	0,11750980	0,11539956	0,11586094	0,11382892	0,11216337	0,11341250	0,11211717
Base 4	MSE	0,04312109	0,03605183	0,03788443	0,01516253	0,01880186	0,01363723	0,00995033
	VAR	0,03698494	0,03591211	0,03760967	0,01464704	0,00965283	0,01297423	0,00991950
	LÍMITE INFERIOR	0,11621695	0,11623075	0,11554215	0,11168792	0,10786273	0,11248666	0,10359933
	LÍMITE SUPERIOR	0,13410622	0,13363757	0,13452445	0,14648126	0,13356647	0,14873144	0,11523166
Base 5	MSE	0,08190456	0,07322818	0,10675105	0,25508671	0,29894673	0,26415383	0,64480252
	VAR	0,07467365	0,06937868	0,09617931	0,22968784	0,21242274	0,22474092	0,03254550
	LÍMITE INFERIOR	0,09196879	0,09178758	0,09180054	0,09232972	0,09116783	0,09243190	0,09142215
	LÍMITE SUPERIOR	0,09962869	0,09964389	0,09937058	0,09978416	0,09896482	0,09954603	0,09830179

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 6	MSE	0,01011386	0,01007776	0,00970877	0,00938672	0,01048950	0,00819510	0,01013136
	VAR	0,00998156	0,01003731	0,00963579	0,00928233	0,01008934	0,00813773	0,00831740
	LÍMITE INFERIOR	0,27235403	0,27213986	0,26867411	0,28862564	0,28506948	0,28925407	0,29489372
	LÍMITE SUPERIOR	0,32511510	0,32419422	0,33044438	0,31009937	0,29931062	0,30891603	0,30365659
Base 7	MSE	0,51094993	0,49158082	0,63088996	0,08015018	0,06772980	0,07067039	0,08626612
	VAR	0,50307649	0,48894775	0,62666602	0,07166651	0,03642746	0,06321522	0,03006930
	LÍMITE INFERIOR	0,30877401	0,30822551	0,30166424	0,31899130	0,33440482	0,32095678	0,33442934
	LÍMITE SUPERIOR	0,36559490	0,36472794	0,36883670	0,38045419	0,34400363	0,37645965	0,33443089
Base 8	MSE	0,60876744	0,58081140	0,81185693	0,48498537	0,24699866	0,48211689	1,39715081
	VAR	0,59593265	0,57712351	0,80756300	0,42992427	0,07196542	0,37773699	0,13033142
	LÍMITE INFERIOR	0,38512011	0,36957340	0,35404491	0,37697715	0,30072078	0,37601225	0,30615906
	LÍMITE SUPERIOR	0,52940782	0,52230731	0,53910445	0,57262630	0,53854159	0,55913457	0,54273836
Base 9	MSE	5,28420665	5,33602420	7,51610125	8,30486151	13,82499836	7,84039467	14,30983169
	VAR	4,78482869	5,22244894	7,37325345	6,90484443	13,81349034	6,48087330	14,20883179
	LÍMITE INFERIOR	0,09075434	0,08848643	0,08849068	0,08597284	0,07919378	0,08709721	0,07880454
	LÍMITE SUPERIOR	0,10600955	0,10545043	0,10454512	0,11669715	0,10826670	0,11489602	0,10860968

