ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMÁTICAS PARA EL CURSO DE NIVELACIÓN DE LA EPN

GEOMETRÍA: SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS, MOVIMIENTOS EN EL PLANO, PARALELOGRAMOS Y TRAPECIOS, Y CIRCUNFERENCIAS

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO MATEMÁTICO

JONATHAN DANIEL NARANJO CARRANZA

jonathan.naranjo01@epn.edu.ec

DIRECTOR: JUAN CARLOS TRUJILLO ORTEGA

juancarlos.trujillo@epn.edu.ec

DMQ, SEPTIEMBRE DE 2022

CERTIFICACIONES

Yo, JONATHAN DANIEL NARANJO CARRANZA, declaro que el trabajo de integración curricular aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

Firmado electrónicamente por:
JONATHAN DANIEL
NARANJO CARRANZA

Jonathan Daniel Naranjo Carranza

Certifico que el presente trabajo de integración curricular fue desarrollado por Jonathan Daniel Naranjo Carranza, bajo mi supervisión.

Firmado electrónicamente por:
JUAN CARLOS
TRUJILLO
ORTEGA

Juan Carlos Trujillo Ortega
DIRECTOR

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

A través de la presente declaración, afirmamos que el trabajo de integración curricular aquí descrito, así como el(los) producto(s) resultante(s) del mismo, es(son) público(s) y estará(n) a disposición de la comunidad a través del repositorio institucional de la Escuela Politécnica Nacional; sin embargo, la titularidad de los derechos patrimoniales nos corresponde a los autores que hemos contribuido en el desarrollo del presente trabajo; observando para el efecto las disposiciones establecidas por el órgano competente en propiedad intelectual, la normativa interna y demás normas.

Jonathan Daniel Naranjo Carranza

Juan Carlos Trujillo Ortega

RESUMEN

Este componente propone, principalmente, los contenidos de *Semejanza de triángulos*, *Movimientos en el plano*, *Paralelogramos y trapecios* y *Circunferencias*) que deberían incluirse en un curso de Nivelación para las carreras de Ingeniería y Ciencias de la EPN, a través de los resultados de aprendizaje que los estudiantes deberían alcanzar.

A su vez, para dar mayor precisión a la formulación de los resultados de aprendizaje, se proponen, para cada uno de los resultados, tres ejemplos de preguntas, ejercicios o problemas que podrían utilizarse para evaluar si un estudiante los ha alcanzado o no.

Finalmente, con el fin de evidenciar que los contenidos propuestos no son insuficientes para abordar el estudio del Álgebra Lineal y el Cálculo en una variable en el primer semestre, se presenta una descripción de los contenidos de los capítulos “Límites y continuidad” y “Aplicaciones lineales y matrices” (descritos en los PEAs de dichas materias), y los conceptos de Fundamentos de Matemática y Geometría que son prerrequisitos de los referidos capítulos.

Palabras clave: resultados de aprendizaje, Fundamentos de Matemática, Geometría, Semejanza de triángulos, Movimientos en el plano, Paralelogramos y trapecios, Circunferencias, Aplicaciones lineales, Matrices, Límites, Continuidad.

ABSTRACT

This component mainly proposes the contents of *Similar triangles*, *Movements in the plane*, *Parallelograms and trapezoids* and *Circumferences*) that should be included in a Leveling course for the Engineering and Science careers of the EPN, through the learning outcomes that students should achieve.

In turn, looking to have better precision to the formulation of the learning outcomes, three examples of questions, exercises or problems are proposed for each of the outcomes that could be used to assess whether a student has achieved them or not.

Finally, in order to show that the proposed contents are not insufficient to address the study of Linear Algebra and Calculus in one variable in the first semester, we present a description of the contents of the chapters "Limits and continuity" and "Linear applications and matrices" (described in the PEAs of said subjects), and the concepts of Foundations of Mathematics and Geometry that are prerequisites of the aforementioned chapters.

Keywords: learining outcomes, Fundamentals of Mathematics, Geometry, Similar triangles, Movements in the plane, Parallelograms and trapezoids, Circumferences, Linear applications, Matrices, Limits, Continuity.

Índice general

Capítulo 1

Descripción del componente desarrollado

De la misma manera como los diferentes campos científicos evolucionan, su enseñanza (sobre todo en los primeros niveles de la Universidad) debe evolucionar. En particular, la enseñanza de la Matemática. No obstante, en el Ecuador y, en particular, en la Escuela Politécnica Nacional, tanto la forma de enseñanza como los contenidos de Matemática presentes en los planes de estudio de las materias de Nivelación y Formación Básica no se han adaptado a los cambios sustanciales ocurridos durante los últimos 50 años.

La Facultad de Ciencias y, en particular, el Departamento de Matemática, ha participado en diversos esfuerzos de la EPN por diseñar planes de estudio adecuados para Nivelación. Como consecuencia del trabajo desplegado, se han formulado contenidos para las dos asignaturas de Matemática de Nivelación de la EPN: *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*.

Para que la propuesta pueda transmitir, no solamente los contenidos, sino el alcance de estos, también se han formulado con mucho detalle los resultados de aprendizaje y ejemplos que los ilustren, y sean una pauta para el diseño de la evaluación del alcance o no de los resultados de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Además, con el fin de mostrar que los contenidos propuestos no son insuficientes para el abordaje de los cursos de matemática del primer semestre de Formación Básica, se describen los contenidos de las materias de *Álgebra Lineal* y *Cálculo en una variable* y se identifican los conceptos de Fundamentos de la Matemática y de Geometría requeridos en las materias referidas.

En particular, en este trabajo, se desarrollan los contenidos y resultados de aprendizaje de *Semejanza de triángulos*, *Movimientos en el plano*, *Paralelogramos y trapecios* y *Circunferencias*. Los contenidos de primer semestre descritos son *Aplicaciones lineales*, *Límites* y *Continuidad*.

1.1. Objetivo general

El objetivo general de este proyecto consiste en plantear los contenidos de las dos materias de Nivelación, *Fundamentos de Matemática* y *Geometría*, mediante la formulación de resultados de aprendizaje de estos contenidos y ejemplos de preguntas, ejercicios y problemas que ilustren dichos resultados de aprendizaje.

1.2. Objetivos específicos

1. Describir los contenidos de los capítulos “Límites”, “Continuidad” y “Aplicaciones lineales y matrices” de los cursos de Cálculo en una variable y Álgebra Lineal del primer semestre de Formación Básica de la EPN.
2. Identificar los conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” de Nivelación en los capítulos descritos en el punto anterior.
3. Para los temas de *Semejanza de triángulos*, *Movimientos en el plano* y *Paralelogramos y trapecios* y *Circunferencias*, la elaboración de:
    a) Los resultados de aprendizaje.
    b) Ilustración, mediante problemas o ejercicios resueltos, de cada uno de los resultados de aprendizaje.

1.3. Alcance

Los contenidos de las materias considerados en este proyecto se ajustan a los Programas de Estudio de la Asignatura (PEA) de “Fundamentos de Matemática” y de “Geometría” aprobados por el Consejo de Docencia de la EPN en el año 2020.

Este trabajo no consiste en el desarrollo de los contenidos, sino en la formulación de los resultados de aprendizaje, a partir de material elaborado por las Comisiones de Implementación de los PEAs, que fueron nombradas por el Consejo de Docencia de la EPN.

1.4. Marco teórico

Para el estudio de un módulo, un programa, una clase, etcétera, se acostumbra a delimitar el contenido a estudiar, luego los profesores diseñan el plan de enseñanza en función de este contenido; este es el enfoque “centrado en el profesor”. Con la evolución de la enseñanza, se pasó de este enfoque a uno “centrado en el estudiante”, donde lo más importante es el conocimiento que adquiere el estudiante al final del curso. Y estos conocimientos son los que se plasman en los *resultados de aprendizaje*, que los podemos definir de la siguiente manera:

> Son enunciados sobre lo que se espera que el estudiante sea capaz de hacer, comprender y / o sea capaz de demostrar al finalizar un proceso de aprendizaje.

Los resultados de aprendizaje pueden ser confundidos con objetivos, pero estos son más generales y suelen plantearse desde el enfoque en el profesor. Por ejemplo:

- Enunciar el concepto de derivada y relacionarlo con el concepto de límite.
- Comprender la relación entre el concepto de derivada y el de límite.

Ambos objetivos son similares, pero el primero se centra solamente en el profesor, pues es quién enunciará el concepto planteado; por otro lado, el segundo objetivo se centra en ambos por su falta de especificación. Así, la ventaja de los resultados de aprendizaje es que están centrándose en lo que se espera que el estudiante aprenda.

Para formular resultados de aprendizaje, Benjamin Bloom (citar) planteó una jerarquía de resultados de aprendizaje, jerarquía que puede identificarse por los verbos clave que se utilizan. Los niveles son:

- Conocimiento: Habilidad de recordar conceptos, no necesariamente entendiéndolos.
- Comprensión: Además de conocer, es importante comprender e interpretar la información aprendida.
- Aplicación: Evaluar la capacidad que tiene el estudiante para aplicar los conocimientos adquirido en ambientes y problemas nuevos.
- Análisis: Habilidad de desglosar la información en sus partes
- Síntesis: Capacidad de relacionar distintos conocimientos y concatenarlos en uno solo.
- Evaluación: Es la etapa final y permite consiste en juzgar el valor de los elementos para propósitos específicos

En este trabajo, nos enfocaremos únicamente en los tres primeros niveles, dadas las características del curso de Nivelación de la Escuela Politécnica Nacional. En particular, los podemos categorizar de la siguiente forma:

1. Buscar que un estudiante **conozca** (enuncie, escriba o identifique el texto) las definiciones de los conceptos principales, axiomas, teoremas.
2. Buscar que un estudiante identifique el uso de un concepto, aplicación de un axioma o teorema, en la solución de un determinado problema, o en la deducción de una determinada propiedad.

3. Buscar que un estudiante aplique un concepto, un axioma o un teorema en la solución de un problema o en la deducción de una propiedad.

Capítulo 2

Metodología

El curso de Nivelación de la Escuela Politécnica Nacional debe proveer los conceptos básicos y la metodología mínima para que los estudiantes puedan abordar, en el área de matemática, los cursos de *Cálculo en una Variable y Álgebra Lineal*. Por ello, hemos elegido estas materias para determinar qué conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” son requeridos en la Nivelación.

Así, con el fin de seleccionar los contenidos de Nivelación, la metodología a seguir es la siguiente:

1. Describir los aspectos más relevantes de los contenidos “Límites y continuidad” del curso “Cálculo en una variable” y “Aplicaciones lineales y matrices” del curso “Álgebra Lineal”.

2. Identificar los conceptos de las materias “Fundamentos de Matemática” y “Geometría” son requeridos en los capítulos referidos en el numeral anterior.

3. Formular los resultados de aprendizaje de los contenidos propuestos para *Semejanza de triángulos*, *Movimientos en el plano*, *Paralelogramos y trapecios* y *Circunferencias*.

4. Ilustrar los resultados propuestos mediante preguntas, ejercicios y problemas.

Capítulo 3

Resultados, conclusiones y recomendaciones

3.1. Resultados

En la segunda sección, vamos a presentar las descripciones de los capítulos “Límites y continuidad” y “Aplicaciones lineales y matrices”. En la segunda sección, se mostrarán los prerrequisitos de Fundamentos de Matemática y Geometría identificados en los capítulos referidos. Finalmente, en la sección tercera, se formularán los resultados de aprendizaje con sus ilustraciones respectivas.

3.2. Descripciones

3.2.1. Límites y continuidad

Los conceptos fundamentales que se estudian en el curso de Cálculo de una variable son *continuidad*, *derivadas* e *integrales*. Estos conceptos se definen mediante el concepto de límite. En efecto, dada una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I un intervalo abierto), se dice que es continua en $a \in I$ si

1. existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; y
2. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Por otra parte, si $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in I$, se dice que f es derivable en a si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Por último, si $a,\ b \in I$, entonces la integral de $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

El curso inicia con la definición del concepto de límite:

> *Dados $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de I y L un número real, L es el **límite de f en a** si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces*
>
> $$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Inmediatamente se demuestra que este L es único y se representa por:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

En esta definición se explica el concepto *punto de acumulación* y su importancia para que se asegure la implicación en esta definición no sea verdadera “vacíamente”; es decir, no sea verdadera porque su antecedente es falso (lo que podría ocurrir si el punto a no es de acumulación).

Se presenta también el teorema del límite de funciones localmente iguales para resaltar el hecho de que la definición de límite no exige que la función esté definida el dicho punto:

> *Límite de funciones localmente iguales*:
>
> Sean $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R}$ y:
>
> 1. $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq a$; y
> 2. existe L tal que:
>
> $$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Entonces f también tiene límite en a y:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

A continuación, se demuestran los teoremas necesarios para calcular el límite de las funciones reales (las mismas que se clasifican en dos categorías: racionales y trascendentes).

