



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
VICERECTORADO DE  
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL**



**PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN (Internos, Semilla, Inter y Multidisciplinarios, Externos):**

**Área del proyecto:** Ciencias Básicas  Ciencias Aplicadas

**FACULTAD:** Facultad de Ciencias

**DEPARTAMENTO:** Departamento de Matemática

**LINEA DE INVESTIGACIÓN:** Modelización Matemática y Cálculo Científico  
(verificable en el SAEW)

**1 Proyecto de Investigación**

**Título:** Propagación de frentes en sistemas de reacción difusión fraccionarios.

**Resumen del proyecto (máximo 200 palabras)**

En el presente proyecto se tratará de demostrar que las soluciones de un sistema de ecuaciones de reacción difusión que contiene derivadas fraccionarias se propaga exponencialmente en el tiempo cuando la condición inicial decae más lento que una potencia. Además se considerará únicamente que las soluciones son soluciones débiles. Este trabajo es un complemento a los estudios realizados por X. Cabré, J-M. Roquejoffre, A-C. Coulon, P. Felmer y M. Yangari, en los cuales se estudian sistemas y problemas similares cuando el decaimiento de la condición inicial es rápido.

En la actualidad el estudio de sistemas fraccionarios ha tomado mucha importancia pues este tipo de problemas permiten el estudio de un mayor número de fenómenos relacionados con procesos Brownianos y en forma general en procesos de Levy, los cuales son usados para modelar fenómenos en los cuales se tiene difusión anómala, es decir fenómenos que no siguen una distribución normal.

**Palabras clave (3-5):** Propagación exponencial, sistemas de reacción difusión, Laplaciano fraccionario, Sistemas cooperativos.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
VICERECTORADO DE  
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL



3 **Objetivos, hipótesis y resultados esperados de esta propuesta de investigación**

- **Objetivos**

El objetivo principal de este trabajo de investigación es demostrar que las soluciones de un sistema cooperativo de reacción difusión con derivadas fraccionarias se propaga en el tiempo exponencialmente cuando la condición inicial decae en infinito lentamente. Además uno de los objetivos principales es hallar el resultado antes mencionado para soluciones débiles, lo cual es mucho más complicado que considerar soluciones clásicas ya que en este caso las soluciones satisfacen únicamente la formación de Duhamel asociada al sistema.

- **Hipótesis**

En la actualidad existen numerosos resultados acerca de sistemas de ecuaciones diferenciales cooperativos de reacción difusión cuando se considera simplemente una difusión standard, es decir cuando el fenómeno se modela por medio de laplacianos, recientemente en estudios realizados por X. Cabré, J-M Roquejoffre, A-C Coulon, P. Felmer y M. Yangari se ha empezado a generalizar estos resultados cuando se tiene difusiones anómalas, es decir cuando en el modelo matemático se usan Laplacianos fraccionarios, los cuales son operadores no locales, lo cual permite ampliar en gran medida los posibles fenómenos que son modelados por medio de la formulación antes mencionada.

Estos estudios previos, nos da una perspectiva de los posibles métodos y de la teoría que podemos utilizar para afrontar nuestro problema, más aún, nos dan una idea de los posibles resultados que podemos obtener cuando se trabaja con difusión fraccionaria y condiciones iniciales que decaen lentamente.

Como herramientas básicas tenemos la teoría de semigrupos fuertemente continuos, los cuales nos permitirá probar existencia y unicidad de soluciones, además se hará uso de las sub y supersoluciones halladas por A-C Coulon y M. Yangari para probar cotas superiores e inferiores, los cuales nos permitirán localizar la posición de los conjuntos de nivel de las soluciones y así probar que su velocidad es exponencial.

- **Resultados esperados**



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
VICERECTORADO DE  
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL**



Se espera probar que los conjuntos de nivel y por tanto las soluciones de un sistema cooperativo con difusión anómala se propaguen exponencialmente rápido, donde el exponente del movimiento dependa del Jacobiano evaluado en cero de la no linealidad y del índice más pequeño de los Laplacianos fraccionarios que intervengan en el sistema. Además se espera probar estos resultados para soluciones débiles, lo cual nos da un resultado mucho más fuerte que si se trabaja directamente con soluciones clásicas ya que de esta manera se debe pedir menos restricciones sobre la condición inicial.

**- Potenciales Usuarios**

Los usuarios que principalmente se beneficiarán de los resultados aquí encontrados, serán todas las personas que realicen investigación o que estén relacionados con las áreas de la biomatemática, biología, medio ambiente, etc. Ya que este tipo de problemas son muy frecuentes en los modelos utilizados para estudiar fenómenos naturales, como son por ejemplo la propagación de enfermedades, modelos poblacionales, propagación de contaminantes en el ambiente, etc.

**4 Relevancia de esta propuesta de investigación con los objetivos científicos del departamento y su Línea de Investigación.**

El proyecto aquí presentado sería una gran contribución al desarrollo científico del Departamento de Matemática y obviamente de la universidad, ya que uno de los puntos fuertes que este tiene, es trabajar en temas relacionados con el análisis y las ecuaciones diferenciales, áreas en las cuales está basado este proyecto. En este ámbito, la propuesta de investigación aquí presentada entraría en la línea de investigación general denominada Modelación Matemática y Cálculo científico.

**5 Descripción del proyecto, metodología, cronograma de trabajo y justificación del equipo requerido**

**- Descripción del proyecto (Máximo una carilla)**

Este proyecto se encuentra motivado en parte, por los importantes avances en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales no lineales y cálculo fraccionario. Además, una gran variedad de fenómenos de difusión son modelados usando derivadas fraccionarias, por ejemplo: en dinámicas de absorción de proteínas en las células, movimiento de bacterias, transporte de contaminantes en medios líquidos, propagación o dispersión de enfermedades, entre otros.

Desde el punto de vista matemático, estos problemas se transforman en comprender el comportamiento asintótico de los frentes de propagación de las soluciones del sistema de reacción-difusión fraccionario.

$$\begin{aligned} \partial_t u_k + (-\Delta)^{\alpha_k} u_k &= f_k(u) & t > 0, x \in \mathfrak{R} \\ u_k(0, x) &= u_{0,k}(x) & x \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
VICERECTORADO DE  
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL



donde  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $\alpha_k \in (0, 1)$  y  $\alpha_m = 1$  si  $k = 1, \dots, m-1$ , como hipótesis generales se supondrá que al menos una de las condiciones iniciales  $u_{0,k}(x)$  decae lentamente y las otras decaen más rápido que una potencia, además se asumirá que las funciones  $f_k(u)$  satisfacen un esquema cooperativo. Recordemos que cuando  $\alpha_m = 1$ , el laplaciano fraccionario coincide con la segunda derivada, por tanto la ecuación se transforma en una ecuación de reacción difusión estándar.

Este sistema nos permitirá comprender el comportamiento asintótico de los frentes de propagación, los cuales se espera se comporten en función del orden del laplaciano fraccionario. Este trabajo estará basado principalmente en los artículos "Fast Propagation for Fractional KPP Equations with Slowly Decaying Initial Conditions." realizado por P. Felmer y M. Yangari y "Exponential propagation for fractional reaction-diffusion cooperative systems with fast decaying initial conditions" realizado por A-C Coulon y M. Yangari.

- Metodología y diseño de la investigación (Máximo una carilla)

El presente trabajo de investigación se realizará luego de un exhaustivo estudio de los problemas basados en semigrupos fuertemente continuos como los usados en [3], [4],[6], los cuales han sido usados con éxito para demostrar existencia y unicidad de las soluciones de problemas de reacción difusión tanto standard como fraccionarios.

Para lograr localizar la posición de los conjuntos de nivel de las soluciones se deberá estudiar métodos basados en el uso de principios del máximo para, por medio de sub y super soluciones poder acotar la solución del sistema.

Una vez, teniendo en claro toda la teoría que puede ser usada para enfrentar el problema se tratará de aplicar estos conocimientos para la resolución de los sistemas de ecuaciones fraccionarias en presencia de difusión anómala. Por último y si es necesario se deberá desarrollar nuevos métodos y técnicas, con la finalidad de cumplir con las expectativas planteadas para el problema.

- Bibliografía

1. D.G. Aronson and H.F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusions arising in population genetics, Adv. Math. 30 (1978), 33-76.
2. M. Bonforte and J. Vazquez. Quantitative Local and Global A Priori Estimates for Fractional Nonlinear Diffusion Equations. Preprint, ArXiv:1210.2594.
3. X. Cabré and J. Roquejoffre. The influence of fractional diffusion in Fisher-KPP equation. Preprint, arXiv:1202.6072v1, (2012).
4. X. Cabré, A. C. Coulon, and J. M. Roquejoffre. Propagation in Fisher-KPP type equations with fractional diffusion in periodic media. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350 (2012), no. 19-20, 885-890.
5. A.-C. Coulon and J.-M. Roquejoffre, Transition between linear and exponential propagation in Fisher-KPP type reaction-diffusion equations, Arkiv (2011), to appear in Communications in Partial Differential Equations.
6. A.-C. Coulon and M. Yangari. Exponential propagation for fractional reaction-diffusion cooperative systems with fast decaying initial conditions. Artículo enviado.
7. P. Felmer and M. Yangari. Fast Propagation for Fractional KPP Equations with Slowly Decaying Initial Conditions. SIAM J. Math. Anal., 45(2), 662-678.



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
VICERECTORADO DE  
INVESTIGACIÓN Y PROYECCIÓN SOCIAL**



8. A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky and N.S. Piskunov, Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application á un problème biologique, Bull. Univ. État Moscou Sér. Inter. A 1 (1937) 1-26.
9. M. Lewis, B. Li and H. Weinberger. Spreading speed and linear determinacy for two-species competition models. J. Math. Biol. 45, 219-233 (2002).
10. B. Li, H. Weinberger and M. Lewis. Spreading speeds as slowest wave speeds for cooperative systems. Math. Biosci. 196, 82-98 (2005).

Se recomienda que el proyecto, su metodología y diseño de la investigación, este sustentada en referencias bibliográficas actualizadas y que en el cronograma de ejecución del proyecto se considere el tiempo que toma la adquisición de equipos, reactivos y materiales de laboratorio.

Cronograma de trabajo anual:

Año 1

Actividad	MESES					
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12
Recopilación de la información						
Estudio de la teoría						
Realización de la investigación						
Realización del documento escrito						
Correcciones						
Presentación final						

- Justificación del equipo requerido

El equipo requerido para este proyecto son únicamente las oficinas de los docentes, un computador de escritorio, un computador portátil y dispositivos de almacenamiento, además del material bibliográfico necesario para realizar la investigación.

**6 Fecha de inicio**

4 de agosto de 2014

**7 Tiempo dedicación docentes, infraestructura, equipamientos y fondos adicionales.**

- Tiempos de dedicación semestral del Director de proyecto, de los docentes participantes y otros colaboradores. (Máximo 200 horas por semestre para el Director y 100 horas por semestre para los docentes colaboradores)

El tiempo que dedicará a la investigación el director de proyecto será de 200 horas por semestre.

- Infraestructura y equipos disponibles para la ejecución del proyecto

La infraestructura únicamente estará compuesta por las oficinas de los docentes, además se necesitará comprar una computadora de escritorio y una computadora portátil, además de dispositivos de almacenamiento.