



## PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Proyecto Interno  Proyecto Semilla  Proyecto Junior  Proyecto Multi e Inter Disciplinario

Investigación Básica  Investigación Aplicada  Investigación Pedagógica  Innovación

**DEPARTAMENTO(S):**

1. Centro de Modelización Matemática: ModeMat
2. Departamento de Matemática

**LINEA(S) DE INVESTIGACIÓN:**

1. Optimización matemática y control
2. Modelización matemática y cálculo científico

### 1 Proyecto de Investigación

**Título:** Restauración de imágenes mediante un esquema de optimización con operadores no locales de tipo fraccionario. Aplicación a imágenes satelitales.

**Resumen del proyecto** (máximo 200 palabras)

El proyecto tiene como objetivo el proponer una nueva metodología para la restauración de dominios perdidos en imágenes satelitales mediante la resolución de un problema de optimización, en el cual las restricciones están dadas en forma de ecuaciones de difusión fraccionarias. El carácter no local de este tipo de operadores permite incorporar información de sectores apartados del dominio perdido. Adicionalmente, al enmarcar las restricciones en un problema de optimización, se puede elegir los parámetros involucrados de manera óptima, a partir de un conjunto de imágenes de entrenamiento. Esto resulta de especial interés en problemas de relleno de imágenes satelitales, donde se necesita involucrar de manera óptima, información no local, para obtener un relleno adecuado de la imagen.

**Palabras clave** (4-6):

Optimización Binivel, Operadores Fraccionarios, Relleno de Dominios, Restauración de Imágenes



## 5 **Objetivos, relevancia, productos y resultados esperados de esta propuesta de investigación**

### 5.1 **Objetivos**

#### 5.1.1 **Objetivo General**

- Desarrollar una metodología basada en modelos de optimización binivel usando operadores fraccionarios para el relleno de imágenes.

#### 5.1.2 **Objetivos Específicos**

Como objetivos específicos de este proyecto tenemos:

- a. Estudiar ecuaciones de difusión no locales en dominios acotados y probar existencia y unicidad de soluciones.
- b. Plantear un problema de optimización en espacios funcionales y demostrar existencia de soluciones óptimas.
- c. Deducir un sistema de optimalidad que caracterice las soluciones óptimas.
- d. Proponer un esquema numérico de segundo orden para la resolución del problema de optimización.
- e. Aplicar el esquema teórico-numérico al procesamiento de imágenes satelitales para la predicción de cosechas.

### 5.2 **Relevancia de esta propuesta de investigación y su relación con la(s) Línea(s) de investigación asociadas.**

El proyecto es de relevancia en el área de optimización matemática, ecuaciones diferenciales y cálculo científico y cumple con los objetivos y líneas de investigación del Departamento de Matemática y del Centro de Modelización Matemática. Es importante notar que el Director del proyecto es especialista en ecuaciones diferenciales parciales no locales y los colaboradores son especialistas en análisis numérico y optimización.

### 5.3 **Productos esperados**

- a. Publicaciones científicas (obligatorio);
- b. Disertación a la Comunidad Politécnica;
- c. Proyecto de Titulación;
- d. Tesis de Grado (maestría o doctorado);
- e. Aplicación tecnológica construida o implementada;
- f. Patente presentada;
- g. Perfil de proyecto de mayor impacto científico, técnico, pedagógico o de innovación.

### 5.4 **Detalle de los resultados esperados (con relación a los objetivos)**

Al finalizar este proyecto se espera contar con los siguientes resultados y productos:

- a. Esquema metodológico que posibilite el relleno de dominios perdidos en imágenes con parámetros óptimos.
- b. Análisis matemático de las ecuaciones involucradas y del problema de control óptimo asociado.
- c. Algoritmos de segundo orden para resolver problemas de control óptimo gobernados por ecuaciones en derivadas parciales no locales de tipo fraccionario.



## 6. Descripción, metodología y cronograma de trabajo

### - Descripción del proyecto

Hoy en día, las imágenes digitales desempeñan un papel importante en la sociedad, siendo fuente de información dentro de diversas áreas como: medicina, sistemas de información geográfica, astronomía, seguridad, etc. Al estar presentes, por ejemplo, en los rayos X, tomografías computarizadas, resonancias magnéticas e imágenes satelitales, el procesamiento de imágenes es un campo de gran interés en la actualidad.

El relleno de dominios perdidos es uno de los problemas más importantes en el tratamiento digital de imágenes. Este consiste en restaurar partes perdidas de la imagen, usando, principalmente, información de los alrededores de la parte perdida. Por ejemplo, en el contexto variacional, la imagen es usualmente restaurada mediante el uso de distintos operadores de tipo local, tales como variación total, curvatura media, la elástica de Euler, entre otros (ver [CS05]).