Para los límites de funciones racionales (el cociente de dos polinomios), se deducen los siguientes teoremas sobre los límites de:

1. La función constante,
2. la función identidad,
3. la suma, resta, producto y división de dos funciones, bajo la hipótesis de la existencia de los límites de tales funciones.

Mediante los teoremas mencionados, se puede calcular el límite de toda función racional, porque esta es el cociente de dos polinomios y, con los teoremas del límite de una constante, del producto y de la suma, se deduce el límite de un polinomio.

En cuanto a las funciones trascendentales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, su estudio se divide en dos etapas. En este capítulo se estudian únicamente las trigonométricas, preferentemente, mediante una definición axiomática como la de Apostol [1]: se asume que existen dos funciones reales, representadas por sen y $\cos$, tales que

$$\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y, para las cuales, son verdaderos los siguientes axiomas:

1. **Valores especiales**:

$$\cos 0 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1, \quad \cos\pi = -1$$

2. **Coseno de una diferencia** Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$$

3. **Desigualdades fundamentales** Para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se cumple que

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

De estos axiomas, se deducirán todas las propiedades sobre las funciones seno y coseno, se definirán también las funciones tangente y secante.

Por otra parte, las funciones logarítmicas y exponenciales se estudian como una aplicación del cálculo integral, pues, una posible definición, es la que da Apostol [1], y es como sigue:

$$\begin{aligned} \ln\colon]0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Mediante esta definición, se deducen las propiedades de la función $\ln$ y, en particular, se demuestra que es invertible, y, precisamente, su inversa es la función *función exponencial*, representada por $\exp$, la que satisface la siguiente equivalencia lógica (válida por la definición de función inversa):

$$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$$

tal que

$$y = \exp(x) \ \equiv \ x = \ln y$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y > 0$.

Se presentan también herramientas adicionales para el cálculo de límites: el límite de una composición (el de cambio de variable) y el de Sánduche. Para este último, se demuestran previamente teoremas sobre la monotonía del límite como el siguiente:

> Sean $a \in \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que sus dominios contienen un intervalo abierto I centrado en a, pero no necesariamente definidas en a. Supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo x tal que $x \in I - a$ y que $L = \lim_{x\to a} f(x)$ y $M = \lim_{x\to a} g(x)$, entonces:
>
> $$L \leq M$$

A continuación, se presenta el concepto de continuidad (como el dado al inicio de este capítulo). También se establece la equivalencia de la definición mediante desigualdades:

> *Sean* $a \in \mathbb{R}$, $f\colon \operatorname{dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que su dominio contiene un intervalo abierto* I *y además* $a \in I$*. Se dice que* f *es continua en* a *si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in I$*, si* $0 < |x - a| < \delta$*, entonces*
>
> $$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Mediante la aplicación de los límites ya demostrados, se demuestra la continuidad de cualquier función racional, probando que las funciones constante e identidad son continuas, que la suma, resta, multiplicación y cociente (excepto en los puntos donde el denominador es igual a 0) son continuas.

Se demuestra teoremas para la composición de funciones continuas, luego, se establece el teorema del valor medio:

> *Teorema del valor intermedio* Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces para todo L entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un valor $c \in [a, b]$ tal que
>
> $$f(c) = L$$

que fundamentalmente caracteriza la continuidad de una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado.

Para la continuidad de las funciones trigonométricas se prueba que el seno y coseno son continuas en cero, luego, se prueba que son continuas en el resto de los números reales. Para demostrar la continuidad en cero se usa el teorema del Sánduche, para los otros valores se utiliza el cambio de variable y las identidades trigonométricas.

A continuación, se presenta la caracterización del límite mediante el concepto de límites laterales (por la derecha y por la izquierda): el límite de una función existe en a si y solo si existen los laterales en a y son iguales. Este teorema permite demostrar, en algunos casos, que una función no posee límite en un punto.

Con estos conceptos también se define la continuidad por la derecha y por la izquierda y se establece un teorema de caracterización de la continuidad mediante estos dos.

Finalmente, este capítulo termina con la presentación de los límites infinitos y al infinito, mediante definiciones del siguiente tipo:

> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si y solo si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
> $$f(x) > R,$$
> siempre que $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $0 < |x - a| < \delta$

> $L = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo $x \in I$ es verdadera la implicación
> $$x > R \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Análogamente, se definen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, así como los límites infinitos de f *por la derecha* en a y *por la izquierda* en a. También se define $L = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y límites infinitos que tienden al infinito, finalmente, se definirá el concepto de *función acotada superiormente* y *función acotada inferiormente*.

Se establecen los teoremas correspondientes para el límite infinito (o al infinito) de suma, resta, producto y división de funciones.

3.2.2. Aplicaciones lineales y matrices

El capítulo inicia con la definición de aplicación lineal:

> Sean V y W espacios vectoriales, una *transformación lineal* L de V en W es una función $T : V \to W$ con las siguientes propiedades:
>
> - *Aditiva:* $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo u, $v \in V$
> - *Homogeneidad:* $T(av) = aT(V)$ para todo escalar a y todo $v \in V$

Se hace énfasis en que los espacios dónde se realizan las operaciones, así, en la primera propiedad $u+v$ es la suma en el espacio V, pero $L(u)+L(v)$ es la suma en el espacio W. Análogamente, av es el producto por escalar en V y $T(v)$ es el producto por escalar en W. En el caso $V=W$, entonces la aplicación lineal se denominará *operador lineal* sobre V.

Luego, se presentan algunos ejemplos de aplicaciones lineales como la integración, derivación, proyección, etc. Se prueba que los ejemplos dados son aplicaciones lineales mediante la definición dada. Se demuestra la siguiente propiedad:

> Si $L: V \to W$ es una aplicación lineal y $n \in \mathbb{N}$, entonces
>
> $$L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(v_i) \tag{3.1}$$
>
> para $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n \in V$ y $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ escalares.

Esta propiedad es una generalización que se deduce de la definición. Además, se demuestran propiedades para la aplicación lineal de cero y de la resta. Luego, se enuncia y demuestra el siguiente teorema:

> Sea $L: V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en un espacio vectorial W. Además, sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si u es cualquier vector en V, entonces $L(u)$ queda completamente determinada por $\{L(v_1), L(v_2), \ldots, L(v_n)\}$.

A continuación, se definen las aplicaciones uno a uno (o inyectivas) y el núcleo de una aplicación lineal, dicha definición es:

> Dada una aplicación lineal $L\colon V \longrightarrow W$, entonces el *núcleo* de L es el subconjunto de V que consta de todos los vectores v tales que $L(v) = 0_w$:
>
> $$\mathscr{N}\,L = \{v \in V : L(v) = 0_w\}$$

donde 0_w es el cero en el espacio W y $\mathscr{N}\,L$ es el núcleo de L. Luego, se demuestra que el núcleo de una transformación lineal de V en W es un subespacio vectorial de V. A continuación, se prueba que la inyectividad de una aplicación lineal equivale a que el espacio nulo tenga como único elemento el cero (del espacio vectorial correspondiente).

Posteriormente, se define el rango de una aplicación lineal como sigue:

> Para $L\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, el *rango* de L es el subconjunto de W constituido por todos los vectores de la forma $L(v)$ para algún $v \in V$:
>
> $$\operatorname{rec} L = \{L(v) : v \in V\}$$

donde $\operatorname{rec} L$ representa el rango de L, por notación. Se demuestra también que si $L\colon V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, entonces $\operatorname{rec} L$ es un subespacio de W. Luego, se definen las aplicaciones *sobreyectivas* y se prueba que una aplicación lineal $L\colon V \longrightarrow W$ es sobreyectiva si $\operatorname{rec} L = W$. Habiendo enunciado estas definiciones y teoremas, se presenta el teorema fundamental de las aplicaciones lineales:

> Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $L\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal, entonces el $\operatorname{rec} L$ es un subespacio de dimensión finita y
>
> $$\dim V = \dim \mathscr{N} L + \dim \operatorname{rec} L$$

A partir de dicho teorema se deducen propiedades que relacionan la dimensión de los espacios vectoriales ”de partida“ y de ”llegada“ con las propiedades de inyectividad y sobreyectividad de la aplicación lineal.

A continuación, se estudia la matriz de una aplicación lineal, para ello se cita el siguiente teorema:

> Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita n y m respectivamente ($n \neq 0$ y $m \neq 0$), $L\colon V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Además, sean $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases de V y W, respectivamente. La matriz A cuyos coeficientes están determinados por
>
> $$L(v_k) = a_{1,k}w_1 + a_{2,k}w_2 + \cdots + a_{m,k}w_m$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se asocia a L, existe, es única y cumple la siguiente propiedad: si $x \in V$, entonces:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dónde $x = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$ y $L(x) = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots c_m w_m$

se demuestra el teorema y además se define a la matriz A del teorema como la *la matriz que representa L con respecto a las bases S y T* o *la matriz de L con respecto a S y T*. A partir de la demostración del teorema se consigue además el proceso para calcular dicha matriz. Finalmente, se estudia la matriz de cambio de base de un operador lineal, luego, se define la inversa de una aplicación lineal y su relación con la matriz que representa dicha transformación.

3.3. Identificación de prerrequisitos

3.3.1. De límites y continuidad

Lógica

1. **Cuantificadores**: necesarios para los conceptos de límite y continuidad. Resulta de suma importancia el orden de los cuantificadores. Por ejemplo, el caso de la definición de límite, el orden $\forall$ $\exists$, significa que el valor de δ depende del valor de ϵ.

2. **El método de demostración por reducción al absurdo**. Este método es utilizado en la demostración de la unicidad del límite.

3. **Variable y constante**. Este concepto se utiliza constantemente, es importante que el estudiante note que una letra puede se tanto variable como constante según el contexto. La importancia de las nociones de variable y constante están presentes en:

a) En la definición de límite, si se sabe que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y se sabe que $M > 0$, se debe particularizar la definición la variable ϵ en la definición límite, en la que M es el caso particular. También se debe particular con un número real concreto; por ejemplo, 1.

b) Se presentan dos definiciones de continuidad, es importante notar que el límite es igual al valor de la función evaluado en el punto y es posible reemplazar en definición de límite para notar la equivalencia de ambas definiciones.

Teoría de conjuntos

1. **Operaciones con conjuntos**. La intersección de conjuntos es la operación que se presenta con mayor frecuencia, especialmente al analizar teoremas que involucran más de una función. En el estudio de límites se considera un intervalo abierto y es importante notar que dicho intervalo debe existir en la intersección de las funciones que se involucran en el enunciado de los teoremas, los teoremas y propiedades que requieren el concepto analizado son: Propiedades algebraicas de funciones, teorema de las funciones localmente iguales, monotonía del límite, teorema del Sánduche, entre otros.

Números reales

1. **Máximo y mínimo de dos números**. Con conceptos que aparecen regularmente durante las demostraciones de límites, por mencionar algunas importantes son: Propiedades algebraicas, cálculo de límites, etc.

2. **Inducción matemática**. El teorema de la inducción matemática general se requiere para la generalización de propiedades sobre los naturales. Se tiene que el límite de la suma de dos funciones es la suma de los límites, luego se generaliza mediante inducción. Análogamente se tiene la generalización del límite del producto de funciones.

3. **Ecuaciones**. Se requiere el manejo de ecuaciones y sus métodos de resolución para las demostraciones de límites, esto queda eviden-

ciado en cada demostración pues en la definición de límite se debe hallar un valor de δ que depende de ϵ.

4. **Inecuaciones**. El estudiante requiere aplicar correctamente las propiedades de desigualdades para la resolución de inecuaciones. Específicamente se requiere este conocimiento en:

   a) Cálculo de límites

   b) Propiedades de límites

   c) Teorema del Sánduche

   d) Definición de funciones trigonométricas

5. **El valor absoluto**. Claramente se requiere el manejo del concepto de valor absoluto pues aparece desde la definición de límite, es por ello que en todas las demostraciones se requiere entender las propiedades del valor absoluto, se requiere: valor absoluto del inverso aditivo, valor absoluto del cero, valor absoluto de la resta, valor absoluto del producto, valor absoluto del cociente, desigualdad triangular y otras desigualdades referentes a la suma, resta y producto.

Funciones

1. **Dominio**. Es de suma importancia entender cuál es el dominio de una función, esto se evidencia desde la definición de límite que requiere la existencia de un intervalo abierto dentro del dominio de la función.

2. **Recorrido**. Se debe considerar el recorrido de la función para la aplicación de algunas propiedades, además, para definir ciertas funciones. Por ejemplo, de no considerar el recorrido de la función, se podría realizar un cambio de variable inadecuado para el cálculo de límites.