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 10	MSE	0,05366153	0,04188721	0,04484308	0,11588761	0,12737188	0,11496749	0,13214707
	VAR	0,03440871	0,03920053	0,03990646	0,09679403	0,12725531	0,08349228	0,13110414
	LÍMITE INFERIOR	0,67223652	0,67313440	0,67761692	0,68789232	0,68353055	0,68684804	0,66710157
	LÍMITE SUPERIOR	0,79672298	0,80219076	0,80734480	0,80334658	0,77413702	0,80336568	0,76404618
Base 11	MSE	3,22040477	3,38674229	3,67487556	2,55099176	1,85609066	2,37545025	3,02072764
	VAR	3,22038019	3,35038832	3,58246007	2,41772406	1,79534755	2,27411335	2,23949760
	LÍMITE INFERIOR	0,23940933	0,23765860	0,23606773	0,24543514	0,25275286	0,24670836	0,25407697
	LÍMITE SUPERIOR	0,26828377	0,26642518	0,26855075	0,26221833	0,25788228	0,26460472	0,25628881
Base 12	MSE	0,15591849	0,15733913	0,19152966	0,05823606	0,09037281	0,05779581	0,12807601
	VAR	0,15056010	0,15694414	0,19116040	0,05276754	0,02248156	0,05073312	0,02290601
	LÍMITE INFERIOR	0,37928779	0,37835088	0,38267440	0,45777761	0,47343289	0,45928266	0,47407890
	LÍMITE SUPERIOR	0,62238525	0,63421248	0,62395768	0,52351391	0,48133299	0,52005459	0,48746039
Base 13	MSE	9,28057290	9,86509154	8,94380381	0,48903058	0,18382883	0,43019460	0,33290401
	VAR	9,27079537	9,75686027	8,86853178	0,42546700	0,05901956	0,37576444	0,09137759
	LÍMITE INFERIOR	0,14282382	0,11924480	0,11533407	0,14510567	0,15116973	0,14601038	0,17021257
	LÍMITE SUPERIOR	0,23717993	0,21854885	0,22424262	0,22336629	0,17903856	0,22041381	0,17023473

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 14-61	MSE	2,62734165	1,97189106	2,34437350	1,08459911	0,25963443	1,08778556	0,73430998
	VAR	1,70852096	1,95548308	2,29680699	0,89797338	0,22983660	0,88363293	0,13560339
	LÍMITE INFERIOR	2,0550E+02	1,7579E+02	1,8348E+02	4,2891E+02	4,2748E+02	4,2277E+02	4,2237E+02
	LÍMITE SUPERIOR	1,5085E+04	1,8934E+04	1,0679E+04	8,8298E+02	6,9203E+02	8,8268E+02	7,2582E+02
Base 14-62	MSE	2,6640E+10	1,4303E+11	3,8781E+10	2,5453E+07	1,2966E+07	2,5427E+07	1,3412E+07
	VAR	2,6330E+10	1,4172E+11	3,8456E+10	1,6610E+07	1,0867E+07	1,7661E+07	1,2495E+07
	LÍMITE INFERIOR	0,14949092	0,14966736	0,14998977	0,16143042	0,16080164	0,16212596	0,16119312
	LÍMITE SUPERIOR	0,19708616	0,19448527	0,19438593	0,17479991	0,16985678	0,17430641	0,17177508
Base 15	MSE	0,26932877	0,23875803	0,24740872	0,02294261	0,02330769	0,01833343	0,01672518
	VAR	0,26754841	0,23785897	0,24723132	0,02279035	0,01564692	0,01809970	0,01589793

Cuadro 4.16: Resumen de resultados de la estimación del coeficiente de variación, series del tipo $Pj6$

En la tabla 4.17 se puede apreciar los resultados obtenidos de la estimación del coeficiente de variación para todas las bases, a partir de la formación de la serie mediante la función F_4 , es decir las series del tipo $Pj7$ con $j = 1, \dots, 15$. Este estimador se realizó aplicando métodos Bootstrap por Bloques y métodos TFT-Bootstrap.

	MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
LÍMITE INFERIOR	0,15129572	0,15317927	0,14835487	0,19731462	0,20614215	0,19816440	0,20540898