Si bien los operadores de tipo local incorporados en los métodos variacionales o en los métodos que se basan en ecuaciones diferenciales parciales son eficientes en la restauración de dominios pequeños, estos generalmente no son de utilidad para el relleno de dominios que representan una parte importante de la imagen. Es así que, en años recientes, ha surgido interés en usar operadores no locales para el relleno de imágenes [GO08, BCM05a, BCM05b]. Este tipo de operadores, además de información local, permite incorporar información de otras partes de la imagen. A grosso modo, los píxeles perdidos son rellenados con información de la vecindad de los mismos y de partes alejadas de la imagen, pero con similar estructura cromática [BCM05b].

Por otro lado, el relleno a través de operadores no locales involucra parámetros a ser elegidos, los cuales tienen un efecto determinante en el resultado final. En años recientes se han propuesto esquemas de optimización con el objetivo de "aprender" los parámetros óptimos a partir de un conjunto de imágenes de entrenamiento [CCDIR+15, DIRSV15, DIRS13]. Este tipo de esquemas han sido estudiados para problemas de filtrado de ruido con diferentes regularizadores variacionales: TV, TGV, ICTV (ver [CCDIR+15, DIRSV15, DIRS13]).

El objetivo principal de este proyecto consiste en plantear y estudiar un problema de optimización en espacios funcionales, para la elección óptima de los parámetros involucrados en el relleno de imágenes con ecuaciones diferenciales parciales no locales. Nuestro estudio se centrará en problemas que contienen operadores no locales de tipo fraccionario. El proyecto comprenderá el análisis matemático del problema, así como su resolución computacional mediante métodos numéricos a gran escala.

Cabe destacar que desde el año 2013 el MODEMAT colabora científicamente con el Instituto Espacial Ecuatoriano. Uno de los problemas interesantes surgidos de esa colaboración es el relleno eficiente de imágenes satelitales de los terrenos. Evidentemente, la imagen contiene en un número importante de casos, partes faltantes debido a la presencia de nubes. La utilización de métodos clásicos no rinde resultados satisfactorios, por lo cual una metodología alternativa resulta necesaria en este contexto.

- Metodología y diseño de la investigación (Máximo una carilla)

### ***Ecuaciones evolutivas fraccionarias***

La idea de los métodos basados en ecuaciones diferenciales parciales para la restauración de dominios perdidos en imágenes, es hallar una solución de la ecuación diferencial de reacción-difusión no lineal, donde el término de difusión está dado por un operador fraccionario, en este caso el dominio en el cual se estudia la ecuación es justamente el dominio a restaurar y la solución del problema es la versión restaurada de la imagen inicial.

El proceso evolutivo que genera el problema, da lugar a una familia de imágenes a partir de la imagen original. A medida que el la variable temporal aumenta se espera que la solución del problema nos de una versión más simplificada de la imagen inicial.

Es importante notar, que a diferencia de los métodos tradicionales que usan operadores de difusión local, en los cuales se usa la información que se encuentra alrededor de la imagen perdida, en los problemas con operadores de difusión no local se considera la información de sectores apartados del dominio perdido, permitiéndonos tener mayor información al momento de realizar la restauración de la imagen.



- Metodología y diseño de la investigación (Máximo una carilla)

#### ***Ecuaciones evolutivas fraccionarias***

La idea de los métodos basados en ecuaciones diferenciales parciales para la restauración de dominios perdidos en imágenes, es hallar una solución de la ecuación diferencial de reacción difusión no lineal, donde el término de difusión está dado por un operador fraccionario, en este caso el dominio en el cual se estudia la ecuación es justamente el dominio a restaurar y la solución del problema es la versión restaurada de la imagen inicial.

El proceso evolutivo que genera el problema, da lugar a una familia de imágenes a partir de la imagen original. A medida que el la variable temporal aumenta se espera que la solución del problema nos de una versión más simplificada de de la imagen inicial.

Es importante notar, que a diferencia de los métodos tradicionales que usan operadores de difusión local, en los cuales se usa la información que se encuentra alrededor de la imagen perdida, en los problemas con operadores de difusión no local se considera la información de sectores apartados del dominio perdido, permitiéndonos tener mayor información al momento de realizar la restauración de la imagen.

#### ***Cálculo no local***

En años recientes se han desarrollado algunas herramientas de cálculo no local (ver [DG13], [DGLZ13]) que resultan indispensables para el tratamiento de los problemas de control óptimo bajo estudio. En particular se ha estudiado los espacios funcionales donde se pueden adaptar las formulaciones variacionales para problemas elípticos fraccionarios, más aún se han establecido relaciones con los espacios de Sobolev fraccionarios, los cuales están fuertemente ligados a los operadores que contienen derivadas fraccionarias.