3. **Funciones reales**. Este tipo de funciones son el principal objeto de estudio del curso de cálculo en una variable, por tanto, es fundamental un conocimiento previo de estas funciones. En particular, para el capítulo de límites y continuidad se requiere:

a) Funciones racionales, y

b) Funciones trascendentales: trigonométricas y exponenciales.

Las funciones racionales son un prerrequisito para el curso, las funciones trascendentales y exponenciales se estudiarán dentro del curso pues por su definición los conocimientos de nivelación no son suficientes para abordarlas.

4. **Composición de funciones**. La composición de funciones aparece precisamente en el teorema de la composición, además, en el teorema de cambio de variable.

5. **Dependencia de variables**. Al estudiar las funciones hay que notar que si f es una función, $f(x)$ es el valor que toma la función al evaluarla en x.

Exponenciales y logaritmos

1. **Potencias con exponente racional**. Para el estudio de polinomios se toman potencias con exponente natural, luego, del cociente de polinomios se llega a exponentes racionales. Para llegar a los exponentes reales se usan límites, por ello, no son prerrequisitos. **Propiedades de exponentes**. Se requiere conocer las propiedades como producto de potencias de igual base, potencia de potencia y cociente de potencias de igual base. Su importancia se evidencia en el estudio de límites y continuidad de: polinomios, funciones racionales, composición de funciones.

Trigonometría

1. **Razones trigonométricas**. Las funciones trigonométricas se estudian en el curso de cálculo, sin embargo, conocer las razones trigonométricas es necesario para poder deducir las propiedades de las funciones trigonométricas. Es importante notar que en el curso de nivelación $\sin$ y $\cos$ se calculan para ángulos (grados), pero en el curso de cálculo se evalúan números (radianes).

3.3.2. De Aplicaciones lineales y matrices

Lógica

1. **Cuantificadores**: antes de estudiar el presente capítulo se estudian las bases de espacios vectoriales, luego, se usa este concepto en la determinación de las aplicaciones lineales. Al igual que en el estudio de bases, el estudiante debe entender la relación entre el cuantificador universal y el existencial de manera que para cualquier vector los coeficientes para su determinación en función de la base son únicos y dependen del vector estudiado, así, sucede lo mismo en la determinación de la aplicación del vector en función de la base y en la determinación de la matriz asociada a la aplicación lineal.

2. **Variable y constante**. La diferenciación entre variable y constante siempre es de suma importancia, en el estudio de este capítulo no hay excepción y el estudiante deberá notar que en los teoremas y propiedades las aplicaciones lineales son variables, es decir, pueden ser cualquiera de las funciones del conjunto de aplicaciones lineales. Los coeficientes que determinan las bases son constantes, pero cambian si cambia el vector o la base.

Números reales

1. **Inducción matemática**. El teorema de la inducción matemática general se requiere para la generalización de propiedades sobre los naturales. El principal teorema que requiere inducción es la demostración del teorema 3.1.

Funciones

1. **Dominio**. Dado que las aplicaciones lineales son funciones que parten de espacios vectoriales, hay que tener claro el concepto de dominio en funciones reales para poder entender esta generalización al tener como dominio un espacio vectorial. En el estudio del núcleo de una aplicación lineal hay que entender que el núcleo de una aplicación lineal es subconjunto del dominio de la aplicación.

2. **Recorrido**. Al igual que con el dominio, se pasa de tener los reales como recorrido a tener un espacio vectorial, es así que de nuevo se generaliza al pasar del conjunto de los reales a un espacio vectorial. El rango de una aplicación lineal será subconjunto del espacio vectorial de llegada.

3.4. Resultados de aprendizaje

A continuación, se ilustrarán los resultados de aprendizaje esperados y se mostrarán propuestas de evaluación para dichos resultados. Para los resultados de aprendizaje de tipo *conocer*, en algunos casos, no se muestran propuestas de evaluación, pues se evaluará dicho resultado de forma conjunta con los de tipo *aplicar*.

3.4.1. Semejanza de triángulos

Se presenta el teorema de Tales y los criterios para determinar que dos triángulos son semejantes. Luego, se aplican estos criterios para el caso de triángulos rectángulos y se establecen las principales propiedades de estos triángulos, entre ellas, el teorema de Pitágoras.

Resultado

Determinar si dos sucesiones de números son una proporcionalidad.

Ilustración

1. Dadas las sucesiones de números, determine si son o no una proporcionalidad. Justifique su respuesta.

   a) $(1, 3, 5)$, $(2, 6, 10)$

   Respuesta. *Sí es una proporcionalidad, pues*

   $$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2.$$ □

b) $(3x, 3y, 6z)$, $(x, y, 2z)$, donde $x \neq 0$,

Respuesta. *Sí es una proporcionalidad, pues*

$$\frac{2x}{x} = \frac{2y}{y} = \frac{4z}{2z} = 3. \qquad \square$$

c) $(1, 9, 3)$, $(3, 3, 1)$

Demostración. *No es una proporcionalidad, pues*

$$\frac{1}{3} \neq \frac{9}{3}. \qquad \square$$

d) (a, b, c), (a, b, c)

Respuesta. *Sí es una proporcionalidad, pues*

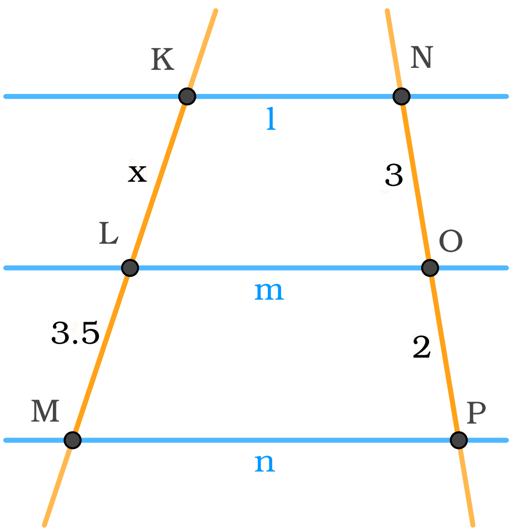
$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = 1. \qquad \square$$

Resultado

Aplicar el teorema fundamental de la proporcionalidad para el cálculo de longitudes de segmentos.

Ilustración

1. En la figura, calcule el valor de $KL = x$, si l, m y n son rectas paralelas y $LM = 3{,}5$, $MO = 3$ y $OP = 2$:



Respuesta. Dado que las rectas $\overleftrightarrow{KN} = l$, $\overleftrightarrow{LO} = m$ y $\overleftrightarrow{MP} = n$ son paralelas, por el *teorema de la proporcionalidad*, se tiene que

$$\frac{KL}{LM} = \frac{NO}{OP}.$$

Y, como por hipótesis se sabe que $LM = 3{,}5,\ MO = 3$ y $OP = 2$, entonces

$$\frac{x}{3{,}5} = \frac{3}{2},$$

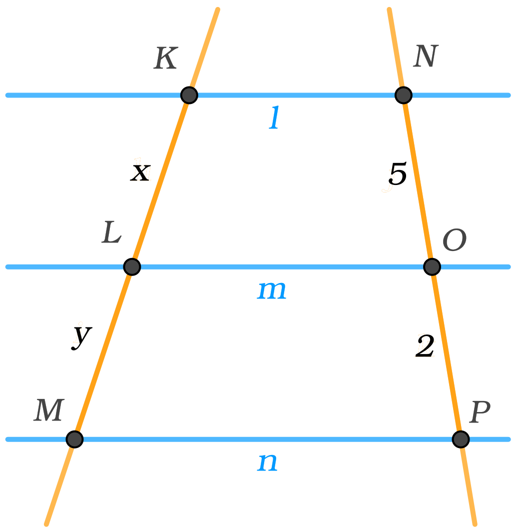
de dónde,

$$x = 3{,}5\frac{3}{2};$$

es decir,

$$x = 5{,}25.$$ □

2. *En la figura, calcule el valor de $KL = x$ si l, m y n son rectas paralelas, $LM = y,\ MO = 5$ y $OP = 2$, además, $x + y = 3$:*



Respuesta. Se esperan al menos dos formas posibles de resolver este problema.

Forma 1: Dado que las rectas $\overleftrightarrow{KN} = l$, $\overleftrightarrow{LO} = m$ y $\overleftrightarrow{MP} = n$ son paralelas, por el *teorema de la proporcionalidad*, se tiene que

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$$

luego, por la propiedad A.3, se tiene

$$\frac{x+y}{y} = \frac{5+2}{2}$$

de dónde, por la propiedad A.2, se cumple que

$$\frac{x+y}{5+2} = \frac{y}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$$

pero, se sabe que $x+y=3$, *de dónde*

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} &= \frac{x}{5}\\ x &= \frac{15}{7}\end{aligned}$$

Forma 2: se aplica el teorema fundamental en primer lugar, y luego se despeja y y se sustituye en la igualdad de razones.

Dado que las rectas $\overleftrightarrow{KN} = l$, $\overleftrightarrow{LO} = m$ y $\overleftrightarrow{MP} = n$ son paralelas, por el *teorema de la proporcionalidad*, se tiene que

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$$

por otro lado, como $x+y=3$, *se tiene que*

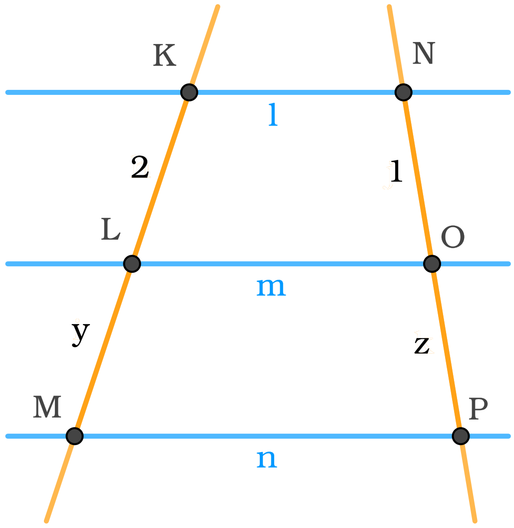
$$y = 3 - x$$

por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{x}{3-x} &= \frac{5}{2}\\ 2x &= 5(3-x)\\ 7x &= 15\\ x &= \frac{15}{7}.\end{aligned}$$

$\square$

3. En la figura, calcule el valor de z si l, m y n son rectas paralelas, $4xy = \frac{x}{y}$ y $x,\ y,\ z$ son positivos:



Respuesta. Se esperan al menos dos formas posibles de resolver este problema.

Forma 1: se aplica el teorema fundamental en primer lugar, pues, las rectas $\overleftrightarrow{KN} = l$, $\overleftrightarrow{LO} = m$ y $\overleftrightarrow{MP} = n$ son paralelas, por el *teorema de la proporcionalidad*, se tiene que

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{z}$$

a continuación, aplicando la propiedad A.2 sobre $4xy = \frac{x}{y}$, se tiene

$$4xy^2 = x$$

es por ello que

$$y = \frac{1}{2}$$

así, reemplazando en el resultado del teorema de la proporcionalidad, se tiene que

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{z}$$

aplicando la propiedad A.2 sobre la expresión anterior se tiene que

$$2z = \frac{1}{2},$$

finalmente se tiene que:

$$z = \frac{1}{4}$$

Forma 2: se aplica el teorema fundamental en primer lugar, y luego se despeja y y se sustituye en la igualdad de razones.

Dado que las rectas $\overleftrightarrow{KN} = l$, $\overleftrightarrow{LO} = m$ y $\overleftrightarrow{MP} = n$ son paralelas, por el *teorema de la proporcionalidad*, se tiene que

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{z}$$

ahora, de la hipótesis $4xy = \frac{x}{y}$ se tiene:

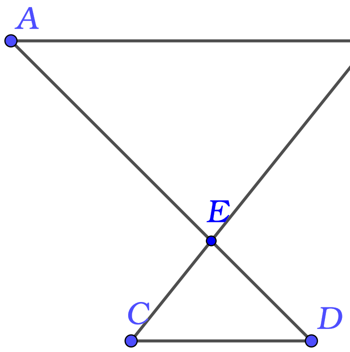
$$\begin{aligned} 4xy &= \frac{x}{y} \\ y^2 &= \frac{x}{4x} \\ y &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

así, podemos escribir:

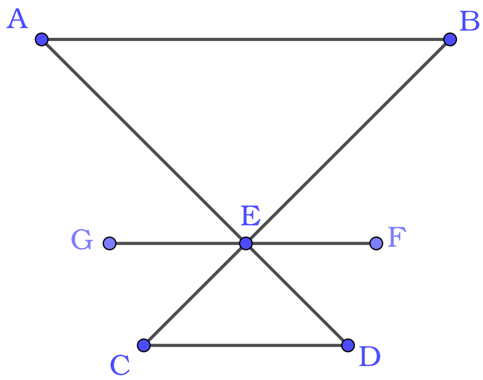
$$\begin{aligned} \frac{2}{y} &= \frac{1}{z} \\ z &= \frac{y}{2} \\ z &= \frac{\frac{1}{2}}{2} \\ z &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

4. *En la figura, calcule el valor de BE si las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas, $AE = 10$, $DE = 5$ y $CE = 4$:*



Respuesta. Por el teorema de la existencia de una paralela, existe una recta que pasa por E y además es paralela a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, ilustrando gráficamente tenemos:



dónde la recta descrita anteriormente será $\overleftrightarrow{FG}$. Notar que en el gráfico se usan segmentos, pero para el paralelismo se están definiendo rectas. Ahora, AD y BC son dos segmentos transversales a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{FG}$, por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema fundamental de la proporcionalidad y podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{DE} &= \frac{BE}{CE} \\
\frac{10}{5} &= \frac{BE}{4} \\
\frac{BE}{4} &= 2 \\
BE &= (4)(2) \\
BE &= 8.
\end{aligned}$$

□

Resultado

Comprender el concepto de semejanza de triángulos.

Ilustración

1. Enuncie el concepto de semejanza de triángulos.

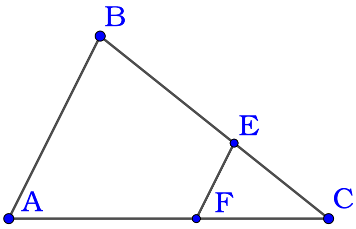
   Respuesta. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una semejanza si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. En este caso, se dirá que los triángulos semejantes y se escribirá $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

   Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces:

   $$\angle A \cong \angle D, \ \angle B \cong \angle E, \ \angle C \cong \angle F \ y \ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}. \qquad \square$$

2. Presente un ejemplo de triángulos semejantes y explique por qué lo son mediante la definición

   Respuesta. Dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle FEC$ como sigue:



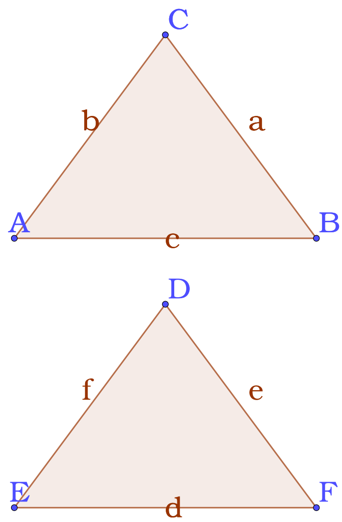
   dónde $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{EF}$. Así, como $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{EF}$, los ángulos $\angle A$ y $\angle F$ son congruentes al ser correspondientes de rectas paralelas. Siguiendo el mismo razonamiento, los ángulos $\angle B$ y $\angle E$ son congruentes, es decir,

   $$\angle A \cong \angle F, \angle B \cong \angle E \ y \ \angle C \cong \angle C.$$

   Por otro lado, por el teorema fundamental de la proporcionalidad, tenemos que

   $$\frac{AC}{FC} = \frac{BC}{EC}. \qquad \square$$

   Respuesta. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CEF$ como sigue:



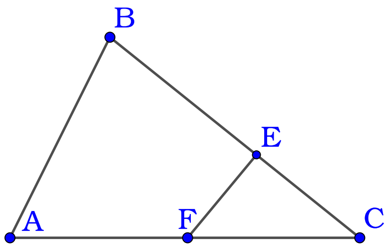
dónde $\angle A = \angle E =$, $\angle C = \angle D$, $AC = 3$, $DE = 9$, $BC = 5$ y $DF = 15$.

Puesto que dos de los tres ángulos de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CEF$ son iguales, se sigue que el ángulo restante también lo es, es decir,

$$\angle B = \angle F. \qquad \square$$

3. Presente un ejemplo de triángulos que no son semejantes

Respuesta. Dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CEF$ como sigue:



Los ángulos internos cada triángulo no son congruentes, por tanto, no cumple una parte de la definición y basta para decir que no son semejantes. $\square$

Resultado

Explicar la diferencia entre congruencia y semejanza entre triángulos

Ilustración

1. Explique la diferencia entre congruencia y semejanza

   Respuesta. Diremos que dos triángulos son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Por otra parte, dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. □

2. Dados dos triángulos congruentes, ¿son semejantes? Explique.

   Respuesta. Dados dos triángulos congruentes, entonces sus lados correspondientes y ángulos correspondientes son congruentes, es decir, que tengan la misma medida. Por lo tanto, los lados correspondientes de los triángulos son proporcionales, con proporción uno. De esta manera, si dos triángulos son congruentes también son semejantes. □

3. Dados dos triángulos semejantes, ¿son congruentes? Explique.

   Respuesta. Dados dos triángulos semejantes, se tiene que sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados son proporcionales. En este caso, dado que la congruencia requiere que ambos triángulos tengan lados correspondientes con la misma medida, los triángulos no son congruentes. □

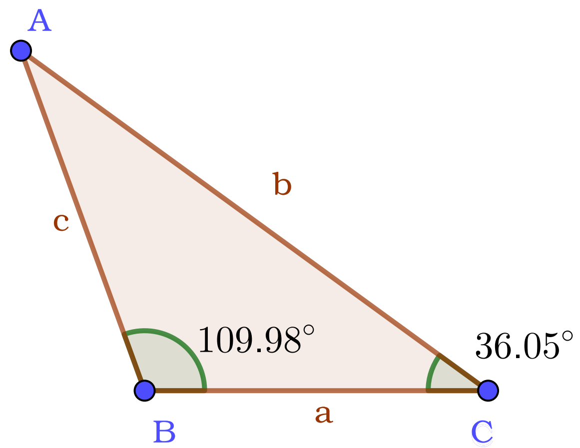
Resultado

Explicar si dos triángulos dados son semejantes mediante la definición

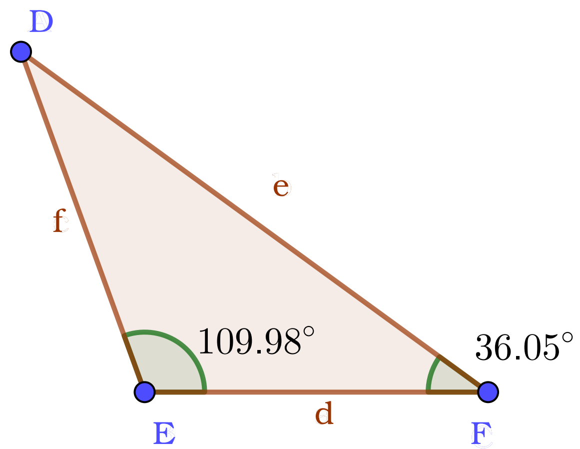
Ilustración

1. Dados los siguientes pares de triángulos, justifique y explique mediante la definición por qué son, o no, triángulos semejantes.

   a) $AB = 5{,}27,\ BC = 5,\ AC = 8{,}41\ \angle B = 109{,}98,\ \angle C = 36{,}05$



$DE = 10{,}54,\ \ EF = 10,\ \ DF = 16{,}82\ \angle B = 109{,}98,\ \ \angle C = 36{,}05$



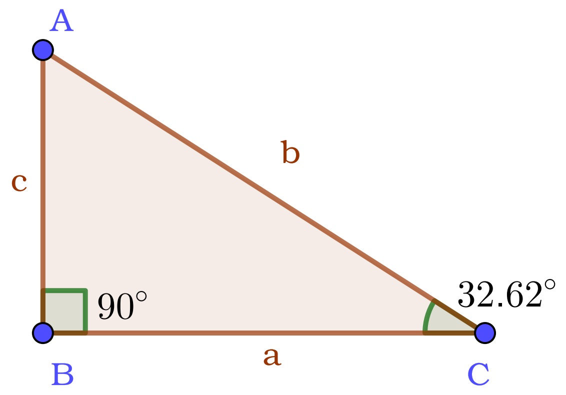
Respuesta.

- En el $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ como tienen dos ángulos iguales entonces son semejantes.
- Son semejantes porque tienen sus lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

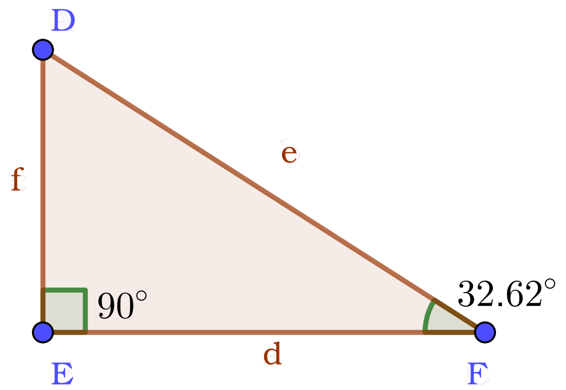
$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$$

$$\frac{10{,}54}{5{,}27} = \frac{10}{5} = \frac{16{,}82}{8{,}41} = 2. \qquad \square$$

b) $AB = 3{,}2,\ \ BC = 5,\ \ AC = 5{,}94\ \angle B = 90,\ \ \angle C = 32{,}62$



$DE = 1{,}28,\ EF = 2,\ DF = 2{,}376\ \angle B = 90,\ \angle C = 32{,}62$



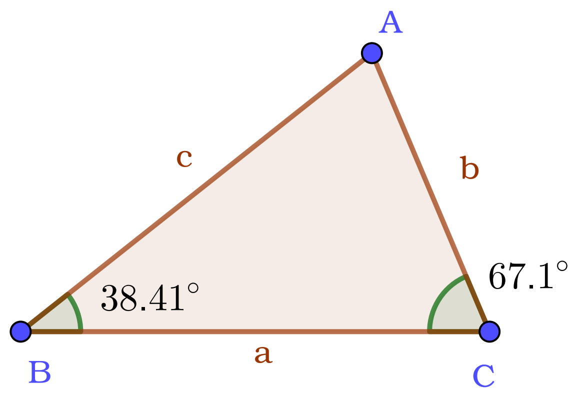
Respuesta.

- En el $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ como tienen dos ángulos iguales entonces son semejantes.
- Son semejantes porque tienen sus lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

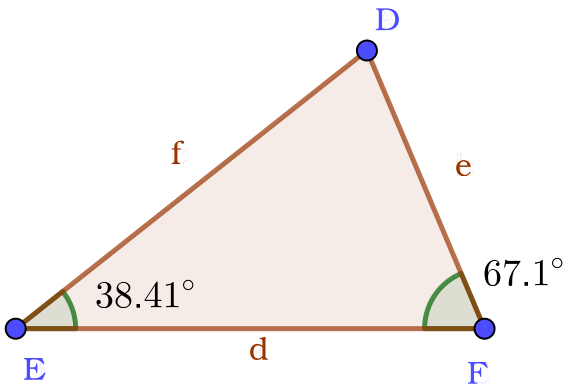
$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$$

$$\frac{1{,}28}{3{,}2} = \frac{2}{5} = \frac{2{,}376}{5{,}94} = \frac{2}{5}.$$ □

c) $AB = 4{,}97,\ BC = 5{,}2,\ AC = 3{,}35\ \angle B = 38{,}41,\ \angle C = 67{,}1$



$$DE = 7{,}455,\ \ EF = 7{,}8,\ \ DF = 5{,}025\ \angle B = 38{,}41,\ \ \angle C = 67{,}1$$



Respuesta.

- En el $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ como tienen dos ángulos iguales entonces son semejantes.
- Son semejantes porque tienen sus lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$$

$$\frac{7{,}455}{4{,}97} = \frac{7{,}8}{5{,}2} = \frac{5{,}025}{3{,}35} = \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Resultado

Comprender el teorema Ángulo - Ángulo - Ángulo

Ilustración

1. Enuncie el teorema Ángulo - Ángulo - Ángulo

Respuesta. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$, si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza y se escribirá $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, entonces

$$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E \text{ y } \angle C \cong \angle F. \qquad \square$$

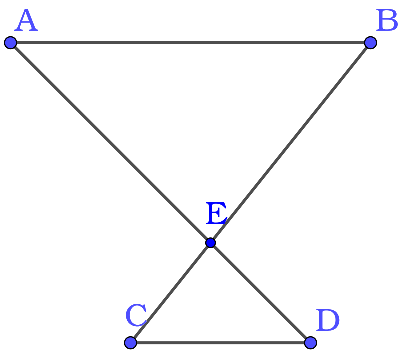
Resultado

Aplicar el teorema Ángulo - Ángulo - Ángulo para identificar triángulos semejantes.

Ilustración

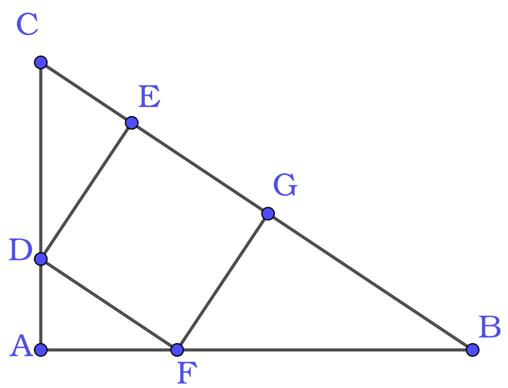
1. Mediante el teorema Ángulo - Ángulo - Ángulo, identifique si los triángulos dados son (o no) semejantes:

   a) En la figura, muestre que los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle CDE$ son semejantes, si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas.

   Respuesta. En el $\triangle ABE$ el $\angle E$ es igual al $\angle E$ del $\triangle CED$, como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos; el $\angle A$ es igual al $\angle D$ por ángulos alternos internos entre paralelas y una transversal; del mismo modo se tiene para el $\angle C$ y el $\angle B$, de tal modo se puede aplicar el teorema Ángulo - Ángulo - Ángulo, así, $\triangle ABE \sim \triangle CED$. $\square$

   b) Dada la figura, si se cumple que $\square DEFG$ es un cuadrado, $\angle A = 90$, pruebe que los triángulos $\triangle ADF$ y $\triangle BFG$ son semejantes.

   Respuesta. En el $\triangle BFG$ el $\angle G = 90$ por ángulos suplementarios, el $\overline{DF}$ es paralelo al $\overline{CB}$, así, el $\angle B$ es igual al $\angle F$ del $\triangle ADF$ que llamaremos $\angle X$, por ángulos correspondientes, además, el $\angle D$ del $\triangle ADF$ es igual a $90 - \angle X$ del $\triangle ADF$, por otro lado, el $\angle F$ del $\triangle BFG$ es igual $90 - \angle B$, pero como $\angle B \cong \angle X$ entonces el $\angle F$ del $\triangle BFG$ es igual $90 - \angle X$, de tal modo que se puede aplicar el teorema Ángulo - Ángulo - Ángulo, así, $\triangle ADF \sim \triangle BFG$. $\square$

Resultado

Comprender el teorema Lado - Ángulo - Lado

Ilustración

1. Enuncie el teorema Lado - Ángulo - Lado

Respuesta. *Dados dos triángulos* $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *y la correspondencia* $ABC \leftrightarrow DEF$, *si*

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad y\ \angle C \cong \angle F,$$

entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. ☐

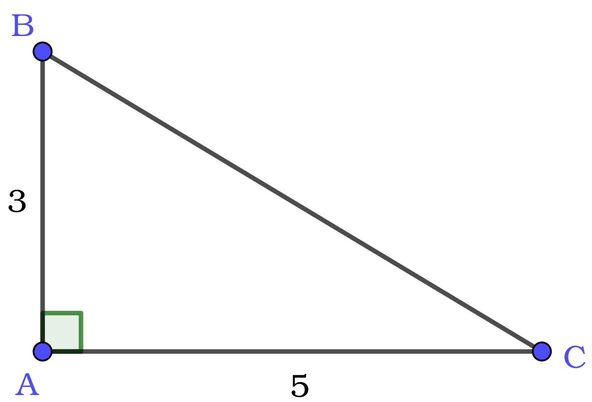
Resultado

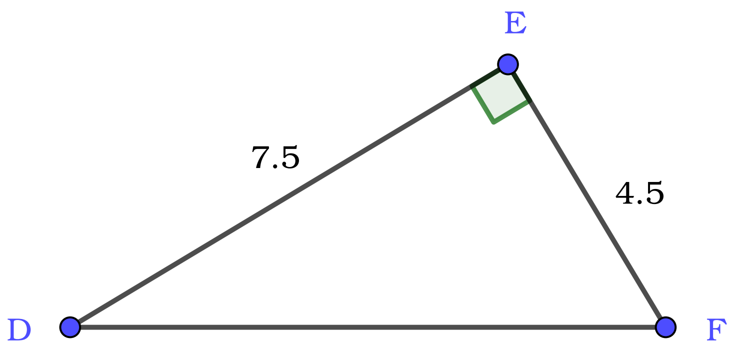
Aplicar el teorema Lado - Ángulo - Lado para identificar triángulos semejantes.

Ilustración

1. Mediante el teorema Lado - Ángulo - Lado, identifique si los triángulos dados son (o no) semejantes:

   a) Dadas las figuras, determine si los triángulos ABC y DEF son semejantes.



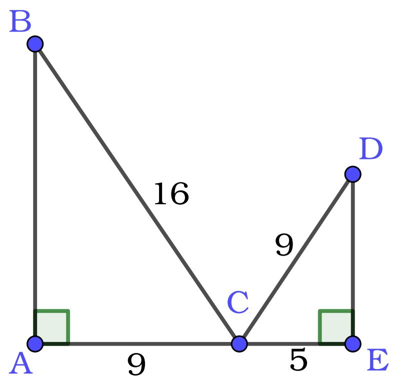


Respuesta. En el $\triangle ABC$ el $\angle A = 90$, se encuentra entre $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, por otro lado en el $\triangle EDF$ el $\angle E = 90$, se encuentra entre $\overline{ED}$ y $\overline{EF}$, así,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{3}$$

, luego, aplicando el teorema Lado-Ángulo-Lado, se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\square$

b) En la figura dada, determine si los triángulos ABC y CDE son semejantes.



Respuesta. Como $\triangle ABC$ y $\triangle EDC$ son triángulos rectos, se tiene, en el $\triangle ABC$ que $\angle C = arccos(\frac{9}{16}) \approx 55{,}77$, mientras que en el $\triangle EDC$ que $\angle C = arccos(\frac{5}{9}) \approx 56{,}25$, como el ángulo comprendido entre los segmentos no es igual los triángulos no son semejantes. $\square$

2. *Dados los triángulos escalenos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, tales que $AB = BC$ y $DE = EF$, use el teorema Lado - Ángulo - Lado para dar una condición con la cual los triángulos sean semejantes.*

Respuesta. Para que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ sen semejantes usando el teorema Lado-Ángulo-Lado, el $\angle B$ y el $\angle E$ deben ser iguales. $\square$

Resultado

Comprender el teorema Lado - Lado - Lado

Ilustración

1. Enuncie el teorema Lado - Lado - Lado

   Respuesta. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ *y* $\triangle DEF$ *y la correspondencia* $ABC \leftrightarrow DEF$*, si*
   $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$
   entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$*.* □

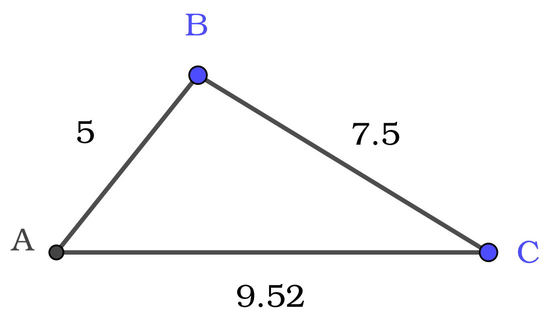
Resultado

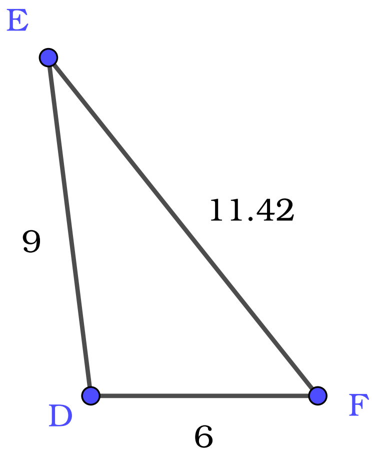
Aplicar el teorema Lado - Lado - Lado para identificar triángulos semejantes.

Ilustración

1. Mediante el teorema Lado - Lado - Lado, identifique si los triángulos dados son (o no) semejantes:

   a) Dados los triángulos ABC y DEF, determine si son o no semejantes.



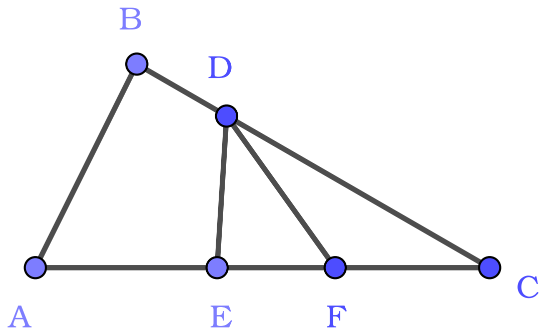


Respuesta. Del $\triangle ABC$ y del $\triangle DEF$,

$$\frac{5}{6} = \frac{7{,}5}{9} = \frac{9{,}52}{11{,}42} = \frac{5}{6},$$

entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\square$

b) Dada la figura, determine si los triángulos ABC y DEF son o no semejantes, se sabe que $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \alpha$ y $\frac{1}{\alpha} = \frac{DF}{BC}$.



Respuesta. Como $\frac{1}{\alpha} = \frac{DF}{BC}$, entonces $\alpha = \frac{BC}{DF}$, de donde,

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{BC}{DF} = \alpha,$$

luego, aplicando el teorema Lado-Lado-Lado, se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\square$

2. *Dados dos triángulos equiláteros cualesquiera, ¿se puede concluir que son semejantes?*

Respuesta. Como son triángulos equiláteros, se tiene que sus lados son iguales, para el primer triángulo se puede tener que el valor de sus lados sea X, mientras que para el segundo el valor de sus lados se tiene que es Y, como son iguales se tendrá la misma correspondencia de $\frac{X}{Y}$, así, aplicando el teorema de Lado-Lado-Lado, se tiene que los triángulos son semejantes. $\square$

Resultado

Comprende el teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

Ilustración

1. Enuncia el teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

   Se presentan dos resultados aceptables:

   Respuesta. En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa "divide" al triángulo en dos triángulos que son semejantes entre sí y son semejantes al triángulo dado. $\square$

   Respuesta. Dado el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, donde C es el vértice del ángulo recto, sea $\overline{CD}$ la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa. Entonces,

   $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ y $\triangle BCD \sim \triangle BAC$. $\square$

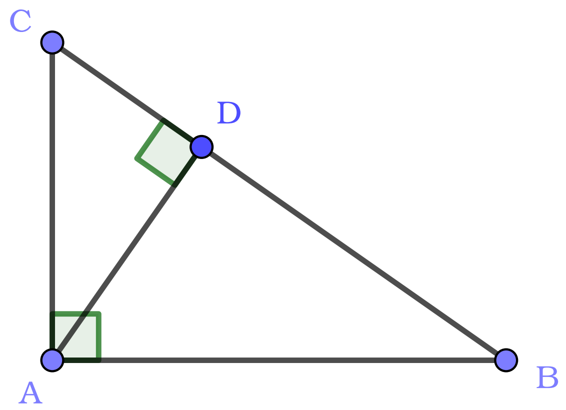
Resultado

Aplica el teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo.

Ilustración

1. Mediante el teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo, determine si los triángulos son (o no) semejantes:

   a) Verifique si los triángulos ABC y ACD son o no semejantes.



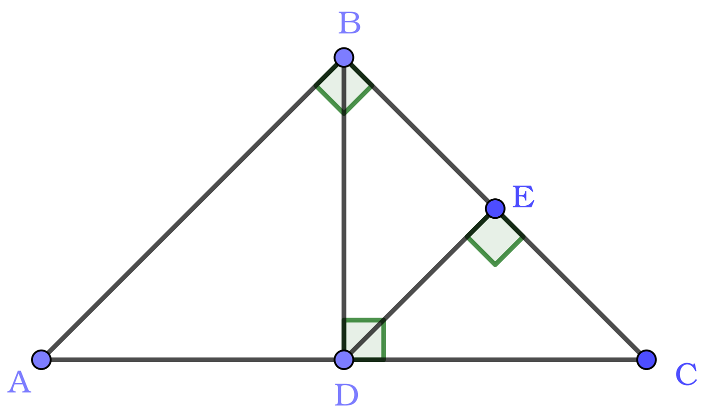
Respuesta. Se tiene que la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$ es el segmento $\overline{AD}$, además, el vértice A corresponde al ángulo recto, es así que por el teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo, se cumple que:

$$\triangle ACD \sim \triangle BAD,\ \triangle ACD \sim \triangle ABC \text{ y } \triangle ABD \sim \triangle ABC$$

con lo cual, efectivamente, los triángulos ABC y ACD son semejantes.

□

b) En la figura dada, determine si los triángulos ABC y CDE son o no semejantes.



Respuesta. Se puede ver que el vértice B corresponde al ángulo recto del triángulo ABC, además, el segmento $\overline{BD}$ es la altura correspondiente a su hipotenusa, por tanto:

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

, por otro lado, la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo $\triangle BCD$ es el segmento $\overline{DE}$ y el vértice D corresponde al ángulo recto, de dónde:

$$\triangle BCD \sim \triangle CDE$$

, dónde ambas conclusiones provienen de la aplicación del teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo. Finalmente, como $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ y $\triangle BCD \sim \triangle CDE$, se tiene que los triángulos ABC y CDE son semejantes. □

3.4.2. Movimientos en el plano

Al culminar los temas del presente módulo los estudiantes serán capaces de:

Resultado

Comprender el concepto de movimiento en el plano

Ilustración

1. Enuncie la definición de movimiento en el plano

   Se presentas dos posibles respuestas aceptables:

   Respuesta. Un *movimiento* en el plano β es una función de β sobre sí mismo, dicha función debe ser biyectiva y preservar la distancia entre puntos. □

   Respuesta. Un *movimiento* en el plano β es una función $\tau\colon \beta \longrightarrow \beta$ tal que:

   - τ es invertible; y,
   - para todo $A \in \beta$ y todo $B \in \beta$, se tiene que

   $$AB = \tau A \tau B$$

   . □

2. Indique por qué a un movimiento también se le denomina isometría

   Respuesta. Sea τ un movimiento sobre el plano β, se cumple que para cualquier par de puntos A y B en β la distancia de A a B es igual a la distancia de τA a τB, por ello, a un movimiento se lo llama también *isometría*. $\square$

3. Determine, por la definición, si las funciones descritas definen un movimiento en el plano

   ▪

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2) = (x_1 + 3, x_2 - 1)
\end{aligned}
$$

Respuesta. Veamos primero si la función es invertible, para ello:

- Sean $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ puntos en el plano β tales que:

$$f(A) = C \quad \text{y} \quad f(B) = C,$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
f(A) &= C & f(B) &= C \\
(a_1 + 3, a_2 - 1) &= (c_1, c_2) & (b_1 + 3, b_2 - 1) &= (c_1, c_2) \\
a_1 + 3 &= c_1 & b_1 + 3 &= c_1 \\
a_2 - 1 &= c_2 & b_2 - 1 &= c_2
\end{aligned}
$$

finalmente, se concluye que:

$$a_1 = b_1 \quad \text{y} \quad a_2 = b_2,$$

por tanto, la función es inyectiva.

- Sea $B = (b_1, b_2) \in \beta$, mostraremos que existe $A = (a_1, a_2)$ tal que $f(A) = B$, así, se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
f(A) = B &\Leftrightarrow (a_1 + 3, a_2 - 1) = (b_1, b_2) \\
&\Leftrightarrow a_1 + 3 = b_1 \quad \text{y} \quad a_2 - 1 = b_2 \\
&\Leftrightarrow a_1 = b_1 - 3 \quad \text{y} \quad a_2 = b_2 + 1
\end{aligned}
$$

es decir, para $B = (b_1, b_2)$ arbitrario y fijo existe $A = (b_1 - 3, b_2 + 1) \in B$ tal que $f(A) = B$, por tanto, f es sobreyectiva.

De los dos puntos anteriores, se tiene que f es biyectiva, por tanto, invertible. Luego, sean $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2) \in \beta$, probemos que

$AB = f(A)f(B)$. Se sabe que $AB = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$, por otro lado:

$$\begin{aligned}
f(A)f(B) &= (a_1+3, a_2-1)(b_1+3, b_2-1) \\
&= \sqrt{(a_1+3-(b_1+3))^2+(a_2-1-(b_2-1))^2} \\
&= \sqrt{(a_1+3-b_1-3)^2+(a_2-1-b_2+1)^2} \\
&= \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}
\end{aligned}$$

con lo cual se tiene que preserva la distancia. Dado que se demostró que f es invertible y preserva la distancia, entonces f es un movimiento. □

▪

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(x_1, x_2) &\mapsto g(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(2x_1-7, 2x_2+5)
\end{aligned}$$

Respuesta. Tomemos en cuenta que:

$$\frac{1}{2}(2x_1-7, 2x_2+5) = \left(x_1-\frac{7}{2}, x_2+\frac{5}{2}\right)$$

luego, verifiquemos que la función es invertible, para ello:

- Sean $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ puntos en el plano β tales que:

  $$g(A) = C \quad \text{y} \quad g(B) = C,$$

  entonces:

  $$\begin{aligned}
  g(A) &= C & g(B) &= C \\
  \left(a_1-\frac{7}{2}, a_2+\frac{5}{2}\right) &= (c_1, c_2) & \left(b_1-\frac{7}{2}, b_2+\frac{5}{2}\right) &= (c_1, c_2) \\
  a_1-\frac{7}{2} &= c_1 & b_1-\frac{7}{2} &= c_1 \\
  a_2+\frac{5}{2} &= c_2 & b_2+\frac{5}{2} &= c_2
  \end{aligned}$$

  finalmente, se concluye que:

  $$a_1 = b_1 \quad \text{y} \quad a_2 = b_2,$$

  por tanto, la función es inyectiva.

- Sea $B = (b_1, b_2) \in \beta$, mostraremos que existe $A = (a_1, a_2)$ tal que $f(A) = B$, así, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} f(A) = B &\Leftrightarrow (a_1 + 3, a_2 - 1) = (b_1, b_2) \\ &\Leftrightarrow a_1 - \frac{7}{2} = b_1 \quad \text{y} \quad a_2 + \frac{5}{2} = b_2 \\ &\Leftrightarrow a_1 = b_1 + frac72 \quad \text{y} \quad a_2 = b_2 - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

  es decir, para $B = (b_1, b_2)$ arbitrario y fijo existe $A = (b_1 + frac72, b_2 - \frac{5}{2}) \in B$ tal que $f(A) = B$, por tanto, f es sobreyectiva.

De los dos puntos anteriores, se tiene que f es biyectiva, por tanto, invertible. Luego, sean $A = (a_1, a_2),\ B = (b_1, b_2) \in \beta$, probemos que $AB = f(A)f(B)$. Se sabe que $AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, por otro lado:

$$\begin{aligned} f(A)f(B) &= (a_1 - \frac{7}{2}, a_2 + \frac{5}{2})(b_1 - \frac{7}{2}, b_2 + \frac{5}{2}) \\ &= \sqrt{(a_1 - \frac{7}{2} - (b_1 - \frac{7}{2}))^2 + (a_2 + \frac{5}{2} - (a_2 + \frac{5}{2}))^2} \\ &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \end{aligned}$$

con lo cual se tiene que preserva la distancia. Dado que se demostró que f es invertible y preserva la distancia, entonces f es un movimiento. □

- $$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto h(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1}, x_2) \end{aligned}$$

Respuesta. No define un movimiento, pues para el punto (a, b) con $a < 0$, no podemos hallar $h(a, b)$. □

Resultado

Conocer las propiedades que se preservan por los movimientos isométricos

Ilustración

1. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, explique por qué.

   - Si τ es un movimiento, entonces la imagen de un triángulo bajo τ también es un triángulo, y es uno semejante con el dado.

     Respuesta. La afirmación es verdadera, pues, la imagen de un triángulo bajo τ también es un triángulo, y es uno congruente con el dado, pero si un triángulo es congruente a otro, también es semejante, con lo que se tiene el resultado. □

   - El inverso de un movimiento también es un movimiento bajo las condiciones adecuadas.

     Respuesta. La afirmación es falsa pues el inverso de un movimiento es un movimiento, no se requiere de ninguna condición. □

   - Si el segmento $\overline{AB}$ es congruente al segmento $\overline{CD}$ y τ es un movimiento, entonces $\tau\left(\overline{AB}\right)$ es congruente al segmento $\overline{CD}$.

     Respuesta. La afirmación es verdadera, pues si τ es un movimiento, entonces $\overline{AB} \cong \overline{\tau(A)\tau(B)}$, además, por hipótesis se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, por tanto $\tau\left(\overline{AB}\right) = \overline{\tau(A)\tau(B)} \cong \overline{CD}$. □

Resultado

Describir geométricamente la traslación del plano en una dirección dada

Ilustración

1. Dados dos puntos distintos A y B en el plano β y dado un sistema de coordenadas para β, si

$$\begin{aligned} \varphi_{\overrightarrow{AB}} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a, x_2 + b), \end{aligned}$$

describa la o las condiciones para que exista una traslación τ tal que para todo X cuyas coordenadas sean (x_1, x_2), entonces las coordenadas de $\tau(X)$ sean $\varphi(x_1, x_2)$

Respuesta. La única condición es que $a = b_1 - a_1$ y $b = b_2 - a_2$, con ello, las coordenadas de $\tau_{\overrightarrow{AB}}(X)$ son $(x_1 + a, x_2 + b)$. □

2. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, explique por qué.

   - Si f es una traslación, entonces la imagen de un triángulo bajo f también es un triángulo, y es uno semejante con el dado.

     Respuesta. Dado que una traslación es también un movimiento, entonces la imagen de un triángulo bajo f también es un triángulo, y es uno congruentes con el dado. Ahora, si dos triángulo son congruentes también son semejantes, por tanto la afirmación es verdadera. □

   - Si el segmento $\overline{AB}$ es congruente al segmento $\overline{CD}$ y τ es una traslación, entonces $\tau\left(\overline{AB}\right)$ es perpendicular al segmento $\overline{CD}$.

     Respuesta. La afirmación es verdadera, pues si τ es una traslación, es también un movimiento, entonces $\overline{AB} \cong \overline{\tau(A)\tau(B)}$, además, por hipótesis se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, por tanto $\tau\left(\overline{AB}\right) = \overline{\tau(A)\tau(B)} \cong \overline{CD}$.
     □

Resultado

Determinar la traslación en una dirección dada en un sistema de coordenadas

Ilustración

1. Sean A y B puntos cuyas coordenadas son $(4, -2)$ y $(0, -6)$, respectivamente. Determine la traslación en dirección de A a B.

Respuesta. La traslación de A a B en el sistema de coordenadas tiene la forma

$$\begin{aligned} \varphi_{\overrightarrow{AB}} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 + a, x_2 + b), \end{aligned}$$

es así que

$$\begin{aligned} 4 + a &= 0 & \qquad -2 + b &= -6 \\ a &= -4 & b &= -4 \end{aligned}$$

por tanto, la traslación es:

$$\begin{aligned} \varphi_{\overrightarrow{AB}} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 - 4, x_2 - 4). \end{aligned}$$

□

2. Sean A, B, C, D puntos cuyas coordenadas son $(1,1)$, $(3,2)$, $(0,3)$ y $(2,4)$, respectivamente. Determine el movimiento tal que la traslación de $\overline{AB}$ es $\overline{CD}$.

   Respuesta. La traslación es:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1 - 1, x_2 + 2), \end{aligned}$$

pues:

$$\begin{aligned} f(A) &= (1-1, 1+2) & \qquad f(B) &= (3-1, 2+2) \\ &= (0,3) & &= (2,4) \\ &= C & &= D. \end{aligned}$$

□

Resultado

Determinar las coordenadas de un punto obtenido por la traslación de otro punto

Ilustración

1. Dada la traslación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(x_1 - 1, x_2 + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

   determine las coordenadas de los siguientes puntos:

   - $(0, 0)$
   - $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
   - $\left(2{,}5, -\frac{7}{2}\right)$

   Respuesta. Para cada punto se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0) &= \left(0 - 1, 0 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(1, -\frac{1}{2}\right) &= \left(1 - 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(2{,}5, -\frac{7}{2}\right) &= \left(2{,}5 - 1, -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, -3\right). \end{aligned}$$

   □

2. Dada la traslación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(x_1, x_2) &\mapsto \left(x_1 + 3, x_2 - \frac{5}{2}\right), \end{aligned}$$

   determine los puntos (x, y) tales que el resultado de $\varphi(x, y)$ sean los puntos:

   - $(0, 2)$
   - $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$

- $\left(1{,}2, -\frac{1}{7}\right)$

Respuesta. Dado que los puntos son resultado de la traslación, basta con aplicar la inversa de la traslación φ, se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi^{-1}(x_1, x_2) &\mapsto \left(x_1 - 3, x_2 + \frac{5}{2}\right),\end{aligned}$$

con ello:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(0,2) &= \left(0 - 3, 2 + \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(-3, \frac{9}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\left(3, -\frac{5}{2}\right) &= \left(3 - 3, -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) \\ &= (0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\left(1{,}2, -\frac{1}{7}\right) &= \left(1{,}2 - 3, -\frac{1}{7} - \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{9}{5}, -\frac{37}{14}\right).\end{aligned}$$

□

Resultado

Describir geométricamente la rotación del plano

Ilustración

1. Escriba la definición geométrica de rotación de un punto en el plano

   Respuesta. Dado un $\angle A$ orientado y un punto C, si X es un punto del plano β, la rotación de centro C y ángulo $\angle A$ de X es el punto Y del plano β tal que

   $$\overline{CY} \cong \overline{CX} \quad \text{y} \quad \angle XCY \cong \angle A$$

   En este caso, el ángulo $\angle XCY$ también es "orientado". □

2. Dado un sistema de coordenadas, si O es el origen de coordenadas,

de una condición para el rayo $\overrightarrow{OE}$ tal que el ángulo $\angle EOG$ sea un ángulo es el sistema de coordenadas.

Respuesta. El rayo $\overrightarrow{OE}$ está en el eje de coordenadas horizontal tal que la abscisa de E es mayor que 0. □

3. Dada una recta $\overleftrightarrow{AE}$ tal que la ordenada de A y la ordenada de E son iguales a cero y sus abscisas son mayores que cero, si O es el origen, ¿es $\angle AOE$ un ángulo en un sistema de coordenadas?

Respuesta. De la hipótesis se puede concluir que el rayo $\overrightarrow{OA}$ y el rayo $\overrightarrow{OE}$ están en el eje coordenado horizontal, por tanto, no puede ser un ángulo en el sistema de coordenadas. □

Resultado

Determinar las coordenadas de un punto obtenido por la rotación de otro punto.

Ilustración

1. Dado el punto A cuyas coordenadas son $(-1, 3)$, calcule las coordenadas de su imagen respecto a una rotación de centro en el origen O y ángulo α tal que $m_o\alpha = 45$.

Respuesta. Veamos que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 \\ 3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 \\ 3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto, la rotación indicada del punto A es $(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. □

2. Dado el punto A cuyas coordenadas son (x_1, x_2), calcule las coordenadas de su imagen respecto a una rotación de centro en el origen O y ángulo α.

Respuesta. Veamos que:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Por tanto, la rotación indicada del punto A es $\begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha \end{pmatrix}$. □

Resultado

Determinar la ecuación de una recta que es imagen de otra recta bajo una traslación dada.

Ilustración

1. Sea λ una recta cuya ecuación es $5x - y + 6 = 0$ y f una traslación tal que:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2) = (x_1 + 3, x_2 - 1), \end{aligned}$$

determine la imagen de mu bajo f.

Respuesta. Sea μ la recta que se obtiene luego de la traslación de λ (es decir, μ es la recta en la que se "transforma" λ por medio de la traslación f). En primer lugar, como $\mu \parallel \lambda$, entonces la ecuación de λ tendrá la forma

$$5x - y + C = 0$$

Es así que basta con determinar el valor de C, para ello, se sabe que $(x, y) \in \lambda$ si y solo si $(x + 3, x - 1) \in \mu$, luego:

$$\begin{aligned} 5x - y + 6 = 0 &\equiv 5(x + 3) - (y - 1) + C = 0 \\ &\equiv 5x + -y + 16 + C = 0 \\ &\equiv -6 + 16 + C = 0 \\ &\equiv 10 + C = 0 \\ &\equiv C = -10 \end{aligned}$$

por tanto, la ecuación de μ es $5x - y - 10 = 0$. □

2. Sea μ una recta cuya ecuación es $ax + by + c = 0$, con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, y λ es la imagen de μ bajo la traslación f, si

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2) = (x_1 + p, x_2 + q), \end{aligned}$$

Respuesta. Se sabe que $\mu \parallel \lambda$, entonces la ecuación de λ tendrá la forma

$$ax + by + w = 0.$$

Es así que basta con determinar el valor de w, para ello, se sabe que $(x, y) \in \mu$ si y solo si $(x + p, x + q) \in \lambda$, luego:

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 &\equiv a(x + p) + b(y + q) + w = 0 \\ &\equiv ax + by + ap + bq + w = 0 \\ &\equiv -c + ap + bq + w = 0 \\ &\equiv w = c - ap - bq \end{aligned}$$

por tanto, la ecuación de λ es $ax + by + c - ap - bq = 0$. □

Resultado

Determinar la ecuación de una recta que es imagen de otra recta bajo una rotación dada.

Ilustración

1. Sea μ una recta cuya ecuación es $5x - y + 6 = 0$ y λ la recta que se obtiene al rotar μ respecto al origen de coordenadas un ángulo α tal que $m_o\alpha = 45$, halle la ecuación de λ.

Respuesta. Tenemos que $P(x, y)$ está en λ si y solo si $(x, y) \in \mathscr{G}(\lambda)$ y, también, $(x,y) \in \mathscr{G}(\lambda)$ si y solo si $\rho_{-\alpha}(x,y) \in \mathscr{G}(\mu)$. Primero, veamos que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos -45^\circ & -\sin -45^\circ \\ \sin -45^\circ & \cos -45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por tanto:

$$\rho_{-\alpha}(x,y) \in \mathscr{G}(\mu) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)\right) \mathscr{G}(\mu),$$

es así que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\right) \in \mathscr{G}(\mu) &\equiv 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)\right) + 6 = 0 \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(5(x+y) - (y-x)) + 6 = 0 \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(5x + 5y - y + x) + 6 = 0 \\
&\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(6x + 4y) + 6 = 0 \\
\equiv \frac{6}{\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}}y + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de λ es

$$\frac{6}{\sqrt{2}}x + \frac{4}{\sqrt{2}}y + 6 = 0. \qquad \square$$

2. Sea μ una recta cuya ecuación es $ax - by + c = 0$, con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, y λ la recta que se obtiene al rotar μ respecto al origen de coordenadas un ángulo α, halle la ecuación de λ.

Respuesta. Tenemos que $P(x,y)$ está en λ si y solo si $(x,y) \in \mathscr{G}(\lambda)$ y, también, $(x,y) \in \mathscr{G}(\lambda)$ si y solo si $\rho_{-\alpha}(x,y) \in \mathscr{G}(\mu)$. Primero, veamos que:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix},$$

por tanto:

$$\rho_{-\alpha}(x,y) \in \mathscr{G}(\mu) \equiv (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)\, \mathscr{G}(\mu),$$

es así que:

$$
\begin{aligned}
(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha) \in \mathscr{G}(\mu) &\equiv a\,(x\cos\alpha - y\sin\alpha) \\
&\quad + b\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + c = 0 \\
&\equiv (a\cos\alpha + b\sin\alpha)x + (b\cos\alpha \\
-a\sin\alpha)y + c = 0
\end{aligned}
$$

Finalmente, la ecuación de λ es

$$(a\cos\alpha + b\sin\alpha)x + (b\cos\alpha - a\sin\alpha)y + c = 0. \qquad \square$$

Resultado

Aplicar la rotación para determinar la forma canónica de una cónica.

Ilustración

1. Dada la cónica cuya ecuación es $3x^2+8xy+9y^2 = 6$, se sabe que dicha cónica es una elipse. Halle su ecuación en la forma canónica.

   Respuesta. Dada una cónica de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, para llevarla a su forma canónica deberemos rotar un ángulo θ cuya medida está dada por
   $$m_o\theta = \frac{\tan\frac{b}{a-c}^{-1}}{2}.$$
   La ecuación de la cónica en su forma canónica estará dada por:
   $$
   \begin{aligned}
   a(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + b(x\cos\theta - y\sin\theta)(x\cos\theta + y\sin\theta) \\
   + c(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = d. \quad \square
   \end{aligned}
   $$

3.4.3. Paralelogramos y trapecios

Se definen y se caracterizan, unas mediante razonamientos geométricos únicamente, y otras con la ayuda del sistema de coordenadas. Al culminar los temas del presente módulo los estudiantes serán capaces de:

Resultado

Comprender el concepto de cuadrilátero convexo

Ilustración

1. Dado el cuadrilátero de vértices A, B, C y D, liste los lados y ángulos del cuadrilátero.

   Respuesta. Los lados del cuadrilátero son: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$. Los ángulos son: $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$. □

2. Dado el cuadrilátero de vértices A, B, C y D, si se cumple que A y B están en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{CD}$, ¿se puede decir que es convexo añadiendo otras condiciones?

   Respuesta. Se sabe que un cuadrilátero es convexo si los extremos de cada uno de sus lados están en el mismo semiplano de la recta que contiene al lado opuesto, es decir, cumple la condición de la hipótesis y además:

   - Los puntos B y C están del mismo lado que la recta $\overleftrightarrow{AD}$,
   - Los puntos C y D están del mismo lado que la recta $\overleftrightarrow{AB}$, y
   - Los puntos D y A están del mismo lado que la recta $\overleftrightarrow{BC}$. □

3. Dado el cuadrilátero de vértices A, B, C y D, si se cumple que:

   - A y B están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{CD}$,
   - B y C están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AD}$,
   - C y D están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$,
   - D y A están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BD}$,

   ¿se puede decir que es convexo?

   Respuesta. Para que sea convexo se debería cumplir que los puntos D y A están en el mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$, por tanto, no se puede decir que es convexo. □

Resultado

Diferenciar entre cuadriláteros convexos, rectángulos, cuadrados, rombos y paralelogramos

Ilustración

1. Dadas las hipótesis, indique si el cuadrilátero descrito es: convexo, paralelogramo, cuadrado, rectángulo o rombo, considere que un mismo cuadrilátero puede caer en varias categorías o en ninguna.

   - Dado el cuadrilátero de vértices A, B, C y D, tal que sus diagonales se intersecan.

     Respuesta. Con la hipótesis dado solo se puede concluir que se trata de un cuadrilátero convexo. $\square$

   - El cuadrilátero $\square ABCD$ cuyos lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.

     Respuesta. Dado que dos lados son paralelos, entonces es un trapecio. Como los trapecios son convexos, entonces es un cuadrilátero convexo. $\square$

   - El cuadrilátero $\square DEFG$ tal que $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{DG}$

     Respuesta. Por la hipótesis se tiene que los dos pares de lados opuestos son paralelos, por tanto, es un paralelogramo. Dado que es un paralelogramo, se puede concluir que es también un trapecio y un cuadrilátero convexo. $\square$

   - El cuadrilátero $\square AEIO$ convexo tal que la suma sus ángulos internos es 360.

     Respuesta. Por hipótesis, es un cuadrilátero convexo, no se puede concluir que sea de otro tipo pues en todo cuadrilátero convexo la suma sus ángulos internos es 360, lo que se indica en la hipótesis. $\square$

   - El cuadrilátero $\square AEIO$ convexo tal que $\overline{AE} \parallel \overline{IO}$ y $\overline{EI} \cong \overline{AO}$

     Respuesta. Dado que dos lados son paralelos, entonces es un trapecio. Además, se tiene un par de lados opuestos congruentes, por tanto, es un trapecio isósceles. Al ser trapecio es también un cuadrilátero convexo. $\square$

- El cuadrilátero $\square DEFG$ convexo tal que $\overline{DE} \cong \overline{FG}$ y $\overline{EF} \cong \overline{DG}$

  Respuesta. Se tienen que los pares opuestos de lados son congruentes y además es convexo, por tanto, es un paralelogramo, consecuentemente es convexo y un trapecio. $\square$

- El paralelogramo $\square CDEF$ tal que $\overline{CD} \cong \overline{DE}$, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, $\overline{EF} \cong \overline{FC}$ y $\overline{FC} \cong \overline{DE}$

  Respuesta. Por la hipótesis se tiene un paralelogramo con todos sus lados congruentes entre sí, por tanto, es un rombo. Es además convexo y un trapecio, como consecuencia de ser paralelogramo. $\square$

- El paralelogramo $\square ABCD$ tal que $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90$

  Respuesta. Es un rectángulo pues es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos. Es además convexo y un trapecio, como consecuencia de ser paralelogramo. $\square$

- El rombo $\square AEIO$ tal que $m\angle A = m\angle E = m\angle I = m\angle O = 90$

  Respuesta. Dado que es un rombo, entonces, es paralelogramo y sus cuatro ángulos son congruentes. Ahora, es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos, por tanto, es un rectángulo. Como sus cuatro ángulos son rectos y sus cuatro lados congruentes, entonces es un cuadrado. Como es paralelogramo es también un cuadrilátero convexo y un trapecio. $\square$

Resultado

Justificar las deducciones de las propiedades sobre la convexidad de trapecios y paralelogramos

Ilustración

1. Demuestre que la suma de las medidas de los ángulos internos de un paralelogramo suman 360.

Respuesta. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360.$$

Dado que el cuadrilátero es convexo, los vértices B y D están en el interior de los ángulos $\angle D$ y $\angle B$, luego, por el postulado de la suma de ángulos se cumple que

$$m\angle B = m\angle ABD + m\angle DBC \quad \text{y} \quad m\angle D = m\angle ADB + m\angle BDC$$