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 1	LÍMITE SUPERIOR	0,31327823	0,31530516	0,31792753	0,23227786	0,20733254	0,22838406	0,20704691
	MSE	3,55998919	3,23283635	3,70348562	0,12915739	0,23820513	0,11415882	0,24327386
	VAR	3,48920781	3,20876698	3,61141098	0,10087027	0,05694253	0,08681916	0,06221361
Base 2	LÍMITE INFERIOR	0,08792393	0,08973503	0,08753684	0,10913294	0,10866333	0,10955877	0,11247149
	LÍMITE SUPERIOR	0,15539800	0,15289750	0,15511567	0,12510428	0,11704743	0,12458665	0,12060905
	MSE	0,80816716	0,71553746	0,77018177	0,04585947	0,02848055	0,04126566	0,03501161
	VAR	0,80809198	0,70543786	0,76029340	0,04326652	0,01590500	0,03914581	0,01930277
Base 3	LÍMITE INFERIOR	0,53018629	0,52731478	0,52020381	0,70604038	0,70210934	0,70683441	0,70376970
	LÍMITE SUPERIOR	0,89763189	0,89958578	0,90942030	0,77149094	0,75625300	0,76802265	0,75794840
	MSE	35,33309939	39,38450111	42,51150834	0,83506460	0,71380247	0,85812732	0,70613389
	VAR	34,05713163	37,18929834	40,18902435	0,79310261	0,71136297	0,79965586	0,69553425
Base 4	LÍMITE INFERIOR	0,10485569	0,10346702	0,10423858	0,10686971	0,10331930	0,10729943	0,10627999
	LÍMITE SUPERIOR	0,11988999	0,11875853	0,11786507	0,11601001	0,10787464	0,11593775	0,11352212
	MSE	0,04511842	0,04357782	0,03631098	0,01520073	0,06454239	0,01367376	0,01212594
	VAR	0,04007980	0,04347294	0,03600941	0,01469493	0,00403802	0,01266687	0,01099322
	LÍMITE INFERIOR	0,13641898	0,13581490	0,13446394	0,13151018	0,11698809	0,13187497	0,14082921

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 5	LÍMITE SUPERIOR	0,15574524	0,15477158	0,15652779	0,17056378	0,15945514	0,17305196	0,15144785
	MSE	0,10135596	0,10100730	0,14301572	0,33967288	1,51386036	0,37131784	0,75919574
	VAR	0,09279993	0,09459290	0,12826805	0,29879974	0,75622537	0,30696664	0,31329749
Base 6	LÍMITE INFERIOR	0,09252481	0,09236211	0,09242153	0,09234616	0,09260752	0,09247132	0,09248980
	LÍMITE SUPERIOR	0,09918703	0,09904612	0,09899389	0,09982467	0,09851413	0,09991281	0,09871860
	MSE	0,00774868	0,00759153	0,00754958	0,00932039	0,00592997	0,00890897	0,00607403
	VAR	0,00758123	0,00755204	0,00752526	0,00923091	0,00582979	0,00888146	0,00606740
Base 7	LÍMITE INFERIOR	0,29448077	0,29557960	0,29572614	0,31290160	0,32026885	0,31339938	0,31922266
	LÍMITE SUPERIOR	0,34921110	0,34957731	0,34990875	0,33409371	0,32942323	0,33447645	0,33048935
	MSE	0,51223924	0,49047114	0,52596155	0,08304755	0,10484217	0,07419597	0,11199085
	VAR	0,51044107	0,48615305	0,51905307	0,07387021	0,03296992	0,06695576	0,04365792
Base 8	LÍMITE INFERIOR	0,31967921	0,31945015	0,31447940	0,33056782	0,34950138	0,33321902	0,35033633
	LÍMITE SUPERIOR	0,37983310	0,37643244	0,38333350	0,38237179	0,34951379	0,38528874	0,35227754
	MSE	0,65860660	0,61286067	0,83532622	0,44954534	0,60005766	0,45258729	0,41781187
	VAR	0,64996765	0,61150092	0,83015174	0,39259501	0,07610393	0,33834804	0,07839926
	LÍMITE INFERIOR	0,37706715	0,36661447	0,36003739	0,38277796	0,30132003	0,38321918	0,44431373