#### ***Control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales***

El problema fundamental de la teoría de control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales consiste en hallar una función de control que minimice un cierto funcional de costo, sujeto a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. El control puede estar involucrado en el lado derecho de las ecuaciones, la condición de borde, los coeficiente de la EDP o la condición inicial. Adicionalmente, se pueden incluir restricciones adicionales para el control o para el estado, sean estas de tipo integral o puntuales.

Mediante la utilización de elementos de optimización en espacios funcionales, teoría de EDP y análisis convexo, la teoría de control óptimo posibilita el estudio algunos aspectos del problema y de sus soluciones, tales como: existencia de soluciones óptimas, condiciones necesarias de primer orden, existencia de multiplicadores de Lagrange, condiciones necesarias y suficientes de segundo orden, regularidad de las variables y multiplicadores, entre otras.

A la par de estos desarrollos teóricos, también ha tenido lugar en los últimos años el desarrollo de métodos numéricos para la aproximación de los problemas de control. Métodos de descenso, de Newton, SQP, etc. han sido desarrollados para este propósito en combinación con diferentes estrategias de discretización, demostrando su utilidad en la solución de problemas reales (ver [DIRSV15]).

- Bibliografía

[BCM05a] Buades, Antoni and Coll, Bartomeu and Morel, Jean-Michel (2005), A non-local algorithm for image denoising, Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference. Volumen 2, 60-65.

[BCM05b] Buades, Antoni and Coll, Bartomeu and Morel, Jean-Michel (2005), A review of image denoising algorithms, with a new one, Multiscale Modeling & Simulation. Volumen4, 490-530.

[CS05] Chan, Tony F and Shen, Jianhong Jackie (2005), Image processing and analysis: variational, PDE, wavelet, and stochastic methods, Siam.

[DG13] D'Elia, Marta and Gunzburger, Max (2013), The fractional Laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator, Computers & Mathematics with Applications, Volumen 66, 1245--1260.

[DGLZ13] Du, Qiang and Gunzburger, Max and Lehoucq, RB and Zhou, Kun (2013), A nonlocal vector calculus, nonlocal volume-constrained problems, and nonlocal balance laws, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Volumen 23, 493--540.

[GO08] Gilboa, Guy and Osher, Stanley (2008), Nonlocal operators with applications to image processing, Multiscale Modeling & Simulation, Volumen 7.



[CCDIR+15] Calatroni, Luca and Chung, Cao and De los Reyes, Juan Carlos and Schonlieb, Carola-Bibiane and Valkonen, Tuomo (2015), Bilevel approaches for learning of variational imaging models, arXiv preprint arXiv:1505.02120.

[DIRSV15] De los Reyes, Juan Carlos and Schonlieb, Carola-Bibiane and Valkonen, Tuomo (2015), The structure of optimal parameters for image restoration problems, arXiv preprint arXiv:1505.01953.

[DIRS13] De los Reyes, Juan Carlos and Schonlieb, Carola-Bibiane (2013), Image denoising: Learning the noise model via nonsmooth PDE-constrained optimization, Inverse Problems & Imaging, Volumen 7.

**6.2 Cronograma de trabajo anual: (Descripción)**

- Para la elaboración del cronograma de ejecución del proyecto se sugiere considerar el tiempo para la adquisición de equipos, reactivos y materiales de laboratorio.

**Primer Año**

Actividad	Porcentaje de avance por mes						TOTAL
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	
Recopilación de información	5%	5%					10%
Estudio de la teoría		10%	10%				20%
Formulación y resolución del modelo fraccionario			10%	20%	10%	10%	50%
Desarrollos de técnicas de restauración de dominios perdidos					10%	10%	20%
<b>TOTAL</b>	5%	15%	20%	20%	20%	20%	100%

**Segundo Año 2**

Actividad	Porcentaje de avance por mes						TOTAL
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	
Formulación y resolución del modelo fraccionario	5%	5%	5%	5%			20%
Desarrollos de técnicas de restauración de dominios perdidos	5%	5%	5%	5%	10%		30%
Desarrollo y mejoramiento de algoritmos de optimización de parámetros	5%	5%	10%	10%	10%		40%
Realización del documento escrito					5%	5%	10%
<b>TOTAL</b>	15%	15%	20%	20%	25%	5%	100%

