

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN INTERNOS SIN
FINANCIAMIENTO O AUTOGESTIONADOS
ANEXO 1 - DATOS INFORMATIVOS

Fecha de presentación (dd/mm/aa): 13/02/2019

Título del proyecto: Soluciones viscosas de problemas que involucran operadores no locales.

TIPOS DE INVESTIGACIÓN

Investigación básica

Investigación aplicada

DEPARTAMENTO(S) Y/O INSTITUTO(S):

1. Departamento de matemática

LÍNEA(S) DE INVESTIGACIÓN (verificable en el SAEW):

1. Análisis Matemático y Ecuaciones Diferenciales ✓

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN INTERNOS SIN
FINANCIAMIENTO O AUTOGESTIONADOS
ANEXO 2 – DETALLES DE LA PROPUESTA

Investigación Básica

Investigación Aplicada

DEPARTAMENTO(S) Y/O INSTITUTO(S):

1. Departamento de Matemática

LINEA(S) DE INVESTIGACIÓN:

1. Análisis Matemático y Ecuaciones Diferenciales

DISCIPLINA CIENTÍFICA (*Marque X, solamente una opción*)

Ciencias Naturales y Exactas;	X
Ingeniería y Tecnologías;	
Ciencias Médicas;	
Ciencias Agrícolas;	
Ciencias Sociales;	
Humanidades	

OBJETIVO SOCIOECONÓMICO (*Marque X, solamente una opción*)

Exploración y explotación del medio terrestre;	
Ambiente;	
Exploración y Explotación del espacio;	
Transporte, telecomunicaciones y otras infraestructuras;	
Energía;	
Producción y tecnología industrial;	
Salud;	
Agricultura;	
Educación;	
Cultura, ocio, religión y medios de comunicación;	
Sistemas políticos y sociales, estructuras y procesos;	
Defensa;	
Avance general del conocimiento: I+D financiada con los Fondos Generales de Universidades (FGU);	X
Avance general del conocimiento: I+D financiados con otras fuentes.	

1 Proyecto de Investigación

Título: Soluciones viscosas de problemas que involucran operadores no locales.

Resumen del proyecto (máximo 200 palabras)

El proyecto tiene como objetivo el estudio de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que involucren operadores no locales, como son por ejemplo el operador Laplaciano fraccionario definido sobre todo R^n o el operador p-laplaciano fraccionario definido sobre dominios acotados. Nuestra investigación se centrará en el estudio de la existencia, unicidad y propiedades cualitativas de las soluciones viscosas de estos problemas.



Palabras clave (4-6): p-laplaciano, operadores no locales, soluciones viscosas, operadores de Lévy.

2 Objetivos, relevancia, productos y resultados esperados de esta propuesta de investigación

2.1 Objetivos

2.1.1 Objetivo General

Estudio de problemas en ecuaciones diferenciales parciales que involucren operadores no locales.

2.1.2 Objetivos Específicos

- a. Establecer formulaciones viscosas adecuadas que permitan el uso del operador Laplaciano fraccionario definido sobre todo R^n o el operador p-laplaciano fraccionario definido sobre dominios acotados
- b. Estudiar, en el marco de soluciones viscosas, problemas en ecuaciones diferenciales que involucren el Laplaciano fraccionario.
- c. Estudiar, en el marco de soluciones viscosas, problemas en ecuaciones diferenciales que cuyos términos de difusión estén dados por p-laplacianos fraccionarios.

2.2 Detalle de los resultados esperados (con relación a los objetivos)

- a. Obtener formulaciones viscosas adecuadas para el estudio de problemas no locales.
- b. Demostrar la existencia, unicidad y propiedades cualitativas de las soluciones viscosas de problemas en ecuaciones diferenciales que involucren Laplacianos fraccionarios definidos en todo R^n .
- c. Demostrar la existencia y unicidad de soluciones viscosas de problemas en ecuaciones diferenciales que cuyos términos de difusión estén dados por p-laplacianos fraccionarios definidos en dominios acotados.

3 Relevancia de la propuesta de investigación y su relación con la(s) líneas de investigación

El proyecto es de relevancia en el área de análisis matemático y ecuaciones diferenciales parciales, pues cumple con los objetivos y líneas de investigación del Departamento de Matemática, además los tópicos que se abordan en el proyecto, como son el estudio cualitativo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no locales, son problemas de investigación actuales y de gran interés en el ámbito científico internacional.

4 Productos esperados (marcar con una "X" al menos uno de los productos no señalados)

Tipo de Producto:	Marcar con una "X"
a. Disertación a la Comunidad Politécnica (obligatorio);	X
b. Presentación de un artículo en formato de la Revista Politécnica (obligatorio)	X
c. Proyecto de Titulación;	X
d. Aplicación tecnológica construida o implementada;	
e. Patente presentada;	



f. Perfil de proyecto de mayor impacto científico, técnico, pedagógico o de innovación.	X
g. Publicaciones científicas indexada en SCIMAGO-SCOPUS/WoS/SCIELO/Latindex Catálogo o un artículo en congreso indexado en SCOPUS.	X

5	Descripción y metodología y diseño del proyecto
---	--

5.1 Descripción, metodología y diseño del proyecto

El proyecto de investigación que se propone realizar está basado en el estudio de la existencia, unicidad y comportamiento cualitativo de soluciones viscosas para problemas que involucran operadores no locales.

Descripción:

Problemas no locales

En el año 1825 el matemático Abel introduce por primera vez el concepto de ecuación integral, el cual es entendido como una ecuación en la cual la función desconocida aparece bajo el signo de integración, dando así inicio a una amplia línea de investigación dentro de la matemática.

En el año 1912 el matemático V. Volterra estudia el fenómeno del crecimiento de las poblaciones y realiza una conexión entre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones integrales [1], estos problemas son conocidos como ecuaciones integro-diferenciales o no locales. Los aportes a esta área han sido significativos, podemos nombrar por ejemplo los realizados por P.-L. Lions y M. Crandall, quienes al tratar con la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizan la idea de solución de una EDP [2], tal generalización se conoce como solución viscosa de una EDP, las cuales se relacionan directamente con problemas de control de EDP's y de optimización. Luego, los mismos autores junto a H. Ishii tratan las soluciones viscosas para ecuaciones diferenciales de segundo orden. [3]. Siguiendo con esa línea G. Barles y C. Imbert estudian las soluciones viscosas para ecuaciones no locales del tipo elíptico [4] (véase también [5]).

Recientemente, dentro del marco del proyecto PIJ 15-22, Erwin Topp y Miguel Yangari en [6] y [7] estudian existencia, unicidad y comportamiento asintótico de soluciones viscosas para ecuaciones y sistemas de Hamilton-Jacobi del tipo parabólico que involucran operadores fraccionarios, la novedad de estos trabajos es la incorporación de derivadas temporales con memoria como es la derivada fraccionaria de Caputo.

Por el lado del estudio de soluciones viscosas para problemas no locales que involucran operadores p-laplacianos tenemos el trabajo seminal de H. Ishii y G. Nakamura [8], donde hacen una primera aproximación de una formulación viscosa para este tipo de operadores, para otros trabajos relacionados a problemas parabólicos ver [9], [10].

En el presente trabajo de investigación se pretende profundizar en el estudio de los problemas que involucran operadores no locales, como por ejemplo son los operadores p-laplaciano fraccionario en dominios acotados y los operadores laplacianos fraccionarios definidos en R^n , estudiando así la existencia, unicidad y comportamiento cualitativo de las soluciones viscosas de estos problemas. Es importante mencionar la dificultad de cálculo y de análisis en el problema propuesto, pues la incorporación de operadores no locales (integro-diferenciales) conlleva a la aparición de singularidades en las ecuaciones.

Metodología y diseño del proyecto:

Problemas no locales

En el marco de las soluciones viscosas, un primer tipo de problema que se estudiará en este proyecto, son sistemas de la forma

$$F_i(x, Du_i, Du_i, I(u_i)) = f_i(u)$$



para $i=1, \dots, m$, donde $u = (u_1, \dots, u_m)$, el operador Hamiltoniano F_i y f_i son funciones continuas (problemas totalmente no lineales) cuyas hipótesis específicas serán obtenidas en el transcurso del proyecto, además consideramos el operador Laplaciano fraccionario definido por:

$$I(u_i) := (-\Delta)^\alpha u_i(x) = p.v. \int_{R^n} [u_i(x) - u_i(y)] |x - y|^{-n-\alpha} dz$$

donde $\alpha \in (0, 2)$, es posible considerar generalizaciones de este operador, las cuales serán analizadas en este proyecto. También consideraremos sistemas de ecuaciones que involucran el operador p-laplaciano fraccionario dado por

$$I u_i(x) = p.v. \int_{B(0, \rho(x))} (p - \alpha) |z|^{-n-\alpha} |u_i(x+z) - u_i(x)|^{p-2} (u_i(x+z) - u_i(x)) dz$$

donde $0 < \rho(x) < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, Ω es un abierto y acotado de R^n y $\alpha < p$.

El estudio de este tipo de problemas comenzará con establecer hipótesis de regularidad sobre las funciones F_i y f_i , para de esta forma obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones y más aún poder demostrar un principio de comparación para estos tipos de problemas.

El importante notar, que al considerar ecuaciones totalmente no lineales, se estará abordando una cantidad bastante grande de problemas, como por ejemplo formulaciones tipo Bellman, tipo Isaacs, problemas con gradiente coercivo, etc. Cabe notar que los resultados obtenidos en este proyecto no solo serán de interés en el ámbito del análisis matemático y ecuaciones diferenciales, sino también tendrá impacto en áreas como control de EDP'S, teoría de juegos, procesos estocásticos como por ejemplo Procesos de Levy, movimientos Brownianos anómalos, etc.