Por otro lado, por el teorema de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, aplicado sobre $\triangle BAD$ y $\triangle BCD$, se tiene que:

$$m\angle ABD + m\angle ADB + m\angle A = 180$$

$$m\angle DBC + m\angle BDC + m\angle C = 180$$

es así que

$$(m\angle ABD + m\angle ADB + m\angle A) + (m\angle DBC + m\angle BDC + m\angle C) = 360$$

del lado izquierdo de la igualdad anterior se tiene:

$$\begin{aligned}(m\angle ABD + m\angle ADB + m\angle A) + (m\angle DBC + m\angle BDC + m\angle C) = \\ (m\angle ABD + m\angle DBC) + (m\angle ADB + m\angle BDC) + m\angle A + m\angle C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m\angle ABD + m\angle DBC) + (m\angle ADB + m\angle BDC) + m\angle A + m\angle C \\ = m\angle B + m\angle D + m\angle A + m\angle C. \quad \square\end{aligned}$$

por tanto, se puede concluir que:

$$m\angle B + m\angle D + m\angle A + m\angle C = 360$$

2. Demuestre que un trapecio es un cuadrilátero convexo.

Respuesta. Sea $\square ABCD$ un trapecio tal que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Los puntos D y C están en el mismo semiplano de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ porque, de no ser así, entonces el segmento $\overline{CD}$ se intersecaría con el segmento $\overline{AB}$, lo cual es imposible pues $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, mediante un razonamiento similar se concluye que A y

B están en el mismo semiplano de la recta $\overleftrightarrow{CD}$. Los puntos B y C están en el mismo semiplano de la recta $\overleftrightarrow{AD}$ porque, se no ser así, el segmento $\overline{BC}$ y el segmento $\overline{AD}$ se intersecarían, pero esto no es posible porque lados opuestos del cuadrilátero; análogamente se puede deducir que los puntos A y D están en el mismo semiplano de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Finalmente, los extremos de cada uno de los lados del cuadrilátero están en el mismo semiplano de la recta que contiene el lado opuesto, por tanto, es convexo. $\square$

3.4.4. Circunferencias

Al culminar los temas del presente módulo los estudiantes serán capaces de:

Resultado

Diferenciar los conceptos de círculo y circunferencia

Ilustración

1. Dado cada conjunto de puntos, indique si describe un círculo, una circunferencia o ninguno. En cada caso, β es un plano.

   - El conjunto, $X = \{Q \in \beta : OQ = 5\}$, dónde $O = (0, 0)$.

     Respuesta. Es una circunferencia de centro O y radio 5, pues se toman los puntos que están a una distancia 5 del punto O. $\square$

   - El conjunto, $X = \{Q \in \beta : AQ > 3\}$, dónde $A = (1, 3)$.

     Respuesta. No se trata de ninguna, pues el círculo estaría a una distancia menor y la circunferencia a una distancia exacta, en este caso al ser mayor se tiene el exterior de la circunferencia de centro A y radio 3. $\square$

   - El conjunto, $X = \{Q \in \beta : AQ \leq 6\}$, dónde $A = (-7, 0)$.

     Respuesta. El concepto de círculo se define por una desigualdad "menor que", el de circunferencia por una igualdad, en este caso se tendría la unión de un círculo de radio 6 y centro A con una corcunferencia del mismo centro y radio. $\square$

- El conjunto, $X = \{Q \in \beta : PQ < 1\}$, dónde $P = (3, -3)$.

  Respuesta. Se define un círculo de centro P y radio 1, pues se toman todos los puntos que están a una distancia menor que uno del punto P. $\square$

Resultado

Conocer las líneas y puntos fundamentales de una circunferencia y un círculo.

Ilustración

1. Sean C la circunferencia de centro $A = (1, 1)$ y radio 3, $P = (-2, 1)$ y $Q = (1, 4)$ dos puntos en C. ¿es $\overline{PQ}$ una línea fundamental?

   Respuesta. Por definición, cualquier segmento cuyos extremos sean dos puntos de una circunferencia, se llama cuerda de la circunferencia, dado que efectivamente P y Q son puntos de C, el segmento $\overline{PQ}$ es una cuerda de C. $\square$

2. Sean C una circunferencia, A y B dos puntos en la circunferencia. Si $P \in \overline{AB}$, ¿es P el centro de la circunferencia?

   Respuesta. De las hipótesis se puede concluir que $\overline{AB}$ es una cuerda, al no tener más información con respecto a P, por contraejemplo, si $P = A$, entonces, P no puede ser el centro de la circunferencia. $\square$

3. Sean C la circunferencia de centro A y radio r, P y Q dos puntos de la circunferencia tales que $\overline{PQ}$ es su diámetro, ¿se puede concluir que $A \in \overline{PQ}$?

   Respuesta. Sí, pues, por definición de diámetro, el centro de la circunferencia está en el segmento $\overline{PQ}$. $\square$

4. Sean C la circunferencia de centro A y radio r, P y Q dos puntos de la circunferencia tales que $\overline{PQ}$ es una cuerda, ¿es la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ una línea fundamental de un círculo?

Respuesta. Dado que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ interseca en más de un punto a la circunferencia C, entonces es una recta secante. $\square$

5. Sean C el círculo de centro $A = (1, 1)$ y radio 3. Si $\overline{PQ}$ es una cuerda y $R \in \overline{PQ}$, ¿qué puede con concluir de R con respecto a C?

   Respuesta. Si R es distinto de P y Q, entonces R es un elemento del círculo, caso contrario, no se puede concluir nada con respecto al círculo C. $\square$

Resultado

Explicar la relación radio - tangente

Ilustración

1. Sean C una circunferencia de centro O y radio r, P y Q dos puntos en la circunferencia tales que $\overline{PQ}$ es un diámetro. Si una recta m que pasa por P es tangente a la circunferencia, ¿qué relación existe entre la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y la tangente?

   Respuesta. Dado que $\overline{PQ}$ es un diámetro, entonces O pertenece al segmento, es así que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ contiene también a O, de dónde, por el teorema de la caracterización de la tangente a una circunferencia, la recta tangente que pasa por P es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. $\square$

2. Sean C una circunferencia de centro P y radio r, Q un punto en C, D una circunferencia de centro R y radio r tal que Q también es un punto de D. Si la recta m pasa por Q y es tangente a ambas circunferencias, ¿qué puede concluir de C y D?

   Respuesta. De la hipótesis tenemos que la recta m pasa por Q es tangente a ambas circunferencias, es decir, las circunferencias son tangentes a una misma recta en un mismo punto, por tanto, C y D son tangentes. $\square$

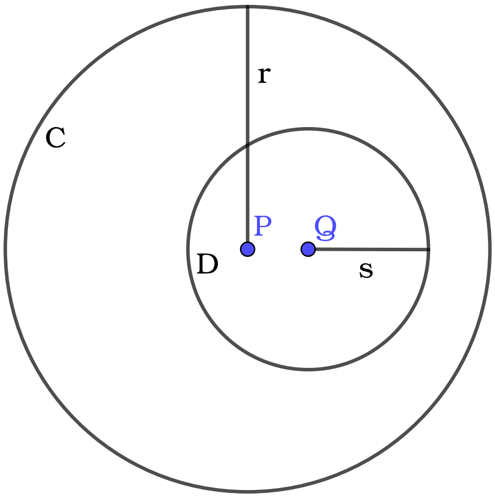
3. Dadas dos circunferencias C y D de radio r y s respectivamente tales que:

   - P es el centro de C y está en el círculo asociado a D,
   - Q es el centro de D y está en el círculo asociado a C,

- $PQ < s$,
- $r > s$,

¿se puede concluir que las circunferencias son tangentes?

Respuesta. No se puede concluir, pues se presenta la figura:



que cumple con los hipótesis y claramente las circunferencias no son tangentes. □

Resultado

Identificar los ángulos en una circunferencia

Ilustración

1. Sea C un círculo de centro P, $\overline{AB}$ una cuerda de C. ¿Es $\angle APC$ un ángulo central?

   Respuesta. Se tiene que $\overline{AB}$ es una cuerda de C, luego, podría ser un diámetro, con ello $\angle APC$ no un ángulo central, pues los tres puntos serían colineales. □

2. Sea C un círculo de centro P, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ cuerdas de C. ¿Se puede concluir que el ángulo $\angle ABC$ está inscrito en un arco de C definido a través de los puntos A, B y C?

Respuesta. Dado que los puntos A, B y C son arbitrarios, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ podrían ser diámetros, por tanto, no definirían arcos y no se puede concluir lo propuesto. □

Resultado

Comprender las definiciones de congruencia de circunferencias y cuerdas equidistantes.

Ilustración

1. Indique si las definiciones y teoremas dados a continuación son correctos, para los casos incorrectos escriba la versión correcta de ser posible.

   - Dos circunferencias son congruentes si tienen el mismo centro.

     Respuesta. La definición es incorrecta, pues, podrían tener el mismo centro, pero diferente radio, con ello no se tiene un equivalente a la definición de circunferencias congruentes. □

   - Dos cuerdas son equidistantes si los segmentos perpendiculares desde el centro de las circunferencia a las cuerdas son congruentes.

     Respuesta. La definición es correcta. □

   - Dadas dos circunferencias con el mismo radio, las cuerdas equidistantes son congruentes.

     Respuesta. El teorema es correcto, pues, si dos circunferencias tienen el mismo radio son congruentes, entonces al ser congruentes se puede concluir que las cuerdas equidistantes también son congruentes (por el teorema de cuerdas equidistantes). □

3.5. Conclusiones y recomendaciones

3.5.1. Conclusiones

Las principales conclusiones que resultan del desarrollo del presente trabajo son:

1. Algunos capítulos que se abordan en las materias de *Fundamentos de matemática* y *Geometría* en el curso de Nivelación estudian con mucho detalle conceptos que resultan poco o nada útiles para los estudios de formación básica del estudiante; así mismo, algunos conceptos requieren ser estudiados desde una nueva perspectiva con metodología y contenidos actualizados.

2. En el curso de *Fundamentos de matemática* se estudia durante un largo periodo de tiempo la "sumatoria", pero en el curso de Cálculo en una variable solamente se aplican propiedades generales que se podrían estudiar en dicho curso en lugar de hacerlo en Nivelación.

3. Se aborda también el concepto de series y su convergencia, pero una serie es el límite de una suma, por lo cual se estudiaría en el curso de cálculo en una variable, es decir, en nivelación se estudian conceptos que se abordarán formalmente en las materias de formación básica.

4. Los resultados de aprendizaje planteados permiten evaluar de manera sencilla al estudiante, pues se pueden resolver rápidamente, pero el estudiante requiere conocer y comprender adecuadamente los contenidos revisados.

3.5.2. Recomendaciones

- Realizar estudios similares con otras materias de formación básica como Programación, Física y Probabilidad y Estadística, pues son materias con alto contenido matemático, considerando que el presente trabajo se ha centrado en las materias de Cálculo y Álgebra Lineal.

- Estudiar los conocimientos requeridos en otras materias fuera de las que pertenecen al tronco común de estudios de las carreras de la EPN, con el fin de preparar adecuadamente a todos los estudiantes, pues en carreras como Ingeniería Civil e Ingeniería Mecánica requieren de conocimientos en Geometría para algunas asignaturas.
- Diseñar encuestas que permitan evaluar la utilidad de los conocimientos adquiridos en nivelación para el correcto estudio de las materias durante los estudios en carrera, dichas encuestas pueden ser llenadas al final cada semestre en las materias que se crean convenientes.
- Crear encuestas para determinar conceptos que no se estudian en nivelación y puedan ser útiles en las materias de las carreras de la EPN, siguiente un proceso similar al descrito en el punto anterior.

Capítulo A

Apéndice

A.1. Teoremas y propiedades citadas

A.1.1. Proporcionalidad

1. Proporcionalidad: Sean $a,\ b,\ c$ y d números reales positivos tales que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

tales que son una proporción, entonces:

$$ad = bc \tag{A.1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{A.2}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \tag{A.3}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \tag{A.4}$$

Referencias bibliográficas

[1] T.M. Apostol. *Calculus I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal.* Vol.1. Reverté S.A., 2001.

[2] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right.* Springer International Publishing, November 2014.

[3] Declan Kennedy, Áine Hyland, and Norma Ryan. Writing and using learning outcomes: A practical guide. 01 2007.

[4] Bernard Kolman. *Álgebra lineal.* Pearson, México, 2006.

[5] E.E. Moise and F.L. Downs. *Geometría moderna.* Addison Wesley, 1966.

[6] Germán Patricio Rojas Idrovo, Juan Carlos Trujillo Ortega, and Luis Fabián Barba Lovato. *Cálculo en una variable (Cálculo diferencial).* Escuela Politécnica Nacional, 2010.