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 9	LÍMITE SUPERIOR	0,53019632	0,52385178	0,54763483	0,57077049	0,54265423	0,56149497	0,45961647
	MSE	5,66916304	5,47662718	7,74259605	7,97987591	14,25423317	8,14684378	24,20922147
	VAR	5,34855608	5,41091838	7,63198077	6,80036452	14,11239167	6,64008444	10,04134531
	LÍMITE INFERIOR	0,09243702	0,08966327	0,08958293	0,086617382	0,07346896	0,08809622	0,08054228
Base 10	LÍMITE SUPERIOR	0,10708539	0,10653743	0,10610199	0,119236237	0,08283841	0,11539440	0,10921074
	MSE	0,05490025	0,04026574	0,04544626	0,12486590	0,58006218	0,10593462	0,12391326
	VAR	0,03337771	0,03746081	0,04044210	0,10959176	0,01230663	0,08337076	0,12389045
	LÍMITE INFERIOR	0,72155064	0,72332888	0,71695309	0,74866694	0,72028523	0,74644463	0,78241951
Base 11	LÍMITE SUPERIOR	0,86362157	0,86475835	0,87445946	0,86684046	0,82570519	0,86501164	0,81779189
	MSE	4,24668510	4,27442088	5,25627182	2,83841094	3,42373757	2,59206614	4,39542037
	VAR	4,23442606	4,25604185	5,23191633	2,55099704	2,55480268	2,47426870	1,49961569
	LÍMITE INFERIOR	0,26338410	0,26179872	0,26242042	0,27140243	0,27678156	0,27178808	0,26224995
Base 12	LÍMITE SUPERIOR	0,29615556	0,29422455	0,29625623	0,29096533	0,28668665	0,29073032	0,27463342
	MSE	0,20971371	0,19524719	0,21953796	0,07532009	0,04529658	0,06725317	0,33178569
	VAR	0,20510658	0,19507356	0,21896864	0,06917538	0,02469263	0,06186522	0,02842764
	LÍMITE INFERIOR	0,41225381	0,41060369	0,41809104	0,50182073	0,52043552	0,50109979	0,52289961

		MBB	CBB	SB	KRSRB	KRSLB	KCSRB	KCSLB
Base 13	LÍMITE SUPERIOR	0,69904806	0,70150414	0,71167875	0,57678023	0,52043575	0,56870947	0,52314635
	MSE	12,70589714	12,89288695	12,62506405	0,62989364	1,20795712	0,57970764	0,74053291
	VAR	12,68076131	12,73308397	12,50090522	0,53225988	0,10292622	0,50581876	0,09271669
Base 14-71	LÍMITE INFERIOR	0,15057000	0,13011882	0,12264013	0,15763455	0,16639561	0,16054929	0,16334676
	LÍMITE SUPERIOR	0,25416876	0,24040699	0,24881206	0,24930339	0,20199315	0,24457247	0,19873524
	MSE	3,25720032	2,47588485	3,19279866	1,39468600	0,26122077	1,34016923	0,31752868
	VAR	2,22281800	2,44554950	3,09968003	1,16426473	0,25787385	1,05879629	0,27420978
Base 14-72	LÍMITE INFERIOR	1,9336E+02	1,5361E+02	1,5546E+02	3,9874E+02	4,3372E+02	3,9102E+02	3,9520E+02
	LÍMITE SUPERIOR	1,0554E+04	9,5701E+03	1,6236E+04	8,4082E+02	7,8501E+02	8,2753E+02	6,1340E+02
	MSE	9,2635E+10	2,2983E+12	4,7221E+12	1,8939E+07	1,4508E+07	1,9635E+07	9,7013E+06
	VAR	9,1996E+10	2,2936E+12	4,7144E+12	1,4681E+07	6,7278E+06	1,5610E+07	8,8436E+06
Base 15	LÍMITE INFERIOR	0,14931759	0,14961783	0,14879932	0,16112520	0,16615580	0,16169899	0,16256336
	LÍMITE SUPERIOR	0,19746683	0,19540673	0,19665479	0,17428560	0,17071990	0,17374768	0,17370144
	MSE	0,27328454	0,26458772	0,27898503	0,02171278	0,04137362	0,01896308	0,01820631
	VAR	0,27042144	0,26445985	0,27841313	0,02134906	0,01221629	0,01872673	0,01614457

Cuadro 4.17: Resumen de resultados de la estimación del coeficiente de variación, series del tipo P_j7