Referencias bibliográficas

- [1] V. Volterra. (1912). *Sur les équations integro-differentielles et leurs applications*. Uppsala: Almqvist & Wiksell.
- [2] G. Crandall & P.-L. Lions. (1983). *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Estados Unidos: American Mathematical Society.
- [3] G. Crandall & P.-L. Lions & H. Ishii. (1992). *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Estados Unidos: American Mathematical Society.
- [4] G. Barles & C. Imbert, (2008). Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited, *Ann. Inst. H.Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(3), 567–585.
- [5] N. Katzourakis, *An Introduction to Viscosity Solutions for Fully Nonlinear PDE with Applications to Calculus of Variations in L1*, Springer, 2015.
- [6] E. Topp & M. Yangari. (2017). Existence and Uniqueness for Parabolic Problems with Caputo Time Derivative. *J. Differential Equations*, 262, 6018–6046.
- [7] E. Topp & M. Yangari. (2018). Weakly coupled systems of parabolic Hamilton-Jacobi equations with Caputo time derivative. *Nonlinear Differential Equations and Applications-NoDEA*, 25(5). DOI: 10.1007/s00030-018-0532-8.
- [8] H. Ishii & G. Nakamura, (2010). A class of integral equations and approximation of p-Laplace equations. *Calc. Var.* 37, 485–522
- [9] F. Andreu, J.M. Mazón, J. Rossi & J. Toledo, (2008). A nonlocal p-Laplacian evolution equation with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.* 40(5), 1815–1851.
- [10] F. Andreu, J.M. Mazón, J. Rossi & J. Toledo, (2008). A nonlocal p-Laplacian evolution equation with Neumann boundary conditions. *J. Math. Pures Appl.* 90, 201–227

6 | Infraestructura, equipos y fondos adicionales.

6.1 Infraestructura y equipos

Al ser un proyecto teórico de matemática, la infraestructura necesaria serán las oficinas de los docentes en el Departamento de Matemática, equipadas con computadores de escritorio o portátiles.

6.2 Breve justificación del equipo requerido



Puesto que el presente proyecto no tiene financiamiento, no se requiere la compra de ningún equipo. Se hará uso de los ya existentes en las oficinas de los profesores involucrados en el proyecto.

6.3 Fondos Adicionales

No contamos con financiamiento adicional.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN INTERNOS SIN
FINANCIAMIENTO O AUTOGESTIONADOS
ANEXO 4 - DECLARACIÓN

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Investigación básica

Investigación aplicada

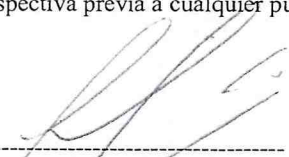
TÍTULO DEL PROYECTO

Soluciones viscosas de problemas que involucran operadores no locales.

DECLARACIÓN DEL DIRECTOR DEL PROYECTO

El equipo de investigadores, representado por el Director del Proyecto declara lo siguiente:

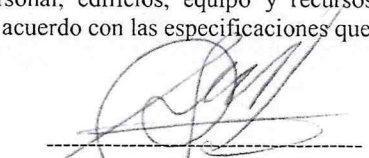
- Que el presente proyecto es una creación original de mi autoría y del equipo de investigadores, y por tanto asumimos la completa responsabilidad legal en caso de que un tercero alegue la titularidad de los derechos intelectuales del proyecto, exonerando a la EPN de cualquier acción legal que se derive por esta causa.
- Que el presente proyecto no ha sido presentado en ninguna convocatoria de otra institución pública o privada. El incumplimiento será causal para que el proyecto no sea tomado en consideración.
- Que todos los bienes adquiridos en proyecto permanecerán bajo la custodia y responsabilidad del director de proyecto durante la ejecución del mismo.
- Que si el proyecto genera algún producto o procedimiento susceptible de obtener derechos de propiedad intelectual, de los cuales se deriven beneficios, aceptamos que éstos serán compartidos entre los investigadores y la institución o las instituciones participantes en el proyecto, conforme a lo establecido en el COESC.
- Que el equipo de investigadores y/o instituciones participantes se comprometen a mantener la confidencialidad de la información si ésta podría ser susceptible de protección por patentes, y solicitar la valoración de propiedad intelectual respectiva previa a cualquier publicación o difusión.


Firma del Director del Proyecto
Nombre: Miguel Yangari, Ph.D
C.I.: 1715020309

DECLARACIÓN DEL JEFE DE DEPARTAMENTO

Esta propuesta ha sido aprobada y avalada por el Consejo del Departamento de *Matemática*, en sesión del día *15/02/2019* mediante resolución No. *CDM-2019-013*

Las instalaciones, incluyendo personal, edificios, equipo y recursos financieros, están a disposición del proponente y sus colaboradores de acuerdo con las especificaciones que se encuentran en esta propuesta.


Firma del Jefe del Departamento
Nombre: *Diego Escalante*
C.I.: *1712025335*