**7 Fechas de inicio y fin**

*Inicio: 1 de febrero de 2016*  
*Fin: 1 de febrero de 2018*



**8 Tiempo de dedicación de docentes, infraestructura, equipos y fondos adicionales.**

**8.1 Tiempo máximo de dedicación semestral del Director del proyecto, de los docentes participantes y otros colaboradores.**

*El tiempo de dedicación máximo será de acuerdo al tipo de proyecto:*

<i>Proyecto</i>	<i>Director</i>	<i>Colaboradores</i>
<i>PII y PIS</i>	<i>16 HSS</i>	<i>8 HSS</i>
<i>PIJ y PIMI</i>	<i>20 HSS</i>	<i>10 HSS</i>

- Director: Miguel Yangari, 14 horas semanales
- Colaboradores EPN:
  - Juan Carlos de los Reyes: 10 horas semanales
  - Pedro Merino, 2 horas semanales
  - Sergio González, 2 horas semanales
- Colaboradores Externos:
  - Marta D'Elia: 2 horas semanales
  - Carola Bibiane Schonlieb: 2 horas semanales

**8.2 Infraestructura y equipos**

- Indicar la infraestructura y equipos **disponibles** para la ejecución del proyecto

El Centro de Modelización Matemática cuenta con un sistema blade, con 600 cores, paralelizado para tareas de cálculo científico.

**8.3 Breve justificación del equipo requerido**

- Justificar la infraestructura y equipos **solicitados** para la ejecución del proyecto

La compra de un Blade HPC permitirá potenciar el servidor del que dispone el Laboratorio de Cálculo Científico del MODEMAT, para poder realizar los cálculos en paralelo involucrados en el proyecto, tanto en lo que respecta a simulación como a optimización. Además se necesitará comprar dos computadores portátiles y dispositivos de almacenamiento.

**8.4 Fondos Adicionales**

- Otros fondos de otros organismos (si los hubiere)

No se cuenta con fondos adicionales

**9 Presupuesto estimado para la ejecución del presente proyecto (anual)**

- Los costos para la elaboración del presupuesto estimado no deben incluir IVA.
- Las maquinarias y equipos deberán tener una proforma local con un representante autorizado en el país.
- En el caso de PIMI, se deberá aclarar en cual departamento permanecerán las maquinarias y equipos

**Primer Año**

Lista de ítems	Cantidad solicitada (US \$)	Porcentaje (%)
1. Contratación Servicios Personales por Contrato Ayudantes de Investigación	10000	12.5
<b>Subtotal</b>		



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**  
**VICERECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL**

2. Maquinaria y Equipos		
<b>Subtotal</b>	42000	52.5
3. Reactivos y materiales de laboratorio		
<b>Subtotal</b>		
4. Literatura especializada		
<b>Subtotal</b>		
5. Viajes técnicos y de muestreo		
<b>Subtotal</b>		
6. Presentación de ponencias en congresos internacionales y publicaciones	8000	10
<b>Subtotal</b>		
<b>TOTAL PRESUPUESTO</b>	<b>60000,00 + IVA</b>	<b>100</b>

<u>Segundo Año</u>		
Lista de ítems	Cantidad solicitada (US \$)	Porcentaje (%)
7. Contratación Servicios Personales por Contrato <i>Ayudantes de Investigación</i>	10000	12.5
<b>Subtotal</b>		
8. Maquinaria y Equipos		
<b>Subtotal</b>		
9. Reactivos y materiales de laboratorio		
<b>Subtotal</b>		
10. Literatura especializada		
<b>Subtotal</b>		
11. Viajes técnicos y de muestreo		
<b>Subtotal</b>		
12. Presentación de ponencias en congresos internacionales y publicaciones	10000	12.5
<b>Subtotal</b>		
<b>TOTAL PRESUPUESTO</b>	<b>20000,00 + IVA</b>	<b>100</b>

<b>10</b>	<b>Lugar y Fecha / Firma del Director del Proyecto</b>	
	Quito, 10 de julio del 2015  Nombre: Miguel Angel Yangari Sosa CC: 1715020309	<b>Firma del Director</b>

<b>DECLARACION DEL JEFE DE DEPARTAMENTO</b>	
Esta propuesta ha sido aprobada por el Consejo del Departamento/Instituto ..... <b>al que pertenece el Director del Proyecto</b> , en Sesión del ..... mediante Resolución No. .... y las instalaciones, incluyendo personal, edificios, equipo y recursos financieros están a disposición del aplicante de acuerdo con las especificaciones que se encuentran en esta aplicación.	
_____ JEFE DEL DEPARTAMENTO/INSTITUTO Nombre:	_____ Lugar y fecha



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**  
**VICERECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL**

---

---

CC: